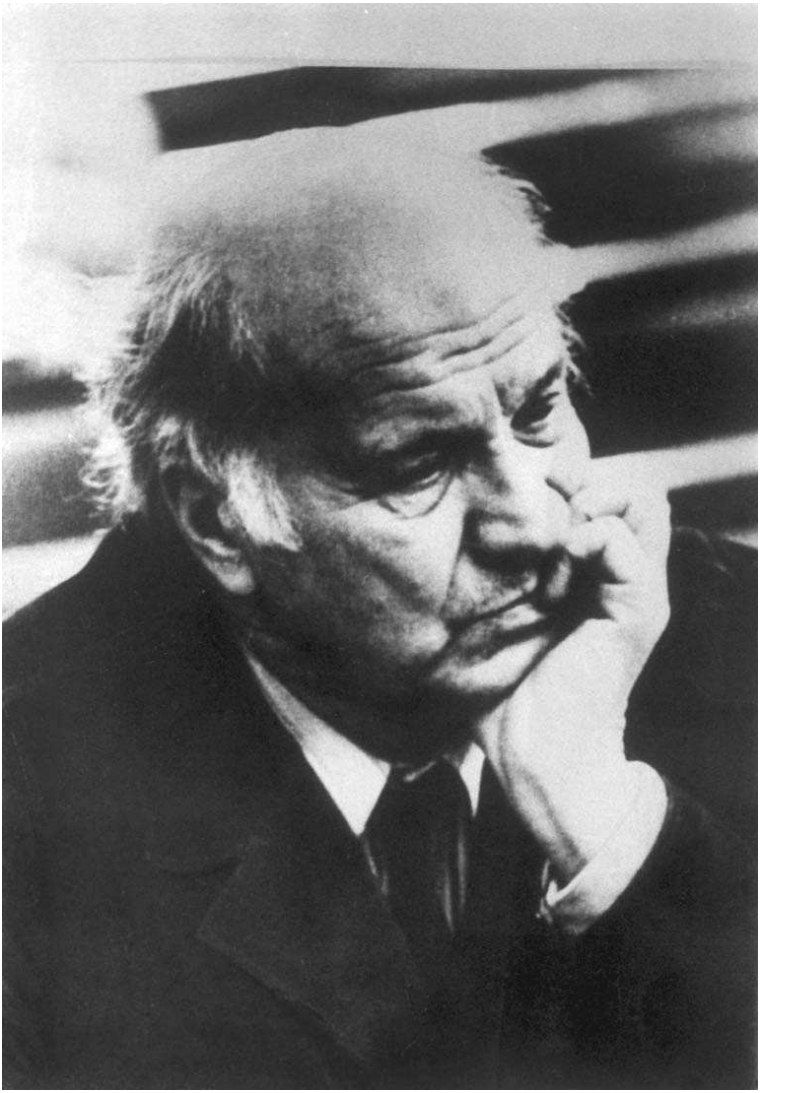
УПРУГОСТЬ И НЕУПРУГОСТЬ

ELASTICITY AND ANELASTICITY



Алексей Антонович Ильюшин
20.01.1911 — 31.05.1998

Алексей Антонович Ильюшин — выдающийся российский ученый-механик XX века.

Создатель теории упругопластических процессов и термодинамики МСС с мерами необратимости и повреждаемости, один из основателей современной теории определяющих соотношений механики сплошной среды. Автор научных изобретений и открытий, основатель научных школ в механике, руководитель ответственных государственных научно-технических проектов. Основные труды: «Пластичность» (1948 г.; переиздана в 2005 г. в юбилейной серии «Классический университетский учебник»), «Пластичность. Основы общей математической теории» (1963), «Механика сплошной среды» (1971, 1978, 1990).

Член-корреспондент Российской академии наук, Заслуженный профессор Московского университета, Лауреат Сталинской премии, Ломоносовской премии 1 степени. Действительный член Российской академии ракетных и артиллерийских наук; награжден орденами и медалями.

Заведующий кафедрой теории упругости Московского университета с 1942 по 1998 г.

Alexey Antonovich Ilyushin is an outstanding Russian scientist-mechanician of the XX century.

He is the creator of the theory of elastic-plastic processes and thermodynamics taking into account the measures of irreversibility and damage, one of the founders of a modern theory of constitutive relations in continuum mechanics. He is the author of scientific inventions and discoveries, the founder of scientific schools in mechanics, the chief-manager of responsible state scientific-technical projects. The basic proceedings: ≪Plasticity≫ (1948; re-edited in 2005 in Jubilee series ≪Classical University Textbook≫), ≪Plasticity. Bases of the General Mathematical Theory≫ (1963), ≪Continuum Mechanics≫ (1971, 1978, 1990).

Corresponding member of Russian Academy of Sciences, Honorable Professor of Moscow University, Winner of Stalin Premium, of Lomonosov Premium of the 1st degree. Full member of Russian Academy of Missile and Artillery Sciences; is awarded with orders and medals.

Head of the Elasticity Theory Department of Moscow University from 1942 to 1998.

Lomonosov Moscow State University

Russian Academy of Sciences

Russian National Committee
on Theoretical and Applied Mechanics

ELASTICITY AND ANELASTICITY

Proceedings of the International scientific symposium
on problems of the mechanics of deformable bodies
dedicated to the 100th anniversary from the birthday of
A.A. ILYUSHIN
Moscow, January 20–21, 2011

Edited by
professor I.A. KIYKO,
professor G.L. BROVKO and professor R.A. VASIN

Moscow University Press
Moscow — 2011

**Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова**

Российская академия наук

**Российский национальный комитет
по теоретической и прикладной механике**

УПРУГОСТЬ И НЕУПРУГОСТЬ

*Материалы Международного научного симпозиума
по проблемам механики деформируемых тел,
посвященного 100-летию со дня рождения
А.А. ИЛЬЮШИНА
Москва, 20–21 января 2011 года*

*Под редакцией
профессора И.А. КИЙКО,
профессора Г.Л. БРОВКО, профессора Р.А. ВАСИНА*

Издательство Московского университета
Москва — 2011

УДК 539.3
ББК
У

Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2011 года) / Под ред. проф. И.А. Кийко, проф. Г.Л. Бровко, проф. Р.А. Васина. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. — 483 с.

Книга продолжает серию выпусков «Упругость и неупругость» кафедры теории упругости Московского университета (первый выпуск вышел в 1970 году).

Настоящий выпуск содержит статьи по докладам, представленным на III Международном научном симпозиуме, посвященном памяти А.А.Ильюшина. Тематика статей касается теории термодинамических процессов и теории определяющих соотношений, общих вопросов пластичности и термовязкоупругости, проблем вязкопластических течений, динамики, устойчивости и прочности конструкций.

Редакционная коллегия: И.А. Кийко (*главный редактор*), Г.Л. Бровко (*зам. главного редактора*), Р.А. Васин (*зам. главного редактора*), Д.Л. Быков, Д.В. Георгиевский, И.Н. Молодцов.

Elasticity and Anelasticity. Proceedings of the International scientific symposium on problems of the mechanics of deformable bodies dedicated to the 100th anniversary from the birthday of A.A. Ilyushin (Moscow, January 20–21, 2011). Edited by Prof. I.A. Kiyko, Prof. G.L. Brovko, Prof. R.A. Vasin. — Moscow, Moscow University Press, 2011. — 483 pp.

The book continues a series of issues ≪Elasticity and Anelasticity≫ of the Elasticity Theory Department of Moscow University (the first issue was released in 1970).

This issue includes papers prepared after reports made on the III International scientific symposium dedicated to the memory of A.A. Ilyushin. The subject of the articles is related to the theory of thermodynamic processes, the theory of constitutive relations, to general problems of plasticity and thermovisco-elasticity, to problems of visco-plastic flows, dynamics, stability and strength.

Editorial board: I.A. Kiyko (*editor-in-chief*), G.L. Brovko (*vice-chief editor*), R.A. Vasin (*vice-chief editor*), D.L. Bykov, D.V. Georgievskii, I.N. Molodtsov.

Издательство Московского университета
Подписано к печати Формат 60x90 1/16. Печ. л. 30,0. Зак. №
Отпечатано в типографии

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту №

Р Ф Ф И

ISBN

© Механико-математический факультет
Московского государственного
университета, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге собраны статьи и краткие сообщения по материалам докладов на Международном научном симпозиуме по механике деформируемых тел, посвященном 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина.

Вся деятельность А.А. Ильюшина — ученого, воспитателя, гражданина — теснейшим образом была связана с историей страны, становлением и развитием новых идей в мировой науке, в образовании.

Международный научный симпозиум в память А.А. Ильюшина проводится третий раз. Организаторами симпозиума являются Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Российская академия наук и Национальный комитет по теоретической и прикладной механике. Программа симпозиума составлена пленарными докладами и докладами в двух секциях: Секция 1. «Основы механики сплошной среды, механики деформируемого твёрдого тела и общие вопросы пластичности» и Секция 2. «Термовязкоупругость, реология, динамика, прочность, устойчивость процессов деформирования». Тематика симпозиума соответствует основным научным интересам А.А. Ильюшина, охватывающим широкий спектр современных проблем механики деформируемых тел.

В докладах участников симпозиума, в статьях и сообщениях, помещенных в настоящей книге, отражено развитие идей А.А. Ильюшина, современные достижения его научной школы, результаты творческого поиска его учеников, последователей, приверженцев его научных взглядов.

Редакторы книги стремились к тому, чтобы все авторские позиции (особенно в дискуссионных вопросах) были донесены до читателя в наиболее ясном виде.

Редакционная коллегия и Оргкомитет симпозиума выражают благодарность Московскому государственному университету имени М.В. Ломоносова и Российскому фонду фундаментальных исследований, оказавшим финансовую и организационную поддержку проведению симпозиума и выпуску настоящей книги.

Надеемся, что книга послужит плодотворному обмену мнениями всех заинтересованных читателей, укреплению взаимопонимания и творческой атмосферы научного общения, наследованной нам добрыми традициями школы Алексея Антоновича Ильюшина.

Профессор И.А. Кийко
Профессор Г.Л. Бровко
Профессор Р.А. Васин

PREFACE

This book contains the papers and short communications based on materials of reports which have been made on the International Scientific Symposium on problems of the mechanics of deformable bodies dedicated to the 100th anniversary of A.A. Ilyushin.

All life activities of A.A. Ilyushin — as a scientist, a teacher, a citizen — were closely connected with native history, with formation and development of new ideas in world science, in education.

The International Scientific Symposium dedicated to the memory of A.A. Ilyushin is conducted for the third time. Lomonosov Moscow State University, Russian Academy of Sciences and National Committee on Theoretical and Applied Mechanics are the organizers of the Symposium.

The Program of present Symposium consists of Plenary Reports and Reports in two sections: Section 1. ≪Foundations of continuum mechanics, mechanics of solids, and general problems of plasticity and Section 2. ≪Thermoviscoelasticity, rheology, dynamics, strength of materials, stability of deformation processes≫. Subject-matter of the Symposium is related to A.A. Ilyushin's main scientific interests covering the wide range of modern problems in continuum mechanics.

The reports made by the participants of the Symposium, the articles and the communications included in this book reflect the development of A.A. Ilyushin's ideas, the current achievements of his scientific school, the creative search results of his pupils and followers, adherents of his scientific views.

The editors of the book tried the best in order to make all authors' positions (in questionable cases especially) brought to a reader in the most clear form.

The Editorial Board and the Organizing Committee express their deep gratitude to Lomonosov Moscow State University and to Russian Foundation for Basic Research for financial and organizing support in conduct of the Symposium and edition of this book.

We expect that the book will serve the fruitful exchange of opinions among interested readers, will serve the promotion of mutual understanding and creative atmosphere of scientific association succeeded to us by good traditions of the school of Alexey Antonovich Ilyushin.

Professor I.A. Kiyko
Professor G.L. Brovko
Professor R.A. Vasin

К 100-летию со дня рождения
АЛЕКСЕЯ АНТОНОВИЧА ИЛЬЮШИНА
(20.01.1911 - 31.05.1998)

Исполнилось 100 лет со дня рождения А.А.Ильюшина — выдающегося ученого, открытия которого оказали существенное влияние на развитие научного мировоззрения практически во всех областях механики деформируемых сред. Талант исследователя, способного глубоко проникать в существо изучаемых проблем, искусство по словам акад. Л.С.Лейбензона "... облекать явления природы в математические символы"проявились у Алексея Антоновича сразу по окончании механико-математического факультета МГУ (1934). В 1935 г. На Всесоюзной конференции по пластичности он выступил с докладом "К вопросу о вязкопластическом течении материала в 1937 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в октябре 1938 г. — докторскую по физико-математическим наукам. С 1938 г. он — профессор, а с 1942 г. до последних дней своей жизни — заведующий кафедрой теории упругости МГУ. В 1943 г. А.А.Ильюшин избран членом-корреспондентом Академии наук СССР (РАН), в 1947 г. — действительным членом Академии артиллерийских наук МВС СССР (ныне РАРАН).

Научное наследие А.А.Ильюшина многогранно, однако основным вкладом в механику, по оценке самого Алексея Антоновича, являются его исследования по пластичности в самом общем понимании этого термина. Теория пластических течений (конец 30-х, 50-е годы), теория малых упругопластических деформаций (40-е годы), общая математическая теория пластичности (50 – 60-е годы), теория термомеханических процессов с мерами необратимости и повреждаемости (70 – 80-е годы) — этапы этого уникального научного поиска. Не менее важным его итогом этого поиска является установление методологического подхода в исследованиях (я назвал бы это четвертым постулатом А.А.Ильюшина; первые три — постулаты изотропии, пластичности и макроскопической определимости): свойства материалов познаются в процессах термомеханического деформирования.

В 50-х годах А.А.Ильюшин в общем виде сформулировал проблему пластического течения металлов в приложениях к технологии обработки давлением. В развитой теории учитывается влияние степени и скорости деформации, переменные температурные поля и возможность образования "зон отвердения"; введен специальный вариационный принцип; исследованы условия подобия и установлены правила моделирования; разработана теория течения тонких слоев металла по поверхностям инструментов.

Теория малых упругопластических деформаций была создана А.А. Ильюшиным в связи с проблемой прочности снаряда при движении в стволе орудия. Нормативными документами допускалась небольшая (несколько предельных упругих) остаточная, т.е. пластическая, деформация, однако все расчеты велись методами теории упругости. Очевидное противоречие разрешилось разработкой теории, которая вместе с теоремами о простом нагружении и разгрузке и методом упругих решений составила мощный аппарат для исследования на прочность, деформируемость и устойчивость элементов конструкций, сооружений и деталей машин за пределом упругости. Цикл этих работ А.А.Ильюшина удостоен Сталинской премии I степени; они обобщены в монографии "Пластичность"(1948).

Теорию пластичности при произвольных сложных нагружениях А.А. Ильюшин создал на принципиально новых для механики сплошной среды (МСС) понятиях и идеях. Он ввел пятимерные векторы малых деформаций и напряжений, построенные на основе соответствующих девиаторов. В пятимерных пространствах годографы этих векторов определяют траектории деформаций и напряжений; параметры внутренней геометрии этих траекторий, прежде всего кривизна, сравнимые со следом запаздывания — новой устанавливаемой из опыта механической характеристикой материала, — определяют меру сложности процесса. А.А.Ильюшин сформулировал основные положения теории: постулат макроскопической определимости, постулат пластичности, постулат изотропии и принцип запаздывания; эти фундаментальные идеи не только способствовали мощному развитию новых направлений в исследованиях самой пластичности, но и составили основу современной теории определяющих соотношений в МСС.

На основе постулата изотропии и принципа запаздывания А.А.Ильюшиным разработана теория эксперимента, в соответствии с которой под его руководством была создана принципиально новая испытательная машина класса СН; теперь такие машины стали естественным средством экспериментального исследования пластичности. Итог работ этого периода подведен А.А.Ильюшиным в монографии "Пластичность"(1963).

А.А.Ильюшин разработал методы моделирования взаимодействия волн, возбуждаемых мощным взрывом, и упругопластических конструкций, сооружений, массивов. Для этих целей был сконструирован и создан линейный ускоритель, на котором экспериментально изучались характеристики воздействия взрывов на преграды, а также параметры взрывов на выброс. К этому же периоду относится и установленный А.А.Ильюшиным закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, который пространственную задачу обтекания удлиненного тела или тонкого профиля сводит к двухмерной. Одно из следствий этого закона —

метод аффинной модели: возможность экспериментально изучать параметры обтекания при скоростях потока заметно меньших, чем в натуре. Другое следствие — постановка задачи аэроупругих колебаний пластин, в частности создание теории панельного флаттера. Гипотезу плоских сечений А.А.Ильюшин распространил на пластические твердые среды, что открыло новые возможности для изучения процессов высокоскоростного внедрения и проникания твердых тел.

Большой цикл работ А.А.Ильюшина относится к механике вязкоупругих материалов. В них на основе постулата изотропии построены квазилинейная теория вязкоупругости и главная квазилинейная теория, содержащая только однократные интегралы по времени, хорошо согласующаяся с данными экспериментов. Исследована термодинамика вязкоупругих сред, развита теория термовязкоупругости; предложен метод аппроксимации для решения сложных задач на основе линейной теории упругости; разработаны и реализованы методы изучения свойств вязкоупругих материалов (полимеры, пластмассы) в условиях сложного нагружения. Созданы математические основы длительной прочности и разрушения материалов твердых тел; введен тензор повреждений и дана теория их накопления, определены меры поврежденности и критерии разрушения; выявлена роль моментных напряжений, предложены критерии прочности при произвольных нагружениях.

А.А.Ильюшин выполнил немало конкретных исследований в помощь промышленности и технике, в частности для оборонного комплекса. Ряд его предложений был внедрен в практику конструкторских бюро и производственных предприятий; он являлся научным консультантом в организациях новой техники. За заслуги в развитии науки А.А.Ильюшин награжден орденом Ленина, тремя орденами Трудового Красного Знамени, орденом Красной Звезды, двумя орденами "Знак Почета орденом Октябрьской революции и медалями.

В течение 56 лет А.А.Ильюшин руководил кафедрой теории упругости механико-математического факультета МГУ. Самобытный талант педагога и лектора, творческий подход к выбору материала нашли отражение в созданных им на факультете оригинальных курсах: сопротивление материалов (издан в 1958 г., переведен в США, Китае, Польше); теория упругости и пластичности; механика сплошной среды; его монография "Пластичность"(1948 г.) переиздана в 2004 в серии "Классический университетский учебник". На кафедре под руководством А.А.Ильюшина работал научно-исследовательский семинар, на котором выкристаллизовались многие из научных идей, о которых шла речь выше; через него прошло не одно научное поколение. На этом семинаре все мы, ученики и коллеги А.А.Ильюшина, учились умению проникать в существо явле-

ний; мы учились также бескомпромиссному подходу, невзирая на лица, к оценке научных достижений — как своих, так и своих коллег.

В течение всей своей творческой жизни А.А.Ильюшин выступал как крупный организатор отечественной науки. Он был ректором Ленинградского университета (1950 – 1952), директором Института механики АН СССР (1953 – 1960); многие годы был членом ВАК СССР, членом президиума Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике, членом Генеральной ассамблеи Международного союза по теоретической и прикладной механике, председателем Научного совета по проблемам прочности и пластичности РАН.

Своими размышлениями о проблемах в науке и возможных путях их решения Алексей Антонович многократно делился в выступлениях на различных научных собраниях и в печати. Одни проблемы исследованы, другие находятся в процессе разрешения, иные ждут своего времени. Последователи и ученики А.А.Ильюшина — Мыслителя и Творца, посвятившего свою жизнь служению науке и познанию тайн природы, — найдут в его научном наследии путеводную нить, которая поможет им в свершении новых открытий.

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО

ПРЕДСЕДАТЕЛЯ ОРГКОМИТЕТА РЕКТОРА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА АКАДЕМИКА В. А. САДОВНИЧЕГО

Добрый день, уважаемые коллеги!

Мне предоставлена честь открыть третий симпозиум, посвященный памяти А.А.Ильюшина — Заслуженного профессора Московского университета, лауреата Высшей награды МГУ — премии имени М.В.Ломоносова I степени, проработавшего более полувека заведующим кафедрой теории упругости. А.А.Ильюшин — один из немногих, чьё имя при жизни занесено на Золотую доску почета МГУ. Нынешний симпозиум — особый, он посвящён 100–летней годовщине со дня рождения Алексея Антоновича.

А.А.Ильюшин — выдающийся учёный и мыслитель второй половины прошлого века, научные идеи и труды которого в значительной мере повлияли на развитие механики сплошных деформируемых сред. Как математик я не смогу в полной мере оценить вклад А.А.Ильюшина в механику — вы это сделаете лучше меня; сейчас я хотел бы сказать о том, что мне близко и понятно. В обсуждениях с Алексеем Антоновичем проблем развития науки и образования, в беседах с его коллегами, просматривая недавно вышедший из печати четырёхтомник трудов А.А.Ильюшина, я обратил внимание на характерную особенность его научных результатов: они представлены в форме завершённых изящных математических моделей. (“Он обладает искусством облекать явления природы в математические символы” Л.С.Лейбензон). Некоторые из этих моделей А.А.Ильюшин исследовал сам, в других случаях намечал путь их изучения; часто это делали его ученики и коллеги, используя опыт общения с Алексеем Антоновичем.

Приведу два примера, которые произвели на меня впечатление.

В первые военные годы (конец 1941 – 1943 г.г.) А.А.Ильюшин разработал теорию и методику расчета на прочность артиллерийского снаряда, движущегося в стволе орудия, в результате был ликвидирован так называемый “снарядный голод”. Математическая модель явления (теория пластичности при простых нагружениях) — система из трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка и соответствующие краевые условия; способ исследования – предложенный А.А.Ильюшиным метод упругих решений. Это известный вам метод последовательных приближений; замечательно то, что А.А.Ильюшин предугадал достаточное условие сходимости метода – неравенства, которым должна удовлетворять функция упрочнения (введенная А.А.Ильюшиным и носящее его имя). Как

оказалось, механические характеристики практически всех металлов и сплавов отвечают этому условию. Это пример математического предвидения (озарения, как сказал Ж.Адамар[1]), сравнимый с аналогичными случаями в математическом творчестве Б.Римана, Э.Галуа и А.Пуанкаре. В дальнейшем сходимость метода была строго доказана.

Второй пример — закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. Обращает на себя внимание строгость анализа и оценок (умение предварять изучение какого-либо процесса оценками, объяснить сложные явления "на пальцах" вообще было характерно для А.А.Ильюшина), которые определяют точность выполнения этого закона. Его следствие — формула поршневой теории для давления аэродинамического взаимодействия колеблющейся пластины с потоком. Проблема устойчивости колебаний пластины в потоке (панельный флаттер) на основе этой формулы сводится к задаче о собственных значениях несамосопряженного оператора четвертого порядка. Развитие и обобщение теории флаттера на случай относительно небольших сверхзвуковых скоростей приводит к новой спектральной задаче для интегродифференциального оператора, ядро которого зависит от спектрального параметра. Эта важная задача практически не исследована, желательно, чтобы математики обратили на нее внимание.

Вся жизнь Алексея Антоновича была связана с механико-математическим факультетом МГУ. В выступлениях на собраниях различного уровня он всегда говорил о единстве математики и механики как о науках, неразрывно связанных между собой и взаимно обогащающих друг друга, всегда выступал за единство факультета.

Удивительная манера Алексея Антоновича говорить точно, логически связано и убедительно всегда производила очень большое впечатление. Чувствовалось, что это говорит выдающийся ученый, уникально сочетающий в себе знания фундаментальных основ математики и механики и как-то сразу чувствующий возможные применения научных результатов. Если добавить еще, что Алексей Антонович обладал огромной научной интуицией и поразительным стремлением решить проблему, то всем становилось очевидным, что это говорит научный лидер.

Мне также запомнились частые встречи с Алексеем Антоновичем, когда я уже был проректором университета. Тогда его очень волновали проблемы, возникающие на реакторах АЭС (в частности, Ростовской) и он предлагал в вышестоящие инстанции некоторые подходы к их решению. С научной точки зрения эти подходы были безупречными.

В человеческих отношениях Алексей Антонович всегда был очень дружелюбен, внимательно следил за ростом молодых ученых, и наверное

[1]Ж. Адамар. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., Советское радио. 1970.

поэтому среди его учеников — блестящая плеяда ученых, его научная школа.

На предыдущем симпозиуме (2006 г.) было высказано пожелание встретиться через 5 лет в честь 100-летия со дня рождения А.А.Ильюшина. Несмотря на невзгоды прошедшего времени, мы, как видите, нашли возможность это пожелание выполнить — и вот мы здесь, в нашем МГУ, в той же аудитории будем обсуждать новые достижения в науке, которой А.А.Ильюшин посвятил свою долгую яркую жизнь.

Благодарен вам за внимание и желаю успехов.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

НАУЧНАЯ БИОГРАФИЯ А. А. ИЛЬЮШИНА ПО АРХИВНЫМ ИСТОЧНИКАМ

Е. А. Ильюшина

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

ilyushina@newmail.ru

Выдающийся российский ученый, признанный классик в области механики деформируемых твёрдых тел Алексей Антонович Ильюшин родился 20 (7) января 1911 года в Казани. Его отец — Антон Никанорович — был сыном крестьянина деревни Конопленка Ельнинского уезда Смоленской губернии, мать — Татьяна Акимовна — дочерью шорника из соседнего села. Десятилетнего Антона отправили “в люди” в Москву, долгое время он работал в торговом доме известного чаеторговца Швецова, сначала “мальчиком на посылках”, а позже делопроизводителем-бухгалтером. В конце 1910 года Антон Никанорович получил должность управляющего казанским отделением торгового дома. К тому времени у него уже была большая семья, четыре дочери, единственный сын — Алексей умер в младенчестве. Долгожданного мальчика, появившегося на свет уже в Казани, родители опять назвали Алексеем. В тяжелые годы революций и войн, сопровождавшихся голодом, материальными лишениями и человеческими трагедиями, Татьяна Акимовна и Антон Никанорович вырастили семерых детей и всем дали возможность получить высшее образование.

В 1928-ом году Алексей Ильюшин окончил одну из лучших казанских школ и подал заявление о поступлении в Казанский университет, но принят не был. Право на получение высшего образования давало только пролетарское происхождение или рабочий стаж. Только проработав полтора года рабочим-станочником на судоремонтном заводе “Красный металлист”, он поступил на физико-математическое отделение Казанского университета. Но уже в январе 1930-го года Алексей Ильюшин, получив бесплатный литер от студенческого комитета на проезд по железной дороге Казань–Ельня к своей родне, останавливается проездом в Москве и поступает (переводом) на механико-математический факультет Московского университета.

Вспоминая годы учебы в Московском университете, А.А.Ильюшин писал: “Первые два года велись напряженные теоретические занятия физикой и математикой. Следующие два года обучение продолжалось в режиме: 4 дня в неделю математика, кроме того, аналитическая динамика, аэродинамика, гидродинамика, теория упругости, гидравлика и сопротивление материалов, включая лабораторные занятия, а также специальные курсы (теория крыла и винта, статика и динамика сооружений, прикладная

механика) и два дня – производственная практика, которая оплачивалась, (стипендия была не большой). В 1930-31 гг. звание техника нам давалось после прохождения необычно большой для студента физмата МГУ производственной практики в литейных, кузнечных и механических цехах заводов" [1].

Более подробные записи об эти годах сохранились в рукописном архиве Ильюшина: "МГУ выработал в нас ту богатейшую физическую интуицию, без которой не может быть достойного продолжателя дела Жуковского, и в механике может получиться, хотя бы и первоклассный, но — вычислитель. Я, думаю, главную роль здесь сыграли лекции по механике Минакова и по гидравлике — Лейбензона. Первый ставил много частных задач, подобранных так, что полный учет всех их частных особенностей позволял буквально в две строки найти решение, а формальное применение общего аппарата заставляло потеть и исписывать листы, перерабатывать несущественные величины и в конечном счете сокращать их, оставляя драгоценные крупицы... Как губки впитывали мы Минаковские тончайшие толкования всех нюансов изучаемых движений, всех его "точечек", "букашек", "палочек" и сложнейших систем.

...Лейбензон, с его широким размахом знаний и багажом исследований в различных разделах механики (гидродинамике, упругости, геофизике, гидравлике сложных систем), с научной смелостью подходов к весьма сложным явлениям, показал пути, как упрощать, находить главные движущие силы явлений и переводить их на язык математики, а затем с такой же решительностью доводить решения до ясного основного результата, зная цену каждому параметру в уравнениях и не стесняясь в их упрощениях" [2].

Научная и инженерная работа студента Алексея Ильюшина началась весной 1932 г. в секции летных исследований главного центра авиационной науки страны, созданного в декабре 1918 г. Н.Е.Жуковским, — Центрального аэрогидродинамического института (СЛИ ЦАГИ). В те годы там работали знаменитые летчики М.А.Тайц, С.А.Корзинщиков, будущий конструктор ракетного оружия Ю.А.Победоносцев. При изучении динамики одной из фигур высшего пилотажа — штопора, выполнение которой нередко заканчивалось аварией, для изменения момента инерции добавляли песок в хвостовой ящик самолета. Опираясь на идеи, изложенные в статье Н.Е.Жуковского, Алексей Ильюшин предложил точный метод экспериментального определения тензора инерции нагруженного самолета — качание самолета с грузом и летчиками. Незаурядные качества студента были отмечены, и его перевели в отдел Особых конструкций ЦАГИ, где он, занимаясь поэлементными расчетами лопастей несущего винта, имеющих все три степени свободы, обнаружил существенные эффекты

кориолисовых ускорений. Через год ему было присвоено звание инженера ЦАГИ.

На увлекательных лекциях по механике А.И.Некрасова и А.П.Минакова в 1933-34 гг. студенту Ильюшину пришла в голову идея аттракциона "Параболоид чудес", динамического стенда, в котором посетители могли бы воспринять в ощущениях все тонкости криволинейного поля ускорения, особенно, знаменитого "кориолиса". Директор Центрального парка культуры и отдыха им. Горького Бетти Глан доверила ему, инженеру ЦАГИ, и его школьному товарищу технику-строителю А.Я.Эпштейну проектирование и строительство аттракциона. Летом 1934 г. он был построен в виде 10-метрового шара деревянно-тросовой конструкции на упорно-радиальных шарикоподшипниках. Шар вращался со скоростью 18 оборотов в минуту вокруг вертикальной оси. Изнутри это был точный параболоид, по верхнему контуру ортогонально присоединенный к крыше, сделанной в виде конуса с углом 120^0 при вершине. Тем самым все люди, находящиеся внутри у верхнего края, ощущали на ногах двойной собственный вес (говоря языком космонавтов, коэффициент перегрузки был равен двум). Шар был окружен кольцевым балконом и имел входную дверь. После визуального медосмотра до 10 человек желающих заходили внутрь. Служитель закрывал дверь, и шар начинал незаметно вращаться. При скорости 18 об./мин. раздавалась команда "Расходитесь", и возникали все "чудеса" криволинейного поля ускорений и относительности: не понять, где верх, где низ; брошенный мяч летит по спирали; при быстром изменении направления взгляда кружится голова; все стоят в странных позах (кто — под разными углами на стенах, кто почти висит вниз головой на потолке и т.п.). По сути, это был прототип тренажеров будущих космонавтов. Аттракцион просуществовал лишь 4 года, так как сильно динамически нагруженная фанерная конструкция быстро теряла прочность.

В 1933 году Ильюшин написал первую научную работу о расчете лопастей автожира, с отличием защитил диплом по специальности "аэрогидромеханика", поступил в аспирантуру и одновременно стал ассистентом кафедры "Теория упругости" мехмата МГУ.

В течение всех лет обучения он жил в студенческих общежитиях МГУ на Стромынке, в Камергерском и на Спиридоньевке. Там сложилась веселая и бесшабашная кампания его друзей: Володя Токарев, Митя Мацицкий и Халил Рахматулин. Эта дружба была пронесена ими через все годы их жизни: они радовались успехам друг друга, встречались семьями, поддерживали в тяжелые моменты, а, постарев, помогали в болезнях. Особенно близкими как в научной деятельности, так и на жизненном пути оказались Ильюшин и Рахматулин, возглавившие впоследствии две "родственные" кафедры мехмата — теории упругости и газовой и волновой динамики.

Преподавательскую деятельность в Московском университете Алексей Ильюшин начал в 1935 году чтением курса лекций “Прикладная теория упругости”. Одновременно он был назначен заведующим лабораторией испытания материалов, преобразованной из лаборатории сопромата, и привлечен к работе на предприятиях оборонной промышленности (консультант Государственного союзного конструкторского бюро 47 Наркомата боеприпасов). О тематике этих работ Алексея Антоновича можно судить по оставшимся в его архиве и неопубликованным при жизни статьям: “О применении многослойных броней и способы их расчета на пробивание”, “Температурные напряжения в неоднородном штурвале самолета” (1935-36г.г.). В одной из своих официальных автобиографий Алексей Антонович написал: “В связи с исследованиями упругих и пластических свойств резины (1934-35г.г.) и в значительной мере под влиянием знаменитого H.Hencky, который был консультантом Лаборатории в годы его пребывания в России и на Украине (1935-37г.г.), одним из первых в России стал заниматься теорией пластических деформаций металлов” [3].

За короткий период 1934-1938г.г. он написал и защитил кандидатскую и докторскую диссертации по вязкопластическим течениям, где впервые ввел в теорию пластичности термодинамику, уравнения распространения тепла, решил задачу устойчивости процесса по отношению к возмущению границы области, установил принцип эквивалентности дифференциальных уравнений вязкопластических течений вариационному принципу минимума мощности внутренних сил. Работы Ильюшина по теории вязкопластических течений определили создание нового направления в механике, которое активно развивалось в течение последующих десятилетий им самим и его учениками (описание технологических процессов, задачи теории ползучести, прогнозирование поведения грунтовых масс и растворов в нефтедобывающей промышленности и др.).

Свойства вязкопластических материалов, используемых в теории вязкопластических течений, экспериментально определялись в 1935-1937 гг. гидравлическими методами, а твердого тела — на созданном А.А.Ильюшиным первом линейном механическом ускорителе, представлявшем собой пневматический скоростной копёр (ПСК). ПСК, смонтированный в помещении бывшей парикмахерской в здании МГУ на Моховой, открыл дорогу к будущей тематике исследований Ильюшина по большим скоростям и давлениям, методам моделирования динамических процессов, включая моделирование метания тел со сверхзвуковыми скоростями и воздействия взрыва на объекты в поле силы тяжести.

В 1938 г., одновременно с присуждением степени доктора физико-математических наук, Алексею Ильюшину было присвоено звание профессора по кафедре теории упругости, а в мае 1940 г. он получил свой

первый орден “Знак почета” “за выдающиеся работы, имеющие крупное значение для обороны”.

В этой связи становится понятной характерная и важнейшая для всего научного творчества А.А.Ильюшина особенность: многие теоретические положения, сформулированные и развитые в его исследованиях, являлись ответами на вопросы, которые вставали перед ним при решении вполне конкретных задач, возникающих в ракетно-космической технике, артиллерии, авиации, при расчетах защитных сооружений и т.п.

Трагические события военных лет ударили по семье А.А.Ильюшина еще в 1940 году: в финскую кампанию погибает его младший брат Павел – штурман морской авиации.

В неопубликованных фрагментах научной автобиографии Алексея Антоновича “Динамика” есть такие записи: “Москва, до 16-го октября 1941-го года: налеты, зажигалки, аэростаты заграждения, . . . бомба разрушила купол мехмата на Моховой, снег на лестнице (в студенческие годы стальной шарик подскакивал до третьего этажа), крыши, зажигалки, страшный “полет” Ленского от взрывной волны, . . . разговор с Г.И.Двухшерстовым — что ждет — победа или еще уход? Эвакуация . . . пешим строем. Я еще остаюсь — что же — выйти на время из упадка? . . . 16 октября жгут бумаги, как Пьер Безухов иду по Москве (ничто не держит меня, волен, от народного ополчения освобожден). На Кировской — бумажный ветер, приказ С.В.Кафтанова: 16 октября в 16-17 часов последним составом (международный вагон) выехать <в Ашхабад>. Кто останется — тот с немцами. Еду с одним портфелем и ключами от чистопрудной квартиры. Эвакуация в неизвестность. . . ” [4]. “В силу внутреннего протеста, случайно” Ильюшин сходит с поезда и на буксирном пароходе добирается до Казани, где в эвакуации находился Институт механики Академии наук во главе с академиком Б.Г.Галеркиным. “Казань, 23 октября 1941г., Академия в Казани: Актовый зал университета — стойбище академиков (кровати, занавески, дети), за хлебом с авоськами, растерянная публика, многие потеряли облик “мыслителей“. Но Президиуму — задание Комитета обороны, и среди заданий — важнейшее: как разрешить снарядный голод на фронте” [4].

Обеспечить воюющую армию необходимым количеством артиллерийских снарядов при сохранении прежней технологии их изготовления, требовавшей большого количества высококачественной легированной стали и топлива для термообработки корпусов, а главное, — огромной армии высококвалифицированных рабочих кадров и соответствующего станочного парка для трудоемкого процесса токарной обработки каждого снаряда, не было никакой возможности. Интуиция и опыт предвоенной работы в оборонной промышленности и в динамической лаборатории МГУ позволили Ильюшину разглядеть путь решения поставленной задачи в контексте вынашиваемой им новой теории малых упругопластических деформаций.

В считанные месяцы Алексею Антоновичу совместно с сотрудниками кафедры теории упругости МГУ и сотрудниками отдела прочности Института механики АН СССР удалось разработать основы новой теории, отражающей реальные процессы в стволе артиллерийского орудия и движущемся в нем снаряде, и дать практические рекомендации по изменению технологии производства артснарядов, носившие радикальный характер. “Была сведена до минимума механическая обработка, расширили допуски, отменили термическую обработку корпусов осколочно-фугасных снарядов при сохранении необходимой прочности и эффективности действия” [5]. На совместном пленуме АН ССР, Артиллерийского комитета Главного артиллерийского Управления и Министерства боеприпасов были приняты новые методы расчетов, проектирования и технологии производства снарядов с отменой термообработки, а новые нормы их военной приемки стали законом. “Снарядный голод” резко пошел на убыль и даже сменился изобилием, при котором стали возможны операции типа Сталинградского артиллерийского кольца.

За годы войны А.А.Ильюшин выполнил многие другие важные для фронта и Победы работы, такие как создание и испытание танковых броней и авиабомб, инженерные расчеты защитных сооружений и др. Его заслуги были отмечены: в 1943 г. он был награжден боевым орденом “Красной Звезды”, а в 1944 г. — медалью “За Оборону Москвы”. В 1943г. его избрали членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 1947 г. — действительным членом Академии артиллерийских наук СССР.

В сентябре 1946-го года в Париже проходил Международный конгресс по прикладной механике, в работе которого принимал участие весь цвет мировой науки: Д.Тейлор, Т.Карман, Р.Саутвелл и другие. Профессор Ильюшин выступил на нем с докладом “Устойчивость пластинок за пределом упругости”, а уже в следующем 1947 году Авиационным комитетом США были изданы переводы его открытых работ.

В 1948 г. А.А.Ильюшину была присуждена Государственная (Сталинская) премия I степени за цикл работ по пластичности и устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости. Монография Ильюшина (1948 г.), обобщившая эти исследования, и по настоящее время является настольной книгой для научных работников и инженеров. В 2006 г. она была переиздана в серии “Классический университетский учебник”.

В январе 1947 года при ОТН АН СССР была создана комиссия по проблеме газовой турбины и реактивных двигателей, в ее состав вошли И.П.Бардин, Н.Т.Гудцов, А.А.Ильюшин, М.В.Келдыш, Л.С.Лейбензон, И.А.Одинг и С.А.Христианович. В документе, подготовленном заведующим конструкторским отделом ракетного центра НИИ-88 С. П. Королевым к докладу правительству о ракетной технике в начале 1947г., говорится: “. . . Необходимо серьезное систематическое изучение вопросов

аэродинамики и устойчивости ракеты Р-1 на всем диапазоне чисел Маха порядка 8, для чего потребуется произвести серию продувок в аэродинамических трубах высоких скоростей. . . . Необходимы серьезное и систематическое изучение вопросов прочности конструкции ракеты Р-1, разработка временных норм прочности и методики расчетов на прочность. . . . Необходимо произвести достаточно полные статические испытания агрегатов и частей ракеты как из числа имеющихся ракет немецкого задела, так и создаваемых из отечественных материалов. . . " [6]. В этой связи Алексея Антоновича пригласили в НИИ-88 научным консультантом, а позднее назначили заместителем начальника по науке.

Опираясь на свой опыт работы в ЦАГИ, который всегда являлся для него примером, освященным личностью Н.Е.Жуковского, А.А.Ильюшин организовал теоретико-экспериментальные отделы динамики (устойчивости и управления), прочности (с оригинальным стендовым залом) и аэродинамики, пригласив в них известных заведующих кафедрами и профессоров МГУ: Н.Д.Моисеева, Г.Н.Дубошина — по небесной механике, Х.А.Рахматулина — по аэродинамике, В.Н.Панферова и А.В.Кармишина — по прочности, П.Е.Краснушкина — по радиофизике, — а также перспективных молодых сотрудников.

"Почти все научные направления дальнейшего развития НИИ-88 мне были ясны. Стоял только один вопрос – как быть с аэродинамическими расчетами, с экспериментальным определением аэродинамических коэффициентов сил и моментов ракет при больших числах Маха, скажем $M>3$ (а надо $M>>6$), если сверхзвуковые аэродинамические трубы для $M=3$ очень малого диаметра в то время были только в МГУ да ЦАГИ" [1].

Сформулированный Ильюшиным в 1947г. закон плоских сечений при движении тонких тел в газе с большими сверхзвуковыми скоростями и вытекающая из него "поршневая теория" позволили создать теорию панельного флаттера оболочек и соответствующий метод моделирования (аффинная модель), которые коренным образом упростили расчетную модель гиперзвукового движения летательных аппаратов. Применение этой теории позволило также существенно расширить возможности имевшихся тогда в стране аэродинамических труб и выявить ряд важнейших особенностей гиперзвуковых движений. Позднее этот результат был распространен на пластические твердые среды, что привело к созданию теории бронепробивания и широкому использованию закона плоских сечений разработчиками соответствующих отраслей промышленности.

В жизни Алексея Антоновича неоднократно повторялась одна и та же ситуация — он легко оставлял значимые номенклатурные посты, поскольку истинную свободу и самореализацию всегда находил в научном творчестве. В марте 1950 года в самый разгар так называемого "Ленинградского дела", в числе жертв которого оказался ректор одного из лучших

университетов страны Александр Алексеевич Вознесенский, Ильюшина назначили на освободившуюся должность ректора Ленинградского университета.

Как только он появился в городе, ему предложили поселиться в ректорском флигеле, где в тот момент проживала семья Вознесенского, но он наотрез отказался и все время пребывания в Ленинграде прожил в другом месте. Поступок этот по тем временам был совсем не ординарным, но вполне объяснимым с точки зрения самого Алексея Антоновича: репрессии не обошли стороной и его семью. В 1937 году был расстрелян муж его старшей сестры — известный в Сибири хирург, муж другой сестры — военный ветврач — был обвинен во "вредительстве" и отправлен в лагерь, репрессиям подверглись и оба его дяди. В Казани, в доме его отца росли осиротевшие дети и находили поддержку все близкие и в лихие годы гражданской войны, и в трагические 30-е.

Атмосфера, царившая в университете после ареста Вознесенского, ярко описана в воспоминаниях О. Фрейденберг, двоюродной сестры Б.Л.Пастернака, возглавлявшей тогда кафедру классической филологии. Все ожидали новой волны увольнений и репрессий, часто провоцируемых склоками с политическим подтекстом. Одним из первых сотрудников университета, записавшихся на прием к новому ректору, был заведующий кафедрой дарвинизма И.И.Презент, тот самый, который с трибуны ВАСХНИЛ громил вейсманистов-морганистов, главный организатор многолетней травли Николая Ивановича Вавилова, "гангстер от науки", как его характеризовали ученые-генетики. Ильюшин понял, что этот деятель не даст возможности создать во взбудораженном коллективе нормальную рабочую обстановку, что вслед за ним потянутся с обвинениями своих коллег в троцкизме и прочих "измах" подобные Презенту представители гуманитарных наук, — и уволил его из Ленинградского университета. В музее ЛГУ хранится выцветшая от времени картонная папка личного дела И.И.Презента с красным росчерком "уволен" рукой Ильюшина. Профессор биофака ЛГУ Т. Гинецинская вспоминала, что когда появился приказ ректора об освобождении Презента от занимаемой должности как не справившегося с возложенными на него обязанностями, в университете несколько дней стояла гробовая тишина. Приказ был прочитан всеми сотрудниками ЛГУ, люди улыбались и тайком пожимали друг другу руки. Главный покровитель Презента Т.Д.Лысенко засыпал университет и министерство своими гневными депешами… Министерство требовало отмены приказа об увольнении, но ректор был непреклонен, (Презент был возвращен в ЛГУ уже после перевода Ильюшина в Арзамас). На склоне лет А.А.Ильюшин получил приветственный адрес от ректора Санкт-Петербургского университета Л.А.Вербицкой, в котором говорилось: "Преподаватели и сотрудники Санкт-Петербургского университета

помнят, в какое сложное для нас время (март 1950 –март 1952) Вы были ректором университета. Трудно переоценить Ваши поистине героические усилия по минимизации ущерба, понесенного Ленинградскими школами генетики и философии. . . ” [7]. Недавно обнаружилось символическое совпадение: диплом об окончании Ленинградского университета, выданный сыну Николая Ивановича Вавилова Юрию, который воспитывался в семье президента Академии наук С. И. Вавилова, подписан ректором А. А. Ильюшиным.

В марте 1952 г. на очередном заседании Ученого совета ЛГУ, Алексею Антоновичу был вручен подписанный И.Сталиным приказ о назначении в Арзамас-16 заместителем главного конструктора Ю.Б.Харитона. Согласно документам А.А.Ильюшин работал по ядерной оборонной тематике непосредственно на Объекте — таково было неофициальное название КБ-11, — с марта 1953г. по сентябрь 1954г. В списке его трудов значится: серия работ по гидродинамике, кумуляции и распространению взрыва, спец. отчеты МСМ 1952-1953гг. “Для КБ-11 начало 50-х было временем активного роста, преобразования в мощный научно-конструкторский и производственный центр. . . Постановка «задачи» о разработке ядерного заряда для снарядов в СССР безусловно связана с тем, что в это время в США уже велась разработка ядерного артиллерийского заряда... 25 мая 1953 года было проведено первое полигонное испытание ядерного заряда МК 9 диаметром 280 мм, и к этому времени было изготовлено первое специальное орудие. Оно весило 93 тонны, общая его с транспортером длина составляла 79 футов, дальность стрельбы была примерно 14 миль” (один из разработчиков артснаряда, ветеран ВНИИЭФ В.П. Жогин, “Наука в Сибири”, №44-45, 17.11.2000).

В “Динамике” Алексей Антонович писал: “Там не было суматохи и организационных хлопот. . . сроки выполнялись. . . . 1953год. Сталин скончался, Берия смещен. Я с легким сердцем улетаю в Москву, где . . . встречаюсь с Н.С.Хрущовым, который рекомендует мне продолжить работу в Арзамасе”. В дневниках сохранилась запись об этой встрече (02.06.1990): “Моя встреча (полный один час tet-a-tet с Никитой Сергеевичем Хрущовым, 1954г.) . . . Это был глубоко озабоченный, сосредоточенный, серьезный человек. “Вам надо продолжить...”. Я отказался, и без последствий сталинско-цековского типа, как отказался от директорства в АН, от зав. отделом науки ЦК . . . , но не отказался от задания ГКО по снарядному голоду в 41-42, не отказался от НИИ-88, не отказался от сталинско–бериевского КБ ПГУ, ... от “лихого ректорства” Лен.Гос. Университета — много, где по “острию ножа” было ходить” [7].

С 1954 по 1960 г.г. Ильюшин возглавлял Институт механики АН СССР (с 1960г. ИПМ АН СССР). “В институте был создан вычислительный центр с приличными ЭВМ, . . . ряд новых стендов и лабораторий, вклю-

чающих газодинамическую с ударной трубой. . . ” [1]. По его инициативе начал издаваться “Инженерный сборник”, реорганизованный позднее в журнал “Механика твердого тела”, и был образован Научный совет АН СССР по проблемам прочности и пластичности, сыгравший важную роль в координации научных работ вузов и отраслевых организаций. Фундаментальные работы, выполненные А.А.Ильюшиным в 50-е годы, явились естественным углублением и развитием нового подхода, выраженного в теории малых упругопластических деформаций, и привели к созданию им общей теории пластичности при произвольном сложном нагружении, которое он исследовал, используя геометрические методы интерпретации процессов деформаций и напряжений. Анализируя результаты экспериментов на сложное нагружение с металлическими материалами, он сформулировал два фундаментальных вывода. Первый, названный постулатом изотропии, означал, что геометрическая и скалярная связь между векторами деформации и напряжений не меняется при преобразованиях отражения и поворота траекторий деформирования в пятимерном пространстве изображений. Второй вывод, названный принципом запаздывания, указывал на существование конечной области влияния процесса деформации на векторные свойства материала, что позволяет ввести новую характеристику материала, названную следом запаздывания векторных свойств.

Основные положения созданной А.А.Ильюшиным теории пластичности (постулат макроскопической определимости, постулат изотропии, принцип запаздывания и постулат пластичности) заложили основы целого раздела механики – теории определяющих соотношений. Фундаментальные результаты А.А.Ильюшина, отраженные в монографии “Пластичность” (1963 г.), получили широкое признание в мировой науке, а созданные под его руководством испытательные машины на сложное нагружение стали естественным средством экспериментального исследования. По признанию самого автора, эти идеи явились его основным вкладом в механику. Они пронизывают все его последующие работы по пластичности, термовязкоупругости, теории длительной прочности и разрушения материалов, теории неоднородных тел, включая и его последние работы, посвященные термодинамике сложных сред и структур.

Новаторские подходы и разработки А.А.Ильюшина, общепризнанные и широко используемые сейчас, далеко не всегда воспринимались с пониманием, а порою встречали и противодействие. Не избежал Алексей Антонович и распространенных в конце 40-х – начале 50-х годов методов привлечения в научные дискуссии идеологических аргументов и факторов, грозивших разгромом целого научного направления. Так принцип макроскопической определимости и феноменологический подход к изучению свойств пластичности металлов, отстаиваемые Ильюшиным, критиковались в 1950 г. как принципы нематериалистической идеологии,

“которую иначе как реакционной назвать нельзя”. В цитируемой статье члена-корреспондента АН СССР И.А.Одинга [8] содержатся и более серьезные предостережения: “Эта идеология способна дезориентировать наши инженерные кадры, разлагать молодых советских ученых и тормозить развитие отечественной техники”. Вызывали непонимание и серьезную научную критику также закон плоских сечений в аэродинамике (1947 г.) и постулат изотропии (50-е гг.). Время показало, что глубокие и разносторонние теоретические исследования А.А.Ильюшина, предложенные им концепции способствовали развитию техники и новых технологий, а основанные им научные школы являются передовыми в современной науке.

Отчасти эти сложные процессы принятия научным сообществом новых идей привели к тому, что “недовольство в Институтах механики МГУ и АН СССР росло” [1], и в апреле 1958г. прошло несколько заседаний комиссии Президиума Академии по проверке научной деятельности Института механики, которая, отметив ряд недостатков в организационной работе института и его директора, тем не менее, не сделала никаких персональных “оргвыводов”. Однако, “... на выборах на пост директора Института механики на третий срок, ... согласованных, а точнее предопределенных в ЦК КПСС, я категорически отказываюсь быть директором. И не стал <директором> и был исключен из “номенклатуры”, так как после этого мне уже не предлагали “высокие посты”” [1].

В шестидесятые годы научная и педагогическая деятельность А.А.Ильюшина в основном была сосредоточена на руководимой им кафедре теории упругости механико-математического факультета МГУ. Созданный им коллектив кафедры в течение многих лет являлся центром научной мысли в целом ряде областей механики сплошной среды. Научную школу кафедры прошли сотни высококвалифицированных ученых и инженеров. Многие из них занимали и занимают ведущее положение в НИИ и КБ промышленности и техники, в системах Академии наук и высшего образования. Научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости МГУ, которым Алексей Антонович руководил до конца своей жизни, пользовался большой известностью и авторитетом. Эрудиция и широта охвата проблем механики всегда притягивала к Алексею Антоновичу молодежь. Его личное участие, благожелательная поддержка и способность делиться своими идеями, излагать их на языке инженера или разработчика, не снижая планки теоретической строгости, способствовали становлению и развитию научных центров по механике во многих регионах страны.

В 1964г. Ильюшин возглавил работы, проводившиеся в НИИ-88 в области прочности зарядов твердого топлива ракет. С самого начала он обратил внимание на необходимость проведения опытов по определению физических законов связи напряжений и деформаций твердых ракетных топлив, а также модельных испытаний. Уже в 1965 г. были выпущены первые нор-

мы прочности и руководства по расчетам на прочность зарядов твердого топлива для конструкторов. Новизна этих норм по сравнению с действовавшими в то время в министерствах общего машиностроения, оборонной и авиационной промышленности заключалась во введении нелинейных и дифференцированных коэффициентов безопасности изделий, что объяснялось нелинейным характером решаемых задач. В данном случае нельзя было вводить общие коэффициенты безопасности, как это принято при расчетах линейно упругих конструкций.

При отсутствии мощных компьютеров А.А.Ильюшин предложил новый метод решения задач линейной теории термовязкоупругости названный им "методом аппроксимаций". Его идея заключалась в использовании в преобразованиях Лапласа-Карсона положительной действительной переменной, после чего обратное преобразование можно было находить, приближая решение задач в изображениях с помощью набора некоторых изображений, допускающих точные обратные преобразования.

В области нелинейной теории вязкоупругости А.А.Ильюшин сделал существенный шаг вперед, предложив частный случай нелинейной теории, названной "главной квазилинейной теорией вязкоупругости". Эта теория достаточно проста, хорошо согласуется с опытами и служит для оценки точности линейной теории.

Для решения задач о колебаниях вязкоупругих конструкций плодотворной оказалась идея Ильюшина об усреднении соответствующих систем интегро-дифференциальных уравнений. Она была развита и применена на практике для расчета многих сооружений в сейсмоактивных зонах страны.

Необходимо отметить выдающийся вклад Ильюшина в решение сложной проблемы обеспечения прочности коллекторов парогенераторов атомных электростанций. В 1992 г. он стал инициатором постановки комплексной проблемы, решение которой потребовало использования технологий ракетно-космической техники в интересах народного хозяйства. Одним из важных факторов, позволивших разобраться в причинах существовавших ранее концентраций напряжений в коллекторах, приводивших к частым авариям, было применение теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина, что дало возможность повысить надежность конструкций. В результате проведенных работ были внесены конструктивные и технологические изменения, исключившие аварии на парогенераторах атомных станций.

Научный авторитет и организационные способности Алексея Антоновича были востребованы и в эти (университетские) годы его жизни. Он являлся бессменным председателем Совета АН СССР по проблемам прочности и пластичности, сотрудничал в правительственных экспертных комиссиях, в редакциях научных журналов и сборников, в течение многих

лет работал членом Президиума ВАК СССР, членом спецсекций Комитета по Ленинским премиям при Совете Министров СССР, членом Генеральной ассамблеи Международного союза по теоретической и прикладной механике. Заслуги А.А.Ильюшина в развитии науки были отмечены высокими правительственными наградами. Он был награжден 10 орденами и многими медалями. Ученый Совет Московского университета присудил ему в 1995 г. премию им. М. В. Ломоносова I степени за цикл работ "Теория упругопластических процессов: экспериментально-теоретические исследования". А. А. Ильюшин является одним из немногих профессоров МГУ, чье имя при жизни было занесено на Золотую Доску Почета Московского университета.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Динамика // Вестник Московского университета, сер.1, 1994, №3.
2. *Ильюшин А.А.* Фрагменты воспоминаний // Личный архив А.А.Ильюшина.
3. *Ильюшин А.А.* Автобиография // Личный архив А.А.Ильюшина.
4. *Ильюшин А.А.* Неопубликованные фрагменты статьи "Динамика" // Личный архив А.А.Ильюшина.
5. Оружие Победы // сб. под ред. В.Н.Новикова, гл.9 "Боеприпасы". М.: Машиностроение, 1985.
6. С.П.Королев и его дело. Избранные труды и документы, под ред. Б.В.Раушенбаха. М.: Наука, 1998.
7. *Ильюшин А.А.* Дневниковые записи // Личный архив А.А.Ильюшина
8. *Одинг И.А.* За материалистические принципы в теории прочности и пластичности металлов // Вестник машиностроения, №2, 1950.

ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Г. Л. Бровко

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

glb@mech.math.msu.su

Представлены результаты исследований определяющих соотношений классических моделей сплошных сред. Затронуты некоторые аспекты построения определяющих соотношений неклассических моделей.

1. Введение

Определяющие соотношения механических свойств деформируемых тел, в том числе свойств сопротивления деформированию, составляют центральное звено в системе соотношений, моделирующей механические процессы в телах. Исследование специфических механических свойств деформируемых тел является наиболее важным направлением в механике сплошных сред, сохраняющим свою актуальность. По оценке А.А.Ильюшина создание общей теории определяющих соотношений механики сплошной среды явилось важнейшим открытием XX века, сопоставимым по значимости с созданием теории деформаций и напряжений на заре науки.

Широко известными и признанными подходами в теории определяющих соотношений являются подходы А.А.Ильюшина и У.Нолла.

Становление подхода А.А.Ильюшина тесно связано с его исследованиями в пластичности, вязкоупругости, в общей классической и неклассической механике сплошной среды, в термомеханике (*см.* [1–6], *а также* [7–10]). Введенные им понятия простого и сложного нагружения, образа процесса в пятимерном пространстве изображений, выдвинутые им общий и частный постулаты изотропии, постулат пластичности, принцип запаздывания, эффективная классификация механических процессов по степени сложности траектории деформации, предложенные им формы определяющих соотношений свойств пластичности, вязкоупругости, повреждаемости материалов явились основой для формулировки А.А.Ильюшиным общего постулата механики сплошной среды — *постулата макроскопической определимости*, выражающего общую форму определяющих соотношений в классической механике сплошной среды.

Другой подход, предпринятый У.Ноллом, базировался на известных результатах теории инвариантов. Основы его теории определяющих соот-

ношений составляют принципы детерминизма и причинности, локального действия и материальной независимости от системы отсчета (*см.* [11–13]). Позднее теория была продвинута, в первую очередь, для простых тел [14–16].

Понятия классической деформируемой среды А.А.Ильюшина и простого тела У.Нолла совпали, и тем самым определяющие соотношения Ильюшина и Нолла оказались эквивалентными общими формами определяющих соотношений классической механики сплошной среды.

В последние годы А.А.Ильюшин уделял особое внимание специальным аспектам развития общей теории определяющих соотношений: обобщению и развитию теории механических тензорных процессов, в первую очередь, тензорных мер напряжений и конечных деформаций, способам представления определяющих соотношений между тензорами в лагранжевой и эйлеровой формах, возможностям обобщения постулата изотропии на конечные деформации, способам распространения определяющих соотношений, известных при малых деформациях, на область конечных деформаций.

В поле зрения А.А.Ильюшина оставались также вопросы, связанные со структурой материала и ее влиянием на макромеханические свойства, с моделированием сред и структур неклассического типа, гетерогенных структур, включая наполненные пористые среды.

Ниже кратко представлены результаты некоторых исследований, проводившихся на кафедре теории упругости под руководством А.А.Ильюшина и в соответствии с его идеями.

2. Классическая теория

Основные результаты этого раздела получены под непосредственным руководством А.А.Ильюшина и отражены в [17–23] и других работах.

2.1. Типы механических тензорных характеристик. Объективные тензоры. По признаку преобразования тензорных механических характеристик при замене системы отсчёта выделены тензоры, названные *объективными*[1]. Каждое множество объективных тензоров ранга n разбито на 2^n типов объективности. В частности, для тензоров второго ранга установлено 4 типа объективных тензоров, включая материально ориентированные (известные как инвариантные [24, 25], или “лагранжевы” [26] тензоры) и пространственно ориентированные (индифферентные [24, 25], “эйлеровы” [26], или не зависящие от системы отсчета [13]). Введено понятие *диаграмм*, связывающих родственные по механическому смыслу объективные тензоры разных типов одного ранга (тензоры-аналоги). Изучено представление объективных тензорных процессов через их интроспективы (ретроспективы).

[1] Название предложено А.А. Ильюшиным.

Тем самым установлена упорядоченная иерархическая структура механических тензорных процессов, исчерпывающим образом выражающая естественные связи между родственными тензорными характеристиками, удобная для представления определяющих соотношений различных механических свойств сред. Дальнейшие исследования отражены в [27–29].

2.2. Независимые от системы отсчета отображения. Объективные производные и интегралы. Для отображений и уравнений, связывающих объективные тензорные процессы (вообще говоря, различных типов и рангов) введено понятие *независимости от системы отсчета* — фундаментального свойства определяющих соотношений классической механики сплошной среды. Введено понятие обобщенной изотропии отображений (уравнений) и ее типа (составленного типами тензоров-аргументов и тензоров-образов). Установлен критерий независимости отображений (уравнений) от системы отсчета: обобщенная изотропия и инвариантность относительно временны́х сдвигов. Обнаружено, что тип обобщенной изотропии отображения, вообще говоря, существенно специализирует его математическую структуру, для некоторых типов — вплоть до тривиальной. Единственными отображениями, не ограниченными по своей математической структуре, являются отображения типа Ильюшина, а именно, связывающие материальные тензоры с материальными [29].

Для каждого не зависящего от системы отсчета отображения определенного типа (*порождающего отображения*, или *индуктора*) построен [27, 29] пакет родственных отображений (*кондукторов*) других типов для тензоров, входящих в диаграммы тензора-аргумента и тензора-образа исходного отображения. Отображения каждого пакета эквивалентно выражают связи между родственными тензорами этих диаграмм и могут служить разными представлениями операторов, входящих в определяющие соотношения.

В качестве подпакета родственных отображений диаграммы в себя, порожденного отображением-индуктором типа Ильюшина, а именно, оператором материального дифференцирования по времени, построена совокупность дифференциальных операторов, обобщающая известное понятие *объективных производных* [19, 20, 29]. Введено понятие обратной операции — *объективного интегрирования*. Конкретный математический вид объективных производных и интегралов определяется выбором диаграммы.

2.3. Обобщенная теория тензорных мер напряжений и конечных деформаций. Теория предусматривает построение новых тензорных мер напряжений и деформаций. Аксиомы теории [17, 18] выражают общие свойства материально ориентированных тензорных мер напряжений и конечных деформаций: симметричность, независимость описания напряженно-деформированного состояния (процесса) от пространствен-

ных поворотов, сопровождающих деформацию частицы среды, энергетическая сопряженность, асимптотическое совпадение с классическими мерами в области малых деформаций. Дополнительными аксиомами требуется, чтобы шаровые и девиаторные части новых мер имели в точности такой же смысл, как в классическом случае малых деформаций.

Построено множество новых мер, удовлетворяющих указанным аксиомам, в том числе дополнительным аксиомам. Выделен широкий класс (*лагранжев класс*) мер, получаемых из известных преобразованиями типа Пиолы с помощью невырожденных тензоров второго ранга, определяющих конкретный вид диаграмм тензоров напряжений и деформаций (и соответствующих скоростей их изменения по времени). Требования дополнительных аксиом (о шаровых и девиаторных частях) вычленяют из лагранжева класса *семейство коротационных мер* [18]. Требование алгебраической связи с известными классическими тензорами напряжений и конечных деформаций вычленяет *семейство голономных тензорных мер* [21]. Все классы и семейства содержат континуумы мер.

2.4. Вариант новой аксиоматики общей теории определяющих соотношений. Аксиоматика новой теории [23, 30] отличается от традиционных построений одновременным учетом *внутренних массовых сил* и возможного наличия *внутренних кинематических связей* в теле. Динамический процесс в теле включает не только его движение и поле тензора напряжений, но и поле внутренних массовых сил, причем движение тела лимитируется его внутренними кинематическими связями.

Принимаются аксиомы о независимости динамического процесса в теле от процессов в других телах (принцип локальной отделимости), о представимости системы определяющих соотношений в виде уравнения кинематической связи для допустимых движений и двух уравнений, выражающих полевые значения в текущий момент тензора напряжений и вектора внутренних массовых сил с точностью до неопределенных слагаемых, не совершающих (в совокупности) работу на допустимых движениях (принцип структурно-энергетического детерминизма), а также о независимости соотношений от системы отсчета (принцип материальной независимости от системы отсчета).

Выведена общая приведенная форма системы определяющих соотношений, показывающая локальный характер зависимости оператора напряжений от движения частицы тела и глобальный характер зависимости поля внутренних массовых сил от движения всего тела, а также выявляющая (раздельно) свойства неопределенных полей напряжений и внутренних массовых сил.

В случае, когда внутренними массовыми силами можно пренебречь, полученные соотношения совпадают с известными. А если при этом отсутствуют и кинематические связи, система вырождается в одно соотно-

шение для поля напряжений, эквивалентное классическим определяющим соотношениям Ильюшина и Нолла.

Рассмотрены формы записи определяющих соотношений в терминах новых тензорных мер напряжений и деформаций.

2.5. Обобщение определяющих соотношений на область конечных деформаций. Определяющие соотношения сред, известные при малых деформациях, могут быть распространены на область больших деформаций путем замены тензоров напряжений и деформаций, входящих в эти соотношения, на новые тензорные меры напряжений и конечных деформаций.

Известные способы такого обобщения свойств пластичности, в том числе свойств пятимерной изотропии Ильюшина [24,25,31] базировались на конкретном выборе пары тензорных мер напряжений и деформаций (конкретном выборе объективной производной), и давали однозначные результаты (впрочем, не всегда удовлетворительные [32]).

Между тем, построение новых тензорных мер напряжений и конечных деформаций показывает, что классы и семейства таких мер континуальны. Поэтому указанный способ обобщения соотношений на конечные деформации *принципиально неоднозначен*, он зависит от выбранной пары (новых) тензорных мер напряжений и конечных деформаций (от их диаграмм и соответствующих объективных производных). При этом оказалось, что выбор тензорных мер существенно влияет на поведение модели материала. Это открывает новые дополнительные возможности для аппроксимации экспериментальных данных путем выбора этих мер из некоторого подходящего класса (семейства) даже при сохранении математической формы определяющего соотношения.

Так, в рамках специального подсемейства коротационных мер были получены существенно различные обобщения на конечные деформации соотношений гипоупругости, пластичности малой кривизны, теории пластического течения [33,34]. В рамках семейства голономных мер построены обобщения моделей материалов с памятью формы [35], показавшие заметные различия уже при небольших деформациях.

3. Неклассические и гетерогенные среды

3.1. Континуум Коссера: конструктивное моделирование. *Метод механического моделирования*, предложенный А.А.Ильюшиным в связи с исследованием решетчатых структур [36], был использован при анализе процессов в теплообменниках атомных электростанций. На основе этого метода построена конструктивная плоская модель континуума Коссера [37]. Этим же методом построена модель одномерного континуума Коссера [38], подробно изучены ее свойства и виды движений, дано обобщение на неупругие свойства.

3.2. Модели многофазных наполненных пористых сред. Интерактивные взаимодействия. Исследованиям многофазных сред, в том числе наполненных пористых сред посвящены многие классические работы [39–47]. На основе принятой *концепции взаимопроникающих континуумов* и *межфазных (интерактивных) силовых взаимодействий* предложена модель газожидконаполненной пористой среды с деформируемым каркасом [48], для которой на основе принципа материальной независимости от системы отсчета с использованием методов теории размерностей проведен анализ интерактивных сил. Выявлено, что взаимодействие фаз в наполненном пористом конгломерате характеризуется статическими силами и силами динамического фронтального сопротивления трех типов: давление напора, вязкое сопротивление (типа Дарси) и инерционное сопротивление (типа Био) [49].

Проведено теоретическое рассмотрение типов составных (силовых и моментных) воздействий протекания жидкой фазы на каркас, указывающее на возможное появление не только фронтальных, но и подъемных (смещающих) сил, а также опрокидывающих и винтовых моментов [50].

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч.1. Упругопластические деформации. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 376 с. (*См. также:* М.: Логос, 2004. 388 с. – *репр. переизд.*)
2. *Ильюшин А.А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // ПММ. 1954. Т.18. Вып.6. С. 641-666.
3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
4. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 310 с. (*См. также:* М.: 1965-1966; М.: 1971; М.: 1978)
5. *Ильюшин А.А.* Функционалы и меры необратимости на множествах процессов в механике сплошной среды (МСС) // ДАН. 1994. Т.337. № 1. С. 48-50.
6. *Ильюшин А.А.* Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошной среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1996. N 5. С. 6-14.
7. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с.
8. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Мысль, 1970. 280 с.
9. *Ильюшин А.А., Ломакин В.А.* Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 54-61.
10. *Ильюшин А.А., Ильюшина Г.А.* Вопросы термодинамики необратимых процессов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1983. N 3. С. 73-80.
11. *Noll W.* A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Arch. Rat. Mech. Anal. 1958. V.2. Pp. 197-226.
12. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of Mechanics. Handbuch der Physik. III/3. Berlin: Springer Verlag, 1965. [*See also:* Third Edition. Berlin: Springer, 2004. 602 pp.]
13. *Труселл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
14. *Noll W.* Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1967. V.27. No 1. Pp. 1-32.
15. *Noll W.* A new mathematical theory of simple materials // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1972. V.48. No 1. Pp. 1-50.

16. *Noll W.* Lectures on the foundations of continuum mechanics and thermodynamics // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1973. V.52. No 1. Pp. 62-92.
17. *Бровко Г.Л.* Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях. В кн.: Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 68-81.
18. *Бровко Г.Л.* Понятия образа процесса и пятимерной изотропии свойств материалов при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. № 3. С. 565-570.
19. *Бровко Г.Л.* Свойства и интегрирование некоторых производных по времени от тензорных процессов в механике сплошной среды // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 1. С. 54-60.
20. *Бровко Г.Л.* Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // ПММ. 1990. Т.54. Вып.5. С. 814-824.
21. *Бровко Г.Л.* Об одном семействе голономных тензорных мер деформаций и напряжений. Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ. 1992. № 4. С. 86-91.
22. *Бровко Г.Л., Ильюшин А.А.* Модели и определяющие эксперименты в теории упругопластических процессов при конечных деформациях // А.А.Ильюшин. Труды. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009. С. 148-159.
23. *Бровко Г.Л.* Развитие математического аппарата и основ общей теории определяющих соотношений механики сплошной среды. Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук. М.: Изд-во АО «Диалог МГУ», 1996. 32 с.
24. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
25. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка. 1987. 231 с.
26. *Ogden R.W.* On Eulerian and Lagrangean objectivity in continuum mechanics // Arch. Mech. 1984. V.36. No 2. Pp. 207-218.
27. *Brovko G.L.* Invariance Types of Tensors, Tensor Processes and Their Transforms in Classical Continuum Mechanics // Proc. of the Fifth Int. Seminar on Geometry, Continuum and Microstructures. Sept. 26-28, 2001, Sinaia, Romania. Eds: S.Cleja-Ţigoiu, V.Ţigoiu. Editura Academiei Romane. Bucuresti, 2002. Pp. 13-24.
28. *Бровко Г.Л.* Вопросы инвариантности в классических и неклассических моделях сплошных сред // Упругость и неупругость. М.: URSS, 2006. С. 110-123.
29. *Бровко Г.Л.* Эффективные свойства инвариантности процессов и соотношений в механике сплошных сред // Современные проблемы математики и механики. Т. II. Механика. Вып. 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. С. 108-126.
30. *Brovko G.L.* On general principles of the theory of constitutive relations in classic continuum mechanics // Journ. Eng. Math. Kluver Academic Publishers *(in print)*.
31. *Маркин А.А., Толоконников Л.А.* Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Всес. межвуз. сб. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1987. С. 32-37.
32. *Nagtegaal J.C., de Jong J.E.* Some aspects of nonisotropic work hardening in finite strain plasticity // Plasticity of metals at finite strain: Theory, Experiment and Computation. Stanford Univ. and Dept. Mech. Eng., R.P.I., 1982. Pp. 65-102.
33. *Финошкина А.С.* Использование новых объективных производных в простейших моделях гипоупругости и пластического течения с кинематическим упрочнением. Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2000. Т.6. Вып.2. С.160-166.
34. *Финошкина А.С.* Модели пластичности при конечных деформациях. Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2003.
35. *Шуткин А.С.* Подходы к обобщению определяющих соотношений деформируемых твердых тел на область конечных деформаций // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 2. С. 166-180.

36. *Бровко Г.Л., Ильюшин А.А.* Об одной плоской модели перфорированных плит // Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ. 1993. № 2. С. 83-91.
37. *Бровко Г.Л.* Об одной конструкционной модели среды Коссера // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 75-91.
38. *Бровко Г.Л., Иванова О.А.* Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 22-36.
39. *Biot M.A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. 33, No 4. 1482-1498.
40. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 352 с.
41. *Green A.E., Naghdi P.M.* A dynamical theory of interacting continua // Int. J. Eng. Sci. 1965. 3, No 2. 231-241.
42. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика насыщенных пористых сред. М., 1970.
43. *Рахматулин Х.А., Саатов Я.У., Филиппов И.Г., Артыков Т.У.* Волны в двухкомпонентных средах. Ташкент, 1974.
44. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
45. *Хорошун Л.П., Солтанов Н.С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. Киев: Наук. Думка, 1984. 109 с.
46. *Рущицкий Я.Я.* Элементы теории смесей. Киев: Наук. думка, 1999. 160 с.
47. *Coussy O.* Poromechanics. Chichester: John Wiley&Sons, 2004.
48. *Бровко Г.Л.* Модель неоднородной жидкогазонаполненной среды с деформируемым твердым каркасом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1998. № 5. 45-52.
49. *Brovko G.L., Grishayev A.G., Ivanova O.A.* Continuum models of discrete heterogeneous structures and saturated porous media: constitutive relations and invariance of internal interactions // Journal of Physics: Conference Series. 62. 2007. Pp. 1-22.
50. *Бровко Г.Л.* Модели и задачи для наполненных пористых сред // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика *(в печати)*.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ В ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ ВЫСОКОНАПОЛНЕННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Д. Л. Быков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

1. **Введение.** Здесь рассматриваются двухфазные наполненные полимерные материалы, образованные каучукообразными связующими, в которых равномерно распределены кристаллические частицы наполнителей. При процентном содержании наполнителей, достигающем 80-ти и более процентов от объема композита, полимерные материалы называются высоконаполненными (ВНПМ). Таким материалам присущи два вида разрушения: отслоение наполнителей от связующих и разрушение связующих. Первый случай называется внутренним адгезионным разрушением материала, а второй-его когезионным разрушением.

В зависимости от структуры материала и внешних силовых и температурных воздействий оба вида разрушения могут происходить одновременно или чередоваться с некоторой последовательностью. Как показывают опыты, во многих случаях адгезионное разрушение начинается раньше когезионного. Это является следствием избранной технологии производства ВНПМ и слабо зависит от типа нагружения материала.

Наличие двух независимых видов разрушения приводит к различному сопротивлению материалов при разных деформационных процессах. В результате механические характеристики, входящие в используемые определяющие соотношения, найденные в одних опытах, могут значительно отличаться от найденных в других. Это приводит к ошибочным заключениям о неуниверсальности подобных механических характеристик.

Между тем появление новых методов идентификации определяющих соотношений нелинейной теории вязкоупругости позволяет разыскивать такие определяющие соотношения, которые могут значительно сокращать различие между механическими характеристиками, найденными при разных деформационных процессах. К таким методам можно отнести “генетический алгоритм” [1]. Он основан на возможности перебора огромного числа вариантов численных значений коэффициентов, входящих в избранные определяющие соотношения, до достижения минимума отклонений теоретических и экспериментальных значений напряженно-деформированных состояний, реализуемых в различных опытах. Это позволяет одновременно корректировать выбор разыскиваемых коэффициен-

тов с учетом результатов, найденных при разных экспериментах, интересующих исследователей.

Существенным при использовании указанного алгоритма является априорное ограничение областей допустимых изменений всех коэффициентов, входящих в определяющие соотношения. Число коэффициентов, а следовательно, трудоемкость и точность проводимых вычислений, зависят от видов материальных функций, используемых в определяющих соотношениях и содержащих искомые коэффициенты.

Таким образом, эффективность указанного метода сводится к выполнению двух условий: наличия удачно выбранных материальных функций, позволяющих учитывать особенности различных напряженно-деформируемых состояний, и сведений о физически допустимых пределах изменения используемых в них коэффициентов.

В следующем разделе указан пример, иллюстрирующий возможность построения материальных функций, расширяющих пределы применяемости их определяющих соотношений.

2. Использование критерия Велера в определяющих соотношениях нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов. Идентификация материальных функций, входящих в определяющие соотношения нелинейных теорий вязкоупругости проводится путем аналитической аппроксимации экспериментально полученных зависимостей между напряжениями, деформациями и временем. Существуют алгоритмы, позволяющие представлять ядра релаксации и ползучести с помощью сумм экспоненциальных функций времени. Они находятся, как правило, в интервалах от начала нагружения образцов до их разрушения. Каждому деформационному процессу соответствуют свои ядра релаксации и ползучести. При этом не делается попыток найти универсальные характеристики материала, которые могли бы применяться для описания других опытов.

В линейной теории вязкоупругости при однозначном определении ядер релаксации и ползучести в каждом эксперименте невозможно находить универсальные характеристики материала. Но в нелинейных теориях такая возможность предоставляется, благодаря наличию в них дополнительных функций увеличивающих число степеней свободы для описания сопротивления материалов при разных деформационных процессах. В дальнейшем будет рассматриваться нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов (НЭТСВУМ), определяющие соотношения которой при одноосном напряженно-деформированном состоянии представляются в виде [2]

$$\sigma(t) = \varphi(t) \int_0^t R\left[t_*(t) - t_*(\tau)\right] d\varepsilon(\tau) \qquad (1)$$

$$\varepsilon(t) = \varphi(t) \int_0^t \Pi\,[t_*\,(t) - t_*\,(\tau)]d\left[\frac{\sigma(\tau)}{\varphi(\tau)}\right] \qquad (2)$$

Здесь $\sigma(t)$ — напряжение, $\varepsilon(t)$ — деформация, $R(t)$ — ядро релаксации, $\Pi(t)$ — ядро ползучести, $\varphi(t)$ — функция старения, $f(t)$ — функция вязкости, $t_*(t)$ — приведенное время

$$t_*(t) = \int_0^t \frac{\varphi(z)}{f(z)} dz \qquad (3)$$

Как видно из (1) и (2), в НЭТСВУМ входят три материальные функции: $R(t)$, $\varphi(t)$, $f(t)$ или $\Pi(t)$, $\varphi(t)$, $f(t)$, поскольку ядра $R(t)$и $\Pi(t)$ взаимосвязаны линейными интегральными уравнениями [3].

Здесь будет рассмотрен вопрос о том, как можно находить функции $\varphi(t)$и $f(t)$, при которых для определенного класса деформационных процессов механические характеристики НЭТСВУМ будут универсальными. Для получения ответа на поставленный вопрос заметим, что особыми свойствами обладают зависимости, выражающие критерии разрушения материалов. Эти критерии по своей сути являются универсальными, поскольку выражают условия разрушения не для одного какого-либо процесса нагружения, а для класса нагружений определенного типа. Обычно критерии связывают инварианты тензоров напряжений и деформаций, если материалы обладают склерономными свойствами. Но при реономных свойствах они включают также время протекающих процессов.

Следует заметить, что введение критериев разрушения в определяющие соотношения проводилось и раньше. Например, это сделано в известной теории накопления повреждений Работнова Ю.Н.–Качанова Л.М. [4]. Однако, применительно к вязкоупругим материалам, насколько известно автору, такие подходы еще не применялись.

Для иллюстрации изложенного выше рассмотрим пример использования в определяющих соотношениях НЭТСВУМ критерия Велера, в котором время разрушения растянутого образца t_p выражается через постоянное растягивающее напряжение σ_0 формулой

$$t_p = B\sigma_0^{-m}, \qquad (4)$$

где B и m — положительные константы, являющиеся **характеристиками** материала. Чтобы ввести этот критерий в функции $\varphi(t)$ и $f(t)$, входящие в определяющие соотношения (1) и (2), представим их в виде

$$\varphi(t) = \left(1 - t/t_p\right)^{\alpha}, \quad f(t) = \left(1 - t/t_p\right)^{\nu} \qquad (5)$$

Здесь числа αи ν удовлетворяют неравенствам

$$1 > \nu > \alpha > 0. \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) приводят к равенствам

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(t_p) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(t_p) = 0, \tag{7}$$

т.е. при $t = 0$ функции $\varphi(t)$ и $f(t)$указывают на отсутствие начальной поврежденности материала, а при $t = t_p$ — на исчерпание его когезионной и адгезионной прочности. Неравенства (6) показывают, что в начале разрушения происходит отслоение частиц наполнителя от связующего, а затем начинается разрушение связующего. Таким образом, выбор функций $\varphi(t)$ и $f(t)$ в виде (5), (6) качественно правильно учитывает известные процессы перехода ВНПМ от недеформируемого состояния к состоянию разрушения. Заметим, что в формулах (5) не конкретизировалось значение t_p и его связь с формулой (4). Это указывает на возможность использования формул (5) и неравенств типа (6) и в других деформационных процессах помимо рассматривавшихся. При этом необходимо связать время разрушения t_p с параметрами нагружения или деформирования в соответствующих процессах, ведущих к разрушению материала.

Чтобы уточнить формулы (5) и неравенства (6), проведем анализ их использования в выражениях деформаций $\varepsilon(t)$, скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}(t)$, мощности удельной рассеянной энергии $W_*(t)$ и удельной рассеянной энергии $A_*(t)$ НЭТСВУМ. Эти тестовые выражения выбраны потому, что они допускают оценку их возможных представлений при $t \to t_p$, исходя из физических соображений.

Поскольку рассматривается процесс с известным напряжением: $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$, где $h(t)$ — единичная функция Хевисайда, то целесообразно воспользоваться обобщенной моделью Кельвина–Фойгта а которой ядро ползучести имеет вид

$$\Pi(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{E_n} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_n}{\mu_n} t \right) \right] \tag{8}$$

Здесь E_0, E_n, μ_n — положительные материальные константы.

Запишем выражения искомых величин при $t > 0$ [5]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0 \varphi(t)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \frac{\sigma_0}{f(\tau)} \exp\left[-\frac{E_n}{\mu_n} (t_*(t) - t_*(\tau)) \right] d\tau \tag{9}$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\varphi(t)} \right) + \tag{10}$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{\sigma_0}{\mu_n f(t)}\left[1-\frac{E_n}{\mu_n}\varphi(t)\int_0^t\frac{1}{f(\tau)}\exp\left[-\frac{E_n}{\mu_n}(t_*(t)-t_*(\tau))\right]d\tau\right]$$

$$W_*(t)=\frac{\sigma_0^2}{f(t)}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\mu_n}\left[1-\frac{E_n}{\mu_n}\varphi(t)\int_0^t\frac{1}{f(\tau)}\exp\left[-\frac{E_n}{\mu_n}(t_*(t)-t_*(\tau))\right]d\tau\right]^2 \tag{11}$$

$$A_*(t)=\int_0^t W_*(\tau)d\tau \tag{12}$$

Из выражений (9)–(12), (5), (6) с учетом неравенства

$$t_*(t)-t_*(\tau)=\frac{t_p}{(1+\alpha-\nu)}\left[\left(1-t/t_p\right)^{1+\alpha-\nu}-\left(1-t/t_p\right)^{1+\alpha-\nu}\right]\geqslant 0 \tag{13}$$

следует, что сингулярность деформации $\varepsilon(t)$ при $t\to t_p$ имеет порядок $\left(1-t/t_p\right)^{-\alpha}$, сингулярность скорости деформации при $t\to t_p$ имеет порядок $\left(1-t/t_p\right)^{-1-\alpha}$, сингулярность мощности удельной рассеянной энергии при $t\to t_p$ имеет порядок $\left(1-t/t_p\right)^{-\nu}$, а удельная рассеянная энергия при $t\to t_p$ не имеет сингулярности.

Физический смысл полученного результата можно трактовать следующим образом. Поскольку допускалось, что хотя бы одна из двух функций $\varphi(t)$ и $f(t)$могла обращаться в нуль при $t=t_p$, а в опытах в момент разрушения никогда не наблюдалось бесконечно большой величины деформации, то при условиях (5) необходимо считать константу α равной нулю. При этом из (9) будет следовать ограниченность деформации $\varepsilon\left(t_p\right)$, но тогда в силу (5) $\varphi(t)\equiv 1$, что означало бы, что вплоть до разрушения образца не происходит деструкции связующего, а все разрушение является следствием только нарушения внутренней адгезионной прочности. Этот вариант разрушения композита тоже по физическим соображениям не возможен так как известно что при разрыве образца он делится на две части, а следовательно, функция $\varphi(t)$ не может тождественно равняться единице.

Отсюда вытекает, что функцию $\varphi(t)$целесообразно искать в виде, обобщающем формулу (5):

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)=\left(1+\varepsilon-t/t_p\right)^{\alpha}, \tag{14}$$

где $\varepsilon>0$. Из (14) при $t\to t_p$ следует: $\varphi_1\left(t_p\right)=\varepsilon^{\alpha}$. Величина ε может регулировать значение функции $\varphi_1(t)$, если $\alpha>0$. В частности, при $\varepsilon\to 0$, $\varphi_1(t_p)\to 0$.

Аналогично можно поступить и с выбором функции $f(t)$, заменив ее на выражение $f_1(t)$:

$$f_1(t) = \left(1 + \varepsilon - t/t_p\right)^{\nu} \tag{15}$$

В этом случае при соблюдении неравенств (6) все выражения (9)-(12) будут иметь конечные значения, в то время как, если вместо функции $f_1(t)$ оставить функцию $f(t)$, то мощность удельной рассеянной энергии $W_*(t_p)$ останется сингулярной. Что касается удельной рассеянной энергии $A_*(t)$, то она останется конечной при $t = t_p$ в каждом из рассмотренных вариантов представления функций $\varphi(t)$ и $f(t)$.

3. Выводы. На основании проведенных исследований можно сформулировать следующие выводы:

– при использовании критерия Велера в определяющих соотношениях НЭТСВУМ рекомендуется выбирать функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) = \left(1 + \varepsilon - t/t_p\right)^{\alpha}, \quad f(t) = \varphi_1(t) = \left(1 + \varepsilon - t/t_p\right)^{\nu},$$

где $\varepsilon > 0$, $1 > \nu > \alpha > 0$;

– константы ε, ν, α рекомендуется выбирать из условия наилучшей аппроксимации экспериментально найденных значений деформаций и скоростей деформаций в опыте на ползучесть до разрушения образцов ВНПМ;

– при необходимости обобщать вид представленных функций старения и вязкости можно заменить в одной из них константу ε на положительную константу β. В таком случае будут подлежать определению четыре константы $\varepsilon, \beta, \nu, \alpha$;

– определять все неизвестные константы, входящие в ядро $\Pi(t)$, а также функции $\varphi_1(t)$ и $f_1(t)$ можно с помощью генетического алгоритма. При этом принятые неравенства (6) позволяют ограничивать области их допустимых изменений, что сокращает время вычислений;

– рекомендованный способ использования критериев разрушения в определяющих соотношениях НЭТСВУМ позволяет с высокой точностью описывать кривые ползучести вплоть до разрушения ВНПМ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00345).

Литература

1. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия-Телеком, 2008. 383 с.
2. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов// Изв. РАН. МТТ. 2002. №4. С. 63-76
3. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. *Быков Д.Л.* Использование структурных составляющих удельной работы внутренних сил для описания сопротивления вязкоупругих материалов// Изв. РАН. МТТ. 2003. №3. С. 99-111.

ТЕОРИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПЛАСТИЧНОСТЬ

Р. А. Васин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

Обсуждается влияние, которое оказала теория упругопластических процессов на развитие экспериментальной пластичности, начиная с 50-х годов прошлого века. Рассматриваются три аспекта этого влияния: создание соответствующей техники и проведение экспериментов, направленных непосредственно на проверку или обоснование гипотез теории упругопластических процессов и (или) следствий из них; изменение идеологии и программ экспериментальных исследований при сложном нагружении материалов; появление и развитие качественно нового численно-экспериментального метода решения краевых задач теории пластичности СН-ЭВМ.

Для истории современной теории пластичности поистине знаменательным явилось введение А.А. Ильюшиным понятий простого и сложного нагружений и целенаправленное использование им понятия процесса нагружения (деформирования). Названные понятия легли в основу созданной им теории упругопластических процессов (ТУПП) [1]. Эта теория не только даёт общую схему построения широких классов определяющих соотношений, но и предлагает оригинальный подход к исследованию упругопластических процессов. Ниже на нескольких примерах будет показано, насколько плодотворными для развития экспериментальной пластичности оказались постулаты и сама идеология ТУПП.

1. Полезно рассмотреть, на какой экспериментальный материал опирался А.А. Ильюшин, когда создавал теорию малых упругопластических деформаций [2], а затем и ТУПП для исходно изотропных материалов. К началу 40-х годов прошлого века сформировались основные положения классической теории течения, существовали несколько её конкретных вариантов и деформационная теория Генки; проводились, начиная с 1900 года, эксперименты при неоднооосном напряженном состоянии (испытания тонкостенных трубчатых образцов). Были накоплены обширные и разнообразные экспериментальные данные об испытании металлов, сплавов, горных пород и других материалов в условиях одноосного и неоднооосного (в основном пропорционального) нагружения вплоть до разрушения (см., например, сборник переводов [3] или монографию [4]). Исследовались главным образом условия наступления пластичности или условия разрушения, а также возможность построения универсальной (для разных

видов напряженного состояния) зависимости между некоторой обобщённой характеристикой напряженного состояния и соответствующей характеристикой деформированного состояния. Следует отметить, что во всех перечисленных целях экспериментальных работ речь идёт о соотношениях между скалярными, инвариантными характеристиками напряженного и деформированного состояний. Анализируя результаты этих работ (см. [2], §8), А.А. Ильюшин отметил необходимость отслеживать и тензорные характеристики в соотношениях между напряжениями и деформациями. Помимо взаимного расположения главных осей тензоров напряжений и деформаций (отмечавшегося практически всеми экспериментаторами) он предложил определять ещё и компоненты введённого им направляющего тензора напряжений. Условием постоянства (независимости от величины параметра прослеживания процесса) компонент этого тензора А.А. Ильюшин выделил класс процессов простого нагружения.

Этот факт оказал существенное влияние на оценку результатов уже выполненных экспериментов, и, возможно, ещё бóльшее — на планирование новых экспериментальных исследований. Во-первых, получили объяснение некоторые противоречия теоретических предсказаний с экспериментальными данными — все они относились к процессам *не* простого, т.е. сложного нагружения. Во-вторых, появилась возможность сформулировать адекватные, хорошо согласующиеся с экспериментами определяющие соотношения для конкретного класса процессов — простого нагружения. Действительно, для этого в качестве базовых материальных функций достаточно было выбрать из двух альтернативных начальных условий текучести — Губера–Мизеса и Треска — первое, а также не противоречащую ему универсальную зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций $\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u)$. Поскольку многие известные к началу 40-х годов эксперименты проводились при пропорциональном нагружении, их результаты стали востребованными — они автоматически становились базой для проверки теории малых упругопластических деформаций и её обоснования.

Интересно отметить, что логика построения этой теории уже содержала в себе реализацию постулата изотропии. Действительно, говоря языком ТУПП [1], в пятимерном пространстве деформаций начальная поверхность текучести имела форму сферы, на всех лучевых траекториях деформаций связь $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ была одинакова, а векторы напряжений и деформаций коллинеарны. Не менее интересен и тот факт, что явление запаздывания векторных свойств, которое вошло в формулировку другого важного постулата ТУПП, наблюдалось в экспериментах еще до появления ТУПП и даже графически представлено в работе Хоэнемзера и Прагера 1932 года (см. [3]) для двузвенных траекторий деформаций в форме, принятой в ТУПП.

Резюмируя, можно отметить, что в 1940-х годах уже имелись экспериментальные данные, достаточные для построения и обоснования теории малых упругопластических деформаций (эксперименты на простое нагружение) и в то же время демонстрирующие неадекватность существующих моделей при описании процессов, существенно отличающихся от простых (эксперименты на сложное нагружение). Отсутствовало главное – идеология разработки программ для экспериментальной аттестации существующих определяющих соотношений и целенаправленного (с указанной областью применимости) построения новых определяющих соотношений.

2. Такая идеология появилась, когда в 1954 году А.А. Ильюшин сформулировал теорию упругопластических процессов [5]. В рамках этой весьма общей и вместе с тем наглядно представляемой теории естественным образом формировалось четкое направление экспериментальных работ по исследованию функционалов пластичности и аттестации определяющих соотношений. Предложенное в [5] представление образа процесса в пространстве деформаций E_5 позволяло эффективно разрабатывать программы экспериментов с использованием базовых постулатов ТУПП — постулата изотропии и принципа запаздывания.

Качественная особенность этих оригинальных постулатов состояла в том, что они (или следствия из них) допускали прямую экспериментальную проверку в отличие от большинства гипотез, принимаемых в других подходах теории пластичности. Так, в теории течения имеются принципиальные трудности с экспериментальным построением поверхности нагружения *в точном соответствии* с ее теоретическим определением. Действительно, из многочисленных экспериментов известно (см., например, [6],[7]), что с уменьшением допуска на пластическую деформацию ниже примерно $(0{,}5 \div 1)\cdot 10^{-4}$ форма последующей поверхности нагружения существенно искажается, а ее размеры уменьшаются так, что она заведомо не включает начало координат (в пространстве напряжений). При наличии прецизионной измерительной техники дальнейшее уменьшение допуска на порядок и более может привести к ситуации, когда использование строгого определения поверхности нагружения теряет смысл. Проблема малого допуска усложняется проявлением временных эффектов даже при комнатной температуре (трудно отслеживаемых именно при малых допусках). Видимо, этими обстоятельствами объясняется спад интереса к экспериментальному построению поверхностей нагружения и, напротив, широкое использование простого условия пластичности Мизеса в расчетных моделях теории течения. Соответствующий комментарий можно сделать и относительно экспериментальной проверки принципа градиентальности: при малых допусках имеются проблемы как с определением нормали к поверхности нагружения (ее направление может изменяться с

величиной допуска на пластическую деформацию), так и с определением направления пластической деформации.

В физических теориях пластичности, как и в теориях скольжения, проверка исходных гипотез осуществляется опосредованно — только путём сравнения результатов расчёта по теоретической модели (базирующейся на ряде предположений, не допускающих прямой экспериментальной проверки) с экспериментальными данными.

Постулат изотропии, как уже говорилось, допускает прямую экспериментальную проверку в точном соответствии с его формулировкой в [1,5]. О точности выполнения постулата изотропии можно судить в первом приближении по результатам многочисленных экспериментов на простое нагружение — это та точность, с которой выполняются (при сравнении с экспериментальными данными) основные положения теории малых упругопластических деформаций. В этом случае характерные оценки неточности постулата изотропии определяются двумя факторами: различием зависимости «интенсивность напряжений σ_u – интенсивность деформаций ε_u» в опытах на растяжение и кручение; возможной несоосностью векторов напряжений и деформаций. Первые опыты по проверке постулата изотропии при сложном нагружении, выполненные В.С. Ленским [6,8] (реализация плоских траекторий деформаций с одинаковой внутренней геометрией, но по-разному расположенных в пространстве E_5), а затем и другими исследователями (см., например, обзор [7]; [9 - 11]), показали, что постулат изотропии выполняется практически с той же точностью, что и при простом нагружении. Совокупность экспериментов, посвящённых исследованию постулата изотропии, включала программы по разнообразным плоским и пространственным траекториям деформаций и охватывала широкий набор металлов и сплавов (большей частью – не сильно упрочняющихся). Известны эксперименты (см. [12]), в которых постулат изотропии был подтверждён на материале, чувствительном к скорости деформации, — полиэтилене высокого давления. Косвенной проверкой постулата изотропии послужили результаты экспериментов по построению последующих поверхностей нагружения, когда они строились в соответствующих точках траекторий деформаций с одинаковой внутренней геометрией.

Ко всем упомянутым выше экспериментам относится следующее замечание. У образов процессов сравниваемых траекторий деформаций значения гидростатического давления в соответствующих точках, как правило, были разными. Таким образом, постулат изотропии выполнялся даже при таком (трудно исправимом) отклонении от точной программы эксперимента.

Принцип запаздывания векторных свойств (в дальнейшем для краткости — принцип запаздывания) допускает прямую экспериментальную

проверку следующего вида: один образец испытывается по некоторой (сложной) программе OAB; другой образец — по качественно отличной от первой программе деформирования на участке OA и по программе, совпадающей с первой на участке AB. Если принцип запаздывания справедлив, то, начиная с точки C на участке AB, отстоящей от точки A (по длине s дуги траектории деформаций) на величину λ — след запаздывания, ориентация вектора напряжений $\bar{\sigma}$ относительно траектории деформаций должна быть одинакова (по некоторому допуску) в обоих опытах. Однако в указанной формулировке эксперименты по проверке принципа запаздывания почти не проводились (в известных экспериментах различие путей предварительного деформирования из точки 0 в точку A было несущественным); фактически исследовалось поведение вектора $\bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma}/|\bar{\sigma}|$ на траекториях деформаций с постоянными или кусочно-постоянными значениями кривизны, т.е. следствия из принципа запаздывания.

Первые [8–10] и последующие многочисленные эксперименты с двузвенными траекториями деформаций подтверждали прямое следствие принципа запаздывания – вектор $\bar{\sigma}^0$ после излома траектории деформаций постепенно ложился на направление второго звена; они использовались для определения величины λ. В экспериментах по траекториям деформаций в форме сопряженных дуг окружностей наблюдалась тенденция к установлению постоянного угла ϑ между вектором $\bar{\sigma}^0$ и касательной к траектории деформаций; условие $\vartheta \approx const$ выполнялось и на траекториях деформаций в форме окружности с центром в начале координат. Вместе с тем, когда центр окружности был смещён из начала координат или траектория деформаций имела форму винтовой линии, наблюдалось нарушение этого условия – зависимость $\vartheta(s)$ становилась периодической функцией. Изменение вида зависимости $\vartheta(s)$ при смещении в пространстве E_5 траектории деформаций в пространстве E_5 как жесткого целого обусловлено, вероятно, влиянием частичных разгрузок; этот факт требует дополнительного экспериментального исследования.

Помимо постулата изотропии и принципа запаздывания, в рамках ТУПП экспериментально исследовались и некоторые частные гипотезы и проблемы – гипотеза локальной определенности [6]; гипотеза о компланарности векторов $\bar{\sigma}, d\bar{\sigma}$ и $d\bar{\varepsilon}$, ($\bar{\varepsilon}$ – вектор деформаций) ([9],[13] и др.); деформационная анизотропия при сложном нагружении; возможность дифференциально нелинейной связи напряжений и деформаций; особенности локально простых процессов, сложной разгрузки [13] и т.д.

3. Исследования по экспериментальному обоснованию и развитию ТУПП потребовали создания нового класса испытательных кинематических машин типа СН и проведения экспериментов по качественно новым программам, реализация которых представляла самостоятельный интерес и привела к установлению ранее неизвестных свойств материалов. Так,

именно для анализа постулатов ТУПП были разработаны оригинальные программы испытаний по круговым, винтовым, трехмерным многозвенным траекториям деформаций. Циклические эксперименты по круговым траекториям деформаций с центром в начале координат привели к открытию у некоторых материалов эффекта дополнительного упрочнения – увеличения максимального за цикл значения σ_u до полутора-двух раз по сравнению с одноосным деформированием с той же амплитудой (см., например, [14], где дополнительное упрочнение объясняется низкой энергией дефектов упаковки).

4. Подход ТУПП к рассмотрению упругопластических процессов существенно повлиял на развитие экспериментальной пластичности и даже на изменение идеологии экспериментальных исследований. Действительно, до появления ТУПП типичной целью эксперимента могло быть выяснение, какой вариант определяющих соотношений или условия текучести является лучшим; при этом программа испытаний была в известном смысле случайной – она определялась или возможностями используемой установки, или удобством теоретического анализа, или интуитивно выбранным "характерным видом" процесса. После опубликования Дракером известного постулата пластичности значительно активизировались работы по экспериментальному построению последующих поверхностей нагружения и проверке условия градиентальности, однако, как отмечалось выше, в этих исследованиях возникали принципиальные трудности (выбор допуска, временные эффекты). ТУПП внесла ясность в формулировки программ экспериментов на сложное нагружение – это исследование свойств материалов для разных классов процессов. К настоящему времени в рамках ТУПП или по идеологии ТУПП экспериментально обследованы обширные классы процессов упругопластического деформирования по плоским и пространственным траекториям деформирования или нагружения (см. [9–11, 13, 15] и экспериментальные данные в [16]) и выявлены для них характерные особенности функционалов, определяющих векторные и скалярные свойства связи напряжений и деформаций. При этом количество экспериментов во всех программах сокращалось за счет использования постулата изотропии. Глубокие и систематические экспериментальные исследования упругопластических процессов проводятся в последние десятилетия в г. Твери под руководством В.Г. Зубчанинова ([13, 15] и др.).

После появления классификации процессов деформирования (с использованием принципа запаздывания) получила научную основу проблема экспериментального нахождения области применимости определяющих соотношений. Наконец, только с помощью ТУПП стало возможным построение теории эксперимента (т.е. метода определения напряженно-

деформированного состояния в образце) при сложном нагружении цилиндрических образцов [17, 18].

5. С появлением ТУПП качественно изменилась роль эксперимента при решении краевых задач теории пластичности. В рамках ТУПП возникла идея проверки физической достоверности решения, состоящая в экспериментальной реализации характерных траекторий деформаций, полученных в расчете, и последующем сравнении найденной из эксперимента траектории напряжений с расчетной. ТУПП позволила четко сформулировать принцип построения используемых при расчетах банков данных о механических свойствах материалов – по классам процессов сложного нагружения. Наконец, идеология ТУПП использовалась А.А.Ильюшиным при создании принципиально нового численно-экспериментального метода СН-ЭВМ [1,19] решения физически нелинейных краевых задач, позволяющего с использованием установки СН уточнять определяющие соотношения, используемые при решении задачи. Реализация метода СН-ЭВМ включает алгоритм проверки физической достоверности решения и приводит к построению соответствующих банков данных о механических свойствах материалов. Метод СН-ЭВМ получил в последние годы развитие применительно к решению нелинейных динамических задач [20].

6. Дальнейшее развитие экспериментальной пластичности на основе ТУПП видится в следующих направлениях. 1^0. Построение широкой и хорошо формализованной системы классов процессов, включающей все классы процессов деформирования, типичные для технологий обработки давлением. Такая система необходима и для аттестации определяющих соотношений, и для применения метода СН-ЭВМ, и при построении банков данных о структурно-механических свойствах материалов. 2^0. Аттестация определяющих соотношений, включённых в универсальные программные комплексы для решения краевых задач, на базе определённых классов процессов деформирования (см. п.1^0). 3^0. Целенаправленное пополнение банков данных о структурно-механических свойствах материалов. 4^0. Развитие теории эксперимента при неоднородном напряжённо-деформированном состоянии образца.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 271 с.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч.1. Упруго-пластические деформации. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ. 1948. 376 с. Репр.воспр. текста М.:Логос. 2004. 388 с.
3. Теория пластичности. Сб. статей. Пер. под ред. Ю.Н.Работнова. М.: ГИТТЛ. 1948. 452 с.
4. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. литературы. 1954. 647 с.
5. *Ильюшин А.А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // ПММ, 1954, т.18, вып. 6, с.641–666.

6. *Ленский В.С.* Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // В сб. “Упругость и неупругость”, вып.5. Изд-во Моск. ун-та, 1978. С.65–96.
7. *Васин Р.А.* Определяющие соотношения теории пластичности // В кн.:Итоги науки и техн. Сер. мех. деформ. тверд. тела. ВИНИТИ, в.21. М., 1990. С.3–75.
8. *Ленский В.С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // В сб. “Вопросы теории пластичности”. Изд-во АН СССР. М., 1961. С.58–82.
9. *Васин Р.А.* Об экспериментальном исследовании функционалов пластичности в теории упругопластических процессов // В кн.: Пластичн. и разрушение тверд.тел. М., Наука, 1988. С.40–57.
10. *Васин Р.А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // В сб. “Упругость и неупругость”, вып.1. Изд-во Моск. ун-та, 1971. С.59-126.
11. *Ohashi Y.* Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behaviour of metals. – Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, 1982, v.34, №1, p.1–76.
12. *Васин Р.А., Никиточкин А.Н., Огибалов П.М.* О проверке постулата изотропии при переменной скорости деформирования // Механика полимеров, 1975, №2, с.224–227.
13. *Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В.* Экспериментальная пластичность. Кн.1. Процессы сложного деформирования. Тверь: ТГТУ, 2003. 172 с.
14. *Itoh T., Sakane M., Ohnami M., Ameyama K.* Additional hardening due to nonproportional cyclic loading. A contribution of stacking fault energy.- Int. Seminar on “Multiaxial Plasticity. 1-4 Sept. 1992. Cachan France. Preprints of MECAMAT‘92.
15. *Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В.* Экспериментальная пластичность. Кн.2. Процессы сложного нагружения. Тверь: ТГТУ, 2004. 184 с.
16. *Бондарь В.С., Даншин В.В.* Пластичность. Непропорциональные нагружения. М..: Изд-во МГТУ “МАМИ”, 2008. 218 с.
17. *Васин Р.А., Ильюшин А.А., Моссаковский П.А.* Исследование определяющих соотношений и критериев разрушения на сплошных и толстостенных трубчатых образцах // Изв РАН, МТТ, 1994, №2.
18. *Муравлёв А.В.* Экспериментальное построение функционалов пластичности для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных в опытах на сплошных цилиндрических образцах // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1996, №5, с.74–80.
19. *Ильюшин А.А.* Метод СН-ЭВМ в теории пластичности // В сб. “Проблемы прикл. математики и механики. М.: Наука, 1971.
20. *Васин Р.А., Моссаковский П.А., Рязанцева М.Ю.* Развитие экспериментально-вычислительного метода решения нелинейных задач механики // Сб. тр. Межд. н.-т. конф. “Инновации в машиностроении”. Минск, 2008. с.129–135.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕАЛЬНОЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ

Д. В. Георгиевский [1], ***Р. Вилле*** [2]

[1] ***МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия***
[2] ***Технический Университет, Берлин, Германия***

[1] **georgiev@mech.math.msu.su,** [2] **ralf_wille@tu-berlin.de**

Аналитически развита методика асимптотического интегрирования применительно к ряду краевых задач о несжимаемом идеальножёсткопластическом течении под действием нагрузки в тонком плоском слое. Материал слоя может занимать достаточно произвольную в плане область. Представлен алгоритм построения асимптотического решения задачи. Рассмотрена возможность идеальножёсткопластического течения вдоль одного из семейства координатных линий. Для этого необходимо, чтобы шероховатость прессующих плит определённым образом зависела от координат. Результаты прокомментированы для частных случаев – классической задачи Прандтля и её осесимметричных аналогов.

1. В предположении безынерционности деформирования и отсутствия массовых сил три уравнения равновесия и условие несжимаемости, описывающие течение в тонком в направлении x_3 слое $\Omega = V \times [-h, h]$, имеют вид

$$\left(H_{(1)} H_{(2)} \frac{-p\delta_{ik} + s_{ik}}{H_{(i)} H_{(k)}} \right)_{,k} + H_{(1)} H_{(2)} \frac{-p\delta_{jk} + s_{jk}}{H_{(j)} H_{(k)}} \Gamma^i_{jk} = 0 \qquad (1)$$

$$(H_{(2)} v_1)_{,1} + (H_{(1)} v_2)_{,2} + H_{(1)} H_{(2)} v_{3,3} = 0 \qquad (2)$$

Здесь p – давление, s_{ik} и v_i – физические компоненты девиатора напряжений и вектора скорости в ортогональной криволинейной системе координат (q_1, q_2, q_3): $x_I = x_I(q_1, q_2)$, $x_3 = q_3$; $H_{(i)}$ и Γ^i_{jk} – коэффициенты Ламе и символы Кристоффеля этой системы координат. Суммирование по дважды повторяющимся в (1) малым латинским индексам, не заключённым в скобки, производится от 1 до 3, при этом величины $H_{(i)}$ играют роль весовых коэффициентов. Запятая в индексе обозначает частную производную по соответствующей криволинейной координате q_i.

Критерий пластичности Мизеса – Генки $\sigma_u \equiv \sqrt{s_{ij}\, s_{ij}} = \sigma_s$, принятый в данной работе, с учётом того, что $s_{33} = -s_{11} - s_{22}$, можно записать как

$$s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{11} s_{22} + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 = \sigma_s^2 / 2 \equiv \tau_s^2 \qquad (3)$$

где τ_s – предел текучести при сдвиге, σ_u – интенсивность напряжений.

В замкнутую систему уравнений пластического течения в слое Ω относительно девяти неизвестных функций от q_1, q_2, q_3: v_1, v_2, v_3, p, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{13}, s_{23} включим четыре уравнения (1), (2), квадратичный критерий пластичности (3) и четыре требования соосности:

$$\frac{s_{11}}{v_{11}} = \frac{s_{22}}{v_{22}} = \frac{s_{12}}{v_{12}} = \frac{s_{13}}{v_{13}} = \frac{s_{23}}{v_{23}} \tag{4}$$

куда надо подставить соотношения Стокса, связывающие физические компоненты v_{ij} тензора скоростей деформаций и вектора скорости [1, 2]. Нетрудно показать, что из (3) и (4) следуют все тензорно линейные (векторно линейные) определяющие соотношения материала.

2. Проведём формальные разложения всех девяти выше перечисленных неизвестных функций от q_1, q_2, q_3 по естественному асимптотическому параметру системы $\alpha = h/L \ll 1$, где L – характерный размер области слоя в плане:

$$v_I = V\left(\alpha^{-1}\bar{v}_I^{\{-1\}} + \bar{v}_I^{\{0\}} + \alpha\bar{v}_I^{\{1\}} + \dots\right),\ v_3 = V\left(\bar{v}_3^{\{0\}} + \alpha\bar{v}_3^{\{1\}} + \dots\right) \tag{5}$$

$$p = \tau_s\left(\alpha^{-1}\bar{p}^{\{-1\}} + \bar{p}^{\{0\}} + \alpha\bar{p}^{\{1\}} + \dots\right),\ s_{ij} = \tau_s\left(\bar{s}_{ij}^{\{0\}} + \alpha\bar{s}_{ij}^{\{1\}} + \dots\right)$$

где V – характерная скорость течения. Безразмерные коэффициенты рядов (5) — переменные с верхней чертой — функции безразмерных координат $\rho_1 = q_1/Q_1$, $\rho_2 = q_2/Q_2$ и $\zeta = x_3/h = q_3/h$, в терминах которых область Ω деформируется из тонкого слоя в тело, вписанное в параллелепипед с соизмеримыми сторонами. Одна из пар противоположных сторон этого параллелепипеда — плоскости $\zeta = \pm 1$.

Наличие в (5) членов $\alpha^{-1}\bar{v}_I^{\{-1\}}$ и $\alpha^{-1}\bar{p}^{\{-1\}}$ обуславливает при некоторых граничных условиях (например, при сдавливании исходного слоя) стремление v_1, v_2 и p в бесконечность при $\alpha \to 0$, что ясно и из физических соображений. При этом v_3 и все компоненты девиатора напряжений остаются конечными. Будем рассматривать только те заранее неизвестные подобласти Ω, где все девять рядов (5) асимптотичны в смысле Пуанкаре.

Подстановка разложений (5) в систему (1) – (4) и приравнивание нулю коэффициентов при минимальных степенях α приводит к 12 уравнениям:

$$\bar{p}_{,\zeta}^{\{-1\}} = 0 \tag{6}$$

$$-\bar{p}_{,I}^{\{-1\}} + \bar{H}_{(I)}\bar{s}_{I3,\zeta}^{\{0\}} = 0, \quad \bar{p}_{,\zeta}^{\{0\}} + \bar{s}_{JJ,\zeta}^{\{0\}} = 0 \tag{7}$$

$$\bar{v}_{I,\zeta}^{\{-1\}} = 0 \tag{8}$$

$$\left(\bar{H}_{(2)}\bar{v}_1^{\{-1\}}\right)_{,1} + \left(\bar{H}_{(1)}\bar{v}_2^{\{-1\}}\right)_{,2} + \bar{H}_{(1)}\bar{H}_{(2)}\bar{v}_{3,\zeta}^{\{0\}} = 0 \tag{9}$$

$$\bigl(s_{11}^{\{0\}}\bigr)^2 + \bigl(s_{22}^{\{0\}}\bigr)^2 + s_{11}^{\{0\}} s_{22}^{\{0\}} + \bigl(s_{12}^{\{0\}}\bigr)^2 + \bigl(s_{13}^{\{0\}}\bigr)^2 + \bigl(s_{23}^{\{0\}}\bigr)^2 = 1 \tag{10}$$

$$\bar{s}_{22}^{\{0\}} = \frac{\bar{H}_{(1)} \bar{v}_{2,2}^{\{-1\}} + \bar{H}_{(2),1} \bar{v}_1^{\{-1\}}}{\bar{H}_{(2)} \bar{v}_{1,1}^{\{-1\}} + \bar{H}_{(1),2} \bar{v}_2^{\{-1\}}} \bar{s}_{11}^{\{0\}} \tag{11}$$

$$\bar{s}_{12}^{\{0\}} = \frac{\bar{H}_{(1)} \bar{v}_{1,2}^{\{-1\}} + \bar{H}_{(2)} \bar{v}_{2,1}^{\{-1\}} - \bar{H}_{(1),2} \bar{v}_1^{\{-1\}} - \bar{H}_{(2),1} \bar{v}_2^{\{-1\}}}{2\bigl(\bar{H}_{(2)} \bar{v}_{1,1}^{\{-1\}} + \bar{H}_{(1),2} \bar{v}_2^{\{-1\}}\bigr)} \bar{s}_{11}^{\{0\}} \tag{12}$$

$$\bar{s}_{I3}^{\{0\}} = \frac{\bar{H}_{(1)} \bar{H}_{(2)} \bar{v}_{I,\zeta}^{\{0\}}}{2\bigl(\bar{H}_{(2)} \bar{v}_{1,1}^{\{-1\}} + \bar{H}_{(1),2} \bar{v}_2^{\{-1\}}\bigr)} \bar{s}_{11}^{\{0\}} \tag{13}$$

относительно 12 неизвестных: трёх присутствующих в (5) функций с верхним индексом $\{-1\}$ и девяти с $\{0\}$. Запятые в индексах в (6) – (13) обозначают частные производные по ρ_1, ρ_2 и ζ. Безразмерные коэффициенты Ламе связаны с размерными:

$$H_{(1)}(q_1, q_2) = L \bar{H}_{(1)}(\rho_1, \rho_2)/Q_1, \;\; H_{(2)}(q_1, q_2) = L \bar{H}_{(2)}(\rho_1, \rho_2)/Q_2 \tag{14}$$

Из уравнения (6) и первых двух уравнений (7) при $I = 1, 2$ следует линейность функций $\bar{s}_{13}^{\{0\}}$ и $\bar{s}_{23}^{\{0\}}$ по ζ. В силу естественно требуемой нечётности $\bar{s}_{I3}^{\{0\}}$ по ζ запишем

$$\bar{s}_{13}^{\{0\}} = -m_1(\rho_1, \rho_2)\zeta, \quad \bar{s}_{23}^{\{0\}} = -m_2(\rho_1, \rho_2)\zeta \tag{15}$$

где m_1 и m_2 – некоторые функции, такие что $m_1^2 + m_2^2 \le 1$ (в силу условия (10) при $\zeta = \pm 1$) и

$$(m_1 \bar{H}_{(1)})_{,2} = (m_2 \bar{H}_{(2)})_{,1} \tag{16}$$

Тогда давление $\bar{p}^{\{-1\}}$ равно

$$\bar{p}^{\{-1\}} = \bar{p}_0^{\{-1\}} - \int m_1 \bar{H}_{(1)} \, d\rho_1 = \bar{p}_0^{\{-1\}} - \int m_2 \bar{H}_{(2)} \, d\rho_2 \tag{17}$$

где $\bar{p}_0^{\{-1\}} = \text{const}$.

Из обоих уравнений (8) при $I = 1, 2$ и уравнения (9) сразу следует линейность скорости $\bar{v}_3^{\{0\}}$ по ζ и связь функций $\bar{v}_I^{\{-1\}}(\rho_1, \rho_2)$:

$$\bigl(\bar{H}_{(2)} \bar{v}_1^{\{-1\}}\bigr)_{,1} + \bigl(\bar{H}_{(1)} \bar{v}_2^{\{-1\}}\bigr)_{,2} = C \bar{H}_{(1)} \bar{H}_{(2)} \tag{18}$$

Здесь использовано также то, что $(\bar{v}_3^{\{0\}}|_{\zeta=\pm 1})(\rho_1, \rho_2) = \text{const}$.

Таким образом, независимо от граничных условий на лицевых поверхностях $\zeta = \pm 1$ и даже от вида определяющих соотношений главные приближения по α компонент s_{13}, s_{23} и v_3 линейны по толщине слоя. Но

коэффициенты этой линейности — функции координат в плоскости слоя, зависящие как от определяющих соотношений, так и условий при $\zeta = \pm 1$. Это утверждение не противоречит теории тонкого слоя.

3. Поставим теперь следующие кинематические граничные условия: $v_3|_{x_3=\pm h} = \mp V$, т. е.

$$\bar{v}_3^{\{0\}}|_{\zeta=\pm 1} = \mp 1, \quad \bar{v}_3^{\{n\}}|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad n \geq 1 \tag{19}$$

соответствующие при $V > 0$ растеканию идеально жёсткопластического слоя между сближающимися с постоянными скоростями абсолютно жёсткими плитами. Касательные составляющие скорости (в данном случае v_I) на границе идеальной среды, как известно, не задаются.

Условия непротекания (19) полностью определяют функцию $\bar{v}_3^{\{0\}}$:

$$\bar{v}_3^{\{0\}} = -\zeta \tag{20}$$

так что в уравнении (18) необходимо положить $C = 1$. Данная задача обобщает классическую в механике деформируемого твёрдого тела задачу Прандтля на случай произвольной формы слоя.

Исследуем возможность выбора таких коэффициентов Ламе $\bar{H}_{(I)}$, а следовательно, такой ортогональной системы координат, что $v_2 = 0$ в любой точке области, т. е. проекции линий тока на плоскости $\zeta = \text{const}$ совпадают с координатными линиями $\rho_2 = \text{const}$. Данное предположение значительно упрощает систему (6)–(13) и позволяет провести её аналитическое интегрирование.

Полагая $v_2 \equiv 0$, т. е. $\bar{v}_2^{\{-1\}} = \bar{v}_2^{\{0\}} = \cdots = 0$, получим из (13) $\bar{s}_{23}^{\{0\}} \equiv 0$, а из (15) и (16)

$$m_1(\rho_1, \rho_2) = \frac{m(\rho_1)}{\bar{H}_{(1)}}, \quad m_2 \equiv 0 \tag{21}$$

Если определить шероховатость прессущей плиты в точке с координатами ρ_1 и ρ_2 как отношение модуля касательного напряжения s_{13} на поверхности этой плиты к пределу текучести при сдвиге, то величина $|m_1|$ (21) как раз имеет смысл шероховатости.

Интегрирование уравнения (18) при $C = 1$ определяет компоненту $\bar{v}_1^{\{-1\}}$ с точностью до некоторой функции от ρ_2:

$$\bar{v}_1^{\{-1\}}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\bar{H}_{(2)}} \left(\int \bar{H}_{(1)} \bar{H}_{(2)} \, d\rho_1 + \varphi(\rho_2) \right) \tag{22}$$

Сдвигом криволинейной системы координат вдоль линий $\rho_1 = \text{const}$ добьёмся того, чтобы $\varphi(\rho_2) \equiv 0$.

Соотношения (11) и (12), связывающие $\bar{s}_{22}^{\{0\}}$ и $\bar{s}_{12}^{\{0\}}$ с $\bar{s}_{11}^{\{0\}}$, принимают вид

$$\bar{s}_{22}^{\{0\}} = \frac{\bar{H}_{(2),1}\bar{v}_1^{\{-1\}}}{\bar{H}_{(2)}\bar{v}_{1,1}^{\{-1\}}}\,\bar{s}_{11}^{\{0\}} \equiv a\bar{s}_{11}^{\{0\}} \tag{23}$$

$$\bar{s}_{12}^{\{0\}} = \frac{\bar{H}_{(1)}\bar{v}_{1,2}^{\{-1\}} - \bar{H}_{(1),2}\bar{v}_1^{\{-1\}}}{2\bar{H}_{(2)}\bar{v}_{1,1}^{\{-1\}}}\,\bar{s}_{11}^{\{0\}} \equiv b\bar{s}_{11}^{\{0\}} \tag{24}$$

причём функции $a(\rho_1, \rho_2)$ и $b(\rho_1, \rho_2)$ находятся на основании известной из (22) компоненты скорости $\bar{v}_1^{\{-1\}}$.

Подставим теперь выражения (15) с учётом (21), а также (23) и (24) в алгебраическое равенство (10). Отсюда определим $\bar{s}_{11}^{\{0\}}$, а затем из (7) $\bar{p}^{\{0\}}$:

$$\bar{s}_{11}^{\{0\}} = \pm\sqrt{\frac{1 - m_1^2\zeta^2}{1 + a + a^2 + b^2}}, \quad \bar{p}^{\{0\}} = \bar{p}_0^{\{0\}} - (1 + a)\bar{s}_{11}^{\{0\}} \tag{25}$$

Обратимся к связи компонент $\bar{s}_{13}^{\{0\}}$ и $\bar{s}_{11}^{\{0\}}$ (13) (при $I = 1$). Из неё и (25) следует, что

$$\bar{v}_{1,\zeta}^{\{0\}} = \mp\frac{2m_1\zeta}{\sqrt{1 - m_1^2\zeta^2}}\sqrt{1 + a + a^2 + b^2}\;\frac{\bar{v}_{1,1}^{\{-1\}}}{\bar{H}_{(1)}} \tag{26}$$

а после интегрирования по ζ:

$$\bar{v}_1^{\{0\}} = \pm\frac{2}{m_1}\sqrt{(1 - m_1^2\zeta^2)(1 + a + a^2 + b^2)}\;\frac{\bar{v}_{1,1}^{\{-1\}}}{\bar{H}_{(1)}} + g \tag{27}$$

где $g(\rho_1, \rho_2)$ – произвольная функция.

Выбор знака в (27) соответствует тому, какой профиль скорости $v_1(x_3)$ — выпуклый или вогнутый — реализуется в любом сечении слоя. Когда жёсткие плиты сближаются, т. е. материал растекается, физически более достоверен выпуклый профиль, а когда удаляются — вогнутый (в сторону центрального сечения слоя).

Следующее после (9) приближение по α условия несжимаемости при $\bar{v}_2^{\{0\}} \equiv 0$ имеет вид

$$\left(\bar{H}_{(2)}\bar{v}_1^{\{0\}}\right)_{,1} + \bar{H}_{(1)}\bar{H}_{(2)}\bar{v}_{3,\zeta}^{\{1\}} = 0 \tag{28}$$

Проинтегрируем (28) по ζ, принимая во внимание граничные условия (19) для $\bar{v}_3^{\{1\}}$:

$$\left(\bar{H}_{(2)}\int_{-1}^{1}\bar{v}_1^{\{0\}}\,d\zeta\right)_{,1} = 0 \tag{29}$$

Интегрируя теперь (29) по ρ_1 и подставляя выражение $\bar{v}_1^{\{0\}}$ (27), после вычислений запишем

$$\frac{\arcsin m_1}{m_1^2} + \frac{\sqrt{1-m_1^2}}{m_1} = \frac{\bar{H}_{(1)}}{2\bar{v}_{1,1}^{\{-1\}}\sqrt{1+a+a^2+b^2}}\Big(\frac{f}{\bar{H}_{(2)}} - 2g\Big) \qquad (30)$$

где $f(\rho_2)$ – произвольная функция.

Так как согласно (21) $m_1 = m(\rho_1)/\bar{H}_{(1)}$, то соотношение (30) связывает неопределённые до сих пор функции интегрирования $f(\rho_2)$, $g(\rho_1, \rho_2)$ и $m(\rho_1)$. Некоторые из них могут быть определены в процессе решения из соображения чётности (нечётности) параметров задачи, возникающей в результате симметрии области V. Ниже в примерах для конкретных систем координат продемонстрируем последовательное нахождение этих функций.

Важным моментом является также то, что компонента $\bar{v}_1^{\{0\}}$ (27) может быть неограниченной при обращении в нуль функции $m_1(\rho_1, \rho_2)$ в некоторых точках области V. При этом, очевидно, ряд (5) для $v_1(q_1, q_2, q_3)$ теряет асимптотичность в смысле Пуанкаре. Вблизи таких точек, а точнее говоря, координатных линий $\rho_1 = \text{const}$ (поскольку $m_1(\rho_1, \rho_2) = 0 \Longrightarrow m(\rho_1) = 0$) требуется проводить другое, отличное от (5), асимптотическое разложение.

4. Рассмотрим случай, когда область V в плоскости (x_1, x_2) — полоса $V = \{-L < x_1 < L, -\infty < x_2 < \infty\}$, а растекание слоя идёт вдоль координатных линий $x_2 = \text{const}$. Описание такого течения естественно вести в декартовой системе x_i, так что $H_{(i)} = 1$, $\bar{H}_{(i)} = 1$. Возникающая краевая задача пластического течения Сен-Венана называется в механике деформируемого твёрдого тела задачей Прандтля.

Безразмерными координатами в данном случае будут $\rho_1 = x_1/L$, $\rho_3 = x_3/h$, так что $-1 < \rho_1 < 1$, $-1 < \rho_3 < 1$. Двенадцать функций, входящих в систему (6)–(13), находятся последовательно по схеме, изложенной в п.п. 2 и 3:

$$\bar{s}_{13}^{\{0\}} = -m(\rho_1)\zeta, \quad \bar{s}_{23}^{\{0\}} \equiv 0, \quad \bar{p}^{\{-1\}} = \bar{p}_0^{\{-1\}} - \int_0^{\rho_1} m(\xi)\, d\xi \qquad (31)$$

$$\bar{v}_1^{\{-1\}} = \rho_1, \quad \bar{v}_2^{\{-1\}} = \bar{v}_2^{\{0\}} \equiv 0, \quad \bar{v}_3^{\{0\}} = -\zeta \qquad (32)$$

$$\bar{s}_{11}^{\{0\}} = \sqrt{1-m^2\zeta^2}, \quad \bar{s}_{22}^{\{0\}} = \bar{s}_{12}^{\{0\}} \equiv 0, \quad \bar{p}^{\{0\}} = \bar{p}_0^{\{0\}} - \sqrt{1-m^2\zeta^2} \qquad (33)$$

$$\bar{v}_1^{\{0\}} = \frac{2}{m}\sqrt{1-m^2\zeta^2} + g(\rho_1) \qquad (34)$$

Неизвестная функция $m(\rho_1)$ непрерывна, нечётна по ρ_1 и ограничена по модулю единицей. Отсюда следует, что, во всяком случае, $m(0) = 0$. С другой стороны, предельный переход $m \to 0$ выдерживают все функции (31)–(33), но не $\bar{v}_1^{\{0\}}$ (34). При $m \to 0$ ряд (5) для v_1 перестаёт быть асимптотичным по Пуанкаре. Следовательно, все разложения (5) имеют место вдали от срединного сечения $\rho_1 = 0$ слоя.

Уравнение (30), где надо положить $a = b = 0$, связывает две пока неизвестные функции $m(\rho_1)$ и $g(\rho_1)$:

$$\frac{\arcsin m}{m^2} + \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} = \frac{f}{2} - g, \quad f = \text{const} \tag{35}$$

Если заданная шероховатость плит m не зависит от ρ_1 (во всех точках вдали от сечения $\rho_1 = 0$ слоя), т. е. функция $m(\rho_1)$ имеет вид

$$m(\rho_1) = sm_0, \quad m_0 = \text{const}, \quad s = \operatorname{sign}\rho_1, \quad 0 < m_0 \le 1, \tag{36}$$

где $1/m_0 = O(1)$, то достаточно положить $g \equiv 0$ (в частности, в (34)).

В [3] показано, что в случае (36) ряды (5) имеют конечное число (один либо два) членов. Ни одна из функций с индексом $\{0\}$ не зависит от ρ_1, а зависимость от ρ_1 осуществляется лишь через $\bar{p}^{\{-1\}}$ (31) и $\bar{v}_1^{\{-1\}}$ (32). Окончательно решение в исходных переменных записывается следующим образом

$$s_{11} = \frac{\tau_s}{h}\sqrt{h^2 - m_0^2 x_3^2}, \; s_{13} = -\frac{\tau_s}{h}\, sm_0 x_3$$

$$p = p_0 - \frac{\tau_s}{h}\left(sm_0 x_1 + \sqrt{h^2 - m_0^2 x_3^2}\right) \tag{37}$$

$$v_1 = \frac{V}{h}\left(x_1 + \frac{2s}{m_0}\sqrt{h^2 - m_0^2 x_3^2}\right), \; v_3 = -\frac{V x_3}{h}$$

Постоянная p_0 выбирается так, чтобы давление p при подходе к краям ($|x_1| \to L$) было бы ограниченным.

Шероховатость m_0, как уже было сказано, является входным данным задачи. При $m_0 = 1$ плиты абсолютно шероховаты, так что касательное напряжение s_{13} на их поверхностях достигает по модулю предела текучести при сдвиге τ_s.

Классической задаче Прандтля с решением (37) и её обобщениям посвящено большое количество исследований. Некоторый их обзор содержится в работах [3, 4], где также проводятся анализ внутреннего разложения и возможные сшивки обоих разложений.

Литература

1. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. = *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.
2. *Ильюшин А.А.* Полная пластичность в процессах течения между жёсткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // ПММ. 1955. Т.19. Вып. 6. С. 693–713.
3. *Георгиевский Д.В.* Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 83–93.
4. *Георгиевский Д.В.* Асимптотический анализ пластического течения вдоль образующей в тонком цилиндрическом слое // ПМТФ. 2010. Т. 51. №5. С. 111–119.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ И АДГЕЗИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СИЛЫ ТРЕНИЯ ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ ШЕРОХОВАТЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

И. Г. Горячева, Ю. Ю. Маховская

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

Получено решение контактной задачи для двух осесимметричных упругих выступов различных форм при наличии адгезии. Проведен расчет диссипации энергии в цикле сближение-удаление выступов. Предложена модель адгезионной составляющей силы трения скольжения на основе расчета диссипации энергии при формировании и разрыве адгезионных контактов между отдельными неровностями в процессе взаимного скольжения шероховатых поверхностей. Проведен расчет и анализ этой силы трения в зависимости от параметров шероховатости и величины поверхностной энергии.

1. Введение

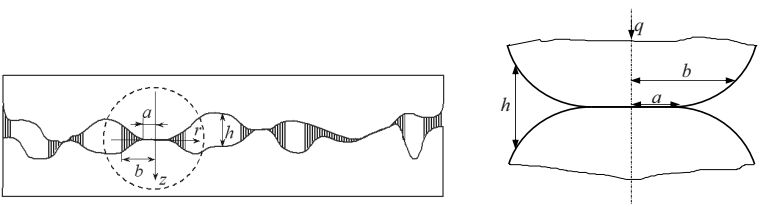
Адгезионное притяжение между поверхностями, вызванное молекулярными силами, существенно влияет на характеристики контактного взаимодействия твердых тел как при их нормальном нагружении, так и в контакте скольжения и качения, особенно на микро- и наномасштабных уровнях поверхностной шероховатости.

Контактные задачи об адгезионном взаимодействии двух упругих сфер были решены в классических работах [1] (модель JKR) и [2] (модель DMT), в которых были получены аналитические решения, а также в ряде работ, учитывающих адгезионное взаимодействие в более точной форме [3-6]. Задача об адгезионном взаимодействии двух упругих сфер с учетом точной формы потенциала Леннарда-Джонса была решена численно [7].

Анализ решения задачи о нормальном нагружении упругих тел, находящихся в адгезионном контакте, показывает, что зависимость силы, действующей между телами, от расстояния между ними, имеет форму петли гистерезиса [3,5,7], и поэтому при квазистатическом сближении и разведении этих тел имеет место диссипация энергии [8]. Корреляция между адгезионным гистерезисом в нормальном цикле сближения–удаления и силой трения скольжения наблюдалась экспериментально [9,10].

Теоретическая модель адгезионной составляющей силы трения скольжения была построена в [11] для волнистой поверхности и упругого полупространства на основе подхода механики разрушения. В этой модели

адгезионный гистерезис учитывается за счет разницы в значениях поверхностной энергии перед движущейся неровностью и за ней. Другой способ учета адгезионного гистерезиса был предложен в [12], где была представлена модель для расчета адгезионной составляющей силы трения качения на основе расчета диссипации энергии при образовании и разрушении адгезионных контактов поверхностных выступов в процессе качения шероховатого жесткого цилиндра по упругому полупространству. В настоящей работе применяется аналогичный подход для моделирования силы трения в контакте скольжения двух шероховатых упругих тел. В этом подходе существенно то, что оба тела являются шероховатыми, так что в процессе скольжения происходит циклическое образование и разрушение элементарных контактов между выступами (рис. 1,a).



а *б*

Рис. 1. Адгезионное взаимодействие шероховатых поверхностей (а). Схема адгезионного взаимодействия двух осесимметричных выступов (б).

2. Адгезионное взаимодействие двух упругих выступов

Рассматривается адгезионное взаимодействие двух осесимметричных упругих выступов (рис.1,*б*). Предполагается, что тангенциальное перемещение (перпендикулярное направлению оси z) отсутствует, и что сила трения между поверхностями равна нулю. Адгезионное напряжение, притягивающее поверхности друг к другу, действует вне области контакта и его величина в каждой точке зависит от величины зазора между поверхностями в этой точке. Зависимость молекулярного притяжения от расстояния между поверхностями обычно описывается функцией Леннарда-Джонса (рис.2). Контактная задача для двух упругих тел с учетом зависимости Леннарда-Джонса в точном виде ввиду своей сложности может быть решена только численно [7]. Поэтому для описания адгезионного взаимодействия будет использована модель Мажи-Дагдейла, в которой зависимость адгезионного напряжения от величины зазора между поверхностями аппроксимируется кусочно-постоянной функцией. Такая задача была

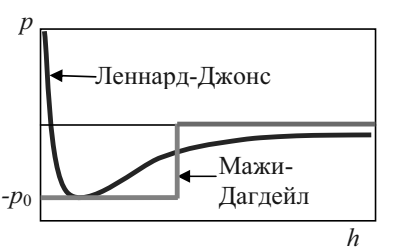


Рис. 2.

решена в [3] для случая двух параболических выступов, находящихся в непосредственном контакте. Ниже будет представлена постановка и дано решение этой задачи в более общем случае, когда форма зазора между поверхностями описывается степенной функцией четной степени, что позволяет исследовать роль формы неровности. Задача также решена для случая отсутствия контакта между поверхностями.

2.1. Постановка контактной задачи. Пусть взаимодействуют два осесимметричных упругих выступа, форма которых описывается степенной функцией $f(r) = f_1(r) + f_2(r) = Ar^{2n}$, где n — целое число. Контактная задача имеет следующие граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{aligned} u(r) &= -Ar^{2n} - \delta, \quad 0 < r < a, \\ p(r) &= -p_0, \qquad a \leqslant r \leqslant b, \\ p(r) &= 0, \qquad r > b \end{aligned} \tag{1}$$

где $u(r) = u_1(r) + u_2(r)$ — это суммарное перемещение поверхностей в нормальном направлении вследствие упругой деформации, $p(r)$ — давление на границе $z = 0$, δ — расстояние между двумя фиксированными точками, находящимися на оси симметрии взаимодействующих тел.

Контакт выступов имеет место внутри круговой области $0 < r < a$, а адгезионное взаимодействие — внутри кольцевой области $a \leqslant r \leqslant b$, в которой адгезионное давление p_0 постоянно в соответствии с моделью Мажи-Дагдейла. Поверхностная энергия определяется соотношением

$$\gamma = \int_0^\infty P(z)dz = p_0 \left[f(b) + u(b) + \delta \right] \tag{2}$$

Считается, что характеристики адгезионного взаимодействия, γ и p_0, заданы. Суммарное нормальное перемещение поверхностей $u(r)$ вследствие приложенного нормального давления $p(r)$ определяется соотношением [13]:

$$u(r) = \frac{4}{\pi E^*} \int_0^b p\left(r'\right) K\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r + r'}\right) \frac{r'\, dr'}{r + r'} \tag{3}$$

Здесь $(E^*)^{-1} = \left(1 - \nu_1^2\right) E_1^{-1} + \left(1 - \nu_2^2\right) E_2^{-1}$, где E_i и ν_i $(i = 1, 2)$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона взаимодействующих выступов, $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Внешняя нормальная сила q, приложенная к выступам, удовлетворяет условию равновесия

$$q = 2\pi \int_0^b rp(r)\, dr \tag{4}$$

2.2. Решение контактной задачи. Задача решается методом разложения в ряды [14]. В результате интегральное уравнение (3) с условиями (1) дает следующее решение для контактного давления ($r \leqslant a$):

$$p(r) = \frac{AE^*a^{2n-1}}{\pi}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-k} - \\ -p_0\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{b^2-a^2}}\right) \tag{5}$$

и для упругого перемещения $u(r)$ в зоне адгезионного взаимодействия ($a < r \leqslant b$):

$$u(r) = -\frac{2}{\pi}\left(d + Ar^{2n}\right)\arcsin\frac{a}{r} + \frac{2Ar^{2n}}{\pi}\sqrt{\frac{r^2}{a^2}-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k} - \\ -\frac{4p_0b}{\pi E^*}\left[E\left(\frac{r}{b}\right) - E\left(\arcsin\frac{a}{r}, \frac{r}{b}\right)\right] \tag{6}$$

где $\mathrm{E}(x)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Расстояние δ между телами определяется соотношением

$$\delta = -\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}Aa^{2n} + \frac{2p_0b}{E^*}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}, \tag{7}$$

а нормальная сила q, действующая на выступы, согласно (4) — соотношением

$$q = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}4E^*Ana^{2n+1} - 2p_0b^2\left(\arcsin\frac{a}{b} - \frac{a}{b}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}\right) \tag{8}$$

Если величина силы q задана, тогда уравнение (8) служит для определения неизвестных величин a и b. Второе уравнение получается путем подстановки (6) в (2).

2.3. Решение в случае отсутствия контакта. Если непосредственный контакт между поверхностями отсутствует, т.е. поверхности взаимодействуют только через адгезионное притяжение, следует положить $a = 0$ и не использовать первое из условий (1). В этом случае постоянное напряжение $p(r) = -p_0$ действует внутри круговой области $r \leqslant b$, радиус которой b определяется из соотношения

$$q = -\pi p_0 b^2 \tag{9}$$

Выражение для расстояния между телами имеет вид

$$\delta = -Ab^{2n} + \frac{4p_0 b}{\pi E}\left[1 - \frac{b}{R}E\left(\frac{b}{R}\right)\right] + \frac{\gamma}{p_0} \qquad (10)$$

3. Потеря энергии в элементарном цикле сближения–удаления выступов

Полученное решение контактной задачи позволяет изучить процесс циклического сближения и удаления двух упругих выступов при наличии адгезии. Для этого используется зависимость нормальной силы q от расстояния между поверхностями δ, построенная с помощью уравнений (2) и (6)-(8) для случая контакта поверхностей и уравнений (9)-(10) для случая отсутствия контакта.

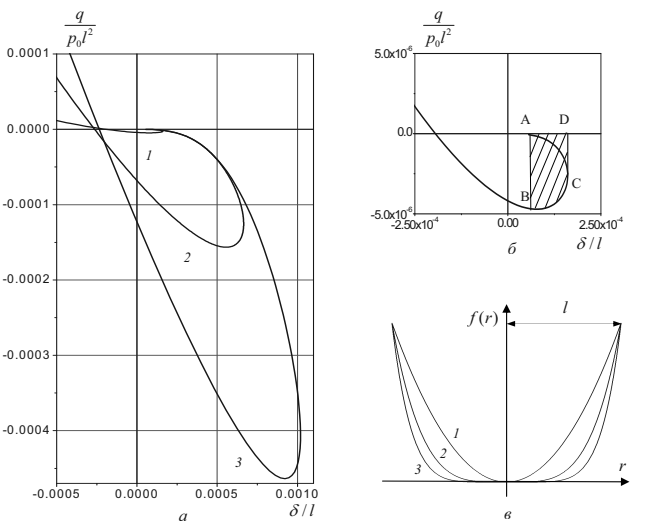


Рис. 3. Зависимости нагрузки от расстояния для выступов различной формы (а) и для параболических выступов (б). Различные формы выступов (в).

Примеры таких зависимостей приведены на рис. 3,а, где построены графики безразмерной нагрузки $q/(p_0 l^2)$ в зависимости от безразмерного расстояния δ/l. Здесь $l = (2A)^{-1/(2n-1)}$ — характерный размер неровности (см. рис. 3,*в*). Графики построены при следующих значениях безразмерных параметров: $E^*/p_0 = 1$ и $\gamma/(p_0 l) = 10^{-6}$. Кривые 1, 2 и 3 построены для выступов различной формы: n = 1, 2 и 3, соответственно. Соответствующая функция формы, $f(r) = f_1(r) + f_2(r) = Ar^{2n}$, показана на рис. 3,*в* для n = 1, 2 и 3 (кривые 1, 2 и 3).

Результаты показывают, что зависимость силы от расстояния между выступами является немонотонной и неоднозначной. Чтобы проследить цикл сближения–удаления выступов, рассмотрим рис. 3,*б*, который по-

строен при тех же значениях параметров, что и кривая 1 на рис. 3,*а*. Предположим, что вначале выступы находятся в контакте и прижаты друг к другу положительной силой q. Пусть затем расстояние между телами δ квазистатически увеличивается. При достижении точки C на графике, происходит скачок в точку D. Заметим, что в зависимости от параметров задачи, точка C может соответствовать как контакту поверхностей, так и адгезионному взаимодействию без контакта, в то время как в точке D сила q всегда равна нулю, т.е. поверхности не взаимодействуют. Теперь, начиная от точки D, приближаем поверхности друг к другу (уменьшаем расстояние δ). В этом случае поверхности не взаимодействуют друг с другом (сила q равна нулю) пока не достигнута точка A, из которой происходит скачок в точку B.

Таким образом, процесс сближения–удаления выступов оказывается необратимым и сопровождается диссипацией энергии. Величина потери энергии в элементарном цикле сближения–удаления соответствует заштрихованной площади на рис. 3,*б*:

$$\Delta w = \int\limits_{ABCD} q(\delta)\, d\delta \tag{11}$$

***3.1. Параболические выступы* ($n = 1$).** Рассмотрим адгезионное взаимодействие двух выступов параболической формы. Характерный размер l в этом случае имеет смысл приведенного радиуса кривизны поверхностей: $l \equiv R = \left(R_1^{-1} + R_2^{-1}\right)^{-1}$.

В случае параболических выступов, зависимость нагрузки от расстояния может быть представлена в безразмерном виде с помощью безразмерной нагрузки Q и безразмерного расстояния D:

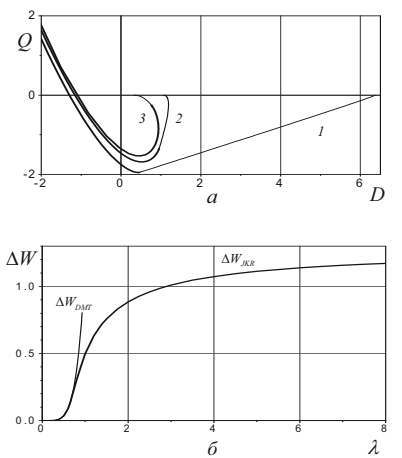
$$Q = \frac{q}{\pi R \gamma}, \quad D = \delta\left(\frac{16E^{*2}}{9\pi^2\gamma^2 R}\right) \tag{12}$$

Зависимость Q от D следует из уравнений (2) и (6)-(8) для случая контакта и уравнений (9)-(10) при отсутствии контакта. При такой параметризации зависимость нагрузки Q от расстояния D определяется только одним безразмерным параметром (параметром Тейбора) [3]:

$$\lambda = p_0\left(\frac{9R}{2\pi\gamma E^{*2}}\right)^{1/3} \tag{13}$$

Графики зависимости безразмерной силы Q от безразмерного расстояния D представлены на рис. 4,*а* для $\lambda = 0.1$, 0.6 и 2 (кривые 1, 2 и 3, соответственно). Толстые линии соответствуют случаю контакта поверхностей, а тонкие — отсутствию контакта. В [3] было показано, что

предельный случай $\lambda \to 0$ соответствует теории DMT, а случай $\lambda \to \infty$ теории JKR. Результаты расчетов показывают, что при малых λ зависимость Q от D становится однозначной (см. рис. 4,*а*, кривая 1). При увеличении параметра λ, увеличивается неоднозначность зависимости нагрузки от расстояния, и, соответственно, возрастает потеря энергии в цикле сближения и удаления выступов.



а *б*

Рис. 4.

Этот вывод подтверждается при численном расчете величины безразмерной потери энергии

$$\Delta W = \Delta w \left(\frac{16 E^{*2}}{9\pi^5 \gamma^5 R^4} \right)^{1/3} \qquad (14)$$

как функции параметра λ. График зависимости $\Delta W(\lambda)$ приведен на рис. 4,*б*. При $\lambda \to 0$ (приближение DMT), безразмерная потеря энергии ΔW стремится к нулю. При малых значенияхλ ($0 \leqslant \lambda < (9/32)^{1/3}$), как это видно на рис. 4,*а*, петля гистерезиса целиком лежит в области отсутствия контакта (тонкие линии). В этом случае зависимость нагрузки от расстояния задается соотношениями (9)-(10), или, в безразмерном виде:

$$D = \frac{8\lambda}{3\pi}\beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{2}{\pi\lambda}, \quad Q = -\frac{1}{2}\pi\lambda\beta^2, \qquad \beta = b\left(\frac{4E^*}{3\pi\gamma R^2}\right) \qquad (15)$$

Потеря энергия рассчитывается из соотношения:

$$\Delta W_{DMT} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} Q(\beta)\, D\prime(\beta)\, d\beta, \quad \beta_1 = \frac{8\lambda}{3\pi}, \quad \beta_2 = \frac{16\lambda}{3\pi} \qquad (16)$$

Где функции $Q(\beta)$ и $D(\beta)$ заданы выражениями (15). После взятия интеграла в (16), получим следующее соотношение для функции $\Delta W(\lambda)$:

$$\Delta W_{DMT} = \frac{8704}{243\pi^3}\lambda^5 \quad 0 \leqslant \lambda < (9/32)^{1/3} \approx 0.66 \qquad (17)$$

При $\lambda \to \infty$(приближение JKR), петля гистерезиса в зависимости силы от расстояния целиком лежит в области контакта (толстые линии на рис. 4). В этом предельном случае, из уравнений (6)-(8) и (2) следует:

$$D = -\alpha^2 + \frac{2}{3}\sqrt{6\alpha}, \quad Q = \alpha^3 - \alpha\sqrt{6\alpha}, \qquad \alpha = a\left(\frac{4E^*}{3\pi\gamma R^2}\right) \qquad (18)$$

Тогда потеря энергии ΔW, рассчитанная по соотношению

$$\Delta W_{JKR} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Q(\alpha)\, D\prime(\alpha)\, d\alpha, \quad \alpha_1 = \frac{1}{6^{1/3}}, \ \alpha_2 = \frac{2}{3^{1/3}} \tag{19}$$

где функции $Q(\alpha)$ и $D(\alpha)$ заданы выражениями (18), оказывается постоянной:

$$\Delta W_{JKR} = \frac{3^{1/3}(2^{1/3}+12)}{15} \approx 1.28 \quad for\ \lambda \to \infty \tag{20}$$

3.2. Влияние формы выступа на диссипацию энергии. В случае $n \neq 1$ (непараболические выступы), для описания зависимость силы от расстояния требуются два безразмерных параметра. Первый параметр, E^*/p_0, это отношение приведенного модуля упругости к адгезионному напряжению. Второй параметр, $\gamma/(p_0 l)$, представляет собой отношение радиуса адгезионного взаимодействия γ/p_0, к характерному размеру выступов l. Как показали результаты расчетов, форма выступов существенно влияет на форму зависимости силы от расстояния между выступами (рис. 3,*а* и *в*). При увеличении n (когда вершины выступов становятся более плоскими), площадь петли гистерезиса на графике сила–расстояние увеличивается, и возрастает потеря энергии в цикле.

Зависимости безразмерной потери энергии $\Delta w/(p_0 l^3)$ от безразмерного параметра $\gamma/(p_0 l)$ показаны на рис. 5 при $E^*/p_0 = 2$ для различных форм выступов. Кривые 1, 2, 3 построены для $n = 1, 2, 3$, соответственно. Результаты показывают, что с увеличением параметра $\gamma/(p_0 l)$ безразмерная потеря энергии увеличивается и достигает константы при достижении параметром $\gamma/(p_0 l)$ некоторой величины. Эта величина получена аналитически аналогично тому, как получено уравнение (17). В результате имеем

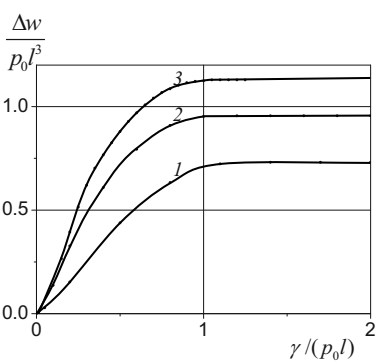


Рис. 5.

$$\frac{\Delta w}{p_0 l^3} = \frac{n\pi}{2n+2}\left(\xi_1^{2n+2} - \xi_2^{2n+2}\right) - \frac{4p_0}{3E^*}\left(\xi_1^3 - \xi_2^3\right)$$
$$\text{при} \quad \frac{\gamma}{p_0 l} \geqslant \frac{1}{2}\xi_1^{2n} + \frac{2(\pi-2)p_0}{\pi E^*}\xi_1$$

где $\xi_1 = \left(\frac{8p_0}{\pi E}\right)^{1/(2n-1)}$ и $\xi_2 = \left(\frac{4p_0}{n\pi E}\right)^{1/(2n-1)}$. При n=1 эти выражения совпадают с (17).

4. Моделирование адгезионной составляющей силы трения в контакте скольжения

Полученное решение контактной задачи об адгезионном взаимодействии двух упругих выступов и подход, предложенный для расчета потери энергии в процессе сближения и разведения выступов, позволяет определить общую потерю энергии при скольжении шероховатых тел как сумму потерь энергии при образовании и разрыве элементарных адгезионных контактов между выступами. Это, в свою очередь, дает возможность рассчитать адгезионную составляющую силы трения при скольжении шероховатых упругих тел.

4.1. Взаимное тангенциальное перемещение двух выступов. Чтобы проиллюстрировать предложенный подход рассмотрим взаимное перемещение двух полусферических выступов при скольжении (рис. 6). Предполагается, что нижний выступ радиуса R_1 находится в покое, а

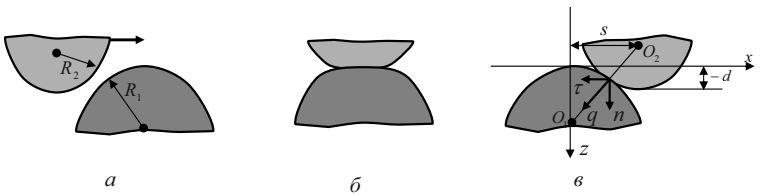


Рис. 6. Схема взаимного перемещения двух выступов при скольжении.

верхний выступ радиуса R_2 движется в тангенциальном направлении (вдоль оси x), при этом расстояние между выступами d (в направлении оси z) остается постоянным во время движения. Вначале выступы не взаимодействуют между собой (рис. 6,*а*), потом они приходят в контакт и возникает взаимное скольжение (рис. 6,*б* и *в*) до момента, когда контакт скачкообразно разрывается. Таким образом, возникает цикл сближения–удаления выступов в тангенциальном направлении, который также должен сопровождаться потерей энергии.

Поскольку выступы имеют сферическую форму, в каждый момент времени сила взаимодействия между выступами действует вдоль линии O_1O_2, соединяющей центры сфер, и контактная задача является осесимметричной относительно этой линии (рис. 6,*б*, *в*). Сила q, действующая на верхний выступ, определяется уравнениями (2) и (6)-(8) для случая контакта поверхностей и уравнениями (9)-(10) для случая отсутствия контакта при n =1 (вершины сферических неровностей аппроксимируются параболоидами). При этом расстояние между выступами δ в направлении линии O_1O_2 связано с тангенциальным расстоянием s между центрами сфер и нормальным расстоянием dсоотношением $\delta = \sqrt{(R_1 + R_2 + d)^2 + s^2} - R_1 - R_2$. Силу взаимодействия q можно разделить на нормальную n и тангенциальную τ составляющие.

Для моделирования силы трения рассмотрим тангенциальную компоненту силы τ, действующую на верхний выступ со стороны нижнего. В процессе скольжения верхнего выступа, сила τ меняет свой знак с положительного (когда сила действует в направлении движения выступа) на отрицательный (когда сила препятствует скольжению выступа). Вследствие гистерезиса, который имеет место в цикле сближения-удаления выступов (п. 3), суммарная работа этой силы

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(s)\, ds \tag{21}$$

отлична от нуля. Эта работа равна потере энергии в элементарном цикле сближения–удаления поверхностей, которая была рассчитана в п. 3, т.е. $A = \Delta w$.

Ниже будет рассмотрен пример шероховатых поверхностей регулярной формы и проведен расчет силы трения, возникающей между ними при скольжении.

4.2. Скольжение двух шероховатых поверхностей регулярной формы. Предположим, что верхняя и нижняя поверхности характеризуются одним и тем же периодом шероховатости l (рис. 7). Когда каждый выступ

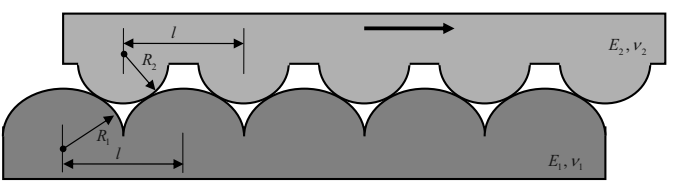


Рис. 7. Схема скольжения двух шероховатых поверхностей.

верхней поверхности проходит вдоль одного периода нижней поверхности, тангенциальная сила, действующая на этот выступ, совершает работу $A = \Delta w$, так что средняя тангенциальная сила, действующая на этот выступ, равна $\Delta w / l$. Поскольку выступ занимает площадь l^2, получим следующее выражение для средней тангенциальной силы, действующей на верхнюю поверхность:

$$\bar{\tau} = \Delta w / l^3 \tag{22}$$

Как было показано в п. 3, величина Δw, представляющая собой потерю энергии в элементарном цикле сближения–удаления двух выступов в нормальном направлении, может быть представлена в безразмерном виде как функция единственного параметра: $\Delta W = \Delta W(\lambda)$, где ΔW и λ определяются выражениями (13) и (14). Средняя тангенциальная сила, действующая на верхнюю шероховатую поверхность, также может быть

представлена в безразмерном виде

$$\bar{T} = \bar{\tau} l^3 \left(\frac{16 E^{*2}}{9\pi^5 \gamma^5 R^4} \right)^{1/3} \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что

$$\bar{T} = \Delta W(\lambda) \tag{24}$$

График функции $\Delta W(\lambda)$ представлен на рис. 4,*б*. Таким образом, безразмерная сила трения $\bar{T}$ может быть рассчитана для любого значения параметраλ.

В предельных случаях можно получить аналитические соотношения для силы трения. Для приближения JKR (большие значения λ), безразмерная потеря энергии определяется соотношением (20). В соответствии с (23) безразмерное тангенциальное напряжение равно

$$\bar{\tau}_{JKR} = \frac{3^{1/3}(2^{1/3}+12)}{15 l^3} \left(\frac{9\pi^5 \gamma^5 R^4}{16 E^{*2}} \right)^{1/3} \approx 7.09 \frac{\gamma^{5/3} R^{4/3}}{l^3 E^{*2/3}} \tag{25}$$

Для приближения DMT, при малых значениях параметра λ ($\lambda < (9/32)^{1/3} \approx 0.66$), потеря энергии определяется соотношением (17). Учитывая (23), получим

$$\bar{\tau}_{DMT} = 12 \frac{p_0^5 R^3}{l^3 E^{*4}} \tag{26}$$

Из соотношений (25) и (26) следует, что и в случае JKR, и в случае DMT адгезионная составляющая силы трения оказывается выше для выступов с большим радиусом кривизны R и для более мягких материалов. То же самое верно для любых значений параметра λ.

4.3. Пример расчета силы трения. Результаты расчета адгезионной составляющей силы трения (тангенциального напряжения $\bar{\tau}$), проведенного с использованием уравнений (2), (6)-(10) и (22) представлены на рис. 8 для случая скольжения двух упругих тел с приведенным модулем упругости $E^* = 10\,\text{М}\Pi a$ и адгезионным напряжением между поверхностями $p_0 = 1\,\text{М}\Pi a$. Эти величины соответствуют некоторым видам эластомеров.

Графики на рис. 8,*а* построены для приведенного радиуса выступов $R = 0.1\,\text{м}м$ и периода шероховатости $l = 0.1\,\text{м}м$. Величина поверхностной энергииγ изменяется от 0 до $0.2\,\text{Д}ж/м^2$, при этом величина параметра λ изменяется от бесконечности до приблизительно 4, т.е., случай малых γ на этом рисунке соответствует приближению JKR. Тангенциальные напряжения $\bar{\tau}$ в этом случае близки к $\bar{\tau}_{JKR}$ рассчитанному по соотношению (25) (штриховая линия).

Рисунок 8,*б* соответствует поверхностям с более мелкой шероховатостью: $R = l = 1$ м*км*. В этом случае изменение поверхностной энергии γ от 0 до 0.2 Д*ж*/*м*^{2}соответствует изменению параметра λ от бесконечности до приблизительно 0.4. Поэтому в области малых γ, тангенциальное напряжение можно рассчитывать по формуле (25) для приближения JKR, а для больших γ, тагненциальное напряжение $\bar{\tau}$ становится близким к $\bar{\tau}_{DMT}$, рассчитанному по соотношению (26).

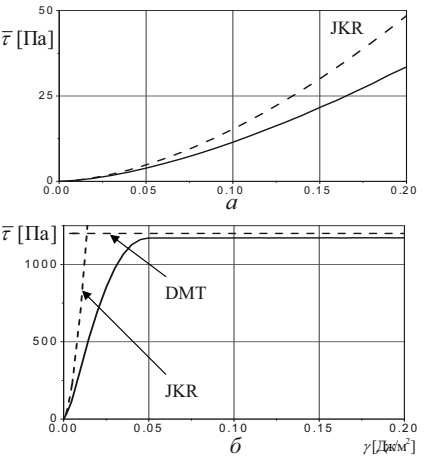


Рис. 8.

5. Выводы

Дано решение задачи об адгезионном взаимодействии двух осесимметричных упругих выступов, форма которых описывается степенной функцией. Задача решена как в случае контакта, так и при отсутствии непосредственного контакта между поверхностями. Получены аналитические соотношения для контактного давления и упругих перемещений в области адгезионного взаимодействия поверхностей, а также для нагрузки и расстояния между поверхностями.

Исследована зависимость нагрузки от расстояния между поверхностями для различных форм выступов. Проведен расчет величины потери энергии в цикле сближения–удаления выступов в зависимости от величины поверхностной энергии. Для выступов параболической формы безразмерная потеря энергии представлена как функция одного параметра – параметра Тейбора λ. В предельных случаях $\lambda \to 0$ (приближение DMT) и $\lambda \to \infty$ (приближение JKR), зависимость потери энергии от параметра λ получена аналитически.

Предложена модель адгезионной составляющей силы трения при скольжении шероховатых поверхностей на основе расчета суммарной потери энергии при образовании и разрыве элементарных контактов между выступами. Проведен расчет силы трения при различных параметрах шероховатости и величин поверхностной энергии. В случаях DMT и JKR получены аналитические соотношения для силы трения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (09-08-00901-а) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-3288.2010.1.

Литература

1. *Johnson K., Kendall K.L. and Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids, Proc. Royal Soc. London. A 324 (1971) 301–313.
2. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Y.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles, J. Colloid Interface Sci. 67 (1975) 378–326.
3. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model, J. Colloid Interface Sci. 150 (1991) 243–269.
4. *Barthel E.* On the description of the adhesive contact of spheres with arbitrary interaction potentials, J. Colloid Interface Sci. 200 (1998) 7–18.
5. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres, J. Phys. D: Appl. Phys. 31 (22) (1998) 3279–3290.
6. *Goryacheva I., Makhovskaya Yu.* Adhesion effect in contact interaction of solids, Comptes Rendus Mecanique 336 (2008) 118-125.
7. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 453 (1997) 1277–1297.
8. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С.279–289.
9. *Yoshizawa H., Chen Y.-L. and Israelachvili J.* Fundamental mechanisms of interfacial friction. 1. Relation between adhesion and friction, J. Physical Chemistry 97 (1) (1993) 4128–4140.
10. *Chaudhury M.K. and Owen M.J.* Adhesion hysteresis and friction. Langmuir, 9(1) (1993) 29–31.
11. *Carbone G., Mangialardi L.* Adhesion and friction of an elastic half-space in contact with a slightly wavy rigid surface. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 52 (6) (2004) 1267-1287.
12. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Адгезионное сопротивление при качении упругих тел // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 4, С.534–543.
13. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия, М.:Мир, 1989, 510 с.
14. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Контактирование упругих тел при наличии капиллярной адгезии // Прикладная математика и механика // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С.128–137.

ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ И ПОСТУЛАТ ИЗОТРОПИИ А. А. ИЛЬЮШИНА

В. Г. Зубчанинов

Тверской государственный технический университет
Тверь, Россия
vgz@rambler.ru

В работе излагается современное состояние теории процессов. Достоверность ряда положений этой теории была подвергнута неоправданно резкой критике и вызвала дискуссию 60-х годов XX столетия. Во многом она была вызвана непониманием идей А.А. Ильюшина и его нового направления в теории пластичности.

1. Скалярные и векторные свойства материалов и процессы нагружения. Напряженно-деформированное состояние (НДС) и процессы нагружения и деформирования в каждой частице тела x_k $(k = 1, 2, 3)$ в физическом пространстве характеризуются заданием шести компонент σ_{ij}, ε_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ тензоров напряжений и деформаций как функций времени t. Они могут быть определены также тремя их главными напряжениями σ_k и деформациями ε_k, и тремя углами Эйлера, определяющими главные направления. Отразить наглядно векторные свойства при тензорном подходе невозможно. Предложенный в [1] векторный подход для отображения процессов в линейном координатном евклидовом пространстве позволяет устранить этот существенный недостаток. Тензоры в [2] были представлены в виде

$$(\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + \sigma(S^*_{ij}), \quad (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + Э(Э^*_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3), \qquad (1)$$

где δ_{ij} — символы Кронеккера, $\sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}/3$; $S_{ij} = \sigma S^*_{ij}$, $Э_{ij} = ЭЭ^*_{ij}$ — компоненты девиаторов; $\sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$, $Э = \sqrt{Э_{ij}Э_{ij}}$ — их модули; S^*_{ij}, $Э^*_{ij}$ — компоненты направляющих тензоров, связанные соотношениями $S^*_{ii} = 0$, $S^*_{ij}S^*_{ij} = 1$; $Э^*_{ii} = 0$, $Э^*_{ij}Э^*_{ij} = 1$. Каждый из направляющих тензоров с учетом этих соотношений определяется упомянутыми тремя углами Эйлера и одним углом вида НДС формоизменения φ либо ψ соответственно. В качестве третьих инвариантов тензоров примем $\cos 3\varphi = |S^*_{ij}|/3\sqrt{6}$, $\cos 3\psi = |Э^*_{ij}|/3\sqrt{6}$, где φ, ψ — углы вида НДС на девиаторных плоскостях.

Соотношение (1) разделяет векторные и скалярные свойства материалов. Пластическое деформирование имеет сдвиговый характер. При переходе материала в упругопластическое состояние он становится квазиизотропным. Вопрос о критерии пластичности начально квазиизотропного

тела был первым в дискуссии 60-х годов. Критерий пластичности, обобщающий условия пластичности Треска и Мизеса, имеет вид [4,5]

$$\sin^2 3\varphi - 18k^2\left(\sigma^2 - \frac{8}{3}k^2\right)^2 = 0, \tag{2}$$

где k — предел текучести при чистом сдвиге. В состоянии полной пластичности имеет место напряженное состояние пространственного чистого сдвига, когда $k = \sigma_T/2$, где σ_T — предел текучести при растяжении. В этом случае из (2) в особых точках полной пластичности ($\varphi = 0°$, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°) на окружности радиуса $R = \sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$ в девиаторной плоскости выполняется критерий пластичности Мизеса

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T. \tag{3}$$

В состоянии неполной пластичности постоянная k находится из опыта при плоском чистом сдвиге $k = k_0 = \sigma_T/\sqrt{3}$. В этом случае на окружности Мизеса из (2) находим особые точки неполной пластичности ($\varphi = 30°$, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°). Начальная окружность пластичности Мизеса оказывается заключенной между двумя правильными шестиугольниками Треска и соприкасается с ними в особых точках полной и неполной пластичности. Отклонение окружности от многоугольников не превышает 15,5% [1,5]. Поэтому при практических расчетах критерий (2) можно заменить более простым критерием Мизеса (3) и смотреть на него как на осредненное условие пластичности начального квазиизотропного состояния материала.

В основе механики сплошной среды лежит постулат: *макроскопическое состояние среды в каждой ее частице и в любой момент времени t в условиях сложного НДС однозначно определяется процессом* [3]. Из этого постулата вытекает, что возникающие в процессе напряжения σ_{ij} либо σ_0 и S_{ij} являются функционалами ε_0, Θ_{ij}, температуры T, нетермофизических параметров β для каждого момента времени t. Следовательно, для начально изотропных сред при любом сложном процессе ($S^*_{ij} \neq \Theta^*_{ij}$) функционалы

$$\sigma_0 = F_0\{\varepsilon_0, \Theta_{ij}, T, \beta\}_t, \quad S_{ij} = \Phi_{ij}\{\varepsilon_0, \Theta_{ij}, T, \beta\}_t \tag{4}$$

должны быть инвариантны относительно ортогональных преобразований поворота координатных осей x_k ($k = 1,2,3$) физического пространства. В [1,2] было предложено в (4) представить соотношение для S_{ij} в виде одного тензорного соотношения по базисным тензорам $d^k\Theta_{ij}/ds^k$, где $s(t)$ — параметр прослеживания процесса,

$$S_{ij} = A_k\frac{d^k\Theta_{ij}}{ds^k} \quad (i, j = 1,2,3;\ k = 1,2,\ldots,5). \tag{5}$$

Известно,что любой симметричный тензор (p_{ij}) может быть представлен шестичленной формулой [4, 5]

$$(p_{ij}) = p_{ij}\, D_{ij}, \quad D_{ij} = (\hat{e}_i \hat{e}_j), \tag{6}$$

где D_{ij} — базисные тензоры второго ранга, называемые диадами, $\{\hat{e}_{ij}\}$ — ортонормированный базис физического пространства.

Если разложить тензор (p_{ij}) на шаровой и девиатор, то его компоненты будут равны $p_{ij} = p_0\delta_{ij} + d_{ij}$, где p_0 — модуль шарового тензора, d_{ij} — компоненты девиатора. Тогда вместо (6) получаем $(p_{ij}) = Z_0 I_0 + Z_k I_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$, где I_0, I_k — базисные тензоры А.А. Ильюшина [4, 5], связанные с D_{ij} формулами [3]

$$I_0 = \frac{D_{ii}}{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}} I_k = \beta_k^{ij} D_{ij}, \tag{7}$$

Z_0, Z_k — компоненты преобразованного тензора (p_{ij})

$$Z_0 = \sqrt{3} p_0, \quad \sqrt{\frac{3}{2}} Z_k = \beta_k^{ij} d_{ij}, \tag{8}$$

β_k^{ij} — коэффициенты преобразования [3].

При описании процессов в (5) А.А. Ильюшин по существу в качестве переменного тензорного базиса использует (δ_{ij}) и пять линейно независимых тензоров-девиаторов с компонентами

$$\Theta_{ij}^{(k)} = \frac{d^k \Theta_{ij}}{ds^k} \quad (k = 1, 2, \ldots, 5). \tag{9}$$

Компоненты этих тензоров находятся из рекуррентных формул

$$\frac{d\Theta_{ij}^{(k)}}{ds} = -\varkappa_{k-1}\Theta_{ij}^{(k-1)} + \varkappa_k \Theta_{ij}^{(k+1)} \tag{10}$$

по заданному девиатору с компонентами $\Theta_{ij}^{(1)}$. Параметры $\varkappa_k$ в (10) подбираются так, чтобы базисные девиаторы были нормированными. Можно показать, что они также ортогональны: $\Theta_{ij}^{(m)} \cdot \Theta_{ij}^{(m)} = \delta_{mn}$. Компоненты S_{ij} разлагаются по базису (9), что приводит к формуле (5). К сожалению, этого доказательства в работах [1–3] нет.

Соотношения (4), (5) были названы в [1] *общим постулатом изотропии для начально изотропных сред в физическом трехмерном пространстве*. В [2] отмечено, что доказательство (5) было удобнее выполнить в пятимерном векторном линейном подпространстве $\boldsymbol{E}_5$.

2. Векторное представление тензоров и процессов в линейном евклидовом координатном пространстве. Геометрическое отображение векторных свойств материалов в процессах сложного нагружения имеет в теории пластичности принципиальное значение. В линейной алгебре множество элементов любой природы, в т.ч. тензоров второго ранга (p_{ij}), называют *линейным пространством* $\boldsymbol{\Pi}$, а сами элементы — *векторами*. Для них вводятся правила сложения и умножения на скаляр. Идея представления тензоров в девятимерном координатном пространстве $\boldsymbol{\Pi}_9$ принадлежит В. Прагеру [1]. Он обозначил упорядоченную совокупность компонент тензора (p_{ij}) в виде X_k, $k = 1, 2, \ldots, 9$, где $X_1 = p_{11}$, $X_2 = p_{22}$ и т.д., и поставил тензору (p_{ij}) в соответствие вектор

$$\overline{p} = X_k \hat{\varepsilon}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n = 9), \tag{11}$$

где $\hat{\varepsilon}_k$ — ортонормированный базис Прагера в $\boldsymbol{\Pi}_n$ $(n = 9)$.

Если в $\boldsymbol{\Pi}_n$ ввести правило скалярного умножения векторов, то линейное пространство станет евклидовым. Такого правила Прагер не вводил [4]. А.А. Ильюшин рассмотрел симметричные тензоры второго ранга (p_{ij}) и их девиаторы (d_{ij}). Он поставил им в соответствие в шестимерном координатном евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_6$ вектор [3]

$$\overline{p} = Z_0 \hat{i}_0 + Z_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 5), \tag{12}$$

где $\{\hat{i}_k\}$ — ортонормированный базис А.А. Ильюшина

$$\hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3), \quad \hat{i}_k = \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_k^{ij} \hat{\varepsilon}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 5). \tag{13}$$

У ряда ученых представление тензора в виде вектора (12) вызвало неоднозначную реакцию: «Нельзя же всерьез рассматривать как теорию предложение разлагать вектор напряжения по пяти направлениям репера траектории деформирования и искать коэффициенты этого разложения то ли в форме функций, то ли в форме функционалов от длины дуги пятимерной траектории деформирования и всех ее пяти кривизн?!» [2]. Такое непонимание постулата изотропии у ряда ученых существует и сегодня [4]. Скалярное произведение двух тензоров $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$

$$A \cdot B = (a_{ik} b_{kj}) \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{14}$$

При перестановке множителей в (14), вообще говоря, $B \cdot A \neq A \cdot B$. Следовательно,конкретное тензорное пространство не может быть евклидовым. Рассмотрим дважды скалярное произведение тензоров [4]

$$A \cdot\cdot B = a_{ij} b_{ji}, \quad A \cdot\cdot A = a_{ij} a_{ji}. \tag{15}$$

Выражение (15) представляет собой свертку скалярного произведения (14) по индексам $i = j$. Но только для симметричных тензоров $a_{ij} = = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$ из (15) получаем

$$A \cdot\cdot B = a_{ij} b_{ij} = \overline{a} \cdot \overline{b}, \quad A \cdot\cdot A = a_{ij} a_{ij} = \overline{a} \cdot \overline{a} = a^2, \tag{16}$$

где векторы $\overline{a} = a_{ik}^{(n)} \hat{\varepsilon}_n$, $\overline{b} = b_{ij}^{(n)} \hat{\varepsilon}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, 6)$. Доказательства этого фундаментального результата в работах [1–3] нет, что и было одной из причин дискуссии 60-х годов о постулате изотропии. Таким образом, для симметричных тензоров (p_{ij}) мы можем конкретное *тензорное пространство* заменить на *координатное евклидово пространство* $\boldsymbol{E}_6$ с элементами-векторами в виде упорядоченной совокупности компонент тензора p_{ij} в форме (11) либо в форме (12), где компоненты вектора имеют вид (8).

В теории процессов рассматриваются совмещенные пространства деформаций $\boldsymbol{E}_6$ и напряжений $\boldsymbol{\Sigma}_6$ с общим базисом $\{\hat{i}_k\}$. Согласно (12), векторы напряжений $\overline{S}$ и деформаций $\overline{\varepsilon}$ представим в виде $\overline{S} = = S_0 \hat{i}_0 + \overline{\sigma}$, $\overline{\varepsilon} = \Theta_0 \hat{i}_0 + \overline{\Theta}$, где векторы $\overline{\sigma}$, $\overline{\Theta}$ в пятимерных подпространствах $\boldsymbol{\Sigma}_5$, $\boldsymbol{E}_5$ будут $\overline{\sigma} = S_k \hat{i}_k$, $\overline{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$. Компоненты этих векторов при $d_{ij} = S_{ij}$, $d_{ij} = \Theta_{ij}$ определяются согласно (8).

3. Постулат изотропии и общие определяющие соотношения в линейном пространстве. Постулат изотропии (5) является общим законом связи напряжений и деформаций при сложном нагружении, учитывающим как скалярные, так и векторные свойства материала. Умножая (5) на $\hat{i}_k$ и складывая, получаем векторную форму постулата в $\boldsymbol{E}_5$

$$\overline{\sigma} = A_k \frac{d^k \overline{\Theta}}{ds^k} \quad (k = 1, 2, \ldots, 5). \tag{17}$$

Каждая траектория деформаций (напряжений) с построенными в ее точках длиной дуги s (либо Σ), векторами $\overline{\sigma}$, $d\overline{\sigma}$ ($\overline{\Theta}$, $d\overline{\Theta}$) и приписанными к ним температурой T и другими нетермофизическими параметрами β создают *образ процесса деформирования* (*нагружения*) в $\boldsymbol{E}_5$ (либо $\boldsymbol{\Sigma}_5$). *Каждому образу соответствует свой физический процесс и поэтому подпространства* $\boldsymbol{E}_5$, $\boldsymbol{\Sigma}_5$ *и* $\boldsymbol{E}_6$, $\boldsymbol{\Sigma}_6$ *неинвариантны относительно ортогональных преобразований в них вращения и отражения траекторий*, кроме тех, которые соответствуют вращениям координатных осей x_k в физическом пространстве [3]. В произвольной точке траектории деформирования с длиной дуги s можно построить ортонормированный репер Френе–Ильюшина $\{\hat{p}_k\}$. При известном касательном векторе $\hat{p}_1 = d\overline{\Theta}/ds$ все остальные находятся из уравнений, аналогичных (10):

$$\frac{d\hat{p}_k}{ds} = -\varkappa_{k-1} \hat{p}_{k-1} + \varkappa_k \hat{p}_{k+1} \quad (\varkappa_0 = \varkappa_5 = 0), \tag{18}$$

Используя (18), формулу (17) можно привести в $\{\hat{p}_k\}$ к виду $\overline{\sigma} = = P_k \hat{p}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$. В репере $\{\hat{p}_k\}$ можно разложить любой другой физический вектор $d\overline{\sigma}/ds = P_k^* \hat{p}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$. Наиболее общая форма конкретизации последнего соотношения получена в [4]:

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = M_k \hat{p}_k + M\hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma} = \cos\hat{\beta}_k \hat{p}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 5), \tag{19}$$

где функционалы процесса

$$\begin{cases} M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos\vartheta_1 - M_0 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2, \quad M_2 = 0, \\ M_0 = M_3 \cos\vartheta_3 + M_* \sin\vartheta_3, \quad M_* = M_4 \cos\vartheta_4 + M_5 \sin\vartheta_4, \end{cases} \tag{20}$$

ϑ_m $(m = 1, 2, 3, 4)$ — полярные сферические координаты вектора $\hat{\sigma}$ в репере $\{\hat{p}_k\}$, связанные с β_k формулами $\beta_1 = \vartheta_1$, $\cos\beta_{k+1} = \cos\beta_k \times$ $\times \operatorname{tg}\vartheta_k \cos\vartheta_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$. Для определения ϑ_m получена система уравнений [4]

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 \cos\vartheta_2 = \frac{1}{\sigma}[-M_1 \sin\vartheta_1 + M_0 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2], \\ \sin\vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \varkappa_2 \cos\vartheta_3\right) = \varkappa_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \frac{1}{\sigma} M_0 \cos\vartheta_2, \\ \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \left(\frac{d\vartheta_3}{ds} + \varkappa_3 \cos\vartheta_3\right) = \varkappa_2 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 + \\ \qquad + \frac{1}{\sigma}(M_* \cos\vartheta_3 - M_3 \sin\vartheta_3), \\ \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \left(\frac{d\vartheta_4}{ds} + \varkappa_4\right) = \varkappa_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4 + \\ \qquad + \frac{1}{\sigma}(M_5 \cos\vartheta_4 - M_4 \sin\vartheta_4). \end{cases}$$

В соответствии с теорией неполных квазипростых процессов и постулатом физической определенности автора для начально изотропных сред $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, ϑ_3, ϑ_4 — несущественны, $M_0 = M_3$, $M_4 = M_5 = 0$ [4,5], что снижает локальную размерность (19) с пяти до трех. Это позволяет разложить $\boldsymbol{E}_5$ на два трехмерных пересекающихся подпространства и исследовать процессы в реальных трехмерных подпространствах [4, 5].

4. Частный постулат изотропии в линейном пространстве. Многочисленные опыты с изотропными в исходном состоянии конструкционными материалами при нормальной и высоких температурах во времени t показали, что влияние третьего инварианта девиатора φ на механические свойства при малых деформациях является слабым [3]. Это означает, что подпространства $\boldsymbol{E}_5$, $\boldsymbol{\Sigma}_5$ становятся практически изотропными по отношению к ортогональным преобразованиям вращения и отражения траекторий. В этом случае приходим к частному постулату изотропии: *образ физического процесса практически сохраняется при всех вращениях и отражениях в* $\boldsymbol{E}_5$*, если в соответствующих точках траекторий сохраняются параметры* ε_0, T, β. Существенно упрощаются экспериментальные исследования и построение функционалов процессов, становится

реальным решение краевых задач. При исследованиях новых сред частный постулат может нарушаться. В этом случае следует ставить задачу по его уточнению [3]. Критические замечания дискуссии 60-х годов были направлены против частного постулата изотропии. Влияние третьего инварианта возможно в задачах нелинейной упругости и пластичности, при низких температурах, в грунтовых средах и др. В любом случае теория процессов является наиболее общей современной теорией пластичности и принципиально важным вкладом великого ученого-механика А.А. Ильюшина в мировую науку в области механики деформируемого твердого тела.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории пластичности. М.: АН СССР, 1963. 271 с.
2. *Ильюшин А.А.* Еще о постулате изотропии // Изв. АН СССР. ОТН, 1962. №1. С. 201–204.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. 310 с.
4. *Зубчанинов В.Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2008. 366 с.
5. *Зубчанинов В.Г.* Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А.А. Маркин

Тульский государственный университет
Тула, Россия
markin@tsu.tula.ru

Вводится понятие о поверхности, разделяющей области обратимого (упругого) и необратимого (упругопластического) деформирования. В теории пластичности её называют поверхностью нагружения. Для того чтобы подчеркнуть термомеханический смысл этой поверхности, будем называть её поверхностью обратимости. По определению поверхность обратимости должна удовлетворять следующим общим требованиям:

1. В начальном (ненапряженном) состоянии существует область, ограниченная в шестимерном пространстве деформаций (напряжений) поверхностью

$$\Psi_0(\vec{\mathfrak{e}}) = \Psi_0^{(s)}. \tag{1}$$

Процессы деформирования (нагружения), траектории которых расположены внутри данной области и на поверхности (1), обратимы.

2. Когда процесс деформирования (нагружения) выходит на поверхность обратимости и $\vec{\mathfrak{e}} = \vec{\mathfrak{e}}_0^s$, то элементарное продолжение $d\vec{\mathfrak{e}}^s$ необратимо, если выполняется условие

$$d\vec{\mathfrak{e}}^s \cdot \vec{\nabla}\Psi_0 > 0, \quad d'w > 0. \tag{2}$$

При этом начальная поверхность изменяется, а вектор $\vec{\mathfrak{e}}_0^s + d\vec{\mathfrak{e}}^s$ остается на поверхности, и производится диссипация $d'w \geq 0$.

3. Если из состояния $\vec{\mathfrak{e}}_0^s$ процесс деформирования является непрерывно необратимым, то он порождает изменение начальной поверхности, и состоянию $\vec{\mathfrak{e}}_1^s$ соответствует поверхность обратимости

$$\Psi_1(\vec{\mathfrak{e}}) = \Psi_1^{(s)}, \tag{3}$$

где $\Psi_1^{(s)} = \Psi_1(\vec{\mathfrak{e}}_1^s)$.

4. Процесс деформирования из состояния $\vec{\mathfrak{e}}_1^s$ по траекториям, расположенным внутри или на поверхности обратимости (3) происходит обратимо:

$$d\vec{\mathfrak{e}} \cdot \vec{\nabla}\Psi \leq 0, \quad d'w = 0.$$

5. Когда процесс деформирования выходит на поверхность (3) в точке $\vec{э}_2^s$, которая может не совпадать с точкой $\vec{э}_1^s$, то элементарное продолжение $d\vec{э}^s$ необратимо, если

$$d\vec{э}^s \cdot \vec{\nabla}\Psi_1 > 0, \quad d'w > 0. \tag{4}$$

В процессе вторичного необратимого деформирования поверхность «следует» за вектором $\vec{э}_2^s$, изменяя свою форму.

Введение поверхности обратимости, удовлетворяющей условиям (1)–(3), дополняется предположением о существовании в шестимерном пространстве оси обратимости. Постулируется следующее положение.

6. При тепловом воздействии и нестесненной деформации из начального ненапряженного состояния процесс деформирования обратимый и происходит вдоль оси $\vec{э}_{0T}$. Необратимое деформирование может приводить к изменению ориентации оси в шестимерном пространстве.

Для удобства описания необратимых процессов с учетом существования оси обратимости введем в шестимерном пространстве деформаций (напряжений) ортонормированный термомеханический базис, состоящий из единичного вектора $\vec{i}_0$, направленного вдоль оси обратимости, и базиса $\vec{i}_1, ..., \vec{i}_5$ ортогонального к $\vec{i}_0$ пятимерного подпространства $E_\perp$. Разложения векторов деформаций и напряжений по термомеханическому базису представим в виде

$$\vec{э} = \vec{э}_0 + \vec{э}_\perp; \quad \vec{\sigma} = \vec{\sigma}_0 + \vec{\sigma}_\perp, \tag{5}$$

где $\vec{э}_\perp = \sum_{\alpha=1}^{5} э_\alpha \vec{i}_\alpha$ — составляющая вектора деформаций и $\vec{\sigma}_\perp = \sum_{\alpha=1}^{5} \sigma_\alpha \vec{i}_\alpha$ — составляющая вектора напряжений, принадлежащие подпространству $E_\perp$.

Термомеханический базис шестимерного пространства в случае изотропного материала совпадает с базисом А.А. Ильюшина [1]. Далее будем рассматривать изотропные материалы. Составляющие $\vec{\sigma}_\perp$ и $\vec{э}_\perp$ из разложения (5) обозначим соответственно через $\vec{\tau}$ (вектор нагружения) и через $\vec{e}$ (вектор формоизменения). Обратимые составляющие напряжений и деформаций в изотропном случае ($\vec{i}_0 = \vec{i}_0$) представляются в виде

$$\vec{\sigma}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\,\vec{i}_0; \quad \vec{э}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\,\vec{i}_0. \tag{6}$$

Векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{e}$ являются образами девиаторов напряжений и деформаций, а векторы $\vec{\sigma}_0$ и $\vec{э}_0$ — образами шаровых составляющих соответствующих тензоров. Связь между шаровыми составляющими и изменением температуры с учетом того, что единичный вектор на оси обратимости $\vec{i}_0$ является собственным, принимает вид

$$\vec{\sigma}_0 = \sigma_0(э_0, \Delta T)\,\vec{i}_0. \tag{7}$$

В соответствии с принципом термомеханической определимости [2] свободную энергию, отнесенную к начальному объему, представим следующим разложением:

$$\rho_0 \Psi(\vec{э}, \vec{\sigma}) = \Psi_\tau(\vec{e}, \vec{\tau}) + \Psi_T(э_0, T), \tag{8}$$

где $\Psi_\tau(\vec{e}, \vec{\tau})$ — энергия формоизменения, а $\Psi_T(э_0, T)$ — энергия объёмного (температурного) изменения.

Определим накопленную пластическую (остаточную) деформацию $\vec{e}_p$ как деформацию, при которой вектор нагружения $\vec{\tau}$ становится нулевым в процессе обратимого перехода из состояния $\vec{e}^s$, $\vec{\tau}_s$. При этом свободная энергия в соответствии с определением (8) принимает значение

$$\Psi_\tau^{(0)} = \Psi_\tau(\vec{e}_p, \vec{0}). \tag{9}$$

Значения остаточной (скрытой) свободной энергии $\Psi_\tau^{(0)}$ и пластической деформации остаются неизменными в области деформирования, ограниченной поверхностью обратимости. Разность между вектором формоизменения $\vec{e}$ и пластической составляющей $\vec{e}_p$ образует упругую (обратимую) составляющую

$$\vec{e}_e = \vec{e} - \vec{e}_p. \tag{10}$$

Из данного определения следует, что в обратимой области полная и упругая деформации различаются на постоянную величину, и при разгрузке упругая составляющая принимает нулевое значение.

В нашем случае введение пластической составляющей, неизменной при обратимом деформировании, является следствием принципа термомеханической определимости и гипотезы существования поверхности обратимости. В работе А.А. Ильюшина [3] пластическая составляющая вводится на основе гипотезы о разгрузке. Принимаем, что поверхность обратимости совпадает с эквипотенциальной поверхностью свободной энергии формоизменения [4]. При этом требования (1)–(4) будут выполнены и уравнение поверхности обратимости, соответствующее состоянию $\vec{e}^s$, $\vec{\tau}_s$, принимает вид

$$\Psi_\tau(\vec{e}, \vec{\tau}) = \Psi_\tau^{(s)}, \tag{11}$$

где $\Psi_\tau^{(s)} = \Psi_\tau(\vec{e}^s, \vec{\tau}_s)$ — значение свободной энергии в состоянии $\vec{e}^s$, $\vec{\tau}_s$.

Распределение энергии формоизменения в области, ограниченной поверхностью обратимости, по определению есть функция упругой составляющей деформации $\vec{e}_e$, а также может зависеть от пластической составляющей и параметров χ_i — функционалов необратимого деформирования:

$$\Psi_\tau = \Psi_\tau(\chi_i, \vec{e}_p, \vec{e}_e), \tag{12}$$

где $\chi_i(\tilde{s}_p) = \chi_i \left[\vec{e}_p(s_p)\right]_{s_p=0}^{s_p=\tilde{s}_p}$, s_p — длина дуги траектории годографа $\vec{e}_p$.

Выражение (12) справедливо как при обратимом, так и при необратимом деформировании. Область обратимого деформирования ограничена поверхностью

$$\Psi_\tau = \Psi_\tau(\chi_i, \vec{e}_p, \vec{e}_e^{\,s}) \equiv \Psi_\tau^{(s)}, \tag{13}$$

и параметры $\vec{e}_p$, χ_i остаются неизменными, сохраняя значения, достигнутые в необратимом процессе. Значение свободной энергии в необратимом процессе в текущей точке траектории деформирования определяется из требования непрерывности представления (12) при переходе от обратимого к необратимому деформированию:

$$\Psi_\tau^{(s)} = \Psi_\tau(\vec{e}^{\,s},\ \vec{\tau}_s) = \Psi_\tau(\chi_i, \vec{e}_p, \vec{e}_e^{\,s}). \tag{14}$$

В отличие от выражения (12) для обратимого процесса здесь параметры $\vec{e}_p$ и χ_i изменяются, что может приводить к изменению свободной энергии в обратимой области при фиксированной упругой деформации $\vec{e}_e = \vec{c}$. Тем самым учитывается изменение упругих свойств материала в процессе необратимого деформирования, в частности, приобретаемая упругая анизотропия.

Используя представления (7), (8) и (12), из основного термодинамического тождества [5] определяем компоненты вектора нагружения и энтропию S в обратимой области, где $d'w \equiv 0$, $\Psi_\tau \le \Psi_\tau^{(s)}$:

$$\vec{\tau} = \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \vec{e}_e} = \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \vec{e}}, \quad \sigma_0 = \frac{\partial \Psi_T}{\partial \text{э}_0}, \quad S = -\frac{\partial \Psi_T}{\partial T}. \tag{15}$$

Представим удельную свободную энергию формоизменения в следующем виде:

$$\Psi_\tau(\vec{e}_e, \vec{e}_p) = G(e_e)^2 + a\chi^2\left(\chi_s - \frac{2}{3}\chi\right) - \frac{a}{3}\chi_s^3, \tag{16}$$

где $e_e = \left|\vec{e}_e\right|$, $e_p = \left|\vec{e}_p\right|$, $\chi = \frac{\vec{e}_e \cdot \vec{e}_p}{e_p}$, $\chi_s = \frac{\vec{e}_e^{\,s} \cdot \vec{e}_p}{e_p}$ — инварианты деформаций; G, a — константы материала.

Получим представление для вектора нагружения $\vec{\tau}$ в обратимой области, используя выражение (15):

$$\vec{\tau} = \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \vec{e}_e} = 2G\,\vec{e}_e + 2a\chi\,(\chi_s - \chi)\,\frac{\vec{e}_p}{e_p}, \tag{17}$$

$$\vec{\tau}_s = 2G\,\vec{e}_e^{\,s}.$$

Уравнение поверхности обратимости принимает в соответствии с определением (13) следующий вид:

$$G(e_e)^2 + a\chi^2\left(\chi_s - \frac{2}{3}\chi\right) = \frac{a}{3}\chi_s^3 + G(e_e^s)^2. \tag{18}$$

Исходя из соотношения (17), определим закон обратимого деформирования в начальной стадии, когда

$$\dot{\vec{\tau}} = \boldsymbol{n}_0 \cdot \dot{\vec{e}}_e, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{n}_0 = \left.\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial \vec{e}_e}\right|_{\vec{e}_e=\vec{0}}$ — тензор начальной упругости.

В нашем случае

$$\boldsymbol{n}_0 = 2G\,\boldsymbol{e} + 2a\frac{\vec{e}_p}{e_p}\frac{\vec{e}_p}{e_p}\chi_s, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{e}$ — единичный тензор девиаторного пятимерного пространства.

Второе слагаемое выражения (20) отражает анизотропию, приобретаемую в процессе пластического деформирования. При этом ось анизотропии в девиаторном пространстве задается направлением вектора пластической деформации, а степень анизотропии зависит от проекции вектора достигнутой упругой деформации $\vec{e}_e^s$ на данную ось.

Запишем соотношение (18) при условии, что вектор упругого формоизменения $\vec{e}_e$ направлен противоположно вектору $\vec{e}_p$. В этом случае деформирование производится в направлении, противоположном начальному необратимому. Предполагая процесс начального необратимого деформирования простым, будем считать $\chi = -e_e$, $\chi_s = e_e^s$. Определяя из эксперимента точку на поверхности обратимости $e_e^{\bar{s}}$, найдем константу a из соотношения

$$\frac{a}{G} = \frac{1}{e_e^s} \cdot \frac{3\,(1-\beta)}{(2\beta-1)\,(\beta+1)},$$

где через β обозначено отношение $\beta = \frac{e_e^{\bar{s}}}{e_e^s}$.

Из закона (17) можно получить зависимость напряжений от деформаций при разгрузке после предварительного простого необратимого деформирования. Для этого следует считать $\chi = e_e$, $\chi_s = e_e^s$, тогда, определив модуль $\tau = \sqrt{\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}}$, получим

$$\frac{\tau}{2G} = \sqrt{e_e^2 + 2\frac{a}{G}e_e^2(e_e^s - e_e) + 4\frac{a}{G}e_e^2(e_e^s - e_e)^2}.$$

Ограничиваясь траекториями малой кривизны, полагаем модуль вектора нагружения функцией (не функционалом) длины траектории необратимого деформирования (параметра Одквиста):

$$\tau_s = \tau_s(s_p). \tag{21}$$

В качестве простейшей формы закона упрочнения (21) можно принять линейный закон, в соответствии с которым

$$s_p = \frac{1}{2G_k}\,(\tau_s - \tau_{s0})\,, \tag{22}$$

где G_k — касательный модуль, $\tau_{s0} = 2Ge_0^s$, e_0^s — радиус начальной поверхности обратимости начально-изотропного материала, где в силу частного постулата справедлив закон Гука.

Из закона (22) следует, что в рассматриваемом случае $M = 2G_k$, а из (17) получаем $\boldsymbol{n}_s^{-1} = \frac{1}{2G}\boldsymbol{e}$. В результате закон необратимого деформирования сводится к дифференциальному соотношению

$$\dot{\vec{e}}^s = \frac{1}{2G}\dot{\vec{\tau}}_s + \frac{1}{2G_k}\dot{\tau}_s\frac{\vec{\tau}_s}{\tau_s}. \tag{23}$$

Если положить в (23) $\frac{1}{2G} = \frac{1}{N}$; $\frac{1}{2G_k} = \frac{1}{P} - \frac{1}{N}$, приходим к связи между процессами в форме Ильюшина–Ленского [1].

Соотношение (23) позволяет по заданному закону формоизменения $e^s(t)$ определить закон нагружения $\tau_s(t)$ при заданном начальном условии $\vec{\tau}_s\big|_{\vec{e}=\vec{e}_0^s} = 2G\vec{e}_0^s(T)$, где учтено, что радиус начальной поверхности обратимости может зависеть от температуры T.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-97500) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракт П1125).

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
2. *Маркин А.А.* Вариант термомеханического подхода к построению моделей упругого и упругопластического деформирования / Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ. 2006. С.27–34.
3. *Ильюшин А.А.* Вопросы общей теории пластичности // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24. – Вып. 3. – С. 399–411.
4. *Маркин А.А.* Об изменении упругих и пластических свойств при конечном деформировании // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – М., 1990. – № 2. – С. 120–126.
5. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

МНОГОФАЗНОСТЬ И МНОГОМАСШТАБНОСТЬ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ И ЭКОНОМИКЕ

Р. И. Нигматулин

Институт океанологии им. П.П. Ширшова, МГУ им. М.В. Ломоносова
Москва, Россия
nigmar@ocean.ru

На примере поведения сферического пузырькового кластера в акустическом поле, океанских течений и экономических распределений потребления энергии и денежных доходов показано проявление многофазности (многокомпонентности), многомасшабности и сингулярности.

Процесс расширения (в стадии отрицательного акустического давления) и схлопывания (в стадии положительного акустического давления) парового кавитационного кластера характеризуется гигантским изменением прарметров (давление меняется от 0 до 10^{11} бар, температура T от 10^2 до 10^8 К, скорость от 1 до 10^5 м/с). Этот процесс сопровождается образованием микроударных волн, теплообменом, испарением, конденсацией, диссоциацией и ионизацией пара. В момент схождения микроударных волн в центре пузырька образуется плазма, в которой могут реализовываться условия для термоядерной реакции. Пузырек в данных условиях выглядит как микро-водородная бомба.

Анализ показал, что в условиях, когда максимальный радиус пузырька составляет около 0,7 мм, условия для термоядерной реакции реализуются в центральном ядре схлопывающегося пузырька, радиус которого около 100 нм в течение времени 10^{-12} с. При этом жидкость на межфазной границе находится при высоком давлении $\sim 10^5 - 10^6$ бар в течение времени $\sim 10^{-9}$ с, а характерный масштаб времени одного цикла расширения-сжатия равен $\sim 5\ 10^{-5}$ с. Отсюда видна многомасштабность этого явления.

Расчеты показывают, что в указанных условиях образуется порядка 10 нейтронов за коллапс микропузырька. В экспериментах с дейтерированным ацетоном (C_3D_6O) в ультразвуковом поле удается обеспечить около 10^4 коллапсов в секунду со световыми вспышками, а в кластере имеется около $10 - 10^2$ коллапсирующих микропузырьков. Поэтому расчеты согласуются с измеренным потоком термоядерных нейтронов и интенсивностью образования ядер трития (5×10^5 с$^{-1}$).

Анализ показывает значительные ресурсы сохранения сферически-симметричной формы схлопывания микропузырьков из-за вязкости жидкости и большой плотности пара в сжимающемся пузырьке.

Далее рассмотрены разномасштабные процессы с сингулярностями в двухфазной системе океан – атмосфера, влияющие на климатические изменения, в частности на глобальное потепление.

В заключении показано, как сингулярность или аномально высокое сосредоточение денежных доходов в малой доле (0,1 – 1%) населения приводит не только к препятствованию развития производительных сил, но и к их деградации.

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ НАНОКОМПОЗИТОВ

Б. Е. Победря

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

Механика, как и математика — наука гипотетическая, но её “кирпичики” называют не аксиомами, а постулатами, которые требуют не только теоретических рассуждений, но и проникновения в эксперимент. Хотя материя состоит из атомов, механики успешно пользуются аппаратом сплошной среды. Вычислительная механика композитов и нанокомпозитов представляет собой развивающийся раздел механики неоднородного деформируемого тела. Её цель — получение с заданной точностью решения необходимых задач с использованием возможного класса компьютеров. Важной составляющей такого исследования является вычислительный эксперимент. Условно процедуру решения можно разбить на несколько этапов, тесно взаимодействующих между собой. Необходимо произвести дискретизацию “континуальной” задачи таким образом, чтобы наиболее эффективно осуществить численное решение. Иногда для этого приходится видоизменить исходную постановку задачи.

В последнее время часто говорят о том, что механики как самостоятельной науки не существует. Она, мол, является разделом физики и поэтому её можно исключить из механико-математических факультетов классических университетов и перевести на физические факультеты.

Точного определения механики никто не давал, но, по-видимому, лучше определить так: механикой называется наука, которой занимаются механики. А таких выдающихся механиков, как Н.Е.Жуковский, С.П.Королёв, М.В.Келдыш, А.Н.Крылов, А.Ю.Ишлинский, А.А.Ильюшин и другие, вряд ли можно назвать физиками.

Механика, как и математика,— наука гипотетическая[1], но её “кирпичики” называют не аксиомами, а постулатами, которые требуют не только теоретических рассуждений, но и проникновения в эксперимент. Хотя материя состоит из атомов, механики пользуются аппаратом сплошной среды, т. е. средствами дифференциального и интегрального исчисления. Важной составляющей такого исследования является эксперимент. Применение вычислительных методов к задачам механики называется вычислительной механикой, главной целью которой является нахождение решения с требуемой точностью. А классическая математика в основ-

[1] Выдающийся физик Р.Фейнман математику не считает наукой, см. “Фейнмановские лекции по физике”. Т. 1. М.: Мир, 1965. С. 55.

ном посвящена исследованию условий существования и свойств решения. Важнейшей составляющей вычислительной механики является вычислительный эксперимент.

Вычислительная механика композитов (и нанокомпозитов) представляет собой бурно развивающийся раздел механики неоднородного деформируемого тела. Её цель — получение с заданной точностью решения необходимых задач с использованием возможного класса компьютеров (для разных классов методы решения различны).

Основой вычислительной механики композитов в последнее время служит метод осреднения [1]. Он позволяет с достаточной строгостью описывать разрывные решения системы дифференциальных уравнений механики деформируемого твёрдого тела при использовании статических, динамических, термодинамических процессов, описывать микроструктуру (субструктуру) материалов средствами механики сплошной среды путём введения дополнительных феноменологических параметров и постулатов. Для этого используется кинематика многоуровнего континуума, принятая в структурной механике, обобщение постулатов МСС на случай взаимодействующих между собой элементов структуры с учётом возможных фазовых переходов и химических реакций [2].

Описание модели состоит из двух частей. Одна из них является общей для любого феноменологического подхода и включает основные уравнения МСС. Для произвольного объёма V с замкнутой поверхностью Σ, ограничивающей этот объём, вводятся постулаты МСС. Это — закон сохранения масс, постулат об изменении количества движения и постулат об изменении момента количества движения [2]. Если рассматриваются неизотермические процессы, то вводятся ещё два постулата: первый и второй законы термодинамики. Согласно закону Фурье вектор теплового потока пропорционален градиенту температуры. Следствием введённых постулатов для квазистатических задач МСС являются уравнения равновесия, причём тензоры напряжений и моментных напряжений являются несимметричными. Для неизотермических процессов вводится уравнение притока тепла [2].

Вторая часть описания модели заключается в задании определяющих соотношений среды. Тензоры-операторы, учитывающие историю деформирования, должны быть описаны принципиальной схемой экспериментов, из которых находятся материальные функции. Эти определяющие соотношения могут быть разрешены относительно деформаций и тензоров искривлений [2]. Для построения модели должна быть задана ещё и функция рассеивания [1], после чего будет конкретизировано уравнение притока тепла.

В зависимости от того, линейными или нелинейными являются определяющие соотношения, среда называется физически линейной или нели-

нейной. В зависимости же от того, линейна или нелинейна связь тензоров деформаций и искривлений с вектором перемещений u_i и спин-вектором ω_i ($\omega_{i,j} = \kappa_{ij}$), среда называется геометрически линейной или нелинейной.

Основная сложность заключается в том, что даже линейные определяющие соотношения экспериментально найти очень трудно, а иногда и невозможно.

Рассмотрим, например, линейный случай

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} + A_{ijkl}\kappa_{kl}, \quad \mu_{ij} = B_{ijkl}u_{k,l} + D_{ijkl}\kappa_{kl} \tag{1}$$

Здесь тензоры напряжений σ_{ij} и моментных напряжений μ_{ij} связаны с кинематическими тензорами дисторсии $u_{i,j}$ (градиентом вектора перемещений u_i) и искривлений κ_{ij}. Материальные тензоры четвёртого ранга A_{ijkl}, B_{ijkl}, D_{ijkl} должны определяться экспериментально. Однако до сих пор в литературе такие эксперименты не описаны.

Метод осреднения [1] позволяет найти недостающие материальные тензоры теоретически. Для этого вводится некоторый вектор структуры композита $\vec{\varphi}$:

$$\varphi_i(\xi) = \alpha\xi_i(1 + \alpha a_j\xi_j + \alpha^2 b_{jk}\xi_j\xi_k + \dots)$$

где $a_j, b_{jk}, \dots$ — известные величины, α — малый параметр, являющийся отношением диаметра структуры композита к диаметру рассматриваемого тела, а ξ_j — так называемые быстрые координаты, связанные с глобальными координатами x_i формулами

$$\xi_i = \frac{x_i}{\alpha}$$

В работе [3] найдены все материальные тензоры (1) по теории нулевого приближения [1].

Для развития аппарата вычислительной механики нанокомпозитов большое значение имеет постановка задачи в напряжениях. Ведь основная задача механики деформируемого твёрдого тела связана с проблемой разрушения материалов. При решении задач в перемещениях необходимо проводить численное дифференцирование, что, как известно, понижает точность решения на порядок. В работе [4] дана корректная постановка задачи моментной теории упругости, заключающаяся в решении 18 уравнений совместности относительно 18 независимых компонент тензоров σ_{ij} и μ_{ij} при удовлетворении классических граничных условий и уравнений равновесия, снесённых на границу тела.

Вычислительная механика нанокомпозитов продолжает развиваться с совершенствованием вычислительной техники и методов математического моделирования.

Литература

1. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
2. *Победря Б. Е.* О теории определяющих соотношений в механике деформируемого твёрдого тела // Проблемы механики. Сб. статей к 90-летию со дня рождения А.Ю.Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 635–657.
3. *Победря Б. Е., Омаров С. Е.* Определяющие соотношения моментной теории упругости // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 2007. № 3. с.56–58.
4. *Победря Б. Е.* Статическая задача несимметрической теории упругости для изотропной среды // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 2005. № 1. С. 54–59.

A.A. ILYUSHIN'S WORKS: AN APPRAISAL FROM PARIS

Gérard A. Maugin

Institut Jean Le Rond d'Alembert, Université Pierre et Marie Curie
Paris, France
gerard.maugin@upmc.fr

We present an appraisal of some of the scientific contributions of A.A.Ilyushin on account of recent developments in thermo-mechanics and continuum physics. An attempt is made to place these original contributions in a more international landscape.

1. Introduction

Alexei Antonovich Ilyushin was born (1911) when Pierre Duhem — the prolific French physicist-historian of science (1861-1916) of Gibbs-Duhem fame — was putting a final hand at a remarkable, but little read, bulky treatise on "energetics" or, as Duhem himself called it "a treatise on general thermodynamics' ("thermodynamique générale"; published as Duhem, 1911). Without stretching the history of mechanics too much, this initially slight connection between characters of different historical periods, is justified by the fact that in his typical full literary generosity, Duhem was offering in his treatise a kind of pre-Truesdellian-Nollian opus on the principles of rational continuum mechanics as they were going to be developed by Clifford A. Truesdell and Walter Noll in the USA in the 1950s–1960s (e.g., Truesdell and Toupin,1960, Truesdell and Noll, 1965), while Ilyushin and others (e.g., L.I.Sedov) were developing some equivalent program in the then existing Soviet Union. While Sedov's views are expressed in his two-volume text (Sedov, 1970–1971, 1975), Ilyushin's ones are reflected in his several times revised and augmented course on continuum mechanics (1971, 1978, 1990). I obviously do not discard here the fruitful works of so influential scientists as L.S. Leibenson, I.I. Goldenblatt, N.N. Novozhilov, A.I. Lurié, L.M. Kachanov, Y.N. Rabotnov, G.I. Barenblatt and G.P. Cherepanov.

It is impossible in a short essay like the present one to render full justice to a more than sixty years long career in science as Ilyushin's one that spanned an active period between 1935 and circa 1995. One has to consult the biography given in Russian and English in the book (Kiyko et al, 2001) for a complete overview. Rather than facing this impossible task, I have decided to focus on some aspects that are closer to my own scientific experience (plasticity, general formulation of the thermo-mechanics of continua, electromechanical interactions) and may be related to my friendly connections with Ilyushin's group in Moscow. One additional word of explanation: although basically

scientifically educated in France and the USA, I decided quite early in my career to have a balanced view of scientific developments conducted in parallel in Western Europe, the USA and Eastern Europe. Witness of this are the contents of my text book on plasticity (see Preface in Maugin, 1992). This explains that.

2. Ilyushin and elastoplasticity

2.1. General comments

The strength of materials and the engineering aspects of elastoplasticity seem to have been a constant preoccupation of Ilyushin, starting with his early works in the mid 1930s. What is quite remarkable is that most forward developments he made in an obviously difficult period, the 1940s, corresponding also to the intellectual strength of his maturity. It seems that two landmarks books on plasticity were published at about the same time, the masterpiece of a young English man, Rodney Hill (1950), and the celebrated book of Ilyushin (1948). Previous progress was of course achieved by scientists such as Prandtl, Huber, von Mises, Hencky, Nadaï, Melan and Bridgman. But the late 1940s and early 1950s offer a new vision, more mathematical, with the introduction of general principles such as the maximal dissipation principle of Hill, minimum principles of Hodge, Prager and Greenberg and the stability postulates by Ilyushin and Drucker, all opening the way to a mathematical approach that was to prepare the arrival of computers and numerical techniques of solutions (see the historical perspective in my plasticity textbook: Maugin, 1992). This contrasts with the roster of many painstaking problems solved by hand, but with ingenuity, before these glorious times. We may say that with such general principles, "inequalities" become the main mathematical tool, to be developed later in the form of "variational inequalities" and in agreement with another fundamental inequality, the second law of thermodynamics.

In principle politics and science have no specific connections. But 1948 belongs in a period called the "cold war". We must also remind the reader that in official papers such as passports the Soviet Union gave a translation of Russian data only into diplomatic French. One can easily imagine the difficulties with transliteration of Russian into French and English, yielding quite different orthography, in particular for the hushing-hissing sounds (ts, ch, sh, shch). Anyway, it happened that Ilyushin's (1948) book was not, at least officially, translated into English, but it received a French translation in 1956 — with author's name "Iliouchine" to be pronounced in the French way — in a publishing firm specialized in civil engineering publications. This may explain an early special taste of the French for llyushin's works.

2.2. Ilyushin's iterative method

In Ilyushin's contributions to elasto-plasticity we like first to emphasize the iterative solution method that is attributed to him (Ilyushin, 1943). Elasto-plasticity is a nonlinear theory in which the stress-displacement solution ap-

pears in an incremental scenario that reflects the evolutionary nature of elasto-plasticity problems with possible loading and unloading phases. In a typical implicit scheme one has to determine the increments in displacement $\Delta \boldsymbol{u}$, strain $\Delta \boldsymbol{E}$ and stress $\Delta \Sigma$ such that the increment in displacement equals the increment in the kinematic condition at the boundary at the target time t_{n+1} and the new stress $\Sigma_n + \Delta \Sigma$ is in the target static condition S_{n+1} at target time t_{n+1}. The basic idea goes back to Picard's method of successive approximations to nonlinear equations as illustrated in standard books on applied mathematics (e.g., Ince, 1944). More precisely, in Ilyushin's strategy proposed for simple or quasi-simple plastic processes, the solution is obtained directly for an arbitrary fixed instant of time as the limit of a convergent sequence of elastic solutions: at each iteration step the external loadings for corresponding elastic approximation are formed as the result of the previous step. Many examples of such solutions in elasto-plasticity and thermo-elasto-plasticity were treated in the 1950s–1960s (see, e.g., Mendelson and Spero, 1962; Mendelson, 1968). In a more recent computer era, we must single out J.J.Moreau's (1971) implicit scheme — also Johnson (1976) —, and its implementation by Nguyen Quoc Son (1977) – also reported in Chapter 11 in Maugin (1992).

2.3. Illyushin's postulate

As mentioned before, Ilyushin's postulate in elasto-plasticity belongs in this flourishing period when minimum (or maximum) principles started to play a fundamental role, directly reflecting the thermodynamic irreversibility of the evolution of the plasticity phenomenon.

Ilyushin's postulate (Ilyushin, 1961, 1963) can be stated thus: for any strain cycle $\varepsilon(t)$, $t \in [0, 1]$ with $\varepsilon(0) = \varepsilon(1)$ in small strains, the strain power is positive or zero (semi-colon here means contracted product of two Cartesian tensors):

$$\int_0^1 \sigma : \dot{\varepsilon}(t)\, dt \geqslant 0. \tag{1}$$

This applies to materials with hardening. In modern continuum thermomechanics, following Halphen and Nguyen Quoc Son (1975), one considers so-called "generalized standard materials" for which the elastic energy per unit volume $W(\varepsilon, \alpha)$, where α stands for the set of internal variables of state, is such that

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon},\ A = -\frac{\partial W}{\partial \alpha},\ A \in C, \tag{2}$$

where W is convex in its two arguments, and the thermodynamical force A associated with α is restrained to the convex set C in A space. In special cases the latter may be the space of stresses. The time evolution of α is such that $\dot{\alpha} \in N_C(A)$, i.e., in terms of convex analysis, it belongs to the "cone of outward normals" to C. This can also be written as the variational inequality

(cf. Maugin, 1992, Chapter 5)

$$(A - A*) \cdot \dot{\alpha} \geqslant 0, \tag{3}$$

for $\forall A* \in C$. This "normality rule" of evolution favoured in many plasticity models essentially means that dissipation occurs only when the elastic limit (the yield criterion) has been reached. It is easily proved that if (3) holds good, then so is the case of (1) – cf. Maugin, 1992, pp.111–112. Accordingly, while Ilyushin considers (1) as the fundamental hypothesis in his approach to plasticity, here it is the convexity hypothesis with regard to both W and the yield criterion that provide the basis of the formulation. Ilyushin's postulate (1) can be viewed as a *global stability criterion* which says that any closed response loop in a stress-strain diagram is always followed *clockwise*. It is Drucker's (1951) inequality (here ε^p is the plastic strain)

$$\dot{\sigma} : \dot{\varepsilon}^p \geqslant 0, \tag{4}$$

that implies that in such a diagram increments in stress and strain must always have the same sign in both loading and unloading. This positive hardening condition provides a *local stability criterion* for the material and gives further information on the shape of the loop considered by Ilyushin.

Now (3) is nothing but *Hill's maximum dissipation principle* in a disguise, as (3) is equivalent to the following mathematical statement on plastic dissipation:

$$\Phi = \sup_{A \in C} A \cdot \dot{\alpha} \geqslant 0. \tag{5}$$

The relationship between Ilyushin's, Drucker's and Hill's principle was further discussed by several authors (see, Maugin, 1992; Marigo, 2000, 2001). To conclude this section, we note that Manville (1927), in his lengthy and detailed analysis of the works of P. Duhem, note that Duhem's thoughts about irreversible (hysteretic) behaviours (one of his "nonsensical branches of mechanics") are almost the same as Drucker's and Ilyushin's proposals, being mathematically transcribed as (Formula as the un-numbered third equation in p.313 in Manville, 1927; originally in Duhem, 1901)

$$\oint_{cycle} A \cdot \dot{\alpha} dt \geqslant 0. \tag{6}$$

This, by itself, justifies the initial remark of placing the names of Duhem and Ilyushin side by side in the above given introduction.

3. Ilyushin and general continuum physics

Here we have gathered points that may be of more general interest than plasticity, i.e., some of the arguments that apply to the whole of continuum mechanics with perhaps some interaction with other physical fields.

3.1. General principles: Ilyushin versus Noll

In western countries, (Europe, USA, etc), the influence of the revival of nonlinear continuum mechanics by C.A.Truesdell (of course, among others who are not always granted sufficient credit) and the clear formulation of its mathematical basis by Walter Noll and his close associates left a definite print on our vision and way of teaching continuum mechanics, and, by extension, continuum physics. This made forced and un-voluntary abstraction of almost similar developments in other areas of the World, in the somewhat isolated USSR in particular. But it is now realized that the grand program devised by Truesdell, Toupin, Noll and others (see the encyclopaedic articles of Truesdell and Toupin, 1960, and Truesdell and Noll, 1965) and further theorization by Noll (e.g., Noll, 1972) may have been in competition with other formulations of equal generality and rigor. This point is expanded at length by G.L.Brovko (2011) in his contribution to an Anniversary issue, so that we restrain ourselves from dealing in detail with this point.

3.2. Ilyushin-Lensky five-dimensional space

Of course we all agree now that the actual state of stresses in a material body depends on the whole past history of the body. This was clearly stated by Ilyushin in his book of 1948, but also continuously emphasized by him in his publications, including in his textbook for the Lomonosov University (Ilyushin, 1971 to 1990). First implemented in small-strain plasticity, Illyushin introduced the notion of six-dimensional spaces of strains and stresses (1954 on) – reduced to *five-dimensional spaces of deviatoric quantities* in the case of plasticity. This allows a classification of deformation processes with deformation trajectories with the required degree of complexity. This is particularly well adapted to the description of hardening in elasto-plastic materials, in particular in accounting for the deformation acquired by the yield surface during the evolutionary history of the material. In the case of plasticity the arc-length in 5D strain space is given by $ds = \sqrt{de_i de_i}$, where e_i denotes the five independent components of the deviatoric strain. Devised testing machines reproduce the trajectories in such spaces for complex loading. This led to the introduction of a "*principle of isotropy*" and the subsequent proposal of a "*postulate of macroscopipc determinability*". This was often developed in co-operation with V.S. Lensky, a long-time associate of Ilyushin (see Ilyushin and Lensky, 1959; Lensky, 1960). Lensky and Lensky (1994, communicated by the present author to this journal) have shown the better agreement obtained with experiments by such a description than by accepted standard theories of elasto-plasticity. A modern reference to these works with some extensions is Zyczkowski and Kurtyka (1984). Although noticed by J.F. Bell in his encyclopaedic opus (Bell, 1973, pp.678–679), this has had very little influence in Western Europe and the USA, not because of some scientific bias but largely because of the lack of communication between Ilyushin's group and the rest

of the World in that critical period of history. As told by V.S. Lensky himself to the author, his travel to the USA in 1960 (Lensky, 1960) was something of an exception and one of the few exposition of the theory to the Western world. Had scientific communication been smoother at the time, our way of exposing general principles of continuum mechanics may have been quite different, in any case certainly richer.

3.3. Electromagneto-mechanical couplings

On perusing Ilyushin's textbook (1971 and further editions) for the Lomonosov State University, we find a general view of mechanics that clearly appears a subset of continuum physics. That is a viewpoint that we advocated since our beginning in research some 45 years ago. This inevitably led us to thoroughly study the interactions between electromagnetic fields and deformable bodies endowed with various electromagnetic properties. Our many research papers in the field (in Einsteinian or Galilean relativity), and our book (Maugin, 1988) and subsequent ones reflect this specific professional interest. In his last edition (1990, Section 22) of his textbook on continuum mechanics, Ilyushin was kind enough to include a résumé of our formulation of the electrodynamics of moving deformable continua. This is a point that put us for sometime on a little cloud, and of which we remain the most proud.

4. Conclusion

We have perused in a somewhat pedestrian way only some of the scientific achievements of Alexei Antonovich Ilyushin with a perception biased by our own scientific interests and a Paris-based, certainly deformed and nonobjective, vision. The complete works of Ilyushin deal with much more subjects including thermoelasticity, viscoelasticity, thermo-viscoelasticity, penetration problems, stability of structures, nonlinear dynamics of continua and structures. This was achieved in a difficult period during which Ilyushin was also much involved in academic duties — both lecturing and administration —, and also with a serious involvement in national scientific and engineering matters. This makes these achievements all the more remarkable, especially in elastoplasticity, demonstrating an unusual powerful scientific mind and a never tired individual with an outstanding strength of work. It is regrettable that historical circumstances did not favour a full international recognition at these times.

References

1. *Bell J.F.*, (1973) The experimental foundations of solid mechanics. In: Handbuch der Physik, Ed. S.Flügge, Bd. VIa/1, pp.1–813. Springer-Verlag: Berlin.
2. *Brovko G.L.*, (2011). On general principles of the theory of constitutive relations in classic continuum mehanics, J.Engng.Math. (2011, in press)
3. *Drucker D.C.*, (1951). A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. In : Proc. First US National Congress of Applied Mechanics, pp.487–491, ASME: New York.
4. *Duhem P.*, (1901). Sur des déformations permanentes et l'hystérésis, Partie 6: L'inégalité de Clausius et l'hystérésis, Mém.Acad.Roy.Belgique, 62, 1–32 (On permanent deformations and hysteresis, Part 6 : Clausius- inequality and hysteresis).

5. *Duhem P.*, (1911). Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale, Two volumes, Gauthier-Villars : Paris.
6. *Halphen B. and Nguyen Quoc Son*, (1975). Sur les matériaux standards generalises, J.Mécanique (Paris), 14, 39–63.
7. *Hill R.*, (1950). The mathematical theory of plasticity, Clarendon Press: Oxford.
8. *Ilyushin A.A.*, (1943). Some problems in the theory of plastic deformation (in Russian), Prikl.Mat.Mekh., 7, 245–272.
9. *Ilyushin A.A.*, (1948). Plasticity: Elastic-plastic deformations (in Russian), Gostekhidzat, Moscow; (in French: Plasticité: Déformations élastico-plastiques, Translation by A.Popoff and P.Thome; Eyrolles Editeur: Paris, 1956).
10. *Ilyushin A.A.*, (1954). On relations between stresses and small strains in continuum mechanics, Prikl.Mat.Mech. (English Translation), 18, 641–666.
11. *Ilyushin A.A.*, (1961). On the postulate of stability, J.Appl.Math.Mech. (P.M.M.) 25, 746–752.
12. *Ilyushin A.A.*, (1963). Plastichnost'. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii (Plasticity, Foundations of the General Mathematical Theory), Acad.Sci.USSR: Moscow.
13. *Ilyushin A.A.*, (1971). Mekhanika sploshnoy sredy (Continuum Mechanics), Moscow State University Press, Moscow (1971); (Second Edition, 1978; Third edition; 1990).
14. *Ilyushin A.A.*, (2003–2009; in Russian), Selected collected Works: Vol.1 (1935-1945), Fizmatlit: Moscow (2003); Vol.2 (1946-1966), Fizmatlit: Moscow (2004); Vol.3: Theory of thermoviscoelasticity, Fizmatlit: Moscow (2007); Vol.4: Modelling of dynamic processes in solids and engineering applications, Fizmatlit: Moscow (2009).
15. *Ilyushin A.A. and V.S. Lenskii*, (1959). Soprotivleniye materialov (Strength of materials), Fizmatgiz: Moscow.
16. *Ince E.E.*, (1944). Ordinary differential equations, Dover (reprint): New York.
17. *Johnson C.*, (1976). Existence theorems for plasticity problems, J. Math. Pures et Appl., 55, pp.431–444.
18. *Kiyko I.A., Israelov M.Sh., and Brovko G.L.*, (2001, Editors), Elasticity and Anelasticity, Moscow University Press (mostly in Russian).
19. *Lensky V.S.*, (1960). Analysis of plastic behaviour of metals under complex loading. Plasticity. Contribution to Proc. 2nd Symp. on Naval Struct. Mech., pp.269-278 (Brown University, 5–7 April 1960).
20. *Lensky V.S. and Lensky E.V.*, (1994). Constitutive equations and physical reliability in the modern theory of plasticity, Int.J.Engng.Sci., 32, 743-753.
21. *Manville O.*, (1927). La physique de Pierre Duhem, Mém.Soc.Sci.Phys.Nat.Bordeaux, I, 7ème série, 171–636.
22. *Marigo J.J.*, (2000). From Clausius-Duhem and Drucker-Ilyushin inequalities to standard materials, In: Continuum Thermomechanics: The Art and Science of Modelling Material Behaviour, Eds. G.A.Maugin, R.Drouot and F.Sidoroff, pp. 289–300, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Holland.
23. *Marigo J.J.*, (2001). Some consequences of Ilyushin's stability postulate on constitutive equations, In: Elasticity and Anelasticity, Eds. I.A.Kiyko, M.Sh.Israelov and G.L.Brovko, pp.61–66, Moscow University Press (Note: most of the book in Russian).
24. *Maugin G.A.*, (1988). Continuum mechanics of electromagnetic solids, North-Holland: Amsterdam (Russian edition: Mekhanika electromagnitnykh sploshnykh sred, MIR: Moscow, 1991)
25. *Maugin G.A.*, (1992). The thermomechanics of plasticity and fracture, Cambridge University Press: Cambridge, U.K.
26. *Maugin G.A.*, (1999). The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors, World Scientific: Singapore and New Jersey, USA.
27. *Mendelson A.*, (1968). Plasticity theory and applications, MacMillan: London.
28. *Mendelson A. and Spero S.W.*, (1962). A general solution for the elastoplastic thermal stresses in a strain-hardening plate with arbitrary material properties, Trans. ASME J.Appl.Mech., 29, 151–158.

29. *Moreau J.J.*, (1971). On unilateral constraints, friction and plasticity, in: Lecture notes CIME, Bressanone), Edizioni Cremonese: Roma.
30. *Nguyen Quoc Son*, (1977). On the elastic-plastic initial-boundary value problem and its numerical integration, Int.J.Num.Meth.Engng., 11, 817–832.
31. *Noll W.*, (1972). A new mathematical theory of simple materials, Arch.Rat.Mech.Anal., 48, 1–50.
32. *Sedov L.I.*, (1973). Mekhanika sploshnoy sredy (Continuum Mechanics), Two volumes; Nauka, Moscow (in English: Continuum mechanics, North-Holland, Amsterdam, 1971; in French: Mécanique des milieux continus, Editions MIR: Moscow, 1975)
33. *Truesdell C.A. and Toupin R.A.*, (1960). The classical field theories. In: Handbuch der Physik, Vol.III/1, ed. S.Flügge, Springer-Verlag: Berlin.
34. *Truesdell C.A. and Noll W.*, (1965). Nonlinear field theories of mechanics. In: Handbuch der Physik, Vol. III/3, ed. S.Flügge, Springer-Verlag: Berlin.
35. *Zyczkowski M. and Kurtyka T.*, (1984). Generalized Ilyushin's spaces for a more adequate description of plastic hardening, Acta Mechanica, 52, 1–13.

СЕКЦИЯ I.

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА И ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПЛАСТИЧНОСТИ

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МИЗЕСА

Б. Д. Аннин

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия

tm@mami.ru

Методом Л. В. Овсянникова проводится анализ групповых свойств и построение точных решений уравнений пластического течения Мизеса.

Пусть x_1, x_2, x_3 — прямоугольная декартова система координат, t — время $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости; ρ — плотность, $\eta_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ — компоненты тензора скоростей деформации, $J_2 = \eta_{ij}\eta_{ij}$ — его второй инвариант; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, $\sigma = (\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})/3 \equiv -p$ его первый инвариант. Здесь и ниже по повторяющимся индексам производится суммирования от 1 до 3; запятая перед индексом i означает дифференцирование по x_i. Уравнения теории пластичности Мизеса [1] имеют вид (i, j = 1, 2, 3):

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = -p_{,i} + (2\mu\eta_{ij})_{,j},\ v_{i,i} = 0;\ \ \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i\frac{\partial}{\partial x_i},\ \mu = k[2J]^{-1/2}. \quad (1)$$

Таким образом, для четырех функций p, v_1, v_2, v_3, зависящих от t, x_1, x_2, x_3, имеются четыре уравнения. Для компонент девиатора тензора напряжений справедливы соотношения

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}, \quad s_{ij} = 2\mu\eta_{ij},\ s_{ij}s_{ij} = 2k^2 \quad (2)$$

Применение уравнений (1) к моделированию скоростных процессов обработки металлов давлением дано в [2].

Допускаемая [3] системой (1) алгебра операторов имеет базис

$$Z_1 = x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + v_2\frac{\partial}{\partial v_3} - v_3\frac{\partial}{\partial v_2},\ \ Z_2,\ \ Z_3,\ S = \frac{\partial}{\partial p},$$
$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},\ M = t\frac{\partial}{\partial t} + x_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (3)$$
$$Y_1 = t\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial v_1},\ Y_2 = t\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial v_2},\ Y_3 = t\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial v_3}$$

Операторы Z_2, Z_3 получаются из Z_1 круговой перестановкой индексов.

Операторы (3) позволяют строить [3–5] точные решения системы (1).

Рассмотрим [4] решение:

$$v_1 = a_1x_1 + A_1, \quad v_2 = a_2x_2 + A_2, \quad v_3 = a_3x_3 + c, \quad b_3 = -(\dot{c} + c\,a_3)\rho,$$

$$p = -\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\rho}{2}(\dot{a_i} + a_i^2)x_i^2 - b_ix_i\right) + Aa_3 + ma_3 = -(a_1 + a_2), \qquad (4)$$

$$A=2k(a^2+(A_1')^2+(A_2')^2)^{-\frac{1}{2}},\ a^2 = \frac{2}{3}((a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2).$$

Здесь постоянная ρ — плотность; a_1, a_2, b_1, b_2, c, m — произвольные функции времени t; A_1, A_2 — функции от t, x_3, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\rho(\dot{A_1} + a_1A_1 + (a_3x_3 + c)A_1') - \frac{1}{2}(AA_1')' + b_1 = 0,\\ \rho(\dot{A_2} + a_2A_2 + (a_3x_3 + c)A_2') - \frac{1}{2}(AA_2')' + b_2 = 0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Точка означает дифференцирование по t, штрих — дифференцирование по x_3. При этом компоненты тензора напряжений равны

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = -p + Aa_1, \ \ \sigma_{22} = -p + Aa_2, \ \ \sigma_{33} = -p + Aa_3,\\ \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = \frac{1}{2}AA_1', \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2}AA_2'\end{gathered} \qquad (6)$$

Заметим, что решение (4)–(6), приведенное в [4], стр. 22 и в [5], стр. 87, содержит опечатки.

Рассмотрим частные случаи решения (4) - (6)

1^o. Пусть в уравнениях (1) и (2) силы инерции не учитываются.(квазистатические уравнения теории течения Мизеса). Решение аналогичное, (4) – (6), имеет вид

$$\begin{gathered}v_1 = a_1x_1 + A_1, \ \ v_2 = a_2x_2 + A_2, \ \ v_3 = a_3x_3 + c,\\ p = b_1x_1 + b_2x_2 + Aa_3 + m, \quad a_3 = -(a_1 + a_3),\\ A = 2k(a^2 + (A_1')^2 + (A_2')^2)^{-1/2}, \ (AA_1')' - 2b_1 = 0, \ (AA_2')' - 2b_2 = 0,\\ a^2 = \frac{2}{3}((a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_1 - a_2)^2).\end{gathered} \qquad (7)$$

Здесь a_1, a_2, b_1, b_2, c, m — произвольные постоянные, A_1, A_2 — функции от x_3. Соотношения (7) получаются из (4) – (6), если в последних положить $\rho = 0$. Из соотношений (7) следует

$$\begin{gathered}AA_1' = 2b_1x_3 + 2d_1, \ \ AA_2' = 2b_2x_3 + 2d_2,\\ A = \frac{2}{a}(k^2 - (d_1 + b_1x_3)^2 - (d_2 + b_2x_3)^2)^{1/2},\end{gathered} \qquad (8)$$

где d_1, d_2 — постоянные, такие что $k > (b_1 d_2 - b_2 d_1)^2/(b_1^2 + b_2^2)$. Интегрируя соотношения (8), получим

$$A_i = m_i(k^2 - (d_1 + b_1 x_3)^2 - (d_2 + b_2 x_3)^2)^{1/2} + \\ + n_i \arcsin \frac{(b_1^2 + b_2^2)x_3 + (d_1 b_1 + d_2 b_2)}{(k^2(b_1^2 + b_2^2) - (d_1 b_2 - d_2 b_1)^2)^{1/2}} + c_i,$$

$$m_i = -\frac{ab_i}{(b_1^2 + b_2^2)}, \quad n_i = (ad_i + (d_1 b_1 + d_2 b_2)m_i)/(b_1^2 + b_2^2)^{1/2}, \quad i = 1, 2,$$

где c_1, c_2 произвольные постоянные. Используя равенства (6) находим

$$\sigma_{11} = -p + Aa_1, \quad \sigma_{22} = -p + Aa_2, \quad \sigma_{33} = -p + Aa_3, \\ \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = (b_1 x_3 + d_1), \quad \sigma_{23} = (b_2 x_3 + d_2) \tag{9}$$

Это решение описывает сжатие слоя в виде пластины произвольного очертания, например, прямоугольного при условии, что ее толщина существенно меньше, чем диаметр.

В случае плоской деформации, определяемой условием $v_2 = 0$, следует в (7) – (9) положить $a_2 = 0$, $A_2 = 0$, $b_2 = 0$, $d_2 = 0$, следовательно $m_1 = -a/b_1$, $n_1 = 0$. Примем $c = 0$, $d_1 = 0$, $a_1 > 0$, $b_1 = k/h$, тогда $a = 2a_1$. Имеем классическое решение Прандтля [1] для полосы:

$$v_1 = a_1 x_1 + A_1,\ v_2 = 0,\ v_3 = -a_1 x_1,\ p = \frac{k}{h}x_1 - Aa_1 + m,\ \sigma_{11} = -p + Aa_1,$$

$$\sigma_{33} = -p - Aa_1,\ \sigma_{13} = \frac{k}{h}x_3,\ A = \frac{k}{a_1}\sqrt{1 - \frac{x_3^2}{h^2}},\ A_1 = -\frac{2a_1}{h}\sqrt{1 - \frac{x_3^2}{h^2}} + V.$$

Здесь $2h$ — ширина полосы, V — произвольная постоянная.

Обобщению этого решения посвящены работы [6, 7]

2^o. Рассмотрим установившееся течение — функции p, v_1, v_2, v_3 явно от времени не зависит. Силы инерции определяется только конвективными слагаемыми. В формулах (4)–(6) следует считать c, a_i, b_i, $(i = 1, 2, 3)$ постоянными, а A_1, A_2 — функции только x_3; производные по времени следует приравнять нулю.

Для плоской деформации, определяемой условием $v_2 \equiv 0$, следует дополнительно принять $a_2 = b_2 = 0$, $A_2 = 0$. Полагая $a_1 > 0$, $c = 0$, будем иметь

$$v_1 = a_1 x_1 + A_1,\ v_2 = 0,\ v_3 = -a_1 x_3,\ p = -\frac{\rho a_1^2}{2}(x_1^2 + x_3^2) + b_1 x_1 - Aa_1 + m,$$

$$a = 2a_1, \quad b_3 = 0, \quad A = 2k(a^2 + (A_1')^2)^{-1/2}.$$

Уравнение для определения $A_1 = A_1(x_3)$ имеет вид

$$\rho a_1(A_1 - x_3 A_1') - \frac{1}{2}(AA_1')' + b_1 = 0 \tag{10}$$

Компоненты тензоров напряжений определяются формулами (6) в которых следует положить $A_2 = 0$.

Частным решением уравнения (10) будет линейная функция $A_1 = \alpha x_3 + \beta$, где α, β — постоянные. Из соотношений (6) следует, что все касательные напряжения будут постоянными. В дальнейшем будем предполагать, что A_1 не является линейной функцией x_3.

Вместо x_3 и A_3 введем новую переменную x и новую неизвестную функцию $y = y(x)$ по формулам

$$x = x_3\lambda, \quad y = (\frac{A_1}{2a_1} + \frac{b_1}{2\rho a_1^2})\lambda, \quad \lambda = a_1\sqrt{\frac{2\rho}{k}}.$$

Функция $y = y(x)$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)} - (y - x\frac{dy}{dx}) = 0. \tag{11}$$

Преобразование Лежандра

$$x = \frac{dw(s)}{ds}, \quad y = s\frac{dw(s)}{ds} - w, \tag{12}$$

где $w = w(s)$, приводит уравнение (11) к виду

$$w\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{1}{(1 + s^2)^{3/2}} = 0. \tag{13}$$

Численное решение задачи Коши для уравнения (13) с условиями $w(0) = \delta$, $\frac{dw}{ds}\Big|_{s=0} = \gamma$, где δ, γ — постоянны на интервале $(0, l)$, l — постоянная, может быть осуществлено, например, с помощью процедуры NDSolve программы Математика 7.0. Это позволяет по формулам (12) найти $x(s)$, $y(s)$, а следовательно определить скорости и напряжения в слое.

Приближенное решение задачи (9), (10) дано в работе [7]

3^o. Рассмотрим нестационарный случай для плоской деформации, определяемой условием $v_2 = 0$, т.е. $a_2 = b_2 = 0$, $A_2 \equiv 0$.

Полагая $a_1 > 0$, $c = 0$, будем иметь (a_1, b_1, m зависят от t)

$$v_1 = a_1x_1 + A_1, \ v_2 = 0, \ v_3 = -a_1x_3, \ A = 2k(a^2 + (A_1')^2)^{-1/2}, \ a = 2a_1,$$

$$p = \frac{-\rho}{2}(\dot{a_1} + a_1^2)x_1^2 - \frac{\rho}{2}(-\dot{a_1} + a_1^2)x_3^2 - a_1 A + b_1 x_1 + m, \quad b_3 = 0.$$

Здесь функция A_1 зависит от t, x_3 и удовлетворяет уравнению

$$\rho(\dot{A_1} + a_1 A_1 - a_1 x_3 A_1') - \frac{1}{2}(AA_1')' + b_1 = 0 \qquad (14)$$

Принимая независимость a_1, m от t будем иметь из уравнения (14)

$$A_1 = -2a_1\sqrt{R^2 - x_3^2} + V, \quad b_1 = \frac{k}{R} - \rho V a_1, \quad R = re^{-a_1 t},$$

где r, V — постоянные.

Решение задачи о динамическом сжатии полосы с начальной толщиной $2h$, учитывающее силы инерции, имеет вид

$$v_1 = a_1 x_1 + A_1,\ v_2 = 0,\ v_3 = -a_1 x_3,\ \sigma_{11} = -p + Aa_1,\ \sigma_{22} = -p,\ \sigma_{23} = 0,$$

$$p = -\frac{\rho a_1^2}{2}(x_1^2 + x_3^2) + b_1 x_1 - Aa_1 + m,\ \sigma_{33} = -p - Aa_1,\ \sigma_{13} = \frac{k}{R}x_3, \quad (15)$$

$$A_1 = -2a_1 R\sqrt{1 - (\frac{x_3}{R})^2} + V,\ A = \frac{k}{a_1}\sqrt{1 - (\frac{x_3}{R})^2},\ b_1 = \frac{k}{R} - \rho V a_1,\ R = he^{-a_1 t}.$$

Здесь $a_1 > 0$, m, $h > 0$, V — постоянные.

Из (15) следует, что давление зависит от x_1 по квадратичному закону, тогда как в решении Прандтля по линейному. Этот факт был ранее отмечен в работе [9]. Заметим, что решение (15) не совпадает с решением приведенном в [9]. В [9] толщина полосы меняется с течением времени по линейному закону, а в (15) по экспоненциальному.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 40).

Литература

1. Теория пластичности: Сб. переводов / Под ред. Ю. Н. Работнова. М.: ГИТТЛ, 1948.
2. *Ильюшин А.А.* Труды т.4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009.
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978.
4. *Аннин Б.Д.* Современные модели пластических тел. Новосибирск. Изд-во НГУ. 1975.
5. *Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Н: изд. Наука. 1985.
6. *Кийко И.А.* Обобщение задачи Л.Прандтля об осадке полосы на случай сжимаемого материала // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика, механика, 2002. №4.
7. *Георгиевский Д.В.* Асимптотическое разложение и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. №1. С.83–93.
8. *Наяр Е.* Некоторые плоские инерционные течения пластических материалов // Механика сплошных сред. София, 1968.
9. *Быковцев Г.И.* О сжатии пластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом сил инерции // Изв. АН СССР от-ние техн. наук; механика машиностроения. 1960. №6.

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ СПЛОШНЫХ СРЕД

В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко

Кубанский государственный университет
Краснодар, Россия

babeshko@kubsu.ru

Факторизационные методы имеют топологическую основу и служат средством исследования интегральных уравнений и граничных задач, поставленных на многообразиях с краем.

1. Интегральный метод факторизации, созданный в работах Н.Винера и Е.Хопфа [1], возник при исследовании и решении интегральных уравнений или их систем, заданных на полуоси, с разностным ядром. Этот тип интегральных уравнений, называемых уравнениями Винера-Хопфа, порождается граничными задачами для дифференциальных уравнений со сменой граничных условий на вещественной оси или окружности, называемых смешанными задачами. Интегральное уравнение

$$\int_0^\infty \boldsymbol{k}(x-\xi)\boldsymbol{q}(\xi)d\xi = \boldsymbol{f}(x), \quad x > 0, \tag{1}$$

продолженное на отрицательную полуось вектор-функцией $\boldsymbol{e}(x)$, применением преобразования Фурье сводится к векторному функциональному уравнению Винера–Хопфа вида

$$\boldsymbol{K}(\alpha)\boldsymbol{Q}_+(\alpha) = \boldsymbol{F}_+(\alpha) + \boldsymbol{E}_-(\alpha). \tag{2}$$

Здесь функции, обозначенные большими буквами, означают преобразования Фурье от соответствующих функций, обозначенных малыми, а знаки внизу — свойства регулярности аналитических функций в верхней (плюс) и в нижней (минус) комплексных полуплоскостях. Свойства регулярности определяются носителями вектор-функций $\boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{e}(x)$ — положительной или отрицательной полуосями. Решающую роль для решения функционального уравнения Винера–Хопфа играет факторизация в виде произведения функции матрицы-функции $\boldsymbol{K}(\alpha)$

$$\boldsymbol{K}(\alpha) = \boldsymbol{K}_-(\alpha)\boldsymbol{K}_+(\alpha) \tag{3}$$

элементы которой в общем случае принадлежат некоторому банахову пространству суммируемых функций. Матрица-функция $\boldsymbol{K}_+(\alpha)$ должна быть регулярна в верхней полуплоскости и ее определитель не имеет там нулей, таким же свойством обладает матрица-функция $\boldsymbol{K}_-(\alpha)$ в нижней

полуплоскости. Техника решения функционального уравнения или различных его модификаций изложены в работах [2–5] и в многочисленных приложениях.

Заметим, что в приложениях более важными являются интегральные уравнения (1), заданные не на полуоси, а на конечных отрезках [4, 5], которые обычно сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

2. Дифференциальный метод факторизации, созданный в Кубанском государственном университете [6–8], предназначен для получения интегрального представления решений систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в сложных областях и продиктован необходимостью исследования прежде всего задач сейсмологии. Его основу составляют следующие положения топологической алгебры. Область задания краевой задачи рассматривается как топологическое многообразие с краем. Автоморфизм, т. е. отображение этого многообразия на себя, порождает группы преобразований, изоморфные некоторым группам невырожденных матриц. Последние порождают представления этих групп, описываемые в общем случае сложными специальными функциями. Дифференциальное выражение, в частных производных, входящее в постановку краевой задачи, рассматривается как дифференцируемое отображение на многообразие с краем векторного поля, заданного на этом же многообразии. Оно приводит к функциональному уравнению, отличающемуся от (2) тем, что матрицы-функции $\boldsymbol{K}(\alpha)$ являются полиномиальными. Обеспечение автоморфизма приводит к необходимости исследования функционального уравнения методом факторизации. В том случае, когда порождаемые при автоморфизме специальные функции оказываются инвариантными относительно дифференцируемого отображения, исследование функционального уравнения оказывается особенно простым, поскольку граничные условия глобально формулируются на координатных поверхностях. В общем случае для обеспечения автоморфизма приходится использовать локальные координаты, применяя топологическое разбиение единицы. Заметим, что попытка применения факторизационных методов к граничным задачам предпринята в работе Г. И. Эскина [9]. Однако он не заметил возможность использования автоморфизма многообразий, а потому ограничился лишь регуляризацией оператора граничной задачи.

Рассмотрим следующую, достаточно общую, записанную в операторном виде, краевую задачу для системы P дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в частных производных произвольного

порядка дифференцирования в выпуклой трехмерной области Ω.

$$\boldsymbol{K}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{p,x_1x_2x_3} = 0,$$
$$s = 1, 2, \ldots, P, \tag{4}$$
$$A_{sqmnk} = \text{const}, \quad \varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_P\}.$$
$$\boldsymbol{\varphi} = \{\boldsymbol{\varphi}_s\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3), \quad \boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

На границе $\partial\Omega$ задаются следующие граничные условия

$$\boldsymbol{R}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{p=1}^{P} B_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{p,x_1x_2x_3} = f_s, \tag{5}$$

$$s = 1, 2, \ldots, s_0 < P, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \quad M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad K_1 < K.$$

Заметим, что подобно изложенному выше интегральному методу факторизации, в дифференциальном методе факторизации краевая задача решается точно, если Ω является полупространством. В случае, если область Ω является выпуклой — задача сводится к решению системы нормально разрешимых псевдодифференциальных уравнений. Факторизационный метод при своем применении требует использование аппарата внешнего анализа. Применение дифференциального метода факторизации, к граничным задачам включает несколько этапов.

1) Сведение дифференциальных уравнений преобразованием Фурье к функциональному уравнению. Трехмерным преобразованием Фурье вида

$$\Phi_n(\boldsymbol{\alpha}) = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}_n(\boldsymbol{x})\, e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}\rangle} d\boldsymbol{x} \equiv F\varphi_n, \quad \Phi_m = F\boldsymbol{\varphi}_m.$$

она сводится к функциональному уравнению вида

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Phi} = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv -\boldsymbol{K}(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \|k_{nm}(\boldsymbol{\alpha})\|. \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\alpha})$ — полиномиальная матрица-функция порядка P.

Вектор внешних форм $\boldsymbol{\omega}$ имеет в качестве компонент двумерные функции вида

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, P,$$

$$\omega_s = \mathrm{P}_{12s}dx_1 \Lambda dx_2 + \mathrm{P}_{13s}dx_1 \Lambda dx_3 + \mathrm{P}_{23s}dx_2 \Lambda dx_3. \tag{7}$$

Здесь введены векторы произвольной системы координат из покрытий касательного расслоения поверхности тела. В декартовой системе координат для касательных векторов произвольного элемента покрытия приняты обозначения

$$x_1 = \left\{x_1^1, x_1^2, x_1^3\right\}, \quad x_2 = \left\{x_2^1, x_2^2, x_2^3\right\}.$$

Коэффициенты внешних форм имеют вид

$$P_{12s} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A_{spmnk}\,(-i\alpha_1)^m\,(-i\alpha_2)^n \cdot \\ \cdot \sum_{p_3=1}^{k} (-i\alpha_3)^{p_3-1}\,\varphi_{p,x_3}^{(k-p_3)} e^{i\langle \boldsymbol{\alpha x}\rangle}, \tag{8}$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad \boldsymbol{\varphi} = \{\boldsymbol{\varphi}_n\}, \quad \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \{\Phi_m\}.$$

2) Удовлетворение заданным граничным условиям (5). Последнее достигается внесением в представление внешних форм значений решения $\varphi\,(\partial\Omega)$ и его производных по нормали на $\partial\Omega$, взятых из граничных условий. Наличие производных по касательным во внимание не принимается. Внешние формы содержат значения решения φ_n и его производных на границе $\partial\Omega$. Из граничных условий (5) обращением невырожденной матрицы находятся функции или производные по нормали на границе и вносятся в соответствующие представления внешних форм $\boldsymbol{\omega}$. Остальные функции или производные по нормали должны быть найдены из псевдодифференциальных уравнений, получаемых при преобразовании функциональных уравнений. Для нахождения остальных неизвестных в представлении решения требуются перечисленные ниже действия.

3) Факторизация матрицы-функции $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\alpha})$ функционального уравнения означает представление коэффициента функционального уравнения в виде

$$\boldsymbol{K}\left(\alpha_3^{\nu}\right) = \boldsymbol{K}\left(\alpha_3^{\nu}, -\right)\boldsymbol{K}_r\left(\alpha_3^{\nu}\right). \tag{9}$$

Обозначим через λ_+ область, содержащую все нули z_{s+}^{ν}, $\Im z_{s+}^{\nu} > 0$, z_{s-}^{ν}, $\Im z_{s-}^{\nu} < 0$, $s\pm = 1, 2, \ldots, G_{\pm}$ определителя $K(\alpha_3^{\nu}) = \det \boldsymbol{K}(\alpha_3^{\nu})$, а через λ_- — ее дополнение до всей плоскости с разделяющей области границей Γ. Тогда факторизация предполагает, что матрица-функция $\boldsymbol{K}\left(\alpha_3^{\nu}, -\right)$ регулярна в области λ_-, ее определитель не имеет в этой области нулей. Матрица-функция $\boldsymbol{K}_r\left(\alpha_3^{\nu}\right)$ имеет в качестве элементов полиномы переменного α_3^{ν}, причем ее определитель не зависит от этого параметра. В работе [10] удалось построить формулы факторизации полиномиальных и некоторых мероморфных матриц-функций. С помощью этих результатов

элементы матрицы-функции $\boldsymbol{K}^{-1}\left(\alpha_3^\nu, -\right)$ представимы в виде

$$\boldsymbol{K}^{-1}\left(\alpha_3^\nu, -\right) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mm} & \dots & S_{mN} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} S_{mp}(\alpha_3^\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\mp} \sum_{s=1}^{N'} \frac{Q_{ps}(u_3) M_{sm}(u_3) du_3}{Q(u_3) K(u_3)(u_3 - \alpha_3^\nu)} - \\ - \left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right) \frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)}, \quad m \neq p, \\ \frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)} = \frac{Z_{mp}(\alpha_3^\nu)}{Q(\alpha_3^\nu) K(\alpha_3^\nu)} + \sum_n \frac{Z_{mp}(\xi_n^\nu)}{Q'(\xi_n^\nu) K(\xi_n^\nu)(\xi_n^\nu - \alpha_3^\nu)}, \\ S_{mm}(\alpha_3^\nu) = K^{-1}(\alpha_3^\nu), \quad \alpha_3^\nu \in \lambda_\mp \quad Z_{mp}(\alpha_3^\nu) = \sum_{s=1}^{N'} Q_{ps}(\alpha_3^\nu) M_{sm}(\alpha_3^\nu). \end{gathered} \tag{11}$$

4) Сведение функционального уравнения к системе псевдодифференциальных уравнений. Последнее достигается представлением решения в виде

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{K}_r^{-1}\left(\alpha_3^\nu\right) \boldsymbol{K}^{-1}\left(\alpha_3^\nu, -\right) \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega} \tag{12}$$

и последующим вычислением форм-вычетов Лере. Это обеспечивает требование автоморфизма многообразия. Опуская выкладки, приходим к соотношениям вида

$$\begin{gathered} \sum_{p=1}^{P} \iint\limits_{\partial\Omega} \omega_p Z_{mp}(z_{s-}^\nu) = 0, \quad s- = 1, 2, \dots, G_-, \\ Z_{mm}(\alpha_3^\nu) = -Q(\alpha_3^\nu). \end{gathered} \tag{13}$$

Простроенная система является псевдодифференциальными уравнениями.

В процессе решения псевдодифференциальных уравнений на некотором этапе приходится применять интегральный метод факторизации.

5) Получение представления решения краевой задачи. Для его получения, решив систему псевдодифференциальных уравнений, вносим найденные составляющие в вектор внешних форм (12) и используем трехмерное обращение Фурье к функции $\boldsymbol{\Phi}(\alpha)$. В результате получим соотношение

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}^{\nu}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{K}_r^{-1}\left(\alpha_3^{\nu}\right) \boldsymbol{K}^{-1}\left(\alpha_3^{\nu}, -\right) \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega} e^{-i\left\langle \alpha_3^{\nu} x_3^{\nu}\right\rangle} d\alpha_1^{\nu} d\alpha_2^{\nu} d\alpha_3^{\nu},$$

$$\boldsymbol{x}^{\nu} \in \Omega.$$

Эта формула преобразуется к виду

$$\boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}^{\nu}\right) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_s e^{-i\left(\alpha_1^{\nu} x_1^{\nu} + \alpha_2^{\nu} x_2^{\nu}\right)} \left[\boldsymbol{K}_r^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^{\nu}}\right) \boldsymbol{T}_+\left(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, z_{s+}^{\nu}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot e^{-i z_{s+}^{\nu} x_3^{\nu}} - \boldsymbol{K}_r^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^{\nu}}\right) \boldsymbol{T}_-\left(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, z_{s-}^{\nu}\right) e^{-i z_{s-}^{\nu} x_3^{\nu}} \right] d\alpha_1^{\nu} d\alpha_2^{\nu}, \qquad (14)$$

$$t_{m\pm}\left(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, z_{s\pm}^{\nu}\right) = -\sum_{p=1}^{P} \iint\limits_{\partial\Omega_{\pm}} \frac{\omega_p Z_{mp}(z_{s\pm}^{\nu})}{Q(z_{s\pm}^{\nu}) K'(z_{s\pm}^{\nu})},$$

$$\boldsymbol{T}_{\pm} = \{0, 0, \ldots 0, t_{m\pm}, 0, \ldots 0\}.$$

В этой формуле граница $\partial\Omega$ для выбранного $x_3^{\nu} < 0$, $\boldsymbol{x}^{\nu} \in \Omega$ разбита по следующему правилу:

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega} = \iint\limits_{\partial\Omega_+} \boldsymbol{\omega} + \iint\limits_{\partial\Omega_-} \boldsymbol{\omega},$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_+} \boldsymbol{\omega} \exp(-i\alpha_3^{\nu} x_3^{\nu}) \to 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_3^{\nu} \to \infty,$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_-} \boldsymbol{\omega} \exp(-i\alpha_3^{\nu} x_3^{\nu}) \to 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_3^{\nu} \to -\infty.$$

Оба изложенных метода факторизации дополняют друг друга, дают возможность исследовать более широкий круг проблем. Благодаря этому методу удалось построить теорию блочных структур — совокупностей деформируемых, взаимодействующих объектов, находящихся в условиях воздействия физических полей различной природы [11]. На необходимость развития этой теории для прогноза сейсмичности указывал в свое время академик М. А. Садовский.

Благодаря факторизационным методам удалось построить теорию блочного элемента, в какой-то степени являющегося альтернотивой конечному элементу [12–14]. В отличие от метода конечного элемента, локально заменяющего сплошную среду балочной системой, блочный элемент точно удовлетворяет дифференциальным уравнениям граничной задачи для этой среды. Эти подходы удалось применить для исследования резонансов в полуограниченных телах, для описания квантово-механических свойств наноматериалов, для моделирования напряженно-деформированного состояния застраиваемых территорий.

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (09-08-00170, 09-08-00171), проекта НШ-3765.2010.1, проекта ФЦП 2009-1.5-503-004-006, Гранта Президента МД-1554.2009.1

Литература

1. *Wiener N., Hopf E.* Uber eine Klasse singularer Integralgleichungen, S. B. Preuss. Acad. Wiss. 1932. P. 696–706.
2. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 280 с
3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой, с ядрами, зависящие от разности аргументов // Успехи математических наук. 1958. Т. 13. Вып. 2. С. 3–72.
4. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М., 1979. 320 с.
5. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О дифференциальном методе факторизации в задачах для сплошных сред. ДАН. Т. 421. № 1. 2008. С. 37–40.
7. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и наноструктурах // ДАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 596–599.
8. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* Интегральные преобразования и метод факторизации в краевых задачах // ДАН. Т. 403. № 6. 2005. С. 28–32.
9. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
10. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 26–28.
11. *Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бабешко В.А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. Т. 418. № 3. 2008. С. 321–323.
12. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* К теории блочного элемента // ДАН. Т. 427. № 2. 2009. С. 183–186.
13. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О проблеме блочных структур академика М. А. Садовского // ДАН. Т. 427. № 4. 2009. С. 480–485.
14. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О пирамидальном блочном элементе // ДАН. Т. 428. № 1. 2009. С. 30–34.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПРИ КОМБИНИРОВАННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ КРУЧЕНИЕМ-РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)

В. Г. Баженов, М. С. Баранова, Д. В. Жегалов, Е. В. Павленкова

НИИМ ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия
Bazhenov@mech.unn.ru

Излагается постановка и метод численного решения обобщенных осесимметричных задач с кручением упругопластических тел вращения при больших деформациях в условиях неоднородного напряженно-деформированного состояния. Описывается применение этого метода для построения диаграмм деформирования на основе экспериментов на кручение. Приводятся экспериментальные и численные исследования процессов упругопластического деформирования и потери устойчивости цилиндрических образцов при простом и сложном нагружении кручением-растяжением, а также пенетрирования с кручением сферического индентора в пластину.

1. Методика численного решения

Полная система уравнений, описывающих динамическое деформирование тел вращения при осесимметричном нагружении с кручением, записывается в цилиндрической системе координат на основе принципа виртуальных мощностей. В силу осевой симметрии все искомые функции зависят от радиальной и осевой координат и не зависят от окружной. Кинематические соотношения формулируются в скоростях в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие формоизменения и деформации [1]. Для описания упругопластических свойств материалов применяется вариант теории течения [7] с комбинированным изотропным и кинематическим упрочнением, модифицированный для больших упругопластических деформаций. Связь между компонентами девиатора скоростей напряжений и упругими составляющими компонент девиатора скоростей деформаций осуществляется на основе обобщённого закона Гука. Поворот частицы среды как жёсткого целого описывается производной Яуманна. Скорости пластических деформаций $\dot{e}_{ij}^{p}$ определяются

ассоциированным законом течения

$$\dot{e}^p_{ij} = \dot{\lambda} S_{ij}, \quad S_{ij} S_{ij} = C_p^2, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij},$$

$$\dot{\rho}_{ij} = g_1 \dot{e}^p_{ij} - g_2 \rho_{ij} \dot{\varkappa}, \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij}\, dt, \quad \varkappa = \sqrt{2/3} \int_0^t \sqrt{\dot{e}^p_{ij} \dot{e}^p_{ij}}\, dt$$

Здесь σ'_{ij} — девиатор тензора напряжений, S_{ij} — тензор активных напряжений, $C_p = C_p(\varkappa)$ — радиус поверхности текучести, ρ_{ij} — тензор микронапряжений, определяющий координаты центра поверхности текучести, $g_1 = \text{const}$ и $g_2 = g_2(\varkappa)$ — модули кинематического упрочнения, $\varkappa$ — параметр Одквиста. Для определения материальных параметров $C_p(\varkappa)$, g_1 и $g_2(\varkappa)$ требуются экспериментальные данные по монотонному нагружению и эффекту Баушингера при кручении или растяжении. Для процессов активного нагружения, близких к пропорциональным, достаточно учитывать лишь нелинейное изотропное упрочнение ($\rho_{ij} = 0$), для которого не требуются данные по эффекту Баушингера. Система уравнений, дополненная соответствующими кинематическими граничными и начальными условиями, решается методом конечных элементов в сочетании с явной схемой интегрирования типа «крест» [1].

2. Построение диаграмм деформирования материалов

Наибольшие однородные деформации до разрушения достигаются при кручении в поверхностном слое сплошных цилиндрических образцов, однако существенная неоднородность напряженно-деформированного состояния (НДС) по радиусу затрудняет определение параметров НДС по измеряемым в эксперименте интегральным параметрам. При испытаниях тонкостенных цилиндрических образцов достичь больших величин деформаций невозможно из-за потери устойчивости. Методы Людвика и условной тонкостенной трубки [2] применимы только для сплошных цилиндрических образцов. В работе [1] предложена методика, являющаяся обобщением и развитием методики условной тонкостенной трубки, и позволяющая построить диаграмму деформирования (ДД) по данным эксперимента на одном сплошном образце переменного сечения в результате однократного прямого численного расчета процесса кручения. Физическое деформирование образца с меньшим радиусом [2] заменяется математическим моделированием. Для построения ДД выбирается поперечное сечение образца с наибольшими величинами интенсивности напряжений и параметра Одквиста. В случае объемного напряженного состояния в этом сечении предложен способ корректировки решения.

3. Пропорциональное комбинированное нагружение кручением-растяжением

В [1] приведено экспериментальное и численное исследование деформирования осесимметричных образцов переменной толщины с цилин-

дрической рабочей частью при монотонном кинематическом нагружении кручением-растяжением (материал - сталь 12Х18Н10Т). Расчеты проводились при различных соотношениях кручения и растяжения. По результатам расчетов построена область устойчивости пластического деформирования при совместном действии растяжения и кручения. При кручении не происходит потери устойчивости пластического деформирования с образованием шейки, как при растяжении. Преобладание растяжения по отношению к кручению вызывает потерю устойчивости и локализацию пластических деформаций на более ранней стадии кручения. Эти результаты и выводы согласуются с аналитическим определением бифуркационной нагрузки для материала со степенным упрочнением [4].

4. Сложное нагружение кручением-растяжением

Для исследования поведения материалов при сложном нагружении часто используют эксперименты с нагружением (деформированием) по двузвенным ломаным траекториям, комбинируя два вида нагружения - кручение и растяжение. В литературе широко представлены подобные исследования и модели материалов при малых упругопластических деформациях [4]- [8]. Авторами статьи модифицирован вариант теории пластичности [7] для больших деформаций.

Проводились квазистатические испытания сплошных осесимметричных образцов (материал - сталь 12Х18Н10Т) по двухзвенной ломаной траектории деформирования: растяжение до $\bar{e}_{zz} \approx 0.2$, затем кручение до разрушения. На рисунке приведены безразмерные зависимости осевой силы от условной осевой деформации и крутящего момента от условной сдвиговой деформации на поверхности рабочей части образца. Точками отмечены результаты испытаний, сплошными и пунктирными линиями - численное решение, модели пластичности с комбинированным и с изотропным упрочнением соответственно. Экспериментальные и расчетные данные (обе модели пластичности) при лучевом нагружении растяжением практически совпадают. При деформации кручения $2\sqrt{3}\bar{e}_{\beta z} > 0.1$ расчеты по обеим моделям пластичности совпадают. Расхождение результатов расчетов и экспериментов после излома траектории не превышает 6 %.

5. Пенетрирование с последующим кручением

В [9] выполнено экспериментальное исследование процесса деформирования при внедрении с кручением индентора в форме шара в пластину. Ступенчатый режим нагружения начинался внедрением индентора на определенную глубину. При постоянно действующей на индентор сжимающей нагрузке осуществлялось нагружение крутящим моментом. На следующем этапе порядок нагружения повторялся. Таким образом, устанавливалась зависимость между постоянной сжимающей нагрузкой и крутящим моментом при ступенчатом пенетрировании шара в пластину.

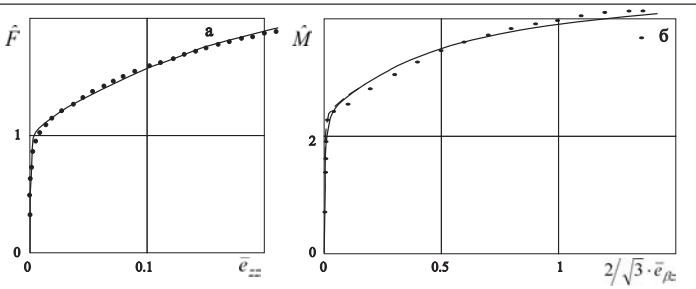


Рис. 1.

Наблюдалось падение сжимающей силы при кинематическом кручении после достижения его максимального значения за счет проскальзывания относительно лунки. Максимум момента соответствовал максимуму силы трения при кручении.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проект 08-01-00500-а).

Литература

1. *Баженов В.Г., Зефиров С.В., Крамарев Л.Н., Павленкова Е.В.* Моделирование процессов деформирования и локализации пластических деформаций при кручении-растяжении тел вращения// ПММ. - 2008. - Том 72. Вып. 2. - С.342–350.
2. *Васин Р.А., Ильюшин А.А., Моссаковский П.А.* Исследование определяющих соотношений и критериев разрушения на сплошных и толстостенных трубчатых цилиндрических образцах // Изв. РАН МТТ. - 1994. - № 2. - С.177–184.
3. *Зубов Л.М., Шейдаков Д.Н.* О влиянии кручения на устойчивость упругого цилиндра при растяжении // ПММ. - 2005. - Т. 69, вып. 1. - С.53–59.
4. *Аннин Б.Д., Жигалкин В.М.* Поведение материалов в условиях сложного нагружения. - Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
5. *Бондарь В.С., Даншин В.В.* Пластичность. Непропорциональные нагружения. - М.: Изд-во МГТУ «МАМИ», 2008.
6. *Зубчанинов В.Г.* Механика сплошных деформируемых сред. - Тверь: ТГТУ, ЧуДо, 2000.
7. *Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г.* Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. - Н.Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 1999.
8. *Chaboche J.L.* Continuous damage mechanics a tool to describe phenomena before crack initiation // Engin. Design. 1981. V. 64. P.233–247.
9. *Крамарев Л.Н., Жегалов Д.В.* Экспериментальное и численное исследование упругопластических процессов пенетрирования // Проблемы прочности и пластичности. - Вып. 70, 2008 . С.79–88.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О РАСТЕКАНИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ МЕЖДУ СБЛИЖАЮЩИМИСЯ ЖЕСТКИМИ ПЛИТАМИ

***Н.А. Белов*[1], *В.А. Кадымов*[2]**

[1] ***Институт Проблем Механики им.А.Ю. Ишлинского РАН, Россия***
[2] ***Московский государственный технический университет «МАМИ», Россия***
[1]**belov@ipmnet.ru,** [2]**vkadymov@yandex.ru**

В работе обсуждается корректное аналитическое исследование краевой задачи течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами в постановке А.А.Ильюшина. Полученное ранее решение задачи, справедливое лишь в приближении идеальной жидкости, не удовлетворяет одному из динамических условий на свободной границе области. В области введенного пограничного слоя удается получить решение, удовлетворяющее всем граничным условиям. Если течение, описываемое идеальной жидкостью, направлено по нормали к границе, скорость течения в пограничном слое имеет касательную к границе компоненту. Найденное поле скорости использовано для получения уравнения эволюции свободной границы. Показано, что при достаточно гладкой границе, это уравнение совпадает с полученным ранее, но при более общих предположениях. Приведен пример нового точного решения.

1. Обсуждается известная задача течения тонкого пластического слоя между двумя жесткими плитами [1]. Осреднение по толщине слоя приводит к двумерной (плоской) задаче со свободной границей и малым параметром. Равенство нулю на этой границе вектора напряжений приводит к двум, а не к одному (равенство нулю давления), как ошибочно считалось ранее, скалярным условиям для решения в главном приближении. В работе [2] была сделана попытка найти решение задачи, удовлетворяющее обоим динамическим условиям на свободной границе.

Задача может быть условно разделена на статическую и эволюционную части. Решение статической задачи, в которой время является параметром, заключается в определении полей давления и скоростей при известной границе области течения. Эволюционная задача определяет изменение границы области течения во времени и требует задания начального условия.

При нахождении решения статической задачи в главном приближении порядок системы определяющих уравнений уменьшается. С помощью введения подвижной системы координат, связанной с границей, удается сильно упростить задачу и получить аналитическое решение, совпадающее с известным решением [1]. Особенность этого решения заключается

в том, что течение происходит по нормалям к границе, а на границе решение удовлетворяет одному, но принципиально (в силу понижения порядка системы уравнений) не может удовлетворить другому условию.

Чтобы удовлетворить второму условию, по аналогии с задачей обтекания тел вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса, задача решается с помощью введения пограничного слоя в окрестности свободной границы. Решение для пограничного слоя, представленное в аналитическом виде, показывает нам, что, благодаря второму динамическому граничному условию, вблизи границы области течение перестраивается таким образом, что касательная к границе компонента скорости становится ненулевой. Толщина пограничного слоя значительно превосходит толщину пластического слоя, что говорит о корректности найденного решения.

Решение эволюционной задачи сводится к получению уравнения, описывающего изменение свободной границы во времени. Это уравнение нам удалось получить из кинематического граничного условия, используя точное решение статической задачи. Оно с точностью до замены переменных совпадает с эволюционным уравнением, полученным ранее другим, более громоздким способом [3]. Однако, как нам кажется, наш вывод уравнения сделан при более общих предположениях. В качестве примера мы хотим предложить новое точное решение эволюционного уравнения.

2. Эволюционное уравнение для свободной границы есть нелинейное дифференциальное уравнение параболического типа

$$\varphi'_\tau - \frac{\varphi^2}{2}\varphi''_{xx} - \varphi(1 + \varphi'^2_x) = 0 \qquad (1)$$

которое вместе с заданным начальным условием

$$\varphi\left(x, \tau\big|_{\tau=0}\right) = \varphi_0(x) \qquad (2)$$

позволяет восстановить закон изменения границы $y = \varphi(x, \tau)$области, занятой растекающимся пластическим слоем. Здесь x, y — пространственные координаты, а $\tau(t) = \ln(h(t_0)/h(t))$ — модифицированное время (степень деформации по А.А.Ильюшину).

В работе [4] получены классы решений подобия начальной задачи (1), (2) для областей, ограниченных кривыми второго порядка. В работе [5] получено решение подобия общего вида, включающего все известные решения подобия.

Рассмотрим частное решение уравнения (1) следующего вида

$$y^2 \equiv \varphi^2(x, \tau) = A(\tau)\, x^2 + C(\tau) \quad , \qquad (3)$$

которое соответствует двум представленным ниже случаям растекания пластического слоя в области, ограниченной гиперболой.

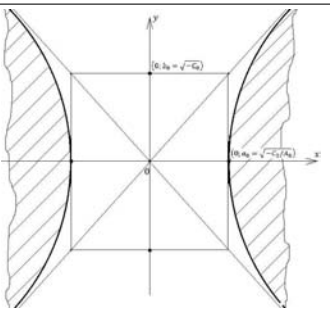


Рис. 1.

Если $A_0 = A(0) > 0, C_0 = C(0) < 0$, имеем случай, представленный на рис.1, и известное точное решение для него.

Если $A_0 > 0, C_0 > 0$, имеем случай, представленный на рис.2 (полоса, ограниченная ветвями гиперболы).

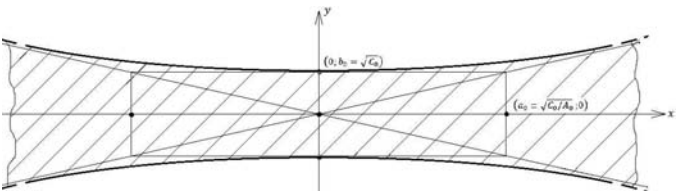


Рис. 2.

Подстановка (3) в (1) дает (с учетом знаков для коэффициентов) решение подобия:

$$A(\tau) = \frac{A_0 e^{2\tau}}{1 + A_0 - A_0 e^{2\tau}}, C(\tau) = \frac{C_0 e^{2\tau}}{\sqrt{1 + A_0 - A_0 e^{2\tau}}} \tag{4}$$

Это решение “живет” конечное время

$$\tau^* = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + A_0}{A_0} \tag{5}$$

за которое полоса становится бесконечной ширины, а ветви гиперболы «схлопываются».

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Вопросы теории течения пластического вещества на поверхностях// ПММ.1954.т.18, №3.- с.265–288.
2. *Белов Н.А., Кадымов В.А.* О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами. МТТ, 2010, №1.
3. *Безухов В.Н.* Об осадке пластического слоя некруговой формы в плане. Дисс. . . канд.физ. мат.наук. М., 1955.-78 с.
4. *Кийко И.А.* Пластическое течение металлов// В сб. «Научные основы прогрессивной техники и технологии». М.,1985.-с.102–133.
5. *Кадымов В.А.* К исследованию дифференциального уравнения свободного растекания пластического слоя на плоскости// Изв.ТулГУ, вып.2, 2008. с.86-92.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В СЛАБО-ДИССИПАТИВНОЙ ТЕОРИИ КОЛМОГОРОВА-АРНОЛЬДА-МОЗЕРА (КАМ)

Р. И. Богданов [1], ***М. Р. Богданов*** [2]

[1] ***НИИЯФ МГУ им. М. В. Ломоносова,*** [2] ***МГУИЭ***
Москва, Россия

bogdanov@bogdan.sinp.msu.ru

Слабо-диссипативная теория КАМ рассматривает динамику пробной частицы (или их ансамблей) в окружающей сплошной среде с коэффициентами малых сил вязкости переменного знака. Простейшая модель общего положения кусочно-линейной динамики пробной частицы (свободное прямолинейное движение с нулевым ускорением в течение постоянного шага по времени с последующим мгновенным изменением импульса) в обезразмеренном виде дается отображением

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + k x_n\,(x_n - 1) + (\varepsilon + \mu x_n)\, y_n \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где ε, μ — малые величины (см. [1]). На рис. 1, 2 показана зависимость энтальпии $h = u + pV$ и свободной энергии $f = u - TS$ (см. [3],[4]) от центра тяжести периодической орбиты (S — энтропия, V — объем (площадь), p — давление, u — энергия).

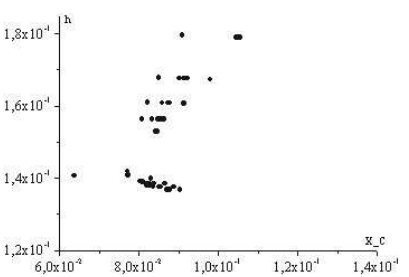


Рис. 1. Зависимость энтальпии от центра тяжести орбиты

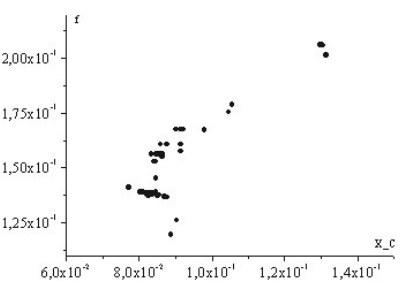


Рис. 2. Зависимость свободной энергии от центра тяжести орбиты

В [1,2] изложена связь (1) с системой на прямой

$$\ddot{x} = -\partial U / \partial x + (\varepsilon + \mu x)\, \dot{x}, \qquad (2)$$

где $U = x^2/2 - x^3/3$ определяет потенциальные силы, а ε (кинематическая вязкость), μ — малые величины в коэффициенте вязкости. При $\varepsilon = \mu = 0$ в системе (2) энергия u имеет вид $u = \dot{x}^2/2 + U\,(x)$ и используется выше для расчета термодинамических потенциалов (при $\varepsilon, \mu \neq 0$, но $\varepsilon, \mu \ll 1$ в слабодиссипативном случае).

На рис.1,2 все величины обезразмерены, но уместно иметь в виду нормировку в системе (2): дно потенциальной ямы отделено от локального максимума ангармонического потенциала на величину $1/6$ (характерный масштаб по оси энергий и термодинамических потенциалов); расстояние от дна потенциальной ямы до локального максимума ангармонического потенциала равно 1 на фазовой прямой, а нуль коэффициента трения лежит в интервале от 0.01 до 0.1 (характерные масштабы на оси центра тяжести периодической орбиты ($x_c = \sum x_i / N_i$, где N — период орбиты)).

В [1] объясняется, что преобразования Лежандра, т.е. переход от величины u — энергии к другим термодинамическим потенциалам связан с выбором симметрии фазового портрета гамильтоновой системы с гамильтонианом u.

На рис.1 и 2 видна тенденция к квантованию величин термодинамических потенциалов. Таким образом, мы приходим к заключению, что группы симметрий проявляют тенденцию к квантованию.

В заключение заметим, что пробная частица может пониматься как дефект в твердом теле, и позволяет интерпретировать результаты в задачах разрушения твердого тела (см. [2]).

Литература

1. *Богданов Р.И.* Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты. М.: Вузовская книга, 2008. 428 с.
2. *Богданов Р.И., Богданов М.Р.* Термодинамика струйных течений в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера // Научный вестник МГТУ ГА. Серия математика и физика. №140. 2009. С.5–13.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М: Изд-во Московского университета, 1990. 310 с.
4. *Зоммерфельд А.* Термодинамика и статистическая физика. М: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. 479 с.

ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТЬ. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

В. С. Бондарь

Московский государственный технический университет «МАМИ»
Москва, Россия
tm@mami.ru

Рассматривается современная теория неупругости (термовязкопластичности), являющаяся обобщением и развитием идей, содержащихся в различных вариантах теорий пластичности, ползучести, неупругости и накопления повреждений. Иллюстрируются возможности теории неупругости по адекватному описанию процессов неупругого деформирования и разрушения конструкционных сталей и сплавов при разнообразных режимах нагружения.

Проблемы надежного функционирования и снижения материалоемкости конструкций современной техники, работающих в условиях высокого уровня силовых и температурных нагрузок, делают весьма актуальной задачу математического моделирования неупругого поведения и разрушения конструкций. Реальные процессы нагружения таких конструкций приводят к тому, что в материале конструкций возникают неупругие (вязкопластические) деформации. При этом нагружение является сложным неизотермическим и характер его изменения может быть самым произвольным в условиях повторности и длительности воздействия температурно-силовых нагрузок.

Разработка определяющих уравнений описания процессов термовязкопластического деформирования в настоящее время идет двумя основными направлениями. К первому направлению относятся различные варианты теории упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [1,2]. Ко второму направлению относятся различные варианты теории течения при комбинированном упрочнении, базирующиеся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым [3]. В данной работе рассматриваются достаточно простые варианты второго направления – частные варианты и обобщение теории неупругости [4,5]. В работе [5] показано, что теория неупругости является конкретным вариантом общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [1,2] при полном сохранении всей структуры уравнений этой теории.

Рассматриваемая для таких процессов теория неупругости (термовязкопластичности) [4,5] относится к классу одноповерхностных теорий течения при комбинированном (трансляционно-изотропном) упрочнении.

Смещение (трансляция) поверхности нагружения описывается на основе модели Новожилова–Шабоша [6,7], подразумевающей, что полное смещение есть сумма смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение. Здесь в качестве первого эволюционного уравнения, описывающего смещения первого типа, принимается уравнение Ишлинского–Прагера [8,9], обобщенное согласно принципу симметрии циклических свойств [10] на процессы вышагивания (ratcheting). В качестве второго эволюционного уравнения, описывающего смещение второго типа, принимается уравнение Амстронга–Фредерика–Кадашевича [11,12]. Последующие эволюционные уравнения, описывающие смещения третьего типа, соответствуют простейшему аналогу модели Оно–Ванга [13,14,15]. Гипотеза Новожилова–Шабоша совместно с эволюционными уравнениями Ишлинского–Прагера и Амстронга–Фредерика–Кадашевича эквивалентны эволюционному уравнению с трехчленной структурой, применяемому в теории неупругости [4,5]. Для описания процесса накопления повреждений формулируются [4,5,14,15] кинетические уравнения накопления повреждений, где в качестве энергий расходуемых на создание повреждений в материале принимаются работы добавочных напряжений (остаточных микронапряжений, тензора смещения) первого, второго и третьего типов на поле неупругих деформаций. Ответственность остаточных микронапряжений за процесс накопления повреждений следует из гипотезы Новожилова–Рыбакиной [16] о пропорциональности скорости накопления повреждений интенсивности остаточных микронапряжений. Основной вариант теории неупругости, описывающий неизотермическую пластичность, первую, вторую и третью стадии ползучести, разрушение в условиях охрупчивания и залечивания, замыкают 17 материальных функций. Разработана методика идентификации материальных функций и программный комплекс, позволяющий на основе результатов базовых экспериментов проводить определение материальных функций.

Для материалов, чувствительных к виду напряженного состояния, т.е. имеющих различные деформационные характеристики и характеристики разрушения при растяжении, сжатии и сдвиге, принимается, что эволюционное уравнение для радиуса поверхности нагружения зависит от параметра вида активного напряженного состояния и первого инварианта тензора напряжений, а эволюционные уравнения для добавочных напряжений и накопления повреждений зависят от параметра вида добавочного напряженного состояния и первого инварианта тензора напряжений. Зависимость поверхности нагружения от первого инварианта тензора напряжений впервые рассмотрена в работах [17,18]. Для определения материальных функций здесь проводятся такие же базовые эксперименты как и выше, но дополнительно к одноосному растяжению–сжатию проводятся испытания при кручении.

Для материалов, обладающих эффектом дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональных (сложных) циклических нагружениях принимается, что эволюционные уравнения для радиуса поверхности нагружения и накопления повреждений зависят от параметра непропорциональности (сложности) нагружения. В качестве параметра непропорциональности принимается [5] параметр Кадашевича–Мосолова [19], равный квадрату синуса угла между векторами скоростей напряжений и деформаций. В работе [20] проведено обоснование выбора этого параметра на широком спектре эффектов дополнительного изотропного упрочнения. Для определения дополнительных материальных функций необходим и дополнительный базовый эксперимент [5] при циклическом нагружении по круговым траекториям деформаций.

Для описания своеобразных эффектов (посадка и вышагивание петли пластического гистерезиса, увеличение и уменьшение суммарной долговечности при стационарных и нестационарных, симметричных и несимметричных, мягких и жестких циклических нагружениях) в уравнениях теории учитываются и эволюционные уравнения для смещений третьего типа. Для определения материальных функций дополнительно требуются циклические диаграммы при симметричном и несимметричном жестком растяжении–сжатии, а также данные по малоцикловой усталости при мягком несимметричном нагружении.

На широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований проведена [4,10,14,15,20] верификация разработанных вариантов теории неупругости как по компонентам напряженно-деформированного состояния, так и по характеристикам разрушения. Упругопластические процессы в условиях сложного нагружения как по плоским, так и по пространственным траекториям в большом объеме проанализированы в работах [4,20]. Также анализировались [4] процессы сложного нагружения в условиях термовязкопластического деформирования. Ниже приводятся некоторые результаты верификации вариантов теории неупругости на основе сопоставления результатов расчетов и экспериментов.

Результаты исследования процессов накопления повреждений при изотермическом и неизотермическом циклическом нагружении нержавеющей стали 12Х18Н9 приводятся на Рис. 1–3. На рис. 1 приведены расчетные кривые малоцикловой прочности и экспериментальные результаты [21] (кружки, треугольники, светлые квадраты, звездочки, темные квадраты) при жестком циклическом нагружении при постоянной температуре T = = 500, 550, 600, 650°C и переменной температуре T = 150 $\leftrightarrow$ 650°C (синфазный неизотермический режим). Длительность цикла составляла 2 мин. (частота — 30 цикл/час). На рис. 2 приведены расчетные кривые малоцикловой прочности и экспериментальные результаты [21] (кружки,

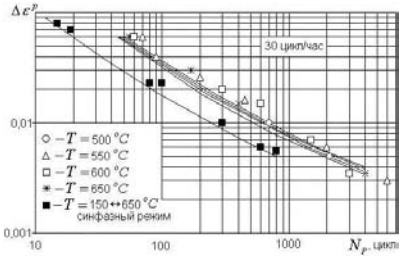


Рис. 1.

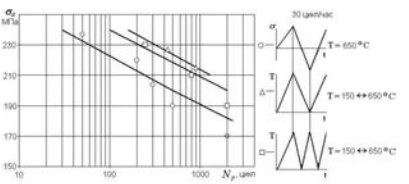


Рис. 2.

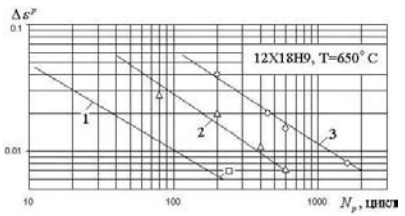


Рис. 3.

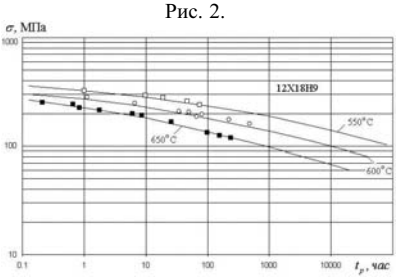


Рис. 4.

треугольники, квадраты) при мягком циклическом нагружении при постоянной температуре $T = 650°\text{C}$ и двух режимах переменной температуры $T = 150 \leftrightarrow 650°\text{C}$, отличающихся частотой изменения температуры — 30 цикл/час и 60 цикл/час соответственно. Длительность цикла изменения напряжения составляет 2 мин (частота — 30 цикл/час). На рис. 3 приведены расчетные кривые и экспериментальные результаты [21] при жестком циклическом изотермическом нагружении ($T = 650°\text{C}$) с различной длительностью циклов. Кривая 1 получена расчетным путем, когда временные эффекты малы, а светлый квадрат соответствует экспериментальному результату. Кривая 2 и треугольники получены при длительности цикла равной 2 мин, а кривая 3 и кружки — 8 мин. На рис. 4 приведены расчетные кривые и экспериментальные данные [21] (светлые квадраты, кружки, темные квадраты) длительной прочности при температурах $550, 600, 650°\text{C}$. Представленные выше данные, говорят о надежном соответствии расчетных и экспериментальных результатов, а также о существенном влиянии на малоцикловую и длительную прочность процессов залечивания и охрупчивания, которые учитываются в основном варианте теории неупругости.

Далее рассматриваются некоторые результаты исследования материалов обладающих эффектом дополнительного изотропного упрочнения. На рис. 5 приведены результаты экспериментов [22] (кружки) и расчетов (сплошные кривые) при нагружении нержавеющей стали 316 по траекториям деформаций с возрастающей и убывающей степенью непропорциональности нагружения. На рис. 6 приведены результаты расчетов (сплош-

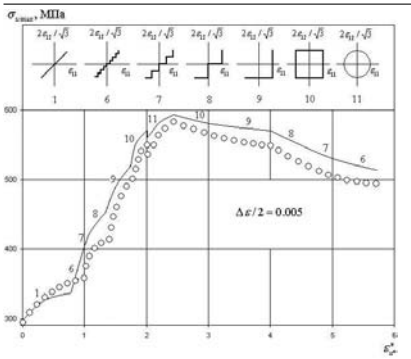


Рис. 5.

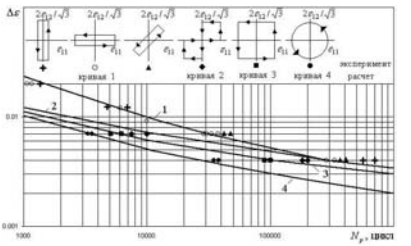


Рис. 6.

ные кривые) и экспериментов [23] (кружки, светлые и темные кружки, темные треугольники, ромбы, квадраты) по усталостному разрушению нержавеющей стали 304 как при пропорциональных, так и при непропорциональных циклических нагружениях. Анализ результатов показывает, что при одинаковом размахе деформаций непропорциональные циклические нагружения обладают большим повреждающим эффектом, нежели пропорциональные, и снижение долговечности может достигать порядка.

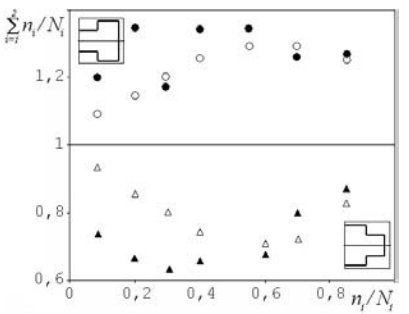


Рис. 7.

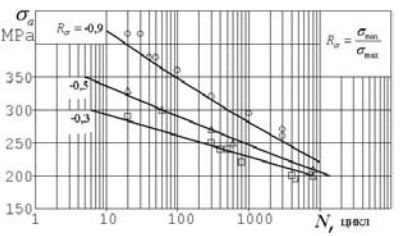


Рис. 8.

Исследование процессов пластического деформирования и разрушения материалов при нестационарных и несимметричных циклических нагружениях подробно рассмотрено в работе [15]. Расчетные и экспериментальные [24] результаты исследования малоцикловой прочности нержавеющей стали 304 при нестационарном блочном изменении амплитуды деформаций приведены на рис. 7 и показаны соответственно светлыми и темными кружками (треугольниками). Наблюдается существенное отклонение от правила линейного суммирования повреждений при удовлетворительном соответствии результатов расчетов и экспериментов. Влияние несимметричности при мягком циклическом нагружении нержавеющей стали 12Х18Н9 приводится на рис. 8. Здесь сплошные кривые соответ-

ствуют расчету, а светлые кружки, треугольники, квадраты — эксперименту [21].

Адекватное описание процессов неупругого (термовязкопластического) деформирования и разрушения конструкционных сталей и сплавов при разнообразных режимах нагружения является несомненным достоинством рассматриваемой здесь современной теории неупругости.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд. АН СССР, 1963. 271 с.
2. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
3. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 224 с.
4. *Бондарь В.С.* Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении // Автореферат диссерт. . . д.ф-м.н.– Москва: МАМИ, 1990. 40 с.
5. *Бондарь В.С.* Неупругость. Варианты теории. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 144 с.
6. *Новожилов В.В.* О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений// ПММ.1964.Т.28. Вып. 3. С.393–400.
7. *Chaboche J.L., Dang-Van K., Cordier G.* Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel // Proceedings of the 5^{th} International Conference on SMiRT, Div L, Berlin. 1979.
8. *Ишлинский А.Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. 1954. Т.6. Вып. 3. С.314–324.
9. *Prager W.* The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements // Proc. Inst. Mech. Engrs, London. 1955. 169,41.
10. *Бондарь В.С.* Некоторые новые результаты исследования пластичности материалов при сложном нагружении // Упругость и неупругость. М.: ЛЕНАНД, 2006. С.94–109.
11. *Amstrong P.J., Frederick C.O.* A mathematical represention of the multiaxial bauscinger offect // CEGB Report No. RD/B/N 731. 1966.
12. *Кадашевич Ю.И.* О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. Вып. 6. С.39–45.
13. *Ohno N., Wang J.-D.* Kinematic hardening rules wits critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // International Journal of Plasticity. 1993. 9. P.375–390.
14. *Bondar V.S., Danshin V.V.* Low cycle fatigue under asymmetrical rigid and soft cyclic loadings // Proceedings of the Intern. Conference. SPb.: Polytechnic University Publishing, 2008. P.58–62.
15. *Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В.* Пластичность и разрушение материалов при нестационарных и несимметричных циклических нагружениях // Современные проблемы ресурса материалов и конструкций: Труды III школы-семинара. Москва: МАМИ, 2009. С.177–190.
16. *Новожилов В.В., Рыбакина О.Г.* О перспективах построения критерия прочности при сложном нагружении // Прочность при малом числе циклов нагружения / М., Наука, 1969. С.71–80.
17. *Новожилов В.В.* О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29, вып.4, С.681–689.
18. *Кадашевич Ю.И.* Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера и влияние среднего нормального напряжения на границу текучести // Тр. Ленингр. Технол. Ин-та целлюлозно-бум. пром-ти. 1965. Вып. 18. С.234–235.

19. *Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.* О соотношениях эндохронной теории пластичности с “новой” мерой внутреннего времени при сложном циклическом нагружении // Технология легких сплавов. 1990. №3. С.32–36.
20. *Бондарь В.С., Даншин В.В.* Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 176 с.
21. *Гусенков А.П., Котов П.И.* Малоцикловая усталость при неизотермическом нагружении. М.: Машиностроение, 1983. 240 с.
22. *Tanaka E., Murakami S. and Ooka M.* Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1985. V. 33. No.6. P.559–575.
23. *Соси Д.* Модели разрушения при многоосной усталости // Теоретические основы инженерных расчетов. 1988. №3. С.9–21.
24. *Бернард-Конноли, Куок Б., Бирон* Усталость коррозионностойкой стали 304 при испытаниях в условиях многоступенчатой контролируемой деформации // Теор. основы инж. расчетов. 1983. №3. С.47–53.

МОДЕЛИ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Г. Л. Бровко, А. С. Шуткин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

Рассматриваются два формальных подхода к обобщению известных определяющих соотношений на область конечных деформаций. С использованием семейства голономных энергетически сопряжённых тензорных мер, предложенных в работе [1], строятся обобщения модели Мовчана [2]. Свойства обобщенных моделей сравниваются на примере решения типичной для материалов с памятью формы задачи. Предлагается алгоритм идентификации модели Мовчана, обобщенной на конечные деформации. Описан процесс нахождения материальных констант модели на примере серии реальных экспериментов.

Материальный и пространственный подходы к обобщению определяющих соотношений

Из возможных вариантов обобщения известных моделей малых деформаций на область конечных деформаций можно выделить два формальных подхода [3].

Первый способ — материальноориентированный. Он подразумевает замену в исходных определяющих соотношениях тензоров деформаций и напряжений на материальные тензоры конечных деформаций и напряжений, в качестве скоростей изменения тензоров выбираются материальные производные.

Второй вариант формального обобщения — замена тензоров деформаций и напряжений на пространственные тензоры конечных деформаций и напряжений. В этом случае скорости изменения тензоров будут характеризоваться объективными производными [3].

Тензорные меры напряжений и конечных деформаций

Для обобщения модели Мовчана на область конечных деформаций будем использовать семейство голономных энергетически сопряжённых тензорных мер напряжений и деформаций, введённое в [1].

Меры деформаций $\boldsymbol{\mathcal{E}}_c$ и напряжений $\boldsymbol{\Sigma}_c$ материального типа, и мера деформаций $\boldsymbol{E}_c$ пространственного типа из этого семейства задаются следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_c = \left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^{-1}\right) \cdot \left((1+c)\,\boldsymbol{X} + (1-c)\,\boldsymbol{X}^{-1}\right)^{-1}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_c = \frac{1}{4}\left((1+c)\boldsymbol{X}+(1-c)\boldsymbol{X}^{-1}\right)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\left((1+c)\boldsymbol{X}+(1-c)\boldsymbol{X}^{-1}\right) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{E}_c = \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{-1}\right)\cdot\left((1+c)\,\boldsymbol{Y}+(1-c)\,\boldsymbol{Y}^{-1}\right),$$

где $c \in [-1, 1]$ — параметр, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ — тензоры растяжений из правого и левого полярных разложений аффинора деформаций, $\boldsymbol{Q}$ — ортогональный тензор поворота из полярного разложения аффинора деформаций, $\boldsymbol{S}$ — тензор истинных напряжений Коши.

Представленные меры конечных деформаций и напряжений энергетически согласованы между собой в выражениях для удельной мощности внутренних сил:

$$W = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Sigma}_c : \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_c = \boldsymbol{S} : D_c[\boldsymbol{E}_c], \quad (2)$$

где $D_c[\boldsymbol{E}_c]$ — объективная производная тензора $\boldsymbol{E}_c$.

Меры деформаций из представленного семейства при любом c на начальном участке деформирования совпадают между собой, а также с классической мерой малых деформаций.

Решение задачи на эффект «пластичности превращения»

Рассмотрим типичную для материалов с памятью формы задачу об охлаждении нагруженного растягивающим напряжением образца. К образцу при высокой температуре (в аустенитной области) прикладывается продольная растягивающая нагрузка P. При постоянной нагрузке образец охлаждается до температуры конца прямого фазового превращения M_s, что приводит к накоплению фазовых деформаций.

Таким образом, в задаче задаются усилия и температура как функции от времени и ищутся деформации.

Обобщение определяющих соотношений модели Мовчана для прямого фазового превращения на область конечных деформаций с использованием мер (1) представлено ниже.

Материальный подход:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_c = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_c^{\mathrm{e}} + \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_c^{\mathrm{t}} + \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_c^{\mathrm{ph}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_c = \lambda \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_c^{\mathrm{e}}\right)\boldsymbol{I} + 2G\boldsymbol{\mathcal{E}}_c^{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_c^{\mathrm{t}} = \alpha\,(T - T_0)\,\boldsymbol{I} \\ \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_c^{\mathrm{ph}} = \left(\beta\boldsymbol{I} + c_0 \mathrm{dev}\,(\boldsymbol{\Sigma}_c)\,(1 - a_0 q) + a_0 \mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_c^{\mathrm{ph}}\right)\right)\dot{q} \end{cases} \quad (3)$$

Пространственный подход:

$$\begin{cases} D_c[\boldsymbol{E}_c] = D_c[\boldsymbol{E}_c^{\mathrm{e}}] + D_c[\boldsymbol{E}_c^{\mathrm{t}}] + D_c[\boldsymbol{E}_c^{\mathrm{ph}}] \\ \boldsymbol{S} = \lambda \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}_c^{\mathrm{e}}\right)\boldsymbol{I} + 2G\boldsymbol{E}_c^{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{E}_c^{\mathrm{t}} = \alpha\,(T - T_0)\,\boldsymbol{I} \\ D_c[\boldsymbol{E}_c^{\mathrm{ph}}] = \left(\beta\boldsymbol{I} + c_0 \mathrm{dev}\,(\boldsymbol{S})\,(1 - a_0 q) + a_0 \mathrm{dev}\left(\boldsymbol{E}_c^{\mathrm{ph}}\right)\right)\dot{q} \end{cases} \quad (4)$$

Решения задачи на эффект «пластичности превращения» по соотношениям (3), (4) для различных значений параметра c получены численно с использованием пакета Maple. Графики зависимости деформаций ε_{11} от температуры T представлены на рисунке 1.

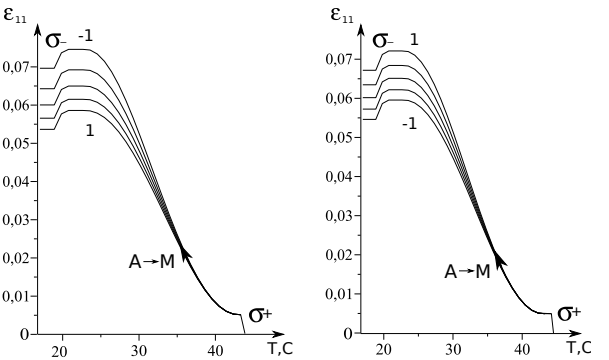


Рис. 1. Эффект «пластичности превращения». Пространственный (слева) и материальный (справа) подходы ($c = 0$, $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm 1$).

Для расчетов использовался следующий набор констант: $\frac{K}{G} = 1.62$, $M_s = 40°\text{C}$, $M_f = 20°\text{C}$, $A_s = 40°\text{C}$, $A_f = 60°\text{C}$, $k \cdot G = 320°\text{C}$, $\beta = 0.117 \cdot 10^{-3}$, $\alpha = 0$, $a_0 = 0.718$, $c_0 \cdot G = 22.4$.

Из рисунка 1 видно, что выбор параметра c, а также способа (материального или пространственного) обобщения модели на область конечных деформаций существенно сказывается на результате.

Стоит отметить, что влияние выбора параметра c на свойства модели заметно уже при небольших деформациях ($\sim 5\%$).

Идентификация модели Мовчана при конечных деформациях

Построим алгоритм идентификации модели Мовчана обобщенной на конечные деформации. Методики нахождение характеристических температур M_s, M_f, A_s, A_f, коэффициента температурного расширения α и упругих модулей K, G достаточно развиты и широко используются и в данной работе рассматриваться не будут. Внимание следует уделить нахождению специфических материальных констант модели Мовчана a_0, c_0, β и параметра обобщения c.

Методы аналитического вычисления констант, использованные при малых деформациях в работе [4], в данном случае не подходят ввиду существенно усложнившихся определяющих соотношений, поэтому необходимо построить методику, ориентированную на численные процедуры.

Общий алгоритм нахождения констант следующий:

Сначала в характерном для материалов с памятью формы эксперименте задаются или измеряются усилия, перемещения и температура как функции от времени.

По измеренным величинам находятся значения используемых в обобщении тензоров напряжений, конечных деформаций и их скоростей.

Вычисленные значения мер подставляются в обобщенные определяющие соотношения. Для удовлетворения определяющих соотношений в них добавляются слагаемые невязки. Константы модели подбираются так, чтобы в совокупности минимизировать невязки.

Перейдем к непосредственной идентификации обобщенной модели Мовчана по данным эксперимента. Рассмотрим опыты на эффект «ориентированного превращения»[1], проведенные со сплавом TiNi [5].

Всего было проведено 6 экспериментов, отличающихся температурой, при которой разгружался образец на этапе прямого мартенстиного превращения.

В эксперименте образец из сплава ТН-1 нагрузили растягивающим напряжением 110 МПа в аустенитной области при температуре $T_0 = 400°\text{K}$. Затем образец стали охлаждать. При некоторой температуре T_1 ($M_f < T_1 < M_s$) нагрузку сняли и охлаждение продолжилось (в первом опыте $T_1 = 310°\text{K}$, во втором — 300°K, в третьем — 290°K, в четвертом — 276°K, в пятом — 267°K, в шестом — 254°K). После того, как рост деформаций закончился, образец нагрели до начальной температуры.

Для идентификации обобщенной модели Мовчана был выбран третий опыт с разгрузкой при температуре $T_1 = 290°\text{K}$.

Экспериментальные данные подставлялись в соотношения (3), (4), в которые добавлялись слагаемые ошибок. Константы модели искались из условия минимума суммы квадратов ошибок на отрезке времени, на котором проводился эксперимент.

Для упрощения задачи минимизации весь интервал времени разбивался на две части: до разгрузки и после разгрузки. Осутствие напряжений во второй части эксперимента позволило разделить задачи поиска констант a_0 и c_0.

Таким образом, были найдены следующие значения констант, наилучшим образом соответствующие исходным данным: $a_0 = 0.462$, $c_0 = 0.275 \cdot 10^{-3}\ \text{МПа}^{-1}$, $c = -1$.

Сравнение решений, построенных с использованием найденных констант, с экспериментальными данными представлено на рисунке 2. Из рисунка видно, что расчетные кривые хорошо повторяют экспериментальные зависимости не только для идентификационного опыта (кривая 3), но и для остальных пяти опытов. Это говорит о пригодности модели и

[1]Следует отметить, что нахождение константы β из опытов на эффект «ориентированного превращения» не представляется возможным, так как β отвечает за объемный эффект превращения, который незаметен на фоне существенного формоизменения. Для нахождения β следует выбрать эксперимент в котором отсутствуют нагрузки и происходит только охлаждение или нагрев образца.

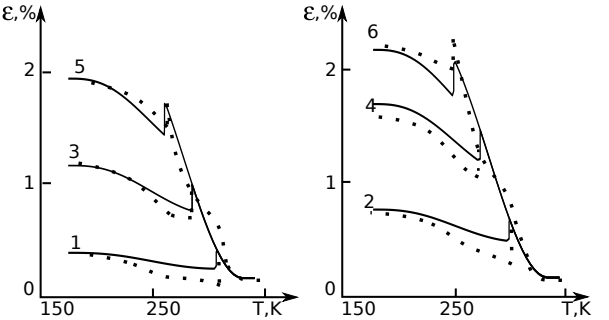


Рис. 2. Сравнение экспериментальных данных (точки) с расчетными зависимостями (линии).

алгоритма ее идентификации к практическому использованию по крайней мере для решения одномерных задач.

Литература

1. *Бровко Г.Л.* Об одном семействе голономных тензорных мер деформаций и напряжений // Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ, 1992, №4, С.86-91.
2. *Мовчан А.А., Мовчан И.А.* Одномерная микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при прямом и обратном термоупругих превращениях // Механика композиционных материалов и конструкций, 2007, Т.13, №3, С.297-322.
3. *Бровко Г.Л.* Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С.68-81.
4. *Шуткин А.С., Башурова Ю.В.* Об идентификации моделей, описывающих поведения материалов с память формы // Известия ТулГУ. Естественные науки, 2008, № 1, С. 95-110.
5. Материалы с эффектом памяти формы: Справ. изд. /Под ред. Лихачева В. А.:в 4-х т. — Т.2. — СПб.: НИИХ СпбГУ, 1998 — 374с.

К ВОЗМОЖНОСТИ ПОТЕРИ СФЕРИЧНОСТИ КОГЕРЕНТНЫМИ ПРЕЦИПИТАТАМИ В КРИСТАЛЛАХ КРЕМНИЯ

Р. В. Гольдштейн, К. Б. Устинов, П. С. Шушпанников

Москва, Россия

На основании модели роста кислородосодержащих преципитатов в кристаллах кремния предложен энергетический критерий потери сферичности когерентными преципитатами в процессе их роста. Проведено сравнение со случаем некогерентного преципитата.

1. Введение

Эффективным способом устранения вредного влияния фоновых примесей в кристаллах кремния является создание стоков для точечных дефектов (собственных и примесных), которые оттягивали бы их на себя. Эти способы называют геттерированием, а сами стоки – геттерами. В современной технологии изготовления интегральных схем используются кремниевые пластины со встроенным внутренним геттером, создаваемым путём контролируемого распада пересыщенного твёрдого раствора кислорода в кремнии, приводящего к образованию в объёме пластины кислородсодержащих преципитатов [1]. Вместе с тем, преципитаты являются дефектами кристаллической структуры, и их попадание в рабочую область кристалла крайне нежелательно.

Отметим, что обычно различают два типа преципитатов, наблюдающихся при геттерировании: когерентные и некогерентные преципитаты. С физической точки зрения когерентный преципитат представляет собой неоднородность с упругими свойствами отличными от свойств остального материала, для которой на границе раздела существует взаимооднозначное соответствие между атомами неоднородности и матрицы. Отличие некогерентного преципитата в том, что такого взаимооднозначного соответствия не существует. Механический аспект моделирования когерентных и некогерентных преципитатов рассмотрен далее в настоящей работе.

Другим распространенным типом дефектов в кристаллах кремния являются микропоры, которые могут образовываться в процессе роста и термообработки кристаллов, причем зародышами для пор могут служить преципитаты, находящиеся под действием растягивающих собственных напряжений, а рост пор при этом приводит к релаксации данных напряжений [2]. Альтернативным механизмом релаксации напряжений может быть трансформация преципитата в процессе роста из сферического (октаэдрического) в сплюснутый. Критерий такой трансформации для некогерентного преципитата был предложен в работе [2]. Поскольку представ-

ляется вероятным, что преципитат на ранних стадиях растет как когерентный [3], целесообразно получение аналогичного критерия для когерентного преципитата, чему и посвящена настоящая работа. Проведено также сравнение критических параметров потери сферичности когерентными и некогерентными преципитатами.

2. О модели роста кислородосодержащих преципитатов. Свободная энергия преципитата

Рост преципитатов происходит за счет высвобождения свободной энергии при аккумуляции растворенного кислорода и вакансий атомов кремния. При этом часть энергии расходуется на образование поверхности раздела преципитат-кристалл, а часть – на упругое деформирование. При этом минимум поверхностной энергии соответствует сферической форме преципитата (более строго из-за анизотропии кристалла кремния данный минимум соответствует скорее октаэдрической форме, однако из соображений простоты при подобном моделировании октаэдрическую форму обычно заменяют на сферическую). Минимум упругой энергии зависит от распределения собственных деформаций по осям, от соотношения упругих модулей преципитата и матрицы и может соответствовать как сферической, так и сильно сплющенной (дискообразной) форме преципитата. Поскольку поверхностная энергия пропорциональна квадрату, а упругая – кубу радиуса преципитата, очевидно, что для малых размеров неоднородностей наиболее энергетически выгодная форма определяется поверхностной энергией и оказывается сферой, а для более крупных неоднородностей соответствует минимуму упругой энергии и, в общем случае, отличается от сферической.

Рассмотрим критерий потери преципитатом изначально сферической формы. Выражение для энергии растущего преципитата, отнесенной к единице объема, имеет следующий вид

$$F = F_e + F_s. \tag{1}$$

Здесь F_e - упругая часть свободной энергии; F_s- поверхностная энергия преципитата. Последняя представима в виде отнесённого к единице объёма произведения удельной поверхностной энергии γ (для простоты полагаемой независящей от ориентации) на площадь поверхности преципитата, моделируемого сплюснутым сфероидом [2]

$$F_s = 2\pi a_1^2 \left[1 + \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right] \gamma \Big/ \frac{4}{3}\pi a_1^3 \rho. \tag{2}$$

Здесь $\rho = a_3/a_1$ - отношение малой a_3 и большой a_1 полуосей сплюснутого сфероида. Для сфероидов, форма которых мало отличается от шаровой, а объём соответствует объёму шара радиуса R, выражение (2)

можно заменить его разложением в ряд по степеням $(1-\rho)$. Ограничиваясь квадратичным членом данного разложения и считая объем сфероида постоянным, имеем

$$F_s = \left(3 + \frac{8}{15}(1-\rho)^2\right)\frac{\gamma}{R}. \tag{3}$$

Заметим, что предположение о постоянстве объёма сфероида соответствует тому, что потеря сфеичности происходит спонтанно и не сопровождается значительным переносом вещества. Упругая часть свободной энергии в расчете на единицу объема может быть записана в виде [4,5]

$$F_e = -\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{int}\varepsilon_{ij}^0;\ \ \sigma^{int} = \left[\Lambda^{*\,-1} - \left(E - S^{-1}\right)^{-1}\Lambda^{0\,-1}\right]^{-1}\varepsilon^0. \tag{4}$$

Здесь Λ^*, Λ^0 — тензоры упругости включения и матрицы, соответственно; σ^{int} — тензор напряжений, действующих внутри преципитата, E — единичный тензор; ε^0 — тензор собственных деформаций преципитата; S — тензор Эшелби, зависящий от упругих свойств кристалла (но не неоднородности) и соотношения полуосей сфероида, моделирующего преципитат [4,5]. Отметим, что при записи выражения для упругой энергии F_e в (4) использовано правило суммирования по повторяющимся индексам, а выражение для напряжений σ^{int} записано в матричной форме записи. Выражения для компонент тензора Эшелби в случае изотропного кристалла и кристалла, обладающего кубической симметрией — известны (напр. [4,5]). Рассмотрим далее отдельно случаи когерентного и некогерентного преципитатов.

2. Когерентный преципитат

Для когерентного преципитата собственные деформации равны разности параметров решетки окружающего кристалла и вещества преципитата (напр. [6]). В случае изотропной окружающей среды или кубического кристалла диагональные компоненты тензора собственных деформаций преципитата равны между собой, а их сумма равна объёмной деформации ε_v

$$\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_{33}^0 = \varepsilon_v/3. \tag{5}$$

Тогда, используя хорошо известные выражения для компонент тензора Эшелби (см. Приложение), соответствующие изотропной среде [4,5], и разлагая (4) в ряд по степеням $(1-\rho)$, для случая когерентного преципитата получим

$$F_e = \frac{2K\mu_0}{3K+4\mu_0}\varepsilon_v^2 - \frac{72K^2\mu_0(1-\nu_0)(\mu_0-\mu)(1-\rho)^2}{5(3K+4\mu_0)^2[\mu_0(7-5\nu_0)+2\mu(4-5\nu_0)]}\varepsilon_v^2, \tag{6}$$

где μ_0 и μ — модуль сдвига матрицы и преципитата, соответственно; ν_0 — коэффициент Пуассона матрицы; K — модуль всестороннего сжатия преципитата.

Из (4), (5) следует, что напряжения, действующие внутри когерентного преципитата сферической формы, соответствуют равнокомпонентному напряженному состоянию с компонентами равными $-p$, причём

$$p = \frac{4K\mu_0}{3K + 4\mu_0}\varepsilon_{\text{v}}. \tag{7}$$

Далее при записи критерия потери преципитатом изначально сферической формы для удобства вместо ε_{v} будем использовать параметр p, определённый формулой (7). Тогда выражение (6) для упругой энергии когерентного преципитата примет следующий вид

$$F_e = \frac{3K + 4\mu_0}{8K\mu_0}p^2 - \frac{9(1-\nu_0)(\mu_0-\mu)(1-\rho)^2}{10\mu_0[\mu_0(7-5\nu_0)+2\mu(4-5\nu_0)]}p^2. \tag{8}$$

Подставляя (3) и (8) в (1), для полной свободной энергии когерентного преципитата получим следующее выражение

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{3\gamma}{R} + \frac{3K + 4\mu_0}{8K\mu_0}p^2 + \\ & + \left\{ \frac{8\gamma}{15R} - \frac{9(1-\nu_0)(\mu_0-\mu)}{10\mu_0[\mu_0(7-5\nu_0)+2\mu(4-5\nu_0)]}p^2 \right\}(1-\rho)^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Сферическая форма когерентного преципитата перестаёт быть устойчивой, то есть соответствовать минимуму свободной энергии, тогда, когда третье слагаемое в формуле (9), отвечающее за несферичность, отрицательно. Следовательно, сферическая форма когерентного преципитата перестает быть устойчивой при выполнении следующего неравенства

$$\frac{Rp^2}{\gamma\mu_0} > \frac{16[(7-5\nu_0)+2(4-5\nu_0)t]}{27(1-\nu_0)(1-t)}, \tag{10}$$

где введено обозначение $t = \mu/\mu_0$. Отметим, что в случае кремниевой матрицы коэффициент Пуассона ν_0 может быть принят равным 0.22 [7], тогда критерий (10) перепишем в виде

$$\frac{Rp^2}{\gamma\mu_0} > \frac{4.48 + 4.41\,t}{1-t} \tag{11}$$

Для аморфного оксида кремния μ = 48ГПа (при μ_0 = 80ГПа), а правая часть (11) равна 17 (Таблица 1); для мягких форм оксида кремния,

	$Rp^2/\gamma\mu_0$
аморфный SiO_2	17
$\alpha-$кристобаллит	8.7
коэсит	70

Таблица 1. Значения параметра $Rp^2/\gamma\mu_0$ в критическом состоянии (знак равенства в формуле (11)) для когерентных преципитатов SiO_2 различных модификаций, находящихся в матрице кремния

таких как α-кристобаллит μ = 26ГПа, а правая часть (11) уменьшается до 8.7; в то время как для жестких форм оксида, таких как коэсит, μ = 70.5ГПа, а сферическая форма когерентного преципитата остается устойчивой вплоть до значений правой части (11) равных 70. Для включений более жестких, чем матрица, сферическая форма преципитата всегда устойчива, что непосредственно следует из (11). Для иллюстрации на рис.1 приведен график зависимости радиуса когерентного преципитата в критическом состоянии от значений параметра p. При этом, ввиду отсутствия экспериментальных данных, значение поверхностной энергии границы раздела преципитат-кристалл γ для всех рассмотренных модификаций SiO_2 было выбрано равным 1 Н/м, что по порядку величины соответствует известным значениям для поверхностных энергий различных кристаллов [8]. Графики, представленные на рис.1, демонстрируют, что радиус преципитата в критическом состоянии тем меньше, чем мягче преципитат и выше p.

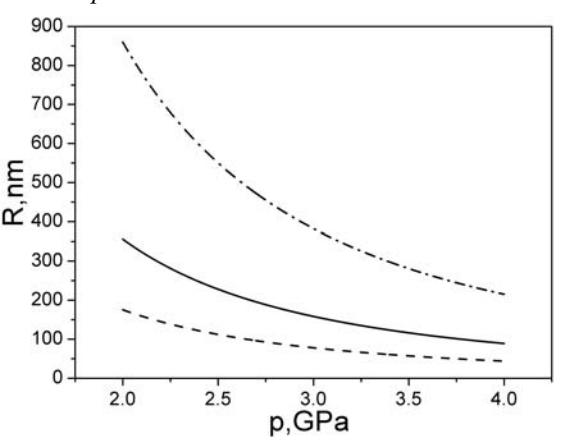


Рис. 1. График зависимости радиуса когерентного преципитата R в критическом состоянии от значений параметра p. Сплошная линия – аморфный SiO_2, пунктирная – α-кристобаллит, штрих-пунктирная — коэсит.

3. Некогерентный преципитат

Для некогерентного преципитата на границе раздела отсутствует однозначное соответствие атомов преципитата атомам матрицы. Как след-

ствие распределение объемной деформации ε_{v} по компонентам тензора собственных деформаций ε_{ij}^0 может быть произвольным и определяется минимумом свободной энергии системы. Для заданной объемной деформации имеем следующее очевидное равенство

$$\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{33}^0 = \varepsilon_v. \tag{12}$$

Известно, что для некогерентного преципитата минимум свободной энергии системы соответствует равнокомпонентному напряженному состоянию внутри преципитата [5]. Положив в (4) $\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0$, $\varepsilon_{33}^0 = \beta\,\varepsilon_{11}^0$ и вычислив минимум свободной энергии по β при условии (12), найдём искомое распределение объёмной собственной деформации по компонентам. Подставляя найденное значение β снова в (4), получим выражение для упругой части свободной энергии системы, разложение которой по степеням $(1-\rho)$ имеет следующий вид

$$F_e = \frac{2K\mu_0}{3K+4\mu_0}\varepsilon_{\text{v}}^2 - \frac{72K^2\,(1-\nu_0)\,(1-\rho)^2}{5\,(3K+4\mu_0)^2\,(7-5\nu_0)}\varepsilon_{\text{v}}^2 \tag{13}$$

Или с учетом (7)

$$F_e = \frac{3K+4\mu_0}{8K\mu_0}p^2 - \frac{9\,(1-\nu_0)\,(1-\rho)^2}{10\mu_0\,(7-5\nu_0)}p^2. \tag{14}$$

Подставляя (3) и (14) в (1), для полной свободной энергии некогерентного преципитата получим следующее выражение

$$F = \frac{3\gamma}{R} + \frac{3K+4\mu_0}{8K\mu_0}p^2 + \left\{\frac{8\gamma}{15R} - \frac{9\,(1-\nu_0)}{10\mu_0\,(7-5\nu_0)}p^2\right\}(1-\rho)^2. \tag{15}$$

Следовательно, условие потери сферичности некогерентным преципитатом имеет вид

$$\frac{Rp^2}{\gamma\mu_0} > \frac{16\,(7-5\nu_0)}{27\,(1-\nu_0)} \tag{16}$$

Для случая кремниевой матрицы условие (16) можно переписать в следующем виде

$$\frac{Rp^2}{\gamma\mu_0} > 4.48 \tag{17}$$

Данное выражение совпадает с выражением, полученным в [2]. Значение величины $Rp^2/\gamma\mu_0$ в критическом состоянии для некогерентного преципитата, а также зависимость (11) этой величины от параметра t для когерентного преципитата, представлены на рис.2.

Анализ зависимостей (11) и (17) показывает, что критический радиус для некогерентного преципитата при заданном внутреннем давлении не

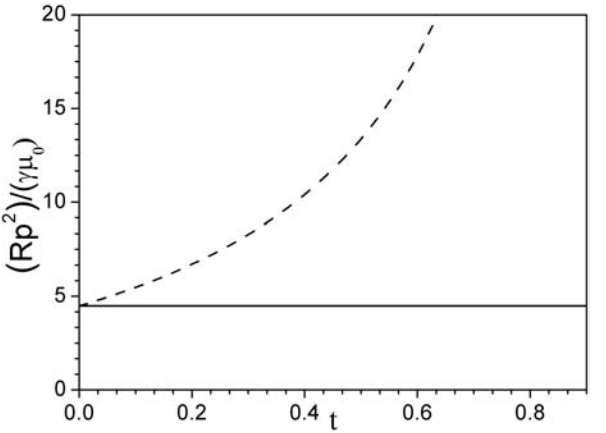


Рис. 2. Зависимость критического значения величины $Rp^2/\gamma\mu_0$ при ν_0 = 0.22 от относительной жесткости преципитата - t. Сплошная линия — некогерентный преципитат, пунктирная — когерентный преципитат.

зависит от его упругих свойств, в то время как для когерентного преципитата критический радиус растет при увеличении его жесткости относительно жёсткости кристалла. В предельном случае, когда модуль сдвига преципитата равен модулю сдвига матрицы: $t = 1$ — из (10) следует, что сферическая форма остается устойчивой для любых значений $Rp^2/\gamma\mu_0$.

Для анализа наблюдаемых явлений целесообразно выразить полученные критерии в терминах объёмной собственной деформации ε_v, поскольку она напрямую связана с параметрами решетки преципитата и матрицы. Используя (7) и (10), для когерентного преципитата получим следующее условие

$$\frac{R\mu_0\varepsilon_v^2}{\gamma} > \frac{(7-5\nu_0)+2(4-5\nu_0)\,t}{27(1-\nu_0)(1-t)}\left(1+\frac{4\mu_0}{3K}\right)^2 \qquad (18)$$

Соответствующее условие потери сферичности для некогерентного преципитата имеет вид

$$\frac{R\mu_0\varepsilon_v^2}{\gamma} > \frac{(7-5\nu_0)}{27(1-\nu_0)}\left(1+\frac{4\mu_0}{3K}\right)^2 \qquad (19)$$

Зависимости критического значения величины $R\mu_0\varepsilon_v^2/\gamma$ от относительной жёсткости преципитата - K/μ_0 для случаев когерентного и некогерентного преципитатов, вычисленные согласно формулам (18) и (19), представлены на рис.3. Анализ этих зависимостей показывает, что при заданном значении объемного модуля преципитата K критический радиус R падает с увеличением коэффициента Пуассона преципитата таким образом, что при $\nu \to 0.5$ зависимость критического радиуса для когерентного преципитата стремится к значению, соответствующему некоге-

рентному преципитату, оставаясь всегда выше. Из этого, однако, не следует, что потеря когерентности преципитатом обязательно энергетически выгодна, поскольку, как правило, она сопровождается увеличением удельной поверхностной энергии раздела фаз γ.

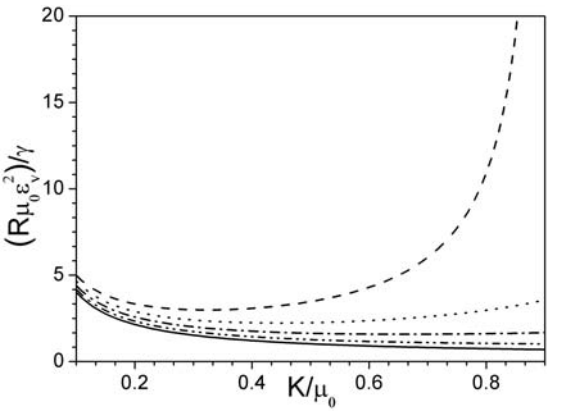


Рис. 3. Зависимость критического значения величины $R\mu_0\varepsilon_v^2/\gamma$ при $\nu_0 = 0.22$ и $\mu_0 = 80$ ГПа от относительной жесткости преципитата - K/μ_0. Сплошная линия — некогерентный преципитат, штриховая — когерентный, $\nu_1 = 0.1$, пунктирная — когерентный, $\nu_1 = 0.2$, штрих-пунктирная — когерентный, $\nu_1 = 0.3$, штрих-пунктир-пунктирная — когерентный, $\nu_1 = 0.4$.

4. Заключение

Полученные в настоящей работе результаты дают представление о размере преципитата, начиная с которого сферическая форма преципитата перестаёт быть устойчивой и сменяется либо сплюснутой, либо вытянутой формами сфероида. Отметим, что представленные в работе критерии позволяют делать заключения лишь о моменте начала потери устойчивости. Для суждения о направлении (форме) потери устойчивости в разложении свободной энергии системы F по степеням $(1-\rho)$ должны быть удержаны члены порядка выше второго.

Пример преципитата оксида кремния в кремниевой матрице, рассмотренный в настоящей работе, даёт наглядную иллюстрацию того, что критические параметры потери сферичности существенно зависят от типа преципитата (когерентный или некогерентный). Результаты, полученные в работе для когерентных преципитатов, в сочетании с имеющимися в литературе для некогерентных преципитатов, позволяют, с одной стороны, прогнозировать поведение преципитатов на самых ранних стадиях их роста, когда преципитаты являются когерентными, а, с другой стороны, при наличии достаточного объёма экспериментальных данных, получить дополнительную информацию о параметрах преципитата: собственной объёмной деформации ε_v и поверхностной энергии границы раздела γ.

Полученные в настоящей работе результаты, позволяют сделать заключение о том, что процесс потери сферичности как когерентным, так и некогерентным преципитатом управляется единым безразмерным комплексом. Следовательно, данный безразмерный комплекс может быть использован при моделировании процесса потери сферичности преципитатами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект 08-02-01080-а) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН №22.

Приложение

Отличные от нуля компоненты тензора Эшелби для случая изотропной среды могут быть записаны в следующем виде [4,5,9]

$$S_{1111} = S_{2222} = \left(\frac{3P}{4} + R\right) I - \pi P\rho^2$$
$$S_{1122} = S_{2211} = \left(\frac{P}{4} - R\right) I - \frac{\pi}{3} P\rho^2$$
$$S_{1133} = S_{2233} = \frac{4\pi}{3} P\rho^2 - \left(P\rho^2 + R\right) I$$
$$S_{3311} = S_{3322} = 4\pi \left(\frac{P}{3} - R\right) - (P - 2R)\, I$$
$$S_{3333} = 4\pi \left[\frac{P}{3}\left(1 - 3\rho^2\right) + R\right] + 2\left(P\rho^2 - R\right) I$$
$$S_{1313} = S_{2323} = 2\pi \left[\frac{P}{3}\left(1 + \rho^2\right) + R\right] - \frac{1}{2}\left[P\left(1 + \rho^2\right) + R\right] I$$

$$S_{1212} = \frac{1}{2}\left(S_{1111} - S_{1122}\right),$$

Где

$$\rho = \frac{a_3}{a_1}, \quad P = \frac{3}{8\pi\left(1 - \nu_0\right)\left(1 - \rho^2\right)}, \quad R = \frac{1 - 2\nu_0}{8\pi\left(1 - \nu_0\right)},$$
$$I = \begin{cases} \dfrac{2\pi\rho}{\left(1 - \rho^2\right)^{3/2}} \left[\arccos\rho - \rho\sqrt{1 - \rho^2}\right], & \rho < 1 \\ \dfrac{2\pi\rho}{\left(\rho^2 - 1\right)^{3/2}} \left[\rho\sqrt{\rho^2 - 1} - \mathrm{ch}^{-1}\,\rho\right], & \rho > 1 \end{cases}$$

Оставшиеся отличные от нуля компоненты тезора Эшелби могут быть получены из следующих равенств [4,5,11]

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$$

Литература

1. *Borghesi A., Pivac B., Sasselia A., Stella A.* Oxygen precipitation in silicon // Appl.Phys.Rev. 1995. V.77. P.4169-4244.
2. *Voronkov V.V., Falster R.* Strain-induced transformation of amorphous spherical precipitates into platelets: Application to oxide particles in silicon // J.Appl.Phys. 2001. V.89. P.5965-5971.
3. *Гольдштейн Р.В., Меженный М.В., Мильвидский М.Г., Резник В.Я., Устинов К.Б., Шушпанников П.С.* Экспериментально-теоретическое исследование процесса формирования системы кислородосодержащий преципитат – дислокационные петли в кремнии // ФТТ. 2011 (в печати).
4. *Эшелби Дж.* Определение поля упругих напряжений, создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой // В кн. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.:ИЛ, 1963. С.103-139.
5. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987. 588p.
6. *Колесникова А.Л., Романов А.Е., Чалдышев В.В.* Процессы релаксации упругой энергии в гетероструктурах с напряжёнными нановключениями // ФТТ. 2007. Т.49. В.4. 633-640.
7. *Nye J.F.* Elastic behavior of single crystals: Anisotropy // in Encyclopedia of Materials: Science and Technology. New York, NY: Pergamon, 2001. P.2415-2423.
8. *Shenoy V.B.* Atomic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces // Phys.Rev. B. 2005. V.71. 094104.
9. *Chow T.S.* Elastic moduli of filled polymers: the effects of particle shape // J.Appl.Phys. 1977. V.48. P.4072-4075.

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ

В.С. Гудрамович [1], ***Э. Л. Гарт*** [2]

[1] ***Институт технической механики Национальной академии наук Украины и Национального космического агентства Украины***
[2] ***Днепропетровский национальный университет***
Днепропетровск, Украина

[1] **hudramovich@i.ua**, [2] **compumech@ua.fm**

Рассмотрены задачи упругопластического деформирования прямоугольных пластин с отверстиями различной конфигурации. Построены эффективные проекционно-итерационные схемы метода конечных элементов. Учет пластических деформаций проведен на основе использования итерационных процессов методов упругих решений при построении схем последовательных приближений, для каждого из которых решается задача теории упругости. Предложены проекционно-итерационные схемы метода локальных вариаций. Разработанные схемы применены к решению задач локальной устойчивости оболочек с отверстиями и плоских контактных задач для протяженных оболочечных конструкций, локально взаимодействующих с круговыми основаниями.

К наиболее распространенным и универсальным численным методам решения задач механики деформируемого тела относится вариационно-сеточный метод конечных элементов (МКЭ) и его многосеточные модификации [1]. Проекционно-итерационные (ПИ) схемы реализации МКЭ, построенные на основе использования различных итерационных процессов, позволяют разработать эффективные алгоритмы решения задач механики деформируемого твердого тела.

Основы ПИ методов заложены в исследованиях по функциональному анализу [2, 3] и др. Применение идей ПИ методов при учете пластических деформаций в задачах исследования процесса деформирования приводит к построению итерационных схем последовательных приближений, основанных на использовании методов упругих решений [4]: дополнительных нагрузок или переменных параметров упругости. В каждом из таких приближений решается неоднородная задача теории упругости, расчет проводится до совпадения с заданной точностью двух соседних приближений.

Рассмотрим деформирование прямоугольных пластин с одним и несколькими отверстиями различной формы (прямоугольными, круговыми, эллиптическими) в условиях медленного одноосного нагружения растягивающими или сжимающими усилиями, вызывающими пластические де-

формации. В этом случае могут быть успешно применены методы теории пластичности, разработанные А. А. Илюшиным [4]. Используем вариационный подход, согласно которому напряженно-деформированное состояние (НДС) пластин определяется на основе минимизации некоторого функционала [5].

Вводя декартову систему координат xOy для пластины с нагрузкой P, приложенной по одной из сторон (в направлении оси Oy), запишем этот функционал в виде

$$\Pi = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\frac{G}{1-\nu}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{G}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dxdy - \int_{-a}^{a} Pvdx, \tag{1}$$

где G — модуль сдвига, связанный с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношением $G = E/(2(1+\nu))$; u и v — перемещения в направлении осей Ox и Oy.

Наглядной является схема метода переменных параметров упругости. В каждом приближении меняется модуль упругости $\bar{E}$ и коэффициент Пуассона $\bar{\nu}$, которые зависят от НДС предыдущего приближения и определяются по формулам:

$$\bar{E} = \frac{3E}{2E\psi + 1 - 2\nu}, \quad \bar{\nu} = \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu}, \quad \psi = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}, \tag{2}$$

где σ_i и ε_i — интенсивности напряжений и деформаций в пластине соответственно.

Расчет проводится в такой последовательности. В первом приближении полагается $\bar{E}_1 = E$, $\bar{\nu}_1 = \nu$. Определяются σ^e_{ij1}, σ^e_{i1}, ε^e_{i1}, σ_{i1} (из диаграммы$\sigma_i - \varepsilon_i$) и $\psi_1 = 3\varepsilon^e_{i1}/(2\sigma_{i1})$. Во втором приближении вычисляется $\bar{E}_2 = \sigma_{i1}/\varepsilon^e_{i1}$ и решается задача при $\bar{E}_2$ и $\bar{\nu}_2$ и т. д.

Построены также расчетные схемы для метода дополнительных нагрузок.

На рис. 1 приведены результаты численного анализа, проведенного на основе вышеуказанных схем. Рассмотрена пластина с двумя отверстиями круглой и эллиптической формы. Показано развитие зон пластических деформаций в зависимости от изменения расстояния между центрами отверстий, т. е. исследовано их взаимовлияние.

Отметим, что изменение конфигурации отверстия может происходить в процессе изменения нагрузки (круглое отверстие трансформируется в эллиптическое и наоборот). Укажем, что при использовании ПИ схем МКЭ

могут быть исследованы плоские задачи упругопластического деформирования при наличии отверстий различной формы. Вопросы исследования процесса зарождения и трансформации отверстий тесно связаны с представлениями механики разрушения как процесса зарождения и развития нарушений сплошности (поры, трещины) [6, 7].

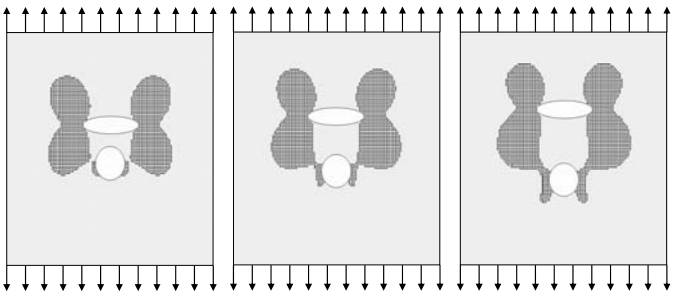


Рис. 1.

Таким образом, разработанные ПИ схемы позволяют исследовать процесс разрушения, когда поврежденность моделируется отверстиями разной конфигурации. Применение таких схем дает существенный выигрыш во времени расчета на ПК (для разных задач от 5 до 40 раз [8–10]).

Проведенные исследования могут быть использованы и для оболочечных систем. Разработаны ПИ схемы метода локальных вариаций (МЛВ), которые успешно применены к изучению критических состояний оболочек с отверстиями [11]. В [12] содержатся теоретические (на основе традиционного МЛВ [13]) и экспериментальные исследования локальной устойчивости сферических оболочек с отверстиями в центре.

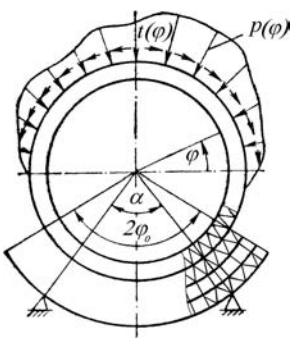


Рис. 2.

Известно, что для протяженных тел справедливы схемы плоских задач. На рис. 2 показана схема моделирования локального контактного взаимодействия протяженной неоднородной оболочечной конструкции и кругового основания, при которой использованы ПИ варианты МКЭ. Показано поперечное сечение конструкции (в частности, это одна из контактных задач для конструкций ракетно-космической техники). Взаимовлияние элементов конструкции учитывается усилиями t и p, которые определяются при решении специальных контактных задач сопряжения элементов [14, 15].

В зависимости от степени концентрации контактного давления возможно использование различных форм конечных элементов (линейных и билинейных аппроксимаций). В области локализации напряжений целесо-

образно применение треугольных элементов (линейная аппроксимация). ПИ схемы МКЭ при использовании этих элементов дают более точные значения напряжений, чем использование прямоугольных элементов (билинейная аппроксимация), но несколько уступают по времени расчета. Применение ПИ схем МКЭ при использовании как линейных, так и билинейных аппроксимаций является более эффективным по сравнению с расчетами на основе обычного МКЭ.

Литература

1. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. М. Наука, 1989. 288 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М: Наука, 1984. 752 с.
3. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.,Л. : ОГИЗ, 1948. 376 с.
5. *Вакуленко А. А., Качанов Л. М.* Теория пластичности// Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1972. С.79–118.
6. *Hudramovich V.S.* Features of nonlinear deformation and critical states shell structures with geometrical imperfections// Int. Appl. Mech. 2006. V. 43. № 12. P.1323–1355.
7. *Кукуджанов В. Н.* Связанные модели упругопластичности и поврежденности и их интегрирование// Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. № 6. С.103–135.
8. *Гарт Э. Л.* Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости// Докл. НАН Украины. 2008. № 6. С.56–61.
9. *Hart E.L.* Projection-iterative version of the pointwise relaxation method// Journ. Math. Sci. 2010. V. 167. № 1. P.76–88.
10. *Гудрамович В.С., Гарт Э. Л., Рябоконь С. А.* Упругопластическое деформирование прямоугольных пластин с двумя отверстиями различной формы// Техн. механика. 2009. № 4. С.102–110.
11. *Гарт Е., Гудрамович В.* Проекційно-ітераційні модифікації методу локальних варіацій та аспекти їх застосування в задачах локальної стійкості оболонок// Сучасні проблеми механіки та математики. Т. 3. Львів, 2008. С.18–20.
12. *Гудрамович В. С., Дисковский М. А.* О локальной устойчивости сферических оболочек// ДАН СССР. Т. 232. №6. 1977. С.1280–1283.
13. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
14. *Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М.* Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова думка, 1988. 288 с.
15. *Hudramovich V. S.* Contact mechanics of shell structures under local loading// Int. Appl. Mech. 2009. V. 45. № 7. P.708–729.
16. *Гудрамович В. С., Гарт Е. Л.* Вплив форми скінченного елементу на обчислювальну ефективність проекційно-ітераційних методів при розв'язанні плоскої задачі теорії пружності// Вестн. Киевск. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2008. № 4. С.53–58.

ЗАДАЧА О ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ ИЗ СЖИМАЕМОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ.

О.А. Киликовская, Н.В. Овчинникова, М.Н. Пендюрина

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова
Москва, Россия

Точное решение задачи о трубе под действием внутреннего и внешнего давления было получено А.А.Ильюшиным [1] в предположении о несжимаемости материала (коэффициент Пуассона $\nu = 0.5$). Для упруго сжимаемого материала ($\nu < 0.5$) известны немногочисленные примеры приближенного решения задачи [2-5]. Но все численные расчеты, на основе которых был сделан вывод о влиянии сжимаемости материала, рассматривают случай действия одного только внутреннего давления. Вывод о влиянии сжимаемости материала можно уточнить, рассмотрев численное решение задачи методом конечных элементов при различных соотношениях величин внутреннего и внешнего давления. При решении задачи принимаем, что материал подчиняется условию пластичности Мизеса, соотношениям теории пластического течения с изотропным упрочнением (уравнениям Рейсса), является линейно упрочняемым.

Рассматривается задача плоской деформации для бесконечно длинной толстостенной трубы (осевое перемещение и деформация равны 0). На внутренней границе трубы ($r = a$) действует давление p_a, на внешней ($r = b$)—p_b. Рассмотрим случай, когда p_a и p_b изменяются пропорционально одному параметру нагружения. При этом выполнено соотношение $p_b = k \cdot p_a$, ($p_a \neq 0$). В качестве параметра нагружения примем величину p_a. Случай, когда действует только внешнее давление $p_a = 0$, $p_b \neq 0$, рассматривается отдельно.

1. Задача упругости.

Решение задачи Ламе об упругой трубе для любого значения коэффициента Пуассона $0 \leqslant \nu \leqslant 0.5$ имеет вид: ($\rho = r/a$, $1 \leqslant \rho \leqslant \beta$, $\beta = b/a$)

$$\sigma_r = A/\rho^2 + B, \quad \sigma_\theta = -A/\rho^2 + B \quad \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu B$$
$$A = \frac{(p_b - p_a)}{1 - 1/\beta^2} = \frac{p_a(k-1)}{1 - 1/\beta^2} \quad B = \frac{p_a/\beta^2 - p_b}{1 - 1/\beta^2} = \frac{p_a(1/\beta^2 - k)}{1 - 1/\beta^2} \qquad (1)$$

Если $\nu = 0.5$, то σ_z всегда является промежуточным главным напряжением, т.е. для всех точек трубы $1 \leqslant \rho \leqslant \beta$ выполнено, что

$$\sigma_r \leqslant \sigma_z \leqslant \sigma_\theta \quad \text{или} \quad \sigma_\theta \leqslant \sigma_z \leqslant \sigma_r \tag{2}$$

Максимальное касательное напряжение выражается только через напряжения σ_r, σ_θ:

$$\tau_{\max} = 0.5\,|\sigma_\theta - \sigma_r\,| \tag{3}$$

Если $\nu \neq 0.5$, то (2) выполняется не всегда. Определим, при каких значениях k существуют точки трубы, где (2) и, следовательно, (3) не выполняются. Для таких точек максимальное касательное напряжение будет выражаться через осевое напряжение. Выявляются несколько случаев:

1) Для трубы размера $\beta > 1/\sqrt{1-2\nu}$ (например, $\nu = 0.3$ соответствует $\beta > 1.582$), если $-\dfrac{2\nu}{\beta^2(1-2\nu)-1} \leqslant k \leqslant \dfrac{2(1-\nu)}{1+\beta^2(1-2\nu)}$, то для всех точек трубы выполнено (2).

В остальных случаях: $k < -\dfrac{2\nu}{\beta^2(1-2\nu)-1}$ или $k > \dfrac{2(1-\nu)}{1+\beta^2(1-2\nu)}$, условие (2) выполняется не для всех точек трубы. Это же справедливо для случая действия только внешнего давления ($p_a = 0$, $p_b \neq 0$, т.е. $k = \pm\infty$).

На рис. 1 для $\nu = 0.3$ и труб $\beta = 2$ и $\beta = 10$ области значений k, при которых (2) не всегда выполняется, закрашены.

$\beta = 2$ $\beta = 10$

Рис. 1.

2) Для трубы размера $1 < \beta \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-2\nu}}$ условие (2) не всегда выполняется только при $\dfrac{2(1-\nu)}{1+\beta^2(1-2\nu)} \leqslant k \leqslant 1$.

2. Задача для упруго-пластического материала.

Если $p_b \neq p_a$, то пластические деформации в трубе начинаются на внутренней границе при нагрузках, определяемых из условия пластичности Мизеса, т.е. при $p_a^0 = \pm\dfrac{\sigma_S(1-1/\beta^2)}{\sqrt{3(k-1)^2+(1-2\nu)^2(k-1/\beta^2)^2}}$.

Сильная зависимость p_a^0 от ν проявляется только при k, близком к 1. При $k = 1$ (т.е. при $p_b = p_a$) пластические деформации начинаются при $p_a^0 = \pm\sigma_S/(1-2\nu)$ сразу во всех точках трубы. В случае же несжимаемого материала при $k = 1$ пластических деформаций не возникает.

При решении задачи методом конечных элементов параметр нагружения $p = \bar{p}_a = \sqrt{3}p_a/\sigma_S$ изменялся от 0 до предельной величины нагрузки

$\bar{P}_N^{0.5}$ для несжимаемого материала (когда вся труба переходит в пластическое состояние). Численное решение задачи, полученное при $\nu = 0.499$, совпало с аналитическим решением [1] для $\nu = 0.5$ с большой точностью. При этом случай идеальной пластичности материала хорошо приближается численным решением для малого коэффициента упрочнения $E_1/E = 0.0001$.

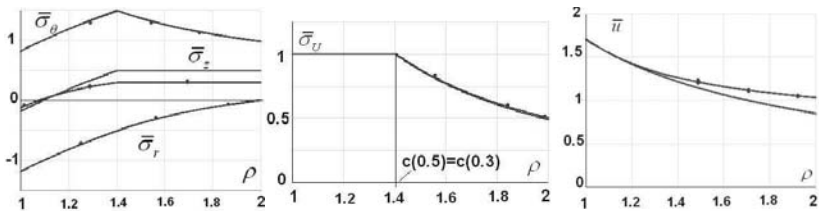


Рис. 2. $k = 0$ (только внутреннее давление). $\bar{p}_a = 1.18$ ($\bar{P}_N^{0.3} = 1.381$, $\bar{P}_N^{0.5} = 1.386$)

На рис. 2-4 приведены примеры сравнения аналитического решения для $\nu = 0.5$ и численного для $\nu = 0.3$ (линии с точками) в случае трубы $\beta = 2$ для $E_1/E = 0.0001$ при характерных значениях k, показанных на рис.1. Для значений параметра нагружения $\bar{p}_a$ построены графики (в безразмерном виде) напряжений $\bar{\sigma}_r \equiv \sqrt{3}\sigma_r/\sigma_S$, $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\sigma}_z$; интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_U = \sigma_U/\sigma_S$; радиального перемещения $\bar{u} \equiv u/(a\varepsilon_S)$. Сравниваются радиусы пластических областей: $c(0.3)$ и $c(0.5)$. Здесь же приведены предельные значения параметра нагружения для сжимаемого $\bar{P}_N^{0.3}$ и несжимаемого $\bar{P}_N^{0.5}$ материалов, (т.е. значения, при которых вся труба переходит в пластическое состояние).

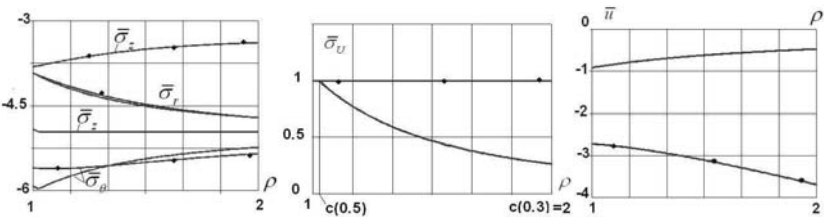


Рис. 3. $k = 1.2$ $\bar{p}_a = 4$. ($\bar{P}_N^{0.3} = 3.30$, $\bar{P}_N^{0.5} = 6.93$)

Из рисунков видно, что напряжения σ_r и σ_θ для сжимаемого и несжимаемого материалов сравнительно близки, а осевое напряжение σ_z и радиальное перемещение u отличаются. Но очень важно добавить, что при различных значениях k отличаются они по-разному. Так, при $k = 0$ (действует только внутреннее давление) отличие σ_z мало, радиусы пластичности и величины предельных нагрузок для сжимаемого и несжимаемого материала совпадают; для всех точек выполнено (2). В других (многочисленных) случаях сильное отличие σ_z для сжимаемого и несжимаемого материалов приводит к существенному отличию интенсивностей напряжений и,

следовательно, к отличию радиусов соответствующих пластических зон и величин предельных нагрузок. В этих же случаях (2) выполняется не всегда.

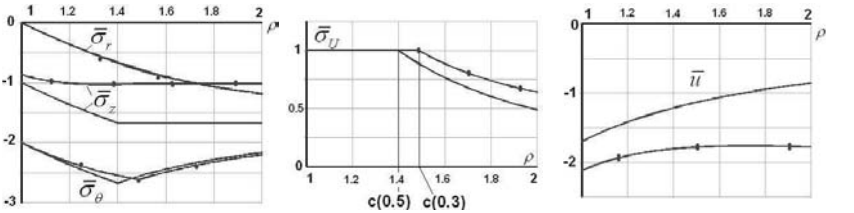


Рис. 4. $p_a = 0,\ p_b > 0$ (только внешнее давление) $\bar{p}_b = 1.18$. ($\bar{P}_N^{0.3} = 1.34$, $\bar{P}_N^{0.5} = 1.386$)

Установлено, что при значениях ν, β и k, при которых условие (2) выполняется для упругого состояния трубы, оно выполняется и для упруго-пластического состояния. В этом случае решение близко к решению для $\nu = 0.5$. Для $k = 0$ влияние сжимаемости на решение минимально.

Для упруго-пластического состояния трубы нельзя принимать допущение, что (2) выполняется, если для упругого состояния при тех же значениях ν, β и k условие (2) не выполнялось для всех точек трубы. В этих случаях отличие решения от решения для $\nu = 0.5$ может быть значительным. Максимальное отличие достигается при $k = 1$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-08-00933.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Соколовский В.В.* Упруго-пластическое равновесие цилиндрической трубы при наличии упрочнения материала // ПММ. 1943. Т.7. Вып.4. С.273-292.
3. *ХиллР.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
4. *Ильюшин А.А., Огибалов П.М.* Упруго-пластические деформации полых цилиндров. М.: Издательство Московского университета, 1960, 224 с.
5. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упруго-пластического тела. М.: Наука, 1978, 208 с.

ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

С. А. Корнеев

Омский государственный технический университет
Омск, Россия
korneyev@omgtu.ru

On the basis of the analysis of a uniaxial tension diagram the physical statement for construction of the constitutive relations of viscoelastic plasticity which covers practically all known infinitesimal theories is formulated. The principal modifications are made to the interpretation of the basic statement of E.H. Lee kinematics. The order of application of the offered approach to the distribution of the infinitesimal theories for the finite deformations is illustrated by the concrete example.

Одной из актуальных задач механики деформируемого твёрдого тела является построение определяющих соотношений с учётом геометрической и физической нелинейностей, имеющих место при конечных деформациях и конечных скоростях их изменения. При решении данной задачи используется множество разнообразных подходов. Например, в ряде работ предлагаются разные варианты обобщения определяющих соотношений инфинитезимальной вязкоупругопластичности через представление $\dot{\boldsymbol{T}} = \Im : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ и последующую формальную замену полных производных тензора напряжений Коши $\dot{\boldsymbol{T}}$ и линейного тензора деформации $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ теми или иными объективными производными некоторых мер напряжений и деформаций. Данный подход приводит к противоречивым результатам из-за произвольности выбора объективных производных, мер напряжений и деформаций. Поэтому большее предпочтение имеют подходы, опирающиеся не на математическую, а на физическую феноменологию.

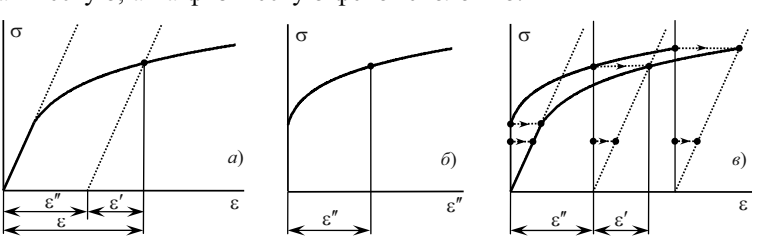


Рис. 1. Диаграмма одноосного растяжения (а), (б) и её интерпретация (в)

Чтобы выработать руководящую идею одного из возможных подходов, обратим внимание на типовую диаграмму растяжения в координатах $\sigma - \varepsilon$ (рис. 1, *а*) и в координатах $\sigma - \varepsilon''$ (рис. 1, *б*). Здесь σ – напряжение; ε, ε', ε''

– полная, упругая (обратимая) и пластическая (остаточная, необратимая) деформация соответственно. С точки зрения модельных представлений классической теории пластичности диаграмму на рис. 1, *б* можно интерпретировать как диаграмму растяжения некоторого жёсткопластического тела. После этого нетрудно заметить (рис. 1, *в*), что диаграмму деформирования реального упругопластического тела (рис. 1, *а*) можно получить из диаграммы деформирования жёсткопластического тела (рис. 1, *б*) путём наложения на необратимую деформацию ε'' дополнительной обратимой деформации ε', которую совершает соответствующее упругое тело при таком же уровне напряжений, как у жёсткопластического тела. Данным обстоятельством можно воспользоваться при рассмотрении общего случая пространственного деформирования, взяв за основу следующее физическое положение. *Определяющие соотношения (ОС) вязкоупругопластического тела (EVP-тела) являются комбинацией ОС некоторого жёсткого вязкопластического тела (RVP-тела) и ОС некоторого упругого тела (E-тела) при выполнении следующих условий: 1 RVP-тело совершает необратимое деформирование при таком же законе изменения напряжений, как у EVP-тела; 2 закон деформирования EVP-тела получается из закона деформирования RVP-тела наложением закона обратимого деформирования E-тела при том же законе изменения напряжений, как у EVP- и RVP-тел; 3 для EVP-, RVP- и E-тел справедлива гипотеза макрофизической определимости* [1]*, причём, в случае неоднородного деформированного состояния условие совместности деформаций является обязательным только для EVP-тела.* В рамки данного положения укладываются все известные инфинитезимальные теории пластичности и ползучести из обзора монографии [2] (стр. 11, 18, 19, 111-113).

Далее ограничимся случаем *изотермических* процессов деформирования *EVP*-тела, которое полагаем *материально однородным*, *начально изотропным*, *пластически несжимаемым*. Физические величины, относящиеся к *EVP*-телу, *E*-телу и *RVP*-телу, будем обозначать без штриха, одним штрихом и двумя штрихами соответственно.

Пусть $\boldsymbol{T}(t, \boldsymbol{X})$ – возникающие в *EVP*-теле напряжения при законе движения $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{X})$, описывающем переход точек тела из положения с радиус-вектором $\boldsymbol{X}$ в натуральной отсчётной конфигурации κ_0 в положение с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$ в актуальной конфигурации κ за время t (рис. 2). Движение *RVP*-тела подчиняется некоторому, подлежащему определению закону $\boldsymbol{x}''(t, \boldsymbol{X})$, описывающему переход *RVP*-тела за время t из отсчётной конфигурации κ_0 во вспомогательную конфигурацию κ'' (рис. 2), в которой распределение напряжений $\boldsymbol{T}(t, \boldsymbol{X})$ такое же, как у *EVP*-тела в конфигурации κ. В соответствии с выдвинутым физическим положением закон движения $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{X})$ *EVP*-тела получается из закона движения $\boldsymbol{x}''(t, \boldsymbol{X})$ *RVP*-тела наложением закона $\boldsymbol{x}'(t, \boldsymbol{X}')$ *E*-тела, осуществляю-

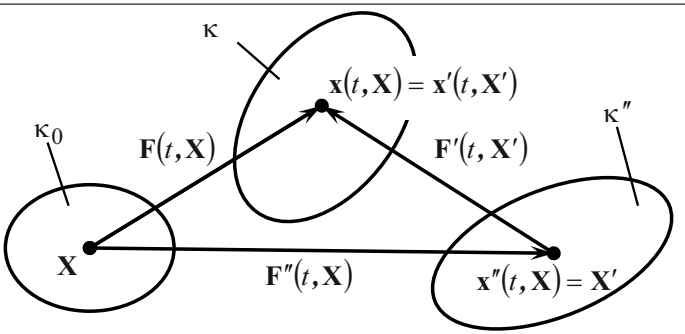


Рис. 2. Согласование законов движения и деформирования *EVP*-, *RVP*- и textitE-тел

щем переход из конфигурации κ'' в конфигурацию κ (рис. 2) с изменением тензора напряжений от нуля до значения $\boldsymbol{T}\,(t, \boldsymbol{X})$, как у *EVP*-тела.

Математически законы движения *EVP*-, *RVP*- и E-тел связаны зависимостью (рис. 2)

$$\boldsymbol{x}\,(t, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{x'}\,(t, \boldsymbol{x''}\,(t, \boldsymbol{X}))\,. \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по $\boldsymbol{X}$, получаем формулу мультипликативного разложения

$$\boldsymbol{F}\,(t, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{F'}\,(t, \boldsymbol{X'}) \cdot \boldsymbol{F''}\,(t, \boldsymbol{X})\,, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{F}\,(t, \boldsymbol{X}) = \partial \boldsymbol{x}\,(t, \boldsymbol{X})/\partial \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{F'}\,(t, \boldsymbol{X'}) = \partial \boldsymbol{x'}\,(t, \boldsymbol{X'})/\partial \boldsymbol{X'}$, $\boldsymbol{F''}\,(t, \boldsymbol{X}) = \partial \boldsymbol{x''}\,(t, \boldsymbol{X})/\partial \boldsymbol{X}$ – градиенты деформации *EVP*-, E- и *RVP*-тел соответственно. Тем самым, приходим к кинематическому описанию, схожему с кинематическим описанием E.H. Lee [3], но имеющим два принципиальных отличия (на основании п. 1, п. 2 выдвинутого физического положения): 1) в разложении (2) полный $\boldsymbol{F}$, обратимый $\boldsymbol{F'}$ и необратимый $\boldsymbol{F''}$ градиенты деформации относятся к одному и тому же моменту времени t и не связаны с представлением о разгрузке из актуальной конфигурации; 2) во вспомогательной конфигурации κ'' находится *RVP*-тело, причём не при нулевых напряжениях $\boldsymbol{T} = 0$, а при текущих значениях $\boldsymbol{T} \neq 0$, как в актуальной конфигурации *EVP*-тела κ (рис. 2).

Дальнейшее описание касается достаточно малых объёмов *EVP*-, *RVP*- и E-тел (рис. 2), которые в соответствии с гипотезой макрофизической определимости будем рассматривать как некоторые M-образцы, находящиеся в каждый момент времени в однородном напряжённо-деформированном состоянии [1].

Если деформационная анизотропия (изменение коэффициентов упругости вследствие пластической деформации [1]) у рассматриваемого *EVP*-тела отсутствует или пренебрежимо мала, то для E-тела можно взять, к

примеру, квадратичный потенциал Мурнагана [4] и прийти к ОС вида

$$\boldsymbol{T}=\frac{2}{\det\boldsymbol{F'}}\boldsymbol{F'}\cdot\frac{\partial f\left(\boldsymbol{C'}\right)}{\partial\boldsymbol{C'}}\cdot\boldsymbol{F'}^{T}=\frac{1}{\sqrt{\det\boldsymbol{B'}}}\left[\frac{\lambda}{2}\left(\mathrm{tr}\boldsymbol{B'}-3\right)\boldsymbol{B'}+\mu\left(\boldsymbol{B'}^{2}-\boldsymbol{B'}\right)\right], \tag{3}$$

где $f\left(\boldsymbol{C'}\right)$ – удельная (на единицу массы) потенциальная энергия деформации; $\boldsymbol{C'}=\boldsymbol{F'}^{T}\cdot\boldsymbol{F'}$, $\boldsymbol{B'}=\boldsymbol{F'}\cdot\boldsymbol{F'}^{T}$ – правая и левая меры обратимой деформации Коши-Грина (аналогичные формулы имеют место для $\boldsymbol{C''}$, $\boldsymbol{B''}$ и $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}$); λ, μ — упругие постоянные Ламе.

Для *RVP*-тела представим тензор напряжений как сумму потенциальной $\boldsymbol{T''}_{\mathrm{pot}}$ и диссипативной $\boldsymbol{T''}_{\mathrm{diss}}$ составляющих. К примеру, взяв для $\boldsymbol{T''}_{\mathrm{pot}}$ неогуков потенциал Трелоара [4], положив тензор $\boldsymbol{T''}_{\mathrm{diss}}$ соосным с тензором скоростей необратимой деформации $\boldsymbol{D''}=0.5\left(\nabla\boldsymbol{v''}+\nabla\boldsymbol{v''}^{T}\right)$, где $\nabla\boldsymbol{v''}=\dot{\boldsymbol{F}}''\cdot\boldsymbol{F''}^{-1}$, и приняв во внимание наложенную внутреннюю связь $\det\boldsymbol{F''}=1$ (или $\mathrm{tr}\boldsymbol{D''}=0$), будем иметь

$$\boldsymbol{T}=-p\boldsymbol{I}+\mathrm{dev}\boldsymbol{T},\quad \mathrm{dev}\boldsymbol{T}=\mathrm{M}\,\mathrm{dev}\boldsymbol{B''}+\mu''\boldsymbol{D''}. \tag{4}$$

Здесь p – неопределённый параметр, имеющий смысл гидродинамического давления; $\boldsymbol{I}$ – единичный тензор; $\mathrm{dev}\boldsymbol{A}$ – девиатор $\boldsymbol{A}$; $\mathrm{M}=\mathrm{const}$ — модуль (трансляционного) упрочнения. Полагая $\mu''=\mu''\left(\|\boldsymbol{D''}\|,q\right)$, где $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{T}\right)}$ – норма тензора $\boldsymbol{A}$, q — параметр упрочнения Одквиста, и используя, к примеру, экспериментальные данные Кларка-Дюве [5], интерполируемые (в приближении малых деформаций) с помощью дробно-рациональной зависимости О.М. Смирнова [6], получим

$$\mu''\left(\|\boldsymbol{D''}\|,q\right)=\frac{\sigma_p\left(\|\boldsymbol{D''}\|,q\right)}{\|\boldsymbol{D''}\|},\ \sigma_p\left(\|\boldsymbol{D''}\|,q\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s\frac{\sigma_0\left(q\right)+K_v\|\boldsymbol{D''}\|^{m_v}}{\sigma_s+K_v\|\boldsymbol{D''}\|^{m_v}}, \tag{5}$$

где $\sigma_0\left(q\right)$, σ_s – статический и максимальный динамический пределы текучести на растяжение; K_v, m_v – материальные константы. Отметим, что в соответствии с (4), (5)

$$\|dev\boldsymbol{T}-\mathrm{M}\,dev\boldsymbol{B''}\|=\sigma_p\left(\|\boldsymbol{D''}\|,q\right),\quad \sigma_0\left(q\right)\leqslant\sigma_p\left(\|\boldsymbol{D''}\|,q\right)<\sigma_s. \tag{6}$$

Положив в (6) $\boldsymbol{D''}=0$, придём к условию пластичности

$$\|\mathrm{dev}\boldsymbol{T}-\mathrm{M}\,\mathrm{dev}\boldsymbol{B''}\|=\sigma_0\left(q\right). \tag{7}$$

Чтобы кинематическое описание M-образцов *EVP*-, *RVP*- и E-тел было однозначным, достаточно дополнить (2) условием (для всех моментов времени)

$$\boldsymbol{R'}=\boldsymbol{I}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{R'}$ – ортогональный тензор из формулы полярного разложения $\boldsymbol{F'} = \boldsymbol{R'} \cdot \boldsymbol{U'} = \boldsymbol{V'} \cdot \boldsymbol{R'}$ (аналогичные формулы имеют место для $\boldsymbol{F''}$, $\boldsymbol{F}$). Благодаря (8) кинематическое описание M-образцов становится однотипным независимо от выбора системы отсчёта (СО). Об этом свидетельствует легко устанавливаемая формула перехода $\boldsymbol{R'}^* = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R'} \cdot \boldsymbol{Q}^T$, где $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(t)$ – ортогональный тензор, характеризующий поворот одной СО (без звёздочки) относительно другой СО (со звёздочкой). Наряду с этим, из (8) совместно с (2), (3) следует, что при $\boldsymbol{T} = 0$ выполняется равенство $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F''}$, обязательное для совпадения конфигураций κ, κ'' при нулевом значении тензора напряжений (рис. 2).

На основании (2)-(8)можно установить (по аналогии с [7]), что деформирование *EVP*-тела будет описываться системой ОС, включающей в себя:

а) определяющее соотношение для тензора напряжений (σ – среднее напряжение)

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \sigma \boldsymbol{I} + \operatorname{dev}\boldsymbol{T},\ \sigma = \dfrac{1}{3\sqrt{\det \boldsymbol{B'}}} \left[\dfrac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}\boldsymbol{B'})^2 + \mu \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{B'}^2\right) - \dfrac{3}{2}\left(\lambda + \dfrac{2}{3}\mu\right) \operatorname{tr}\boldsymbol{B'} \right], \\ \operatorname{dev}\boldsymbol{T} = \dfrac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{B'}}} \left\{ \left[\dfrac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}\boldsymbol{B'} - 3) - \mu \right] \operatorname{dev}\boldsymbol{B'} + \mu \operatorname{dev}\boldsymbol{B'}^2 \right\}, \end{cases} \tag{9}$$

б) определяющее соотношение для тензора скоростей необратимой деформации

$$\begin{cases} \boldsymbol{D''} = \left\| \boldsymbol{D''} \right\| \dfrac{\operatorname{dev}(\boldsymbol{T} - \mathrm{M}\boldsymbol{B''})}{\left\| \operatorname{dev}(\boldsymbol{T} - \mathrm{M}\boldsymbol{B''}) \right\|}, \\ \left\| \boldsymbol{D''} \right\| = H \left\{ \left\| \operatorname{dev}\left(\boldsymbol{T} - \mathrm{M}\boldsymbol{B''}\right) \right\| - \sqrt{\dfrac{2}{3}} \sigma_0(q) \right\} H \left\{ \operatorname{tr}\left[\operatorname{dev}\left(\boldsymbol{T} - \mathrm{M}\boldsymbol{B''}\right) \cdot \boldsymbol{D} \right] \right\} \cdot \\ \qquad \cdot \left[\dfrac{\sigma_s}{K_v} \dfrac{\left\| \operatorname{dev}(\boldsymbol{T} - \mathrm{M}\boldsymbol{B''}) \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0(q)}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s - \left\| \operatorname{dev}(\boldsymbol{T} - \mathrm{M}\boldsymbol{B''}) \right\|} \right]^{\frac{1}{m_v}}, \end{cases} \tag{10}$$

имеющее смысл в силу (6),

в) чисто кинематические соотношения

$$\dot{\boldsymbol{B}}' = \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B'} + \boldsymbol{B'} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{V'}^{-1} \cdot \boldsymbol{D''} \cdot \boldsymbol{V'}^{-1}, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{F'} = \boldsymbol{V'} = \boldsymbol{B'}^{-1/2},\ \boldsymbol{R''} = \boldsymbol{V'}^{-1} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{U''}^{-1},\ \boldsymbol{C''} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{B'}^{-1} \cdot \boldsymbol{F}, \\ \boldsymbol{U''} = \boldsymbol{C''}^{-1/2},\ \boldsymbol{F''} = \boldsymbol{R''} \cdot \boldsymbol{U''}, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B''} = \boldsymbol{V'}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{V'}^{-1},\ \nabla \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1},\ \boldsymbol{D} = 0.5 \left(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^{T} \right),\ \dot{q} = \| \boldsymbol{D''} \| . \tag{13}$$

Здесь $H(x)$ – функция Хевисайда: $H(x > 0) = 1$, $H(x \leqslant 0) = 0$. В первом "переключателе" режима в (10) аргумент функции $H(x)$ основан на условии пластичности (7); во втором "переключателе" отражено требование отрицательной мощности диссипативной (вязкопластической) составляющей тензора напряжений $\boldsymbol{T''}_{\text{diss}}$ при протекании режима необратимого деформирования, когда $\boldsymbol{D''} \neq 0$ (или $\dot{\boldsymbol{U}}'' \neq 0$).

В приближении малых деформаций система ОС (9)-(13) соответствует теории вязкопластичности [5], содержащей, как частный случай, многие известные теории.

Рассмотренный пример иллюстрирует применение одного из возможных общих подходов к распространению известных ОС инфинитезимальной вязкоупругопластичности на случай конечных деформаций и конечных скоростей их изменения.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. *Новожилов В.В.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
3. *Lee E.H.* Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. // J. App. Mech. 1969. V.1. P.1–6.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
6. *Васин Р.А.* Введение в механику сверхпластичности. Ч. 1. Уфа: Гилем, 1998. 280 с.
7. *Корнеев С.А.* Определяющие соотношения вязкоупругопластических сред при малых деформациях. // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 3. С.106–122.

ОБОБЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ОСЕВОЙ СИЛОЙ И ДАВЛЕНИЕМ И ИХ АНАЛИЗ

Е. З. Король

НИИ Механики МГУ имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

ez_korol@mail.ru

Даётся обобщённая постановка задач определения собственных осесимметрических форм цилиндрической оболочки при совместном действии осевого усилия и радиального давления. Постановка задачи помимо линейного параметрического дифференциального уравнения четвёртого порядка (ЛОДУ) и линейных однородных краевых условий дифференциального типа (КУ) дополнительно включает: уравнение траектории "нагружения" в пространстве коэффициентов "жёсткости" ЛОДУ, как параметрически изменяемых функций; структурно–комбинаторный анализ с указанием на каждом участке траектории соответствующих видов модуляции (осцилляционных форм); соотношения связности двух структурных (осцилляционных) параметров и коэффициентов "жёсткости"; семейство изопараметрических линий раздела (ЛРВМ) видов модуляции, линий уровня квадратов частот (ЛУЧ) и им подобных в пространстве коэффициентов ЛОДУ; указания критических состояний оболочки (смена числа или вида осцилляции, изменение сдвига фазы или амплитуды модуляции и т.п.). Параметры форм определяются по точкам пересечения траектории нагружения и изопараметрических линий. Дан перечень характерных траекторий. В частности, для классической траектории Лоренца–Тимошенко установлено, что изменение параметров осцилляции происходит при нагрузках более низких (0.2 - 0.3). Выявлено новое свойство собственных функций — изогональность, заключающееся в том, что скалярное произведение их постоянно и отлично от нуля.

Обобщённая постановка. В качестве одного из объектов многопараметрических механических систем рассматриваются линейно упругие (по Гуку) балки, стержни и цилиндрические оболочки при малых (по Коши) деформациях. Эволюция форм таких систем при комбинированном параметрическом нагружении представляется *уравнением состояния* (ЛОДУ

Эйлерова типа) и *краевыми условиями* ($КУ$)

$$E^{(4)}\{w,\vec{\lambda},\xi\} \equiv [D^4+a_2(\vec{\lambda})D^2+a_0(\vec{\lambda})]\{w\} \equiv (D^2+\mu_1^2(\vec{\lambda}))(D^2+\mu_2^2(\vec{\lambda}))\{w\} = f(\vec{\lambda}),$$

$$L_i^{(3)}\{w,\xi\}\Big|_{\xi=0,1} = [b_{0i}w + b_{1i}D + b_{2i}D^2 + b_{3i}D^3]\{w\}\Big|_{\xi=0,1} = 0, \quad i = 1,2 \tag{1}$$

где $D^2\{w\} = d^2w/d\xi^2$ — дифференциальный оператор, определённый на $\xi = x/L \in [0,1]$, $a_2(\vec{\lambda})$, $a_0(\vec{\lambda})$ — *коэффициенты "жёсткости"*, $\vec{\lambda} = \{\lambda_1 = N, \lambda_2 = p, \lambda_3 = M, \lambda_4 = \rho\omega^2, ...\}$ — нагрузка (осевое усилие, радиальное давление, момент кручения, круговая частота колебаний и т.п.), $w(\xi,\vec{\lambda}) = \tilde{w}(\xi,\vec{\lambda})/h$ — отклонение срединной линии образующей, b_{ki}, $k = \overline{0,3}$ — коэффициенты краевых условий. *Определяющее* биквадратное *характеристическое уравнение (ОХУ)*

$$\Phi_\mu(\mu^2(\vec{\lambda})) \equiv \mu^4 + a_2(\vec{\lambda})\mu^2 + a_0(\vec{\lambda}) = 0,$$
$$\mu_{1,2}(\vec{\lambda}) = \pm\sqrt{-a_2(\vec{\lambda})/2 \pm \sqrt{(a_2(\vec{\lambda})/2)^2 - a_0(\vec{\lambda})}} \tag{2}$$

имеет корнями характеристические показатели: две пары комплексно-сопряжённых $\mu_{1-4} = \pm\alpha \pm i\cdot\beta$; две пары мнимых $\mu_{1-4} = \pm i\cdot\beta_{1,2}$; пару мнимых $\mu_{1-2} = \pm i\cdot\beta$ и пару действительных $\mu_{3-4} = \pm\nu$ и две пары действительных $\mu_{1-4} = \pm\nu_{1,2}$. Из них первые три содержат осцилляционные — гармонические $\beta(\vec{\lambda})$ и неосцилляционные – гиперболические $\alpha(\vec{\lambda})$ и $\nu(\vec{\lambda})$ структурные параметры, как функции нагрузки $\vec{\lambda}$. В соответствии с этим на плоскости коэффициентов "жёсткости" ($a_2 \sim a_0$) существуют две разделительные линии – *линии раздела видов модуляции (ЛРВМ)*: *парабола* ($\Gamma_{K-Z,E}$: $\bar{a}_0 = \bar{a}_2^2/4$) и *прямая* ($\Gamma_{T-Z,E}$: $\bar{\bar{a}} = 0_0$). Эти линии ограничивают четыре области К – *разбиения* различных видов модуляции. Различаются три вида осциллирующих *двухпараметрических модуляции*: *мультипликативная гиперболически - гармоническая одночастотная амплитудно-фазовая неоднородная* $K_{\alpha\beta} = H_\alpha \cap G_\beta$ в области Ω_K : $a_0(\vec{\lambda}) > \bar{a}_0 = \bar{a}_2^2/4$, $-2\sqrt{\bar{a}_0} < a_2 < \bar{a}_2 = 2\sqrt{\bar{a}_0}$; *аддитивная бигармоническая двухчастотная* амплитудно-*фазовая однородная* $Z_{\beta\beta} = G_{\beta_1} \cup G_{\beta_2}$ в клиновидной области Ω_Z : $0 < a_0(\vec{\lambda}) < \bar{a}_0$, $2\sqrt{\bar{a}_0} < a_2(\vec{\lambda})$; *аддитивная гармонически-гиперболическая амплитудно-фазовая*

однородная $T_{\beta\nu} = G_\beta \cup H_\nu$ в области$\Omega_T : \ 0 > a_0(\vec{\lambda}),\ a_2(\vec{\lambda}) \in R$ вида

$$w_K(\xi,\alpha,\beta) = A(\xi,\alpha,\beta)\cos(\beta\xi - \omega(\alpha,\beta,\xi),$$
$$w_Z(\xi,\beta_1,\beta_2) = \sum_{n=1}^{2} A_n(\beta_n)\cos(\beta_n\xi - \omega(\beta_n)) \qquad (3)$$
$$w_T(\xi,\beta,\nu) = A_1(\beta)\cos(\beta\xi - \omega_1(\beta)) + A_2(\nu)ch(\nu\xi - \omega_2(\nu))$$

На линиях *ЛРВМ* (*параболе* $(\Gamma_{K-Z,E} : \ \bar{a}_0 = \bar{a}_2^2/4)$ и *прямой* $(\Gamma_{T-Z,E} : \ \bar{\bar{a}} = 0_0)$) реализуются *однопараметрические одночастотные модуляции: мультипликативная полиномиально-гармоническая неоднородная* $K_{0\beta} = Z_{\beta\beta} = (H_0 = P_{0,1} \cap G_\beta)$ при $(a_0(\vec{\lambda}), a_2(\vec{\lambda})) \in \Gamma_{K-Z,E}$ и *аддитивная гармонически-полиномиальная однородная* $Z_{\beta 0} = T_{\beta 0} = (G_\beta \cup H_0 = P_{0,1})$ при $(a_0(\vec{\lambda}), a_2(\vec{\lambda})) \in \Gamma_{T-Z,E}$. Линии *ЛРВМ относятся к критическим линиям первого рода.* Положение точек линий ЛВРМ *не зависит от краевых условий*. Точки пересечения траектории нагружения и линий ЛРВМ относятся к *критическим точкам первого рода*. Для каждого вида модуляции имеем *соотношения связности* структурных параметров $(\alpha,\beta),(\beta_1,\beta_2),(\beta,\nu)$ и коэффициентов "жёсткости" $a_0(\vec{\lambda}), a_2(\vec{\lambda})$

$$K_{\alpha\beta} : \quad a_2(\vec{\lambda}) = 2(\beta^2(\vec{\lambda}) - \alpha^2(\vec{\lambda})),\ a_)(\vec{\lambda}) = (\alpha^2(\vec{\lambda}) + \beta^2(\vec{\lambda}))^2,$$
$$Z_{\beta\beta} : \quad a_2(\vec{\lambda}) = \beta_1^2(\vec{\lambda}) + \beta_2^2(\vec{\lambda}),\ a_0(\vec{\lambda}) = \beta_1^2(\vec{\lambda})\beta_2^2(\vec{\lambda}),$$
$$T_{\beta\nu} : \quad a_2(\vec{\lambda}) = \beta^2(\lambda) - \nu^2(\vec{\lambda}),\ a_0(\vec{\lambda}) = -\beta^2(\bar{\lambda})\nu^2(\vec{\lambda}). \qquad (4)$$

В плоскости $(a_2 \sim a_0)$ помимо линий ЛРВМ имеются *семейства характеристических изопараметрических линий (ЛУП)*, на которых какой-либо структурный параметр сохраняет постоянное значение, например, *линии уровня квадрата частоты (ЛУЧ) волнообразования* когда $\beta^2 = C = \text{const}$ — линии заданные соотношениями (4):

$$K_{\alpha\beta} : \quad \tilde{a}_0 = (2C - \tilde{a}_2/2)^2, \quad Z_{\beta\beta} \cup T_{\beta\nu} : \quad \tilde{a}_0 = C(C - \tilde{a}_2). \qquad (5)$$

Линии ЛУЧ представляют собой *семейства Y- образных кривых*, состоящих из левых непересекающихся между собой ветвей парабол, подобных ЛРВМ со смещёнными вершинами на величину $4C = 4\beta^2$, и пересекающихся между собой в области Ω_Z прямых, касательных к параболе ЛРВМ с угловым коэффициентом равным отсекаемому от оси отрезку $a_{20} = C = \beta^2$. Линии ЛУП различаются по какому-либо выбранному параметру (частоте волнообразования, по типу осцилляций — чётности или нечётности сдвига фазы, по количеству осцилляций — по смене числа осцилляций

и т.п.). Линии ЛУП относятся к *критическим линиям второго рода*, а точки пересечения траектории нагружения с ними — к *критическим точкам второго рода первого порядка*, в которых совпадает один параметр осцилляции. Точки пересечения траектории нагружения с изотермическими линиями ЛУЧ в точках пересечения их прямых участков (точках бинарности — бифуркации), где совпадают два параметра осцилляции — обе частоты, относятся к критическим точкам второго рода второго порядка. Положение линий ЛУП и ЛУЧ, и критических точек второго рода на плоскости $(a_2 \sim a_0)$ *определяется краевыми условиями* из полной детерминантно-краевой системы определяющих уравнений (ДКСУ). Для этого используется выражение решения $w(\xi, \vec{\lambda}, C_i, f) = W\{f(\vec{\lambda}), \xi\} + \sum_{n=1}^{4} C_n \vec{w}_n(\xi, \vec{\lambda}, \mu_n)$ через четыре фундаментальных $\bar{w}_n(\xi, \vec{\lambda})$ решения и четыре произвольных постоянных C_n. Система *фундаментальных решений* (*СФР*) обладает свойством *предельного перехода по параметрам* ($\alpha \to 0, \beta_2 \to \beta_2, \beta_2 \to 0$ и $\nu \to 0$)

$$\bar{w}_1(\xi, \mu_n) = \sum_{k=1}^{4} \exp\{\mu_k \xi\}, \quad \bar{w}_2(\xi, \mu_n) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\exp\{\mu_k \xi\}}{\mu_k - \bar{\mu}_k},$$

$$\bar{w}_3(\xi, \mu_n) = \sum_{k=1, k\neq l}^{4} \frac{\exp\{\mu_k \xi\}}{(\mu_k - \mu_l)(\mu_k - \bar{\mu}_l)}, \tag{6}$$

$$\bar{w}_4(\xi, \mu_n) = \sum_{k=1, k\neq l}^{4} \frac{\exp\{\mu_k \xi\}}{(\mu_k - \bar{\mu}_k)(\mu_k - \mu_l)(\mu_k - \bar{\mu}_l)}$$

Определяющая система краевых уравнений, соответственно (1) и (6)

$$\sum_{k=1}^{4} C_k \; L_i^{(3)}\{\bar{w}_k(\xi, \mu_n(\vec{\lambda}))\}\Big|_{\xi=0,1} = L_i^{(3)}\{W(\xi, \vec{\lambda})\}\Big|_{\xi=0,1}, \tag{7}$$

имеет неограниченное решение при условии, что *детерминантно-краевая функция (ДКФ), содержащая* два структурных параметра, обращается в нуль

$$D\{\mu_n\} = \left\| L_i^{(3)}\{\bar{w}_k(\xi, \mu_n)\}\Big|_{\xi=0,1} \right\| = 0.$$

Уравнения *траектории нагружения (ТН)* $\Phi_T(a_2(\vec{\lambda}), a_0(\vec{\lambda})) = 0$ с *соотношениями связности* и *детерминантно-краевого уравнения (ДКУ)* (8) дают *полную замкнутую* систему или полную систему *детерминантно-краевых уравнений эволюции (ДКУЭ)* собственных форм

$$D\{\mu_n\} = D_1(\mu) D_2(\mu) = \left\| L_i^{(3)}\{\bar{w}_k(\xi, \mu_n)\}\Big|_{\xi=0,1} \right\| = 0,$$

$$\Phi_T(a_2\{\vec{\lambda}\}, a_0(\vec{\lambda})) = 0, \tag{8}$$

$$a_2(\vec{\lambda})=\begin{cases} 2(\beta^2(\vec{\lambda})-\alpha^2(\vec{\lambda})) \\ \beta_1^2(\vec{\lambda})+\beta_2^2(\vec{\lambda}) \\ \beta^2(\vec{\lambda})-\nu^2(\vec{\lambda}) \end{cases}, \quad a_0(\vec{\lambda})=\begin{cases} (\alpha^2(\vec{\lambda})+\beta^2(\vec{\lambda}))^2 & a_2,\, a_0 \in K_{\alpha\beta} \\ \beta_1^2(\vec{\lambda})\beta_2^2(\vec{\lambda}) & \text{при} \quad a_2,\, a_0 \in Z_{\beta\beta} \\ -\beta^2(\vec{\lambda})\nu^2(\vec{\lambda}) & a_2,\, a_0 \in T_{\beta\nu} \end{cases}$$

Трансцендентная функция ДКФ *четвёртого порядка* обладает свойством непрерывности по параметрам и *имеет две ветви*, одна из которых соответствует *чётным*, а другая — *нечётным* собственным формам. При заданной траектория нагружения вид модуляции определён однозначно, а при не заданной траектории *осуществляется перебор* или *структурно-комбинаторный анализ*. Из **характерных траекторий** нагружения выделяются: *траектория Эйлера (E)* ($\tilde{a}_0^T = 0, a_2(\vec{\lambda}) > 0$) в задаче о гармонически-полиномиальных формах стержня; *траектория Лоренца–Тимошенко (LT)* ($a_0 = \text{const}, a_2(\vec{\lambda}) > 0$) в задаче о гиперболически-гармонических и бигармонических осесимметрических формах цилиндрической оболочки; *траектория Бицено–Граммеля (BG)* ($a_0(\vec{\lambda}) = -a_2^2(\vec{\lambda})/4, a_2(\vec{\lambda})$) в задаче о гармонически-гиперболических формах стержня на упругом основании при сжатии; *траектория Шмидта–Шейфера (SC)* ($0 < a_0(\vec{\lambda}) < \bar{a}_0 = \bar{a}_2^2/4$) в задаче о формах стержня при сжатии и кручении и *траектория изогональности (KEZ)* ($0 < a_0(\vec{\lambda}) < \bar{a}_0 = \bar{a}_2^2/4$) в задачах о бигармонических изогональных (изоклинных) формах цилиндрических оболочек при совместном действии осевой силы и радиального давления.

Результаты анализа эволюции собственных форм. При нагружении по **траектории *Эйлера*** (E) для жёстко защемлённого по краям стержня при сжатии выделяются *нечётные* (1.719995 и 6.84764) и *чётные* (8.968 и 15.405) первые две *формы*, которые обладают свойством *изогональности*. Анализ проводился при следующих значениях коэффициентов "жёсткости": $a_2(\vec{\lambda}) = 12(L/h)^2(h/b)\lambda_1 = \beta^2,\ \lambda_1 = \sigma/E,\ \sigma = N/h$ и $a_0(\vec{\lambda}) = 0$ для ДКФ вида

$$D_{Z=T}(\beta) = tg(\beta/2)(tg(\beta/2) - \beta/2) = 0 \tag{9}$$

Для цилиндрической оболочки с жёстко защемлёнными торцами при нагружении по **траектории *Лоренца–Тимошенко*** *(LT)* в области $K_{\alpha\beta}$ траектория пересекает линию смены числа осцилляций, линию нулевого и $\pi/2$-ого сдвига фазы осцилляции, достигает ЛРВМ и переходит в область $Z_{\beta\beta}$ где пересекает линии ЛУЧ последовательно второго (чётные и нечётные) и первого порядка (высших, а затем низших частот), а в промежутках между ними формы хаотичны (с биением). При анализе принимались следующие значения в области Ω_K $a_2(\vec{\lambda}) = 12(1-\mu_{12}\mu_{21})(L/R)^2(R/h)^2\lambda_1,\ \lambda_1 =$

$= \sigma/E_1,\ \sigma = N/h$, и $a_2(\lambda_1) = 2(\beta^2(\lambda_1) - \alpha^2(\lambda_1))$ при этом и $a_0 = 12(1 - \mu_{12}\mu_{21})(L/R)^4(R/h)^2 = \text{const} = 10^5$ при $a_0(\lambda_1) = (\alpha^2(\lambda_1) + \beta^2(\lambda_1))^2$ и в области Ω_Z при $a_2(\lambda_1) = \beta_1^2(\lambda_1) + \beta_2^2(\lambda_1))$ и $a_0(\lambda_1) = \beta_1^2(\lambda_1)\beta_2^2(\lambda_1)$, а ДКФ имеет вид

$$D_Z(\mu) = \left(\frac{2}{\beta_1} tg(\frac{\beta_1}{2}) - \frac{2}{\beta_2} tg(\frac{\beta_2}{2})\right)\left(\frac{\beta_1}{2} tg(\frac{\beta_1}{2}) - \frac{\beta_2}{2} tg(\frac{\beta_2}{2})\right) = 0 \quad (10)$$

В области гиперболически-гармонической в диапазоне частот ($\beta_{\min} \leqslant \beta \leqslant \beta_{\max}$) траектория пересекает две линии ЛУЧ (чётную и нечётную) и линию ЛУЧ смены числа осцилляций при нагрузках, составляющих соответственно 0.2, 0.6 и 0.3 от критической силы Лоренца–Тимошенко (что более соответствует экспериментальным значениям). При нагружении балки **по траектории** *Бицено–Граммеля (BG)* с коэффициентом "жёсткости" $a_2(\lambda_1) = 12(L/h)^2(h/b)\lambda_1 = \beta^2(\lambda_1, \lambda_2) - \nu^2(\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 = \sigma/E$ связанными квадратичной $\lambda_2 = 3(h/b)\lambda_1^2$ зависимостью с коэффициентом $a_0(\lambda_2) = 12(L/h)^4(h/b)\lambda_2 = -\beta^2(\lambda_1, \lambda_2)\nu^2(\lambda_1, \lambda_2)$ имеем ДКФ вида, подобного выше приведенного для бигармонической модуляции

$$D_T(\mu) = (\beta/2\ tg(\beta/2) + \nu/2\ th(\nu/2))\ (2/\beta\ \ tg(\beta/2) - 2/\nu\ th(\nu/2) = 0.$$

Аналогичные соотношения справедливы для **траектории** *Шмидта–Шейфера (SC)* для стержня с жёстко защемлёнными краями при сжатии и кручении где коэффициенты $a_2(\lambda_1, \lambda_2) = 24(L/h)^2(h/b)\lambda_1 + 12(L/h)^4(h/b)^2\lambda_2 = \beta_1^2(\lambda_1, \lambda_2) + \beta_1^2(\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 = \sigma/E,\ \lambda_2 = \tau/G$ и $a_0(\lambda_1) = \beta_1^2(\lambda_1, \lambda_2)\beta_2^2(\lambda_1, \lambda_2)$ связаны $a_0(\lambda_1, \lambda_2) = (a_2(\lambda_1, \lambda_2)/2 - 6(L/h)^4(h/b)^2\lambda_2)^2$ соотношением квадратичной параболы, подобной ЛРВМ, со смещённой вершиной. При нагружении по **траектории изогональности** *(KEZ)* — ломаной линии ЛУЧ $a_0(\lambda) = C(a_2(\lambda) - C)$ — собственные числа определены по ДКФ (10), а соответствующие им собственные функции обладают **свойством изогональности.** При этом скалярное произведение собственных функций **чётных** или **нечётных**, т.е. *равно единице* при одинаковых индексах и *отлично от нуля и единицы* при неравных.

$$J(w_n, w_m) = \int w_n(\xi, \vec{\lambda}) w_m(\xi, \vec{\lambda}) d\xi = \begin{cases} 1 & при \quad n = m \\ k \neq 0, 1 & при \quad n \neq m \end{cases} \quad (11)$$

Перекрестно четные и нечетные собственные функции ортогональны.

Выводы. Анализ устойчивости и колебаний многопараметрических механических систем (цилиндрических оболочек, пластин и балок) при действии комбинированной нагрузки сводится к анализу собственных форм. Разрешающая система уравнений на собственные значения для систем, описываемых линейными обыкновенными дифференциальными

уравнениями четвёртого порядка типа нелинейного краевого эффекта, учитывающих эффект поперечной деформации Пуассона, содержит два структурных параметра (составляющих характеристических комплексно-сопряжённых и действительных показателей), не замкнута и её решения представляются в виде “кривых собственных значений”. Поэтому при описании особенностей эволюции собственных форм, отличных от чисто гармонических, может быть эффективно использована изложенная выше расширенная (обобщённая) постановка соответствующих краевых многопараметрических задач. Анализ, в частности, показал, что в области гиперболически-гармонической, когда траектория пересекает две линии ЛУЧ (чётную и нечётную) и линию ЛУЧ смены числа осцилляций, критические нагрузки составляют соответственно 0.2, 0.6 и 0.3 от силы Лоренца–Тимошенко (что более соответствует экспериментальным значениям). При этом выявлены новые специфические (отличительные) свойства собственных функций: изогональность чётных и нечётных по отдельности и ортогональность перекрестных (совместно чётных и нечётных).

Литература

1. *Король Е.З.* Эволюция гиперболически-гармонических модулированных осесимметрических формм цилиндрической оболочки при комбинированной траектории нагружения и критические характеристические линии // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2010. №1. С.93–101.
2. *Король Е.З.* Операторные методы интегрирования эйлеровых и бесселевых уравнений $(\boldsymbol{M} + 2\boldsymbol{N})$-го порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика. Механика. 2010. №4. С.31–40.

МЕТОД А.А. ИЛЬЮШИНА ДЛЯ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ИЗ МАТЕРИАЛОВ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ

А. С. Кравчук

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

1. Введение

В монографии [1] А.А. Ильюшин предложил метод решения краевых задач механики деформируемого твёрдого тела для случая, когда определяющие соотношения содержат функционалы, т.е. имеет место зависимость текущего состояния от истории нагружения конструкции. Экспериментальное построение такого рода определяющих соотношений является очень сложной задачей, поскольку здесь речь идет об определении функций от функций и, стало быть, количество экспериментов бесконечно. Задача упрощается тогда, когда имеется возможность применить обоснованные аппроксимации функционалов. Метод А.А. Ильюшина базируется на сформулированном им постулате изотропии, из которого и вытекают такого рода аппроксимации.

В настоящей работе дано описание метода А.А. Ильюшина и его сопоставление с современными методами решения некоторых сложных задач механики деформируемого твердого тела. Отметим, что изначально метод был предложен А.А. Ильюшиным для решения задач теории пластичности при сложном нагружении. Однако, как оказалось, данный метод применим к любым материалам, определяющие уравнения для которых содержат функционалы, например, для вязко-упругих тел. Кроме того, сфера его применимости включает ряд новых задач, в частности, обратные задачи (задачи идентификации).

2. Описание метода

Рассмотрим сначала наиболее простой вариант метода, описание которого дано в [1]; А.А. Ильюшин назвал этот вариант методом СН-ЭВМ (машина на сложное нагружение в сочетании с компьютерным моделированием). Впервые метод был реализован в работе [2]. Основные гипотезы таковы.

1) Свойства материала не зависят от температуры T и давления p и определяются только связью девиаторных составляющих тензоров напря-

жений и деформаций. Девиатор напряжений $\hat{\sigma}^D$ определяется по формуле:

$$\hat{\sigma}^D = \hat{\sigma} + p\hat{\delta}, \quad p = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii} \equiv -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \tag{1}$$

где $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений, $\hat{\delta}$ — единичный тензор (тождественный оператор); формула для девиатора деформаций $\hat{\varepsilon}^D$ такова:

$$\hat{\varepsilon}^D = \hat{\varepsilon} - e\hat{\delta}, \quad e = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii} \tag{2}$$

$\hat{\varepsilon}$ — тензор деформаций; нижний индекс означает компоненты тензора в декартовой системе отсчёта. Оба девиатора имеют по 5 независимых компонент. Их можно преобразовать в векторы в пятимерных евклидовых пространствах — соответствующие формулы получены в [1] в предположении о том, что скалярное произведение в этих пространствах равно свёртке симметричных тензоров второго ранга. Ниже векторное пространство напряжений обозначается через $\vec{S}$, пространство деформаций — через $\vec{E}$.

2) Процесс изменения деформаций в некоторой фиксированной точке материала при введённой геометрической интерпретации можно описать при помощи кривой (траектории) $\Gamma_E \in \vec{E}$, процесс изменения напряжений — кривой $\Gamma_S \in \vec{S}$. Тогда вторую основную гипотезу (фактически это закон, открытый А.А. Ильюшиным) можно сформулировать следующим образом: функционал $\vec{F}$ в определяющем соотношении

$$\vec{\sigma} = \vec{F}\{\vec{\varepsilon}\}, \quad \vec{\sigma} \in \vec{S}, \quad \vec{\varepsilon} \in \vec{E} \tag{3}$$

не зависит от преобразований вращения и отражения траекторий в соответствующих пространствах (преобразования должны быть одинаковыми); фигурные скобки означают, что вектор напряжений в данной точке траектории $\vec{\sigma} \in \Gamma_S$ зависит от всего предшествующего участка траектории Γ_E. Данная гипотеза получила название постулата изотропии и была проверена во многих экспериментах, начиная с экспериментов В.С.Ленского.

Из постулата изотропии следует вывод о том, что для склерономных материалов, во-первых, функционал $\vec{F}$ зависит только от кривизн траектории Γ_E. Во-вторых, если в каждой точке траектории деформирования вектор $\vec{F}$ разложить по базису (вообще говоря, косоугольному), в качестве которого можно выбрать 5 векторов $\vec{\varepsilon}$, $\frac{\partial\vec{\varepsilon}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\vec{\varepsilon}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^3\vec{\varepsilon}}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^4\vec{\varepsilon}}{\partial t^4}$:

$$\vec{\sigma} = \sum_{n=0}^{4} A_n \frac{\partial^n\vec{\varepsilon}}{\partial t^n} \tag{4}$$

то коэффициенты разложения A_n будут зависеть только от кривизн χ^m траектории Γ_E, и только эти зависимости подлежат экспериментальному определению. Скаляр t в формуле (4), по которому ведётся дифференцирование вдоль траектории деформирования, — это длина дуги кривой Γ_E:

$$t = \int_0^t d\tilde{t}, \quad d\tilde{t} = \left[d\vec{\varepsilon} \cdot d\vec{\varepsilon}\right]^{1/2} \tag{5}$$

$d\vec{\varepsilon}$ — приращение вектора $\vec{\varepsilon}$ при бесконечно-малом смещении вдоль кривой Γ_E. Таким образом, по построению $\chi^m = \chi^m(t)$. Дальнейшее упрощение задачи основано на преобразовании задачи определения пяти функционалов к задаче определения конечного числа функций, не являющихся универсальными, а отвечающими только данной истории нагружения данного элемента конструкции. Идея, также предложенная А.А. Ильюшиным и использованная впоследствии в методе конечных элементов, заключается в разбиении области Ω на конечное число подобластей $\Delta\Omega_k$ (“конечных элементов” в современной терминологии), в каждой из которых реализуется (приближенно) только одна траектория Γ_E^k и соответствующая ей траектория Γ_S^k, вид которых постепенно уточняется на основе экспериментов.

3. Метод последовательных приближений для нахождения траекторий в подобластях

Заключительная часть метода СН-ЭВМ состоит в реализации метода последовательных приближений для нахождения истинных траекторий деформирования и нагружения с применением экспериментов и компьютера, соответствующих заданной истории нагружения конструкции. Метод последовательных приближений содержит следующие этапы.

1) Выбирается нулевая аппроксимация $A_n = A_n^{(0)}(\chi^m(t))$ для коэффициентов A_n в разложении (4), такая, что эти коэффициенты оказываются функциями параметра нагружения t. В разных подобластях $\Delta\Omega_k$ эти функции, вообще говоря, различны, хотя в первом приближении они могут быть одинаковыми, например, определяться законом Гука.

2) Решается краевая задача в области Ω для заданных граничных условий с определяющим соотношением

$$\vec{\sigma} = \sum_{n=0}^{4} A_n^{(0)} \frac{\partial^n \vec{\varepsilon}}{\partial t^n} \tag{6}$$

Фактически требуется решить множество краевых задач для всего диапазона изменения параметра $t \in [0,\ T]$. Подчеркнём, что для реономных

материалов параметр нагружения t не совпадает, вообще говоря, с натуральным параметром кривой деформирования, определённым выше по формуле (5).

3) Строятся кривые деформирования $\Gamma_E^{(0,th)}(t)$ и нагружения $\Gamma_S^{(0,th)}(t)$ в нулевом приближении.

4) Предположим, что используется экспериментальное устройство силового типа. Воспроизведём на этом устройстве кривые $\Gamma_S^{(0,th)}(t)$ и измерим соответствующие им траектории изменения деформаций $\Gamma_E^{(0,\exp)}(t)$. Напомним, что и кривые деформирования и кривые изменения напряжений в разных областях $\Delta\Omega_k$ в общем случае различны, так что $\Gamma_S^{(0,th)}(t) = \Gamma_S^{(0,th),k}$, $\Gamma_E^{(0,\exp)}(t) = \Gamma_E^{(0,\exp),k}$. Имея данную информацию, оценим точность полученного приближенного решения по формуле:

$$err = \sum_k ||\Gamma_E^{(0,\exp),k} - \Gamma_E^{(0,th),k}|| \tag{7}$$

где $||f||$ — норма функции в пространстве $\vec{E}$, например, евклидова.

5) Если погрешность err не превосходит заданной точности, то процесс заканчивается, В противном случае полученные из эксперимента векторы деформаций и задаваемые векторы напряжений используются для построения аппроксимаций коэффициентов $A_n = A_n^{(1)}$ в первом приближении в каждой используемой в расчетах точке нагружения t. Этот этап можно реализовать различными способами. Самый простой вариант – применить стандартный метод наименьших квадратов. А.А. Ильюшиным указан метод, в котором используется ранее полученная информация о теории, пригодной для данного класса траекторий и данного типа материалов. Например, при резких изменениях траекторий может быть применена теория двузвенных ломаных (Ленский В.С., Васин Р.А., Дао Зуй Бик), для плавно меняющихся траекторий можно использовать теорию малых кривизн (Малый В.И.) и т.д. [3]. В такого рода теориях зависимость коэффициентов A_n от параметров траектории известна и эту зависимость можно применить для нахождения $A_n = A_n^{(1)}$. Из приведённого выше описания видно, что в приведённом алгоритме пространства напряжений и деформаций можно менять ролями.

Впервые алгоритм 1) – 5) был реализован для двумерных траекторий [2]. В этом случае соотношение (4) преобразуется к виду:

$$d\vec{\varepsilon} = A d\vec{\sigma} + B \frac{\vec{\sigma} \cdot d\vec{\sigma}}{|\vec{\sigma}|^2} \vec{\sigma}, \quad A = A_0,\ B = A_1 \tag{8}$$

A, B — функционалы, зависящие от истории нагружения.

Сходимость описанного выше процесса была изучена численно для двузвенных траекторий деформирования — эксперимент был заменён вы-

числениями по уравнениям указанной теории. Был рассмотрен вариант, для которого удалось построить точное решение. Как оказалось, вторая итерация приводит к решению, практически совпадающему с точным. Впоследствии этот результат был подтверждён с использованием реальных экспериментов на трубчатых образцах переменной толщины из мягкой стали.

Отметим, что реализация метода СН-ЭВМ в полном объёме является весьма трудоемкой задачей. Поэтому работ на эту тему очень мало, и выполняются они только тогда, когда нет никакой ясности с определяющими соотношениями, кроме самых общих соображений типа постулата изотропии.

4. Сравнение с некоторыми современными методами идентификации

Термин “идентификация” в современных работах означает задачу нахождения физических свойств и/или геометрических параметров исследуемой конструкции, природного или биологического объекта. Частным случаем данной общей задачи является задача нахождения структуры и параметров определяющего соотношения, на решение которой и направлен метод А.А. Ильюшина СН-ЭВМ. Общий подход к решению обратных задач был развит, как известно, А.Н. Тихоновым [5]. Ниже приведены результаты численного исследования сходимости итерационного алгоритма решения нестационарной обратной задачи теплопроводности.

Обозначим температуру через $T = T(\vec{x}, t)$, где $\vec{x}$ — пространственная переменная, t — время. Нестационарное уравнение теплопроводности для температуры с зависящим от координат коэффициентом теплопроводности $\gamma = \gamma(\vec{x})$ имеет вид:

$$k \frac{dT(\vec{x}, t)}{dt} = \operatorname{div}[\gamma(\vec{x}) \operatorname{grad} T(\vec{x}, t)], \ \vec{x} \in \Omega \tag{9}$$

В прямых задачах, когда, по определению, коэффициент $\gamma = \gamma(\vec{x})$ — известная функция, к уравнению (9) добавляется граничное условие Дирихле $T|_{\Sigma} = T_{\Sigma}(\vec{x}, t)$ или условие Неймана $(\gamma \operatorname{grad} T(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nu})|_{\Sigma} = \tilde{q}_{\Sigma\nu}(\vec{x}, t)$, где $\tilde{q}_{\Sigma\nu}(\vec{x}, t) = (\gamma \operatorname{grad} T(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nu})|_{\Sigma} \equiv q_{\Sigma\nu}(\vec{x}, t)$, $q_{\Sigma\nu}(\vec{x}, t)$ — тепловой поток через границу, $\vec{\nu}$ — единичная внешняя нормаль к границе. Необходимо задать также начальное условие: $T(\vec{x}, t)|_{t=0} = \tilde{T}_{\Omega}(\vec{x}), \ \vec{x} \in \Omega$.

В обратных задачах, когда функция $\gamma = \gamma(\vec{x})$ неизвестна и подлежит определению наряду с температурой $T(\vec{x}, t)$, используются оба условия — и условие Дирихле и условие Неймана. Ниже предполагается, что удельная теплоёмкость k — известная постоянная величина.

Был реализован итерационный алгоритм решения обратной задачи, для квазистатических задач предложенный ранее в [6], для параболиче-

ского распределения теплопроводности $\gamma(x)$:

$$\gamma^{th}(x) = 1 + x(L-x) + (x(L-x))^2 \qquad (10)$$

Предполагается, что на концах стержня известны тепловые потоки и температура:

$$q(x,t)|_{x=0} = q_0^{ex}(t) = 1\,; \quad q(x,t)|_{x=L} = q_L^{ex}(t) = 1 + 2t\,;$$
$$T_0(t) = 1\,; \quad T_L(t) = 1\,; \quad t \in [0, t^*],\ t^* = 1; \quad x \in [0, L],\ L = 1$$

В реальных экспериментах задается температура на концах стержня, и измеряются тепловые потоки (или наоборот – задаются потоки и производятся измерения температуры). Задача заключается в том, чтобы, зная функции $T_0(t)$, $T_L(t)$, $q_0^{ex}(t)$, $q_L^{ex}(t)$, найти зависимость $\gamma^{th}(x)$. В качестве нулевого приближения используется функция $\gamma_0(x) = 1$. Приняты следующие входные данные для итерационной процедуры: N_x, N_t — количество разбиений по координате и времени ($N_x = 50$, $N_t = 50$); N_{it} — количество итераций (N_{it}=100), ρ_T — параметр регуляризации Тихонова (ρ_T=0.05).

Как выяснилось в численных экспериментах, описанный процесс является настолько медленно сходящимся, что для решения практических задач он непригоден. Причина данного эффекта заключается в том, что для разбиений с количеством узлов на оси Ox порядка 50 – 100, для которых уравнение теплопроводности решается с достаточно высокой точностью, и идентифицируются значения коэффициента $\gamma(x)$ в этих же узлах, количество идентифицируемых параметров слишком велико. Для уменьшения количества этих параметров приближенное решение разыскивается в виде:

$$\vec{\gamma}(x) = p_0 + p_1 x(1-x) + p_2[x(1-x)]^2 + \ldots \qquad (11)$$

где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{N_r}$ — новые неизвестные коэффициенты, причем функции $x(1-x)$, $[x(1-x)]^2, \ldots$ выбраны так, чтобы граничные значения были удовлетворены при $p_0 = 1$. При других граничных условиях разложение (11) надо заменить аппроксимацией, соответствующей заданным граничным значениям функции $\gamma(x)$.

На рисунке 1 приведены результаты вычислений для случая, когда заданное точное распределение коэффициента теплопроводности имеет параболический характер; многоточие при этом в (11) отсутствует.

Видно, что даже для нулевого приближения, далеко отстоящего от точного решения, процесс сходится за приемлемое число итераций (на рисунке решение на 100-й итерации неотличимо от точного решения). Отклонение приближенного решение от точного уже на первой итерации не превосходит 4.2%. Это объясняется тем, что структура (11) выбранного приближенного решения совпадает со структурой точного решения.

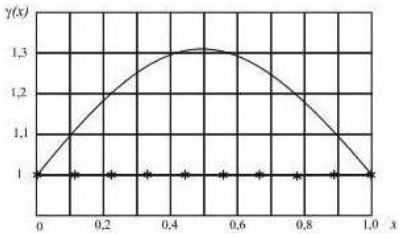


Рис. 1.

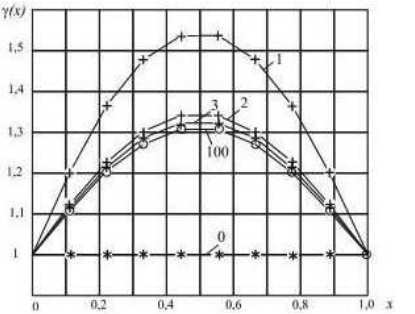


Рис. 2.

Рис. 3. Параболическое распределение коэффициента теплопроводности $\gamma(x)$: слева — заданное точное распределение (сплошная линия) и нулевое приближение (звездочки); справа — итерационные приближения (номер кривой соответствует номеру итерации)

Сопоставляя метод СН-ЭВМ с разработанным впоследствии методом конечных элементов, приходим к выводу о том, что метод А.А. Ильюшина является универсальным методом решения краевых задач, сфера применимости которого превосходит область применимости метода конечных элементов: в методе СН-ЭВМ не только аппроксимируется решение, но и строится "след" определяющего соотношения в данной конструкции с заданной историей нагружения с применением экспериментов.

Именно задачу определения параметров, характеризующих свойства материала в области по данным измерений на границе области, в настоящее время называют задачей идентификации. Метод А.А. Ильюшина также относится к методам идентификации. Его преимущество заключается в устойчивости, поскольку здесь используется информация о свойствах материала в области, в то время как стандартные методы идентификации, как правило, неустойчивы, так как в них требуется восстановить функции в области по их следам на границе. Последние сводятся к решению обратных задач, являющихся некорректными.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ №08-01-00349, 10-08-00425 и проекта 2.1.1/5873 аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы".

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: АН СССР, 1963. 272 с.
2. *Кравчук А.С.* О методе последовательных приближений в теории пластичности при сложном нагружении // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1970, №4, с.188–191.
3. *Зубчанинов В.Г.* Механика сплошных деформируемых сред. Тверь ТГТУ, ЧуДо, 2000. 703 с.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
5. *Кравчук А.С.* Основы компьютерной томографии. М.: Дрофа, 2001. 340 с.

РАСТЯЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ С РАЗРЕЗОМ, ПЛАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОТОРОЙ ЗАВИСЯТ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ.

***Е. В. Ломакин*[1], *А. М. Мельников*[2]**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

[1]**evlomakin@yandex.ru,** [2]**m_andrew_m@mail.ru**

Рассмотрен возможный подход к описанию пластического поведения тел, характеристики деформирования которых зависят от гидростатической компоненты тензора напряжений, что характерно для пористых и иных неоднородных сред. Для описания пластического деформирования использовано условие пластичности в обобщенной форме с применением параметра вида напряженного состояния. Сформулированы определяющие соотношения на основе закона пластического течения ассоциированногос обобщенным условием пластичности, Для условий плоского напряженного состояния получена система дифференциальных уравнений и, в случае ее гиперболичности, найдены уравнения ее характеристик и соотношения для напряжений и скоростей вдоль них. Рассмотрена задача о полубесконечном разрезе в случае плоского напряженного состояния для широкого класса возможных критериев пластичности и приведен пример построения поля характеристик для конкретного критерия пластичности.

1. Введение

Характеристики пластичности многих материалов зависят от вида напряженного состояния, создающегося в теле под действием внешних нагрузок. Диаграммы зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций для разных видов нагружения различны, поэтому для данных материалов не может быть использована гипотеза “единой кривой” пластического деформирования. При этом механизм пластического деформирования включает в себя не только механизм скольжения дислокаций, но и перемещение структурных элементов (таких как включения, частицы наполнителя), развитие существующих и образование новых микротрещин, пор и других дефектов структуры. Данные изменения обычно сопровождаются необратимым изменением объема материала. Поэтому предположение о пластической несжимаемости таких материалов также не может быть использовано. Более того, в таких материалах часто наблюдается взаимосвязь процессов объемного и сдвигового деформирования, несмотря на то, что в условиях равномерного всестороннего сжатия они могут вести себя как линейно упругие тела. Данные эффекты

проявляются при исследовании деформационных, пластических и прочностных свойств горных пород, чугуна, конструкционных графитов, огнеупорных керамических материалов, бетона, композитных материалов, упрочненных частицами, и других [1, 2].

В данной работе рассмотрены определяющие соотношения для таких сред в условиях плоского напряженного состояния и задача о распределении напряжений в области пластичности около кончика полубесконечной трещины в плоскости, подверженной равномерному растяжению силами, приложенными на удалении от краев трещины.

2. Определяющие соотношения

Критерий пластичности изотропного материала может быть представлен, как функция трех инвариантов тензора напряжений или трех его главных значений. Одной из возможных форм представления критерия может быть следующая:

$$F(\sigma_{ij}) = F(\sigma_0,\ \xi,\ S_{\text{III}}/\sigma_0^3). \tag{1}$$

Здесь $\sigma_0 = \sqrt{3/2 \cdot S_{ij} S_{ij}}$ — интенсивность касательных напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ — девиатор тензора напряжений, $\sigma = \sigma_{ij}/3$ — среднее напряжение, $\xi = \sigma/\sigma_0$ — параметр вида напряженного состояния, $S_{\text{III}} = S_{ij} S_{jk} S_{ki}$ — третий инвариант тензора напряжений. Анализ экспериментальных данных показывает, что третьим аргументом в формуле (1), показывающим вид девиатора напряжений, можно пренебречь. Вследствие этого в работе [1] была предложена следующая форма критерия $k = \text{const}$):

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k. \tag{2}$$

При определении функции $f(\xi)$ можно исходить из какого-либо конкретного вида нагружения и по отношению к нему установить отличия в значениях пластических характеристик для других условий нагружения. Например, можно принять, что при чистом сдвиге, когда $\xi = 0$, значение функции $f(0) = 1$. Тогда $k = \sqrt{3}\tau_S$, где τ_S — предел текучести при сдвиге. На основе экспериментальных данных для различных материалов могут быть получены разные выражения для функции $f(\xi)$. Формулой (2) могут быть представлены некоторые из известных условий пластичности [1, 3] с соответствующими функциями $f(\xi)$. Требование вогнутости поверхности текучести приводит к ограничению $f''(\xi) \geqslant 0$, накладываемому на функцию $f(\xi)$.

В случае плоского напряженного состояния $\sigma_{i3} = 0$ для всех значений i. В силу этого система уравнений для определения напряженного состояния в пластической области при отсутствии массовых сил, состоящая из уравнений равновесия и критерия пластичности (2) для идеально

пластического тела, принимает вид

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0,$$
$$f(\xi)(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{1/2} = k. \tag{3}$$

Симметричный тензор второго ранга в плоском случае имеет два независимых инварианта, поэтому при рассмотрении задач плоского напряженного состояния пренебрежение ролью третьего инварианта в критерии (1) вполне обосновано. В работе [4] было показано, что, основываясь на традиционном представлении для напряжений в случае плоских задач [5], выражения для напряжений можно представить в виде

$$\sigma_{11} = S - kF(S)\sin 2\varphi, \quad \sigma_{22} = S + kF(S)\sin 2\varphi,$$
$$\sigma_{12} = kF(S)\cos 2\varphi. \tag{4}$$

Здесь $S = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$ — плоский аналог среднего напряжения, а φ — угол между осью Ox_1 и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение. При этом показано, что в задачах плоского напряженного состояния параметр вида напряженного состояния ξ является функцией среднего напряжения S, а выражение для $F(S)$ имеет вид

$$F(S) = \frac{\sqrt{1 - 9\xi^2(S)/4}}{\sqrt{3}\, f(3\xi(S)/2)}. \tag{5}$$

В случае представления напряжений (4) условие пластичности (1) выполняется и система уравнений равновесия (3) принимает вид

$$S_{,1} - kF'(S)(S_{,1}\sin 2\varphi - S_{,2}\cos 2\varphi) - 2kF(S)(\varphi_{,1}\cos 2\varphi + \varphi_{,2}\sin 2\varphi) = 0,$$
$$S_{,2} + kF'(S)(S_{,1}\cos 2\varphi + S_{,2}\sin 2\varphi) - 2kF(S)(\varphi_{,1}\sin 2\varphi - \varphi_{,2}\cos 2\varphi) = 0. \tag{6}$$

Штрихом обозначена производная F по S. При $|kF'(S)| < 1$ система (6) является гиперболической. Это условие накладывает ограничения на диапазон значений среднего напряжения S в случае гиперболичности системы (6). Обозначив характеристики системы уравнений индексами α и β, можно получить уравнения характеристик и соотношения вдоль них

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}\varphi_{\alpha,\beta} = \frac{-\cos 2\varphi \pm \sqrt{1 - k^2F'^2}}{-kF' + \sin 2\varphi}, \quad dS \mp \frac{2kF\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2F'^2}} = 0. \tag{7}$$

Свойства вдоль характеристик во многом аналогичны свойствам характеристик в случае классического критерия пластичности Мизеса [5].

Введем угол ψ такой, что $kF' = -\sin 2\psi$ и $\sqrt{1-k^2F'^2} = \cos 2\psi$. Подставив эти выражения в соотношения для характеристик системы уравнений для напряжений (7), получим

$$\operatorname{tg}\varphi_\alpha = \operatorname{tg}(\varphi - \psi), \quad \operatorname{tg}\varphi_\beta = -\operatorname{ctg}(\varphi + \psi) = \operatorname{tg}\left(\varphi + \psi + \frac{\pi}{2}\right). \tag{8}$$

Следовательно, угол между характеристиками равен $\omega = 2\psi + \pi/2$. Рассмотрим соотношения вдоль характеристик. Введем обозначение

$$\Omega(S) = \int_0^S \frac{\sqrt{1-k^2F'^2}}{kF}\,dS.$$

Тогда соотношения (7) вдоль характеристик примут вид

$$\Omega(S) \mp 2\varphi = \text{const}. \tag{9}$$

Из этих соотношений вытекают свойства характеристик, описанные в [5] для случая плоского напряженного состояния идеально пластического тела. В частности, если отрезок характеристики прямой, то вдоль него постоянны Ω и φ и, как следствие, S, а если в какой-либо области прямолинейны оба семейства характеристик, то в ней реализуется равномерное напряженное состояние.

3. Линейный разрез в поле растяжения

Рассмотрим задачу о плоскости с полубесконечным прямолинейным разрезом, находящейся под действием равномерного растягивающего напряжения, нормального к линии разреза и приложенного на удалении от него (Рис. 1). Края разреза $-\infty < x_1 < 0$, $x_2 = 0$ свободны от напряжений.

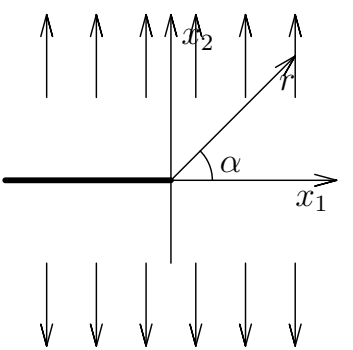


Рис. 1.

Для многих конкретных выражений для функции $f(\xi)$ не удаётся построить непрерывное поле напряжений в окрестности кончика трещины. Покажем далее построение разрывного поля характеристик (Рис. 2), достигающего области параболичности системы (6) на линии OD и подобного полю, построенному в [6].

В силу симметрии $\sigma_{12} = 0$ на линии OD, поэтому из уравнений для напряжений (4) следует, что $\varphi = \pm\pi/4 + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$. В случае растяжения $\sigma_{22} > 0$, поэтому можно принять $\varphi = \pi/4$.

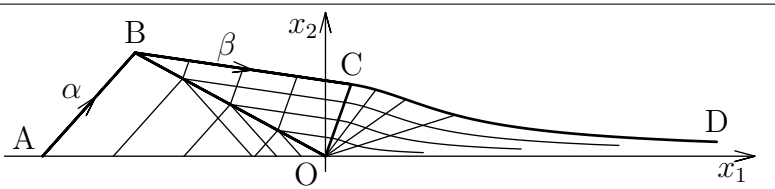


Рис. 2.

Найдем распределение напряжений около границы разреза. С помощью формул (4) можно получить выражения для нормального и касательного напряжения на границе:

$$\sigma_n = S - kF\sin 2(\varphi - \gamma), \quad \tau_n = kF\cos 2(\varphi - \gamma). \tag{10}$$

Здесь γ — угол между нормалью к границе и направлением оси Ox_1. Поскольку нормальное и касательное напряжения на поверхностях надреза также равны нулю, то из (10) находим, что в этих областях значение среднего напряжения определяется решением уравнения

$$S = \pm kF(S). \tag{11}$$

При этом угол $\varphi = \pm\pi/4 + \pi m$. В силу прямолинейности границы трещины около линии AO реализуется равномерное напряженное состояние и соответствующее ему поле прямолинейных характеристик, геометрические свойства которых определяются из соотношений (7).

Переход от границы разреза к линии OD осуществляется посредством построения центрированного поля характеристик. Связь приращения угла и среднего напряжения получена из соотношений вдоль характеристик (7) путем интегрирования соотношений для характеристик, пересекающих пучок центрированных линий. Уравнения, описывающие эту связь, имеют вид

$$d\varphi_\alpha = \frac{k^2FF'' + k^2F'^2 - 1}{2kF\sqrt{1 - k^2F'^2}}dS, \qquad d\varphi_\beta = -\frac{k^2FF'' + k^2F'^2 - 1}{2kF\sqrt{1 - k^2F'^2}}dS \tag{12}$$

для пучков α - и β -характеристик соответственно, при этом уравнение характеристик, пересекающих веер, одинаково для обоих случаев и в полярных координатах (r, α) имеет вид

$$r = r_0\left(\frac{F(S(\alpha_0))\sqrt{1 - k^2F'^2(S(\alpha_0))}}{F(S)\sqrt{1 - k^2F'^2(S)}}\right)^{1/2} \tag{13}$$

для характеристики, проходящей через точку (r_0, α_0). Эти уравнения, при подстановке конкретного критерия пластичности, определяют семейство характеристик по которому происходит движение от края разреза к линии

OD. Так при растяжении значение среднего напряжения должно возрастать при движении к линии OD, что, очевидно, возможно лишь в одном из случаев, представленных уравнениями (12).

Как видно из этих уравнений, при приближении среднего напряжения S к области параболичности системы (6) радиус стремится к бесконечности, т.е. оба семейства характеристик сливаются в одно, следовательно построение непрерывного поля напряжений возможно не для всех возможных критериев пластичности, представимых в форме (2). При невозможности построения непрерывного поля характеристик разрыв должен происходить по линии, имеющей радиальное направление т.к. задача не зависит от масштаба области вокруг трещины. На линии разрыва напряжений должны выполняться условия равновесия, т.е. разрыв терпит только радиальная составляющая тензора напряжений σ_r. Величина скачка определяется из уравнения критерия пластичности (2), если известны остальные компоненты тензора напряжений. Этот факт вместе с известными условиями на границе разреза, соотношениями вдоль характеристик (9), а также гипотеза о достижении области параболичности на линии OD позволяют найти значение угла наклона линии, на которой происходит разрыв напряжений.

В качестве примера, на рис. 2 приведено поле характеристик для критерия пластичности, определяемого функцией

$$f(\xi) = 1 + \frac{1}{2}\xi.$$

Литература

1. *Ломакин Е. В.* Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряжённого состояния. Экспериментальные зависимости и определяющие уравнения // Механика композитных материалов. 1988. № 1. С.3–9.
2. *Ломакин Е. В.* Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // Изв. РАН МТТ 1991. № 6. С. 66 - 75.
3. *Ломакин Е. В.* Пластическое течение дилатирующей среды в условиях плоской деформации. // Изв. РАН МТТ 2000. № 6. С. 58 - 68.
4. *Ломакин Е. В., Мельников А. М.* Пластическое плоское напряженное состояние тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т.2 № 2. С. 48-64.
5. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М. Наука. 1969. 420 с.
6. *J. W. Hutchinson* Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. vol. 16. pp. 337 to 347

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА РАСШИРЕННОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ СВЯЗАННЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ГРАДИЕНТНЫХ ЭФФЕКТОВ

***С.А. Лурье*[1], *П.А. Белов*[2], *Н.П. Тучкова*[3]**

[1] ***ИПРИМ РАН,*** [2] ***ООО "НИК",*** [3] ***ВЦ РАН***
Москва, Россия
[1] **lurie@ccas.ru,** [2] **BelovP@yandex.ru,** [3] **tuchkova@ccas.ru**

Приводится вариант расширенной термодинамики для моделирования термомеханического деформирования четырехмерного континуума со свойствами трансверсальной изотропии в отношении временной координаты. Формулируются определяющие соотношения, устанавливается физический смысл постоянных модели, приводится вариационная формулировка. Показано, что система уравнений Эйлера модели включает три уравнения движения и гиперболическое уравнение теплопроводности. Указываются причины появления градиентных эффектов для связной проблемы теплопроводности.

1. Кинематическая модель. Рассмотрим пространственно-временной континуум. Положение любой точки пространства в этом континууме определяется радиус- вектором $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в декартовой системе координат. Первые три компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ являются его проекциями в трехмерном пространстве. Четвёртая компонента определяется равенством $x_4 = i\nu t$, где $i = \sqrt{-1}$, ν — нормировочный коэффициент с размерностью скорости, t— время. Перемещение точки континуума при его деформации определяется радиус - вектором $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + i\upsilon R\boldsymbol{N} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3, 0)$ является вектором, компоненты которого совпадают с компонентами вектора перемещений в трехмерном подпространстве, $\boldsymbol{N} = (0, 0, 0, 1)$ единичный вектор, вдоль координаты времени.

Введем четырехмерный тензор Кронекера $\delta_{ij} = (\delta_{ij} - N_i N_j) + N_i N_j = \eta_{ij} + N_i N_j$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, где η_{ij} — обычный тензор Кронеккера. Запишем формальное выражение для обобщенного тензора дисторсии в пространственно-временном континууме так, чтобы в трехмерном подпространстве ему соответствовал симметричный тензор деформаций теории упругости:

$$d_{ij} = \varepsilon_{ij} + (i\upsilon)N_i s_j + \dot{r}_i N_j/(i\upsilon) + \dot{R}N_i N_j \tag{2}$$

где $\varepsilon_{ij} = 1/2(\eta_{in}\eta_{jm} + \eta_{im}\eta_{jn})\, d_{nm}$ при $i, j = 1, 2, 3$ — тензор деформации классической теории упругости трехмерного тела, $\bar{\bar{s}}_i$ определяется равенством $\bar{\bar{s}}_i = \eta_{in} N_j d_{jn}$, $\dot{r}_i \equiv \partial r_i/\partial t = (i\,v)\eta_{ij} N_n d_{jn}$, и скаляр $\dot{R} = N_i N_j d_{ij}$.

2. Физическая модель, определяющие соотношения. Введем плотность потенциальной энергии в пространственно-временном континууме $U = U(d_{ij}) = (1/2)C_{ijnm} d_{ij} d_{nm}$, $d_{ij} = \partial R_i/\partial x_j$. В этой работе мы будем рассматривать пространственно-временной континуум, который является трансверсально- изотропным в отношении временной координаты. В общем случае "упругие" постоянные для такого континуума имеют вид:

$$C_{ijnm} = \lambda\eta_{mn}\eta_{ij} + \mu(\eta_{im}\eta_{jn} + \eta_{in}\eta_{jm}) + C_2 N_i N_j N_n N_m + \tag{3}$$
$$+C_3 N_i N_m \eta_{jn} + C_4 \eta_{im} N_j N_n + C_5[N_i N_n \eta_{jm} + \eta_{in} N_j N_m],\ C_{ijmn} = C_{mnij}$$

Постоянные λ и μ являются, очевидно, двумя адиабатическими коэффициентами Ламе классической теории упругости с симметричным тензором напряжений. Они определяют свойства изотопных трехмерных сред. Другие пять постоянных $C_1 - C_5$ требуют идентификации.

Тензор обобщенных напряжений σ_{ij} определяется формулами Грина $\sigma_{ij} = \partial U/\partial d_{ij}$. Представим тензор напряжений рассматриваемого четырехмерного континуума с помощью разложения, аналогичного (2):

$$\sigma_{ij} = t_{ij} + (i\,v)N_i q_j + q_i N_j/(i\,v) + T N_i N_j \tag{4}$$

где $t_{ij} = \sigma_{nm} 1/2(\eta_{in}\eta_{jm} + \eta_{im}\eta_{jn})$, $f_i = (i\,v)\sigma_{jn}\eta_{ij} N_n$, $(i\,v)q_i = \sigma_{jn}\eta_{in} N_j$

Дадим физическое толкование неклассической компоненты обобщенного тензора дисторсии $d_{44} = \dot{R}$ и соответствующей компоненты σ_{44} обобщенного тензора напряжений $\sigma_{44} = T$. Для этого рассмотрим статические однородные дисторсии, полагая $\dot{r}_i = s_i = 0$. Тогда вариация δU совпадает с известным термодинамическим выражением для внутренней энергии:

$$\delta U = \partial U/\partial d_{ij} = t_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + T\delta\dot{R}$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением первого закона термодинамики, заключаем, что $t_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$ определяет возможную работу внутренних сил, а $T\delta\dot{R}$ количество тепла, выделяемое единицей объема. Следовательно, T есть приращение температуры, а $\dot{R} = S$ — приращение плотности энтропии.

Используя уравнения Грина, соотношения (3) для физических постоянных и равенства (1), (2), (4) установим общий вид определяющих соотношений рассматриваемого континуума:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\eta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + C_1[\theta\, N_i\, N_j + (S - S_0)\eta_{ij}] + [C_2(S - S_0) + T_0]N_i\, N_j +$$
$$+(i\,v)C_3 N_i s_j + C_4\, \dot{r}_i N_i/(i\,v) + C_5\,[(i\,v)s_i N_j + N_i \dot{r}_j/(i\,v)] \tag{5}$$

Здесь $\theta = \partial r_1/\partial x_1 + \partial r_2/\partial x_2 + \partial r_3/\partial x_3$, S_0 и T_0 — некоторые энтропия и температура, определяющие начальное состояние континуума.

Определяющие соотношения (5), позволяют в частности записать определяющие соотношения, связывающие давление $p = (1/3)\sigma_{ij}\eta_{ij}$, температуру T и энтропию S:

$$p = (1/3)\sigma_{ij}\eta_{ij} = (1/3)(3\lambda + 2\mu)\theta + C_1(S - S_0) = K_S\theta + C_1(S - S_0)$$

$$T = \sigma_{ij}N_iN_j = C_2(S - S_0) + T_0 + C_1\theta \tag{6}$$

Анализ соотношений (6) для таких процессов как адиабатический, изотермический и изобарический позволяет идентифицировать постоянные C_1, C_2: $C_1/C_2 = -\alpha K_T$, $C_1 = -(K_S - K_T)/(K_T\alpha) = -T_0\alpha K_S/C_P$, $C_2 = (\partial T/\partial S)_V = T_0/C_V$ где C_V, C_P — удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно, α — коэффициент теплового расширения, K_S и K_T — адиабатический и изотермический коэффициенты линейного расширения.

В результате нетрудно видеть, что, соотношения Дюамеля-Неймана $p = K_T[\theta - \alpha_1(T - T_0)]$ и закон изменения температур при адиабатическом деформировании $C_V(T - T_0) = T_0\alpha^2K_T$ строго следуют из определяющих соотношений рассматриваемого континуума. Кроме того, легко показывается что, выполняются следующие известные термодинамические неравенства $K_S > K_T$, $C_P - C_V = T_0\alpha^2K_T > 0$.

3. Разрешающие уравнения. Рассмотрим "деформирование" пространственно-временного континуума под действием заданных "объемных" сил $\boldsymbol{G}$ в 4D объеме с плотностью $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g} + (iv)\psi\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3, 0)$, а также под действием распределенных на 4D поверхности сил $\boldsymbol{P}$, и запишем обобщенный принцип виртуальной работы:

$$\int\limits_{\Omega} [G_i\delta R_i d\Omega + \oint\limits_F P_i\delta R_i dF - \int\limits_{\Omega} [\sigma_{ij}\delta d_{ij} d\Omega = 0 \tag{7}$$

здесь Ω — 4D область занимаемая континуумом, F — 4D поверхность, ограничивающая эту область.

Интегрируя равенство (7) по частям, получим следующее вариационное уравнение, определяющее уравнение «равновесия» (движения) континуума и соответствующий спектр граничных условий:

$$\int\limits_{\Omega} (\partial\sigma_{ij}/\partial x_j - G_i)\delta R_i d\Omega + \oint\limits_F (P_i - \delta\sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF = 0 \tag{8}$$

Уравнения равновесия (Эйлера) в (8), очевидно, разделяются на пространственные и временные. Они имеют четкий физический смысл, что позволяет идентифицировать оставшиеся физические постоянные $C_3 - C_5$.

Действительно, записывая уравнения равновесия и учитывая разложения (4) нетрудно убедиться, что вектор $\boldsymbol{f}$ определяет обычный вектор моментов количества движения $\boldsymbol{P} = v^{-2}\boldsymbol{f}$, а вектор $\boldsymbol{q}$ — вектор тепловых потоков, $\boldsymbol{f} = C_4\dot{\boldsymbol{r}} - v^2C_5\boldsymbol{s}$, и $\boldsymbol{q} = C_3\boldsymbol{s} - C_5\dot{\boldsymbol{r}}/v^2$. Так как неоднородное распределение тепла не может быть причиной конвекции, то следует принять $C_5 = 0$. Тогда тепловой поток становится потенциальным, момент количества приобретает обычный вид $\boldsymbol{P} = \rho\boldsymbol{r}$, где $\rho = C_4/v^2$. Уравнения "равновесия" континуума, в результате, имеют вид:

$$\begin{gathered}(\mu+\lambda)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} + \mu\Delta\boldsymbol{r} - K_T\alpha\,\mathbf{grad}\,T - \rho\ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{g} = 0,\\ \ddot{R} + (C_1/C_2)\,\mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{r}} - c^2\Delta R - (v^2/C_2)\psi = 0\end{gathered} \tag{9}$$

Уравнения (9) являются системой уравнений связной термоупругости, где векторная группа уравнений (первые три уравнения) описывает движение трехмерной среды. Последнее, четвертое уравнение является уравнением теплопроводности, учитывающее волновые свойства распространения тепла. Скорость распространения термических волн определяется величиной $c^2 = v^2C_3/C_2$. Таким образом, идентифицирована последняя постоянная моделиC_3 в (3)-(5). Заметим, что в случае установившегося процесса теплопроводности, когда температура и деформации становятся независимыми от времени система уравнений (9) полностью совпадает с известными уравнениями термоупругости [1]

$$\begin{gathered}(\mu+\lambda)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} + \mu\Delta\boldsymbol{r} - K_T\alpha\,\mathbf{grad}\,T + \boldsymbol{g} = 0,\\ \Delta T = (v^2/C_2)\psi = -w\end{gathered}$$

Здесь величина w трактуется как нормированное количество тепла, возникающее в единице объема.

4. О градиентных эффектах, заключение. Построенная модель среды является корректным вариантом расширенной термодинамики обратимых процессов и описывает связанные термодинамические эффекты. Возможные обобщения связаны с обобщением данной модели на необратимые процессы, протекающие с диссипацией, а также с учетом градиентных эффектов, путем добавления градиентных составляющих в выражение потенциальной энергии [2]. Установлено, что полученные в рамках данной модели уравнения расширенной термодинамики диссипативных сред дают как частный случай уравнения теплопроводности Максвелл-Каттанео [3,4].

Доказывается, что если расширенная термодинамика строится с учетом механических градиентных эффектов, то уравнение теплопроводности также с необходимостью будет градиентным в рамках обобщенной модели. Для стационарных процессов уравнение теплопроводности имеет

градиентный вид $[1 - \chi\, \Delta(...)]\, \Delta(T) = 0$, где коэффициент χ пропорционален масштабному параметру градиентной 3D теории упругости [1]. Вариационная постановка вида (8) дает в этом случае весь спектр согласованных краевых условий на температуру, тепловой поток и соответствующие "моментные" факторы. Использование градиентной модели стационарной теплопроводности позволил моделировать масштабные эффекты в задаче теплопереноса в неоднородных кристаллических структурах, а также эффект аномального локального изменения температуры в окрестности границ неоднородных сред (эффект Капицы).

Авторы выражают благодарность профессору А. Гусеву из Университета ETH (Цюрих) за интерес к данной работе, многие результаты которой не могли бы быть получены без его активного участия. Работа поддерживается грантом РФФИ 09-01-00060.

Литература

1. *Новацкий В.* Теория Упругости. М., 1975, 872 с.
2. *Lurie S.A., et al.* // Comp. Mat. Sc., 45:3, 2009, P.709–714.
3. *Maxwell J.C.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, **157**, 1867, 49 p.
4. *Cattaneo C., Hebd C.R.* Seances Acad. Sci., **247**, 1958, 431 p.

НЕОЖИДАННЫЕ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ПРОЦЕССАМИ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ИММУННЫХ КЛЕТКАХ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

***В. И. Малый*[1], *И. В. Малый*[2]**

[1] ***Московский институт электроники и математики, Москва, Россия***
[2] ***Питтсбургский университет, Питтсбург, США***
[1] **vict-maly@mtu-net.ru,** [2] **ivanmaly@pitt.edu**

Обобщены модели поляризации иммунных клеток. Дана постановка задач о непрерывной последовательности равновесных устойчивых состояний цитоскелета, обеспечивающая единственность продолжения процесса при заданном начальном состоянии.

Установление асимметричной структуры клетки, называемое также поляризацией клетки, играет важную функциональную роль в таких процессах, как взаимодействия иммунных клеток или схождение краев раны. Ключевым в поляризации клетки является эксцентричное размещение центросомы — органеллы, на которой закреплены образующие цитоскелет микротрубочки [1,2]. В настоящей работе проанализированы закономерности позиционирования центросомы в непрерывных процессах роста и разборки микротрубочек. С этой целью обобщены простые модели [3-5], в которых цитоскелет представляется механической системой микротрубочек, являющихся прямыми упругими стержнями большой гибкости, закрепленными одним краем в центросоме. Цитоскелет заключен в круглую плоскую ячейку со скользкими стенками, моделирующую область клетки. Когда в процессе роста длина трубочек L превышает радиус клетки R, они вынужденно изгибаются, и центросома под их совместным действием, вообще говоря, может смещаться из центра клетки. Подобные модели в той или иной форме уже использовались ранее в биологических работах для описания поляризации цитоскелета клеток, для них были получены примеры решений [3-5]. Выполненный здесь общий анализ решений оказался успешным во многом благодаря дополнительному предположению о большом числе микротрубочек в цитоскелете. Из-за этого отпала необходимость рассмотрения большого количества ограниченно пригодных конкретных вариантов конфигурации цитоскелета и стало возможным сравнительно просто перейти к 3-мерному случаю. Формы отдельных трубочек описывались теорией сжатых гибких стержней.

В случае плоских клеток впервые построено симметричное равновесное состояние цитоскелета при $L>R$ с центральным положением цент-

росомы (рис. 1А). Показано, что оно неустойчиво, хотя неустойчивость проявляется столь слабо, что в 1-м порядке по малым возмущениям не отличается от безразличного равновесия. Под действием случайных возмущений спонтанно устанавливается устойчивое равновесное состояние рис. 1Б со смещением центросомы от центра Δ_e, приблизительно равным разности $L - R$ (ромбы рис. 2А). Можно указать и множество других примеров равновесных состояний. Неединственность равновесных конфигураций цитоскелета возникает из-за возможности двух равновесных форм у каждой из трубочек. Если трубочка отгибается в ту же сторону, куда смещается центросома, ее форма будет метастабильной. Такая форма исчезает при некоторых критических для конкретной трубочки смещениях центросомы Δ_e и вынужденно переходит в стабильную форму с невозможностью восстановления при обратном течении процесса. В ответ на изменения длины трубочек и внешние воздействия на центросому наблюдаются необратимые процессы перестройки структуры ограниченного стенками ячейки цитоскелета. Равновесная конфигурация цитоскелета обладает памятью о предыстории изменения длины трубочек и воздействий на центросому. На рис. 1Б, 3 линии двойной толщины показывают стабильные формы тех микротрубочек, для которых более не существует метастабильных форм.

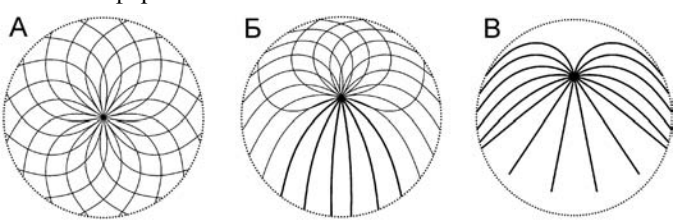


Рис. 1.

В рассмотренном ранее некотором классе решений для близкой модели [3] формы трубочек определялись из условия минимума упругой энергии изгиба и потому совпадали со стабильными формами нашей модели. В таком случае конфигурации цитоскелета (типа рис. 1В) при заданном $L>R$ определяются однозначно, необратимые эффекты в них отсутствуют. Равновесных состояний с центральным положением центросомы не существует, а потому не возникает и вопроса об устойчивости симметричного состояния. Однако при равновероятном распределении по направлениям выгиба в процессе потери устойчивости изначально прямолинейной формы трубочек и при большом их количестве образование конфигурации цитоскелета из одних лишь стабильных форм трубочек практически невероятно. Хотя, формально, такие изолированные решения существуют, они не реализуется в непрерывном процессе из единственного при $L = R$ симметричного состояния с прямыми микротрубочками.

В связи с обнаружением множественности равновесных конфигураций цитоскелета в плоском случае мы даем новую постановку задач о непрерывной последовательности равновесных устойчивых состояний цитоскелета, в которой, как и в теории пластичности [7], обеспечивается единственность продолжения процесса при заданном начальном состоянии. Рассмотрен пример процесса с немонотонным изменением длины трубочек: L растет от R до 1.32 R (или до 1.165 R), а потом уменьшается до R. При $L = R$ все трубочки прямые, а при $L=R+dR$ направления возникающих прогибов распределяются равномерно, так что в начале процесса доли стабильных и метастабильных форм трубочек $n_1 = n_2$=0.5 (как в симметричном состоянии рис. 1А). Изменение долей n_i однозначно определяется путем $\{L(t), \Delta(t)\}$. На естественном пути по устойчивым равновесным состояниям однозначно определяется функционал $\Delta_e[L(t)]$. Необратимые изменения конфигурации цитоскелета в целом значительны (рис. 3), а гистерезис смещения центросомы Δ_e — слаб, Δ_e близко к L–R (линии рис. 2А). На рис. 2Б показано изменение полуширины ϕ_{pr} области направлений трубочек (вокруг нижней точки границы), существующих уже только в стабильных формах. Качественно, описанное поведение вполне аналогично поведению упругопластических материалов при немонотонном нагружении с необратимым поведением на активных участках и обратимым поведением на участках разгрузки [7].

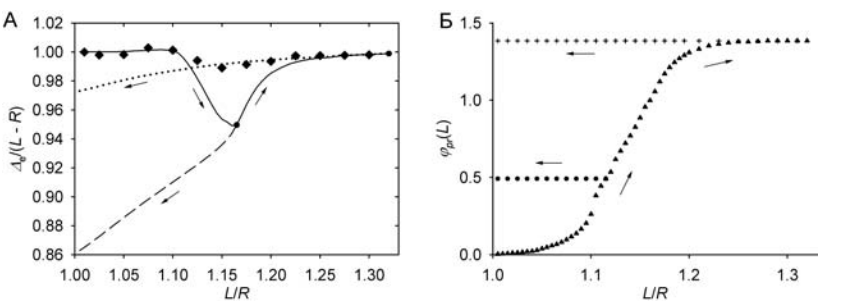


Рис. 2.

Впервые для этой модели проанализирован 3-мерный случай. Показано, что отсутствуют необратимые явления и система допускает описание с помощью общей энергии изгиба микротрубочек. Устойчивая конфигурация цитоскелета в 3-мерном случае является единственной (ее вертикальное сечение на рис. 1В). Равновесное смещение центросомы из центра Δ_e практически равно 2 $(L - R)$.

Обсуждение связи описанных результатов с наблюдаемыми эффектами в биологических экспериментах имеется в работе [6].

Модель обнаруживает качественное различие между плоским и 3-мерным случаями. В согласии с опытом, решение для 3-мерной клет-

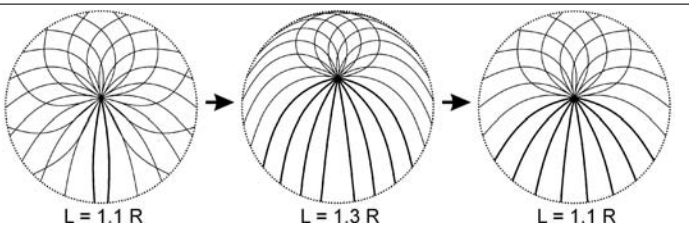


Рис. 3.

ки принимает "причесанную"конфигурацию, в которой внешние концы трубочек отогнуты навстречу смещению центросомы от центра клетки (рис. 1В). Такая структура не обладает памятью — направления прогиба трубочек не меняются при изменении их длины или при смещении центросомы внешними силами, ибо устойчивое равновесное положение центросомы при заданном L единственно. Контрастируя с этим случаем, и опять же в согласии с опытом, трубочки в решении для плоской равновесной клетки могут быть изогнуты в обоих направлениях от ненапряженного направления их заделки в центросому. Это придает цитоскелету ”лохматый” вид (рис. 1АБ, 3) и является источником эффектов памяти: его структура зависит от прежних возмущений, равновесное положение центросомы зависит от истории изменений длины микротрубочек (рис. 2, 3).

Выявленные свойства цитоскелета должны приниматься во внимание при разработке и анализе более детализированных теоретических моделей (типа 3-мерной модели с гибкой клеточной поверхностью [4]), а также при постановке и истолковании опытов, направленных на изучение процессов морфогенеза цитоскелета. В частности, следует с осторожностью относиться к надеждам, что более простые по экспериментальной технике исследования цитоскелета плоских клеток могут в каком-то смысле уменьшить необходимость прямых исследований 3-мерных клеток.

Литература

1. *Альбертс Б., Брей Д., Льюис Дж., Рэфф М., Робертс К., Уотсон Дж.* Молекулярная биология клетки, т.2. Москва, Мир, 1994. 539 с.
2. *Maly I.V.* Cytoskeleton and Cell Motility Models: From Kinetics to Structure. VDM, Saarbruecken, 2009. 120 p.
3. *Holy T.E., Dogterom M., Yurke B., Leibler S.* Assembly and positioning of microtubule asters in microfabricated chambers. Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 94:6228-6231. 1997.
4. *Arkhipov S.N., Maly I.V.* Contribution of whole-cell optimization via cell body rolling to polarization of T cells. Phys. Biol. 3:209-219. 2006.
5. *Pinot M., Chesnel F., Kubiak J.Z., Arnal I., Nedelec F.J., Gueroui Z.* Effects of confinement on the self-organization of microtubules and motors. Curr. Biol. 19:954-960. 2009.
6. *Maly V.I., Maly I.V.* Symmetry, stability, and reversibility properties of idealized confined microtubule cytoskeletons. Biophys. J. (в печати).
7. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд. АН СССР, 1963. 271 с.

ОБ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ЛИСТОВЫХ ПРОКАТНЫХ МЕТАЛЛОВ

Н. М. Матченко

Тульский государственный университет
Тула, Россия

Определены границы применения теории пластичности Мизеса-Хилла. Анализ экспериментальных данных, полученных на листовых прокатных металлах, показывает, что во многих случаях применение условия пластичности Мизеса приводит к ошибкам, выходящим за границы точности эксперимента. В связи с этим, предложен полиномиальный критерий пластичности ортотропных материалов и ассоциированный с ним закон пластического деформирования, позволяющий адекватно описывать анизотропию пластических свойств листовых прокатных металлов.

Мизес в 1928 г., сформулировал критерий пластичности анизотропных сред в виде квадратичной функции компонент тензора напряжения инвариантной относительно точечной группы преобразования координат, характеризующих класс симметрии среды [1]. Предложив закон пластического деформирования, ассоциированный с критерием пластичности, Мизес заложил основы теории идеальной пластичности анизотропных сред. При формулировке основных соотношений Мизесом использовалась гипотеза о независимости пластического деформирования от гидростатического давления. Позже, в 1948 г. Хилл [2] использовал соотношения Мизеса при исследовании поликристаллических металлов (ортотропных материалов). Теория течения Мизеса-Хилла нашла широкое применение при проектировании процессов обработки металлов давлением [3].

1. Квадратичное условие пластичности Мизеса

Рассматривается жесткопластический ортотропный материал. Введем декартову систему координат x, y, z, совпадающую с осями ортотропии.

Хилл предложил для ортотропных материалов соотношения пластичности Мизеса записывать в форме [1]:

условие пластичности

$$F(\sigma_y-\sigma_z)^2+G(\sigma_z-\sigma_x)^2+H(\sigma_x-\sigma_y)^2+2L\tau_{yz}^2+2M\tau_{zx}^2+2N\tau_{xy}^2=1; \quad (1)$$

зависимости для приращения деформаций

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= d\lambda[H(\sigma_x-\sigma_y)+G(\sigma_x-\sigma_z)], \quad d\gamma_{yz}=d\lambda L\tau_{yz},\\ d\varepsilon_y &= d\lambda[F(\sigma_y-\sigma_z)+H(\sigma_y-\sigma_x)], \quad d\gamma_{zx}=d\lambda M\tau_{zx}\\ d\varepsilon_z &= d\lambda[G(\sigma_z-\sigma_x)+F(\sigma_z-\sigma_y)], \quad d\gamma_{xy}=d\lambda N\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжения, $F, \ldots, N$ — характеристики пластической анизотропии, $d\varepsilon_x, \ldots, d\gamma_{xy}$ — приращения компонент тензора деформаций, $d\lambda$ — коэффициент пропорциональности.

Из соотношений (2) вытекает тождество

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = 0 \tag{3}$$

На примере листового прокатного металла рассмотрим возможности экспериментального определения параметров анизотропии. Пусть ось x совпадает с направлением прокатки, ось y направлена поперек прокатки, а ось z направлена по нормали к плоскости листа.

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) условие пластичности (1) и соотношения для приращения деформаций упрощаются:

$$(G+H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H+F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1; \tag{4}$$

$$\begin{gathered} d\varepsilon_x = d\lambda[(H+G)\sigma_x - H\sigma_y], \quad d\varepsilon_y = d\lambda[(H+F)\sigma_y - H\sigma_x], \\ d\varepsilon_z = -d\lambda(G\sigma_x + F\sigma_y), \quad d\gamma_{xy} = d\lambda N\tau_{xy}. \end{gathered} \tag{5}$$

Если вырезать образцы из листового металла вдоль прокатки, поперек прокатки и под углом $\pi/4$ к направлению прокатки, то в процессе базовых экспериментов по одноосному растяжению этих образцов можно определить шесть механических характеристик материала: Σ_x, Σ_y, Σ_{xy} — пределы пластического сопротивления при растяжении соответственно вдоль осей x, y и оси x', направленной в плоскости листа под углом $\pi/4$ к оси x; R_x, R_y, R_{xy} — показатели пластической анизотропии. В отличие от линейно упругих анизотропных материалов, для вычисления поперечных деформаций которых используются коэффициенты поперечного деформирования, в определяющих соотношениях теории пластичности несжимаемых ортотропных сред применяется показатель пластической анизотропии, введенный Хиллом [2]. Показатель анизотропии определяется как частное от деления приращения пластической деформации в плоскости листа в поперечном направлении к направлению растяжения, к приращению пластической деформации по толщине листа. Показатель пластической анизотропии ориентирован на описание пластической анизотропии несжимаемых листовых металлов.

Из (5) следует связь показателей анизотропии и механических характеристик

$$R_x = H/G, \quad R_y = H/F, \quad R_{xy} = H/N. \tag{6}$$

Поскольку параметров анизотропии четыре, а экспериментально определенных характеристик шесть, то это несоответствие порождает два условия совместности экспериментально определенных механических характеристик.

Соотношения (4) и (6) позволяют вычислить однозначно характеристики анизотропии F и G

$$F = \frac{1}{\Sigma_y^2(1+R_y)}, \quad G = \frac{1}{\Sigma_x^2(1+R_x)}. \tag{7}$$

Характеристика анизотропии H определяется неоднозначно. Из экспериментов на одноосное растяжение вдоль и поперек прокатки и соотношений (5) следует

$$H = H_x = \frac{R_x}{\Sigma_x^2(1+R_x)}, \quad H = H_y = \frac{R_y}{\Sigma_y^2(1+R_y)}. \tag{8}$$

Здесь нижний индекс величины H указывает на эксперимент, из которого эта характеристика определена.

Ассоциированный закон пластического деформирования постулирует равенство величин H_x и H_y. Тогда из (8) вытекает первое условие совместности

$$R_x\Sigma_y^2(1+R_y) = R_y\Sigma_x^2(1+R_x) \tag{9}$$

Введем критерий несовместности параметров H_x и H_y

$$K_I = \left| H_x H_y^{-1} - 1 \right| \cdot 100\% \tag{10}$$

Параметр N из эксперимента на одноосное растяжение образца, вырезанного под углом $\pi/4$ к направлению прокатки, так же определяется неоднозначно:

из уравнения (4) следует

$$N = N_1 = (4/\Sigma_{xy}^2 - F - G)/2 \tag{11}$$

из закона пластического деформирования (5) вытекает

$$N = N_2 = (1/2 + R_{xy})(F+G) \tag{12}$$

Соотношения (11) и (12) порождают второе условие совместности механических характеристик

$$2/\Sigma_{xy}^2 = (1+R_{xy})(F+G) \tag{13}$$

Критерий несовместности параметров N_1 и N_2 примем в виде

$$K_{II} = \left| N_2 N_1^{-1} - 1 \right| \cdot 100\% \tag{14}$$

В таблице 1 приведены результаты выполнения условий совместности экспериментально определенных параметров [3].

В таблице 2 приведены результаты выполнения условий совместности экспериментально определенных параметров при различной степени пластической деформировании e в направлении растяжения.

Таблица 1.

Материал	Σ_x МПа	Σ_{xy} МПа	Σ_y МПа	R_x	R_{xy}	R_y	K_I	K_{II}
Сталь								
08кп	208.3	255.8	218.0	1.31	0,70	2,12	**8,73**	**10,17**
11ЮА	643.0	608.0	690.0	1.00	0.50	1.25	3,64	**102,48**
12Х18Н9	362.3	336.1	360.4	0.77	1.15	0.76	0,53	**7,00**
10 (отожженная)	246.3	242.0	245.0	0.80	0.83	0.80	0,50	1,6
Ст3сп	280.0	270.0	280.0	0.88	1.00	0.93	3,18	3,84
Алюминевые сплавы								
АМг6М	171.0	160.0	171.0	0.73	0.85	0.65	**6.40**	**5,81**
АМг2М	68.0	68.0	66.0	0.54	0.71	0.47	2,92	**20,57**
АМцАМ	72.7	65.1	78.8	0.28	0.97	0.33	3,76	**14,47**
Латунь Л63	215.0	210.0	225.0	0.666	0.820	0.759	1,46	4,00

Таблица 2.

Материал	Пласт. деф.	Σ_x МПа	Σ_{xy} МПа	Σ_y МПа	R_x	R_{xy}	R_y	K_I	K_{II}
Сталь									
08кп	0,01	274,14	256,21	244,94	0,845	0,629	0,661	**8,13**	**12,23**
	0,1	489,88	528,72	458,41	0,883	0,751	0,7	0,32	**25,85**
	0,15	557,12	561,91	521,12	0,9	0,72	0,805	**7,14**	**15,93**
08Х18Н10Т	0,01	796,69	799,4	827,55	0,548	0,610	0,634	1,56	2,43
	0,1	873,86	878,11	884,33	0,605	0,706	0,986	**6,74**	2,45
	0,15	1017,3	1014,8	996,17	0,641	0,73	0,752	**12,74**	**40,52**
Алюминвые сплавы									
АДО 4,7 мм	0,01	157,33	138,01	147,01	0,721	0,776	0,626	4,98	**19,26**
	0,1	274,12	212,64	225,34	0,832	0,908	0,57	**15,48**	**23,02**
	0,15	292,3	256,88	290,76	0,732	0,946	0,718	0,02	**89,69**
АДО 2,8 мм	0,01	129,36	125,51	190,14	0,698	0,838	0,661	**123,1**	**45,62**
	0,1	286,62	214,27	356,20	0,786	0,953	0,675	**68,62**	**125,,78**
	0,15	352,03	270,13	460,69	0,840	1,032	0,718	**87,10**	**226,24**
Медь									
М1 4 мм	0,01	109,3	98,58	94,22	0,706	0,761	0,653	**22,15**	0,38
	0,1	199,83	195,22	190,43	0,791	0,859	0,721	4,29	**8,08**
	0,15	232,47	222,00	214,19	0,847	0,892	0,769	**10,42**	**5,34**
М1 3 мм	0,01	105,00	103,67	90,07	0,742	0,811	0,795	**29,24**	**20,59**
	0,1	192,45	192,18	186,87	0,832	0,923	0,898	**9,50**	**38,05**
	0,15	229,96	233,81	221,5	0,933	0,995	0,913	**6,19**	**13,68**
Латунь Л63	0,01	148,32	139,66	139,13	0,706	244,29	218,97	**11,45**	2,90
	0,1	244,29	218,97	228,65	0,792	0,848	0,767	**12,08**	**13,97**
	0,15	287,38	251,64	253,69	0,850	0,921	0,818	**25,72**	**37,74**

Здесь через t обозначена толщина листа. Экспериментальные данные, приведенные в таблице 2, получены в лаборатории Тульского государственного университета профессором С.С. Яковлевым. Поскольку эксперименты по определению характеристик пластической анизотропии выполнялись с точностью до 5% [3], то отклонения в критериях K_I и K_{II} за пределы точности эксперимента свидетельствует о том, что материал не подчиняется условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону пластического деформирования.

В таблицах 1 и 2 жирным шрифтом отмечены результаты экспериментов, в которых условия совместности механических характеристик выходят за рамки 5%.

В соответствии с данными таблицы 1 из девяти материалов только три согласуются с теорией Мизеса-Хилла. А по данным таблицы 2 из девятнадцати материалов только для одного из них справедлива теория Мизеса-Хилла.

Следовательно, возникает необходимость построения теории пластичности анизотропных материалов, позволяющей в рамках экспериментов по одноосному растяжению образцов, исключить условия совместности механических характеристик.

2. Полиномиальное условие пластичности.

Рассмотрим полиномиальное условие пластичности

$$\begin{gathered}[F + f(\sigma_y - \sigma_z)^2](\sigma_y - \sigma_z)^2 + [G + g(\sigma_z - \sigma_x)^2](\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ +[H + h(\sigma_x - \sigma_y)^2](\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2(L + l\tau_{zx}^2)\tau_{zx}^2 + \\ +2(M + m\tau_{yz}^2)\tau_{yz}^2 + 2(N + n\tau_{xy}^2)\tau_{xy}^2 = 1\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $F, \ldots, N, f, \ldots, n$ — параметры пластической анизотропии.

Полиномиальные разложения ранее использовались Э. Ву [4] для построения предельных поверхностей разрушения конструкционных пластиков. Условие пластичности (15), отличается от предельных условий Э Ву, тем, что слагаемые четвертой степени, фигурирующие в (15), считаются в предельных условиях Э. Ву “лишними и недопустимыми”.

Закон пластического деформирования, ассоциированный с условием пластичности (15), имеет вид

$$\begin{gathered}d\varepsilon_x = d\lambda\{[H + 2h(\sigma_x - \sigma_y)^2](\sigma_x - \sigma_y) - [G + 2g(\sigma_z - \sigma_x)^2](\sigma_z - \sigma_x)\}, \\ d\varepsilon_y = d\lambda\{[F + 2f(\sigma_y - \sigma_z)^2](\sigma_y - \sigma_z) - [H + 2h(\sigma_x - \sigma_y)^2](\sigma_x - \sigma_y)\}, \\ d\varepsilon_z = d\lambda\{[G + 2g(\sigma_z - \sigma_x)^2](\sigma_z - \sigma_x) - [F + 2f(\sigma_y - \sigma_z)^2](\sigma_y - \sigma_z)\}, \\ d\gamma_{yz} = d\lambda(L + 2l\tau_{yz}^2)\tau_{yz}, \quad d\gamma_{zx} = d\lambda(M + 2m\tau_{zx}^2)\tau_{zx}, \\ d\gamma_{xy} = d\lambda(N + 2n\tau_{xy}^2)\tau_{xy}.\end{gathered} \tag{16}$$

Для определения параметров анизотропии, входящих в условие пластичности (15) достаточно провести шесть экспериментов на одноосное растяжение образцов вырезанных в направлении осей x, y, z и трех образцов вырезанных в плоскостях симметрии под углом $\pi/4$ к осям анизотропии. В этих экспериментах определяются значения шести пределов текучести и шести коэффициентов поперечного сжатия. Остальные шесть коэффициентов поперечного сжатия вычисляются из условия несжимаемости пластического деформирования (3). Таким образом, при условии пластичности (15) и законе пластического деформирования (16) в рамках указанных экспериментов не возникает проблема согласования характеристик пластической анизотропии.

3. Условие пластичности листового прокатного металла.

Для листового прокатного металла в случае плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) необходимо согласовать параметры H_x и H_y, а так же N_1 и N_2. Поэтому, в условии пластичности (15) и законе пластического деформирования (16) достаточно сохранить, например, корректирующие параметры g и n:

$$F\sigma_y^2 + (G + g\sigma_x^2)\sigma_x^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2(N + n\tau_{xy}^2)\tau_{xy}^2 = 1, \qquad (17)$$

$$\begin{gathered} d\varepsilon_x = d\lambda[(H + G + 2g\sigma_x^2)\sigma_x - H\sigma_y],\ d\varepsilon_y = d\lambda[(F + H)\sigma_y - H\sigma_x], \\ d\varepsilon_z = -d\lambda(G\sigma_x + F\sigma_y + 2g\sigma_x^3), \quad d\gamma_{xy} = d\lambda(N + 2n\tau_{xy}^2)\tau_{xy}. \end{gathered} \qquad (18)$$

Проведя обработку экспериментов по одноосному растяжению образцов, вырезанных вдоль прокатки, поперек прокатки и под углом $\pi/4$ к направлению прокатки, получим

$$F = \frac{1}{(1 + R_y)\Sigma_y^2}, \quad H = \frac{R_y}{(1 + R_y)\Sigma_y^2},$$

$$g = \left(\frac{1}{R_x} + 1\right)\frac{H}{\Sigma_x^2} - \frac{1}{\Sigma_x^4}, \quad G = \frac{1}{\Sigma_x^2} - H - \Sigma_x^2 g,$$

$$n = \frac{4}{\Sigma_{xy}^2}[(1 + R_{xy})(F + G) - \frac{2}{\Sigma_{xy}^2}], \quad N = \left(\frac{1}{2} + R_{xy}\right)(F + G) - \frac{n}{2}\Sigma_{xy}^2.$$

Соотношения теории идеальной пластичности (17) и (18) в рамках трех базовых экспериментов свободны от необходимости согласования параметров анизотропии.

Литература

1. *Mises R.* Mechanic der plastischen Formagerung von Kristalen // Z. angew. Math. Und Mech., 1928, 8, №5, 161–185 (нем).
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
3. *Андрейченко В.А., Яковлев С.П., Яковлев С.С.* Обработка давлением анизотропных материалов. Кишенев: Квант, 1997. 330 с.
4. *Ву Э.* // Сб. Механика композиционных материалов. Т. 2. М.: Мир, 1978. С.401–491.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАВНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОДАТЛИВОСТЕЙ

Б. Е. Мельников, И. Н. Изотов, А. С. Семёнов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Санкт-Петербург, Россия

kafedra@ksm.spbstu.ru

Многоповерхностные теории [1,2 и др.] при описании процессов активного и пассивного [3] нагружений прямо или косвенно используют понятие модулей пластических податливостей. Однако, экспериментально свойства поля пластических податливостей изучены недостаточно. Это побудило провести прямое экспериментальное исследование поверхностей равных пластических податливостей [4].

1. Выбор материала (технически чистый никель; примеси: Si – 0,068%; Fe – 0,025%; Cu – 0,02%) был обусловлен его относительно высоким модулем упругости $E = 2{,}07 \cdot 10^{11}$Па, малой ползучестью при комнатной температуре, большой величиной отношения временного сопротивления к пределу текучести. Эти качества позволяют провести изучение деформационной анизотропии в широком диапазоне напряжений. Существенно, что некоторые аспекты рассматриваемых особенностей деформирования уже исследованы для технически чистого никеля с такими же примесями [5] и с примесями Mg – 1% и Fe – 0,052% в [6].

Образцы отжигали (для одной серии опытов это делалось одновременно) при 860˚C с последующим охлаждением в печи. Металлографический анализ показал, что в продольном и поперечном шлифах зерна (средний поперечный размер 0,033 мм) являются равноосными полиэдрами со следами двойников. Испытания проводились через 20 дней после отжига, каждый опыт проводился непрерывно.

Образцы отрезаны от холоднотянутых труб длиною около метра; наружные диаметры 8,06 – 8,10 мм, толщина стенки 0,18 – 0,20 мм., что позволяет создать практически однородное напряженно-деформированное состояние. По толщине стенки располагались не менее 6 – 7 зерен. Образцы браковались если отклонения в замерах толщин стенок, хотя бы в одной из десяти контролируемых точек составляли более чем $\pm 0{,}005$ мм. Несмотря на некоторый разброс в величинах толщин стенок вдоль окружности сечения, средние значения для данного сечения, отличались менее чем на $\pm 0{,}001$ мм. Если погонные веса вырезанных из одной трубы образцов отличались более чем на 1%, то образцы браковались. По весу, диаметру и плотности (последняя определялась взвешиванием в дистил-

лированной воде и воздухе и равнялась $8{,}78 \cdot 10^3$кг/м^3) образца вычислялась осредненная толщина стенки. При расхождениях (они были менее $\pm 0{,}002$ мм) с замерами в расчетах использовалась толщина, найденная по результатам взвешивания.

Для крепления в установке на концы образца после отжига напаивались две втулки. При пайке во избежание перегрева рабочая часть образца омывалась водой. Перед отжигом, после него и после пайки проверялась прямолинейность образцов.

2. Для изучения степени однородности образцов выполнены предварительные опыты на 11 образцах на растяжение и кручение. Установлено, что до интенсивности напряжений $\sigma_i = 120$ МПа погрешность аппроксимации, задаваемая соотношением $\varepsilon_i = a\sigma_i^k$ для каждого из опытов, не превосходит 2% (к=5,6; $a = 1,25 \cdot 10^{-14}$(σ в МПа)).

3. Для определения времени выдержки, необходимого для стабилизации свойств, была определена скорость ползучести рис. 1 образцов, растянутых до различных значений e_i.

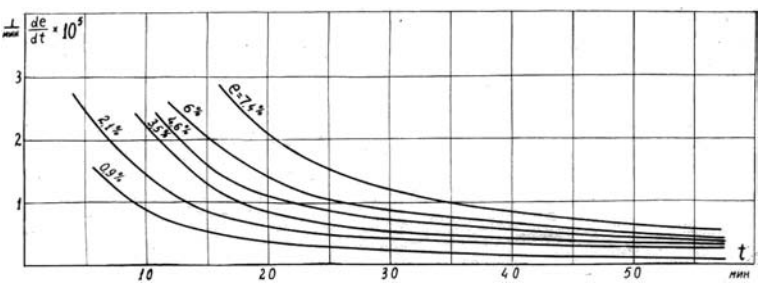


Рис. 1. Зависимость скорости ползучести от времени.

В дальнейших испытаниях величины выдержек выбирались с помощью кривых рис. 1 по скорости ползучести около $0{,}5 \cdot 10^{-5}$мин$^{-1}$, т.е. при $\varepsilon_{i0} < 1\%$ применялась 15-ти минутная и при ε_{i0}=(3-4)% — 30-ти минутная выдержка и т.п.

4. При активном нагружении в ходе проведения двенадцати опытов растягивающей силой и 4 опытов крутящим моментом и различных вариантах пассивного нагружения получено, что величина h и направление $\delta\boldsymbol{Э}$ практически не зависит от направления δS. Так наибольший поворот $\delta\boldsymbol{Э}$, соответствующий изменению направления δS на 90^o, составляет $\pm 2^o$ от среднего направления.

Для изучения влияния характера пути пассивного нагружения 10 образцов были подвергнуты растяжению, 3 образца - кручению и 4 образца первично нагружались по пути $\sigma = \sqrt{3}\tau$.

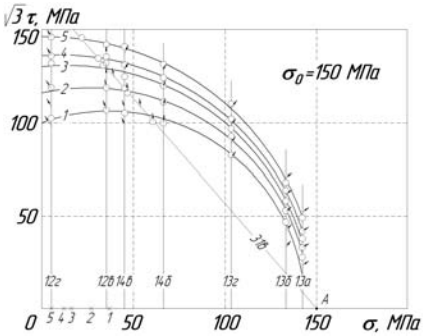


Рис. 2. Геометрические места равных пластических податливостей h при нагружении осевой силой.

5. Пути пассивного нагружения также исследовались в ходе проведения экспериментов. Результаты опытов позволили сделать следующие выводы: величины вторичных пластических деформаций, направления векторов, их приращений, величины модуля пластической податливости h в первом приближении определяются историей первичного нагружения и текущим напряженным состоянием.

6. Геометрические места равных пластических податливостей h показаны на рис. 2–5 для первичных нагружений до σ_{i0} =150 МПа соответственно осевой силой (рис. 2), крутящим моментом (рис. 3), по пути $\sigma = \sqrt{3}\tau$ (рис. 4) и по двухзвенному пути ОА′А (рис. 5).

Геометрические места равных h показаны кривыми 1–5, проведенными через точки с модулями пластической податливости $1\cdot10^{-11}$, $2\cdot10^{-11}$, $3\cdot10^{-11}$, $5\cdot10^{-11}$, $1\cdot10^{-10}$ Па$^{-1}$. Пути вторичного нагружения, на которых найдены эти точки, изображены тонкими линиями, в разрывах указаны номера соответствующих образцов.

Конец первичного нагружения отмечен точкой А, вблизи него кривые h не показаны, т.к. они сближаются друг с другом. В ряде точек путей вторичного нагружения стрелками указаны направления $\delta\boldsymbol{Э}$.

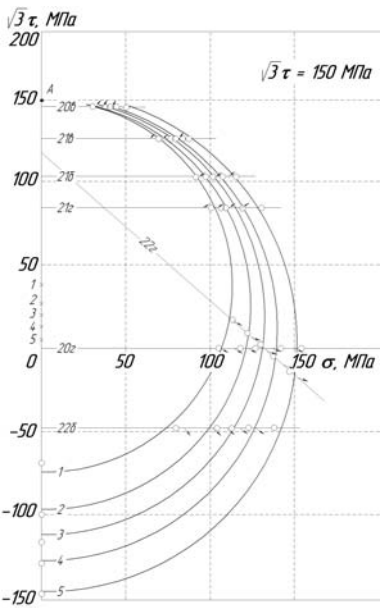


Рис. 3. Геометрические места равных пластических податливостей h при нагружении крутящим моментом.

Во всех изучавшихся случаях деформационная анизотропия проявлялась при первых пластических деформациях около 0,2% и не исчезала при больших значениях ε_{i0}. Геометрические места равных h аппроксимировались окружностями, положения центров (показаны крестиками 1–5) и радиусы которых находились по методу наименьших квадратов. При этом

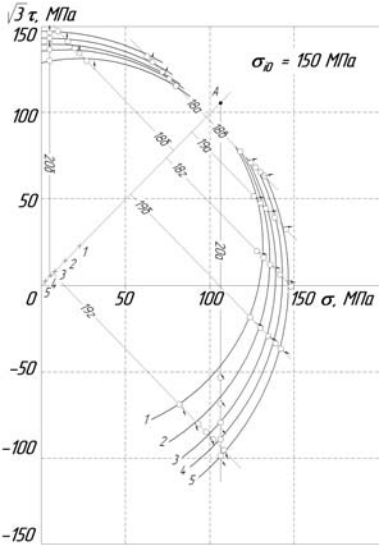


Рис. 4. Геометрические места равных пластических податливостей h при нагружении по пути.

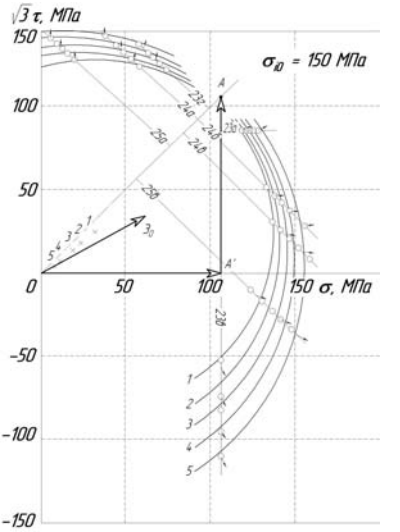


Рис. 5. Геометрические места равных пластических податливостей h по двухзвенному пути OA'A.

отклонение не превосходило 2 – 3% величины радиуса, т.е. имело тот же порядок, что и разброс, обусловленный неоднородностью образцов.

Направление первичной деформации при сложном пути нагружения показано на рис. 5 вектором $\boldsymbol{Э}_0$. Во всех случаях пропорционального нагружения эти центры лежат на линии первичного нагружения. При сложных путях первичного нагружения они смещались к большей проекции $\boldsymbol{Э}_0$.

Форма и свойства поверхностей равных остаточных деформаций соответствуют приведенным в [6] и многочисленным экспериментальным данным для поликристаллических металлов.

7 . Заключение

В диапазоне $10^{-11}\text{Па}^{-1} \leqslant h < 10^{-10}\text{Па}^{-1}$ геометрические места равных h близки к окружностям. Направление смещений их центров определяется отношением компонент пластической деформации, а модуль этого вектора зависит от h, отвечающего данной окружности и не зависит от истории нагружения. Радиусы окружностей не зависят от характера пути первичного нагружения и определяются значением h и интенсивностью σ_{i0}, до которой доводилось первичное нагружение.

При $h < 10^{-11}$ Па^{-1} геометрические места равных h приближённо можно считать окружностями, проходящими через последнюю точку пути первичного нагружения. Центры этих окружностей располагаются на

той же прямой, что и центры окружностей, отвечающих бóльшим значениям h.

Наблюдается систематическое отклонение векторов $\delta\boldsymbol{Э}$ от нормалей к окружностям равных h в сторону противоположную положению последней точки первичного нагружения. Однако, эти отклонения невелики.

Предложенные определяющие уравнения позволили описать деформирование при сложных путях нагружения, в том числе при внутренних "пилообразных"путях нагружения вблизи окружности Мизеса.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №09-01-00506-а

Литература

1. *Mroz Z.* On the destription of anisotropic workhardening // J. Mech. Phys. Solids, 1967. V. 15. №3. P. 163-175.
2. *Mroz Z., Norries V.A., Zienkiewicz O.C.* An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading // Int. J. for Numerical and analytical Methods in Geomechanics, 1978. V.2. №3. P.203–221.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математическойтеории, М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
4. *Изотов И.Н., Мельников Б.Е., Семенов А.С., Семенов С.Г.* Определение свойств поля пластических податливостей на никелевых образцах. Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009, №2(78), С.165–173.
5. *Изотов И.Н., Яген Ю.И.* Изучение пластического деформирования металла с деформационной анизотропией, созданной в процессе предварительного нагружения // ДАН СССР, 1961. т.139. №3. С.576–579.
6. *Яген Ю.И., Шишмарев О.А.* Некоторые результаты исследования границ упругого состояния пластически растянутых образцов никеля // ДАН СССР, 1958. т.119. №1. С. 46–48.

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ: ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

А.А. Мовчан, С.А. Казарина, Т.Л. Сильченко

Институт прикладной механики РАН
Москва, Россия

movchan47@mail.ru

Приведены определяющие соотношения термодинамической модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы (СПФ) при фазовых и структурных превращениях. Установлено положение об активных процессах пропорционального изменения компонент девиатора напряжений. Модель количественно и качественно правильно описывает склерономные свойства СПФ. Описаны экспериментальные данные, следуя которым процессы деформирования СПФ могут зависеть от скоростей изменения внешних воздействий. Изложена простейшая модель, описывающая реономные свойства СПФ.

Функциональные свойства СПФ определяются происходящими в этих материалах фазовыми превращениями (развивающийся при охлаждении прямой переход от аустенитной фазы к мартенситной, имеющей менее симметричную кристаллическую решетку и происходящее при нагреве обратное превращение) и структурным переходом (увеличение степени ориентированности низкосимметричных мартенситных элементов, наблюдаемое при росте действующих напряжений). Если прямое фазовое превращение происходит под действием механических напряжений, то оно сопровождается накоплением неупругой деформации. Структурный переход также приводит к росту неупругих деформаций с увеличением интенсивности действующих напряжений. Для обратного превращения характерно явление памяти формы – снятие как структурных, так и фазовых деформаций. СПФ обладают весьма сложными теплофизическими свойствами. При прямом фазовом превращении выделяется достаточно большое количество латентного тепла фазового перехода, при обратном примерно такое же количество тепла поглощается. Развитие как фазовых, так и структурных деформаций сопровождается диссипативными явлениями. Характерные температуры фазовых переходов зависят от действующих напряжений и накопленных неупругих деформаций. Ниже приведён вариант системы термодинамических определяющих соотношений, описывающий эти свойства СПФ.

$$q = \varphi(t), \quad \varphi(t) = 1/2\big(1 - \cos(\pi t)\big) \ \text{при} \ 0 \le t \le 1,$$
$$\varphi(t) = 0 \ \text{при} \ t \le 0, \quad \varphi(t) = 1 \ \text{при} \ t \ge 1, \tag{1}$$

$$t = (M_s^\sigma - T)/(M_s^0 - M_f^0),$$
$$M_s^\sigma = M_s^0 + \omega_{ij}^+ \sigma_{ij}{}'/\Delta S_0 + Z(\sigma_{ij})/\Delta S_0 + \sigma_{kk}\varepsilon_0/(3\Delta S_0), \tag{2}$$

$$t = 1 + (A_s^\sigma - T)/(A_s^0 - A_f^0),$$
$$A_s^\sigma = A_s^0 + \omega_{ij}^- \sigma_{ij}{}'/\Delta S_0 + Z(\sigma_{ij})/\Delta S_0 + \sigma_{kk}\varepsilon_0/(3\Delta S_0), \tag{3}$$

$$6Z(\sigma_{ij}) = \sigma_{kk}^2 \Delta K/(K_A K_M) + \sigma_i^2 \Delta G/(G_A G_M),$$
$$\Delta K = K_A - K_M, \quad \Delta G = G_A - G_M,$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{phst} + \varepsilon_{ij}^T, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{ij}^{e\prime} = \frac{\sigma_{ij}{}'}{2G}, \quad \varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K}\frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \ \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{phst\prime}, \ d\varepsilon_{ij}^{phst\prime} = d\varepsilon_{ij}^{ph\prime} + d\varepsilon_{ij}^{st}, \ \varepsilon_{ij}^T = \alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \tag{6}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2}\rho\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_i} q p_M(\sigma_i) d\sigma_i, \ \text{при} \ d\sigma_i > 0 \ \text{иначе} \ d\varepsilon_{ij}^{st} = 0, \tag{7}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph\prime} = \omega_{ij}^+ dq,$$
$$\omega_{ij}^+ = \frac{3}{2}\rho\frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_i}(1 - f(q)q) F_A(\sigma_i) + f(q)\varepsilon_{ij}^{phst\prime} \ \text{при} \ dq > 0, \tag{8}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph\prime} = \omega_{ij}^- dq, \quad \omega_{ij}^- = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst\prime}}{q} \ \text{при} \ dq < 0, \tag{9}$$

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + T\alpha \dot{\sigma}_{kk} - \big(\Delta U_0 + \sigma_{kk}\varepsilon_0/3 + \omega_{ij}\sigma_{ij}{}'\big)\dot{q} - \rho q p_M(\sigma_i)\sigma_i \dot{\sigma}_i. \tag{10}$$

Уравнение (1) определяет зависимость объемной доли мартенситной фазы q от безразмерного параметра температуры t, который связан с температурой T и напряжениями σ_{ij} соотношениями (2) для прямого фазового превращения и соотношениями (3) для обратного фазового превращения. Здесь M_s^0, M_f^0, A_s^0, A_f^0 — температуры начала и окончания (индексы s и f) прямого и обратного (символы M и A) термоупругого мартенситного превращения в отсутствии напряжений (верхний индекс нуль), M_s^σ, M_f^σ, A_s^σ, A_f^σ — те же величины при наличии напряжений, штрихом обозначается девиатор, ΔS_0 — объемная плотность энтропии фазового перехода, ε_0 — линейная деформация объемного эффекта реакции прямого мартенситного превращения, G_A, G_M, K_A, K_M — модуль сдвига

и утроенный объемный модуль в аустенитном (индекс A) и мартенситном (индекс M) фазовом состоянии. Полная деформация ε_{ij} представляется суммой упругой ε_{ij}^{e}, температурной ε_{ij}^{T} и фазово-структурной ε_{ij}^{phst} деформации (4). Упругие деформации определяются зависимостями (5), температурные – последней формулой (6). Фазово-структурная деформация делится на объемную часть, пропорциональную параметру q и девиатор, приращение которого складывается из двух частей, связанных с фазовым ($d\varepsilon_{ij}^{ph\prime}$) и со структурным ($d\varepsilon_{ij}^{st}$) переходами. Величина $d\varepsilon_{ij}^{st}$ отлична от нуля лишь в случае, если интенсивность напряжений возрастает $d\sigma_i > 0$ и определяется формулой (7) независимо от того, происходит прямое или обратное фазовое превращение, или фазовый состав не изменяется. Здесь $p_M(\sigma_i)$ — плотность распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ, находящегося в мартенситном состоянии, ρ — параметр материала, имеющий смысл предельной интенсивности фазово-структурной деформации. Величина $d\varepsilon_{ij}^{ph\prime}$ определяется формулой (8) для случая прямого превращения и формулой (9) для обратного превращения. В (8) $F_A(\sigma_i)$ — интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ, находящемся в аустенитном состоянии, $f(q)$ — материальная функция, удовлетворяющая ограничениям $0 \le f(q) \le 1/q$. Соотношение (10) это связное уравнение энергетического баланса СПФ, k_q — коэффициент теплопроводности, C_σ — теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении, ΔU_0 — объемная плотность латентного тепла фазового перехода. Последнее слагаемое правой части (10) отлично от нуля лишь при условии $d\sigma_i > 0$. Диссипативные эффекты описываются входящим в (10) слагаемым $\omega_{ij}\sigma_{ij\prime}$, где $\omega_{ij} = \omega_{ij}^{+}$ для прямого и $\omega_{ij} = \omega_{ij}^{-}$ для обратного превращения.

Приведенная здесь система определяющих соотношений для СПФ отличается от предложенной в [1] наличием термодинамического замыкания [2] (выражение (2) и (3) для M_s^σ, A_s^σ и уравнения энергетического баланса (10)), которые являются следствиями законов термодинамики и гипотезы об аддитивности потенциала Гиббса, а также тем, что в данной модели учитывается возможность структурного превращения при обратном фазовом переходе, чего не было в модели [1].

Последнее обстоятельство позволило существенно расширить область применимости положения об активных процессах пропорционального изменения компонент девиатора напряжений [1]. Речь идет о случае, когда функции распределения интенсивности микронапряжений в аустенитном и мартенситном состояниях СПФ совпадают, рассматривается фрагмент процесса, когда происходит только прямое или только обратное превращение, отсутствует разгрузка $d\sigma_i \ge 0$ и компоненты девиатора напряжений меняются пропорционально одному параметру. Используя теорему Пфаф-

фа можно доказать, что в этом случае решение системы уравнений в приращениях (7) – (9) для девиатора фазово-структурной деформации ε_{ij}^{phst}, удовлетворяющее начальному условию $\varepsilon_{ij}^{phst}{}'(q_0, \sigma_{ij0}{}') = \varepsilon_{ij}^0$ единственно, определяется лишь конечной и начальной точками процесса и не зависит от истории термомеханического нагружения между этими точками.

Если рассматриваемый процесс состоит из некоторого количества следующих друг за другом фрагментов прямого или обратного превращения, сопровождающегося или нет структурными переходами, причем первый фрагмент начинается из полностью аустенитного состояния, то для решения справедливо конечное соотношение между неупругой деформацией, напряжениями и параметром фазового состава

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \frac{3}{2}\rho \frac{\sigma_{ij}{}'}{\sigma_i} q F(\sigma_i)$$

Сформулированная модель качественно и количественно правильно описывает склерономные свойства СПФ. Однако проведенные экспериментальные исследования показали, что СПФ типа никелида титана в некоторых случаях демонстрирует поведение, зависящее от скорости изменения внешних воздействий. При жестком изотермическом нагружении образца из СПФ для комнатной или пониженной температур, соответствующих мартенситному состоянию материала, наблюдается зависимость формы диаграммы $\sigma \div \varepsilon$ от скорости движения активного захвата. При мягком изотермическом ступенчатом нагружении СПФ как при температуре мартенситного, так и при температуре начально-аустенитного состояния наблюдается ограниченный рост со временем деформации при постоянном напряжении после его скачкообразного увеличения. При изотермической ступенчатой разгрузке в режиме сверхупругости наблюдается убывание деформации со временем при постоянном напряжении после его скачкообразного уменьшения. Изменение деформации при постоянном напряжении затухает с ростом промежутка времени прошедшего с момента скачкообразного изменения напряжений. Предложена одномерная модель наблюдаемых процессов, сводящаяся к уравнению $\dot{\varepsilon} = k\,(\varphi_1(q,\sigma) - \varepsilon)\,/\,(\varepsilon - \varphi_2(q,\sigma))$, где $\varphi_1(q,\sigma)$, $\varphi_2(q,\sigma)$ — операторы дающие зависимость неупругой деформации от истории изменения q и σ для предельно медленных и предельно быстрых процессов термомеханического нагружения СПФ, k — постоянная.

Литература

1. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях.// Изв. РАН. МТТ. 2010. №3. С.118-130.
2. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях.// Деформация и разрушение материалов. 2009. №8. С.2-9.

ВАРИАНТ ТЕРМОМЕХАНИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

И. Н. Молодцов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

mechmathmsu@mail.ru

Для четырехчленных уравнений дифференциального типа, связывающих напряжения и деформации в процессах сложного нагружения пластически деформируемого материала, предложен вариант идентификации определяющих функционалов, произведено сравнение с теорией средних кривизн на трехмерных траекториях деформаций. Для детализации описания построена система трех трехчленных соотношений для векторов активных и диссипативных напряжений, пластических деформаций. Найдены условия эквивалентности двух постановок и связи их определяющих функционалов. На основании детализированной модели получено уравнение для свободной энергии и скорости диссипации.

Большинство определяющих соотношений в теории пластичности используют постулаты пластичности, разделение полных деформаций на обратимую и необратимую части, представления о поверхности нагружения и характере упругой разгрузки. Альтернативный подход использовал А.А.Ильюшин в [1] при построении класса соотношений дифференциального типа, связывающих между собой физически наблюдаемые величины — напряжения и полные деформации — в процессах сложного нагружения. Преимущества данного подхода бесспорны, но при его использовании, кроме калибровки определяющих функционалов, также требуется установление переменных состояния, условий активного нагружения (диссипации) и законов разгрузки.

Основные уравнения. При построении определяющих соотношений, описывающих изотермические процессы сложного пластического нагружения деформируемого тела, применяем подход, предложенный А.А.Ильюшиным, а позднее в [5] конкретизированный В.И.Малым.

Используем стандартные обозначения теории упругопластических процессов. Так $\overline{\sigma}$ и $\overline{\varepsilon}$ обозначают любые согласованные по работе пары пятимерных векторов-девиаторов напряжений и деформаций. Преимуществом полных деформаций и напряжений перед любыми другими величинами является их измеримость (наблюдаемость). Однако, при помощи этих величин сложно физически корректно получить представления тер-

модинамических функций. Тем не менее нашей непосредственной целью является построение базовых определяющих соотношений теории, изучение вопросов, связанных с калибровкой определяющих функционалов, и, лишь затем, обсуждение, постановка и решение одной из возможных задач о построении термодинамических переменных состояния.

В процессе нагружения трехчленная формула А.А.Ильюшина тождественно преобразуется к форме

$$d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{P} d\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{P} \right) \{ d\overline{\sigma} - (\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}) \overline{n}_\sigma \}, \overline{n}_\sigma \equiv \overline{\sigma}/\sigma, \tag{0}$$

в которой видна использованная при построении формулы идея расширения векторного базиса уравнения процессов малой кривизны. Из (0) следуют два соотношения:

$$(\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}) = P(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}), \ (\overline{n}_\varepsilon - \overline{n}_\sigma(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon), d\overline{\sigma}) = N(\overline{n}_\varepsilon - \overline{n}_\sigma(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon), d\overline{\varepsilon}),$$

которые используются для идентификации определяющих функционалов P и N. Трехчленная формула применяется в теории пластичности для описания процессов сложного нагружения с траекториями средней кривизны. Подобно тому, как это было сделано в [1], [2] далее изучаются функциональные окрестности решений самих трехчленных уравнений А.А.Ильюшина. В этом случае уравнение процесса нагружения имеет вид:

$$\begin{aligned} d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{N} d\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) (\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}) \overline{n}_\sigma + K \{ d\overline{\sigma} - (d\overline{\sigma}, \overline{n}_\sigma) \overline{n}_\sigma \} + \\ + L \{ d\overline{\varepsilon} - (d\overline{\varepsilon}, \overline{n}_\sigma) \overline{n}_\sigma \} + \frac{1}{\Psi} \Big\{ M_1 \frac{\sigma}{\varepsilon} (\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}) + M_2 \frac{\sigma}{\varepsilon} (\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) + \\ + M_3 (\overline{n}_\varepsilon, d\overline{\sigma}) + M_4 (\overline{n}_\varepsilon, d\overline{\varepsilon}) \Big\} \{ \overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon) \overline{n}_\sigma \}, \ \Psi \equiv 1 - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) входят кроме функционалов P, N основного процесса также произвольные функционалы процесса K, L, $M_1, \cdots, M_4$ расширенного векторного базиса. Уравнения обратного процесса (процесса деформации) записываются в подобном (1) виде:

$$\begin{aligned} d\overline{\sigma} = N d\overline{\varepsilon} + (P - N)(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) \overline{n}_\sigma + A \{ d\overline{\sigma} - (d\overline{\sigma}, \overline{n}_\varepsilon) \overline{n}_\varepsilon \} + \\ + B \{ d\overline{\varepsilon} - (d\overline{\varepsilon}, \overline{n}_\varepsilon) \overline{n}_\varepsilon \} + \frac{1}{\Psi} \Big\{ C_1 (\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}) + C_2 (\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) + \\ + C_3 \frac{\varepsilon}{\sigma} (\overline{n}_\varepsilon, d\overline{\sigma}) + C_4 \frac{\varepsilon}{\sigma} (\overline{n}_\varepsilon, d\overline{\varepsilon}) \Big\} \{ \overline{n}_\sigma - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon) \overline{n}_\varepsilon \}. \end{aligned} \tag{2}$$

Это сотношение содержит еще 6 функционалов — N, A, B, $C_1, \cdots, C_4$. Из условий эквивалентности уравнений (1) и (2) следуют связи между функционалами и определяются независимые функционалы процесса. Единое

функциональное уравнение содержит всего 3 независимых функционала и представляется в одной из двух эквивалентных форм:

$$d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{Q}d\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)(\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma})\overline{n}_\sigma + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{Q}\right)(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\sigma})\overline{n}'_\varepsilon, \qquad (3)$$

$$\overline{n}'_\varepsilon \equiv \frac{\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\varepsilon, \overline{n}_\sigma)\overline{n}_\sigma}{\sqrt{1 - (\overline{n}_\varepsilon, \overline{n}_\sigma)^2}}$$

для процессов нагружения и

$$d\overline{\sigma} = Qd\overline{\varepsilon} + (P - Q)(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon})\overline{n}_\sigma + (N - Q)(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\varepsilon})\overline{n}'_\varepsilon \qquad (4)$$

для процессов деформаций. Из этих соотношений следует, что при сколь угодно сложной геометрии 5-ти мерной траектории процесса в данном рассмотрении локально процесс деформирования является трехмерным. Скалярные соотношения

$$P(\overline{n}_\sigma, d\overline{\varepsilon}) = (\overline{n}_\sigma, d\overline{\sigma}),\ \ N(\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\varepsilon}) = (\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\sigma}),\ \ Q(\overline{n}_\perp, d\overline{\varepsilon}) = (\overline{n}_\perp, d\overline{\sigma}) \qquad (5)$$

следуют из уравнений и раскрывают физический смысл определяющих функционалов. Здесь $\overline{n}_\perp$ обозначает направляющий вектор нормали к плоскости векторов напряжений и деформаций, построенный по направляющему вектору деформаций. Из уравнения (4) следует, что продолжение траектории деформаций вдоль прямой, совпадающей с направлением вектора напряжений, не приводит к отклонению вектора напряжений от данного направления на всем прямолинейном участке. Это свойство (известное как гипотеза локальной простоты) противоречит принципу запаздывания векторных свойств – одному из главных положений теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина. Именно это обстоятельство, а также хорошо известный экспериментальный факт о том, что гипотеза локальной простоты выполняется далеко не всегда, [7], приводят к необходимости рассматривать в [3], [4], кроме калибровки уравнений (4) также варианты дальнейшего их усложнения.

Идентификация определяющих функционалов. Соотношения (5) используются для определения функционалов. В третьем соотношении (5)

$$\overline{n}_\perp = \overline{n}_1 - (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_1)\overline{n}_\sigma - (\overline{n}'_\varepsilon, d\overline{\varepsilon})\overline{n}'_\varepsilon,$$

но для трехмерных траекторий деформаций используется векторное произведение: $\overline{n}_\perp = [\overline{n}_\sigma, \overline{n}'_\varepsilon]$. Уравнения (5) записываются для трехмерных траекторий деформаций в естественном сопровождающем репере Френе:

$$\overline{n}_\sigma = \cos(\theta_1)\overline{n}_1 - \sin(\theta_1)(\cos(\theta_2)\overline{n}_2 - \sin(\theta_2)\overline{n}_3)),$$

$$\overline{n}_\varepsilon = \cos(\phi_1)\overline{n}_1 - \sin(\phi_1)(\cos(\phi_2)\overline{n}_2 - \sin(\phi_2)\overline{n}_3)).$$

Получившиеся соотношения преобразуются в систему дифференциальных уравнений для углов сближения вектора напряжений с векторами естественного сопровождающего репера:

$$P\cos(\theta_1) = \frac{d\sigma}{ds},$$
$$\frac{d\theta_1}{ds} - \kappa_1\cos(\theta_2) = -\frac{Q}{\sigma}\sin(\theta_1) - \frac{N-Q}{\sigma}\sin(\theta_1)\omega^2, \tag{6}$$
$$\omega \equiv \frac{\Delta}{\sqrt{D}},\ D \equiv \Delta^2 + \sin^2(\phi_1)\sin^2(\theta_2 - \phi_2),$$
$$\Delta \equiv \sin(\theta_1)\cos(\phi_1) - \cos(\theta_1)\sin(\phi_1)\cos(\theta_2 - \phi_2),$$
$$\frac{d\theta_2}{ds} - \kappa_2 = -\kappa_1\sin(\theta_2)\frac{\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)} - \frac{(N-Q)}{\sigma}\omega\sqrt{1-\omega^2}. \tag{7}$$

В согласии с экспериментом возможно задавать векторные свойства материала соотношениями:

$$\frac{d\theta_1}{ds} - \kappa_1 = -\frac{\theta_1}{\lambda_1},\ \frac{d\theta_2}{ds} - \kappa_2 = -\frac{\theta_2}{\lambda_2} \tag{8}$$

и находить из (7) и (8) реализующие такие режимы функционалы N и Q :

$$\frac{N}{\sigma} = \frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \kappa_1\frac{\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)}\right)\sin(\theta_2)\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}, \tag{9}$$
$$\frac{Q}{\sigma} = \frac{1}{\lambda_1} - \left(\frac{1}{\lambda_2} - \kappa_1\frac{\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)}\right)\sin(\theta_2)\frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}. \tag{10}$$

Это и делается в [4] на основании опытных данных [6], где показано, что данная процедура калибровки функционалов рассматриваемой теории улучшает точность описания по сравнению с теорией средних кривизн.

Детализация постановки. Рассматриваем произвольный процесс деформаций с траекторией средней кривизны и кручения. Для описания используем уравнение (4) с калибровкой функционалов согласно (6), (9), (10). Для детального (термодинамического) описания того же процесса выбираем модель:

$$d\overline{\sigma}^\star = N^\star d\overline{\varepsilon} + (P^\star - N^\star)(n_\sigma^\star, d\overline{\varepsilon})\overline{n}_\sigma^\star,$$
$$d\overline{\varepsilon}_p = \frac{1}{N_1}d\overline{\sigma}^\star + \left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{N_1}\right)d\sigma^\star\overline{n}_\sigma^\star, \tag{11}$$
$$d\overline{\sigma}_p = N_p d\overline{\varepsilon}_p + (P_p - N_p)(\overline{n}_{\sigma_p}, d\overline{\varepsilon})\overline{n}_{\sigma_p}.$$

Уравнения (11) записаны для описания процесса деформаций. Они представляют собой уравнения для активных напряжений $\overline{\sigma}^{\star}$, пластических деформаций $\overline{\varepsilon}_p$ диссипативных напряжений $\overline{\sigma}_p$. Естественно отнести активные напряжения к параметрам состояния, а пластические деформации и диссипативные напряжения считать внутренними параметрами. С учетом первого уравнения (11) второе преобразуется к виду

$$d\overline{\varepsilon}_p = \left\{ \frac{N^{\star}}{N_1}\overline{n}_1 + \left(\frac{P^{\star}}{P_1} - \frac{N^{\star}}{N_1} \right) (\overline{n}_{\sigma}^{\star}, \overline{n}_1)\overline{n}_{\sigma}^{\star} \right\} ds.$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение для длины дуги траектории пластической деформации:

$$\frac{ds_p}{ds} = \sqrt{\left[\left(\frac{N^{\star}}{N_1} \right)^2 + \left\{ \left(\frac{P^{\star}}{P_1} \right)^2 - \left(\frac{N^{\star}}{N_1} \right)^2 \right\} (\overline{n}_{\sigma}^{\star}, \overline{n}_1)^2 \right]}. \qquad (12)$$

В уравнение (12) входит четыре функционала. Два из них $P^{\star}$ и $N^{\star}$ зависят от длины дуги траектории деформаций, а два других – от длины дуги траектории пластической деформации. Это следует из структуры уравнений (11), каждое из которых является трехчленной формулой и поэтому калибруется так же как трехчленная формула. Аналогичным образом преобразуется третье уравнение (11). Результат записывается в виде:

$$d\overline{\sigma}_p = N_p \left\{ \frac{N^{\star}}{N_1}\overline{n}_1 + \left(\frac{P^{\star}}{P_1} - \frac{N^{\star}}{N_1} \right) (\overline{n}_{\sigma}^{\star}, \overline{n}_1)\overline{n}_{\sigma}^{\star} \right\} ds +$$
$$+ (P_p - N_p)\overline{n}_{\sigma_p} \left(\overline{n}_{\sigma_p}, \frac{N^{\star}}{N_1}\overline{n}_1 + \left(\frac{P^{\star}}{P_1} - \frac{N^{\star}}{N_1} \right) (\overline{n}_{\sigma}^{\star}, \overline{n}_1)\overline{n}_{\sigma}^{\star} \right) ds.$$

Складываем последнее уравнение с первым уравнением (11) и используем условие аддитивности $d\overline{\sigma} = d\overline{\sigma}^{\star} + d\overline{\sigma}_p$. Получаем уравнение, определяющее зависимость полных напряжений от длины дуги траектории деформаций при детальном описании:

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = N^{\star} \left(1 + \frac{N_p}{N_1} \right) \overline{n}_1 + \left\{ P^{\star} \left(1 + \frac{N_p}{P_1} \right) - N^{\star} \left(1 + \frac{N_p}{N_1} \right) \right\} (\overline{n}_{\sigma}^{\star}, \overline{n}_1)\overline{n}_{\sigma}^{\star} +$$
$$+ (P_p - N_p)\overline{n}_{\sigma_p} \left\{ \frac{N^{\star}}{N_1} (\overline{n}_1, \overline{n}_{\sigma_p}) + \left(\frac{P^{\star}}{P_1} - \frac{N^{\star}}{N_1} \right) (\overline{n}_{\sigma}^{\star}, \overline{n}_1)(\overline{n}_{\sigma}^{\star}, \overline{n}_{\sigma_p}) \right\}. \qquad (13)$$

Та же самая зависимость представляется в ильюшинской постановке четырехчленной формулой (4). Поэтому возможно отождествить (13) и (4), считая постановку (11) детализацией уравнений (4). Условием эквивалентности двух уравнений является векторное равенство:

$$\overline{n}_1 \left\{ Q - N^{\star} \left(1 + \frac{N_p}{N_1} \right) \right\} + (P - Q)(\overline{n}_{\sigma}, \overline{n}_1)\overline{n}_{\sigma} + (N - Q)(\overline{n}'_{\varepsilon}, \overline{n}_1)\overline{n}'_{\varepsilon} =$$

$$= (\overline{n}_\sigma^\star, \overline{n}_1)\overline{n}_\sigma^\star \left\{ P^\star \left(1 + \frac{N_p}{P_1}\right) - N^\star \left(1 + \frac{N_p}{N_1}\right) \right\} + \qquad (14)$$

$$+(P_p - N_p)\overline{n}_{\sigma_p} \left\{ \frac{N^\star}{N_1}(\overline{n}_1, \overline{n}_{\sigma_p}) + \left(\frac{P^\star}{P_1} - \frac{N^\star}{N_1} \right) (\overline{n}_\sigma^\star, \overline{n}_1)(\overline{n}_\sigma^\star, \overline{n}_{\sigma_p}) \right\},$$

связывающее между собой функционалы двух рассматриваемых постановок. Скалярные связи получаются при последовательном скалярном умножении (14) на векторы $\overline{n}_1, \overline{n}_\sigma, \overline{n}'_\varepsilon, \overline{n}_\sigma^\star$. Результатом является вырожденная система линейных алгебраических уравнений относительно попарных произведений функционалов: $N_p N^\star/N_1$, $N_p P^\star/P_1$, $P_p N^\star/P_1$, $P_p P^\star/P_1$. Поэтому далее решается нелинейная система только трех уравнений относительно зависимых функционалов, в качестве которых назначаются функционалы $x \equiv N_p, y \equiv P_p, z \equiv N^\star/N_1$. В результате получаются представления зависимых функционалов через функционалы $P, Q, N, P^\star, N^\star, P_1$. Соотношение

$$\left\{ \frac{AB(A-C)}{(1-A^2)E - (1-AC)D} + A \right\} x \frac{P^\star}{P_1} = \Phi_3 +$$

$$+ \frac{B}{(1-A^2)E - (1-AC)D} \left\{ -(1-A^2)\Phi_2 + (1-AC)\Phi_1 \right\}$$

определяет N_p, из

$$xz = \frac{(\Phi_1 E - \Phi_2 D)/x - (P^\star/P_1)A(AE - CD)}{(1-A^2)E - (1-AC)D}$$

находится N_1, затем определяется P_p :

$$yz = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ [1 - A^2 - D(D - AB)]\Phi_2 - [1 - AC - E(D - AB)]\Phi_1 \right\} +$$

$$+x(P^\star/P_1) \left\{ \frac{A(A-C)}{\Delta_2} + \frac{AB}{(D - AB)} + \frac{A(DC - AE)}{(1-A^2)E - (1-AC)D} \right\} -$$

$$-y(P^\star/P_1)\frac{AB}{D - AB}, \ \Delta_2 \equiv (D - AB)(1-A^2)E - (1-AC)D.$$

Здесь использованы обозначения: $A \equiv (\overline{n}_{\sigma^\star}, \overline{n}_1)$, $B \equiv (\overline{n}_{\sigma^\star}, \overline{n}_{\sigma_p})$, $C \equiv (\overline{n}_{\sigma^\star}, \overline{n}_1)$, $D \equiv (\overline{n}_{\sigma_p}, \overline{n}_1)$, $E \equiv (\overline{n}_{\sigma_p}, \overline{n}_\sigma)$, $F \equiv (\overline{n}_{\sigma^\star}, \overline{n}'_e)$, $G \equiv (\overline{n}_{\sigma_p}, \overline{n}'_e)$, $H \equiv (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_1)$, $K \equiv (\overline{n}_1, \overline{n}'_e)$, $\Phi_1 \equiv Q - N^\star + (P - Q)H^2 + (N - Q)K^2 - (P^\star - N^\star)A^2$, $\Phi_2 \equiv P - N^\star - (P^\star - N^\star)AC$, $\Phi_3 \equiv (Q - N^\star)A + (P - Q)HC + (N - Q)KF$. Стандартная калибровка трехчленной формулы А.А.Ильюшина

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = N\overline{n}_1 + (P - N)(\overline{n}_\sigma, \overline{n}_1)\overline{n}_\sigma$$

предполагает вычисление функционалов P, N по зависимости $\sigma(s)$ простого нагружения и следу запаздывания $\lambda_1(s)$:

$$P = \frac{1}{\cos(\theta_1)} \frac{d\sigma(s)}{ds}, \; N = \frac{\sigma(s)}{\lambda_1(s)}. \tag{15}$$

Такая калибровка имеет под собой экспериментальную основу. В нашем случае три независимых функционала модели (11) также могут находиться по формулам (15), а остальные функционалы должны вычисляться. Естественно в этом случае и дополнительные уравнения для различных углов сближения будут иметь более сложную структуру, чем те, что получались в теории средних кривизн.

Переменные состояния. Диссипация. Присоединяем к уравнениям (11) условие $d\overline{\varepsilon}^\star \equiv d\overline{\varepsilon} - d\overline{\varepsilon}_p$. Тогда для "упругих"деформаций получим уравнение

$$d\overline{\varepsilon}^\star = \left(1 - \frac{N^\star}{N_1}\right) d\overline{\varepsilon} + \left(\frac{N^\star}{N_1} - \frac{P^\star}{P_1}\right) (\overline{n}_\sigma^\star, d\overline{\varepsilon}) \overline{n}_\sigma^\star. \tag{16}$$

Изменение свободной энергии складывается из двух частей. Первая соответствует скорости совершения работы шаровой части тензора напряжений на деформациях, а вторая $dF' \equiv (\overline{\sigma}^\star, d\overline{\varepsilon}^\star)$. Тогда из (16) и (11) получим:

$$dF' = \left(\frac{1}{P^\star} - \frac{1}{P_1}\right) \sigma^\star d\sigma^\star. \tag{17}$$

С учетом принятой в теории процессов средней кривизны приближенной калибровкой функционалов задачи (11) получаем:

$$\delta D = \delta A - dF = (\sigma - \sigma^\star) dS + \sigma^\star dS_p,$$

$$dS_p = dS \sqrt{\left(\frac{N^\star}{N_1}\right)^2 \left\{1 - (\overline{n}_\sigma^\star, \overline{n}_1)^2\right\} + \left(\frac{P^\star}{P_1}\right)^2 (\overline{n}_\sigma^\star, \overline{n}_1)^2}.$$

В исходных уравнениях (11) вектор $\overline{\sigma}^\star$ введен аналогично [3] как вектор-девиатор активных напряжений. В выражение свободной энергии (16) активные напряжения вошли в качестве аргумента, а значит определяют состояние упруго-пластического тела. Аналогично введен второй вектор состояния – вектор "упругих"деформаций $\overline{\varepsilon}^\star$. Нетрудно получить уравнение связи этих векторов. Результат дается формулой:

$$d\overline{\sigma}^\star = \frac{N^\star N_1}{N_1 - N^\star} d\overline{\varepsilon}^\star + \left(\frac{P^\star P_1}{P_1 - P^\star} - \frac{N^\star N_1}{N_1 - N^\star}\right) (\overline{n}_\sigma^\star, d\overline{\varepsilon}^\star) \overline{n}_\sigma^\star. \tag{18}$$

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд. АН СССР, 1963. 272 с.
2. *Молодцов И.Н.* Процессы сложного нагружения в теории пластичности. // В сборнике Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А.Ильюшина, Москва, 2006, С.204–210.
3. *Огибалов П.М., Тамбовцев Е.П., Молодцов И.Н.* Динамическая калибровка диссипации в нелокальных композитах. // Механ. композит. материал., Рига, 1984, №3, С.408-416.
4. *Молодцов И.Н.* Математическое моделирование упругопластических процессов с траекториями средней кривизны. // Интеллектуальные системаы, Москва, т. 13, вып. 1-4,-2009,-с.69-78.
5. *Малый В.И.* Исследование некоторых функционалов теории упругопластических процессов. // В сборнике Упругость и неупругость, Москва, 1978, вып.5, С.107-116.
6. *Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В., Широв Р.И.* Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций. // Деп. в ВИНИТИ, 16.10.86, №7298-В86. 66 с.
7. *Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В.* Экспериментальная пластичность. Книга 1. Процессы сложного нагружения. Тверь: Тверской ГТУ, 2003. 170 с.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА СН-ЭВМ ИЛЬЮШИНА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ

П. А. Моссаковский, Р. А. Васин, Ф. К. Антонов

НИИ механики МГУ им. М.В.Ломоносова
Москва, Россия

Обсуждается проблема существенного расширения области применимости метода СН-ЭВМ. и его практической реализации. В качестве примера рассматривается применение идеологии метода СН-ЭВМ к решению задач динамической прочности.

Метод СН-ЭВМ был предложен А.А. Ильюшиным в шестидесятые годы прошлого века как экспериментально-вычислительная процедура решения краевых задач теории пластичности в условиях сложного нагружения [1,2]. Суть метода состояла в следующем: решение краевой задачи с использованием в первом приближении некоторого варианта определяющих соотношений (ОС); классификация полученных при численном решении краевой задачи траекторий деформаций; реализация на экспериментальной машине СН представительных траекторий из каждого класса (если он не был a priori включен в число допустимых для использованных в расчете ОС); построение по результатам экспериментов новых аппроксимационных ОС; проведение с использованием этих ОС повторных расчетов в рамках итерационной процедуры решения краевой задачи и т.д. Сформулированный первоначально в весьма общей форме, метод представлялся в то время излишне абстрактным и трудно реализуемым на практике, вследствие чего его применение и развитие ограничилось решением тестовых, хотя и сложных, задач (в том числе с проведением экспериментов на СН) и численными исследованиями сходимости метода.

Практическая реализация метода СН-ЭВМ требует решения следующих проблем.

1. *Разработка эффективных методов классификации процессов деформирования.* Эффективная классификация траекторий деформаций, получаемых при численном решении краевой задачи, должна существенно ограничить количество необходимых экспериментов на СН. Некоторый опыт в этом направлении накоплен при решении тестовых задач. Кроме того, развит новый подход к классификации процессов деформирования на основе расширенных формулировок постулата изотропии и принципа запаздывания векторных свойств [3, 4]. В рамках этого подхода множество рассматриваемых процессов расширено в область конечных деформаций, а также сформулированы условия понижения

размерности представительной траектории в пространстве деформаций до воспроизводимой в реальном эксперименте на СН.

2. *Наличие мощных вычислительных ресурсов.* В свое время ограниченность вычислительных ресурсов являлась существенным фактором, сдерживающим развитие метода СН-ЭВМ. Сейчас в связи с развитием мощных и доступных программно-вычислительных средств её влияние почти нивелировано.
3. *Наличие специальной экспериментальной техники (машины СН).* Доступность проведения экспериментов на сложное нагружение и в настоящее время весьма ограничена. При теоретическом анализе сходимости метода СН-ЭВМ в качестве машины СН обычно использовалась виртуальная машина, воспроизводившая "материальный"отклик по одной или нескольким альтернативным теориям [5]. Кроме того, при решении многих частных задач машина СН может быть заменена относительно простыми экспериментальными стендами [6,7].

Таким образом, в настоящее время складывается ситуация, которая позволяет надеяться на успешное развитие направления, основанного на применении метода СН-ЭВМ.

Идеология метода СН-ЭВМ может быть с успехом применена и за пределами "классической"пластичности в качестве достаточно универсального метода решения сложных, существенно нелинейных краевых задач механики, и, в первую очередь, тех из них, где необходимо обеспечить высокую надежность полученных решений. В последние годы для решения задач механики все больше используются методы прямого компьютерного моделирования. Во многих случаях такой подход является вполне оправданным, тем более в случаях, когда качество компьютерного моделирования оценивается сравнением с результатами натурных испытаний. Однако существует немало проблем, когда возможность проведения натурных полномасштабных экспериментов ограничена, их реализация экономически нецелесообразна или в принципе невозможна. К таким задачам относятся, в частности, моделирование различного рода аварийных ситуаций, которые могут приводить к катастрофическим последствиям. Для получения надежных решений в подобных случаях разумно использовать подходы, развитые на основе метода СН-ЭВМ. Так, в работах [6,7] рассмотрен вариант развития метода СН-ЭВМ применительно к решению краевых задач динамической прочности. При этом не накладываются существенные ограничения на классы реализуемых в задачах термомеханических процессов, допускаются достаточно общие краевые условия, в том числе контактные, учитываются локальные и макро- разрушения.

Адаптация метода для решения такого рода задач требует корректировки некоторых базовых понятий: вместо процесса (траектории) деформаций вводится осредненный по времени процесс — термомеханическое

состояние (ТМС). В качестве основной характеристики сложности ТМС принимается приращение параметра вида напряженного состояния k за характерное время динамического воздействия. Классификация ТМС производится по двум основным параметрам — скорости деформаций и k. Вместо машины СН используются экспериментальный стенд для динамических испытаний по методу Кольского [8, 9] и установка для проведения испытаний по пробиванию преграды ударником.

Для иллюстрации подхода рассмотрим процедуру решения краевой задачи, моделирующей последствия обрыва рабочей лопатки ротора авиационного двигателя.

Краевая задача решается методом прямого компьютерного моделирования на виртуальном стенде последовательными итерациями в соответствии со схемой рис. 1.

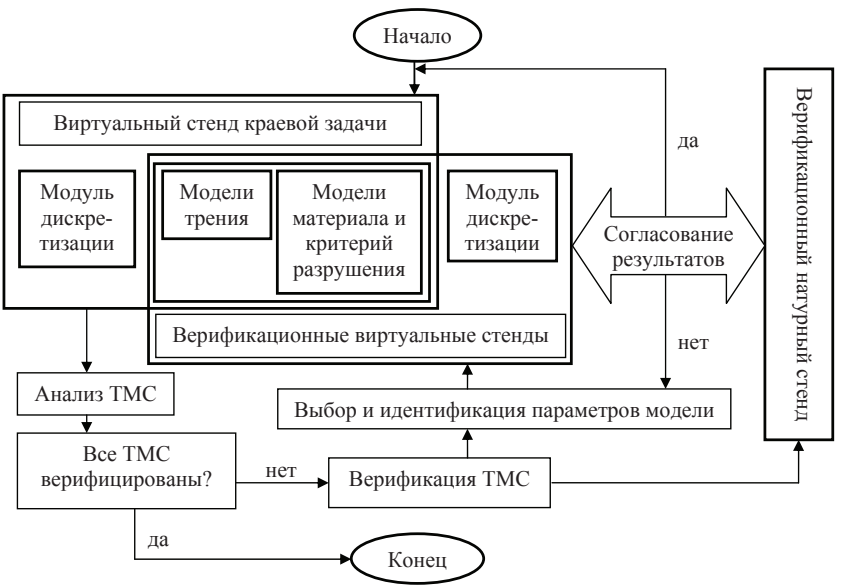


Рис. 1. Схема решения краевой задачи динамической прочности.

Так как наибольший интерес в этой задаче представляет характер разрушения и фрагментации элементов конструкции, ниже ограничимся описанием процедуры согласования и уточнения модели локального разрушения по результатам натурных и виртуальных верификационных экспериментов. Процедура согласования и верификации моделей материалов и закона трения на контактных границах подробно описана в [6,7].

На первом шаге в качестве критерия локального разрушения использовался простейший деформационный критерий разрушения по предель-

ной величине интенсивности пластических деформаций. По результатам решения определялись критические области с точки зрения опасности развития разрушения, характерные параметры ТМС: интенсивность пластических деформаций, скорости деформаций, величина параметра вида напряженного состояния. Последующая классификация выявила характерные классы ТМС, которым соответствовали значениями параметра вида напряженного состояния в диапазоне от -1 до 1 и скоростей деформаций от сотен до тысяч обратных секунд. Состояния, характеризуемые значениями параметра k из диапазона [-0.7;-0.5] воспроизводились в верификационных экспериментах на растяжение и разрушение гладких цилиндрических образцов по методу Кольского, из диапазона [0.3;0.5] моделировались в верификационных экспериментах на сжатие и разрушение цилиндрических образцов, в остальных случаях использовались испытания по пробиванию преград.

При согласовании результатов натурных и виртуальных экспериментов оценивались различные количественные и качественные характеристики: запреградная скорость ударника, масса и скорость выбиваемой пробки, форма и количество трещин в преграде; остаточная продольная деформация образца, величина сужения в шейке, характер разрушения. По результат проведенных испытаний на втором шаге итерации были построены аппроксимационные соотношения для критерия локального разрушения, базирующихся на моделях Гурсо [10] и Джонсона-Кука [11]. Предложенные соотношения применялись во всем диапазоне изменения параметра k (вязкое и хрупкое разрушение).

На рис. 2 и в таблице приведены некоторые результаты согласования натурных и виртуальных верификационных экспериментов.

Таблица 1. Согласование натурных и виртуальных ударных тестов.

№		Скорость ударника, м/с	Остаточная скорость, м/с	Скорость пробки, м/с	Масса пробки, г
1	Натурный эксперимент	290	0	—	0,35
	Первая итерация			Нет пробки	
	Вторая итерация			86	0,3
2	Натурный эксперимент	333	149	240	0,33
	Первая итерация		143	Нет пробки	
	Вторая итерация		146	276	0,35

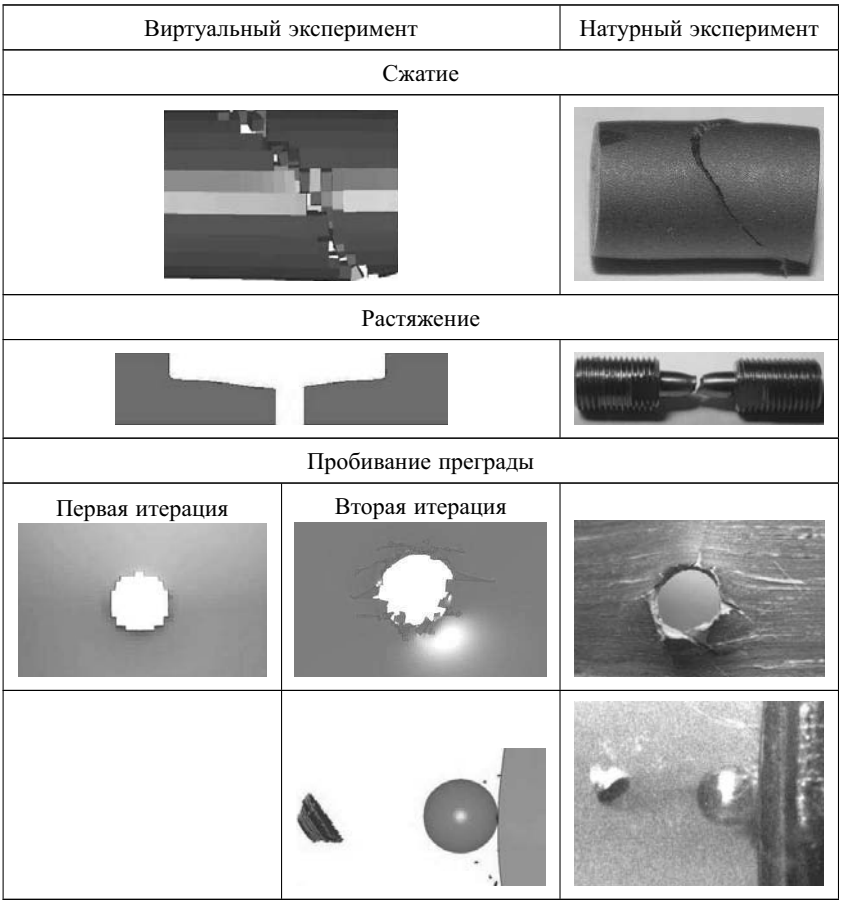


Рис. 2. Иллюстрация согласования натурных и виртуальных экспериментов.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории // М.: Изд-во АН СССР. 1963. 271 с.
2. *Ильюшин А.А.* Метод СН-ЭВМ в теории пластичности // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука. 1971. С.166–178.
3. *Ильюшин А.А., Васин Р.А, Моссаковский П.А.* Теория упругопластических процессов при больших пластических деформациях // Прикл. проблемы механики тонкостенных конструкций. М.: Изд-во Моск. Ун-та. 2000. С.128–137.
4. *Моссаковский П.А.* Расширенные постулаты теории упругопластических процессов и их следствия // Упругость и неупругость. М.: 2001. С.219–223
5. *Бабамуратов К.Ш., Ильюшин А.А., Кабулов В.К.* Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности // Ташкент: ФАН. 1987. 288 с.
6. *Дубянская О.Г., Колотников М.Е., Моссаковский П.А.* Новый подход к оценке пробиваемости корпусов ГТД элементами ротора // Новые технологические процессы и надежность ГТД. Вып. 8. М.: 2008. С.38–62.

7. *Васин Р.А., Моссаковский П.А., Рязанцева М.Ю.* Развитие экспериментально-вычислительного метода решения нелинейных задач механики // Сб. трудов Межд. н.-т. конф. “Инновации в машиностроении”, 30-31 октября 2008 г. С.129–135.
8. *Брагов А.М., Ломунов А.К.* Использование метода Кольского для динамических испытаний конструкционных материалов // Прикл. проблемы прочности и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб. Н. Новгород. 1995. Вып. 51. С.127–137.
9. *Брагов А.М., Константинов А.Ю., Ломунов А.К.* Способ определения динамического коэффициента трения на основе модифицированного метода Кольского // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 10. С.69–72.
10. *Gurson A.L.* Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. // J. Engrg. Mater. Technol. 1977. V. 99. P.2–15.
11. *Johnson G.R., Cook W.H.* Fracture Characteristics of Three Metals Subjected to Various Strain, Strain Rates, Temperatures and Pressures // Engineering Fracture Mechanics. 1985. V. 21. N. 1. P.31–48.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ И КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. В. Муравлёв

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

Для программ экспериментов по комбинированному растяжению (сжатию) и кручению сплошных цилиндрических образцов предложены методики обработки экспериментальных данных, позволяющие определять механические свойства термовязкопластических материалов на траекториях деформаций в виде двухзвенных ломаных при конечных деформациях.

Характерной особенностью технологических процессов обработки металлов давлением является деформирование в области конечных деформаций материала, обладающего существенной температурной и скоростной чувствительностью. Для описания таких процессов необходимо использование модели термовязкопластического материала.

Для исследования механических свойств термовязкопластических материалов при конечных деформациях целесообразно проведение экспериментов со сплошными цилиндрическими образцами, приводящих, однако, к возникновению неоднородного напряженно-деформированного состояния в образцах и требующих специальных методик обработки экспериментальных данных. Использование в таких экспериментах образцов, в которых напряженно-деформированное состояние приближенно можно считать однородным (как, например, при кручении тонкостенного цилиндрического образца), приводит к потере устойчивости этих образцов задолго до исчерпания ресурса пластичности материала и не позволяет исследовать свойства материала вплоть до разрушения.

Диаграмма сдвига упругопластического материала $\tau = \tau(\gamma)$ может быть построена из эксперимента по кручению сплошного цилиндрического образца (τ – напряжение сдвига, γ – деформация сдвига). Используя получаемую в таком эксперименте зависимость $M = M(\gamma_R)$ крутящего момента M от деформации сдвига γ_R на поверхности образца радиуса R , по формуле Людвика [1] находим диаграмму сдвига:

$$\tau(\gamma_R) = \frac{1}{2\pi R^3}\left[3M(\gamma_R) + \gamma_R \frac{dM(\gamma_R)}{d\gamma_R}\right] \qquad (1)$$

где $\gamma_R = \omega R$, ω – угол закручивания образца на единицу длины (крутка).

Сдвиговые свойства вязкопластического материала описываются функцией $\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma})$, задающей диаграммы сдвига этого материала при его деформировании с различными постоянными скоростями деформации сдвига $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$. Эта функция может быть построена из серии экспериментов по кручению сплошных цилиндрических образцов радиуса R с постоянными скоростями крутки $\dot{\omega} = d\omega/dt$, разными для каждого конкретного эксперимента. Используя получаемую в таких экспериментах зависимость $M = M(\gamma_R, \dot{\gamma}_R)$, по формуле Бэкофена-Филдса [2] находим:

$$\tau(\gamma_R, \dot{\gamma}_R) = \frac{1}{2\pi R^3}\left[3M(\gamma_R, \dot{\gamma}_R) + \gamma_R \frac{\partial M(\gamma_R, \dot{\gamma}_R)}{\partial \gamma_R} + \dot{\gamma}_R \frac{\partial M(\gamma_R, \dot{\gamma}_R)}{\partial \dot{\gamma}_R}\right] \quad (2)$$

где $\dot{\gamma}_R = \dot{\omega} R$ – скорость деформации сдвига на поверхности образца.

Сдвиговые свойства термовязкопластического материала описываются функцией $\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}, T)$, задающей диаграммы сдвига этого материала при его деформировании с различными постоянными скоростями деформации сдвига $\dot{\gamma}$ и температурами T. Эта функция может быть построена из серий экспериментов по кручению сплошных цилиндрических образцов радиуса R с постоянными скоростями крутки $\dot{\omega}$ (разными для каждого конкретного эксперимента) и разными начальными температурами T_0. Предполагая, что температура T_r точки образца на расстоянии r от его оси в таких экспериментах является функцией вида

$$T_r = T_r(\gamma_r, \dot{\gamma}_r, T_0) \quad (3)$$

где $\gamma_r = \omega r$, $\dot{\gamma}_r = \dot{\omega} r$, и используя получаемую в таких экспериментах зависимость $M = M(\gamma_R, \dot{\gamma}_R, T_0)$, находим [3]:

$$\tau(\gamma_R, \dot{\gamma}_R, T_R(\gamma_R, \dot{\gamma}_R, T_0)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi R^3}\left[3M(\gamma_R, \dot{\gamma}_R, T_0) + \gamma_R \frac{\partial M(\gamma_R, \dot{\gamma}_R, T_0)}{\partial \gamma_R} + \dot{\gamma}_R \frac{\partial M(\gamma_R, \dot{\gamma}_R, T_0)}{\partial \dot{\gamma}_R}\right] \quad (4)$$

где $T_R(\gamma_R, \dot{\gamma}_R, T_0)$ – температура на поверхности образца. При получении соотношения (4) предполагалась применимость искомой функции для описания и изотермических процессов, и процессов деформирования с плавно меняющейся температурой. Сделанное для получения соотношения (4) предположение (3) выполняется, например, для локально-адиабатических процессов, когда вся необратимая внутренняя работа формоизменения переходит в тепло, которое не успевает рассеиваться и приводит к соответствующему повышению температуры в каждой точке образца. Таким образом, данная методика может быть применена для обработки экспериментальных данных по горячему кручению сплошных цилиндрических образцов с большими скоростями деформирования [4]. В

экспериментах с малыми скоростями деформирования выделяемое тепло, как правило, успевает рассеиваться, температура образца остается постоянной, а соотношение (4) также применимо и совпадает с формулой Бэкофена-Филдса (2). Для экспериментов, в которых распространение тепла в образце играет существенную роль, соотношение (4) требует дальнейшего уточнения.

В рассмотренных выше трех экспериментальных методиках предполагалось, что при кручении сплошного цилиндрического образца отсутствуют осевая сила и осевая деформация, а в каждом цилиндрическом слое происходит простой сдвиг. В таком эксперименте во всех точках образца происходит деформирование по одинаковым траекториям деформаций (соответствующим простому сдвигу) в пространстве деформаций А.А.Ильюшина [5]: для случая малых деформаций – по прямолинейной траектории, для случая конечных деформаций – по траектории деформаций малой кривизны в обобщенном пространстве деформаций А.А.Ильюшина [6].

В работе [7] для упругопластического материала дано обобщение первой из этих методик на случай эксперимента по кручению сплошного цилиндрического образца после предварительного одноосного растяжения или сжатия образца до выбранного значения продольной деформации $\varepsilon = \varepsilon_0$ (одинаковой для всех точек образца). На этапе кручения осевая сила P и крутящий момент M изменяются в зависимости от крутки ω, а продольная деформация образца остается равной ε_0, поэтому в каждом цилиндрическом слое происходит процесс простого сдвига. В таком эксперименте во всех точках образца происходит деформирование по одинаковым траекториям деформаций в виде двухзвенной ломаной с первым прямолинейным звеном длины ε_0 и углом излома $\pi/2$. На втором звене, повторяющем траекторию деформаций, соответствующую простому сдвигу, вектор напряжений σ может быть представлен в сопровождающем ортонормированном репере Френе $< p, n >$ (вектор **p** направлен вдоль второго звена траекторий деформаций) в виде:

$$\sigma = Up + Vn \tag{5}$$

В теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина показано, что на втором звене траектории деформаций в виде двухзвенной ломаной функционалы пластичности U и V из (5) являются функциями только трех параметров [8, 9]:

$$U = U(s_0, \theta_0, \Delta s),\ V = V(s_0, \theta_0, \Delta s) \tag{6}$$

где s_0 – длина первого звена, θ_0 – угол излома, Δs – длина дуги, отсчитываемая от точки излома. Используя получаемые в рассмотренном

выше эксперименте из [7] зависимости $P = P(\varepsilon_0, \omega)$ и $M = M(\varepsilon_0, \omega)$, аналогично (1) находим $U(\varepsilon_0, \pi/2, \Delta s)$ и $V(\varepsilon_0, \pi/2, \Delta s)$:

$$U(\varepsilon_0, \pi/2, \frac{\omega}{\sqrt{3}}R) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi R^3}\left[3M(\varepsilon_0, \omega) + \omega\frac{\partial M(\varepsilon_0, \omega)}{\partial \omega}\right]$$

$$V(\varepsilon_0, \pi/2, \frac{\omega}{\sqrt{3}}R) = \frac{1}{2\pi R^2}\left[2P(\varepsilon_0, \omega) + \omega\frac{\partial P(\varepsilon_0, \omega)}{\partial \omega}\right] \qquad (7)$$

где $\Delta s = \omega R \Big/ \sqrt{3}$, R – внешний радиус образца на этапе кручения.

Для обобщения на случай вязкопластического материала последней из рассмотренных экспериментальных методик необходимо проведение серии экспериментов по кручению сплошных цилиндрических образцов с постоянными скоростями крутки $\dot{\omega}$ (разными для каждого конкретного эксперимента) после предварительного одноосного растяжения или сжатия всех образцов по одинаковой программе до одного и того же выбранного значения продольной деформации $\varepsilon = \varepsilon_0$. На этапе кручения продольная деформация всех образцов остается равной ε_0. Из теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина следует, что при заданной истории деформирования на первом звене траектории деформаций в виде двухзвенной ломаной и постоянной скорости деформаций $\dot{s}$ на ее втором звене, функционалы пластичности U и V из (5) для вязкопластического материала являются функциями только четырех параметров:

$$U = U(s_0, \theta_0, \Delta s, \dot{s}),\ V = V(s_0, \theta_0, \Delta s, \dot{s}) \qquad (8)$$

Используя получаемые в рассматриваемых экспериментах зависимости $P = P(\varepsilon_0, \omega, \dot{\omega})$ и $M = M(\varepsilon_0, \omega, \dot{\omega})$, аналогично (2), (7) находим $U = U(\varepsilon_0, \pi/2, \Delta s, \dot{s})$ и $V = V(\varepsilon_0, \pi/2, \Delta s, \dot{s})$:

$$U(\varepsilon_0, \pi/2, \frac{\omega}{\sqrt{3}}R, \frac{\dot{\omega}}{\sqrt{3}}R) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\pi R^3}\left[3M(\varepsilon_0, \omega, \dot{\omega}) + \omega\frac{\partial M(\varepsilon_0, \omega, \dot{\omega})}{\partial \omega} + \dot{\omega}\frac{\partial M(\varepsilon_0, \omega, \dot{\omega})}{\partial \dot{\omega}}\right]$$

$$V(\varepsilon_0, \pi/2, \frac{\omega}{\sqrt{3}}R, \frac{\dot{\omega}}{\sqrt{3}}R) =$$

$$= \frac{1}{2\pi R^2}\left[2P(\varepsilon_0, \omega, \dot{\omega}) + \omega\frac{\partial P(\varepsilon_0, \omega, \dot{\omega})}{\partial \omega} + \dot{\omega}\frac{\partial P(\varepsilon_0, \omega, \dot{\omega})}{\partial \dot{\omega}}\right] \qquad (9)$$

где $\Delta s = \omega R \Big/ \sqrt{3}$, $\dot{s} = \dot{\omega} R \Big/ \sqrt{3}$, R – внешний радиус образца на этапе кручения. Отметим, что при $\varepsilon_0 = 0$ соотношения (9) совпадают с (2), а

также позволяют дополнительно находить компоненту V вектора напряжений σ, если в эксперименте на кручение возникает осевая сила P.

Предложенная экспериментальная методика может быть обобщена на случай термовязкопластического материала аналогично соотношениям (3) и (4).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 10-08-00933 и 09-08-92651 инд.

Литература

1. *Ludwik P., Scheu R.* Vergleichende Zug-, Druck-, Dreh- und Walzversuche. Stahl und Eisen, 12, Marz, 1925. P. 373-381.
2. *Fields D.S., Backofen W.A.* Determination of strain–hardening characteristics by torsion testing. Proceedings ASTM, v.57, 1957. P. 1259-1271.
3. *Муравлев А.В., Сретенский Н.В.* Обобщение формулы Бэкофена – Филдса для термовязкопластичности. В сб.: Упругость и неупругость, М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. С. 224-227.
4. *Муравлев А.В., Иксарь А.В.* Построение диаграмм деформирования термовязко-пластических материалов с использованием натурального сдвига. Изв. Тульского гос. ун-та. Серия Актуальные вопросы механики. Т.1. Вып. 2. 2006. С. 247-255.
5. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272с.
6. *Муравлев А.В.* Об одном варианте обобщения теории процессов малой кривизны на случай конечных деформаций термовязкопластического материала. В сб.: Упругость и неупругость, М.: URSS, 2006. С. 211-217.
7. *Муравлев А.В.* Экспериментальное построение функционалов пластичности для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных в опытах на сплошных цилиндрических образцах. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. № 5. С. 74-80.
8. *Ленский В.С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций. В сб.: Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58-82.
9. *Васин Р.А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении. В сб.: Упругость и неупругость. Вып. 1., М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. С. 59-126.

МЕТОДИКИ АТТЕСТАЦИИ И ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. В. Нетребко, В. Л. Нейман

Научно исследовательский институт механики МГУ им.М.В.Ломоносова
Москва, Россия

alexnetrebko@rambler.ru

В работе проведен сравнительный анализ методик аттестации и идентификации определяющих соотношений динамической пластичности, предполагающих их зависимость от скорости деформации. На основе данных высокоскоростных экспериментов на ряде металлов, обладающих свойством динамического упрочнения, определены параметры моделей. В численном эксперименте произведена верификация определяющих соотношений. Предложен ряд изменений в рассматриваемые определяющие соотношения, позволяющие оптимизировать процесс аттестации, а также расширить область применимости рассмотренных моделей.

В настоящее время хорошо известно, что свойства материала меняются в зависимости от скорости деформации. Точное описание деформационного поведения материалов в широком диапазоне скоростей является одной из основных задач при моделировании высокоскоростных динамических процессов различной природы (штамповка, соударение, взрыв, и т.п.).

На основании экспериментального изучения процессов высокоскоростного деформирования различных материалов, за последние пятьдесят лет предложен целый ряд соотношений, которые описывают зависимость предела текучести и напряжения течения от деформации (определяющих соотношений).

Чаще всего в пакетах численного моделирования для описания пластического поведения материала используется поверхность течения Мизеса с изотропным упрочнением, радиус которой зависит от мгновенных значений пластической деформации ε^p, скорости деформации $\dot{\varepsilon}$, температуры и т.д.

Разработка моделей поведения материала состоит в определении вида функциональной зависимости $\sigma\ (\varepsilon^p, \dot{\varepsilon}, T)$. Крайне необходимы модели, способные не только точно описывать отклик материала в широком диапазоне параметров нагружения, но и экстраполировать экспериментальные данные, т.е. предсказывать поведение материала вне исследованных экспериментально пределов. Идеальная модель пластического поведения металла в общем случае должна учитывать влияние различных параметров (таких как история изменения деформаций и скоростей деформаций, сложность процесса нагружения) на напряжение течения, а также опи-

сывать как изотропное, так и анизотропное упрочнение. Однако полный учет всех этих явлений делает задачу чрезвычайно сложной, или даже не решаемой [1].

В последние годы предложено большое количество моделей, от чисто эмпирических (т.е. описание экспериментальных данных аналитической кривой), до физических моделей, основанных на микромеханических процессах в материале. В идеале, эти два подхода должны дополнять друг друга в едином соотношении, которое с одинаковой точностью описывает как действительное макроскопическое поведение материала, так и физические процессы на атомном уровне, которые контролируют пластическое течение. На практике наибольшей популярностью пользуются эмпирические определяющие соотношения.

В общем случае эмпирический подход при построении определяющих соотношений состоит в определении аналитической функции, которая адекватно отражает экспериментальную зависимость напряжения течения от параметров нагружения. Если пренебречь эффектами истории изменения скорости деформации и температуры, то напряжение течения σ (для растяжения или сжатия) можно записать в виде некоторой функции деформации ε и скорости деформации (оценивать влияние температуры в рамках данной работы мы не будем): $\sigma = f\,(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$.

Широкое распространение получили модели, в которых чувствительность материала к скорости деформации проявляется в росте напряжения по отношению к соответствующему статическому значению при возрастании скорости пластической деформации. Различие таких моделей заключается в основном в разных формах такой зависимости. При этом, естественно, предполагается, что полная деформация представима суммой упругой и пластической: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}$.

Дифференциальная форма опредедяющего соотношения в вязкопластичности была предложена Соколовским [2] и модифицирована Мальверном [3]:

$$\dot{\varepsilon}^p = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} - 1 \right) \quad \text{при} \quad \sigma > \sigma_s. \tag{1}$$

Здесь функция $\sigma_s = f\,(s)$ определяется из статических экспериментов (s — длина дуги траектории деформации), α считается константой материала.

Джонсон и Кук в работе [4] предложили чисто эмпирическое определяющее уравнение для металлов, подверженных большим деформациям и высоким скоростям деформирования. Модель получила широкое распространение и присутствует в библиотеках материалов практически всех пакетов численного анализа благодаря своей простоте. Напряжение течения Мизеса записывается следующим образом:

$$\sigma = \left(A + B\varepsilon_p^n\right)\left(1 + C \ln \dot{\varepsilon}_p^*\right), \tag{2}$$

где ε_p эквивалентная пластическая деформация, $\dot{\varepsilon}_p^* = \dot{\varepsilon}_p / \dot{\varepsilon}_0$ безразмерная скорость пластической деформации $\dot{\varepsilon}_0 = 1.0c^{-1}$. Четыре материальные константы A, B, n, C определяются эмпирическим путем.

В этом уравнении выражение в первых скобках определяет деформационное упрочнение материала, во-вторых – влияние мгновенного значения скорости деформации на предел текучести. Данное уравнение не учитывает эффекты истории изменения скорости деформирования, но его легко использовать в компьютерном коде, а параметры модели определяются из ограниченного числа экспериментов.

Зерелли и Армстронг предложили использовать в динамических расчетах определяющее соотношение, основанное на теории дислокаций [5]:

$$\sigma = A + B\varepsilon_p^n + C\dot{\varepsilon}_p^k. \tag{3}$$

Пять материальных констант A,B,n,C,k определяются эмпирическим путем.

В последнее время для получения данных о поведении различных материалов в условиях высокоскоростного нагружения используется метод Разрезного стержня Гопкинсона (РСГ), впервые предложенный Кольским [6]. В нем между двумя упругими волноводами помещен короткий образец, в котором при достаточно протяженном импульсе нагрузки быстро, за время нескольких проходов волны по образцу, успевает установиться почти однородное пластическое напряженнодеформированное состояние. Данные о нем получают, измеряя параметры импульсов деформации, бегущих по упругим волноводам – опорному и передающему. По отраженной от образца волне ε_r в передающем волноводе определяют скорость деформации образца, по волне, прошедшей через образец в опорный стержень ε_t – напряжение. Достоинство метода заключается в возможности проводить испытания на близкой к постоянной скорости деформации [7].

Проблема идентификации определяющих соотношений формулируется как задача построения в некотором смысле наилучшей модели на основе экспериментальных наблюдений. Эта задача имеет следующие составные части.

Структурная идентификация — задача наилучшего в некотором смысле выбора вида уравнений математической модели.

Параметрическая идентификация, т.е. задача: при заданном виде уравнений математической модели определить наилучший вектор параметров этой модели.

Среди подходов, использующихся для идентификации моделей пластического поведения материалов, можно выделить две основные группы:

1. Определение параметров модели по экспериментально полученным диаграммам деформирования материалов. Данный подход использу-

ется, как правило при идентификации моделей Зерелли-Армстронга и Джонсона-Кука.

2. Численное моделирование эксперимента и подбор параметров материала из условия наилучшего совпадения результатов расчета и эксперимента. Такой подход использовался при аттестации модели Соколовского-Мальверна [8].

Для идентификации определяющих соотношений Джонсона-Кука (2) необходимо определить четыре постоянные материала. В качестве исходных данных выступают динамические диаграммы деформирования, полученные при различных (больших) скоростях деформации. В первую очередь определяются постоянные B и n, характеризующие деформационное упрочнение. Методом осреднения определяется наклон и нелинейность деформационных диаграмм. Оставшиеся постоянные могут быть найдены, например, по методу наименьших квадратов, из сравнения теоретических и экспериментальных зависимостей $\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$. Методика определения констант модели Зерелли-Армстронга аналогична.

Данная методика имеет, по нашему мнению, наряду с очевидными достоинствами (простота реализации, наличие критериев отбора возможных значений констант материала, обеспечивающих однозначность результатов), также и ряд существенных недостатков.

В данной методике предполагается, что в области развитых пластических деформаций упругими частями $\varepsilon^e, \dot{\varepsilon}^e$ можно пренебречь в силу их малости по сравнению с $\varepsilon^p, \dot{\varepsilon}^p$. Для определения констант B и nмодели Джонсона-Кука (2) используются динамические диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$, полученные при различных конечных скоростях деформации. (Для определения аналогичных констант модели Зерелли-Армстронга необходимо иметь данные динамического эксперимента, проведенного на скорости 1 $с^{-1}$. Провести подобный эксперимент с заранее заданной скоростью деформации по методике РСГ практически невозможно). Как известно, наклоны этих диаграмм могут существенно различаться, в зависимости от скорости деформации. Осреднение полученных данных может привести, в частности, к тому, что значение константы C станет отрицательным.

Численные расчеты показывают, что использование констант материала, определенных по данной методике могут давать существенные различия в теоретических и экспериментальных диаграммах $\sigma \sim t$, $\varepsilon \sim t$, $\dot{\varepsilon} \sim t$.

Нами была предложена иная методика определения констант материала для модели Соколовского-Мальверна [8,9]. Она основывается на численном решении задачи о распространении упругопластических волн в цилиндрическом образце. Константы материала подбираются из условия визуального совпадения экспериментальных и теоретических кривых $\sigma \sim t$, $\varepsilon \sim t$, $\dot{\varepsilon} \sim t$ при взятых из эксперимента начальных и граничных

условиях. Удается подобрать параметр α таким образом, что кривые $\sigma \sim t$ и $\dot{\varepsilon} \sim t$ практически совпадают, а различия в зависимостях $\varepsilon \sim t$ объясняются нами недостатками методики РСГ по определению деформаций. К недостатками данной методики нужно отнести необходимость проведения довольно большого числа расчетов при отсутствии четких критериев отбора значений искомых параметров.

Мы предлагаем несколько видоизменить вид определяющих соотношений Джонсона-Кука и Зерелли-Армстронга. Так соотношения (2) предлагается записать в виде:

$\sigma = (A + B\varepsilon^n)\left(1 + C\ln\left(1 + \dot{\varepsilon}_p^*\right)\right)$ или $\sigma = f(\varepsilon)\left(1 + C\ln\left(1 + \dot{\varepsilon}_p^*\right)\right)$

а соотношения (3), соответственно,

$\sigma = A + B\varepsilon^n + C\dot{\varepsilon}_p^k$ или $\sigma = f(\varepsilon) + C\dot{\varepsilon}_p^k$.

В этом случае, для определения констант A, B, n достаточно использовать данные статических а не динамических экспериментов, либо просто задавать статическую зависимость $\sigma \sim \varepsilon$ без аппроксимации ее степенной функцией. Константы C и kопределяются по прежней методике. Однако их нужно обязательно корректировать по результатам численного эксперимента.

Литература

1. *Васин Р.А., Ленский В.С., Ленский Э.В.* Динамические зависимости между напряжениями и деформациями // Механика. Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975. Вып.5 с.7–38.
2. *Соколовский В.В.* Распространение упруговязкопластических волн в стержнях // ДАН СССР. т.60. 1948; ПММ. т.12. в.3. 1948. с.261–280.
3. *Malvern L.E.* The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect // J. of Appl. Mech. V.18. 1951. pp.203–208; Русский перевод : сб. Механика, №1 (11), 1952, с.153–161.
4. *Johnson G.R., Cook W.H.* A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates, and high temperatures // "Proc. 7^{th} Int. Symp. On Ballistics", publ. The Hague, The Netherlands, 1983, pp.541–547.
5. *Zerilli F.J., Armstrong R.W.* Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations // Journal of Applied Physics 61 (5), 1987. pp.1816-1825.
6. *Kolsky H.* // Proc. Roy. Soc. 1949. B, 62. P.676.
7. *Нетребко А.В., Белов В.И.* Экспериментальная установка "Стержень Гопкинсона" (двухкомпонентный вариант). Вестник МГУ, серия 1. №6. 2002. С.36–41.
8. *Нетребко А.В.* Аттестация модели упругопластического тела Соколовского-Мальверна. IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Тез. докл. т.3. 2006. с.33–34.
9. *Белов В.И., Нейман В.Л., Нетребко А.В.* Аттестация модели упругопластического тела Соколовского-Мальверна // Вестник ТулГУ, серия математика, механика, информатика. т.4. в.2. 2008. с.42–49.

ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТЬ. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

М. У. Никабадзе, М. М. Кантор

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

В настоящее время бурно развивается механика сплошной микроконтинуальной среды, о чем свидетельствуют в последнее время опубликованные работы [1–10] и многие др. Следует отметить, что обзор работ зарубежных ученных по теории микроконтинуальных сред приведен в [11]. Из ранее опубликованных работ по микрополярной теории упругости особое место занимают работы и советских ученных [12–19]. В работе [16] приведен краткий обзор по моментной теории, а также даются анализ и перспективы развития моментных теорий в механике твердых деформируемых тел. В данной работе рассмотрены некоторые вопросы параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами, даны представления дифференциальных операторов, а также уравнений движения микрополярной среды при рассматриваемой параметризации, получен один вариант уравнений движения теории тонких упругих микрополярных призматических тел с двумя малыми размерами в моментах относительно системы полиномов Лежандра.

1. К параметризации области тонкого призматического тела с двумя малыми размерами при произвольной базовой линии.

В качестве базы рассматривается линия, относительно которой область тонкого тела несимметрично расположена. Считаем, что тонкое тело имеет поперечное сечение в виде прямоугольника, стороны которого намного меньше, чем его длина. Радиус-вектор произвольной точки области тонкого тела представляется в виде

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{r}}(x', x^3) &= \boldsymbol{r}(x^3) + \sum_{K=1}^{2} \left[\bar{h}_K(x^3) + x^K h_K(x^3)\right] \boldsymbol{e}_K(x^3) = \\ &= \boldsymbol{r}(x^3) + \sum_{K=1}^{2} h_K^{-1} \left[\bar{h}_K(x^3) + x^K h_K(x^3)\right] \boldsymbol{r}_K(x^3), \quad -1 \le x^I \le 1,\end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^3)$ — векторное[1] параметрическое уравнение базовой линии, $x^3 \equiv s$ — естественный параметр, такое обозначение которого принято для

[1]Применяются обычные правила тензорного исчисления [20, 21]. По повторяющимся латинским (греческим) индексам в одночлене (не) происходит суммирование. Прописные и строчные латинские индексы пробегают значения 1, 2 и 1, 2, 3 соответственно.

удобства изложения материала, $\bar{h}_I = (\overset{(+)}{h}_I - \overset{(-)}{h}_I)/2$, $h_I = (\overset{(+)}{h}_I + \overset{(-)}{h}_I)/2$, $\boldsymbol{r}_I = h_I \boldsymbol{e}_I$, $< I = 1, 2 >$, $\boldsymbol{r}_3 = \partial_3 \boldsymbol{r}$ — единичный вектор касательной к базовой линии, $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — единичные векторы главной нормали и бинормали к базовой линии соответственно. Итак, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}_3$ — базис естественного трехгранника.

Дифференцируя (1) по x^I, а затем по x^3, получим

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}_{\hat{I}} = \partial_I \hat{\boldsymbol{r}}(x', x^3) = h_I \boldsymbol{e}_I = \boldsymbol{r}_I, \quad -1 \le x^I \le 1, \ x^3 \in \mathbb{R}^1, \\ &\boldsymbol{r}_{\hat{3}} \equiv \partial_3 \hat{\boldsymbol{r}} = h_1^{-1}(\partial_3 z_1 + k_2 z_2)\boldsymbol{r}_1 + h_2^{-1}(\partial_3 z_2 + k_2 z_1)\boldsymbol{r}_2 + (1 - k_1 z_1)\boldsymbol{r}_3, \end{aligned} \tag{2}$$

где k_1 — кривизна, k_2 — кручение базовой кривой, а $z_I = \bar{h}_I + x^I h_I$.

Соотношениями (2) построен ковариантный базис в произвольной точке области тонкого тела. При этом из (2) видно, что во всех точках области тонкого тела первые два вектора базиса одни и те же и равны $\boldsymbol{r}_{\hat{I}} = \boldsymbol{r}_I = h_I \boldsymbol{e}_I$, $I = 1, 2$. В дальнейшем в качестве базиса, связанного с базовой линии, выберем $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$. Зная семейства ковариантных базисов в точках базовой кривой, а также в произвольных точках (2) тонкого тела, легко найти соответствующие контравариантные базисы и характерные данной параметризации геометрические объекты [22]. В частности, имеем

$$\begin{aligned} &\sqrt{g} = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{r}_3 = h_1 h_2, \ \boldsymbol{r}^1 = h_1^{-2}\boldsymbol{r}_1, \ \boldsymbol{r}^2 = h_2^{-2}\boldsymbol{r}_2, \ \boldsymbol{r}^3 = \boldsymbol{r}_3, \\ &g_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta \delta_{\alpha\beta}, \ g_{33} = 1, \ g^{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1} h_\beta^{-1} \delta_{\alpha\beta}, \ g^{33} = 1, \ \alpha, \beta = 1, 2, \\ &\sqrt{\hat{g}} = (\boldsymbol{r}_{\hat{1}} \times \boldsymbol{r}_{\hat{2}}) \cdot \boldsymbol{r}_{\hat{3}} = \sqrt{g}\,\hat{\vartheta}, \quad \hat{\vartheta} = \sqrt{\hat{g} g^{-1}} = 1 - k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1), \\ &\boldsymbol{r}^{\hat{P}} = \boldsymbol{r}^P - g^P_{\hat{3}} g^{\hat{3}}_3 \boldsymbol{r}^3, \ \boldsymbol{r}^{\hat{3}} = g^{\hat{3}}_3 \boldsymbol{r}^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Компоненты ($g_{\hat{p}q} = \boldsymbol{r}_{\hat{p}} \cdot \boldsymbol{r}_q$, $g^q_{\hat{p}} = \boldsymbol{r}_{\hat{p}} \cdot \boldsymbol{r}^q$, $g^{\hat{p}q} = \boldsymbol{r}^{\hat{p}} \cdot \boldsymbol{r}^q$ и $g^{\hat{p}}_q = \boldsymbol{r}^{\hat{p}} \cdot \boldsymbol{r}_q$) единичного тензора второго ранга имеют следующие выражения:

$$g_{\hat{p}q}, g^q_{\hat{p}} = \left[\begin{array}{l} g_{\hat{P}Q} = g_{PQ} = h_P h_Q \delta_{PQ}, \quad g^Q_{\hat{P}} = g^Q_P, \\ g_{\hat{P}3} = g_{P3} = 0, \quad g^3_{\hat{P}} = g^3_P = 0, \\ g_{\hat{3}1} = h_1(\partial_3 z_1 + k_2 z_2), \quad g^1_{\hat{3}} = h_1^{-1}(\partial_3 z_1 + k_2 z_2), \\ g_{\hat{3}2} = h_2(\partial_3 z_2 - k_2 z_1), \quad g^2_{\hat{3}} = h_2^{-1}(\partial_3 z_2 - k_2 z_1), \\ g_{\hat{3}3} = g^3_{\hat{3}} = 1 - k_1 z_1 = \hat{\vartheta}, \end{array} \right.$$

$$g^{\hat{p}q}, g^{\hat{p}}_q = \left[\begin{array}{l} g^{\hat{P}Q} = g^{PQ}, \ g^{\hat{P}}_Q = g^P_Q, \ g^{\hat{P}3} = g^{\hat{P}}_3 = -g^P_{\hat{3}} g^{\hat{3}}_3, \\ g^{\hat{3}Q} = 0, \qquad g^{\hat{3}}_Q = 0, \qquad g^{\hat{3}3} = g^{\hat{3}}_3 = \left(g^3_{\hat{3}}\right)^{-1} = \hat{\vartheta}^{-1}. \end{array} \right.$$

2. Представления градиента, дивергенции тензора и уравнений движения.

В силу соответствующих формул (3) градиент некоторого тензора $\mathbb{F}(x', x^3)$ представляется в виде

$$\hat{\nabla}\mathbb{F} = \boldsymbol{r}^{\hat{p}}\partial_p\mathbb{F} = g_3^{\hat{3}}\boldsymbol{r}^3 N_3\mathbb{F} + \boldsymbol{r}^P\partial_P\mathbb{F} \quad (N_3 = \partial_3 - g_{\hat{3}}^P\partial_P). \tag{4}$$

Для дивергенции тензора второго ранга на основании (4) находим следующие искомые представления ($\nabla_P \boldsymbol{P}^m = \partial_P \boldsymbol{P}^m$):

$$\begin{gathered}\hat{\nabla}\cdot\underline{\boldsymbol{P}} = g_3^{\hat{3}}N_3\boldsymbol{P}^3 + \partial_P\boldsymbol{P}^P;\ \ \hat{\nabla}\cdot\underline{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{\hat{\vartheta}\sqrt{g}}\partial_3\left(\sqrt{g}\hat{\vartheta}\boldsymbol{P}^{\hat{3}}\right) + \frac{1}{\hat{\vartheta}}\partial_P\left(\hat{\boldsymbol{P}}^{\hat{P}}\right);\\ \hat{\nabla}\cdot\underline{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{r}^{\hat{p}}\cdot\nabla_p\underline{\boldsymbol{P}} = \nabla_3\boldsymbol{P}^{\hat{3}} + \nabla_P\boldsymbol{P}^{\hat{P}}.\end{gathered} \tag{5}$$

Учитывая (5), уравнения движения моментной теории [18, 23, 24] можно представить в следующих формах:

$$g_3^{\hat{3}}N_3\boldsymbol{P}^3 + \partial_P\boldsymbol{P}^P + \rho\boldsymbol{F} = \rho\partial_t^2\boldsymbol{u},\quad g_3^{\hat{3}}N_3\boldsymbol{\mu}^3 + \partial_P\boldsymbol{\mu}^P + \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\overset{2}{\otimes}\underline{\boldsymbol{P}} + \rho\boldsymbol{m} = \underline{\boldsymbol{J}}\cdot\partial_t^2\boldsymbol{\varphi};$$

$$\begin{gathered}(1/\sqrt{g})\,\partial_3\left(\sqrt{g}\,\hat{\vartheta}\boldsymbol{P}^{\hat{3}}\right) + \partial_P\left(\hat{\vartheta}\boldsymbol{P}^{\hat{P}}\right) + \rho\hat{\vartheta}\boldsymbol{F} = \rho\hat{\vartheta}\partial_t^2\boldsymbol{u},\\ (1/\sqrt{g})\,\partial_3\left(\sqrt{g}\,\hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}\right) + \partial_P\left(\hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}\right) + \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\overset{2}{\otimes}\hat{\vartheta}\underline{\boldsymbol{P}} + \rho\hat{\vartheta}\boldsymbol{m} = \underline{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\vartheta}\partial_t^2\boldsymbol{\varphi};\end{gathered} \tag{6}$$

$$\nabla_3\boldsymbol{P}^{\hat{3}} + \nabla_P\boldsymbol{P}^{\hat{P}} + \rho\boldsymbol{F} = \rho\partial_t^2\boldsymbol{u},\quad \partial_3\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}} + \nabla_P\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}} + \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\overset{2}{\otimes}\underline{\boldsymbol{P}} + \rho\boldsymbol{m} = \underline{\boldsymbol{J}}\cdot\partial_t^2\boldsymbol{\varphi},$$

где $\overset{2}{\otimes}$ — внутреннее 2-произведение [20, 25, 26](например, $\underline{\boldsymbol{a}}\overset{2}{\otimes}\underline{\boldsymbol{b}} = a_{ij}b^{ij}$).

3. Представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра.

Искомые соотношения можно получить, применяя оператор моментов (m, n)-го порядка Лежандра

$$\overset{(m,n)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) = \frac{2m+1}{2}\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\mathbb{F}(x', x^3)P_m(x^1)P_n(x^2)dx^1dx^2 \tag{7}$$

к соответствующим соотношениям [22], представленным при данной параметризации ($\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система полиномов Лежандра). Например, применяя к последним двум уравнениям (6) оператор моментов (m, n)-го порядка Лежандра (7) и учитывая его линейность и соответствующие

формулы из теории моментов относительно системы полиномов Лежандра [22] (см. также [27–31]), получим

$$\Big\{\nabla_3 \overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}\big(\boldsymbol{P}^{\hat{3}}\big)-\frac{2m+1}{2}\sum_{p=0}^{m}\big[1-(-1)^{m+p}\big]\overset{(p,n)}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{P}^{1})-h_1^{-1}\partial_3 h_1 m\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{P}^{\hat{3}})+$$
$$+\frac{2m+1}{2h_1}\sum_{p=0}^{m}\Big[\big(\partial_3 \overset{(+)}{h}{}_1+k_2\bar{h}_2\big)+(-1)^{m+p}\big(\partial_3 \overset{(-)}{h}{}_1-k_2\bar{h}_2\big)\Big]\overset{(p,n)}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{P}^{\hat{3}})+$$
$$+\frac{2m+1}{2h_1}h_2k_2\sum_{p=0}^{m}\big[1-(-1)^{m+p}\big]\Big[\frac{n}{2n-1}\overset{(p,n-1)}{\boldsymbol{M}}\big(\boldsymbol{P}^{\hat{3}}\big)+\frac{n+1}{2n+3}\overset{(p,n+1)}{\boldsymbol{M}}\big(\boldsymbol{P}^{\hat{3}}\big)\Big]-$$
$$-\frac{2n+1}{2}\sum_{p=0}^{n}\big[1-(-1)^{n+p}\big]\overset{(m,p)}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{P}^{2})-h_2^{-1}\partial_3 h_2 n\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}\big(\boldsymbol{P}^{\hat{3}}\big)+ \tag{8}$$
$$+\frac{2n+1}{2h_2}\sum_{p=0}^{n}\Big[\big(\partial_3 \overset{(+)}{h}{}_2-k_2\bar{h}_1\big)+(-1)^{n+p}\big(\partial_3 \overset{(-)}{h}{}_2+k_2\bar{h}_1\big)\Big]\overset{(m,p)}{\boldsymbol{M}}\big(\boldsymbol{P}^{\hat{3}}\big)-$$
$$-\frac{2n+1}{2h_2}h_1k_2\sum_{p=0}^{n}\big[1-(-1)^{n+p}\big]\Big[\frac{m}{2m-1}\overset{(m-1,p)}{\boldsymbol{M}}\big(\boldsymbol{P}^{\hat{3}}\big)+\frac{m+1}{2m+3}\overset{(m+1,p)}{\boldsymbol{M}}\big(\boldsymbol{P}^{\hat{3}}\big)\Big]\Big\}+$$
$$+\overset{(m,n)}{\boldsymbol{\Phi}}=\rho\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}(\partial_t^2\boldsymbol{u}),$$

$$\{\boldsymbol{P}\ \to\ \boldsymbol{\mu}\}+\underset{\simeq}{\boldsymbol{C}}\overset{2}{\otimes}\overset{(m,n)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}}\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}\big)+\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}\cdot\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}(\partial_t^2\boldsymbol{\varphi}),\quad m,n=0,1,...,$$

где при данной параметризации $\nabla_3\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{P}^{\hat{3}})=\partial_3\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{P}^{\hat{3}})-k_1\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{P}^{\hat{1}})$, выражение в фигурных скобках во втором уравнении (8) получается из выражения в фигурных скобках в первом уравнении указанной заменой и введены следующие обозначения:

$$\overset{(m,n)}{\boldsymbol{\Phi}}(x^3,t)=\frac{2m+1}{2}\Big[\overset{(,n)}{\boldsymbol{M}}\big(\overset{(+)}{\boldsymbol{P}}{}^{\vee}_{(1)}\big)+(-1)^m\overset{(,n)}{\boldsymbol{M}}\big(\overset{(-)}{\boldsymbol{P}}{}^{\vee}_{(1)}\big)\Big]+$$
$$+\frac{2n+1}{2}\Big[\overset{(m,)}{\boldsymbol{M}}\big(\overset{(+)}{\boldsymbol{P}}{}^{\vee}_{(2)}\big)+(-1)^n\overset{(m,)}{\boldsymbol{M}}\big(\overset{(-)}{\boldsymbol{P}}{}^{\vee}_{(2)}\big)\Big]+\rho\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{F}),$$
$$\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}(x^3,t)=\frac{2m+1}{2}\Big[\overset{(,n)}{\boldsymbol{M}}\big(\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{\vee}_{(1)}\big)+(-1)^m\overset{(,n)}{\boldsymbol{M}}\big(\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{\vee}_{(1)}\big)\Big]+$$
$$+\frac{2m+1}{2}\Big[\overset{(m,)}{\boldsymbol{M}}\big(\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{\vee}_{(2)}\big)+(-1)^n\overset{(m,)}{\boldsymbol{M}}\big(\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{\vee}_{(2)}\big)\Big]+\rho\overset{(m,n)}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{m}),$$
$$\overset{(m,)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F})=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathbb{F}\,P_m(x^1)dx^1,\quad \overset{(,n)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F})=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathbb{F}\,P_n(x^2)dx^2.$$

Аналогично (8) из остальных представлений (6) можно получить другие представления уравнений движения в моментах, а также ОС и граничные

условия на лицевых поверхностях и торцах в моментах. Имея уравнения движения, ОС и граничные условия в моментах, не представляет труда сделать постановки задач. В связи с ограниченостью объема статьи на этих вопросах останавливаться не будем. Заинтересованный читатель может их найти в [22].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты: № 08-01-00231-а, № 08-01-00353-а.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошной среды// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. №5. С.6–14.
2. *Eringen A.C.* Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids. N.Y.: Springer-Verlag. 1999. 325 p.
3. *Амбарцумян С.А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214 с.
4. *Саркисян С.О.* Асимптотические решения краевых задач тонкого прямоугольника по несимметричной теории упругости// Изв. НАН Армении. Механика. Т. 57. №1. 2004. С. 41-58.
5. *Бровко Г.Л.* Моделирование неоднородных сред сложной структуры и континуум Коссера// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. №5. С. 55-63.
6. *Бровко Г.Л., Иванова О.А.* Моделирование свойств и движений неоднородного континуума сложной микроструктуры типа Коссера//Изв. РАН. МТТ. 2008. №1. С. 22-36.
7. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 327 с.
8. *Победря Б.Е.* Варианты моделирования в механике деформируемого тела. Фундаментальные и прикладные вопросы механики. Международная научная конференция. Сб. докладов. Хабаровск. Изд-во ХГТУ. 2003. Т. 1. С. 20-29.
9. *Победря Б.Е.* Статическая задача несимметричной теории упругости для изотропной среды// Вестник МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 2005. №1. С. 54-59.
10. *Победря Б.Е., Омаров С.Е.* Определяющие соотношения моментной теории упругости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 2007. №3. С. 56-58.
11. *Ostoja-Starzewski M., Jasiuk I.* Stress invariance in planar Cosserat elasticity// Proc. Roy. Soc. London. A. 1995. **451**. 453-470.
12. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравненния теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц// ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399–1409.
13. *Кувшинский Е.В.,Аэро Э.Л.* Континуальная теория асимметрической упругости. Учет "внутреннего"вращения//ФТТ. 1963. Т. 6. Вып. 9. С. 2591–2598.
14. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости// ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
15. *Савин В.А.* Основы плоской задачи теории упругости. Киев: Изд-во Киев. гос. ун-та. 1965. 162 с.
16. *Ильюшин А.А., Ломакин В.А.* Моментные теории в механике твердых деформируемых тел// Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 54-60.
17. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304 с.
18. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
19. *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 416 с.
20. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978, 296 с.
21. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986, 264 с.
22. *Никабадзе М.У.* Математическое моделирование упругих тонких тел с двумя малыми размерами с применением систем ортогональных полиномов. Деп. в ВИНИТИ РАН 21.08.08. №722 – В2008. 107 с.

23. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
24. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sidney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press. 1986. 384 p.
25. *Никабадзе М.У.* О некоторых вопросах тензорного исчисления. I// Современная математика и ее приложения. Т. 62. М.: ВИНИТИ, 2009. С. 67-95.
26. *Никабадзе М.У.* О некоторых вопросах тензорного исчисления. II// Современная математика и ее приложения. Т. 62. М.: ВИНИТИ, 2009. С. 96-130.
27. *Никабадзе М.У.* Вариант системы уравнений теории тонких тел// Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2006. №1. С. 30-35.
28. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы варианта теории тонких тел с применением разложения по системе многочленов Чебышева второго рода// Изв. РАН. МТТ. 2007. №5. С. 73-106.
29. *Никабадзе М.У.* Применение системы полиномов Чебышева к теории тонких тел// Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. №5. С. 56-63.
30. *Никабадзе М.У.* Применение систем полиномов Лежандра и Чебышева при моделировании упругих тонких тел с одним малым размером// Деп. в ВИНИТИ РАН. 21.08.08. №720–В2008. 287 с.
31. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.

ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ НЕУПРУГОСТИ

Ю.И. Кадашевич, С.П. Помыткин

Технологический университет растительных полимеров
Санкт-Петербург, Россия

sppom@yandex.ru

В предлагаемой публикации кратко излагается точка зрения авторов на этапы развития эндохронной теории неупругости и отмечаются некоторые тенденции расширения эндохронного подхода.

Термин "эндохронная"теория пластичности был введен К.С. Валанисом [1] в 1971 году. Под этим термином понимается теория пластичности без поверхности текучести, а неупругие деформации определяются через скалярную неубывающую переменную величину, называемую внутренним временем. Функционал пластичности в [1] был выбран следующим образом

$$\sigma'_{ij} = \int_0^{\mu} L(\mu - \mu')\, d\varepsilon'_{ij}(\mu')\,, d\mu = \frac{d\lambda}{f(\lambda)}\,, \qquad d\lambda = |\, d\varepsilon'_{ij}\,|\,, \qquad f(\lambda) > 0\,, \tag{1}$$

где σ'_{ij} и ε'_{ij} — девиаторы тензоров напряжений и деформаций.

Истоки такого подхода, несомненно, восходят к работе А.А. Ильюшина 1954 года [2]. Он ввёл понятие функционала теории упругопластических процессов, в котором нет необходимости использовать специальное понятие поверхности текучести. Поэтому эту теорию, несомненно, можно считать первой теорией пластичности без поверхности текучести.

Бурное развитие эндохронного подхода началось с 1980 года, когда К.С. Валанис ввел новую меру внутреннего времени [3], которая выглядела следующим образом (α — малый параметр эндохронности, G — модуль сдвига)

$$d\mu = \frac{d\xi}{f(\xi)}\,, \qquad d\xi = \left| d\varepsilon'_{ij} - \frac{1-\alpha}{2G}\, d\sigma'_{ij} \right|\,. \tag{2}$$

Обратим внимание и на отечественные работы тех лет [4-7], в которых содержится ряд элементов нового подхода. Более того, еще в 1969 году А.А.Вакуленко [8] ввел понятие термодинамического времени, что позволило эффективно анализировать построение определяющих соотношений неупругости.

Существенный вклад в развитие эндохронной теории принадлежит А.Б.Мосолову — ученику А.А. Ильюшина. Отметим цикл из десяти его работ, выполненных совместно с Ю.И. Кадашевичем (например, [9, 10]).

Эндохронный подход вызвал бурную научную дискуссию (например, [11, 12]). Некоторые результаты дискуссии опубликованы в [10, 13]. Обзорные статьи по эндохронной теории можно найти в [10, 14].

К 90-ым годам фактически наметилось три направления в развитии эндохронных теорий неупругости. Под влиянием серьезной критики большинство иностранных авторов решило отказаться от основного варианта теории [3] и перешли к предельному случаю, когда параметр эндохронности $\alpha = 0$, не обратив внимания на то, что они фактически повторили теорию А.А.Вакуленко 1969 года [8] (ε_{ij}^{H} – девиатор тензора неупругих деформаций):

$$\sigma'_{ij} = \tau_0 \frac{d\varepsilon_{ij}^{H}}{d\mu} + \int_0^{\mu} L(\mu - \mu') \frac{d\varepsilon'_{ij}}{d\mu'} d\mu' , \tag{3}$$

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{1}{m(\lambda, \dot{\lambda})} , \qquad d\lambda = \sqrt{d\varepsilon_{ij}^{H} \, d\varepsilon_{ij}^{H}} .$$

Другой подход был представлен Ю.И.Кадашевичем и С.П.Помыткиным [15], которые предложили сохранить общий вариант эндохронной теории неупругости, но записать ее в дифференциально-параметрической форме, обратив особое внимание на предельный случай, когда $\alpha \to 0$.

$$\frac{1}{2G}\left[\sigma'_{ij} + \alpha\tau \frac{d\sigma'_{ij}}{dR} \right] = \tau \frac{dR'_{ij}}{dR} + \frac{R'_{ij}}{g + \alpha} , \tag{4}$$

$$R'_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \frac{1 - \alpha}{2G}\sigma'_{ij} , \qquad dR = \sqrt{dR'_{ij} \, dR'_{ij}} , \tag{5}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{K} , \qquad 0 \le \alpha \le 1 ,$$

$$|\dot{R}| = \sqrt{\frac{dR}{dt} : \frac{dR}{dt}} , \qquad \tau = \tau(|R|, |\dot{R}|) .$$

Здесь τ — аналог деформационного предела текучести, g — аналог коэффициента упрочнения, K — модуль объемного сжатия.

И, наконец, третий подход был предложен В.С.Сарбаевым [16]. Предлагается считать вариант К.С.Валаниса 1971 года неудачным и использовать теорию Д.Бакхауза 1971 года [17]

$$\sigma'_{ij} = \tau(\lambda) \frac{d\varepsilon_{ij}^{H}}{d\lambda} + \int_0^{\lambda} L(\lambda, \lambda - \lambda') \frac{d\varepsilon_{ij}^{H}}{d\lambda'} d\lambda' \tag{6}$$

при условии, что предел текучести $\tau = 0$. На наш взгляд варианты теории (3) и (6) идентичны, поэтому естественно называть их теорией

Вакуленко–Бакхауза. Кроме того, вряд ли логично отказываться от теории К.С.Валаниса 1980 года, ибо, как показано в [15], она на самом деле лишена всех недостатков его работы 1971 года.

Подчеркнем, что многочисленные эксперименты, проведенные специально для проверки основ эндохронной теории неупругости показали справедливость эндохронного подхода [15, 18].

В настоящее время в России активно развивают эндохронный подход Д.Л.Быков и Д.Н.Коновалов [19], Б.Е.Мельников с учениками [20], П.В.Трусов и И.Э.Келлер [21], В.П.Радченко с сотрудниками [22].

В последнее десятилетие сторонники эндохронной теории неупругости обратили основное внимание на учет больших деформаций и поворотов [23], на объемные изменения, происходящих в деформируемом теле [24], а также описание на ее основе неупругих тонких эффектов второго порядка [25] по классификации Д.В.Георгиевского [26].

Литература

1. *Valanis K.C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface// Arch. Mech. Stosow. 1971. V.23. №4. P.517-551.
2. *Ильюшин А.А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред// ПММ. 1954. Т.18. Вып.6. С. 641-666.
3. *Valanis K.C.* Fundamental consequence of a new intrinsic time measure: plasticity as a limit of the endochronic theory// Arch. Mech. Stosow. 1980. V.32. №2. P. 171-191.
4. *Кадашевич Ю.И.* О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности// Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. Вып.6. С.39-45.
5. *Еремичев А.Н.* О связи «эндохронной» теории вязкоупругости с теорией пластичности Кадашевича-Новожилова// Изв. вузов. Машиностроение. 1980. №10. С.5-8.
6. *Клюшников В.Д.* Аналитическая теория пластичности// Изв. АН СССР. Механика. 1965. N2. С.82-87.
7. *Кадашевич Ю.И., Михайлов А.Н.* О теории пластичности, не имеющей поверхности текучести// Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. N3. С. 574-576.
8. *Вакуленко А.А.* К теории необратимых процессов// Вестн. ЛГУ. 1969. №7. С.84-90.
9. *Мосолов А.Б.* Эндохронная теория пластичности. Препринт №353. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1988. 45с.
10. *Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.* Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития// Изв. АН СССР. МТТ. 1989. №1. С. 161-168.
11. *Клюшников В.Д.* Дефекты эндохронной теории пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. №1. С. 176-178.
12. *Rivlin R.S.* Some comments on the endochronic theory of plasticity // Int. J. Solids and Struct. 1981. V.17. №2. P. 231-248.
13. *Динариев О.Ю., Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.* Письмо в редакцию// Изв. АН СССР. МТТ. 1989. N1. С.179.
14. *Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.* Современное состояние эндохронной теории пластичности// Проблемы прочности. 1991. №6. С. 3-12.
15. *Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П.* О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности// Изв. РАН. МТТ. 1997. №4. С. 99-105.
16. *Сарбаев Б.С.* Об одном варианте теории пластичности с трансляционным упрочнением// Изв. АН СССР. МТТ. 1994. N1. С. 65-72.

17. *Backhaus G.* Zur analytischen Darstellung des Material Verhalten in plastishen Bereich// ZAMM. 1971. Bd.51. S. 471-477.
18. *Fan J.* A comprehensive numerical study and experimental verification of endochronic plasticity. Ph.D.dissertation. Dept. Aerosp. Eng. and Appl. Mech. Univ. of Cincinnati. 1983.
19. *Быков Д.Л, Коновалов Д.Н.* Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов// Изв. РАН. МТТ. 2002. №4. С. 63-76.
20. *Семенов С.Г., Семенов А.С., Мельников Б.Е.* Моделирование процессов неупругого деформирования на основе эндохронной теории пластичности// Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения. СПб: Изд-во Политехнич. ун-та, 2008. Т.2. С. 309-317.
21. *Келлер И.Э., Трусов П.В.* К вопросу о статистическом обосновании эндохронной теории пластичности// Молодежная наука Прикамья: сб. научн. трудов. 2004. Вып.4. С. 115-121.
22. *Радченко В.П., Павлова Г.А., Горбунов С.В*. Устойчивость по Ляпунову решений эндохронной теории пластичности без поверхности текучести в условиях плоского напряженного состояния// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. №2. С. 143-151.
23. *Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П.* Новый взгляд на построение эндохронной теории пластичности при учете конечных деформаций // Научно-техн. ведомости СПбГТУ. 2003. №3. С. 96-103.
24. *Bakhshiani A., Khoei A.R., Modif M.* An endochronic plasticity model for powder compaction processes// Material Processing Technology. 2002. V.125-126. P. 138-143.
25. *Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П.* Эндохронная теория неупругости для разупрочняющихся материалов// Современные проблемы ресурса материалов и конструкций: труды школы-семинара. М.:Изд-во МАМИ, 2009. С. 158-165.
26. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред// Успехи механики. 2002. Т.1. №2. С. 150-176.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

М. Ю. Рязанцева

НИИ механики МГУ им. М.В.Ломоносова
Москва, Россия
marina-ryazantseva@yandex.ru

В данной работе в трёхмерной постановке решена задача о свободных изгибных колебаниях бесконечной трёхслойной пластины симметричного строения по толщине в длинноволновом приближении.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о распространении гармонических волн в бесконечной упругой трёхслойной пластине. Изучению распространения волн в упругих телах простейших форм, объединённых понятием механического волновода, посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные работы, начало которым положено Рэлеем и Лэмбом. Особенность распространения волн в упругих волноводах по сравнению с акустическими и электромагнитными волноводами связана с явлением геометрической дисперсии мод. Количественно это явление описывается дисперсионным уравнением, которое устанавливает связь между частотой колебаний и длиной волны. Построение точных дисперсионных соотношений, численное их решение и анализ полученных результатов дают исчерпывающую информацию о процессе распространения волн в упругих волноводах.

Рассмотрим бесконечную трёхслойную пластину постоянной толщины h, симметричного строения по толщине, отнесённую к декартовой системе координат x, x^α (греческие индексы имеют значения 1, 2). Координата x направлена перпендикулярно срединной поверхности пластины, которая расположена в плоскости $x = 0$. Там, где координаты входят равноправно координате x приписывается индекс 3. Каждый слой пластины выполнен из линейно-упругого, однородного и изотропного материала. Введём обозначения для характеристик материалов пластины: индекс c (от *core*) — для внутреннего слоя и индекс s (от *skin*) — для внешних слоёв. Условия на границе контакта слоёв предполагаются идеальными. Движение рассматриваемой пластины как трёхмерного тела в заданной системе координат определяется функциями $w(x, x^\beta, t)$, $w_\alpha(x, x^\beta, t)$ — проекциями вектора перемещений на оси координат. Для слоистых пластин симметричной структуры, так же как и для однородных пластин, динамическое поведение описывается двумя независимыми системами:

уравнениями **продольных** и **изгибных** колебаний. Будем рассматривать свободные изгибные колебания бесконечной трёхслойной пластины.

Система уравнений, описывающая динамическое поведение рассматриваемой слоистой пластины, включает: уравнения движения, уравнения состояния (закон Гука), геометрические соотношения, краевые условия и условия идеального контакта на границе слоёв.

В перемещениях динамические уравнения можно записать в виде:

$$(\lambda w^{k}{}_{,k})_{,i} + (\mu w_i{}^{,j})_{,j} + (\mu w^{j})_{,ij} = \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \qquad (1)$$

(латинские индексы имеют значения 1, 2, 3; запятой в индексах обозначено частное дифференцирование; по повторяющимся индексам производится суммирование).

Плотность ρ и коэффициенты Ламе λ, μ — чётные кусочно-постоянные функции по x.

Краевые условия предполагают отсутствие нагрузок на лицевых поверхностях:

$$\sigma_{33} = \sigma_{3\alpha} = 0 \quad npu \quad x = \pm\frac{h}{2} \qquad (2)$$

Условия идеального контакта на границе слоёв записываются в виде:

$[w] = [w_\alpha] = 0$; $[\sigma^{33}] = [\sigma^{3\alpha}] = 0 \quad npu \quad x = h_c/2$, где $[\sigma^{ij}]$ — компоненты тензора напряжений.

Будем искать решение в форме:

$$w_\alpha = v_\alpha(x) e^{i(kx_\alpha - \omega t)}, \quad w = u(x) e^{i(kx_\alpha - \omega t)} \qquad (3)$$

k — волновое число, ω — собственная частота ветви колебаний.

Фрагмент типичной картины первых мод изгибных колебаний однородной упругой пластины приведен на рис. 1. (см., например, [3; 4]).

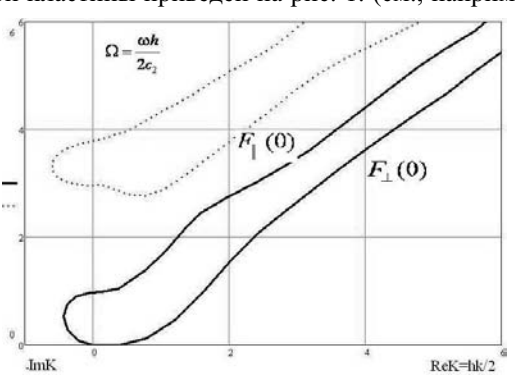


Рис. 1. Пример дисперсионных кривых низших мод колебаний упругой пластины

$F_\perp$ — изгибные моды ($w << w_\alpha$); $F_\parallel$ — сдвиговые моды ($w_\alpha << w$).

2. Малые параметры задачи

Рассматриваемая неоднородная линейная система содержит три малых параметра.

1. Динамическое поведение упругой пластины может быть описано в рамках двумерной теории при условии, что в ней реализуется длинноволновое напряженное состояние, т.е. выполняется неравенство: $h/l << 1$, где l – характерный масштаб изменения напряженного состояния в продольном направлении. Этот малый параметр имеет геометрическую природу.

2. В упругих пластинах в динамике реализуются высокочастотные и низкочастотные процессы. Принято называть процесс низкочастотным, если справедливо неравенство:

$$\omega h/c_2^* << 1 \quad c_2^* = \min\{c_{2c}, c_{2s}\} \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$$

3. Физический малый параметр, обусловленный различием материальных характеристик слоёв, определяется соотношениями: $\frac{\mu_c}{\mu_s}$, $\frac{\lambda_c}{\lambda_s}$, $\frac{\rho_c}{\rho_s}$. Влияние этих соотношений на механическое поведение слоистых пластин в статике подробно проанализировано в [2].

Классическая теория упругих однородных пластин работает при условии одновременного выполнения первого и второго неравенств.

3. Решение задачи в длинноволновом приближении

Будем рассматривать длинноволновые высокочастотные процессы ($k = 0$). Введем геометрический малый параметр явным образом, сделав замену переменной по формуле:

$$\zeta = x\frac{2}{h}, \quad -1 \leqslant \zeta \leqslant 1$$

Для длинноволновых высокочастотных процессов после асимптотического анализа динамические уравнения и краевые условия принимают вид:

$$\begin{aligned} &\frac{4}{h^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial\zeta} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \ |\zeta| \leqslant 1; \quad \frac{\partial w}{\partial\zeta} = 0 \quad при \quad \zeta = \pm 1 \\ &\frac{4}{h^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\mu\frac{\partial w_\alpha}{\partial\zeta} = \rho\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial t^2}, \ |\zeta| \leqslant 1; \qquad \frac{\partial w_\alpha}{\partial\zeta} = 0 \qquad при \ \zeta = \pm 1 \end{aligned} \tag{4}$$

При выводе уравнений полагалось, что механические характеристики материалов слоёв отличаются не сильно. Для длинноволновых процессов ($k = 0$) решение следует искать в виде:

$$w_\alpha = v_\alpha(x)e^{i\omega t}, \quad w = u(x)e^{i\omega t} \tag{5}$$

После подстановки (5) в (4) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Из условия нетривиальности решения получаем уравнения для определения спектра собственных частот колебаний для изгибных и сдвиговых мод.

Частотное уравнение для изгибных мод имеет вид:

$$\operatorname{tg}(\alpha_s a) + \sqrt{\frac{\rho_c(\lambda_c + 2\mu_c)}{\rho_s(\lambda_s + 2\mu_s)}}\operatorname{tg}(\alpha_c b) = 0 \tag{6}$$

Частотное уравнение для сдвиговых мод имеет вид:

$$\operatorname{tg}(\beta_s a)\operatorname{tg}(\beta_c b) = \sqrt{\frac{\rho_c \mu_c}{\rho_s \mu_s}} \tag{7}$$

Здесь введены безразмерные параметры по формулам:

$$\alpha = \frac{\omega h}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \qquad \beta = \frac{\omega h}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$
$$a = \frac{2h_s}{h}, \quad b = \frac{h_c}{h} \qquad a + b = 1$$

Уравнение (6) имеет тривиальное решение при $\omega_1 = 0$, что соответствует классической низкочастотной форме колебаний. Первый корень уравнения (7) соответствует собственной частоте моды, описывающей эффект поперечного сдвига. Для трехслойной пластины с сильно отличающимися материальными свойствами справедлива следующая асимптотическая формула для определения частотного параметра первой сдвиговой моды:

$$\beta_s \cong \sqrt{\frac{\mu_*}{ab}}, \quad \mu_* = \frac{\mu_c}{\mu_s}.$$

Ниже в таблицах 1 и 2 приведены вычисления значений первой сдвиговой частоты колебаний трёхслойной пластины (при $k = 0$), состоящей из жёстких несущих слоёв и податливого заполнителя при различных значениях относительной толщины несущего слоя.

Таб.1 Механические характеристики материалов слоев пластины.

	λ [Mpa]	μ [Mpa]	ρ [kg/m^3]	υ	C_2 [m/sec]
skin	4,76*10^4	2,65	2,65	0,32	3162
core	15,7	3,92	50	0,40	280

a	β_s exact	β_s asympt	ω $[Hz]$
0	0.1391	-	7000
0.2	0.0300	0.0304	1511.31
0.5	0.0243	0.0243	1220.38
0.7	0.0265	0.0265	1333.90
1	1.5707	-	79057

Таб.2 Вычисление собственной частоты первой сдвиговой ветви колебаний.

4. Заключение

1. В длинноволновом приближении решена задача о свободных изгибных колебаниях трёхслойной упругой пластины; получены уравнения для определения спектра собственных частот и построены асимптотики собственных форм для первых двух ветвей.
2. Полученные результаты могут использоваться как для тестирования динамических двумерных уравнений трёхслойных пластин, так и для наладки вычислительной схемы при решении задач на основе двумерных моделей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-08-01229-а.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Московского университета, 1978, 287 с.
2. *Berdichevski V.L.* An asymptotic Theory of Sandwich Plates // International Journal of Engineering Science. 2010. V.48. P.383–404.
3. *Khanh C. Le* Vibrations of Shells and Rods. Springer, 1999, 423 p.
4. *Mindlin R.D.* Waves and Vibrations in Isotropic Elastic Plates // Structural Mechanics, N.Y., 1960, P.199–231.
5. *Рязанцева М.Ю.* Высокочастотные колебания трехслойных пластин симметричного строения // Изв. АН СССР, МТТ, 1989, №5, С.175–181.
6. *Рязанцева М.Ю.* О дисперсии волн в бесконечной упругой трехслойной пластине // Изв. РАН, МТТ, 1998, № 1. , С.166–173.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

С.О. Саркисян

Национальная академия наук Армении
Ереван, Армения
slusin@yahoo.com

На основе метода гипотез имеющего асимптотическое обоснование построена общая прикладная-двумерная теория тонких оболочек со стесненным вращением исходя из общей трехмерной несимметричной теории упругости. В полученной основной системе уравнений микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Введение. В работах [1,2] обосновываются идеи, приводящие к несимметричной (моментной, микрополярной) теории упругости и определены пути дальнейшего ее развития. В работе [3] описывается весьма важный метод вычисления упругих характеристик микрополярных тел, в случае, если известны компоненты тензора модулей упругости и структура исследуемого материала. Отметим, что одной из актуальных задач несимметричной теории упругости является проблема построения прикладных теорий микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок ([4,5] и др.).

К настоящему времени наибольшее развитие получила моментная теория упругости со стесненным вращением. В данной работе используются качественные стороны результата асимптотического метода интегрирования краевой задачи несимметричной теории упругости в тонкой области оболочки [5], формулируются предположения (гипотезы), на основе которых построена математическая модель микрополярно-упругих тонких оболочек со стесненным вращением, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [5] (α_k — криволинейные координаты теории оболочек) — уравнений равновесия

$$\nabla_m \sigma^{mn} = 0, \quad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk}\sigma_{mk} = 0, \tag{1}$$

соотношений упругости

$$\begin{cases} \sigma_{mn} = (\mu + \alpha)\,\gamma_{mn} + (\mu - \alpha)\,\gamma_{nm} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{nm}, \\ \mu_{mn} = (\gamma + \varepsilon)\,\kappa_{mn} + (\gamma - \varepsilon)\,\kappa_{nm} + \beta\kappa_{kk}\delta_{nm}, \end{cases} \tag{2}$$

геометрических соотношений

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn}\omega^k, \ \kappa_{mn} = \nabla_m \omega_n. \tag{3}$$

Здесь $\hat{\sigma}, \hat{\mu}$ — тензоры силовых и моментных напряжений; $\hat{\gamma}, \hat{\kappa}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\vec{V}, \vec{\omega}$ — векторы перемещения и независимого поворота, $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — упругие константы микрополярного материала оболочки. Индексы m, n, k принимают значения 1, 2, 3.

На лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ будем считать заданными силовые и моментные напряжения; на поверхности края оболочки Σ, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек, условия записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Будем предполагать, что толщина оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки.

2. Модель микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением. Для нижеследующих физических безразмерных параметров участвующих в уравнениях (1) – (3) рассмотрим случай:

$$\alpha >> \mu, \quad \frac{R^2\mu}{\beta} \sim 1, \ \frac{R^2\mu}{\gamma} \sim 1, \ \frac{R^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{4}$$

Асимптотический анализ [5] поставленной краевой задачи для систем уравнений (1) – (3) в тонкой области оболочки, в случае (4), показывает, что асимптотические приближения вектора поворота $\vec{\omega}$ связаны с приближениями вектора перемещения $\vec{V}$ как в классической теории упругости ($\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot \vec{V}$, а это означает, что построенная прикладная двумерная теория микрополярных оболочек в данном случае находится в сфере микрополярной теории со стесненным вращением).

Основываясь на результатах асимптотического метода интегрирования поставленной краевой задачи для систем уравнений (1) – (3) [5], для построения общей прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек со стесненным вращением, можем применять следующие предположения (гипотезы):

1. перемещения V_i, V_3 и свободные повороты ω_i, ω_3 $(i = 1, 2)$ распределены по толщине оболочки по линейному закону следующим образом:

$$\begin{aligned} V_i &= u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \\ \omega_i &= \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2); \end{aligned} \tag{5}$$

2. для определения перемещений, поворотов, деформаций, изгибакручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силовых напряжений σ_{3i} $(i = 1, 2)$ примем $\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2)$. После вычисления указанных величин значения σ_{3i} окончательно определим прибавлением к значениям $\overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2)$ соответственно слагаемых, получаемых интегрированием по α_3 первого и второго уравнений статики из (1), для которых потребуем, что усредненные по толщине оболочки величины равны нулю;

3. будем считать выполненным условие стесненного вращения $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot \vec{V}$;

4. относительно единицы будем пренебрегать величинами порядка $\frac{h}{R}$.

Основная система уравнений прикладной двумерной общей теории микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением с учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, построенная при помощи принятых гипотез, выражается уравнениями равновесия

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(T_{ii} - T_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\
&\qquad + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(S_{ji} + S_{ij}\right) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -\left(q_i^+ + q_i^-\right), \\
&\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(M_{ii} - M_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\
&\qquad + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(H_{ji} + H_{ij}\right) - N_{3i} = -h\left(q_i^+ - q_i^-\right), \\
&\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 N_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] = q_3^+ + q_3^-, \qquad (6) \\
&\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(L_{ii} - L_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(L_{ji} + \\
&+ L_{ij}) + \frac{L_{i3}}{R_i} + (-1)^j\left(N_{j3} - N_{3j}\right) = -\left(m_i^+ + m_i^-\right), \\
&\frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 L_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 L_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] - \left(S_{12} - S_{21}\right) = 0, \\
&\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 \Lambda_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 \Lambda_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] + \left(H_{12} - H_{21}\right) = 0,
\end{aligned}$$

физическими соотношениями

$$\begin{aligned}
&T_{ii} = \frac{2Eh}{1 - v^2}\left[\Gamma_{ii} + v\Gamma_{jj}\right], \quad S_{12} + S_{21} = 4\mu h\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}\right), \\
&M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3\left(1 - v^2\right)}\left[K_{ii} + vK_{jj}\right], \quad N_{i3} + N_{3i} = 4\mu h\left(\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i}\right),
\end{aligned}$$

$$H_{12}+H_{21}=\frac{2h^3}{3}2\mu\left(K_{12}+K_{21}\right),\quad L_{ii}=4\gamma h\kappa_{ii},$$
$$L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],$$
$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}\right],$$
$$\Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{m_i^++m_i^-}{2h}\right]. \tag{7}$$

геометрическими соотношениями

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\quad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i,$$
$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\quad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i,$$

$$\Gamma_{i3}=-\vartheta_i+(-1)^j\,\Omega_j,\quad \Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\,\Omega_j, \tag{8}$$
$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_i},\quad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$
$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\quad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i},\quad \Omega_i=-(-1)^i\left(\psi_j+\vartheta_j\right),$$
$$\Omega_3=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{12}-\Gamma_{21}\right),\quad \iota=\frac{1}{2}\left(K_{12}-K_{21}\right),\quad \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},$$
$$(i,j=1,2,\ i\neq j).$$

К системе уравнений микрополярных упругих оболочек со стесненным вращением следует присоединить граничные условия (при $\alpha_1 = \text{const}$):

$$T_{11}=T_{11}^*\text{ или }u_1=u_1^*,\ S_{12}=S_{12}^*\text{ или }u_2=u_2^*,\ N_{13}=N_{13}^*\text{ или }w=w^*,$$
$$M_{11}=M_{11}^*\text{ или }K_{11}=K_{11}^*,\ H_{12}=H_{12}^*\text{ или }K_{12}=K_{12}^*,$$
$$L_{11}=L_{11}^*\text{ или }\kappa_{11}=\kappa_{11}^*,$$
$$L_{12}=L_{12}^*\text{ или }\kappa_{12}=\kappa_{12}^*,\ L_{13}=L_{13}^*\text{ или }\kappa_{13}=\kappa_{13}^*,$$
$$\Lambda_{13}=\Lambda_{13}^*\text{ или }l_{13}=l_{13}^*. \tag{9}$$

Здесь $T_{ii}, S_{ij}, M_{ii}, H_{ij}$ — усилия и моменты от силовых напряжений; $L_{ii}, L_{ij}, \Lambda_{i3}$ — моменты и гипермоменты от моментных напряжений; $u_i, w, \Omega_i, \Omega_3$ — перемещения и повороты точек срединной поверхности; ψ_i — полные углы поворота нормального элемента; ι — интенсивность поворота точек по нормалы к срединной поверхности оболочки.

Система уравнений (6) – (8) теории микрополярных оболочек со стесненным вращением имеет 18-й порядок с девятью граничными условиями

(9) на каждом краю срединной поверхности Γ. Это система содержит 51 уравнений с 51 неизвестными функциями: (T_{ii}, M_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}, Λ_{i3}, Γ_{ii}, K_{ii}, Γ_{ij}, K_{ij}, Γ_{i3}, Γ_{3i}, κ_{ii}, κ_{ij}, κ_{i3}, l_{i3}, u_i, w, ψ_i, ϑ_i, Ω_i, Ω_3, ι). Из системы уравнений (6) – (8) и граничных условий (9) микрополярно-упругих оболочек, при $\alpha = 0$, будет отделяться краевая задача классической теории оболочек на основе гипотез Тимошенко (с некоторым отличием, связанным со статической гипотезой 2).

Литература

1. *Ильюшин А.А., Ломакин В.А.* Моментные теории в механике твердых деформируемых тел. // В сб.: Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С.54–59.
2. *Ильюшин А.А.* Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошных сред. // Вестн. Моск. ун.-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. №5. С.6–14.
3. *Победря Б.Е., Омаров С.Е.* Определяющие соотношения моментной теории упругости// Вестн. Моск. ун-та.Серия 1. Математика. Механика. 2007. №3. С.56–58.
4. *Бровко Г. Л., Иванова О.А.* Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. №1. С.22–35.
5. *Саркисян С.О.* Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости. // Доклады НАН Армении. 2008. Т.108. 4. С.309–319.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕОРИИ ПЛАСТИН РЕЙССНЕРА–МИНДЛИНА

К. А. Скопцов, С. В. Шешенин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

В [1] замечено, что развитие сопротивления материалов идёт как по пути совершенствования расчётных методов, так и по пути расширения физических основ. По–видимому, асимптотический анализ может способствовать совершенствованию и дополнительному обоснованию теорий изгиба. Работа [2], где рассмотрен изгиб однородной пластины с периодически повторяющимися неровностями на поверхности, дала начало использованию метода осреднения [3, 4] для асимптотического анализа пластин. Достаточно подробный асимптотический анализ упругих периодических в плане пластин дан в [5, 6]. Там рассмотрены три асимптотических приближения, для которых получены локальные задачи на ячейке периодичности и доказана их разрешимость. Асимптотическое исследование слоистых симметричных изотропных пластин было проведено также еще и в работе [6].

При асимптотическом анализе однородной пластины теория Кирхгофа-Лява получается в первом приближении. Ниже дается развитие этих результатов для случая третьего приближения, в котором получаются уравнения, аналогичные уравнениями теории Рейсснера–Миндлина. Исследование поведения пластины основывается на методике осреднения трёхмерной задачи линейной теории упругости и не использует гипотез.

1. Асимптотический анализ слоистой пластины.

Пусть в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ задана пластина постоянной толщины h, срединная плоскость которой имеет уравнение $z = 0$ $(x_3 \equiv z)$. На верхней поверхности $z = h/2$ задано давление $p(x_1, x_2)$. Нижняя поверхность пластины $z = -h/2$ свободна от нагрузок. Пластина имеет однородные изотропные упругие свойства, описываемые тензором $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$. Указанная симметрия приводит к тому, что среднее перемещение вертикального отрезка не имеет горизонтальных составляющих. Его вертикальную компоненту обозначим буквой η.

Решение уравнения равновесия:

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} = 0$$

ищется в виде асимптотического ряда по степеням h:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \delta_{i3}\eta(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} h^k N_i^{J_1 \dots J_k}(\frac{x_3}{h})\eta_{,J_1 \dots J_k}(x_1, x_2).$$

Удобно оказывается ввести локальные функции $P_{ij}^{J_1 \dots J_s}(\xi)$, связанные с функциями N формулами

$$P_{ij}^{KJ_1 \dots J_s} = C_{ijlK} N_l^{J_1 \dots J_s} + C_{ijl3}(N_l^{KJ_1 \dots J_s})'; \quad (P_{i3}^{KJ_1 \dots J_s})' = -P_{iK}^{J_1 \dots J_s}.$$

Эти соотношения в совокупности с условиями:

$$P_{ij}^{J_1 \dots J_s}(-1/2) = 0; \quad (P_{i3}^{K})' = 0; \quad N_l = \delta_{l3}$$

позволяют найти все локальные функции P и N. Удобство функций P заключается в том, что поле напряжений записывается в виде ряда:

$$\sigma_{ij} = \sum_{s=1}^{\infty} h^{s-1} P_{ij}^{J_1 \dots J_s} t\eta_{,J_1 \dots J_s},$$

коэффициентами при производных η в котором служат как раз $P_{ij}^{J_1 \dots J_s}$.

2. Соотношения для локальных функций.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие интегральные операторы

$$< f(\xi) >= \int_{-1/2}^{1/2} f(\zeta)\, d\zeta; \quad \mathrm{I}[f(\xi)] = \int_{-1/2}^{\xi} f(\zeta)\, d\zeta;$$

$$\mathrm{A}[f(\xi)] = \mathrm{I}[f(\xi)] - < \mathrm{I}[f(\xi)] > .$$

Функции N_i^{KL} можно представить в виде:

$$N_i^{KL} = \mathrm{A}[M_{ij}^{-1} C_{j3KL}\xi],$$

где матрица M определена компонентами $M_{ij} = C_{i3j3}$, что приводит к равенствам

$$P_{IJ}^{KL} = C_{IJpK} N_p^L + C_{IJp3}(N_p^{KL})' = (C_{IJp3} M_{pq}^{-1} C_{q3KL} - C_{IJLK})\xi.$$

Первое приближение асимптотического ряда дает формулы для компонент тензора напряжений в плане пластины σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}.

Во втором приближении локальные функции получаются из соотношений:

$$N_i^{KLR} = -\mathrm{A}[M_{ij}^{-1}(C_{j3pK}N_p^{LR} + \mathrm{I}[P_{jK}^{LR}])],$$
$$P_{IJ}^{KLR} = (C_{IJpK} - C_{IJq3}M_{qr}^{-1}C_{r3pK})N_p^{LR} - C_{IJp3}M_{pq}^{-1}\,\mathrm{I}[P_{qK}^{LR}],$$
$$P_{I3}^{KLR} = -\mathrm{I}[P_{IK}^{LR}], \quad P_{33}^{KLR} = 0.$$

Для локальных функций в третьем приближении выполнены аналогичные соотношения:

$$N_i^{KLRS} = -\mathrm{A}[M_{ij}^{-1}(C_{j3pK}N_p^{LRS} + \mathrm{I}[P_{jK}^{LRS}])];$$
$$P_{IJ}^{KLRS} = (C_{IJpK} - C_{IJq3}M_{qr}^{-1}C_{r3pK})N_p^{LRS} - C_{IJp3}M_{pq}^{-1}\,\mathrm{I}[P_{qK}^{LRS}];$$
$$P_{i3}^{KLRS} = -\mathrm{I}[P_{iK}^{LRS}].$$

3. Третье приближение для изотропной однородной пластины.

Рассматривается третье приближение. Прогиб η, вызваемый распределённой по верхней поверхности нагрузкой $p(x, y)$ ищется в виде:

$$\eta = \eta_0 + h\eta_1 + h^2\eta_2,$$

где функции η_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$D_{IJ}^{KL}\eta_{0,IJKL} = -\frac{p}{h^3};$$
$$D_{IJ}^{KL}\eta_{1,IJKL} + D_{IJ}^{KLR}\eta_{0,IJKLR} = 0;$$
$$D_{IJ}^{KL}\eta_{2,IJKL} + D_{IJ}^{KLR}\eta_{1,IJKLR} + D_{IJ}^{KLRS}\eta_{0,IJKLRS} = 0.$$

Функции D вычисляются как средние значения моментов ξP:

$$D_{IJ}^{K_1\ldots K_s} = <\xi P_{IJ}^{K_1\ldots K_s}> .$$

В этом случае изотропного однородного материала уравнения на функции η_0, η_1 и η_2 значительно упрощаются:

$$D_0\Delta\Delta\eta_0 = -\frac{p}{h^3};$$
$$D_0\Delta\Delta\eta_1 = 0;$$
$$D_0\Delta\Delta\eta_2 + D_2\Delta\Delta\Delta\eta_0 = 0.$$

В них D_0 и D_2 — коэффициенты жёсткости. Второе уравнение удовлетворяется для $\eta_1 = 0$. Складывая первое уравнения с третьим, предварительно умноженным на h^2, получаем

$$D_0\Delta\Delta\eta - \frac{D_2}{D_0}\frac{\Delta p}{h} = -\frac{p}{h^3}.$$

Это уравнение можно переписать в традиционном виде:

$$-\Delta\Delta\eta = \frac{p}{D} - h^2\kappa\frac{\Delta p}{D}.$$

Вычисления показывают, что $D = D_0 h^3 = \dfrac{\mu(\lambda+\mu)h^3}{3(\lambda+2\mu)}$ — классическая изгибная жёсткость, а $\kappa = \frac{D_2}{D_0} = \dfrac{17\lambda+24\mu}{60(\lambda+2\mu)}$. Для сравнения, в теории Рейсснера-Миндлина уравнение изгиба пластины имеет тот же вид, но $\kappa = \dfrac{3\lambda+4\mu}{10(\lambda+2\mu)}$, отличающийся от полученного методом осреднения на $\dfrac{1}{60}\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}$.

4. Заключение.

Метод осреднения позволяет получать теории изгиба пластин чисто математически без использования гипотез. Для изотропной однородной пластины последовательные приближения дают соотношения известных теорий пластин (Кирхгофа-Лява — в первом приближении — и Рейсснера-Миндлина — в третьем).

Литература

1. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление Материлов // ФИЗМАТГИЗ, 1959 г., 372 с.
2. *Kohn R.V., Vogelius M.* A new model for thin plates with rapidly varying thickness // International Journal of Solids and Structures, V.20, Iss.4, 1984 г., P.333–350.
3. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. Наука, 1984 г., 352 с.
4. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та. 1984. 336 с.
5. *Шешенин С.В.* Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Изв. РАН МТТ. 2006 С.71–79.
6. *Шешенин С.В.* Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане // Вестник Московского университета. 2006. №1. С.47–51.
7. *де Брёйн Н.Г.* Асимптотические методы в анализе. Изд-во иностр. лит. 1961. 246 с.

ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ СТРУКТУРЫ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НЕУПРУГОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

***П. В. Трусов*[1], *В. Н. Ашихмин*[2], *П. С. Волегов*[3], *А. И. Швейкин*[4]**

Пермский государственный технический университет
Пермь, Россия

[1]tpv@matmod.pstu.ac.ru, [2]awn@perm.ru, [3]crocinc@mail.ru, [4]alexsh59@bk.ru

Для описания процессов глубокого пластического деформирования поликристаллических материалов, сопровождающихся эволюцией структуры, предлагается двухуровневая (макро- и мезоуровни) модель с применением конститутивных соотношений, основанных на введении внутренних переменных. В модели мезоуровня учитываются внутризеренное дислокационное скольжение с учетом различных механизмов упрочнения и повороты кристаллической решетки зерен за счет несовместности движения дислокаций в соседних зернах. Адекватность модели мезоуровня проверялась при рассмотрении процессов одноосного растяжения и осадки, стесненной осадки, равноканального углового прессования. В каждом случае получено удовлетворительное соответствие результатов с данными натурных экспериментов, в том числе по характеристикам мезоструктуры.

Процессы неупругого деформирования и свойства поликристаллических материалов на макроуровне, как показывают многочисленные экспериментальные и теоретические исследования, весьма чувствительны к изменению мезо- и микроструктуры материала. Поэтому в нелинейной механике деформируемого твёрдого тела одной из наиболее актуальных проблем является построение моделей, описывающих состояние и эволюцию мезо- и микроструктуры поликристаллов. Имеются, по крайней мере, две возможности учёта эволюции мезо- и микроструктуры: неявным или явным способом. В первом случае в структуру определяющих соотношений (ОС) вводятся достаточно сложные операторы над историей макронагружения (макродеформации); при этом трудно выявить и обосновать физический смысл и механизмы деформирования. В последние годы при построении моделей деформирования поликристаллов, описывающих эволюцию мезо- и микроструктуры, все большее признание находит подход, основанный на явном введении в структуру определяющих соотношений параметров, отражающих состояние и эволюцию мезо- и микроструктуры, и формулировке эволюционных (кинетических) уравне-

ний для этих параметров, называемых внутренними переменными и являющихся носителями информации об истории воздействий [1]. Данный подход имеет определенные преимущества по сравнению с формулировкой ОС в операторной форме: большая ясность физической интерпретации уравнений, возможность проверки результатов анализа эволюции мезо- и микроструктуры на основании опытных данных и/или анализа микропараметров, значительная универсальность.

В работе предлагается двухуровневая модель неупругого деформирования поликристаллов, описывающая эволюцию внутренней структуры (в том числе текстурообразование), учитывая при этом взаимодействие соседних зерен за счет несовместности скольжения дислокаций в них и физические механизмы внутризеренного упрочнения.

Определяющее соотношение макроуровня представляет собой (анизотропный) закон Гука в скоростной релаксационной форме

$$\boldsymbol{\Sigma}^r = \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^p), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{C}$ — тензор модулей упругости, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}^p$ — тензор деформации скорости и его пластическая составляющая, индекс “r” означает коротационную производную, некоторые возможные варианты выбора коротационной производной (выделения квазитвердого движения) рассмотрены в [2]. Пластическая составляющая деформации скорости $\boldsymbol{D}^p$ и анизотропные упругие свойства $\boldsymbol{C}$ в каждый момент деформирования зависят от микроструктуры (а через нее — от истории нагружения), являясь явными внутренними переменными модели макроуровня [1], определяются (ориентационным) осреднением выборки скоростей пластических деформаций $\mathbf{d}^p$ и упругих модулей $\mathbf{c}$ для текущего времени t по всем элементам мезоуровня (зернам, субзернам).

На мезоуровне (уровне зерна) в качестве определяющего соотношения выступает также закон Гука в скоростной релаксационной форме, при этом учитывается анизотропия кристаллической решетки:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}^e = \boldsymbol{c} : (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}^p), \quad \boldsymbol{\sigma}^r = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, $\boldsymbol{c}$ — тензор четвертого ранга упругих свойств кристаллита, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d}^e$, $\boldsymbol{d}^p$ — тензор деформации скорости, его упругая и пластическая составляющие, $\boldsymbol{\Omega}$ — тензор спина решётки кристаллита. Основным механизмом пластического деформирования металлов является внутризёренное скольжение краевых дислокаций, в качестве критерия активности сдвига (скольжения дислокаций) по системе скольжения используется закон Шмида

$$\tau_s \equiv M^s : \boldsymbol{\sigma} = \tau_s^c, \tag{3}$$

где τ_s — действующее в системе скольжения (СС) s касательное напряжение, M^s — ориентационный тензор, $\boldsymbol{\sigma}$ — однородный по рассматриваемому зерну тензор напряжений Коши, τ_s^c — критическое напряжение сдвига в той же системе скольжения, зависящее, вообще говоря, от многих факторов и переменных, в этой зависимости должны быть заложены механизмы эволюции дефектной структуры материала. Подробное изложение используемого в настоящей работе закона упрочнения по СС кристаллитов, образующих представительный объем макроуровня, содержится в [3].

Для известного (определенного алгоритмически) набора активных систем скольжения в текущий момент времени при наличии поворотов система уравнений конститутивной модели мезоуровня в скоростях имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{M}^s) = f_s\prime(\gamma^{(i)},\ \dot{\gamma}^{(i)}) \displaystyle\sum_{p=1}^{K_a} \dot{\gamma}^p, \quad (i = 1, ..., K), \quad s = 1, ..., K_a, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{c} : (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}^p) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \\ \boldsymbol{d}^p = \displaystyle\sum_{p=1}^{K_a} \boldsymbol{M}^p \dot{\gamma}^p, \\ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{D}, \\ \text{уравнения для определения спина решетки } \boldsymbol{\Omega}, \end{cases} \tag{4}$$

где $f_s(\gamma^{(i)},\ \dot{\gamma}^{(i)})$ — функция упрочнения (критическое напряжение сдвига по системам скольжения), K_a — число активных СС, K — общее число СС. Уравнения $(4)_1$ — требование равенства скорости касательного напряжения на активной системе скольжения скорости критического напряжения для этой системы скольжения, $(4)_2$ — закон Гука в скоростной релаксационной форме (2) с учетом геометрической нелинейности, $(4)_3$ — кинематическое соотношение, $(4)_4$ — гипотеза Фойгта (тензор деформации скорости макроуровня $\boldsymbol{D}$ определятся из решения краевой задачи), $(4)_5$ — соотношения той или иной модели поворота решётки.

В работе поворот решётки (эволюция ортогонального тензора, связывающего кристаллографическую и фиксированную лабораторную системы координат) представляется суммой двух составляющих:

— поворота решётки зерна в предположении его изолированности, который связывается с ортогональным тензором $\boldsymbol{R}^e$, сопровождающим упругую деформацию [2]

$$\boldsymbol{F} = (\overset{o}{\nabla} \mathbf{r})^T = \boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{F}^p,\ \boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{R}^e \cdot \boldsymbol{U}^e = \boldsymbol{V}^e \cdot \boldsymbol{R}^e, \tag{5}$$

($\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}^e, \boldsymbol{F}^p$ — полный, упругий и пластический градиенты деформации, $\overset{o}{\nabla}$ — оператор Гамильтона в отчётной конфигурации, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор

частицы в текущей конфигурации, $\boldsymbol{U}^e, \boldsymbol{V}^e$ — симметричные правый и левый тензоры искажения), — поворота только решётки зерна при сохранении конфигурации зёрен в физическом пространстве, движущая сила этого поворота — несовместность движения дислокаций в соседних зёрнах. При описании второй составляющей поворота решётки для каждого зерна вводится еще одна внутренняя переменная — действующее на зерно моментное напряжение. Эволюция (ассоциированного) вектора-момента $\boldsymbol{m}$, определяется из анализа несовместности движения дислокаций на границе зёрен следующим соотношением:

$$\boldsymbol{m}^r = \mu N \times \left[\boldsymbol{L}^{pT}\right] \cdot N, \tag{6}$$

где $\mu = \lambda G$ — параметр модели, характеризующий реакцию системы на несовместность сдвигов, G – модуль сдвига, λ — экспериментально определяемый (безразмерный) параметр, **N** — внешняя для анализируемого зерна нормаль к границе с соседним зерном, $\left[\boldsymbol{L}^{pT}\right]$ — скачок пластической составляющей градиента скорости,

$$\left[\boldsymbol{L}^{pT}\right] = \sum_i^K \dot{\gamma}^i \boldsymbol{n}^i \boldsymbol{b}^i - \sum_j^K \dot{\gamma}^{j(m)} \boldsymbol{n}^{j(m)} \boldsymbol{b}^{j(m)},$$

где $\dot{\gamma}^i, \dot{\gamma}^{j(m)}$ — скорости сдвигов, $\boldsymbol{b}^i, \boldsymbol{b}^{j(m)}$ — единичные векторы вдоль векторов Бюргерса, $\boldsymbol{n}^i, \boldsymbol{n}^{j(m)}$— нормали для систем скольжения в исследуемом и соседнем зерне соответственно.

Спин $\boldsymbol{w}^{(p)}$, соответствующий рассматриваемой составляющей поворота решетки, определяется согласно соотношению:

$$\boldsymbol{w}^{(p)} = \begin{cases} \dfrac{1}{H}\boldsymbol{\mu} & \text{при} \quad \|\boldsymbol{\mu}\| = \mu_c \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\mu}} > 0, \\ \mathbf{0} & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{7}$$

где $\|\boldsymbol{\mu}\| = \sqrt{\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mu}}$ — интенсивность тензора моментных напряжений, $\Psi = \int_{\tau=0}^{t} \sqrt{\boldsymbol{w}^{(p)} : \boldsymbol{w}^{(p)}} d\tau$ — накопленный “пластический” решёточный поворот, $\mu_C = \mu_C(\Psi)$ — текущее критическое моментное напряжение.

Адекватность модели мезоуровня проверялась при рассмотрении процессов одноосного растяжения и осадки, стесненной осадки, равноканального углового прессования меди, получено удовлетворительное соответствие результатов с данными натурных экспериментов, в том числе по характеристикам мезоструктуры (полюсным фигурам).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №10-08-00156-а, № 10-08-96010-р_урал_а).

Литература

1. *Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Швейкин А.И.* Двухуровневая модель упругопластического деформирования поликристаллических материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т.15. №3. С.327–344.
2. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука. 1986. 232 с.
3. *Трусов П.В., Волегов П.С.* Определяющие соотношения с внутренними переменными и их применение для описания упрочнения в монокристаллах // Физическая мезомеханика. 2009. Т.12. №5. С.65–72.

МАСШТАБНЫЙ ЭФФЕКТ УПРУГИХ СВОЙСТВ ДИСПЕРСНО-УПРОЧНЕННЫХ КОМПОЗИТОВ

З.Г. Тунгускова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

При описании свойств структурно-неоднородных материалов необходимо вводить структурные параметры, имеющие размерность длины и определяемые строением и свойствами материала. Таким параметром для дисперсно-упрочненного материала является характерный размер включений. В ряду этих параметров важнейшее значение имеет [1,2,3] параметр квазиоднородности (параметр ориентации), характеризующий представительный объем материала и границы применимости макроскопических уравнений состояния.

Определение параметра квазиоднородности в эксперименте связано с наличием у структурно-неоднородного материала так называемого “масштабного эффекта”, т.е. зависимости разброса определяемых упругих характеристик от размера образца. Теоретически такая зависимость описывается моделью случайно-неоднородного упругого тела [2] , что позволяет вычислить параметр квазиоднородности или представительный объем через характеристики структуры.

Будем исходить из простейших моделей Фойгта и Рейсса случайно-неоднородного материала, т.е. предполагать, что любой объем V материала, больший или сравнимый с представительным, характеризуется набором S_V^i $(i = 1, 2, ...N)$ осредненных по этому объёму модулей податливости и жёсткости [4]. Эти модули являются независимыми случайными величинами. Дисперсно-упрочненный композит представляет собой аморфную анизотропную матрицу с достаточно редкими анизотропными включениями. Число n этих включений в объёме V являются случайными. Сделаем следующие предположения относительно распределения включений в матрицы:

1. Вероятность попадания того или иного числа включений в определённый объем V зависит только от этого объёма, но не зависит от положения этого объёма в пространстве.
2. Включения попадают в непересекающиеся объёмы независимо друг от друга.
3. Эти включения достаточно редкие.

   В этом случае можно считать [5,6], что число включений n в объеме V есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона

$$p_n = \frac{(\rho V)^n}{n!} e^{-\rho V}$$

где p_n – вероятность попадания n точек в объем V, ρ — средняя концентрация включений. Для такого распределения

$$\langle n \rangle = Dn = \rho V.$$

Для модуля S_V^i согласно его определению по Фойгту или по Рейссу имеем

$$S_V^i = \frac{V_M}{V} S_M^i + \frac{V_r}{V} \sum_{k=1}^{n} S_r^{ik} \tag{1}$$

$V = V_M + nV_r$, V_M — объем матрицы, V_r — объем включения, S_r^{ik} — i-й модуль в k-ом включении.

Случайная величина (1) есть сумма случайного, но достаточно большого числа n независимых одинаково распределенных случайных величин S_r^{ik}. Такие суммы исследовались в работе [7] , показано, что они распределены нормально и

$$\left\langle S_V^i \right\rangle = (1 - \rho V_r)\, S_M^i + \rho V_r \left\langle S_r^i \right\rangle \tag{2}$$

$$DS_V' = \frac{\rho V_r^2}{V} \left(\left(S_M^i \right)^2 + DS_r^i \right) \tag{3}$$

Отсюда видно, что математическое ожидание эффективного упругого модуля $\left\langle S_V^i \right\rangle$ не зависит от объема осреднения, а его дисперсия DS_V' обратно пропорциональна этому объему, т.е. получена количественная оценка разброса упругих свойств от размера области осреднения. Представительный объем $\widetilde{V}^i$, отнесенный к этому модулю материала с вероятностью p_0 и допуском ε находим из условия

$$p_0 = \left\{ \left| \frac{S_V^i - \left\langle S_V^i \right\rangle}{\left\langle S_V^i \right\rangle} \right| < \varepsilon \right\}$$

Представительный объем $\widetilde{V}$ материала определяется как максимальный из всех $\widetilde{V^i}$.

Так как S_V^i распределена нормально, то отсюда получим

$$p_0 = 2\Phi_0 \left(\frac{\varepsilon \left\langle S_V^i \right\rangle}{\sqrt{DS_V^i}} \right) \quad ,$$

где $\Phi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — функция Лапласа.

Учитывая (2), отсюда имеем

$$\widetilde{V}^i = \delta \frac{\rho V_r^i \left(\left(S_M^i \right)^2 + DS_r^i \right)}{\left(\left(1 - \rho V_r \right) S_M^i + \rho V_r \left\langle S_r^i \right\rangle \right)^2}, \tag{4}$$

где $\delta = \left(\frac{1}{\varepsilon} \Phi_0^{-1} \left(\frac{p_0}{2} \right) \right)^2$ (Φ_0^{-1} — функция, обратная функции Лапласа).

В случае изотропной матрицы и изотропного включения $\left\langle S_r^i \right\rangle = S_r^i$; $DS_r^i = 0$. Под S^i понимаются константы упругости K , μ и модули податливости $\frac{1}{K}$; $\frac{1}{\mu}$. Для $\tilde{V}^i$ получаем

$$\widetilde{V}^i = \delta \frac{\rho V_r^2 {S_M^i}^2}{\left(S_M^i + \rho V_r \left(S_r^i - S_M^i \right) \right)^2}$$

т.е.

$$\widetilde{V}_K = \delta \frac{\rho V_r^2 K_M^2}{\left(K_M + \left(K_b - K_M \right) \rho V_r \right)^2}, \tag{5}$$

$$\tilde{V}_{\frac{1}{K}} = \frac{\delta \rho V_r^2 \left(\frac{1}{K_M} \right)^2}{\left(\frac{1}{K_M} + \left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_M} \right) \rho V_r \right)^2} \tag{6}$$

и аналогично для μ и $\frac{1}{\mu}$.

Расчеты по формулам (5), (6) проводились при $p_0 = 0,89$ и $\varepsilon = 0,06$. В этом случае $\delta = 10^4$. Параметр квазиоднородности $l_i = \sqrt[3]{\tilde{V}^i}$, $l = \max l_i$.

В качестве конкретных композиционных материалов рассматривались дисперсно-упрочненные сплавы. Для таких материалов предположение об изотропности фаз является приближенным. Числовые значения параметра l подсчитывались для следующих сплавов: $(Ni - 5,6\%, \quad Al_2O_3)$; $(Ni - 10,5\%, \quad SiO_2)$; $(Ni - 6,4\%, \ TiO_2)$; $(Ni - 7,8\%, \ TiO_2)$.

Упругие константы Ni, Al_2O_3 , SiO_2 , TiO_2 взяты из справочника [8]. Для никеля $K_r = 1,618$мбар; $\mu_r = 0,77$мбар. Средний объем одного включения V_r в предположении, что включения сферические, был взят из [9]. Результаты вычислений приведены в таблице (ρ — средняя концентрация никеля):

	$\rho \cdot 10^2$	K_M *мбар*	μ_M *мбар*	V_r $(мкм)^3$	l_K *мкм*	l_μ *мкм*	$l_{1/K}$ *мкм*	$l_{1/\mu}$ *мкм*	l *мкм*
Al_2O_3	5,6	2,106	2,003	0,009	0,7	2,3	0,6	1,3	2,3
SiO_2	10,5	0,383	0,446	0,32	6,2	4	12,8	5,3	12,8
TiO_2	6,4	2,16	1,136	0,048	1/3	1,9	1,2	1,5	1,9
TiO_2	7,8	2,16	1,1136	7,3	7,6	11	6,7	8,4	11

Литература

1. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. М., Наука. 1959
2. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М. Наука, 1970.
3. *Тунгускова З.Г.* О представительном объеме упругих поликристаллических материалов // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. №1, 1991.
4. *Тунгускова З.Г.* Границы применимости макроскопических уравнений состояния для упругих структурно-неоднородных сред // Упругость и неупругость. М., 2001.
5. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М. Наука, 1972.
6. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М. Наука, 1988.
7. *Колмогоров А.Н., Прохоров Ю.В.* О суммах случайного числа случайных параметров // УМН, 1949. т. IY, вып. 4(32).
8. Справочник физических констант горных пород. М. 1969.
9. *Портной К.И.Бабич Б.Н.* Дисперсно-упрочненные материалы. М., 1974.

ПОВЕРХНОСТНАЯ ЭНЕРГИЯ И ПРОЧНОСТЬ ЛИНЕЙНО УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

В.С. Шоркин, Л.Ю. Фроленкова, А.С. Азаров

Орловский государственный технический университет
Орёл, Россия
LaraFrolenkova@yandex.ru

Предлагается вариант градиентной модели изотропной линейно упругой среды, основанный на дополнении обычных определяющих соотношений уравнениями состояния фононного и электронного (для металлов) газов — двухпараметрическими выражениями, определяющими потенциалы парного и тройного взаимодействия частиц среды в ее невозмущенном состоянии. Это позволяет связать значения упомянутых двух параметров, а также неклассических характеристик упругого состояния, поверхностной энергии и теоретического предела прочности.

1. Введение

Поведение упругих материалов характеризуется рядом параметров: модулем Юнга и коэффициентом Пуассона, коэффициентами Ламэ, поверхностной энергией, пределом прочности и т. д. Часть этих параметров выражается через другие параметры (например, модуль Юнга и коэффициент Пуассона выражаются через коэффициенты Ламэ), другая часть независима от остальных. Систему независимых параметров необходимо определять экспериментально. Их количество желательно минимизировать.

Минимизация осуществляется с помощью гипотез: А) частицы среды действуют друг на друга с помощью потенциалов парного и тройного взаимодействий [1]; Б) свободная энергия определяется не только потенциальным взаимодействием частиц, но и свободной энергией электронного (металлы) и фононного идеальных газов [2].

2. Модель упругой среды

Представленные гипотезы конкретизируются следующими положениями.

1. Рассматриваемые тела состоят из изотропных упругих материалов.
2. Существует бесконечно протяженная однородная среда Ω, состоящая из того же материала, что и изучаемое тело B. Оно выделяется из среды Ω сначала мысленно, а потом мгновенно, изотермически. После этого деформации, возникающие в B при выделении, происходят адиабатически.

Положения частиц dB мысленно выделенного тела B характеризуются радиус-векторами $\vec{r}$ их центров инерции. Начальным моментом времени $t = 0$ считается момент реального выделения B из Ω. В момент времени $t = 0 + 0$ тело B уже выделено, но искажения начальной конфигурации еще нет, отделенная от B часть Ω мгновенно удалилась в бесконечность. Далее частицы dB получают перемещения, характеризуемые векторным полем $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}, t\right)$, и занимают положение $\vec{R}\left(\vec{r}, t\right) = \vec{r} + \vec{u}\left(\vec{r}, t\right)$.

3. Для произвольных точек $\vec{r}$ и $\vec{r}_1$ [1] $\left| \Delta \vec{u} \right| \neq 0$:

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r} + \vec{l}\right) - \vec{u}\left(\vec{r}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\nabla^n \vec{u}\right)_{\vec{l}=0} \overbrace{\cdot\ldots\cdot}^{n\ раз} \vec{l}^n. \quad (1)$$

Здесь $\vec{l}^n$, ∇^n — тензорная n-я степень векторов $\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ и $\nabla = d\ldots / d\,\vec{r}$,

$$\max_{\vec{r}, \vec{r}_1 \in \Delta V} \left| \frac{\Delta \vec{u}\left(\vec{r}, \vec{r}_1\right)}{D} \right| << 1; \quad \left\| \nabla^n \vec{u} \right\| D^{n-1} << 1;$$
$$\left\| \nabla^n \vec{u} \right\| = \left[\sum_{i, j_1, = j_n}^{n} \left(u_{i,j}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \rho = const, \quad (2)$$

где D – характерный размер (толщина поверхностного слоя); ρ – плотность. Элементы $\left\{ \nabla^n \vec{u} \right\}$ – характеристики деформированного состояния тела относительно его невыделенной конфигурации.

4. Допускается, что изменения температуры после выделения тела $\Theta = T - T_0$ малы: $|\Theta / T_0| << 1$.
5. Объемная плотность w изменения свободной энергии задается в виде:

$$w = w\left(\Theta, \left\{\nabla^n \vec{u}\right\}\right) = S_0 \Theta + \sum_{n=1}^{\infty} P^{0(n)} \overbrace{\cdot\ldots\cdot}^{n\ раз} \left(\nabla^n \vec{u}\right)^T +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\nabla^m \vec{u}\right) \overbrace{\cdot\ldots\cdot}^{m\ раз} C^{(n,m)} \overbrace{\cdot\ldots\cdot}^{n\ раз} \left(\nabla^n \vec{u}\right)^T + \frac{1}{2} \frac{c_\varepsilon}{T_0} \Theta^2 + \quad (3)$$
$$+ \frac{1}{2} \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} \Theta\, B^{(n)} \overbrace{\cdot\ldots\cdot}^{n\ раз} \left(\nabla^n \vec{u}\right)^T + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\nabla^m \vec{u}\right) \overbrace{\cdot\ldots\cdot}^{m\ раз} B^{(n)\,T} \Theta \right].$$

Коэффициенты $\left(S_0, \left\{B^{(n)}\right\}, \left\{P^{0(n)}\right\}, \left\{C^{(n,m)}\right\}\right)$ — система параметров, определяющих термодинамические свойства материала. Гипотезы (А) и (В) позволяют минимизировать ее объем.

6. Для металлов ионы, образующие структуру материала, а также фононный и электронный газы рассматриваются как сплошные взаимопроникающие среды B^i, B^f, B^e. Для неметаллов среды B^i и B^e связаны,

образуя среду $B^r = B^i \cup B^e$. Элементарные части dB^i, dB^f, dB^e занимают один и тот же объем $dV = dV^i = dV^e = dV^f$. Для металлов частица $dB^r = dB^i \cup dB^e$ электрически нейтральна, при этом $dB = dB^r \cup dB^f$.

Характеристикой термодинамического состояния материала является свободная энергия с плотностью распределения ее изменения $w = w^r + w^e + w^f$, ($w^e = 0$ для неметаллов). Фононный и электронный газы идеальны, поэтому $w^\eta = p^{\eta 0}\left(\nabla \cdot \vec{u}\right)$, $\eta = e, f$.

Давление $p^{\eta 0}$ определяется соответствующим уравнением состояния и вычисляется [2]:

$$
\begin{aligned}
p^{f0} &= \left.\frac{\partial w^f}{\partial V}\right|_{T=T_0,\nabla^m\vec{u}=0} = \frac{9\,k\,\theta_D\,\gamma}{x_D}\int\limits_0^{x_D}\frac{x^3 d\,x}{e^x-1},\\
x_D &= \frac{\theta_D}{T_0},\quad x = \frac{h\,\nu}{k\,T},\quad \theta_D = \frac{h\,\nu_D}{k},\\
p^{e0} &= \frac{\partial w^e}{\partial V} = \frac{2n^e\mu_0}{5}\left[1+\frac{5}{12}\left(\frac{\pi\,k\,T_0}{\mu_0}\right)^2\right],
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где n и n^e — удельные числа атомов и свободных электронов в единице объема; μ_0 — энергия Ферми; θ_D — температура Дебая; k — постоянная Больцмана; ν — возможные значения частот колебаний частиц (молекул, атомов, ионов); ν_D — частота обрезания непрерывного спектра возможных частот; h — постоянная Планка, γ — постоянная Грюнайзена.

Величина w^r определяется потенциальным взаимодействием [1]. Потенциал парного взаимодействия частиц dB и dB_1 пропорционален объемам dV и dV_1, и определяется выражением: $\Phi^{(2)}\left(\vec{L}_1\right)dVdV_1$. Потенциал тройного взаимодействия частиц dB, dB_1, dB_2 соответственно равен $\Phi^{(3)}dVdV_1dV_2$, $\vec{L}_1 = \vec{R}_1 - \vec{R} = \vec{l}_1 + \Delta\,\vec{u}_1$, $\vec{L}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R} = \vec{l}_2 + \Delta\,\vec{u}_2$.

Для потенциалов $\Phi^{(2)}$, $\Phi^{(3)}$, вычисляемых для текущего состояния, допускается представление рядом Тейлора относительно начальной невыделенной конфигурации, в котором сохранены лишь слагаемые со степенью $\left(\Delta\vec{u}_k\right)^n$ не выше второй. В отсчетном состоянии [1]:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(2)} &= D^{(2)}\left(e^{-2\xi\,l_1} - 2e^{-\xi\,l_1}\right),\\
\Phi^{(3)} &= D^{(3)}\left(e^{-2\xi\,l_1} - 2e^{-\xi\,l_1}\right)\left(e^{-2\xi\,l_2} - 2e^{-\xi\,l_2}\right),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $D^{(2)}$, $D^{(3)}$, ξ — параметры, а l_1, l_2 — модули векторов $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$.

Выражения (4), (5) позволяют выразить параметры $\left(\{B^{(n)}\},\ \{P^{0(n)}\},\ \{C^{(n,m)}\}\right)$ через параметры $(D^{(2)}, D^{(3)}, \xi, n, n^e, \theta_D, \gamma, \mu_0, \nu_D)$:

$$\begin{gathered} \mathrm{B}^{(n)} = \left.\frac{\partial P^{0(n)}}{\partial T}\right|_{T=T_0} = -\frac{\partial P^{(n)}}{\partial \Theta}, \\ P^{0(n)} = P^{r0(n)} + P^{e0(n)} + P^{f0(n)},\ \ C^{(n,m)} = C^{r(n,m)}, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} P^{r0(n)} = \frac{1}{2!}\int\limits_V \frac{1}{n!}\left(\nabla_1 \Phi^{(2)}\right)\ \vec{l}_1^{\,n}\, dV_1 + \\ + \frac{1}{3!}\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_V \left[\int\limits_V \frac{1}{n!}\left(\nabla_\alpha \Phi^{(3)}\right)\vec{l}_\alpha^{\,n} dV_1\right] dV_2, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} C^{r(n,m)} = \frac{1}{2!}\int\limits_V \frac{1}{m!\,n!}\vec{l}_1^{\,n}\left(\nabla_1^2 \Phi^{(2)}\right)\vec{l}_1^{\,m} dV_1 + \\ + \frac{1}{3!}\sum_{p,q=1}^{2}\int\limits_V \left[\int\limits_V \frac{1}{m!n!}\vec{l}_p^{\,n}\left(\nabla_p \nabla_q \Phi^{(3)}\right)\vec{l}_q^{\,m} dV_1\right] dV_2, \end{aligned}$$

где $\nabla_\alpha = \dfrac{d}{d\vec{l}_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$.

Первая тройка параметров выражается через среднее межатомное расстояние $l_0 \approx 1/\sqrt[3]{n}$ и коэффициенты Ламэ λ, μ [1]

$$\begin{cases} \left(\dfrac{12\pi}{5\xi^3}\right) D^{(2)} + \left(\dfrac{185\,\pi^2}{\xi^6}\right) D^{(3)} = \lambda \\ \left(\dfrac{12\pi}{5\xi^3}\right) D^{(2)} + \left(\dfrac{120\,\pi^2}{\xi^6}\right) D^{(3)} = \mu \end{cases}, \quad \xi = \frac{45\sqrt{3}}{2l_0} \tag{8}$$

Таким образом, фундаментальной системой параметров состояния является совокупность $(\lambda, \mu, n, n^e, \theta_D, \gamma, \mu_0, \nu_D)$.

3. Пример расчета

Переход к новой фундаментальной системе позволил расширить множество параметров, выраженных через ее элементы. К ним относятся поверхностная энергия и предел прочности.

Поверхностная энергия W_p вычисляется как изменение свободной энергии полубесконечного тела B, произошедшее в момент его отделения от Ω. В этот момент ни деформаций ни изменения температуры еще нет, изменилось только число соседей частиц тела B.

$$\begin{aligned} W_p = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\left\{\int\limits_V \left[\int\limits_\Omega \Phi^{(2)}\, dV_1 - \int\limits_V \Phi^{(2)}\, dV_1\right] dV + \right. \\ \left. + \int\limits_V \left[\int\limits_\Omega dV_1 \int\limits_\Omega \Phi^{(3)}\, dV_2 - \int\limits_V dV_1 \int\limits_V \Phi^{(3)}\, dV_2\right]\right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Предел прочности $\sigma* = |\sigma_n|$ (σ_n — нормальная составляющая вектора напряжений $\vec{\sigma}$) рассчитан как сила когезии двух полубесконечных тел, выделенных из одного материала, приходящаяся на единицу площади поверхности их контакта.

$$\vec{\sigma} = -\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \left\{ \int_V dV \int_V \left[\nabla_1 \Phi^{(2)} + \int_V \left(\nabla_1 \Phi^{(3)} + \nabla_2 \Phi^{(3)} \right) dV_2 \right] dV_1 \right\}. \qquad (10)$$

Значение $\sigma*$ должно совпадать с теоретическим пределом прочности исследуемого материала σ_{teor}, который согласно [3] определяется как $\sigma_{teor} = E/5$.

Результаты расчетов поверхностной энергии некоторых материалов практически повторяют результаты представленные в [4], например, для *Cr* расчетные значения: W_p = 4,46 *Дж*/*м*^{2}, в то время как известное справочное значение [4] 4,72 *Дж*/*м*^{2}; $\sigma*$ = 4,47 × 10^{10} *Па*, согласно [3] 5,60 × 10^{10} *Па*. Видно, что соответствие удовлетворительное.

Литература

1. *Азаров А.С., Шоркин В.С.* // Извест. ТулГУ, серия "Естественные науки". Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. Вып. 1. С.28 – 40.
2. *Жирифалько Л.* Статистическая физика твердого тела. – М.: Мир, 1975. – 384 с.
3. *Петч Н.* Металлографические аспекты разрушения // Разрушение. Ред. Либовиц Г. – М.: Мир, 1973. – Т. 1. – С.376 – 420.
4. Свойства элементов. Физические свойства: Справочник / Е. Б. Самсонов. – М.: Металлургия, 1976. – 600 с.

COVARIANT ELECTROMAGNETIC CONSTITUTIVE THEORY FOR DISPERSIVE CONTINUA

Shin-itiro Goto, Jonathan Gratus, Alison Hale, Robin W. Tucker and Timothy J. Walton

Department of Physics, Lancaster University, Lancaster, UK
and
The Cockcroft Institute, Keckwick Lane,Daresbury, UK
r.tucker@lancaster.ac.uk

This article reports on recent developments in the covariant formulation of electromagnetic constitutive theory for dispersive polarizable continua.

1. Introduction

The behaviour of electromagnetic fields in macroscopic media often relies on a detailed knowledge of its molecular and atomic structure and their interactions. When such interactions are characterized by non-local effects in space or time the phenomenon of macroscopic *dispersion* arises. In this note models of dispersive constitutive relations are explored in the framework of spacetime geometry using the language of differential forms [1].

2. Electromagnetic Fields on Spacetime

It is assumed that a polarizable material continuum is given in terms of a set of piecewise smooth material properties that determine its interaction with classical gravitational and electromagnetic fields. The classical *macroscopic* Maxwell system for the electromagnetic 2-form F in such a continuum on spacetime can be written as:

$$dF = 0 \qquad \text{and} \qquad d \star G = j\,, \tag{1}$$

where the excitation 2-form G depends on the interaction with the medium and the 3-form electric 4-current j encodes the electric charge and current source[1]. Such an electric 4-current describes both (mobile) electric charge and effective (Ohmic) currents in a conducting medium. To close this system in a background gravitational field, *electromagnetic constitutive relations* relating G and j to F are necessary.

[1] All electromagnetic tensors in this article have dimensions constructed from the SI dimensions $[M], [L], [T], [Q]$ where $[Q]$ has the unit of the Coulomb in this system. We adopt $[g] = [L^2], [G] = [j] = [Q]$, $[F] = \frac{[Q]}{[\epsilon_0]}$ where the permittivity of free space ϵ_0 has the dimensions $[Q^2T^2M^{-1}L^{-3}]$ and $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ denotes the speed of light in vacuo. Note that the operators d and ∇ preserve the physical dimensions of tensor fields but with $[g] = [L^2]$, for p-forms α in 4 dimensions, one has $[\star\alpha] = [\alpha][L^{4-2p}]$.

The history of a particular observer field in spacetime is associated with an arbitrary *unit* future-pointing timelike 4-velocity vector field U on spacetime. The field U may be used to describe an *observer frame* on spacetime and its integral curves model *idealized observers*. An orthogonal decomposition of F with respect to any observer field U gives rise to a pair of *spatial* 1-forms on spacetime. The 1-form spatial *electric field* $\boldsymbol{e}^U$ and 1-form spatial *magnetic induction field* $\boldsymbol{b}^U$ associated with F are defined with respect to an observer field U by

$$\boldsymbol{e}^U = i_U F \qquad \text{and} \qquad c_0 \boldsymbol{b}^U = i_U \star F \tag{2}$$

where i_U denotes the graded interior contraction operator with respect to U. Since $g(U,U) = -1$ and $i_U \boldsymbol{e}^U = i_U \boldsymbol{b}^U = 0$:

$$F = \boldsymbol{e}^U \wedge \widetilde{U} - \star (c_0 \boldsymbol{b}^U \wedge \widetilde{U}). \tag{3}$$

Likewise the 1-form spatial *displacement field* $\boldsymbol{d}^U$ and the 1-form spatial *magnetic field* $\boldsymbol{h}^U$ associated with G are defined with respect to U by

$$\boldsymbol{d}^U = i_U G \qquad \text{and} \qquad \tfrac{1}{c_0} \boldsymbol{h}^U = i_U \star G, \tag{4}$$

$$\text{so} \qquad G = \boldsymbol{d}^U \wedge \widetilde{U} - \tfrac{1}{c_0} \star \big(\boldsymbol{h}^U \wedge \widetilde{U}\big), \tag{5}$$

with $i_U \boldsymbol{d}^U = i_U \boldsymbol{h}^U = 0$. The 1-form $\widetilde{U} = g(U, -)$ in terms of the metric tensor field g on spacetime. At the history of any sharp interface between different media, given as the piecewise smooth (non-null) spacetime hypersurface $f = 0$, the system of Maxwell equations is supplemented by interface conditions on the fields F and G

$$[F]\big|_{f=0} \wedge df = 0 \qquad \text{and} \qquad [\star G]\big|_{f=0} \wedge df = j_s, \tag{6}$$

where $[H]$ denotes the discontinuity in the field H across the hypersurface [2]. The 3-form j_s on the hypersurface is non-zero if it supports a real current 3-form there.

3. The Time-Dependent Maxwell System in Space

The spacetime description above is natural for the Maxwell system since it makes no reference to any particular frame in spacetime. However to make contact with descriptions in particular frames or non-relativistic formulations a reduction in terms of frame dependent fields becomes mandatory. The spacetime Maxwell system can now be reduced to a family of parameterized exterior systems on $\mathbb{R}^3$. Each member is an exterior system involving forms on $\mathbb{R}^3$ depending parametrically on some time coordinate t associated with U. Let

the $(3+1)$ split of the electric 4-current 3-form with respect to a foliation of spacetime by spacelike hypersurfaces with constant t be $j = \frac{1}{c_0}\mathcal{J}^U \wedge \widetilde{U} + \rho^U$, with $i_U\mathcal{J}^U = i_U\rho^U = 0$ and $\rho^U = \widehat{\rho}^U \#1$. Then $\mathcal{J}^U, \rho^U$ are the spatial electric current density 2-form and spatial electric charge density 3-form respectively. The differential operator $\underline{d} = d + \widetilde{U} \wedge \mathcal{L}_U$ on spatial forms is particularly adapted to those spacetimes (such as Minkowski spacetime where gravity is absent and the spacetime Levi-Civita curvature is zero) that can be foliated by hypersurfaces with constant coordinate t. In such cases $U = \frac{1}{c_0}\partial_t$. Then, from (1) $dj = 0$ yields $\underline{d}\mathcal{J}^U + \dot{\rho}^U = 0$. In these formula $\mathcal{L}_W$ denotes a Lie derivative with respect to W and the $(3+1)$ split of the spacetime covariant Maxwell equations (1) with respect to $\widetilde{U} = -c_0 dt$ becomes

$$\underline{d}\,\boldsymbol{e}^U = -\dot{\boldsymbol{B}}^U, \quad \underline{d}\,\boldsymbol{B}^U = 0, \quad \underline{d}\,\boldsymbol{h}^U = \mathcal{J}^U + \dot{\boldsymbol{D}}^U \quad \text{and} \quad \underline{d}\,\boldsymbol{D}^U = \rho^U \tag{7}$$

where $\boldsymbol{D}^U = \#\boldsymbol{d}^U$ and $\boldsymbol{B}^U = \#\boldsymbol{b}^U$ with $\dot{\boldsymbol{B}}^U = \mathcal{L}_{\partial_t}\boldsymbol{B}^U$ etc. All p-forms $(p > 0)$ in these equations are independent of dt, but have components that may depend parametrically on t and the Hodge map $\#$ is defined such that $\star 1 = \widetilde{U} \wedge \#1$.

4. Electromagnetic Constitutive Relations

The two 2-forms F and G in the *macroscopic* Maxwell equations on spacetime are fundamentally related by smoothing the *microscopic* sources of the electromagnetic fields in the medium [3]. In many circumstances one then relies on phenomenological relations for closure relations. In such relations the excitation form G is in general a functional $\mathcal{Z}$ (possibly non-local in spacetime) of the Maxwell form F, its covariant and Lie derivatives, thermodynamic and deformation properties and the state of motion of the medium. Such a functional may induce non-linear and non-local relations between $\boldsymbol{d}^U, \boldsymbol{h}^U$ and $\boldsymbol{e}^U, \boldsymbol{b}^U$. Electrostriction and magnetostriction arise from the dependence of $\mathcal{Z}$ on the deformation tensor of the medium and its covariant derivatives. For general *linear continua*, a knowledge of a collection of *constitutive tensor fields* $Z^{(r)}$ on spacetime may suffice so that $G = \sum_{r=0}^{N} Z^{(r)}[\nabla^r F, \ldots]$. In idealized (non-dispersive) *simple continua*, one adopts the idealized *local* relation $G = Z(F)$, for some degree 4 constitutive tensor field Z, parameterized by scalars that depend on the medium. In the vacuum $G = \epsilon_0 F$ where ϵ_0 is the constant permittivity of the vacuum. Regular *lossless, non-conducting, linear isotropic media* can be described by a bulk 4-velocity field V of the medium, a real relative permittivity scalar field $\epsilon_r > 0$ and a real relative permeability scalar field $\mu_r > 0$. In this case, the structure of the tensor Z follows from

$$G = \epsilon_0\epsilon_r i_V F \wedge \widetilde{V} - \frac{\epsilon_0}{\mu_r} \star \left(i_V \star F \wedge \widetilde{V}\right) = \epsilon_0\left(\epsilon_r - \frac{1}{\mu_r}\right) i_V F \wedge \widetilde{V} + \frac{\epsilon_0}{\mu_r} F. \tag{8}$$

For inhomogeneous media the relative permittivity and permeability scalars ϵ_r and μ_r will not be constants [5]. In a general frame U comoving with the medium ($U = V$), (8) yields

$$\boldsymbol{d}^V = \epsilon_0 \epsilon_r \boldsymbol{e}^V \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{h}^V = (\mu_0 \mu_r)^{-1} \boldsymbol{b}^V, \tag{9}$$

which are the familiar closure relations for simple (idealized) electrically neutral isotropic non-dispersive polarizable media.
The polarization 2-form Π in spacetime is defined by

$$\Pi = G - \epsilon_0 F. \tag{10}$$

The macroscopic Maxwell equation $d \star G = j$ may then be written $\epsilon_0 d \star F = j - d \star \Pi = j + j_p$, where

$$j_p = -d \star \Pi \tag{11}$$

will be called the electric polarization current 3-form. With respect to *any* observer frame U its orthogonal decomposition is

$$\Pi = \boldsymbol{p}^U \wedge \widetilde{U} - \tfrac{1}{c_0} \star \left(\boldsymbol{m}^U \wedge \widetilde{U} \right) = \boldsymbol{p}^U \wedge \widetilde{U} - \tfrac{1}{c_0} \boldsymbol{M}^U, \tag{12}$$

where $\boldsymbol{M}^U = \#\boldsymbol{m}^U$ and we call $\boldsymbol{p}^U = i_U \Pi$ and $\frac{1}{c_0} \boldsymbol{m}^U = i_U \star \Pi$ the spatial polarization 1-form and magnetization 1-form respectively relative to U. The Hodge dual of Π has the decomposition

$$\star \Pi = \star (\boldsymbol{p}^U \wedge \widetilde{U}) + \tfrac{1}{c_0} \boldsymbol{m}^U \wedge \widetilde{U} = \boldsymbol{P}^U + \tfrac{1}{c_0} \boldsymbol{m}^U \wedge \widetilde{U}, \tag{13}$$

where $\boldsymbol{P}^U = \#\boldsymbol{p}^U$. From (5), (3), (10) and (12) it follows

$$\boldsymbol{d}^U = \epsilon_0 \boldsymbol{e}^U + \boldsymbol{p}^U \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{h} = \mu_0^{-1} \boldsymbol{b}^U + \boldsymbol{m}^U. \tag{14}$$

From (11), (12) one finds

$$\begin{aligned} j_p &= -d \boldsymbol{P}^U - \tfrac{1}{c_0} d \boldsymbol{m}^U \wedge \widetilde{U} = -\underline{d} \boldsymbol{P}^U + \widetilde{U} \wedge \mathcal{L}_U \boldsymbol{P}^U - \tfrac{1}{c_0} \underline{d} \boldsymbol{m}^U \wedge \widetilde{U} \\ &= -\underline{d} \boldsymbol{P}^U + \tfrac{1}{c_0} \left(c_0 \mathcal{L}_U \boldsymbol{P}^U - \underline{d} \boldsymbol{m}^U \right) \wedge \widetilde{U}. \end{aligned}$$

Writing the orthogonal decomposition of j_p with respect to U as $j_p = \frac{1}{c_0} \mathcal{J}_p^U \wedge \widetilde{U} + \rho_p^U$, it follows that $\frac{1}{c_0} \mathcal{J}_p^U = -i_U j_p = \frac{1}{c_0} \left(\dot{\boldsymbol{P}}^U - \underline{d} \boldsymbol{m}^U \right)$ and $\rho_p^U = -(i_U \star j_p) \star \widetilde{U} = -\underline{d} \boldsymbol{P}^U$.

In the frame U, $\mathcal{J}_p^U$ and ρ_p^U denote the induced electric polarization current density spatial 2-form and induced polarization charge density spatial 3-form respectively. In a similar manner

$$d\Pi \quad = d \boldsymbol{p}^U \wedge \widetilde{U} - \tfrac{1}{c_0} d \boldsymbol{M}^U = \underline{d} \boldsymbol{p}^U \wedge \widetilde{U} - \tfrac{1}{c_0} \underline{d} \boldsymbol{M}^U + \tfrac{1}{c_0} \widetilde{U} \wedge \mathcal{L}_U \boldsymbol{M}^U$$

$$= \tfrac{1}{c_0}\left(c_0 \underline{d}\boldsymbol{p}^U + \mathcal{L}_U \boldsymbol{M}^U\right) \wedge \widetilde{U} - \tfrac{1}{c_0}\underline{d}\boldsymbol{M}^U .$$

with the orthogonal decomposition $j_m \equiv d\Pi = \frac{1}{c_0}\mathcal{J}_m^U \wedge \widetilde{U} + \rho_m^U$ where $\frac{1}{c_0}\mathcal{J}_m^U = -i_U j_m = \frac{1}{c_0}\left(c_0 \underline{d}\boldsymbol{p}^U + \mathcal{L}_U \boldsymbol{M}^U\right)$ and $\rho_m^U = -(i_U \star j_m) \star \widetilde{U} = -\frac{1}{c_0}\underline{d}\boldsymbol{M}^U$, denote the induced magnetization charge current density spatial 2-form and induced magnetization charge density spatial 3-form respectively in terms of $\boldsymbol{p}^U$ and $\boldsymbol{M}^U$. If one restricts to causal *linear* responses a natural covariant constitutive relation is given by the non-local expression

$$\Pi[F]_{ab}(x) = \tfrac{1}{4}\int_{y \in J^-(x)} \chi_{abcd}(x, y) F_{ed}(y) dy^{cdef} \tag{15}$$

where $\chi_{abcd}(x, y)$ is a two-point susceptibility kernel. The events x and y on a spacetime M are given in arbitrary coordinates with summation over Latin indices from 0 to 3 and $dy^{cdef} = dy^c \wedge dy^d \wedge dy^e \wedge dy^f$. The causal structure has been imposed by requiring that $\chi_{abcd}(x, y) = 0$ if y does not lie in the past light cone, $J^-(x)$, of x. This constitutive relation can be used to model media which are spatially inhomogeneous and temporally non-stationary and is meaningful in spacetimes containing gravitation.

The values $\chi_{abcd}(x, y)$ denote the coordinate components of the 4-form field χ over the product manifold $M \times M$ in the induced coordinates $(x^0, \ldots, x^3, y^0, \ldots, y^3)$:

$$\chi = \tfrac{1}{4}\chi_{abcd}\, dx^a \wedge dx^b \wedge dy^c \wedge dy^d . \tag{16}$$

In terms of χ and the projection $p_Y : M \times M \to M$, $p_Y(x, y) = y$ equation (15) can be written

$$\Pi[F] = \int_{M_Y} \chi \wedge p_Y^\star F . \tag{17}$$

The tensor χ has 36 independent components since dx^{ab} and dy^{cd} are anti-symmetric so $\chi_{abcd} = -\chi_{bacd} = -\chi_{abdc}$.

A special case of (15) arises in Minkowski spacetime. Being parallelizable it admits a family of *translation maps* $A_z : M \to M, x \mapsto A_z(x) = x + z$ for all events x in M. This induces the translation maps $B_z : M_X \times M_Y \to \to M_X \times M_Y$, $B_z(x, y) = (x + z, y + z)$. Imposing this translational symmetry on χ, i.e. $B_z^\star \chi = \chi$, equation (15) can be written

$$\Pi_{\mathrm{I}}[F]_{ab}(x) = \int_{y \in J^-(x)} X_{abcd}(x - y) F_{ef}(y) dy^{cdef} \tag{18}$$

where $X_{abcd}(x - y) = \chi_{abcd}(x, y) = \chi_{abcd}(x + z, y + z)$ for any z. Since $\Pi_{\mathrm{I}}[A_z^\star F] = A_z^\star \Pi_{\mathrm{I}}[F]$ this relation describes spatially homogeneous and temporally stationary media and remains non-local in both space and time.

Such a medium exhibits both *spatial and temporal dispersion* as follows: Minkowski spacetime admits preferred *global Lorentzian* coordinate systems, (x^0, x^1, x^2, x^3), with associated cobases (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) in which the components of the metric are diag$(-1, 1, 1, 1)$. If one defines for any scalar ϕ the Fourier transform $\widehat{\phi}(k) = \int_M e^{-ik\cdot x}\,\phi(x)\,dx^{0123}$ with respect to such a coordinate system then $\widehat{\Pi_1[F]}_{ab}(k) = \widehat{X}_{abcd}(k)\widehat{F}_{ef}(k)\epsilon^{cdef}$ in terms of the standard constant alternating symbol ϵ^{cdef}. Such a relation can give rise to dispersion in media.

If the bulk 4-velocity of a non-accelerating medium is V, with constant components in the above coordinate system, i.e. $\nabla V = 0$, a particular model for X in (18) is given by

$$\begin{aligned}\Pi_{I_a}[F]_{ab}(x) = &\int_{y\in J^-(x)} \mathcal{P}(x-y)(i_V F \wedge \widetilde{V})_{ab}(y)dy^{0123} \\ &- \star_X \int_{y\in J^-(x)} \mathcal{M}(x-y)(i_V \star_Y F \wedge \widetilde{V})_{ab}(y)dy^{0123}\end{aligned} \tag{19}$$

where $\mathcal{P}$ and $\mathcal{M}$ are polarization and magnetization susceptibility scalars respectively. The Fourier transform of (19) yields the simple constitutive relations for a spatially and temporally dispersive homogeneous isotropic medium: $\widehat{\boldsymbol{d}^V_a}(k) = (\epsilon_0 + \widehat{\mathcal{P}}(k))\widehat{\boldsymbol{e}^V_a}(k)$ and $\widehat{\boldsymbol{h}^V_a}(k) = (\mu_0^{-1} + \widehat{\mathcal{M}}(k))\widehat{\boldsymbol{b}^V_a}(k)$. If V is not inertial ($\nabla V \neq 0$) then (19) is not a special case of (18) and its Fourier transform, although local in k, is not of the form above.

For media that lack spatial dispersion the history of the medium may give rise to *temporal dispersion* alone. This can be expressed geometrically in terms of tensor transport along the integral curves $C_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R} \to M$ of the 4-velocity field V of the medium. If these curves are each parameterized by proper time τ let $\Phi^{\hat{\tau}}_{\tau}(\boldsymbol{x})$ be a map that transports tensors at $C_{\boldsymbol{x}}(\tau)$ to tensors at $C_{\boldsymbol{x}}(\hat{\tau})$ along each integral curve of V. Natural choices of transport maps include Lie, parallel (with respect to some spacetime connection ∇) and Fermi-Walker transport. Different choices of $\Phi^{\hat{\tau}}_{\tau}(\boldsymbol{x})$ correspond to different electromagnetic responses of the medium to the disposition of the integral curves of V in the spacetime history of the medium. If $Y(z)$ denotes a tensor field mapping 2-forms at z to 2-forms at z, a constitutive relation for a spatially inhomogeneous medium may be written

$$\Pi_{\mathrm{II}}[F](C_{\boldsymbol{x}}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\tau} Y^{\Phi}(\tau, \hat{\tau}, \boldsymbol{x})\Big(\Phi^{\tau}_{\hat{\tau}}(\boldsymbol{x})\big(F(C_{\boldsymbol{x}}(\hat{\tau}))\big)\Big)d\hat{\tau} \tag{20}$$

where $Y^{\Phi}(\tau, \hat{\tau}, \boldsymbol{x}) = \Phi^{\tau}_{\tau-\hat{\tau}}(\boldsymbol{x})\big(Y(C_{\boldsymbol{x}}(\tau - \hat{\tau}))\big)$ is a tensor at $C_{\boldsymbol{x}}(\tau)$. This is another special case of (15). Since

$$\Pi_{\mathrm{II}}[F^{\Phi}]\big(C_{\boldsymbol{x}}(\hat{\tau})\big) = \Phi^{\hat{\tau}}_{\tau}(\boldsymbol{x})\Big(\Pi_{\mathrm{II}}[F]\big(C_{\boldsymbol{x}}(\tau)\big)\Big)$$

where $F^{\Phi}(C_{\boldsymbol{x}}(\hat{\tau})) = \Phi_{\tau}^{\hat{\tau}}(\boldsymbol{x})\big(F(C_{\boldsymbol{x}}(\tau))\big)$ the medium is said to be stationary with respect to the transport map and hence V and (20) is valid in any spacetime. This generalizes the notion of a *temporally stationary* medium in a spacetime with timelike Killing vectors. The temporal dispersive properties of the medium are best defined with respect to a modified Fourier transform that remains valid in a general spacetime and employs the transport map along the family of curves describing the history of the medium. For any tensor field α and curve $C_{\boldsymbol{x}}$ define, at the event $C_{\boldsymbol{x}}(0)$, the generalized temporal Fourier transformed tensor:

$$\overline{\alpha}(\omega, \boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \Phi_{\tau}^{0}(\boldsymbol{x})\big(\alpha(C_{\boldsymbol{x}}(\tau))\big) d\tau \,.$$

Then the constitutive relation $\overline{\Pi_{\mathbb{I}}[F]}(\omega, \boldsymbol{x}) = \overline{Y}(\omega, \boldsymbol{x})\big(\overline{F}(\omega, \boldsymbol{x})\big)$ describes an anisotropic, spatially inhomogeneous but temporally dispersive medium. If V is geodesic (i.e. $\nabla_V V = 0$) and $\Phi_{\hat{\tau}}^{\tau}(\boldsymbol{x})$ describes *parallel* transport then a particular model for Y in (20) is given by

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbb{I}_a}[F](C_{\boldsymbol{x}}(\tau)) = &\int_{-\infty}^{\tau} \mathcal{P}(\tau - \hat{\tau}, \boldsymbol{x})\Big(\Phi_{\hat{\tau}}^{\tau}(\boldsymbol{x})(i_V F \wedge \widetilde{V})(C_{\boldsymbol{x}}(\hat{\tau}))\Big) d\hat{\tau} \\ &- \star \int_{-\infty}^{\tau} \mathcal{M}(\tau - \hat{\tau}, \boldsymbol{x})\Big(\Phi_{\hat{\tau}}^{\tau}(\boldsymbol{x})(i_V \star F \wedge \widetilde{V})(C_{\boldsymbol{x}}(\hat{\tau}))\Big) d\hat{\tau} \end{aligned} \tag{21}$$

where $\mathcal{P}$ and $\mathcal{M}$ are spatially inhomogeneous polarization and magnetization susceptibility scalars respectively. This describes non-magneto-electric, spatially inhomogeneous but temporally dispersive media with constitutive relations $\overline{\boldsymbol{d}^V}(\omega, \boldsymbol{x}) = (\epsilon_0 + \overline{\mathcal{P}}(\omega, \boldsymbol{x}))\overline{\boldsymbol{e}^V}(\omega, \boldsymbol{x})$ and $\overline{\boldsymbol{h}^V}(\omega, \boldsymbol{x}) = (\mu_0^{-1} + \overline{\mathcal{M}}(\omega, \boldsymbol{x}))\cdot$ $\cdot\, \overline{\boldsymbol{b}^V}(\omega, \boldsymbol{x})$.

In some circumstances non-local effects in media can be described in terms of particular solutions to local partial or ordinary differential equations [4]. Suppose $\mathcal{P}_{\Lambda}^{N}(z)$ is a polynomial of order N in z labeled by Λ with coefficients that depend on material properties of a medium. A particular model for a dispersive intrinsically magneto-electric medium moving with an arbitrary bulk 4-velocity V is defined by the covariant local differential equation:

$$\mathcal{P}_{\Pi}^{N_1}(\mathcal{L}_V)\Pi = \mathcal{P}_{F}^{N_2}(\mathcal{L}_V)F + \mathcal{P}_{\star F}^{N_3}(\mathcal{L}_V) \star F.$$

If all polynomial coefficients exhibit invariance under spatial translations the medium is electromagnetically homogeneous.

If furthermore the spacetime is stationary one has a medium with temporal dispersion alone described by a system of ordinary differential equations. If V is a Killing vector field ($\mathcal{L}_V g = 0$) such a system can then be written in terms of the induced polarization current $j_p = -d \star \Pi$. If furthermore the medium

is stationary in the frame U one has $V = U$ and:

$$\mathcal{P}^{N_1}_{\Pi}(\mathcal{L}_U)\, j_p = -\mathcal{P}^{N_2}_{F}(\mathcal{L}_U) d \star F$$

since $\star \star F = -F$ and $dF = 0$. For a medium with free or conduction currents $j_f[F]$ one then has $\epsilon_0 d \star F = j_p + j_f[F]$. The differential operator $\mathcal{P}^{N_3}_{\star F}(\mathcal{L}_V)$ contributes to constitutive differential equations describing inhomogeneous media or media possessing a non-zero 4-acceleration ($\nabla_V V \neq 0$). These and similar models can readily accommodate the phenomenological expressions for the permittivity of stationary homogeneous continua as a function of frequency that have been proposed in the past by Lorentz, Drude, Debye and others. The covariant formulation is however richer and of necessity implies, in general, a corresponding frequency dependent permeability.

Acknowledgments

The authors are grateful to the Cockcroft Institute, the Alpha-X project, STFC and EPSRC (EP/E001831/1) for financial support for this research.

Bibliography

1. *I.M. Benn and R.W. Tucker.* An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics. Adam Hilger: IoP Publishing, Bristol, 1988.
2. *R.W. Tucker.* Differential Form Valued Forms and Distributional Electromagnetic Sources // J. Math. Phys., **50** (2009) 033506:1-28
3. *L.D. Landau, E.M. Lifschitz and L.P. Pitaevskii.* Electrodynamics of Continuous Media - Volume 8 in Course of Theoretical Physics. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1984
4. *J. Gratus and R.W. Tucker.* Covariant Constitutive Relations, Landau Damping and Non-Stationary Inhomogeneous Plasmas // Progress In Electromagnetics Research M, **13**, (2010) P.145-156.
5. *S. Goto, T.J. Walton and R.W. Tucker* The electrodynamics of inhomogeneous rotating media and the Abraham and Minkowski tensors. II. Applications // Proc. Roy. Soc. A, **To appear** (2010)

ADMISSIBLE AND EQUILIBRATED STRESS FIELDS FOR MASONRY BODIES

Massimiliano Lucchesi[1], *Miroslav Šilhavý*[2], *Nicola Zani*[3]

[1] *Dipartimento di Costruzioni, Università di Firenze*
[2] *Mathematical Institute of the AV CR, Praga*
[1] *Dipartimento di Costruzioni, Università di Firenze*
[1] massimiliano.lucchesi@unifi.it, [2] silhavy@math.cas.cz, [3] nicola.zani@unifi.it

We consider a masonry panel fixed at its base, and undergoing both distributed loads and concentrated forces. For these different loading conditions we firstly determine measure stress fields which equilibrate the loads. Secondly, by an integration procedure we explicitly obtain equilibrated stress fields which are represented by integrable functions. The obtained solutions are discussed.

1. Introduction

The idea that the safety of a masonry arch is guaranteed by the possibility to find a curve of thrust that is in equilibrium with the loads and that is entirely in the interior of the arch is old [1]. Yet the rigorous proof of the static and kinematic theorems of the limit analysis for solids that do not support the traction is recent [2], [3].

In [2] the collapse is identified with a deformation process that takes place at constant load (cf. def. 4.1), whereas in [3] an approach is presented which is based on energetic considerations. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a connected open set with Lipschitz boundary $\partial\Omega$ of outer normal $\boldsymbol{n}$, interpreted as a reference configuration of a body made of no-tension material. The body has a prescribed displacement $\boldsymbol{d}$ on an area measurable subset $\mathcal{D}$ of $\partial\Omega$ and is subjected to body forces $\boldsymbol{b}$ on Ω and surface traction $\boldsymbol{s}$ prescribed on $\mathcal{S} = \partial\Omega \sim \mathcal{D}$. The limit analysis deals with a family of loads $\mathcal{L}(\lambda)$ that depend linearly on a scalar parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, that is $\mathcal{L}(\lambda) = (\boldsymbol{b}^\lambda, \boldsymbol{s}^\lambda)$, where $\boldsymbol{b}^\lambda = \boldsymbol{b}_0 + \lambda\boldsymbol{b}_1$ and $\boldsymbol{s}^\lambda = \boldsymbol{s}_0 + \lambda\boldsymbol{s}_1$. The vector fields $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{s}_0$ and $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{s}_1$ characterize the permanent and variable parts of the loads, respectively; λ is the loading multiplier. In [3] $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$ are supposed to be square integrable functions on Ω with respect to the volume (Lebesgue) measure and $\boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{s}_1$ square integrable functions on $\mathcal{S}$ with respect to the area (Hausdorff) measure.

Let V be the set of the displacement fields $\boldsymbol{v}$ that belong to the Sobolev space $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ and vanish on $\mathcal{D}$. Then, the work of the loads $\mathcal{L}(\lambda)$ corresponding to $\boldsymbol{v}$ is

$$< \boldsymbol{l}(\lambda), \boldsymbol{v} >= \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}^\lambda d\mathcal{L}^n + \int_\mathcal{S} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}^\lambda d\mathcal{H}^{n-1},$$

where $\mathcal{L}^n$ is the Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$ and $\mathcal{H}^{n-1}$ is the Haudorff measure on $\mathcal{S}$. Moreover, the functional of the potential energy of the body corresponding to $\boldsymbol{v}$ is

$$\bar{I}(\lambda, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega} \widehat{w}(\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{v}))d\mathcal{L}^n - < \boldsymbol{l}(\lambda), \boldsymbol{v} >, \quad (\lambda, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R} \times V,$$

where $\widehat{w}$ is the energy density of the no-tension material [4] and $\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^T)$ is the infinitesimal strain tensor. Let $\bar{I}_0(\lambda) = \inf\{\bar{I}(\lambda, \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in V\}$ be the infimum energy. In [3, Prop. 2.4] it is proved that the function $\bar{I}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ is concave and upper semicontinuous, so that the set $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : I_0(\lambda) > -\infty\}$ is an interval (possibly empty or degenerate). The elements of Λ can be interpreted as loading multipliers whose corresponding loads $\mathcal{L}(\lambda)$ are safe, i.e. the body does not collapse, and each finite endpoint λ_c of Λ is called a collapse multiplier. Then, it is proved that $\lambda \in \Lambda$ if and only if there exists a negative semidefinite and square integrable stress field $\boldsymbol{T}$ which equilibrates the loads $\mathcal{L}(\lambda)$, i.e. such that

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{T} \cdot \widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{v})d\mathcal{L}^n = < \boldsymbol{l}(\lambda), \boldsymbol{v} >,$$

for each $\boldsymbol{v} \in V$. This result can be interpreted as a formulation of the static theorem of the limit analysis. Stress fields that are negative semidefinite and square integrable are called admissible and the loads $\mathcal{L}(\lambda)$ for which $\lambda \in \Lambda$ are called compatible.

In the study of the statics of masonry panels we verified that the problem of finding negative semidefinite stress fields that equilibrate the loads is considerably simplified if instead of admissible stress fields represented by square integrable functions $\boldsymbol{T}$ one admits also stress fields represented by tensor valued measures $\mathbf{T}$, by allowing the presence of curves of concentrated stress [5]. In this case we say that $\mathbf{T}$ equilibrates the loads $\mathcal{L}(\lambda)$ if

$$\int_{\Omega} \widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{v}) \cdot d\mathbf{T} = < \boldsymbol{l}(\lambda), \boldsymbol{v} >,$$

for each $\boldsymbol{v} \in V$. Several applications of these singular stress fields are presented in [5], and in [6], [7] where the gravity is also taken into account. In all these applications the stress field equilibrating the loads $\mathcal{L}(\lambda)$ is represented by a measure $\mathbf{T}^{\lambda}$ which is the sum of an absolutely continuous part $\mathbf{T}_r^{\lambda}$ with respect to the area measure with density $\boldsymbol{T}_r^{\lambda}$ and a part $\mathbf{T}_s^{\lambda}$ which is concentrated on a regular curve, having there a density $\boldsymbol{T}_s^{\lambda}$ with respect to the length measure. All these stress fields are not admissible (because they are not represented by square integrable functions) and then by themselves cannot guarantee the safety of the loads. In order to overcome this difficulty, in [8] we

present a procedure that in some case allows us to obtain a square integrable stress field once a measure stress field is known. Crucial to the procedure is the fact that both the loads $\mathcal{L}(\lambda)$ and the equilibrating stress measure $\mathbf{T}^\lambda$ depend on a linear parameter λ. The idea is to take the average of the stress measures over any set $(\mu-\epsilon, \mu+\epsilon)$, where $\epsilon > 0$ is sufficiently small, and μ is any point in the set of parameters. Averaging gives the measure

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2\epsilon}\int_{\mu-\epsilon}^{\mu+\epsilon} \mathbf{T}^\lambda d\lambda,$$

and it may happen that this measure, in contrast to $\mathbf{T}^\mu$, is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure with density $\boldsymbol{T}$, which is square integrable. Because $\mathcal{L}(\lambda)$ depends linearly on the parameter λ, then it is automatic that $\mathbf{T}$ equilibrates the loads $\mathcal{L}(\mu)$. Although in some case the explicit calculation of the averaged measure $\mathbf{T}$ can be a difficult task, for applications it suffices to know that the averaging procedure leads to the existence of a negative semidefinite square integrable stress field equilibrating the loads.

In the present paper, in order to deal also with concentrations of body forces and surface traction, we allow the loads $\boldsymbol{b}^\lambda, \boldsymbol{s}^\lambda$ to be the densities of the vector valued measures $\mathbf{b}^\lambda$, $\mathbf{s}^\lambda$, and denote $\mathcal{L}^\lambda = (\mathbf{b}^\lambda, \mathbf{s}^\lambda)$. Because in this more general case the work of the loads cannot be defined for displacements from V, we consider the set $V_0 = \{\boldsymbol{v} \in C^1(\mathrm{cl}\,\Omega, \mathbb{R}^n) : \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ on } \mathcal{D}\}$ and define the functional of the potential energy

$$I(\lambda, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \widehat{w}(\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{v}))d\mathcal{L}^n - \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot d\mathbf{b}^\lambda - \int_S \boldsymbol{v}\cdot d\mathbf{s}^\lambda, \quad (\lambda, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}\times V_0,$$

and the infimum of energy $I_0(\lambda) = \inf\{I(\lambda, \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in V_0\}$. It can be shown that $\bar{I}(\lambda, \boldsymbol{v})$ is continuous on V and, under the hypothesis that $\mathcal{D}$ is a closed set with Lipschitz boundary, that V_0 is dense in V. Thus we have $\bar{I}_0(\lambda) = I_0(\lambda)$. If there exists a tensor valued measure $\mathbf{T}$ on Ω with values in Sym^- such that

$$\int_\Omega \widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{T} = \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot d\mathbf{b}^\lambda + \int_S \boldsymbol{v}\cdot d\mathbf{s}^\lambda,$$

for every $\boldsymbol{v} \in V_0$, we say that the loads $\mathcal{L}(\lambda)$ are weakly compatible and that $\mathbf{T}$ weakly equilibrates the loads $\mathcal{L}(\lambda)$. Moreover, we say that the loads $\mathcal{L}(\lambda)$ are strongly compatible if it happens that they are equilibrated by a negative semidefinite square integrable stress field $\boldsymbol{T}$. In this last case we say also that $\boldsymbol{T}$ strongly equilibrates the loads $\mathcal{L}(\lambda)$. It can be proven that the general loads $\mathcal{L}(\lambda)$ are strongly compatible if and only if $I_0(\lambda) > -\infty$ [9]. This result is an appropriate version of the static theorem of the limit analysis when dealing with loads that are represented by vector valued measure. Its counterpart is what was proved in [3, Prop. 2.4], where only loads represented by square integrable functions were considered.

2. Integration of parametric measures

Throughout we use conventions for vectors and second order tensors identical with those in [10]. Thus Sym denotes the set of all symmetric second order tensors on $\mathbb{R}^n$, i.e., linear transformations of $\mathbb{R}^n$ into itself. Sym^- is the set of all negative semidefinite elements of Sym. Let V be a finite dimensional vector space. By a V valued measure in $\mathbb{R}^n$ we mean a map $\mathbf{m}$ from a system of all Borel sets in $\mathbb{R}^n$ to V which is countably additive [11]. A countable additive function ϕ defined on the system of all Borel sets in $\mathbb{R}^n$ that takes its values from the set $[0, \infty]$, and such that $\phi(\emptyset) = 0$, is said a nonnegative measure. We call the Sym valued measures tensor valued measures and the $\mathbb{R}^n$ valued measures vector valued measures. If Ω is a Borel subset of $\mathbb{R}^n$ and $\mathbf{m}$ a V valued measure or nonnegative measure, we say that $\mathbf{m}$ is supported by Ω if $\mathbf{m}(A) = 0$ for any Borel set A such that $A \cap \Omega = \emptyset$. We denote by $\mathcal{M}(\Omega, V)$ the set of all V valued measures supported by Ω. If $\mathbf{m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, V)$, we denote by $|\mathbf{m}|$ the total variation measure of $\mathbf{m}$, and by $\mathrm{M}(\mathbf{m})$ the mass of $\mathbf{m}$, defined by $\mathrm{M}(\mathbf{m}) = |\mathbf{m}|\,(\mathbb{R}^n)$. If ϕ is a nonnegative or a V valued measure, we denote by $\phi|A$ the restriction of ϕ to a Borel set $A \subset \mathbb{R}^n$ defined by $\phi|A(B) = \phi(A \cap B)$ for any subset B of $\mathbb{R}^n$. Thus if $\mathcal{S}$ is an $n-1$ dimensional surface in $\mathbb{R}^n$ then $\mathcal{H}^{n-1}|\mathcal{S}$ is the area measure on $\mathcal{S}$. If ϕ is a nonnegative measure, we denote by $f\phi$ the product of the measure ϕ by a ϕ integrable V valued function f on $\mathbb{R}^n$. If Ω is an open subset of $\mathbb{R}^n$, we denote by $C_0(\Omega, V)$ the space of all continuous V valued function on $\mathbb{R}^n$ with compact support that is contained in Ω, and denote by $|\cdot|_{C_0}$ the maximum norm on $C_0(\mathbb{R}^n, V)$.

An integral parametric measure is a family $\{\mathbf{m}^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ of V valued measures on $\mathbb{R}^n$ where $\Lambda \subset \mathbb{R}$ is a $\mathcal{L}^1$ measurable set of parameters such that (i) for every $f \in C_0(\mathbb{R}^n, V)$ the function $\lambda \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot d\mathbf{m}^\lambda$ is $\mathcal{L}^1$ measurable on Λ; (ii) we have $c = \int_\Lambda \mathrm{M}(\mathbf{m}^\lambda) d\lambda < \infty$. It can be proved [8, Prop. 2.1] that if $\{\mathbf{m}^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ is an integral parametric measure then there exists a unique V valued measure $\mathbf{m}$ on $\mathbb{R}^n$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot d\mathbf{m} = \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot d\mathbf{m}^\lambda d\lambda, \quad \text{for each } f \in C_0(\mathbb{R}^n, V).$$

We write $\mathbf{m} = \int_\Lambda \mathbf{m}^\lambda d\lambda$ and call $\mathbf{m}$ the integral of the family $\{\mathbf{m}^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ with respect to λ. We refer to [8] for more information on integral parametric measures. In particular we will use Proposition 2.2 and Proposition 2.3.

3. Panel under singular side loads

We consider the rectangular panel $\Omega = (0, B) \times (0, H) \subset \mathbb{R}^2$; we introduce the coordinate system x, y in $\mathbb{R}^2$ with the origin in the upper right corner of the panel and with the orientation of axes as shown in Fig. 1 and Fig 2. We

denote a general point of Ω by $\boldsymbol{r} = (x, y)$ and the coordinate vectors along the axes x, y, by $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ respectively. We put $\mathcal{D} = (0, B) \times \{H\}$ and $\mathcal{S} = \partial\Omega \sim \mathcal{D}$.

3.1. Regular case. Firstly, we study the problem when the panel undergoes uniformly distributed loads on the top and on an upper part of the right lateral side (Fig. 1), i.e., we consider the loads $\mathcal{L}(\lambda) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{s}^\lambda)$ where, for $\boldsymbol{r} = (x, y) \in \mathcal{S}$,

$$\boldsymbol{s}^\lambda(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} p\boldsymbol{j} & \text{on } (0, B) \times \{0\}, \\ \lambda\boldsymbol{i} & \text{on } \{0\} \times (0, \alpha), \\ \boldsymbol{0} & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

with $0 < \alpha < H$ and $\lambda \geq 0$.

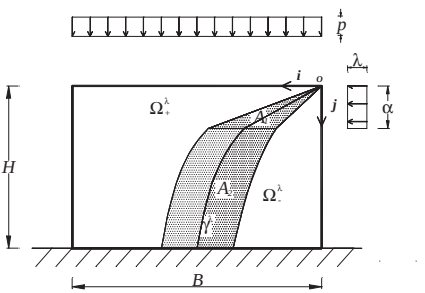


Figure 1. Panel under regular side loads

In order to define a measure stress field which is in equilibrium with the loads applied to the panel, we consider a curve $\boldsymbol{\gamma}^\lambda$ which divides Ω into the regions Ω_+^λ (on the left) and Ω_-^λ (on the right). The curve $\boldsymbol{\gamma}^\lambda$ is the graph of an increasing function $\omega^\lambda : [0, t^\lambda] \to [0, H]$,

$$\omega^\lambda(x) = \begin{cases} \sqrt{p/\lambda}\, x, & \text{if } 0 \leq x \leq \alpha\sqrt{\lambda/p} \\ px^2/(2\alpha\lambda) + \alpha/2, & \text{if } x > \alpha\sqrt{\lambda/p} \end{cases}$$

with unit tangent vector

$$\boldsymbol{T}^\lambda(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{for } \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{\gamma}^\lambda \cap \Omega_1, \\ \frac{(x,2y-\alpha)}{\sqrt{x^2+(2y-\alpha)^2}}, & \text{for } \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{\gamma}^\lambda \cap \Omega_2, \end{cases} \tag{1}$$

where $\Omega_1 = \{\boldsymbol{r} = (x, y) \in \Omega : 0 < y \leq \alpha\}$ and $\Omega_2 = \{\boldsymbol{r} = (x, y) \in \Omega : \alpha < y < H\}$. If $\lambda \in (0, \lambda_c)$, with $\lambda_c = pB^2/\alpha(2H - \alpha)$, then $\boldsymbol{\gamma}^\lambda$ is contained

in Ω, except for the endpoints. We note that if $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ is defined by

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} px^2/y^2 & \text{for } \boldsymbol{r} \in \Omega_1, \\ px^2/\alpha(2y-\alpha) & \text{for } \boldsymbol{r} \in \Omega_2, \end{cases}$$

then, for any $\lambda \in (0, \lambda_c)$, the curve $\boldsymbol{\gamma}^\lambda$ is the level set of φ corresponding to the value of λ, i.e., $\boldsymbol{\gamma}^\lambda = \{\boldsymbol{r} \in \Omega : \varphi(\boldsymbol{r}) = \lambda\}$. Moreover, φ is continuously differentiable in Ω and we have

$$|\nabla\varphi(\boldsymbol{r})| = \begin{cases} 2px\sqrt{x^2+y^2}\,/y^3 & \text{for } \boldsymbol{r} \in \Omega_1, \\ 2px\sqrt{x^2+(2y-\alpha)^2}\,/\alpha(2y-\alpha)^2 & \text{for } \boldsymbol{r} \in \Omega_2. \end{cases}$$

For $\lambda \in (0, \lambda_c)$, the loads $\mathcal{L}^\lambda$ are weakly equilibrated by the admissible measure stress field $\mathbf{T}^\lambda = \boldsymbol{T}_r^\lambda \mathcal{L}^2|\Omega + \boldsymbol{T}_s^\lambda \mathcal{H}^1|\boldsymbol{\gamma}^\lambda$, where

$$\boldsymbol{T}_r^\lambda(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -p\,\boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j} & \text{in } \Omega_+^\lambda\,, \\ -\lambda \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} & \text{in } \Omega_-^\lambda \cap \Omega_1, \\ \mathbf{0} & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

and $\boldsymbol{T}_s^\lambda = \sigma^\lambda \boldsymbol{T}^\lambda \otimes \boldsymbol{T}^\lambda$, with

$$\sigma^\lambda(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -\frac{px}{y}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{for } \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{\gamma}^\lambda \cap \Omega_1, \\ \frac{-px}{(2y-\alpha)}\sqrt{x^2+(2y-\alpha)^2}, & \text{for } \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{\gamma}^\lambda \cap \Omega_2, \end{cases}$$

and $\boldsymbol{T}^\lambda$ given by (1). Now we write $\mathbf{T}^\lambda = \mathbf{T}_r^\lambda + \mathbf{T}_s^\lambda$, where $\mathbf{T}_r^\lambda = \boldsymbol{T}_r^\lambda \mathcal{L}^2|\Omega$ and $\mathbf{T}_s^\lambda = \boldsymbol{T}_s^\lambda \mathcal{H}^1|\boldsymbol{\gamma}^\lambda$. We note that $\mathbf{T}_r^\lambda$ is of the form considered in [8, Prop. 2.2] and that the integrability condition [8, eq. (3)] is satisfied. Hence, for $0 < \mu < \lambda_c$ and $\varepsilon > 0$ such that $\Lambda := (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon) \subset (0, \lambda_c)$, the measure

$$\mathbf{T}_r = \frac{1}{\mathcal{L}^1(\Lambda)} \int_\Lambda \mathbf{T}_r^\lambda d\lambda$$

is an absolutely continuous measure with respect to $\mathcal{L}^2|\Omega$, i.e., $\mathbf{T}_r = \boldsymbol{T}_r \mathcal{L}^2|\Omega$. In order to compute the density $\boldsymbol{T}_r$, we put $A_1 = \{\boldsymbol{r} = (x, y) \in \Omega_1 : \lambda = px^2/y^2 \in \Lambda\}$ and $A_2 = \{\boldsymbol{r} = (x, y) \in \Omega_2 : \lambda = px^2/\alpha(2y-\alpha) \in \Lambda\}$.

With the same procedure followed in [8, Sec. 5] we obtain

$$\boldsymbol{T}_r(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -p\,\boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j}\,, & \text{for } \boldsymbol{r} \in \Omega_+^\lambda \sim (A_1 \cup A_2), \\ -\mu \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i}\,, & \text{for } \boldsymbol{r} \in (\Omega_-^\lambda \cap \Omega_1) \sim A_1, \\ \mathbf{0}, & \text{for } \boldsymbol{r} \in (\Omega_-^\lambda \cap \Omega_2) \sim A_2, \\ -(2\varepsilon)^{-1}\left(\xi_1(\boldsymbol{r})\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} + \xi_2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j}\right), & \text{for } \boldsymbol{r} \in A_1, \\ -(2\varepsilon)^{-1}\, p\left(\dfrac{px^2}{\alpha(2y-\alpha)} - \mu + \epsilon\right)\boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j}, & \text{for } \boldsymbol{r} \in A_2, \end{cases}$$

where

$$\xi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\left((\mu+\epsilon)^2 - \frac{p^2x^4}{y^4}\right), \quad \xi_2(\boldsymbol{r}) = p\left(\frac{px^2}{y^2} - \mu + \epsilon\right). \tag{2}$$

We note that the density $\boldsymbol{T}_r$ is bounded in Ω. Now, we consider measures $\mathbf{T}_s^\lambda$. Firstly we note that $|\nabla\varphi|\left|\boldsymbol{T}_s^\lambda\right|$ is bounded in

$$\Omega_0 = \varphi^{-1}(0,\lambda_c) = \{\boldsymbol{r} = (x,y) \in \Omega_1 : \lambda = px^2/y^2 \in (0,\lambda_c)\} \cup$$

$$\{\boldsymbol{r} = (x,y) \in \Omega_2 : \lambda = px^2/\alpha(2y-\alpha) \in (0,\lambda_c)\},$$

Then, [8, Prop. 2.3] says that the measure

$$\mathbf{T}_s = \frac{1}{\mathcal{L}^1(\Lambda)}\int_\Lambda \mathbf{T}_s^\lambda d\lambda$$

is $\mathcal{L}^2$ absolutely continuous over Ω_0, $\mathbf{T}_s = \boldsymbol{T}_s(\boldsymbol{r})\mathcal{L}^2|\Omega_0$, with density given by [8, eq. (5)]

$$\boldsymbol{T}_s(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1}\,\boldsymbol{T}_s^\lambda(\boldsymbol{r})\,|\nabla\varphi(\boldsymbol{r})| & \text{for } \boldsymbol{r} \in A_1 \cup A_2, \\ \mathbf{0} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Finally, we obtain the admissible stress field $\mathbf{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})\mathcal{L}^2|\Omega$ which strongly equilibrates the loads $\mathcal{L}^\mu$, with

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{T}_r(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{T}_s(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -p\,\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j} & \text{for } \boldsymbol{r} \in \Omega_+^\lambda \sim (A_1 \cup A_2)\,, \\ -\mu\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} & \text{for } \boldsymbol{r} \in \left(\Omega_-^\lambda \cap \Omega_1\right) \sim A_1, \\ \boldsymbol{s_1}(\boldsymbol{r}) & \text{for } \boldsymbol{r} \in A_1, \\ \boldsymbol{s_2}(\boldsymbol{r}) & \text{for } \boldsymbol{r} \in A_2, \\ \mathbf{0} & \text{elsewhere,} \end{cases} \tag{3}$$

where, for ξ_1 and ξ_2 given by (2),

$$\boldsymbol{s_1}(\boldsymbol{r}) = -(2\varepsilon)^{-1}\left\{\left(\xi_1(\boldsymbol{r}) + \frac{2p^2x^4}{y^4}\right)\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} + \frac{2p^2x^3}{y^3}\boldsymbol{i}\odot\boldsymbol{j}\right.$$

$$\left. + \left(\xi_2(\boldsymbol{r}) + \frac{2p^2x^2}{y^2}\right)\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}\right\}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{r}) = -(2\varepsilon)^{-1}\left\{\frac{2p^2x^4}{\alpha(2y-\alpha)^3}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} + \frac{2p^2x^3}{\alpha(2y-\alpha)^2}\boldsymbol{i}\odot\boldsymbol{j}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3p^2x^2}{\alpha(2y-\alpha)} - p\mu + p\epsilon\right)\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}\right\}. \tag{5}$$

3.2. Singular case. Now we consider the situation when the distributed lateral load is substituted by its resultant of intensity $\bar{\lambda} = \alpha\lambda$ applied at the point $(0, \alpha/2)$ (Fig. 2). That is we consider the loads $\mathcal{L}^{\bar{\lambda}} = (\mathbf{0}, \mathbf{s}^{\bar{\lambda}})$ with $\mathbf{s}^{\bar{\lambda}}$ given by the measure $\mathbf{s}^{\bar{\lambda}} = \boldsymbol{s}_0 \mathcal{H}^1 | \mathcal{S} + \bar{\lambda} \delta_\alpha \boldsymbol{i}$, where δ_α is the Dirac measure at the point $(0, \alpha/2)$, and

$$\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} p\,\boldsymbol{j}, & \text{if } \boldsymbol{r} \in (0, B) \times \{0\}, \\ \mathbf{0}, & \text{if } \boldsymbol{r} \in \mathcal{S} \sim (0, B) \times \{0\}. \end{cases}$$

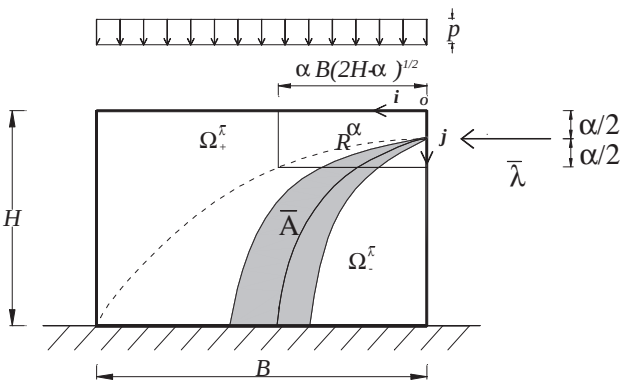


Figure 2. Panel under singular side loads

In this case Ω is divided into the regions $\Omega_+^{\bar{\lambda}}$ and $\Omega_-^{\bar{\lambda}}$ by the curve $\boldsymbol{\gamma}^{\bar{\lambda}}$, which is the graph of an increasing function $\omega^{\bar{\lambda}} : [0, t^{\bar{\lambda}}] \to [0, H]$, $\omega^{\bar{\lambda}}(x) = px^2/2\bar{\lambda} + \alpha/2$, with unit tangent vector

$$\boldsymbol{T}^{\bar{\lambda}}(\boldsymbol{r}) = (x, 2y - \alpha)/\sqrt{x^2 + (2y - \alpha)^2}, \tag{6}$$

If $\bar{\lambda} \in (0, \bar{\lambda}_c)$, with $\bar{\lambda}_c = pB^2/(2H - \alpha)$, then $\gamma^{\bar{\lambda}}$ is contained in Ω, except for the endpoints [7, example 2] and $t^{\bar{\lambda}} = \sqrt{\bar{\lambda}(2H - \alpha)/p}$. We note that if $\bar{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}$ is defined by $\bar{\varphi}(\boldsymbol{r}) = px^2/(2y - \alpha)$, then, for any $\bar{\lambda} \in (0, \bar{\lambda}_c)$, the curve $\boldsymbol{\gamma}^{\bar{\lambda}}$ is the level set of $\bar{\varphi}$ corresponding to the value of $\bar{\lambda}$, i.e., $\boldsymbol{\gamma}^{\bar{\lambda}} = \{\boldsymbol{r} \in \in \Omega : \bar{\varphi}(\boldsymbol{r}) = \bar{\lambda}$. For $\bar{\lambda} \in (0, \lambda_c)$, the loads $\mathcal{L}^{\bar{\lambda}}$ are weakly equilibrated by the admissible measure stress field $\mathbf{T}^{\bar{\lambda}} = \boldsymbol{T}_r^{\bar{\lambda}} \mathcal{L}^2 | \Omega + \boldsymbol{T}_s^{\bar{\lambda}} \mathcal{H}^1 | \boldsymbol{\gamma}^{\bar{\lambda}}$, where

$$\boldsymbol{T}_r^{\bar{\lambda}}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -p\,\boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j} & \text{in } \Omega_+^{\bar{\lambda}}, \\ \mathbf{0} & \text{in } \Omega_-^{\bar{\lambda}}, \end{cases}$$

and $\boldsymbol{T}_s^{\bar{\lambda}}(\boldsymbol{r}) = \sigma^{\bar{\lambda}}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{T}^{\bar{\lambda}}(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{T}^{\bar{\lambda}}(\boldsymbol{r})$, with $\sigma^{\bar{\lambda}}(\boldsymbol{r}) = -px\sqrt{x^2 + (2y-\alpha)^2}\,/(2y-$ $-\alpha)$, and $\boldsymbol{T}^{\bar{\lambda}}$ given by (6). By the same procedure used for the regular case, finally, we obtain the admissible and equilibrated stress field $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{r})\mathcal{L}^2|\Omega$ which equilibrates the loads $\mathcal{L}^\mu$,

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -p\,\boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j} & \text{for } \boldsymbol{r} \in \Omega_+^{\bar{\lambda}} \sim \bar{A}, \\ \boldsymbol{0} & \text{for } \boldsymbol{r} \in \Omega_-^{\bar{\lambda}} \sim \bar{A}, \\ \bar{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{r}) & \text{for } \boldsymbol{r} \in \bar{A}, \end{cases} \tag{7}$$

where

$$\bar{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{r}) = -(2\bar{\varepsilon})^{-1} \left\{ \frac{2p^2x^4}{(2y-\alpha)^3}\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} + \frac{2p^2x^3}{(2y-\alpha)^2}\boldsymbol{i} \odot \boldsymbol{j} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{3p^2x^2}{2y-\alpha} - p\bar{\mu} + p\bar{\epsilon} \right) \boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j} \right\}. \tag{8}$$

We note that $\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{r})$, defined in (7) and (8), belongs to $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathrm{Sym})$ but not to $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathrm{Sym})$ and then it can not be used in order to apply the static theorem of limit analysis. Nevertheless, for $\lambda = \bar{\lambda}/\alpha$, in the region Ω_2 defined in the previous section $\boldsymbol{\gamma}^\lambda$ coincides with $\boldsymbol{\gamma}^{\bar{\lambda}}$ and $\boldsymbol{\sigma}^\lambda$ coincides with $\boldsymbol{\sigma}^{\bar{\lambda}}$. Moreover, for $\mu = \bar{\mu}/\alpha$ and $\epsilon = \bar{\epsilon}/\alpha$, $\boldsymbol{s}_2$ defined in A_2 by (5) coincides with $\bar{\boldsymbol{s}}$ defined in $\bar{A}$ by (8). Therefore the density $\boldsymbol{T}$ and $\bar{\boldsymbol{T}}$ are different from one another only in a region that is contained into the rectangle $R_\alpha = (0, \alpha\sqrt{\lambda_c/p}) \times (0, \alpha)$ (see (3) and (7)). Then, for every $\alpha \in (0, H)$, we have

$$\int_\Omega \left| \boldsymbol{T} - \bar{\boldsymbol{T}} \right| d\mathcal{L}^2 \leq \int_{R\alpha} \left| \boldsymbol{T} - \bar{\boldsymbol{T}} \right| d\mathcal{L}^2$$

and, because $\left| \boldsymbol{T} - \bar{\boldsymbol{T}} \right| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$, for each $\nu > 0$, there exists $\alpha > 0$ such that

$$\int_\Omega \left| \boldsymbol{T} - \bar{\boldsymbol{T}} \right| d\mathcal{L}^2 \leq \nu.$$

In applications where α/H is small, sometimes one can use the stress field defined in (7) to approximate that defined in (3).

References

1. *Heymann J.* The stone skeleton// Int. J. Solids Structures, 2, 249–256, (1966).
2. *Del Piero G.*Limit analysis and no-tension materials// Int. J. Plasticity, 14, 259–271, 1998.
3. *Lucchesi M., Padovani C., Šilhavý M.* An energetic view on the limit analysis of normal bodies// to appear in Quart. Appl. Math.
4. *Del Piero G.* Constitutive equations and compatibility of the external loads for linear elastic masonry-like materials// Meccanica, 24, 150–162, (1989).
5. *Lucchesi M., Šilhavý M., Zani N.* A new class of equilibrated stress fields for no-tension bodies// J. Mech. Mater. Struc. **1**, 503-539, (2006).

6. *Lucchesi M., Šilhavý M., Zani N.* A note for equilibrated stress fields for no-tension bodies under gravity// Quart. Appl. Mathematics, 65, 605-624, (2007).
7. *Lucchesi M., Šilhavý M., Zani N.*Equilibrated divergence measures stress tensor fields for heavy masonry bodies// J. Mechanics. A, Solids, 28, 223-232, (2009).
8. *Lucchesi M., Šilhavý M., Zani N.*Integration of measures and admissible stress fields// J. Mech. Materials Structures, 3, 675-696, (2008).
9. *Lucchesi M., Šilhavý M., Zani N.* Integration of parametric measures and the statics of masonry panels// In preparation (2010).
10. *Gurtin M.E.* An introduction to continuous mechanics// Academic Press, (1981).
11. *Ambrosio L., Fusco N., Pallara D.* Functions of bounded variation and free discontinuity problems// Clarendon Press, (2000).

AN ANALYTIC SOLUTION FOR THE TRANSITION FROM A HIGHLY VISCOUS FLUID TO A RIGID SOLID AND ITS RELATION TO THERMODYNAMIC PRINCIPLES

***Wolfgang H. Müller*[1], *B. Emek Abali*[2]**

Technische Universität Berlin, Fak. V, Institut für Mechanik
Berlin, Germany

[1]**wolfgang.h.mueller@tu-berlin.de,** [2]**abali@tu-berlin.de**

Thermodynamic principles are commonly used as constraints to derive constitutive equations. In particular, the entropy principle is exploited due to its property of defining irreversibility in a direct way. It is, for example, used in the Thermodynamics of Irreversible Processes (TIP) in [3]; or as in terms of the Clausius-Duhem formalism in [2]; or even in combination with Lagrange multipliers in [4]. By assuming the rate of entropy production — interpreted as the dissipation rate — as the only variable for irreversibility many extremum principles are derived, e.g., the principle of minimization of the entropy production in [5] or the maximization of the dissipation rate in [7]. For a better understanding of these different approaches, their equivalence or differences, a solution of the primary field equations is found for a non-linear Couette flow problem and analyzed in terms of entropy production and its minimization. As a constitutive equation Ziegler's non-linear shear flow model is used. It allows for a transition between the viscous fluid and a plastic solid with linear hardening.

1. Introduction

A system $\mathcal{S}$ defined in three-dimensional space within the Cartesian coordinates $\boldsymbol{x} = x_i = (x_1, x_2, x_3)$ may exchange any quantity (like energy, mass, momentum, etc.) with its exterior, i.e., the surrounding space or complement of its region. If the only exchange between the system and its exterior is the heat energy, Q, and the work done, W (by volume (body) forces, $\boldsymbol{f}$, and surface (traction) forces, $\boldsymbol{t}$), then it is called a thermodynamic system [1]. If this thermodynamic system has reached its equilibrium for that moment, i.e., no exchange for a period of time, t, then there exists a balance in its state[1], $\mathcal{Z}$, at least in that period of time. $\mathcal{Z}$ is a set of thermodynamic field functions, the mass density $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, temperature $T(\boldsymbol{x}, t)$, velocities in each direction $v_i(\boldsymbol{x}, t)$. The main purpose in a non-extended thermo-mechanical field theory is to estimate these five primary field variables in all points of the continuum body

[1] in german, state is "der Zustand"

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$ at all times $t \in]t_0, t_{\text{end}}]$ within the known[2] initial (t_0) and boundary ($\partial\mathcal{B}$) conditions. A relation between the variables of the set $\mathcal{Z}$ in a period of time t can be expressed (quasistatically) within the five (local) balance equations for mass, linear momentum and internal energy,

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \,,\; \rho \dot{v}_i - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho f_i \,,\; \rho \dot{u} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho r \,, \tag{1}$$

respectively. However, these equations introduce several new quantities, namely the (symmetric[3]) Cauchy stress tensor, σ_{ij}, the specific volume (body) forces, f_i, the internal energy density, u, the heat flux vector, q_i, and the specific radiation supply, r. Even in a system without volume forces and supply term, there are still ten additional functionals $(\sigma_{ij},\, q_i,\, u)(\boldsymbol{x}, t)$, which should be related in a series of constitutive equations in order to determine a closed system. The constitutive equations should be chosen as easy as possible, so that the response of the material is sufficiently accurately described (as in continuum mechanics) and at the same time are admissible under consideration of certain "principles" (as in thermodynamics)[4].

2. Constitutive equations

In a three-dimensional orthonormal space (here the Euclidian space equipped within the Cartesian coordinates), there exist three eigenvalues (each belonging to its eigenvector), which are scalar values[5], for a symmetric second order tensor function $\sigma_{ij}(d_{kl})$ of a symmetrical d_{kl}. If the function is also isotropic[6] then according to the Hamilton-Cayley formula it can be expressed with three scalar functions of the three invariants:

$$\sigma_{ij} = \pi(\dots)\delta_{ij} + 2\mu(\dots)d_{ij} + h(\dots)d_{ik}d_{kj} \,,\; \forall(\pi, \mu, h)(d_{(1)}, d_{(2)}, d_{(3)}) \,, \tag{2}$$

where the invariants[7] can be written as:

$$d_{(1)} = d_{ii} \,,\; d_{(2)} = \frac{1}{2} d_{ij} d_{ji} \,,\; d_{(3)} = \frac{1}{3} d_{ij} d_{jk} d_{ki} \,, \tag{3}$$

and are absolute scalars equivalent to the eigenvalues under appropriate transformation. As mentioned in [7], assuming simple shear in the (x_1, x_2)-plane, so that the velocity field reduces to

$$v_i = (v_1(x_2) \,,\; 0 \,,\; 0) \,, \tag{4}$$

[2] measured with a necessary good precision

[3] which is the reason that the moment of momentum balance is not considered

[4] principles cannot be proven but to a certain degree motivated from microscopic considerations, so that they become an axoimatic character

[5] "scalar" means a quantity which does not change under orthogonal transformations, i.e., invariants

[6] symmetric to all eigenvectors

[7] for a detailed discussion refer to [6]

and the small strain rate tensor d_{ij} and its invariants (3) read:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \; d_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x_2}, \; d_{(1)} = 0, \; d_{(2)} = d_{12}^2, \; d_{(3)} = 0. \tag{6}$$

Hence the stress to strain-rate (quasilinear) tensor relation in (2) can be simplified as:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(d_{12}^2)d_{ij}, \tag{7}$$

where the dilatation has been taken as the hydrostatic pressure p pointing inwards to the body $\mathcal{B}$. For the shear viscosity term, the following non-linear form is assumed (within the positive scalar material coefficients μ_0, k, b)

$$\mu = \mu_0 + \frac{k}{\pi\sqrt{d_{(2)}}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{b}\sqrt{d_{(2)}}\right). \tag{8}$$

Thus the stress expression in (7) takes the form

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu_0 d_{12} + \frac{2k}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{|d_{12}|}{b}\right)\mathrm{sign}(d_{12}). \tag{10}$$

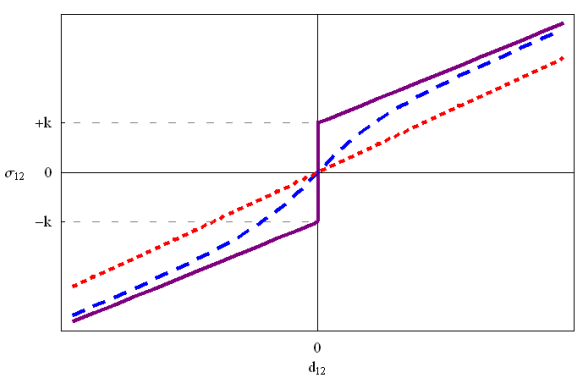


Figure 1. Constitutive equation for shear stress σ_{12} strain-rate d_{12} dependence, $b \to \infty$, $0 < b < \infty$, $b \to 0$ correspond to the dotted, dashed, continuous line, respectively.

It is shown in Fig. 1 for different values of b, where the $b = 0$ case tends to a plastic solid behavior. Additionally, as usual for the heat flux q_i a linear

temperature dependence, the Fourier equation

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} , \tag{11}$$

will be used. Finally, the entropy production, as derived in [3], reads[8]:

$$\Sigma = q_i \frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial x_i} + \frac{1}{T} \sigma_{<ij>} \frac{\partial v_{<j}}{\partial x_{i>}} + \frac{1}{T} \left(\frac{1}{3} \sigma_{kk} + p \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} . \tag{12}$$

3. Couette flow

As already mentioned, the aim is to derive an analytic solution for the Couette flow, i.e., a viscous (i.e., a fluid with internal friction) flow in a channel (plane cut of a pipe flow), as illustrated in Fig. 2. The fluid is sticking to the boundary (no slip boundary condition), i.e., there are no relative velocities between the fluid particle on the boundary and the boundary itself. In that case, the boundary is meant to be the top and bottom wall of the channel. First, assume that the boundaries are not moving. For the sake of simplicity, the solution sought is in steady state, while the flow is assumed to be laminar. The same conditions (simple shear in (x_1, x_2)-plane), as is used in the derivation of the constitutive equation, can be achieved by using the (semi-inverse) ansatz:

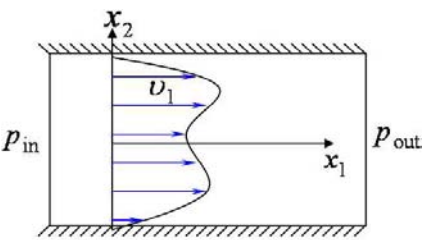


Figure 2. Scheme of the channel flow problem, $\boldsymbol{v}$ is the velocity field of the viscous fluid.

$$T = T(x_2) , \; v_i = (v_1(x_2), 0, 0) , \; u = u(x_2) . \tag{13}$$

The fact that there exists only a x_2 dependence (vertical direction between top and bottom) for all the functions in the state $\mathcal{Z}$, leads to

$$0 = 0 , \; \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho f_i , \; \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \sigma_{21} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \rho r . \tag{14}$$

And finally, while ignoring the effect of any body force (like gravitation) and energy supply (like radiation), i.e., $f_i = 0_i$, $r = 0$, the following differential equations to be solved are obtained

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 , \; \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \sigma_{21} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad . \tag{15}$$

[8] brackets $< .. >$ around the indices refer to the deviatoric part of the tensor

By using the aforementioned stress tensor function:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}\,,\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}\,,\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \tag{16}$$

the possible pressure function is restricted, so that $(15)_1$ becomes:

$$|p'| + \frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}x_2^2}\left[\mu_0 + \frac{4kb}{\pi\left(4b^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x_2}\right)^2\right)}\right] = 0\,,\ |p'| = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1}\,. \tag{17}$$

This is a second order ordinary differential equation for the velocity, which can be transformed into a normalized equation by using the following dimensionless variables

$$v_0 = \frac{|p'|R^2}{\mu_0}\,,\ \bar{v} = \frac{v_1}{v_0}\,,\ \bar{x} = \frac{x_2}{R}\,,\ \bar{v}' = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}\bar{x}}\,, \tag{18}$$

$$\bar{b} = \frac{2bR}{v_0}\,,\ \bar{\mu} = \frac{k}{b\mu_0}\,,\ \bar{k} = \frac{k}{|p'|R}\,,\ \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{21}}{|p'|R}\,. \tag{19}$$

Thus after some calculations the (17) reads

$$1 + \bar{v}''\left[1 + \frac{\bar{\mu}}{\pi}\frac{1}{1 + \left(\frac{\bar{v}'}{\bar{b}}\right)^2}\right] = 0 \quad . \tag{20}$$

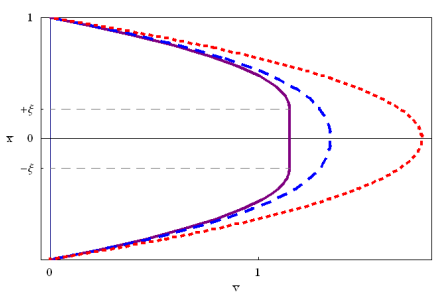


Figure 3. Numerical solution of the flow, $\bar{v}$ is the normalized velocity.

It is solved numerically[9] with a shooting method for the three choices for b shown in Fig. 3. If the coefficient b is large (red), moderate (blue) and small (purple), Newtonian-like, non-Newtonian-like and Bingham-Il'yushin-like material behaviour is obtained. A transition occurs in the latter case, where a rigid plug arises in the center part of the fluid, which moves with the

[9]the boundary value problem formulated in a finite difference scheme, as being an evolution equation with known initial value and predicted initial gradient of that value on one end, which leads to a value on the other end, via backward difference method in second order accuracy that is used to correct the predictor iteratively

surrounding material velocity. In that case an analytic solution is also possible. Let us define the coordinate as r_0 where the transition from rigid to liquid happens. So $b = 0$ changes the shear stress to:

$$\bar{\sigma} = \bar{v}' + \bar{k}\,\mathrm{sign}(\bar{v}')\,, \tag{21}$$

and with the boundary and transition conditions as

$$\bar{v}(\bar{x} = \pm 1) = 0\,,\ \bar{v}'(\bar{x} = \pm\xi) = 0\,,\ \xi = \frac{r_0}{R} \quad , \tag{22}$$

Eqn. (20) reads

$$1 + \bar{v}'' = 0 \tag{23}$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{2}\bar{x}^2 + c_1\bar{x} + c_2\,,\ c_1 = \xi\,\mathrm{sign}(\bar{x})\,,\ c_2 = \frac{1}{2} - \xi\,\mathrm{sign}^2(\bar{x}) \tag{24}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2}\left(1 - \bar{x}^2\right) - \xi\,(1 - \bar{x}\,\mathrm{sign}(\bar{x}))\ ,\ \xi \le |\bar{x}| \le 1 \tag{25}$$

to the following solution for the whole interval

$$\bar{v}(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \bar{x}^2\right) - \xi\,(1 - |\bar{x}|) & ,\ \forall \bar{x} : \xi \le |\bar{x}| \le 1 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \xi^2\right) - \xi\,(1 - \xi) & ,\ \forall \bar{x} : 0 \le |\bar{x}| \le \xi \end{cases} . \tag{26}$$

By changing and generalizing the boundary conditions, i.e. allowing top and bottom velocities, v_T, v_B and introducing r_s as the symmetric axis and $\eta = \frac{r_\mathrm{s}}{r_0}$, $\eta\xi = \frac{r_\mathrm{s}}{R}$

$$\bar{v}(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \bar{x}^2\right) - \xi\,(1 + \eta)\,(1 - \bar{x}) + v_\mathrm{T} & ,\ \forall \bar{x} : \eta\xi + \xi \le \bar{x} \le 1 \\ \text{const.} & ,\ \forall \bar{x} : \eta\xi - \xi \le \bar{x} \le \eta\xi + \xi \\ \frac{1}{2}\left(1 - \bar{x}^2\right) - \xi\,(1 - \eta)\,(1 + \bar{x}) + v_\mathrm{B} & ,\ \forall \bar{x} : -1 \le \bar{x} \le \eta\xi - \xi \end{cases} \tag{27}$$

is achieved (s. Fig. 3.) . Finally the second differential equation in (15) can be solved by using (11) and the introduced dimensionless coefficients in (18),(19) as follows[10] :

$$-\kappa\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x_2^2} = \sigma_{21}\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x_2} = |p'|R\bar{\sigma}\frac{\mathrm{d}(\bar{v}v_0)}{\mathrm{d}(\bar{x}R)} = |p'|v_0\bar{\sigma}\bar{v}'\,, \tag{28}$$

$$T'' = -\frac{\bar{p}}{\bar{\kappa}}\left(\bar{v}'^2 \mp \bar{k}\bar{v}'\right)\,,\ \bar{T} = \frac{T}{T_0}\,,\ \bar{\kappa} = \frac{\kappa T_0}{k v_0 R}\,,\ \bar{p} = \frac{|p'|R}{k}\,, \tag{29}$$

$$\bar{T}'(\xi\eta \pm \xi) = 0\,,\ \bar{T}(\bar{x} = \pm 1) = +1\,, \tag{30}$$

[10] the $\pm$ means a + in $[\eta\xi + \xi, 1]$ and a $-$ in $[-1, \eta\xi - \xi]$

$$\bar{T} = 1 + \frac{\bar{p}}{12\bar{\kappa}}\left(-\bar{x}^4 + 1 + (\bar{x} \mp 1)4\xi^3(\eta \pm 1)^3\right) +$$
$$+ \frac{\bar{p}}{6\bar{\kappa}}\left(2\xi(\eta \pm 1) \mp \bar{k}\right)\left(+\bar{x}^3 \mp 1 - (\bar{x} \mp 1)3\xi^2(\eta \pm 1)^2\right) +$$
$$+ \frac{\bar{p}}{2\bar{\kappa}}\left(\xi^2(1 \pm \eta)^2 - \bar{k}\xi(1 \pm \eta)\right)\left(-\bar{x}^2 + 1 + (\bar{x} \mp 1)2\xi(\eta \pm 1)\right) . \quad (31)$$

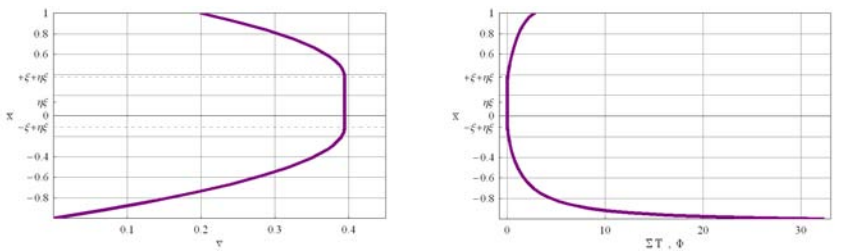


Figure 4. Velocity profile as the analytical solution and entropyproduction times temperature as a measure of the irreversibility.

As conclusion by introducing $\bar{\Sigma} = \frac{\Sigma T_0 R}{k v_0}$ and by using Eqn. (12) a normalized entropy production results:

$$\bar{T}\,\bar{\Sigma} = \Phi = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{T}}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{T}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)^2 + \frac{1}{\bar{k}}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)^2 \mp \left(\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right) . \quad (32)$$

It is a measure for irreversibility (often named “dissipation potential” [8]) . Together with (27) and (31) is as shown in Fig. 3. . It reaches its maximum on the boundaries and it vanishes in the kernel without irreversibilities.

Bibliography

1. *C. Carathéodory* Untersuchungen über die grundlagen der thermodynamik.// Mathematische Annalen, 1909, 67(3), pp.355–386.
2. *B.D. Coleman and W. Noll* The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity.// Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1963, 13(1), pp.167–178.
3. *C. Eckart* The thermodynamics of irreversible processes. iv. The theory of elasticity and anelasticity.// Phys. Rev., 1948, 73(4), pp.373–382.
4. *I. Mueller* Thermodynamics. Pitman, 1985.
5. *L. Onsager* Reciprocal relations in irreversible processes. i.// Phys. Rev., 1931, 37(4), pp.405–.
6. *A.J.M. Spencer* Theory of invariants, chapter Part III, pp.239–352. Academic Press Inc. London, 1971.
7. *H. Ziegler* An Introduction to Thermomechanics. North Holland, Amsterdam, 1977 (sec. ed. 1983).
8. *H. Ziegler and C. Wehrli* The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function.// Advances in Applied Mechanics, 1987, Vol.25, 183–238.

ON MICROSCOPIC AND MACROSCOPIC NOTIONS OF STRESS

Paolo Podio-Guidugli

Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Roma TorVergata, Roma, Italy

ppg@uniroma2.it

1. Introduction

It would seem that the time is about to come when an issue that the founding fathers of continuum physics recognized as central can be settled: given that matter has a discrete structure, what is the discrete counterpart of the continuum description of its mechanical response? Said differently, what are the discrete counterparts of the continuum notions of strain, stored energy, elasticity tensor, and stress?

Firstly, Navier in 1823, then Cauchy, Lamé, and others (see Love's "Historical Introduction" [5] and [14], Section 301), tackled various aspects of the issue with unavoidably modest success: their 'molecular physics' was based on a naive picture of matter and they had no computers at their disposal. In particular, Cauchy's molecular picture led him to deduce his 'rari-constant' theory of linearly elastic response [13]. We now think we know (a proof is still wanted) why Cauchy's approach could not possibly yield the correct number of independent elastic moduli: he was working 'in the bulk', that is, without taking into account the changes in molecular interactions that occur near and at a body's boundary. In fact, the missing constants can be shown to enter into a contribution to the elastic energy per unit volume that is, in the jargon of variational calculus, a null Lagrangian, i.e., affects only the boundary part of the Euler-Lagrange operator associated to a given energy functional [4].

In this short note, we somehow resume Cauchy's program together with its intrinsic limitation indicated just above, in that we propose for consideration a *microscopic notion of stress* emerging from a conceptual use, at zero temperature, of Molecular Dynamics, a method that, with today's computers, can simulate well only the bulk behavior of matter. We also pose two questions about the *mutual coherency of macroscopic and microscopic constitutive assignments* under form, respectively, of stored-energy mappings and intermolecular potentials.

For an ample critical discussion, not restricted to zero temperature situations, of the microscopic notions of stress that have been proposed, the interested reader is referred to Volume 100 (2010) of the Journal of Elasticity, in particular, to the papers by Admal & Tadmor [1], Murdoch [7], and Noll [8].

2. Extended Lagrangians of APR type

In the last three decades, methods of Molecular Dynamics (MD) based on *extended Lagrangians* of the Andersen-Parrinello-Rahman (APR) type [2, 9, 10] have been repeatedly and successfully used to simulate stress- or strain-induced phase transitions in crystalline materials. A peculiar feature of those methods is the introduction of additional (whence the adjective 'extended') degrees of freedom (DOFs), accounting for transition-inducing *macroscopic* power expenditures on the computational box (CB). This point requires clarification.

The modifier 'macroscopic' is here used in the sense of statistical mechanics: the system under study may be small at the macroscopic scale of continuum mechanics and yet microscopically large.

Current MD simulations concern a matter chunk $\mathcal{X}$ of attomole size and a time interval $\mathcal{T}$ of nanosecond duration, with a time step of one femtosecond. The enormous difference between an Avogadro's number of molecules and the feasible number of $10^6 - 10^7$ molecules forces MD practitioners to run their simulations under assumptions of CB periodicity that make their results applicable only to bulk matter.[1] No matter how short MD simulations may seem, they are regarded as long enough to bring the system in a state of statistical equilibrium.

At the continuum mechanics scale, an MD space-time region $\mathcal{X} \times \mathcal{T}$ is to be regarded as a (point, instant) pair (x, t). At that point and instant, let $\boldsymbol{S}$ and $\dot{\boldsymbol{F}}$ denote, respectively, the stress and the time rate of the deformation gradient $\boldsymbol{F}$; then, the macroscopic *internal* power expenditure per unit volume is $\boldsymbol{S} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{F}}$; in a MD simulation of APR type, that power expenditure is regarded as an *external* power expenditure over the CB. When the macroscopic stress plays the role of an external control – the case of stress-induced phase transitions on which we concentrate in this paper – then $\dot{\boldsymbol{F}}$ accounts for the *fluctuations of the computational box* during an MD run; the additional DOFs are just the components of $\boldsymbol{F}$, the tensor that accounts for changes in volume and shape of the CB.[2] Here below a quick presentation of APR MD is given, modeled after a recent reformulation of that method [12].

[1] We read in [2]: " ... to eliminate ... surface [effects] ..., periodic boundary conditions are ordinarily used"; and, in [10], "... periodic boundary conditions ... are obtained by periodically repeating a unit cell of volume Ω containing the N particles by suitable translations. ... every particle can be thought of as being at the 'center'. In other words, ... the summation over J in [the Newton equations] extends over the infinite system generated by the periodic boundary conditions."

[2] Due to the built-in redundancy in DOFs, a *barostatted* extended Lagrangian of APR type does not lead in a standard manner to a Hamiltonian formulation of the evolution problem of a given system; moreover, the associated ensemble averages are not microcanonical, as is customary when energy, volume and molecule number are conserved, but rather *isenthalpic* and *isobaric*, because energy is replaced by enthalpy, and volume by scalar pressure or, more generally, applied stress.

2.1. Geometry. The key feature of MD simulations of APR type is that the CB "is allowed to change its shape in order to comply with a new structure" [6] whenever a stress-induced displacive phase transition occurs. Accordingly, the CB is observed both in its current shape, where its edges are spanned by the linearly independent vectors $\boldsymbol{h}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, and in its reference shape, where its edges are spanned by the vectors $\boldsymbol{g}_i$; its deformation is described by the tensor

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{h}_i \otimes \boldsymbol{g}^i, \tag{1}$$

that maps the reference CB into the current CB, because

$$\boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{g}_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

(here $\otimes$ denotes dyadic product and the linearly independent triplets of vectors $\boldsymbol{g}_i$ and covectors $\boldsymbol{g}^i$ are such that $\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^i = \mathbf{1}_{ref}$, with $\mathbf{1}_{ref}$ the identity tensor in the referential observation space). In an APR approach, $\boldsymbol{F}$ is identified with the local value of the deformation gradient, the continuum-mechanical measure of macroscopic deformation; in a MD simulation, the time changes of $\boldsymbol{F}$ account for CB fluctuations while the system evolves toward statistical equilibrium.

2.2. Kinetic energies. Let

$$\boldsymbol{r}_I = \zeta_I^i \boldsymbol{h}_i \quad \text{and} \quad \boldsymbol{s}_I = \zeta_I^i \boldsymbol{g}_i \quad (I = 1, \ldots, N) \tag{3}$$

be the current and referential position vectors of the $I-$th 'molecule' of a population occupying the CB, the real numbers $\zeta_I^i \in [0, 1]$ being the $I-$th molecule's convected coordinates; in a crystal, their values are thought of as changing in time about the coordinates of the lattice positions, with position-velocity fluctuations regarded as a statistical manifestation of a state of nonnull temperature. Since $\boldsymbol{r}_I = \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{s}_I$ and both the CB and the molecules fluctuate, the kinetic energy of the molecule population:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{N} m_I \dot{\boldsymbol{r}}_I \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_I,$$

after some algebra, turns out to be given by the mapping

$$\begin{aligned} \hat{K}(\boldsymbol{s}_I, \dot{\boldsymbol{s}}_I; \boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}}) = {} & \frac{1}{2}\, \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \cdot \sum_{I=1}^{N} m_I \dot{\boldsymbol{s}}_I \otimes \dot{\boldsymbol{s}}_I \\ & + \frac{1}{2}\, \dot{\boldsymbol{F}}^T \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \sum_{I=1}^{N} m_I \boldsymbol{s}_I \otimes \boldsymbol{s}_I + \dot{\boldsymbol{F}}^T \boldsymbol{F} \cdot \sum_{I=1}^{N} m_I \boldsymbol{s}_I \otimes \dot{\boldsymbol{s}}_I, \end{aligned} \tag{4}$$

where

$$\boldsymbol{I} = \sum_{I=1}^{N} m_I \boldsymbol{s}_I \otimes \boldsymbol{s}_I$$

is the referential Euler's *inertia tensor* of the CB, a symmetric and (for a non-degenerate cell) positive tensor (for simplicity, the specification of the range of index I has been omitted; a superposed dot signifies time differentiation, a centered dot inner product of tensors).

The expression for the kinetic energy mapping postulated by Parrinello and Rahman in [10] is different. While a theoretical justification for its simpler form has not been given, its merits have been amply demonstrated by its perusal in many and diverse successful MD simulations; an alternative to PR's trademark kinetic energy, as well as a set of assumptions that reduce the kinetic energy mapping (4) to PR's, has been proposed in [12]. Here we do not elaborate any further on this issue, because it is irrelevant when dealing with zero temperature situations.

2.3. Lagrangians. The molecules in the CB interact as specified by a positional *potential* $V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$, whose simplest additive pairwise form is:

$$V = \frac{1}{2} \sum_I \sum_J \widehat{\Phi}(r_{IJ}) = \sum_{I=1}^{N} \sum_{J>I}^{N} \widehat{\Phi}(r_{IJ}), \quad r_{IJ} := |\boldsymbol{r}_I - \boldsymbol{r}_J| = |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}_I - \boldsymbol{s}_J)| .$$

We set:

$$V = \widehat{V}(\boldsymbol{s}_I; \boldsymbol{F}) = \sum_{I=1}^{N} \sum_{J>I}^{N} \widehat{\Phi}(|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}_I - \boldsymbol{s}_J)|). \tag{5}$$

and lay down the following form of an extended Lagrangian mapping of APR type:

$$\widehat{L}(\boldsymbol{s}_I, \dot{\boldsymbol{s}}_I; \boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}}) = \widehat{K}(\boldsymbol{s}_I, \dot{\boldsymbol{s}}_I; \boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}}) - \widehat{V}(\boldsymbol{s}_I; \boldsymbol{F}) + \Omega_{ref} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F} ; \tag{6}$$

in the last term, which is *enthalpic* in nature, Ω_{ref} is the CB's referential volume and $\boldsymbol{S}$ is the macroscopic *external stress*, that is, the observable applied stress.

3. Zero-temperature APR MD, microscopic and macroscopic stresses

The motion equations associated with the Lagrangian (6) are:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{s}}_I}\Big) - \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{s}_I} &= -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{s}_I}, \\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{F}}}\Big) - \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{F}} &= -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{F}} + \Omega_{ref} \boldsymbol{S}, \end{aligned} \tag{7}$$

where, on denoting differentiation by a prime,

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{s}_I} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\Big(\sum_{J>I}\frac{1}{r_{IJ}}\widehat{\Phi}'(r_{IJ})(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)\Big)$$
$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\Big(\sum_{I=1}^{N}\sum_{J>I}^{N}\frac{1}{r_{IJ}}\widehat{\Phi}'(r_{IJ})(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)\otimes(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)\Big).$$

At zero temperature, what prescription for kinetic energy is made does not matter. The first N of equations (7) reduce to a statement of force balance for each molecule:

$$\sum_{J>I}\frac{1}{r_{IJ}}\widehat{\Phi}'(r_{IJ})(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)=\boldsymbol{0}; \tag{8}$$

the tensorial equation $(7)_2$ takes the form:

$$\frac{1}{\dot{}_{ref}}\sum_{I=1}^{N}\sum_{J>I}^{N}\frac{1}{r_{IJ}}\widehat{\Phi}'(r_{IJ})(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)\otimes(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)=\widetilde{\boldsymbol{S}},\quad \widetilde{\boldsymbol{S}}:=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{S}. \tag{9}$$

Now, in continuum mechanics the stress measures $\boldsymbol{S}$ and $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ are associated with the names, respectively, of G. Piola and E. & F. Cosserat; the latter, a symmetric tensor, is power-conjugate to the time rate of the strain measure $\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$, in a sense made precise by writing the macroscopic power expenditure per unit referential volume in the following alternative forms:

$$\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}=\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\dot{\boldsymbol{C}}.$$

We are then driven to write equation (9) as follows:

$$\boldsymbol{S}^{mic}=\boldsymbol{S}^{mac}, \tag{10}$$

where $\boldsymbol{S}^{mac}\equiv\widetilde{\boldsymbol{S}}$ is the *macroscopic stress* and the *microscopic stress* is defined to be:

$$\boldsymbol{S}^{mic}:=\frac{1}{\Omega_{ref}}\sum_{I=1}^{N}\sum_{J>I}^{N}\frac{1}{r_{IJ}}\widehat{\Phi}'(r_{IJ})(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)\otimes(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J). \tag{11}$$

Moreover, the constitutive equation for an elastic material can be given in terms of its stored-energy mapping $\boldsymbol{C}\mapsto\Psi=\widehat{\Psi}(\boldsymbol{C})$ per unit referential volume:

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}=\partial_{\boldsymbol{C}}\widehat{\Psi}(\boldsymbol{C}).$$

On recalling that

$$\Phi=\widehat{\Phi}(|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)|),$$

With this, we deduce from equations (10) and (11) the following *coherency condition* between the microscopic intermolecular potential $\widehat{\Phi}$ and the macroscopic stored-energy mapping $\widehat{\Psi}$:

$$\sum_{I=1}^{N}\sum_{J>I}^{N} \widehat{\phi}_{IJ}(\boldsymbol{s}_I;\boldsymbol{F})(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)\otimes(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J) = \partial_{\boldsymbol{C}}\widehat{\Psi}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}), \quad \text{forall } \boldsymbol{F}, \quad (12)$$

where

$$\widehat{\phi}_{IJ}(\boldsymbol{s}_I;\boldsymbol{F}) := \frac{1}{\Omega_{ref}}\frac{1}{|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)|}\widehat{\Phi}'(|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}_I-\boldsymbol{s}_J)|). \quad (13)$$

The many implications of this coherency condition should be scrutinized carefully. Basically, given an intermolecular potential, one would like to characterize a consistent class of stored energies; conversely, given a class of stored energies, one would like to characterize all consistent intermolecular potentials.

Take, e.g., two well known examples of assignment of $\widehat{\Phi}$ and a representative assignment of $\widehat{\Psi}$, respectively:

$$(Lennard-Jones)\quad \widehat{\Phi}^{LJ}(r) = r^{-12}-r^{-6},$$

$$(Morse)\quad \widehat{\Phi}^{M}(r) = \exp(-2(r-1))-\exp(-(r-1));$$

($r>0$, $r=1$ in the reference configuration; these potentials are here stripped to the bone, in that they have been normalized and possible cut-off multipliers have been omitted) and

$$(Ciarlet-Geymonat)\quad \widehat{\Psi}^{CG}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}) = \alpha_1\,\mathrm{tr}\boldsymbol{C}+\alpha_2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{C}^{-1}+\psi(\det\boldsymbol{C}),$$

where

$$\psi(\delta) = \alpha_3\delta-\frac{1}{2}\alpha_4\log\delta,\quad \alpha_i>0.$$

Both $\widehat{\Phi}^{LJ}$ and $\widehat{\Phi}^{M}$ model *attraction/repulsion*, in that, as is easy to show, they both have one minimum and are convex before the only point where their second derivative vanishes, concave after. Likewise, the interest of $\widehat{\Psi}^{CG}$ is that it furnishes an explicit example of *polyconvex* and *polycoercive* stored-energy mapping, consistent with the *growth condition*

$$\widehat{\Psi}^{CG}(\boldsymbol{C})\to+\infty \quad \text{as} \quad \det\boldsymbol{C}\to 0+$$

(these qualitative and quantitative properties are essential to establish existence to the boundary-value problems of finite elasticity [3]). We pose:

Question1. Are such intermolecular potentials and stored-energy mappings coherent in the sense of condition (12)-(13)?

Moreover, with the use of (12)-(13) the *elasticity tensor*

$$\mathbb{A}^{mac} := \partial_{\boldsymbol{F}} \left(\boldsymbol{F}\, \partial_{\boldsymbol{C}} \widehat{\Psi}(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}) \right)|_{\boldsymbol{F}=\mathbf{1}_{ref}}$$

is expressible (and computable, on the basis of the information extractible from an MD run) as follows in terms of the intermolecular potential:

$$\mathbb{A}^{mac} = \mathbb{A}^{mic} := \sum_{I=1}^{N} \sum_{J>I}^{N} (\boldsymbol{s}_I - \boldsymbol{s}_J) \otimes (\boldsymbol{s}_I - \boldsymbol{s}_J) \otimes \partial_{\boldsymbol{F}} \widehat{\phi}_{IJ}(\boldsymbol{s}_I; \mathbf{1}_{ref}).$$

We then pose:

Question 2. Does this formula yield predictions consistent with those made in [11] on the basis of a completely different argument?

We will try and answer these questions in a forthcoming paper.

References

1. *N.C. Admal and E. Tadmor* A unified interpretation of stress in molecular systems.// J. Elasticity, 2010, Vol.100, pp.63–143.
2. *H.C. Andersen* Molecular dynamics simulations at constant pressure and/or temperature.// J.Chem.Phys., 1980, Vol.72, pp.2384–2393
3. *J.M. Ball* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity.// ARMA, 1977, Vol.63, pp.337–403.
4. *M.E. Lancia and P.Podio-Guidugli and G.Vergara Caffarelli* Null lagrangians in linear elasticity.// Math.Models and Methods in App.Sci., 1995, Vol.5, pp.415–427
5. *A.E.H. Love* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Dover Pub., 1927
6. R. Martonák and A. Laio and M. Parrinello Predicting crystal structures: the Parrinello–Rahman method revisited.// Phys. Rev. Letters, 2003, Vol.90(7).
7. *A.I. Murdoch* On molecular modeling and continuum concepts.// J. Elasticity, 2010, Vol.100, pp.33–61.
8. *W. Noll* Thoughts on the concept of stress.// J. Elasticity, 2010, Vol.100, pp.25–32.
9. *M. Parrinello and A. Rahman* Crystal structure and pair potentials: A molecular-dynamics study.// Phys.Rev.Letters, 1980, Vol.45, pp.1196–1199.
10. *M. Parrinello and A. Rahman* Polymorphic transitions in single crystals: A new molecular dynamics method.// J. Appl. Phys., 1981, Vol.52, pp.7182–7190.
11. *M. Parrinello and A. Rahman* Strain fluctuations and elastic constants.// J. Chem. Phys., 1982, Vol.76, pp.2662–2666.
12. *P. Podio-Guidugli* On Andersen–Parrinello–Rahman molecular dynamics, the related metadynamics, and the use of the Cauchy-Born rule.// J. Elasticity, 2010, Vol.100, pp.145–153
13. *I.Todhunter and K. Pearson* History of the Theory of Elasticity and of the Strenght of Materials from Galilei to the Present Time. Vol.1, Cambridge. 1986.
14. *C. Truesdell and R.A.Toupin* The classical field theories. In: Handbuch der Physik,III/1. Springer, Berlin, 1960.

СЕКЦИЯ II.

ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТЬ, РЕОЛОГИЯ, ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

ПРОДОЛЬНАЯ ТРЕЩИНА В ПРЕДНАПРЯЖЕННОМ НЕСЖИМАЕМОМ УПРУГОМ СЛОЕ С ШАРНИРНО ОПЕРТЫМИ ГРАНЯМИ.

В. М. Александров, Л. А. Костырева

Институт проблем механики РАН
Москва, Россия

alexandrov@ipmnet.ru

Рассмотрена задача о преднапряженном упругом несжимаемом физически нелинейном слое с шарнирно опертыми гранями, ослабленном продольной трещиной, расположенной симметрично относительно его граней. В начальном состоянии слой подвергнут большой деформации однородными усилиями, приложенными на бесконечности. Возмущение первоначального напряженно деформированного состояния создается равномерным давлением на берегах трещины. Принято, что возникающие дополнительные напряжения и перемещения малы на фоне основного напряженного состояния, что позволяет линеаризовать задачу. Впоследствии она сводится к решению интегрального уравнения, зависящего от двух безразмерных параметров, один из который характеризует относительную толщину слоя, а другой степень предварительного напряжения слоя. Для различных значений этих параметров построены асимптотическое и численное решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругий слой толщины $2h$ с продольной трещиной, расположенной симметрично относительно его граней. Считаем, что упругие свойства материала слоя задаются потенциалом Муни [1]. Слой находится в однородном напряженно деформированном состоянии, создаваемом растягивающими усилиями, приложенными на бесконечности. Выберем систему координат таким образом, чтобы сечение слоя располагалось в плоскости Oxy и ось Oy была перпендикулярна его граням, тогда слой занимает область $|x| < \infty$, $|y| \leqslant 2h$, $|z| < \infty$. Трещина определяется условиями $y = 0$, $|x| \leqslant a$, $|z| < \infty$. Предположим, что в начальном состоянии тензор напряжений имеет единственную отличную от нуля составляющую $\sigma_{11}^0 = s$.

Затем к берегам трещины прикладывается равномерное давление q. Предполагаем, что возникающие при этом дополнительные напряжения и деформации относительно малы, что позволяет линеаризовать задачу на фоне основного нелинейного напряженного состояния. Обозначим соответствующие компоненты дополнительных перемещений вдоль осей x и y через u и v. Тогда компоненты тензора дополнительных напряжений

имеют вид

$$\sigma_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad \sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \hat{q},$$

где $\hat{q}$ — дополнительное гидростатическое напряжение, μ — модуль сдвига. Уравнения Ламе в сочетании с условием несжимаемости составляют полную систему дифференциальных уравнений

$$\mu\triangle u - s\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \quad \mu\triangle v - s\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

Граничные условия для случая скользящей заделки

$$\begin{aligned} &y = \pm h: \quad v = 0, \quad \tau_{yx} = 0 \\ &y = 0: \quad \tau_{yx} = 0;\ \sigma_{yy} = -q \text{ при} |x| \leqslant a, \quad v = 0 \text{ при } |x| > a \end{aligned} \qquad (2)$$

2. Сведение задачи к интегральному уравнению. Рассмотрим вспомогательную задачу со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} &y = h: v = 0, \quad \tau_{yx} = 0; \\ &y = 0: \tau_{yx} = 0; \ \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} \gamma(x), & \text{при } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{при } |x| > a; \end{cases} \end{aligned} \qquad (3)$$

При помощи известной техники интегрального преобразования Фурье, примененной к системе (1) и граничным условиям (2), (3), после введения безразмерных величин

$$\xi' = \frac{\xi}{a}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}, \quad s' = \frac{s}{\mu}, \quad \varphi(\xi') = \gamma(\xi), \quad q' = \frac{2q}{\mu}$$

(в дальнейшем штрихи опускаем) придем к решению интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right) d\xi = -\pi\varepsilon q, \ |x| \leqslant 1; \quad K(t) = \int_0^{\infty} L(u)\sin(ut)du. \qquad (4)$$

3. Модифицированный метод Мультоппа-Каландии. Для функции $L(u)$ имеют место следующие асимптотические оценки:

$$L(u) = 1 + O(e^{-2u}), \ u \to \infty; \quad L(u) = \frac{4 - s}{u} + O(u), \ u \to 0. \qquad (5)$$

Согласно им ядро $K(t)$ интегрального уравнения (4) можно представить следующим образом:

$$K(t) = \frac{1}{t} + G(t),$$

где $G(t)$ – регулярная функция. При условии такого представления интегральное уравнение (4) приводится к виду

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\pi q - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) G\left(\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right) d\xi, \quad |x| \leqslant 1. \tag{6}$$

Можно показать, что его решение представимо в форме

$$\varphi(x) = \Phi(x) / \sqrt{1 - x^2}, \tag{7}$$

причем функция $\Phi(x)$ является по крайней мере непрерывной.

Для нахождения приближенного численного решения уравнения (6) (с учетом представления 7) построим интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\Phi(x)$ по чебышевским узлам [2]

$$x_n = \cos \vartheta_n; \ \vartheta_n = \frac{\pi(2n-1)}{2N} \ (n = 1, 2, \ldots, N).$$

Поскольку функция $G(t)$ нечетная, то можно взять $N = 2l + 2$.

$$\tilde{\Phi}(\vartheta) \approx \frac{1}{l+1} \sum_{n=1}^{l+1} \Phi(\vartheta_n) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{l} \cos 2m\vartheta_n \cos 2m\vartheta\right).$$

После подстановки полиномов в уравнение интегралы в левых частях вычисляются явным образом, а для нахождения интегралов правых частей можно воспользоваться квадратурной формулой Гаусса. Таким образом, при помощи метода коллокации, приходим к системе из $l + 1$ линейного алгебраического уравнения относительно значений $\tilde{\Phi}(\vartheta_n) = \Phi(\cos \vartheta_n)$.

$$\sum_{n=1}^{l+1} \tilde{\Phi}(\vartheta_n) \left\{ \varepsilon \left(1 + 2 \frac{\chi_l(\vartheta_n, \vartheta_k)}{\operatorname{tg} \vartheta_k}\right) + \frac{1}{2} \left[G\left(\frac{\cos \vartheta_n - \cos \vartheta_k}{\varepsilon}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + G\left(\frac{\cos \vartheta_n + \cos \vartheta_k}{\varepsilon}\right)\right]\right\} = (l+1)\, \varepsilon q\,, \ (k = 1, \ldots, l+1),$$

где $\chi_l(\psi, \vartheta) = \sum_{m=1}^{l} \cos 2m\psi \cos 2m\vartheta$.

4. Асимптотические решения при большой относительной толщине слоя. Вновь рассмотрим интегральное уравнение (6). Регулярная функция $G(t)$ разлагается в абсолютно сходящихся при $|t| < 2$ (следовательно, при $|\varepsilon| > 1$) степенной ряд [3], который имеют вид

$$G(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i+1}, \quad a_i = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \int_0^{\infty} [L(u) - 1] u^{2i+1} du. \tag{8}$$

Кроме того, будем искать решение уравнениz (6) в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\varepsilon^{-2n}. \tag{9}$$

Подставим выражения (8, 9) в (6) и, приравнивая члены при одинаковых степенях ε, придем к бесконечной системе последовательно решаемых интегральных уравнений относительно функций $\varphi_n(x)$. Приведем решение с точностью до членов порядка ε^{-8}.

$$\varphi(x) = -\frac{qx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1 - \frac{a_0}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^4}\left(\frac{3}{2}a_1\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{a_0^2}{4}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\varepsilon^6}\left\{\frac{5}{2}a_2\left(x^4 + x^2 - \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}a_0a_1\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{a_0^3}{8}\right\}\right].$$

В этой задаче интересно значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в вершине трещины (на ее продолжении). Воспользовавшись известной формулой $K = -\lim_{x\to 1}\varphi(x)\sqrt{1-x}$, получим с точностью до членов восьмого порядка

$$K = \frac{q}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{a_0}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}\left(\frac{a_0^2}{4} - \frac{9a_1}{8}\right) + \frac{1}{\varepsilon^6}\left(\frac{a_0}{8} + \frac{15a_0a_1}{16} - \frac{25a_2}{8}\right)\right].$$

5. Асимптотическое решение при малой относительной толщине слоя. Ограничимся построением главного члена асимптотики решения уравнения (4). При достаточно малых значениях ε решение полученного уравнения представляется в виде [3]

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}\left(\frac{1+x}{\varepsilon}\right) - \tilde{\varphi}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right),$$

где функция $\tilde{\varphi}(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\tau)K(\tau - t)d\tau = -\pi q.$$

Для построения аналитического решения аппроксимируем функцию $L(u)$ выражением

$$L^*(u) = \frac{u^2 + A^2}{u\sqrt{u^2 + B^2}}$$

Постоянные A и B подбираем таким образом, чтобы для функции $L^*(u)$ выполнялись те же оценки, что и для $L(u)$ в (5). Далее при помощи метода Винера-Хопфа [4,5] находим

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{q\sqrt{B}}{A}\left(\frac{e^{-At}}{\sqrt{\pi t}} + \sqrt{A-B}\ \mathrm{erf}\sqrt{(A-B)t}\right).$$

Тогда коэффициент интенсивности напряжений определяется следующим выражением:

$$K = \frac{q}{A}\sqrt{\frac{B\varepsilon}{\pi}}. \tag{10}$$

Ниже в таблице приведены значения величины K/q при различных значениях ε и s.

	Метод Мультоппа–Каландии				Асимптотические методы				
					малые ε			большие ε	
s	ε=0,5	1	2	4	0,5	1	2	2	4
0	0,271	0,372	0,529	0,646	0,282	0,399	0,564	0,601	0,659
0, 5	0,288	0,397	0,588	0,655	0,340	0,481	0,680	0,610	0,666
1	0,309	0,426	0,575	0,665	0,326	0,461	0,651	0,623	0,674
1,5	0,336	0,463	0,602	0,675	0,357	0,505	0,714	0,639	0,682
2	0,372	0,510	0,631	0,685	0,399	0,564	0,798	0,660	0,690

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 08-01-00003, 08-08-90033-Бел, 09-01-00004, 09-08-01141).

Литература

1. *Александров В.М., Филиппова Л.М.* Контактная задача для тяжелой полуплоскости // ПММ. 1980. Т.44. Вып.3. С.535–539.
2. *Александров В. М.* Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и Машиностроение. 1962. № 5. С.91–94.
3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 336 с.
4. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
5. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 467 с.

ОБ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЗАПОЛИМЕРИЗОВАННОГО ПУЧКА ИЗ ВОЛОКОН В ШЕЙКЕ

Алиев Г.Г.

Институт Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана
Баку, Азербайджан

gabil_aliyev@yahoo.com

В статье предложена модель механического деформирования заполимеризованного стержня из волокон в шейке с учетом сил взаимодействий с матрицей.

В статье предлагается модель деформирования заполимеризованного пучка в зоне шейки с учетом сил взаимодействий со связующим при следующих предположениях:

- площадь поперечного сечения пучка (оно принимается круговым) в зоне шейки является функцией продольной координаты x;

- уравнение контура шейки считается известным;

-толщина пучка такова, что радиальное напряжение σ_r в интервале $r \leqslant r_{пучка}$ изменяется незначительно.

При этих предположениях возникающие на границе боковой поверхности пучка нормальная ε_ν и касательная ε_τ деформации будут характеризовать деформированное состояние каждой внутренней точки заполимеризованного пучка. С другой стороны, деформаций ε_ν и ε_τ в точках границы заполимеризованного пучка со связующим вызывают соответствующие напряжения $\sigma_\nu = E_H(x)\lambda_\nu(x)\varepsilon_\nu$ и $\sigma_\tau = E_H(x)\lambda_\tau(x)\varepsilon_\tau$.

Отметим зависимости (см. рис. 1)

$$\varepsilon = \varepsilon_x\vec{\ell} + \varepsilon_y\vec{m} + \varepsilon_z\vec{n} = \varepsilon_\nu\vec{\nu} + \varepsilon_\tau\vec{\tau}$$

$$\vec{\nu} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha, \quad \vec{\tau} = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha,$$

Компоненты ε_x, ε_y, ε_z известным образом выражаются через тензор деформации ε_{ij} [1,2].

Из уравнения равновесия сил, действующих на элемент длины dx в зоне шейки с площадью поперечного сечения $dF(x)$ и боковой поверхностью $dL(x)$ предлагается зависимость нормального напряжения $\vec{\sigma}_H(x)$ от деформаций (рис. 1):

$$\sigma_H(x) = E_H(x)[\varepsilon_x + \lambda_\nu(x)\varepsilon_\nu + \lambda_\tau(x)\varepsilon_\tau] \qquad (1)$$

Здесь $E(x)$, $\lambda_\nu(x)$, $\lambda_\tau(x)$ - механические характеристики заполимеризованного стержня в зоне шейки; они зависят также от функции $f(x) = \dfrac{dL(x)}{dF(x)} = \dfrac{\ell}{2\eta}\dfrac{1}{x}$, в которой $\eta = \dfrac{\delta}{\ell}$ - отношение глубины шейки δ к ее длине ℓ. Эти механические характеристики определяются специальными экспериментами. Здесь $E(x)$, $\lambda_\nu(x)$, $\lambda_\tau(x)$ - механические характеристики заполимеризованного стержня в зоне шейки, которые зависят от продольной координаты x. Причем эти характеристики зависят также от отношения элементарной площади боковой поверхности $dL(x)$ к площади поперечного сечения $dF(x)$ заполимеризованного стержня вида $f(x) = \dfrac{dL(x)}{dF(x)} = \dfrac{\ell}{2\eta}\dfrac{1}{x}$; зависят также от параметра $\eta = \dfrac{\delta}{\ell}$, т.е. от отношения глубины шейки δ к ее длине ℓ. Эти механические характеристики определяются специальными экспериментами.

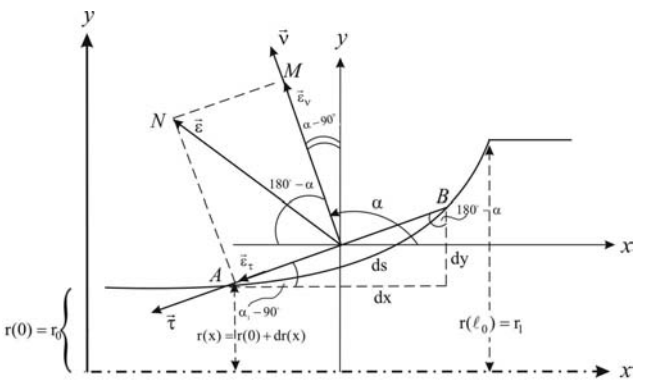


Рис. 1.

Изложим далее экспериментальный метод определения механических характеристик заполимеризованного стержня из волокон $E(x)$, $\lambda_\nu(x)$, $\lambda_\tau(x)$ в зоне шейки. Рассмотрим заполимеризованный в матрицу стержень, выполненный на основе волокнистой структуры, находящийся под действием растягивающей силы; при растяжении в стержне образуется шейка. Расположим систему координат в узком месте шейки с геометрическими параметрами: шейка длиной $2\ell_0$ при $x = 0$ имеет глубину δ_0. Предполагается также, что контур шейки известен и представляет собою часть окружности.

Предположим, что в точках $x = 0$ и $x = \ell_0$ значения продольного модуля стержня $E_H(0)$ и $E_H(\ell_0)$ известны. В этом случае зависимость модуля упругости $E_H(x)$ в любом сечении x шейки в зависимости от продольной координаты представится в виде:

$$\mathrm{E_H}(x) = \mathrm{E_H}(\ell_0)[1 + (\frac{\mathrm{E_H}(0)}{\mathrm{E_H}(\ell_0)} - 1)(1 - \frac{x}{\ell_0})] \qquad (2)$$

В силу малости влияния эффекта поперечного деформирования связующего в самой узкой части шейки $x = 0$ можно считать, что в плоскости $x = 0$ работают только волокна, направленные строго в продольном направлении. Поэтому за модуль упругости $E_H(0)$ можно принять модуль упругости одного волокна $E_H(0) = E_{вол.}$.

В формуле (1) коэффициент $\lambda_\nu(x)$характеризует эффект поперечного сужения $\lambda_\nu(x) = -\dfrac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_x} = -\dfrac{\vec{\varepsilon}_\nu \vec{\nu}}{\vec{\varepsilon}_x \vec{i}}$

Пусть даны численные значения этого параметра в точках $x = 0$ и $x = \ell_0$ – $\lambda_\nu(0)$ и $\lambda_\nu(\ell_0)$. Методика определения такого коэффициента $\lambda_\nu(\ell_0)$ была предложена в работе [3]. В качестве $\lambda_\nu(0)$ можно принять значение коэффициента Пуассона одного волокна $\lambda_\nu(вол.)$; в этом случае для коэффициента $\lambda_\nu(x)$ получим:

$$\lambda_\nu(x) = \lambda_\nu(вол.) + \frac{x}{\ell_0}[\lambda_\nu(\ell_0) - \lambda_\nu(вол.)]$$

В формуле (1) коэффициент $\lambda_\tau(x)$ характеризует сдвиговой эффект, возникающий между армирующей волокнистой структурой стержня и связующим материалом в зоне шейки. Поэтому механическую характеристику коэффициента $\lambda_\tau(x)$ можно интерпретировать как отношение модуля сдвига связующего материала G_c к продольному модулю упругости $E_H(x)$ заполимеризованного стержня:

$\lambda_\tau = \dfrac{G_c}{E_H(x)} = \dfrac{G_c}{E_H(\ell_0)[1 + (\dfrac{E_H(0)}{E_H(\ell_0)} - 1)(1 - \dfrac{x}{\ell_0})]}$ Таким образом, представлена экспериментальная методика для определения нормального напряжения $\sigma_H(x)$ в заполимеризованном стержне.

Литература

1. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. Физматгиз, 1959г.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. (Основы общей математической теории), М. 1963г.
3. *Алиев Г.Г.* Основы механики армированных гибких труб, Баку, Элм, 1987г.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ ТРУБКЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С УЧЕТОМ ЕЕ СУЖЕНИЯ

Р. Ю. Амензаде, Г. Ю. Мехтиева

Бакинский государственный университет
Баку, Республика Азербайджан

mexanika.bsu.az@mail.ru

В данной работе, на основе линейных усредненных уравнений, дается решение задачи гидроупругости, связанной с волновым течением вязкой жидкости, заключенной в вязко-упругую трубку конечной длины с учетом эффекта её сужения.

Предположим, что дана трубка длиной l. Принимается, что площадь её поперечного сечения S зависит от продольной координаты x и она жестко прикреплена к окружающей среде, вследствие чего смещение трубки в осевом направлении отсутствует. Жидкость считается однородной с плотностью ρ и динамическим коэффициентом вязкости μ [1]. Движение жидкости может быть представлено посредством осевой составляющей скорости $u(x,t)$, где t — время. В одномерной постановке считается, что давление $p = p(x,t)$, а радиальное смещение трубки $w = w(x,t)$. Для принятой математической модели "трубка-жидкость" выпишем замкнутую систему уравнений, которая имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(Su) + L\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{S(x)}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{8\mu}{\rho R^2(x)}Q = 0, \tag{2}$$

$$p = \frac{hE}{R^2(x)}\left\{ w - \int_{-\infty}^{t} \Gamma(t-\tau) w(x,\tau)\, d\tau \right\} + \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{3}$$

В приведенных выше уравнениях $Q(x,t)$ — расход жидкости, h — толщина трубки, $R(x)$ — её радиус, $L(x)$ — периметр поперечного сечения, ρ_* — плотность материала стенки, E — мгновенный модуль упругости, а $\Gamma(t-\tau)$ — разностное ядро релаксации [2].

Функцию $R(x)$ запишем как $R(x) = R_0 g(x)$, где $g(x)$ — положительная, дважды дифференцируемая монотонно убывающая функция

$\forall x \in [0, l]$ причем $g(0) = 1$. Тогда:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi R_0^2}{\rho} g^2(x) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{8\mu}{\rho R_0^2 g^2(x)} Q = 0, \\
&\frac{\partial Q}{\partial x} + 2\pi R_0 g(x) \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\
&p = \frac{hE}{R_0^2 g^2(x)} \left\{ w - \int_{-\infty}^{t} \Gamma(t-\tau) w(x,\tau)\, d\tau \right\} + \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Сведем систему (4) к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, полагая, что все переменные пропорциональны временному множителю $\exp(i\omega t)$, где ω задаваемое действительное значение частоты, т.е.

$$p = p_1(x) \exp(i\omega t), \quad Q = Q_1(x) \exp(i\omega t), \quad w = w_1(x) \exp(i\omega t). \tag{5}$$

Учитывая представления (5) и введя для краткости записи следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\alpha = \int_0^{\infty} \Gamma(\theta)\, e^{-i\omega\theta} d\theta \quad (\theta = t - \tau), \\
&\xi(x) = \frac{hE}{R_0^2 g^2(x)} (1 - \alpha) - \rho_* h \omega^2, \\
&\eta(x) = i\omega + \frac{8\mu}{\rho R_0^2 g^2(x)},
\end{aligned} \tag{6}$$

имеем:

$$p_1 = w_1 \xi(x), \quad \frac{\pi R_0^2 g^2(x)}{\rho} p_1' + \eta(x) Q_1 = 0, \quad Q' + 2\pi i \omega R_0 g(x) w_1 = 0.$$

Комбинируя эти уравнения, относительно функции p_1 получим:

$$p_1'' + \mu_1(x) p_1' + \mu_2(x) p_1 = 0, \tag{7}$$

где

$$\mu_1(x) = 2\frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{\eta'(x)}{\eta(x)}, \quad \mu_2(x) = -2i \frac{\rho\omega}{R_0 g(x)} \frac{\eta(x)}{\xi(x)}. \tag{8}$$

Замена Лиувилля $y(x) = p_1 \exp \frac{1}{2} \int \mu_1(x)\, dx = p_1 \lambda(x)$ приводит уравнение (7) к виду

$$y'' + I(x) y = 0 \tag{9}$$

при инварианте

$$I(x) = \mu_2(x) - \frac{1}{4} \{\mu_1(x)\}^2 - \frac{1}{2} \mu_1'(x). \tag{10}$$

Модифицируем уравнение (9), записав его следующим образом:

$$y'' + \delta^2 y = q(x)\, y. \tag{11}$$

Здесь $q(x) = \delta^2 - I(x)$, где δ — волновое число, при $R = R_0$ записываемое формулой

$$\delta^2 = -2i \frac{\rho\omega}{R_0} \left\{ i\omega + \frac{8\mu}{\rho R_0^2} \right\} \left\{ \frac{hE(1-\alpha)}{R_0^2} - \rho_* h\omega^2 \right\}^{-1}, \tag{12}$$

а на функцию $q(x)$ наложим условие интегрируемости

$$\int_0^l |q(x)|\, dx < +\infty. \tag{13}$$

Сформулируем граничные условия задачи. Пусть при $x = 0$ давление изменяется по закону $p(0,t) = \eta_0 \exp(i\omega t)$, а при $x = l$ равно $p(l,t) = \eta_l \exp(i\omega t)$, где η_0 и η_l — задаваемые опытные величины. Теперь сразу запишем $y(0) = \eta_0 \lambda(0)$, $y(l) = \eta_l \lambda(l)$. Таким образом, решение поставленной задачи удалось свести к решению регулярной краевой задаче типа Штурма–Лиувилля при условии (13)

$$y'' + \delta^2 y = q(x)\, y, \tag{14}$$

$$y(0) = \eta_0 \lambda(0), \quad y(l) = \eta_l \lambda(l). \tag{15}$$

Решение уравнения (14) сводится к эквивалентному интегральному уравнению

$$y(x,\delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \frac{1}{\delta} \int_x^l \sin\delta(m-x)\; q(m)\; y(m,\delta)\; dm, \tag{16}$$

в котором α_1 и α_2 постоянные интегрирования, подлежащие определению, исходя из граничных условий (15). Уравнение (16) можно решить методом последовательных приближений. Положим

$$y_0(x,\delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x}$$

и пусть для $n \geq 1$

$$y_n(x,\delta) = y_0(x,\delta) + \frac{1}{\delta} \int_x^l \sin\delta(m-x)\; q(m)\; y_{n-1}(m,\delta)\; dm.$$

В силу неравенства (13) по признаку Вейерштрасса из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что единственное решение интегрального уравнения (16), которое обозначим через $y(x, \delta)$, определяется посредством ряда

$$y(x, \delta) = y_0(x, \delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta)\}. \tag{17}$$

Обозначив $y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta) = (1/\delta^n)\varphi_n(x, \delta)$, дадим следующее представление ряда (17):

$$y(x, \delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \varphi_n(x, \delta). \tag{18}$$

Здесь имеем совокупность следующих рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \delta) &= \int_x^l \sin \delta (m - x)\, q(m)\, y_0(m, \delta)\, dm, \ \ldots \\ \varphi_n(x, \delta) &= \int_x^l \sin \delta (m - x)\, q(m)\, \varphi_{n-1}(m, \delta)\, dm. \end{aligned} \tag{19}$$

Основываясь на вышеизложенном, можно утверждать, что все решения уравнения (14) при любых α_1 и α_2 удовлетворяют уравнению (16). Непосредственной проверкой можно доказать обратное.

Исходя из граничных условий (15), имеем: $\alpha_1 = \dfrac{a e^{-i\delta l} - b}{e^{-i\delta l} - e^{i\delta l}}$, $\alpha_2 = \dfrac{b}{e^{-i\delta l} - e^{i\delta l}}$. Здесь $a = \eta_0 \lambda(0) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\delta^n} \varphi_n(0, \delta)$, а $b = \eta_l \lambda(l) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\delta^n} \varphi(l, \delta)$. Далее, используя формулу Эйлера, из (18) получим: $y(x, \delta) = \dfrac{a \sin \delta (l - x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\delta^n} \varphi_n(x, \delta)$. Из этого выражения, следуя формулам (4), окончательно можно определить искомые функции $p(x, t)$, $w(x, t)$ и $Q(x, t)$. Отметим, что физическую величину представляют действительные части полученных решений.

Оставляя в стороне влияние таких факторов, как вязкость материала трубки и жидкости, а также пренебрегая инерцией стенки, для оценки вклада, возникающего при учете эффекта сужения, приведем результаты вычислений для скорости волны. В этом приближении, оставляя прежние обозначения, из (6) имеем: $\xi = \dfrac{hE}{R_0^2 g^2(x)}$, $\eta = i\omega$, откуда, следуя (8), (10) и (12), запишем: $\mu_1 = 2\dfrac{g'(x)}{g(x)}$, $\mu_2 = \delta^2 g(x)$, где $\delta^2 = \dfrac{\omega^2}{c_0^2}$ $(c_0 = Eh/2\rho R_0)$,

а $I(x)=\delta^2 g(x)-\{g'(x)/g(x)\}^2-\{g'(x)/g(x)\}'$. Теперь конкретизируем вид функции $g(x)$, полагая $g(x)=e^{-\beta x}$ $(0<\beta<1)$, где β — размерный параметр, характеризующий конусообразное сужение трубки. Тогда формулу для скорости c запишем в форме $c/c_0=\delta/\left(\delta^2 e^{-\beta x}-\beta^2\right)^{-1}$, из которой можно заключить, что при фиксированном $\delta \ll 1$ с возрастанием β скорость волны возрастает. При этом для реализации волнового процесса необходимо выполнение нелинейного неравенства $\beta^2<\delta^2 e^{-\beta x}$. Последнее подразумевает достаточно плавное сужение трубки, для которой $\beta \ll 1$. На рисунке 1 представлены графики зависимости c/c_0 от β для выбранных параметров: $E=4\cdot 10^6 \frac{\text{дн}}{\text{см}^2}$, $R_0=2\,\text{см}$, $h=0,2\,\text{см}$, $\rho=1\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, $\omega=10\,\text{сек}^{-1}$. Отсюда следует, что c/c_0 увеличивается с увеличением β, причем весьма значительно.

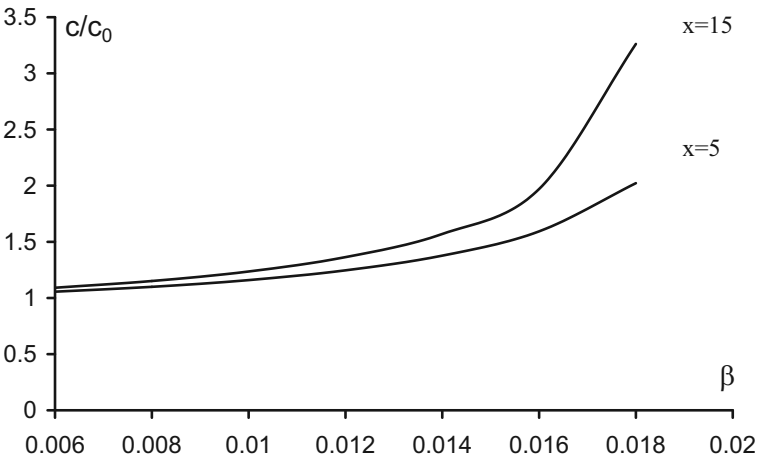


Рис. 1.

В заключение отметим, что для $\beta=0.018$ отношение радиусов поперечного сечения трубки $R(l)/R_0$ изменяется от 0.917 при $x=5\,\text{см}$ до 0.763 при $x=15\,\text{см}$.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: "Наука". 1977. 383 с.

О РАЗВИТИИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

В.И. Астафьев, Г.Д. Федорченко

Самарский государственный аэрокосмический университет
Самара, Россия

vlast@ssu.samara.ru

Выполнен асимптотический анализ решения задачи о росте трещины гидроразрыва пласта (ГРП) в автомодельной постановке, который показал, что рассмотрение полубесконечной трещины позволяет установить особенности поведения решения не только у вершины трещины, но и промежуточную асимптотику этого решения. Характер промежуточной асимптотики отличается от традиционного характера промежуточной асимптотики трещин в задачах линейной механики разрушения, что является результатом связанности задач гидромеханики вязкой жидкости и линейной теории упругости в случае трещин ГРП.

Гидравлический разрыв пласта (ГРП) представляет собой процесс закачки жидкости в пласт при давлении, превосходящем предел прочности породы, при котором происходит ее разрушение и образование трещины. Впервые модель вертикальной трещины ГРП в условиях плоской деформации (рис. 1.) была предложена в работе Ю.П. Желтова и С.А. Христиановича [1].

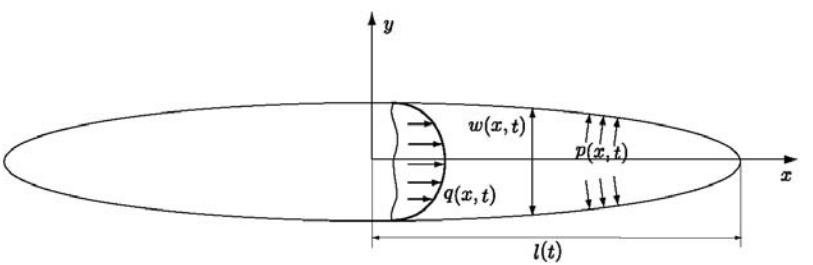


Рис. 1. Вертикальная трещина ГРП

Процесс развития такой трещины описывается следующими тремя уравнениями [2]:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial x}=-12\mu\frac{q}{w^3},$$
$$p(x,t)-p_0=-\frac{E}{2\pi(1-v^2)}\int\limits_0^{l(t)}\frac{\partial w(s,t)}{\partial s}\frac{sds}{s^2-x^2},\quad 0\leqslant x\leqslant l(t), \tag{1}$$

где $w(x,t)$ — раскрытие трещины, $q(x,t)$ — скорость потока жидкости в трещине, $p(x,t)$ — давление жидкости в трещине, μ — вязкость жидкости, p_0 — внешнее пластовое давление, E и v — упругие модули пласта, $l(t)$ — текущая длина трещины.

Начальным и граничными условиями для системы (1) будут следующие:

$$w(x,t)|_{t=0} = w_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l_0, \quad q(x,t)|_{x=0} = \frac{Q_0(t)}{2},\ t > 0, \qquad q(x,t)|_{x=l(t)} = 0,\ t > 0, \tag{2}$$

где $Q_0(t)$ — заданная скорость закачки. Для нахождения неизвестной текущей длины трещины $l(t)$ привлекается критерий линейной механики разрушения [3]:

$$K_I(t) = \frac{E}{4(1-v^2)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{x\to l(t)}\frac{w(x,t)}{\sqrt{l(t)-x}} = K_{IC}, \tag{3}$$

где $K_I(t)$ — коэффициент интенсивности напряжений в упругом пласте с трещиной длины $l(t)$, K_{IC} — трещиностойкость пласта.

Полное решение начально-краевой задачи с неизвестной границей (1)-(3) может быть выполнено только численно [2]. При асимптотическом анализе решения сложных начально-краевых задач часто прибегают к использованию автомодельных переменных. Подобный анализ различных автомодельных решений в задаче о развитии трещины ГРП был представлен в работе [4]. Ряд автомодельных решений был выполнен в работах [5, 6]. В настоящей работе автомодельное решение строится для полубесконечной трещины. В этом случае начало координат удобно поместить в вершину трещины (точка $x = l(t)$, $y = 0$), а ось ξ направить вдоль трещины в противоположном к оси x направлении. Тогда подвижная система координат (ξ, η) будет связана с неподвижной системой координат соотношениями $\xi = -x + l(t)$, $\eta = y$.

Уравнения (1) в случае $q(x,t) = q(\xi)$, $w(x,t) = w(\xi)$, $p(x,t) = p(\xi)$ примут вид:

$$\frac{dq}{d\xi} = V\frac{dw}{d\xi},\ \frac{dp}{d\xi} = 12\mu\frac{q(\xi)}{w^3(\xi)},\ p(\xi)-p_0 = -\frac{E}{4\pi(1-v^2)}\int_0^\infty \frac{dw}{ds}\frac{ds}{s-\xi} \tag{4}$$

где V — скорость движения трещины, а критерий распространения трещины (3) запишется как $\lim\limits_{\xi\to 0}\frac{w(\xi)}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4(1-v^2)}{E}K_{IC}$.

Приведем уравнения (4) к безразмерному виду. Обозначим $P = p_0$, $W = p_0 L/E'$, $L = 12\mu V E'^2/p_0^3$. Тогда безразмерные функции $\Pi = (p - p_0)/P$ и $\Omega = w/W$ будут зависеть от безразмерной переменной $\hat{\xi} = \xi/L$

и безразмерной трещиностойкости $k = 4\sqrt{2}K_{IC}/\sigma_0\sqrt{\pi L}$ следующим образом [5]:

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = \frac{1}{\Omega^2(\xi)}, \quad \Omega(\xi) = k\sqrt{\xi} + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty F(\xi,\eta)\,\Pi(\eta)\,d\eta, \tag{5}$$

где $F(\xi,\eta) = \ln\left|\frac{\sqrt{\xi}+\sqrt{\eta}}{\sqrt{\xi}-\sqrt{\eta}}\right| - 2\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$, а за переменной $\hat{\xi}$ сохранено прежнее обозначение ξ. Из системы (5) следует, что асимптотическое поведение функции $\Omega(\xi)$ при $\xi \to 0$ и $\xi \to \infty$ будет следующим: $\Omega(\xi) = \Omega_0(\xi) + o\left(\xi^{1/2}\right)$, $\Omega(\xi) = \Omega_\infty(\xi) + o(\xi^{2/3})$, где $\Omega_0(\xi) = k\sqrt{\xi}$, $\Omega_\infty = c\xi^{2/3}$, $c = (18\sqrt{3})^{1/3}$.

Учитывая, что $\Omega_\infty(\xi) = o(\xi^{1/2})$ при $\xi \to 0$, а $\Omega_0(\xi) = o(\xi^{2/3})$ при $\xi \to \infty$, можно записать приближенную аппроксимацию решения системы (5) во всем диапазоне изменения переменной ξ

$$\tilde{\Omega} = k\sqrt{\xi} + c\xi^{2/3}, \quad \tilde{\Pi}(\xi) = \int_\infty^\xi \frac{d\eta}{k^2\eta(1+\alpha\eta^{1/6})^2} = \frac{6}{k^2}\left(\ln\frac{\alpha t}{\alpha t+1} + \frac{1}{\alpha t+1}\right), \tag{6}$$

где $\alpha = c/k$; $\xi = t^6$.

Сравнение решения (6) с результатами численного анализа, выполненного в работе [2], показывает, что выражение (6) не описывает поведение $\Omega(\xi)$ в промежуточной области $0 < \xi < \infty$, где численное решение не соответствует ни асимптотике $\Omega_0(\xi)$, ни асимптотике $\Omega_\infty(\xi)$. С целью нахождения аналитического характера поведения решения $\Omega(\xi)$ в промежуточной области, будем искать решение $\Omega(\xi)$ и $\Pi(\xi)$ при $\xi \to 0$ в виде двухчленного представления: $\Omega(\xi) = k\sqrt{\xi} + \Omega_1(\xi)$, $\Pi(\xi) = \frac{\ln\xi}{k^2} + \Pi_1(\xi)$.

Подставляя эти представления в основные уравнения (5), для функций $\Omega_1(\xi)$ и $\Pi_1(\xi)$ получаем следующие уравнения:

$$\frac{d\Pi_1}{d\xi} = -\frac{2\Omega_1(\xi)}{k\sqrt{\xi}}, \quad \frac{d\Omega_1}{d\xi} = -\frac{4}{\pi k^2}\int_0^\infty \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\,\frac{\ln\eta + k^2\Pi_1(\eta)}{\xi-\eta}\,d\eta. \tag{7}$$

Из системы (7) получается, что промежуточная асимптотика для $\Omega(\xi)$ будет иметь вид $\Omega_1(\xi) = a\xi$, где $a = \frac{4\pi}{k^2}$, что отличает её от традиционной асимптотики $\Omega_1(\xi) = O(\xi^{3/2})$ линейной механики разрушения [3]. Величина $\Pi_1(\xi)$ в этом случае будет иметь вид $\Pi_1(\xi) = -\frac{4a}{k^3}\sqrt{\xi}$.

Построим приближенную аналитическую аппроксимацию решения $\Omega(\xi)$, $\Pi(\xi)$, имеющего асимптотики (7) при $\xi \to 0$ и $\Omega_\infty(\xi)$, $\Pi_\infty(\xi)$ при $\xi \to \infty$. В этом случае аппроксимация решения будет иметь вид:

$$\tilde{\Omega}(\xi) = k\sqrt{\xi} + \frac{a\xi}{1 + \frac{a}{c}\xi^{1/3}}, \quad \tilde{\Pi} = \int_\infty^\xi \frac{d\eta}{\tilde{\Omega}^2(\eta)} = \int_\infty^\xi \frac{d\eta}{(k\sqrt{\eta} + \frac{ac\eta}{a\eta^{1/3} + c})^2} \quad (8)$$

Графики зависимостей $\tilde{\Omega}(\xi)$ и $\tilde{\Pi}(\xi)$представлены на рис. 2 и 3. Сравнение этих зависимостей с численным решением [2] показывает их полное соответствие, т.е. представление (8) достаточно точно аппроксимирует поведение решения (6) во всем диапазоне изменения автомодельной переменной $0 < \xi < \infty$.

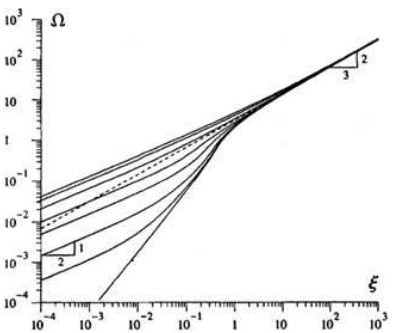


Рис. 2. График зависимости $\tilde{\Omega}(\xi)$

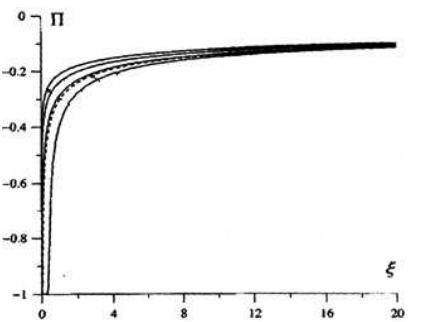


Рис. 3. График зависимости $\tilde{\Pi}(\xi)$

Литература

1. *Желтов, Ю.П.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. // Изв. АН СССР. ОТН. – 1955. №5. С. 3–41.
2. *Garagash, D.* The tip region of a fluid – driven fracture in an elastic medium. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2000. Vol.67. P. 183–192.
3. *Черепанов, Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
4. *Пергамент А.Х., Улькин Д.А.* Автомодельные асимптотики в задаче о распространении трещины гидроразрыва в плоско-деформированной среде // Препринт института прикладной математики им М. В. Келдыша РАН. Москва, 2007. 30 с.
5. *Garagash D., Detournay E.* Similary solution of a semi-infinite fluid-driven fracture in a linear elastic solid // C.R. Acad. Sci. Paris. 1998 . V.326. Ser.2. P. 285–292.
6. *Астафьев В.И., Федорченко Г.Д.* Автомодельное решение задачи о развитии трещины гидроразрыва пласта // Вестник СамГУ. 2007. №4 (54). с. 24–41.

ТРЕЩИНЫ В РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ ДИЛАТИРУЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛАХ

А.В. Березин

ИМАШ РАН
Москва, Россия
berezin@imash.ru

Рассмотрена механика разрушения дилатирующих разносопротивляющихся сред, к которым относятся керамические материалы, огнеупоры, горные породы, графитовые материалы и др. Приведено точное решение нелинейной задачи об определении коэффициента интенсивности напряжений для трещины нормального разрыва при обобщенном плоском напряженном состоянии. Разработаны итерационные схемы решения краевых нелинейных задач об определении коэффициентов интенсивности для трещин видов I, II, III. Доказаны сходимость метода последовательных приближений в задачах механики разрушения и расчеты траектории трещин при различных условиях нагружения.

1. Рассмотрим упругий потенциал в виде $\Phi = 1/2\alpha\sigma_i^2\varphi(\sigma_0/\sigma_i) + 1/2\sigma_0\alpha_1$, где σ_i — интенсивность тензора напряжений, σ_0 — шаровая часть тензора напряжений. Связь между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\alpha\omega(u)\overline{\sigma_{ij}} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\{\alpha_1\sigma_0 + \alpha\sigma_0\frac{[\varphi^2(u) - \omega(u)]}{u}\} \qquad (1)$$

где ε_{ij} — тензор малых деформаций; $\bar{\sigma}_{ij}$-девиатор тензора напряжений; α, α_1 — постоянные; $u = \sigma_0/\sigma_i\omega(u)$ — функция разномодульности;

$$\phi^2(u) = -2u^2\int \omega(u)/u^3\,du$$

δ_{ij} — тензор Кронекера.

Соотношениями (1) описывается поведение графитовых материалов при пропорциональном нагружении и при умеренных нагрузках [1, 2] и достаточно широкий класс горных пород .

Распределение напряжений и деформаций по r (r — расстояние от конца выреза или трещины) около вырезов и трещин в материалах, связь между напряжениями и деформациями которых дается (1), не зависит от функции $\phi = \phi(\sigma_0/\sigma_i)$, $\omega = \omega(\sigma_0/\sigma_i)$ и будет таким же, как и в случае $\phi = 1$, $\omega = 1$. Доказательство приведено в [2]. Таким образом, функция напряжений у вершины трещины или вырезов в плоской задаче имеет вид $\chi(r, \theta) = r^{3/2} f(\theta)$.

В этом случае распределение напряжений у конца трещины для материалов, связь между напряжениями и деформациями которых задается в виде (1), совпадает с распределением у конца трещины в линейной теории упругости при плоском напряженном состоянии. Деформации описываются по формулам (1) через напряжения, выраженные через функцию напряжений .

При плоском напряженном состоянии для трещины нормального разрыва длиной $2l$: $\sigma_{22} = p_0$

$$K_x = p_0\sqrt{2\pi l} \tag{2}$$

а распределение напряжений совпадает с распределением напряжений около конца трещины в классической теории упругости [2]. Учитывая (2), получим скорость освобождения энергии при продвижении трещины нормального разрыва при обобщенном плоском напряженном состоянии

$$G_I = (\alpha + \frac{\alpha_1}{9} + 0,78\alpha\delta)lp_0^2\pi > G_I^{cl} = (\alpha + \frac{\alpha_1}{9}lp_0^2\pi)\,. \tag{3}$$

Аналогично решается задача о распределении напряжений и деформаций в телах с трещинами при условиях плоской деформации. Для трещин нормального разрыва длиной $2l$ в условиях плоской деформации, которые реализуются в толстых образцах аналогично

$$G_{lc}^{(1)} = \pi K_1^2\left\{1 + \frac{3(3-C_1)+C_2\alpha\delta}{16D_0(u^{(0)})}\left[\frac{1}{2} + \frac{(9\alpha-8\alpha_1)}{4(9\alpha+\alpha_1)}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha}{u^{(0)2}}\right)\right]\right\}\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{3\alpha(\alpha_1+2,25\alpha)}{9\alpha+\alpha_1} + 18,45\alpha\delta - \frac{(9\alpha-2\alpha_1)\delta}{9\alpha+\alpha_1}(3,97\alpha-1,57\alpha_1)\right] >$$
$$> G_1^{cl} = \frac{3}{4}\left(\alpha + \frac{3\alpha\alpha_1}{9\alpha+\alpha_1}\right)\pi p_0^2 l \tag{4}$$

Для исследования разрушения по виду III рассмотрим бесконечное тело с трещиной длины $2l$, а на бесконечности задано напряжение $\sigma_{23} = \tau_0$, $\sigma_{13} = 0$.

Трещина занимает отрезок действительной оси и берега трещины свободны от напряжений. В [4] показано, что

$$K_I^{(1)} = \frac{17.77\alpha - 11.2\alpha_1}{4\alpha_1+\alpha}\chi\sqrt{l\pi}\tau_0, \quad K_{III}^{(0)} = \tau_0\sqrt{l\pi}\,. \tag{5}$$

Таким образом при действии касательных напряжений на бесконечности в области конца трещины кроме смещений по виду III присутствуют и смещения берегов трещины, соответствующие виду I деформирования.

В [3] показано, что для сходимости последовательных приближений должно выполняться неравенство

$$\delta \leqslant 0,63 + 0,44\frac{\alpha_1}{\alpha}. \tag{6}$$

Расчеты показывают, что при $\alpha = 0,9 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$, $\alpha_1 = 1,53 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$ из (6) следует $\delta \leqslant 2,33$, а экспериментальное значение параметра $\delta = 0,3$ [2]. Тогда сходимость итерационного процесса заведомо обеспечена.

Для трещины поперечного сдвига в [4] получена итерационная схема решения и выписано первое приближение для напряжений. Также доказана сходимость итерационного процесса и выписаны значения параметров задачи при которых сходимость обеспечивается. Для трещины продольного сдвига в [4] выписан итерационный процесс деформационной формулировки задачи механики разрушения, доказано существование решения этой задачи и получены оценки параметров сходимости этого метода и показано, что четырех итераций достаточно для достижения точности порядка 1%.

В механике разрушения тел с трещинами в общем случае деформации в окрестности произвольной точки контура трещины представляются в виде суммы трех частных видов деформаций, соответствующих трем видам относительных перемещений берегов трещины: нормальный отрыв (вид I), поперечный (вид II) и продольный (вид III) сдвиги. Вид I связан со смещением берегов трещины во взаимно противоположных направлениях по нормали к поверхности трещины. Вид II соответствует смещениям, при которых поверхности трещины скользят друг по другу перпендикулярно фронту трещины. Вид III соответствует скольжению поверхностей трещины параллельно фронту трещины. При любом относительном смещении U берегов трещины выполняется равенство $U = U_I + U_{II} + U_{III}$.

По этой причине в нелинейной механике разрушения (и для дилатирующих разномодульных сред) основными являются задачи определения трех видов относительных смещений берегов трещин, задающих локальные деформации в окрестности кончика трещины, при заданном напряженном состоянии тела с трещиной. Учитывая (2) и представление напряжений и деформаций в окрестности конца трещины аналогично линейной механике разрушения тел с трещинами [3], введем коэффициенты интенсивности напряжений, соответствующие трем видам относительных смещений берегов трещины: K_I — нормальный отрыв, K_{II} — поперечный сдвиг, K_{III} — продольный сдвиг. Вычисление соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений и скоростей освобождения энергии при распространении трещины при заданном напряженно-деформированном состоянии тела с трещинами опре-

деляют задачи механики разрушения, так как их вычисление определяет локальное напряженно-деформированное состояние в области конца трещины. Если задан локальный критерий разрушения, выраженный через K_I, K_{II}, K_{III}, то определяется склонность тела к разрушению. Каждому виду разрушения соответствует определенное напряженно-деформированное состояние в дилатирующих разномодульных средах. Получено, что при действии касательных напряжений на бесконечности в конце трещины кроме смещений по виду III присутствуют и смещения берегов трещины, соответствующие виду I деформирования. Отсюда, чтобы получить вид III разрушения, необходимо соответствующим образом подобрать сдвиговые и нормальные напряжения в качестве граничных условий на бесконечности или выбрать соответствующие граничные условия на берегах трещины.

Метод последовательных приближений приводит к тому, что для коэффициентов интенсивности $K_ь K_и, K_ш$ в дилатирующих разномодульных средах справедливы следующие представления в n-м приближении:

$$K^{(n)}_{I,II,III} = K^{(n)}_{0,I,II,III,} + \delta K^{(n)}_{1,I,II,III} + \delta^2 K^{(n)}_{2,I,II,III} \cdots$$

где $K^{(n)}_0$ определяется из решений однородных уравнений для n-го приближения, но с соответственно измененными граничными условиями на берегах трещины.

Литература

1. *Березин А.В., Строков В.И., Барабанов В.Н.* Деформируемость и разрушение изотропных графитовых материалов // Конструкционные материалы на основе углерода. Вып.11. 1976. С.102–110.
2. *Березин А.В.* Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел. М.: Наука, 1990. 135 с.
3. *Березин А.В.* Механика разрушения дилтирующих разномодульных сред. Проблемы машиностроения и надежности машин.1997, № 1, С.59–70.
4. *Березин А.В., Пономарев П.Л.* Трещины поперечного и продольного сдвигов в разномодульных дилатирующих средах. Механика твердого тела. 2002 г.,№ 3, С.127–135

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО КОНУСА, УСЕЧЕННОГО ПО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

***Н.Д. Вайсфельд*[1], *Г.Я. Попов*[2], *В.В. Реут*[3]**

Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова
Одесса, Украина
[1]**vaysfeld@onu.edu.ua,** [2]**popov@onu.edu.ua,** [3]**reut@onu.edu.ua**

В работе решены задачи о напряженном состоянии упругого усеченного сферической поверхностью конуса с острием. Предполагается, что коническая поверхность либо жестко защемлена, либо находится в условиях гладкого контакта, сферическая поверхность находится под воздействием нагрузки. В первом случае применение нового интегрального преобразования по меридиальному углу сводит задачу в пространстве трансформант к векторной краевой задаче, приближенное решение которой строится с помощью аппарата матричной краевой задачи. Во втором случае с помощью нового интегрального преобразования по меридиальному углу получено точное решение поставленной задачи. Проведено сравнение полученных значений напряжений для обоих случаев и рассмотрены частные случаи задач.

Постановка задачи. Имеется упругий (G — модуль сдвига, μ — коэффициент Пуассона) круговой конус ($0 < r < a$, $0 < \theta < \omega$, $-\pi \leqslant \phi \leqslant \pi$), усеченный по сферической поверхности $r = a$, коническая поверхность $0 < r < a$, $\theta = \omega$, $-\pi \leqslant \phi \leqslant \pi$ которого либо защемлена, либо находится в условиях гладкого контакта. К торцу конуса $r = a$ приложена нормальная осесимметричная нагрузка $p(\theta)$. С учетом замены переменной $r = a\rho$ постановка задачи примет вид:

$$\begin{aligned}
&(\rho^2 u')' - 2u + \frac{1}{\mu_*}\frac{(\dot{u}\sin\theta)^{\cdot}}{\sin\theta} - \frac{\mu'}{\mu_*}\frac{(v\sin\theta)^{\cdot}}{\sin\theta} + \frac{\mu_0}{\mu_*}\rho\frac{(v'\sin\theta)^{\cdot}}{\sin\theta} = 0,\\
&(\rho^2 v')' + \mu_*\left(\frac{(\dot{v}\sin\theta)^{\cdot}}{\sin\theta} - \frac{v}{\sin^2\theta}\right) + \mu_0\rho\dot{u}' + 2\mu_*\dot{u} = 0,\\
&0 < \rho < 1,\ 0 < \theta < \omega
\end{aligned} \tag{1}$$

с граничными условиями на конической поверхности

$$u(\rho,\omega) = v(\rho,\omega) = 0, \quad 0 < \rho < 1, \tag{2}$$

$$\tau_{\rho\theta}(\rho,\omega) = 0, \quad v(\rho,\omega) = 0, \quad 0 < \rho < 1 \tag{3}$$

в случаях жесткого защемления и гладкого контакта соответственно, а также на сферической поверхности

$$\sigma_\rho(1,\theta) = -p(\theta), \quad \tau_{\rho\theta}(1,\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \omega, \tag{4}$$

где $u(\rho,\theta) = u_r(\frac{r}{a},\theta)$, $v(\rho,\theta) = u_\theta(\frac{r}{a},\theta)$ — физические компоненты вектора перемещений в сферической системе координат, $\mu_0 = (1-2\mu)^{-1}$, $\mu_* = 2(1-\mu)\mu_0$, $\mu' = \mu_0\mu_*^{-1}$, штрих обозначает производную по ρ, а точка в верхнем индексе обозначает производную по второй переменной θ. Требуется определить напряженно-деформированное состояние конуса.

Решение задачи для случая жесткого защемления конической поверхности. К уравнениям (1) применяются интегральные преобразования по переменной θ [1] соответственно

$$u_k(\rho) = \int_0^\omega P_{\nu_k}(\cos\theta)\sin\theta u(\rho,\theta)\,d\theta, \quad k = 0,1,2,... \tag{5}$$

$$v_k(\rho) = \int_0^\omega P^1_{\nu_k}(\cos\theta)\sin\theta v(\rho,\theta)\,d\theta, \quad k = 1,2,... \tag{6}$$

где $P_\nu(\cos\theta)$ — функция Лежандра, $P^1_\nu(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра 1-го порядка, $\nu = \nu_k$, $k = 0,1,2,...$ — корни трансцендентного уравнения: $P^1_\nu(\cos\omega) = 0$, $\nu = \nu_k$, $k = 0,1,2,...$

В трансформантах (3), (4) дифференциальные уравнения (1) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}&\left(\rho^2 u_k'(\rho)\right)' - 2u_k(\rho) - \frac{N_k}{\mu_*}u_k(\rho) + \frac{\mu'}{\mu_*}v_k(\rho) - \\ &\qquad -\frac{\mu_0}{\mu_*}\rho v_k'(\rho) + \frac{F_k(\rho)}{\mu_*} = 0, \\ &\left(\rho^2 v_k'(\rho)\right)' - \mu_* N_k v_k(\rho) + \mu_0\rho N_k u_k'(\rho) + 2\mu_* N_k u_k(\rho) = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $N_k = v_k(v_k+1)$, $F_k(\rho,\omega) = \sin\omega P_{\nu_k}(\cos\omega)\,\dot{u}(\rho,\omega)$. Введем в рассмотрение векторы и матрицы

$$\boldsymbol{y}_k(\rho) = (u_k(\rho), v_k(\rho))^T, \quad \boldsymbol{f}_k(\rho) = -\frac{P_{\nu_k}(\cos\omega)\sin\omega}{\mu_*}\left(\dot{u}(\rho,\omega), 0\right)^T,$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\mu_*} \\ N_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 - \dfrac{N_k}{\mu_*} & \dfrac{\mu'}{\mu_*} \\ 2\mu_* N_k & -\mu_* N_k. \end{pmatrix}$$

В этих обозначениях система уравнений в трансформантах запишется в виде векторного уравнения ($\boldsymbol{I}$ — единичная матрица)

$$\boldsymbol{I}\cdot\left[\rho^2 \boldsymbol{y}_k'(\rho)\right]' + \mu_0\rho\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{y}_k'(\rho) + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{y}_k(\rho) = \boldsymbol{f}_k(\rho),\ k=0,1,2,... \qquad (8)$$

Рассмотрим случай $k = 0$, который соответствует собственному значению $\nu_0 = 0$. В этом случае решение задачи строится непосредственно с помощью фундаментальной функции:

$$u_0(\rho) = \frac{-Ap_0}{1+\mu}\rho - \frac{2}{3}\frac{(2\mu-1)}{\mu+1}\rho\int_0^1 \xi F_0(\xi)\,d\xi - \frac{1}{3}\rho^2\int_0^1 \frac{F_0(\xi)}{\xi^2}d\xi + \\ + \frac{1}{3}\int_0^\rho \left(\frac{\xi}{\rho^2} - \frac{\rho}{\xi^2}\right) F_0(\xi)\,d\xi,$$

$$p_k = \int_0^\omega \sin\theta P_{\nu_k}(\cos\theta)\,p(\theta)\,d\theta, \quad A = \frac{a}{2G\mu_0}.$$

В случае $k > 0$ решение уравнения (8) строится с помощью фундаментальной матрицы $\boldsymbol{\Phi}(x)$ [2] по схеме работы [1]

$$u_k(\rho) = \int_0^1 \Phi_{00}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{f_k^1(r)}{r}dr + Y_{00}(\rho)\,C_0^{(k)} + Y_{01}(\rho)\,C_1^{(k)}$$

$$v_k(\rho) = \int_0^1 \Phi_{10}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{f_k^1(r)}{r}dr + Y_{10}(\rho)\,C_0^{(k)} + Y_{11}(\rho)\,C_1^{(k)}, \qquad (9)$$

$$f_k^1(r) = \frac{-P_{\nu_k}(\cos\omega)\sin\omega}{\mu_*}\dot{u}(r,\omega).$$

Здесь $Y_{ij}(r),\ i,j = \overline{0,1}$ — элементы матрицы $\boldsymbol{Y}(r)$ — регулярного решения матричной фундаментальной системы решений, $\boldsymbol{C} = \left(C_0^{(k)}, C_1^{(k)}\right)^T$ — вектор неизвестных постоянных, которые определяются из краевых условий задачи. Примененение обратных интегральных преобразований [1] к трансформантам (9) завершит построение смещений $u(\rho,\theta), v(\rho,\theta)$, если будет определена неизвестная функция $\dot{u}(\rho,\omega)$, которую разыщем удовлетворив требование $u(\rho,\omega) = 0$, что приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^1 \frac{\chi(r)}{r}\Omega\left(\frac{r}{\rho}\right)dr = f(\rho), \quad \chi(\rho) = \dot{u}(\rho,\omega)$$

Для решения полученного интегрального уравнения установлен характер особенностей неизвестной функции $\chi(\rho)$ на концах промежутка интегрирования$\rho = 0$ и $\rho = 1$. Это позволяет искать решение уравнения в

виде ряда по многочленам Якоби. Дальнейшая ортогонализация системы проведена по системе функций $\left\{P_n^{\alpha,\beta}(1-2r)\right\}$, где $P_n^{\alpha,\beta}(z)$ - многочлены Якоби. Решение бесконечной системы методом редукции позволило найти неизвестные коэффициенты разложения, что и завершило решение поставленной задачи.

Точное решение задачи для случая скользящей заделки на конической поверхности. Это решение является частным случаем ($\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$ и $a = 0$, $b = a$) решения, полученного в работе [3], где следует совершить предельный переход к $a \to 0$, $\omega_0 \to 0$. Однако оказалось проще решить эту задачу непосредственно. Чтобы удовлетворить граничным условиям (3) достаточно потребовать согласно формулам (8), (9) из [3] выполнения равенств $\dot{\Phi}(\rho,\omega) = 0$, $\dot{\Psi}(\rho,\omega) = 0$. Эти условия будут выполнены автоматически, если к уравнениям Лапласа применить интегральное преобразование [3]

$$\begin{bmatrix} \Phi_k(\rho) \\ \Psi_k(\rho) \end{bmatrix} = \int_0^{\omega} \begin{bmatrix} \Phi(\rho,\theta) \\ \Psi(\rho,\theta) \end{bmatrix} \sin\theta P_{\nu_k}^1(\cos\theta)d\theta$$

$\nu = \nu_k$, $k = 0,1,2,\ldots$ – корни уравнения $P_\nu^1(\cos\omega) = 0$. Записав общее решение полученных одномерных дифференциальных уравнений в трансформантах с учетом требования их регулярности в нуле, приходим к определению произвольных постоянных, что реализовано удовлетворением граничных условий (2). Зная трансформанты двух гармонических функций, согласно формул (7) – (9) из [3], построим трансформанты смещений и напряжений. Окончательное точное решение задачи получено, путем применения к вычисленным трансформантам смещений и напряжений обратного преобразования [3].

Поставленные задачи допускают различные частные случаи. Так, если угол раствора конуса равен $\omega = \pi/2$, то применив интегральное преобразование [3], получаем решение для полушара. В случае дважды усеченного сферическими поверхностями конуса ($r \in [a_0, a]$), получаем решение для сферического полукупола.

Литература

1. *Попов Г.Я.* Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усеченного кругового полого конуса// Прикл. мат. и мех. – 2000. – Т.64. вып.3 – С.431-467.
2. *Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд.Руан, 1999. 113 с.
3. *Попов Г.Я.* Об осесимметричных задачах теории упругости для усеченного полого конуса// Прикл. мат. и мех. – 2005. – Т. 69, вып.3 – С.458 – 468.

О НОВОМ ТИПЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В. В. Вакулюк

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

wakulyuk@gmail.com

Рассматривается интегральное представление нелинейной связи между напряжениями и деформациями в теории вязкоупругости, предложенное Б.Е. Победрей. Определяющие соотношения такого вида описывают эффект ускорения ползучести при немонотонном нагружении, наблюдаемый для некоторых материалов в опытах. Частным случаем нового представления будут известные соотношения линейной теории вязкоупругости. В качестве одного из упрощений изучаются соотношения для нестареющего материала в виде интегралов Стильтьеса. Подробно рассмотрен одномерный случай, и приводятся возможные обобщения для изотропного материала. Представлены обобщения, использующие теорию непрерывных цепных дробей. Дана постановка задач нелинейной теории вязкоупругости.

Наиболее общей формой записи физически нелинейных операторов вязкоупругой среды является кратно-интегральный ряд Вольтерры, выражающий компоненты тензора деформации через компоненты тензора напряжений во все моменты времени, соответствующие истории нагружения [1]:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \dots \int_0^t K^{(n)}_{iji_1j_1\dots i_nj_n}(t, \tau_1, \dots, \tau_n)\sigma_{i_1j_1}(\tau_1)\dots\sigma_{i_nj_n}(\tau_n)d\tau_1\dots d\tau_n, \tag{1}$$

Здесь $i, j = 1, 2, 3$, а суммирование по n может вестись не только до конечного N, но и до бесконечности. По повторяющимся индексам ведётся суммирование от 1 до 3. Все другие существующие теории вязкоупругости являются частным случаем этой. Однако при использовании указанных соотношений (1) возникают сложности либо с нахождением подынтегральных ядер ползучести (или релаксации в обратных соотношениях), либо (если мы ограничиваемся только простейшими частными случаями теории) с недостаточно точным описанием экспериментов. Поэтому на практике обычно применяются разложения вида (1) не более чем до трёхкратных интегралов ($N \leq 3$).

А.А. Ильюшин разработал и обосновал использование однократных интегральных представлений, в которых нелинейность описывалась за счёт введения специальных подынтегральных функций, зависящих от инвариантов тензоров напряжений и деформаций. Теория, основанная на таких предположениях, называется главной нелинейной теорией вязкоупругости. Несмотря на простоту, она обобщает некоторые известные теории вязкоупругости (Ю.Н. Работнова, В.В. Москвитина, Н.Х. Арутюняна и других).

Б.Е. Победря предложил использовать другой тип нелинейной связи между напряжениями и деформациями в теории вязкоупругости [2]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t A_{ijklmn}(t,\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)\left[\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} - \alpha\int_0^\tau \underset{\approx}{\boldsymbol{q}}(t,\xi)\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi)d\xi\right]^{-1}_{mn} d\tau, \qquad (2)$$

где $[\ \ ]^{-1}$ обозначает тензор, обратный тензору, заключённому в квадратные скобки. Здесь $A_{ijklmn}(t,\tau)$, $\underset{\approx}{\boldsymbol{q}}(t,\xi)$ — компоненты тензоров ядер релаксации шестого и четвёртого ранга соответственно, $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ — единичный тензор второго ранга, α — некоторый "малый параметр". Знак $\overset{2}{\otimes}$ — означает свёртку по паре индексов.

Частным случаем такого представления (при $\alpha = 0$) будут классические соотношения линейной теории вязкоупругости.

Для изотропной среды тензор $A_{ijklmn}(t,\tau)$ имеет три независимые компоненты, а тензор $\boldsymbol{q}_{mnpq}(t,\xi)$ — две [3].

В одномерном случае соотношения, обратные предложенным Б.Е. Победрей (2), можно представить в аналогичном виде [3].

Естественным обобщением предложенной зависимости (2) являются определяющие соотношения, использующие функциональные ряды, полученные в теории непрерывных (цепных) дробей [4]. Ограничимся для простоты одномерным случаем. Тогда соотношения, обобщающие зависимости (2) будут иметь вид:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \cfrac{K_0(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau}{1 - \int_0^t \cfrac{K_1(t-\tau_1)\sigma(\tau_1)d\tau_1}{\ddots \cfrac{}{\cdots 1 - \int_0^t \cfrac{K_{n-1}(t-\tau_{n-1})\sigma(\tau_{n-1})d\tau_{n-1}}{1 - \int_0^t K_n(t-\tau_n)\sigma(\tau_n)d\tau_n}}}}. \qquad (3)$$

Теория, основанная на соотношениях (3), будет эквивалентна одномерной, базирующейся на нелинейных соотношениях (1).

В качестве одного из упрощений теории, выдвинутой Б.Е. Победрей (2), предлагается использовать соотношения для нестареющего материала в виде интегралов Стилтьеса:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau)\left[1 - \alpha \int_0^\tau p_{mn}(t-\xi)d\sigma_{mn}(\xi)\right]^{-1} d\sigma_{kl}(\tau) \ . \qquad (4)$$

Тогда функцию ползучести $\Pi_{ijkl}(t-\tau)$ можно выбирать такой же, что и в линейной теории, а тензор $p_{mn}(t-\tau)$ будет отвечать за нелинейность материала.

Для простоты далее будем рассматривать изотропный случай.

Аналогично линейной теории вязкоупругости для компонент тензора ползучести возьмём:

$$\Pi_{ijkl}(t) = a(t)\delta_{ij}\delta_{kl} + b(t)\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\}.$$

Здесь δ_{ij} — дельта–функция Кронеккера. Разложим симметричные тензоры $p_{mn}(t)$, $\sigma_{mn}(t)$ на шаровую часть и девиатор:

$$p_{mn}(t) = p(t)\delta_{mn} + \tilde{p}_{mn}(t), \quad \sigma_{mn}(t) = \sigma(t)\delta_{mn} + s_{mn}(t), \qquad (5)$$
$$\text{где} \quad p(t) = \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\, p_{ij}(t), \quad \sigma(t) = \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}(t).$$

В общем случае нагружения (5) получим из (4) для тензора деформации:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t \frac{K(t-\tau)\delta_{ij}\, d\sigma(\tau)}{1 - \int_0^\tau p(t-\xi)d\sigma(\xi) - \int_0^\tau \tilde{p}_{mn}(t-\zeta)ds_{mn}(\zeta)} +$$
$$+ \int_0^t \frac{2b(t-\tau)ds_{ij}(\tau)}{1 - \int_0^\tau p(t-\xi)d\sigma(\xi) - \int_0^\tau \tilde{p}_{mn}(t-\zeta)ds_{mn}(\zeta)} \qquad (6)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой аналог шаровой части тензора, а второе — аналог девиатора.

В случае предположения об упругом поведении объёма $p(t) = 0$, $K(t) \equiv 3a(t) + 2b(t) = K^{-1} = \text{const}$ для малых $\sigma_{ij}(t)$ из (6), раскладывая в ряды, приближённо получим:

$$\begin{cases} \theta(t) = K^{-1}\sigma(t) \\ e_{ij}(t) = \int_0^t 2b(t-\tau)ds_{ij}(\tau) + \int_0^t \int_0^\tau 2b(t-\tau)\tilde{p}_{mn}(t-\zeta)ds_{mn}(\zeta)ds_{ij}(\tau) \end{cases} . \qquad (7)$$

Эти зависимости между шаровыми частями и девиаторами тензоров напряжений и деформаций соответствуют одному из частных случаев главной нелинейной теории ползучести [1].

Можно рассматривать и другие варианты определяющих соотношений типа (2), (4), например:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t \frac{K_{ijkl}(t,\tau)\sigma_{kl}(\tau)d\tau}{1 - \int_0^\tau p(t,\xi) f({}_1I_\sigma, {}_2I_\sigma)d\xi},$$

Здесь $f({}_1I_\sigma, {}_2I_\sigma)$ — функция от первых двух инвариантов тензора напряжений, а $p(t,\xi)$ — функция, отвечающая за нелинейность материала.

Выбрав определяющие соотношения подобного вида в одномерном случае, мы можем описать эффект ускорения ползучести при немонотонном нагружении [5].

Для решения задачи физически нелинейной теории вязкоупругости необходимо кроме выбора одного из представленных выше вариантов определяющих соотношений, добавить уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0\,,$$

где X_i — объёмные силы, соотношения Коши для малых деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

а также граничные условия на поверхности тела $\Sigma = \Sigma_\sigma + \Sigma_u$:

$$\sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_\sigma} = S_i, \quad u_i\big|_{\Sigma_u} = u_i^0.$$

Материальные функции в рассмотренных выше определяющих соотношениях можно определить используя алгоритм, предложенный Б.Е. Победрей [6], когда сначала при малых нагрузках, находясь в области линейной вязкоупругости, находим линейные функции объёмной и сдвиговой ползучести, а затем, считая их известными, находим нелинейные части при больших $\sigma_{ij}(t)$.

1. Литература

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
2. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
3. *Вакулюк В.В., Победря Б.Е.* О нелинейной теории вязкоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2005. №6. С. 49–55.
4. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985.
5. *Анисимов А.Б.* Об эффекте “ускорения ползучести” в теории вязкоупругости. // Вестник МГУ. 2006, №6.
6. *Победря Б.Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости. // Упругость и неупругость. Вып. 3. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. С. 95–173.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Г. Н. Головин

НИМИ
Москва, Россия

Работа выполнена с целью оценки точности теоретического решения задачи устойчивости цилиндрических оболочек [1], основанного на теории устойчивости упруго-пластических оболочек А.А. Ильюшина [2].

Схема использованных образцов дана на рис. 1.

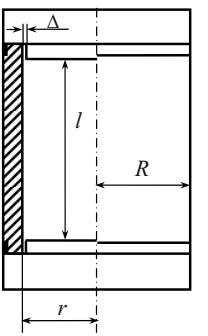


Рис. 1.

Для уменьшения влияния краевого эффекта на докритическое состояние оболочек между внутренней поверхностью цилиндров и опорной поверхностью донъев введен радиальный зазор Δ, равный максимальному упругому прогибу безмоментной оболочки. Благодаря этому перед потерей устойчивости образец полностью находился в пластическом состоянии.

Зависимости значений интенсивности напряжений σ_u от интенсивности деформаций ε_u (диаграммы 1–4 на рис. 2) строились осреднением результатов испытаний трех разрывных образцов, два из которых ориентированы в окружном направлении, один — в продольном.

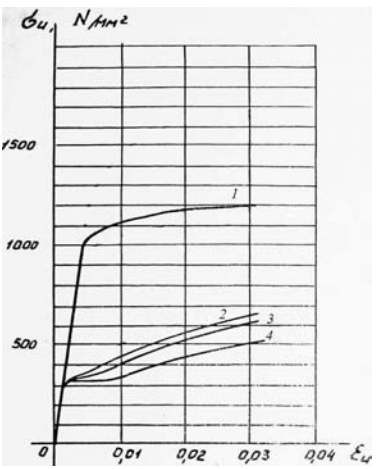


Рис. 2.

Образцы вырезались из цилиндрических заготовок, проходивших термическую обработку одновременно с исследуемыми оболочками. Принадлежность к той или иной диаграмме $\sigma_u \sim \sim \varepsilon_u$ (в пределах одной группы по уровню прочности) определялась с помощью пробы Бринелля. Нагружение всесторонним давлением производилось в камере высокого давления. При этом тензометрирование процесса осуществлялось с помощью константановых датчиков, наклеенных на внешнюю поверхность оболочки. Вид характерных осциллограмм приведен на рис. 3, 4. Здесь пунктирными линиями 4 и 5 обозначены расчетные значения кольцевой деформации $\varepsilon_2(R)$ на

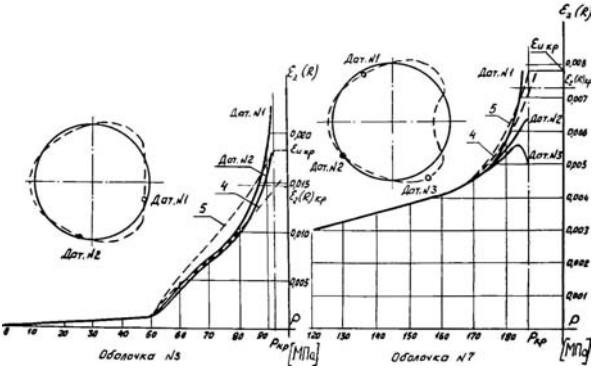


Рис. 3. Рис. 4

внешней поверхности и средней интенсивности деформаций $\varepsilon_{u_{\text{ср}}}$, соответственно.

Точка пересечения кривой 5 с линией $p = p_{кр}$ определяет экспериментальное значение критической деформации $\varepsilon_{u_{\text{кр}}}$.

Остальные кривые на рис. 3,4 обозначены в соответствии с номерами датчиков, по показанию которых они построены. Расположение датчиков дано на схеме остаточных прогибов.

Отметим, что при исследовании устойчивости за пределами упругости следует, прежде всего, оперировать величиной критической деформации $\varepsilon_{u_{\text{кр}}}$. Дело в том, что для материалов со слабым упрочнением в пластической области оценка устойчивости по величине критического давления приводит к большим погрешностям.

Тензометрирование показывает, что волнообразование начинается в докритической стадии. В ряде случаев удалось зафиксировать разгрузку материала оболочек в районе выпучин при возрастающей нагрузке рис. 4. Фотографии характерных образцов после испытаний даны на рис. 5.

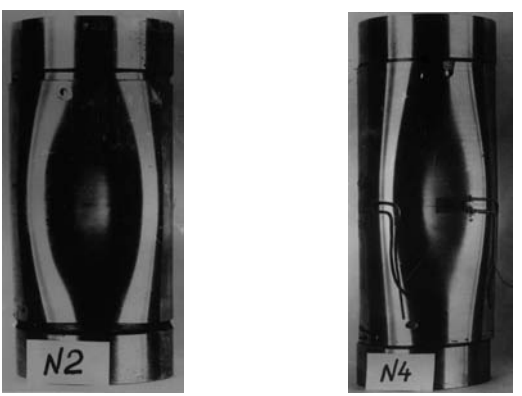


Рис. 5.

Результаты испытаний приведены в таблице 1. При этом приняты следующие обозначения:

$p_{кр}$ и $\varepsilon_{u_{кр}}$ — критические значении давления и интенсивности деформаций, определенные в эксперименте;

$\varepsilon_{u_{кр1}}$ — теоретическое значение критической интенсивности деформаций, определенное с учетом эффекта разгрузки [1];

$p_{кр2}$ — теоретическое значение критического давления, вычисленное по параметрам жесткости (касательному и секущему модулям), соответствующим экспериментальному значению $\varepsilon_{u_{кр}}$;

$\eta = p_{кр2}/p_{кр}$ — коэффициент, характеризующий точность теоретического решения;

$\varepsilon_{u_{кр3}}$ — значение критической интенсивности деформаций, вычисленное с использованием чисто пластического решения [3];

$h = R - r$ — толщина оболочки;

$a = (R + r)2$ — радиус срединной поверхности оболочки.

Таблица 1

№№ Обр.	№№ диаграммы $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ (рис.2)	h/a	$l/\pi a$	$p_{кр}$, Н/мм^2	$\varepsilon_{u_{кр}}$	$\varepsilon_{u_{кр1}}$	η	$\varepsilon_{u_{кр3}}$
1	3	0,148	0,95	101	0,0286	0,0284	0,99	0,0097
2	2	0,148	0,95	108	0,0287	0,0303	1,05	0,0098
3	2	0,147	1,27	92	0,0186	0,0224	1,04	0,0070
4	3	0,149	1,27	86	0,0195	0,0221	1,05	0,0070
5	4	0,148	1,27	76	0,0210	0,0223	1,07	0,0018
6	4	0,148	1,27	75	0,0207	0,0223	1,09	0,0018
7	1	0,148	0,95	187	0,0078	0,0086	1,12	0,0056
8	1	0,149	0,95	187	0,0070	0,0086	1,25	0,0056
9	1	0,185	0,95	237	0,0121	0,0117	0,98	0,0063

Данные таблицы 1 свидетельствуют о том, что решение, построенное на соотношении теории устойчивости оболочек А.А. Ильюшина [2] с учетом эффекта разгрузки, дает близкие к эксперименту результаты.

Чисто пластическое решение [3] существенно занижает величину критической интенсивности деформации.

Литература

1. *Головин Г.Н.* Учет влияния разгрузки на упруго-пластическую устойчивость оболочек // Известия АНСССР. Механика твердого тела. М., 1971.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.-Л., Гостехиздат, 1948.
3. *Григолюк Э.И.* Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости тонких оболочек за пределом упругости. Итоги науки. Сер. Механика. Упругость и пластичность. 1964. М., ВИНИТИ, 1966.

О КОЛЕБАНИЯХ В НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ

В.И. Горбачев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

vigorby@mail.ru

Рассмотрена интегральная формула, по которой решение начально-краевой задачи для трехмерного неоднородного тела представляется через решение такой же начально-краевой задачи для однородного тела. Из общей формулы получено интегральное представление решения задачи о продольных колебаниях неоднородного стержня с переменным поперечным сечением. Подробно рассмотрена задача о собственных частотах продольных колебаний стержня с переменными параметрами при заданных условиях опирания торцевых сечений.

1. Интегральная формула в динамической задаче для неоднородного упругого тела. В работе [1] была получена интегральная формула, связывающая решения однотипных начально-краевых задач для неоднородного и однородного упругих тел одной и той же формы и при одних и тех же входных данных[1]

$$u_k(x,t) = v_k(x,t) + \int_0^t d\tau \int_V \left[C^o_{mnij} - C_{mnij}(\xi)\right] \frac{\partial\, u^{[k]}_m(\xi, x, t-\tau)}{\partial \xi_n}\, v_{i,j}(\xi,\tau) dV_\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_V \left[\varrho^o - \varrho(\xi)\right] u^{[k]}_i(\xi, x, t-\tau)\, \ddot{v}_i(\xi,\tau)\, dV_\xi \qquad (1)$$

Здесь $u_k(x,t)$, $C_{ijkl}(x)$, $\varrho(x)$ и $v_k(x,t)$, C^o_{ijkl}, ϱ^o — компоненты вектора перемещений, компоненты тензора модулей упругости и плотность в исходной и сопутствующей задачах. $u^{[k]}_m(x,\xi,t-\tau)$ — компоненты тензора Грина [2] исходной начально краевой задачи для неоднородного тела. Формулу (1) можно использовать для конкретных расчетов, если известен тензор Грина и решение сопутствующей задачи. В сопутствующей задаче, прежде всего, нужно определиться в выборе свойств материала, например, для плотности ϱ^o можно принять среднее значение плотности $\varrho(x)$ по объёму тела, а в качестве коэффициентов C^o_{ijkl} — эффективные модули упругости неоднородного упругого тела в смысле Хашина-Штрикмана [3]. Возможны и другие варианты.

[1] Для краткости задача для неоднородного тела называется исходной задачей, а задача для однородного тела — сопутствующей задачей

В случае установившихся гармонических колебаний с частотой ω, из формулы (1) вытекает интегральная формула, связывающая амплитуды колебаний в исходной и сопутствующей задачах

$$\overset{*}{u}_k\ (x)=\overset{*}{v}_k\ (x)+\int\limits_V\left[\bar{C}_{mnij}(\xi)\frac{\partial\overset{*}{u}{}^{[k]}_m(\xi,x)}{\partial\xi_n}\ \overset{*}{v}_{i,j}\ (\xi)-\omega^2\bar{\varrho}(\xi)\ \overset{*}{u}{}^{[k]}_i(\xi,x)\ \overset{*}{v}_i\ (\xi)\right]dV_\xi\,, \tag{2}$$

где $\bar{C}_{mnij}(\xi)\equiv C^o_{mnij}-C_{mnij}(\xi)$, $\bar{\varrho}(\xi)\equiv\varrho^o-\varrho(\xi)$. Звездочками помечены амплитуды гармонических колебаний.

2. Случай продольных колебаний стержня. Уравнение технической теории продольных колебаний неоднородного стержня длины L с переменным поперечным сечением вытекает из теоремы об изменении количества движения массы вещества [4 стр. 121]. Уравнения исходной и сопутствующей задач о продольных колебаниях стержня имеет вид:

$$\Big(EFu'\Big)'-\varrho F\ddot{u}+p(x,t)=0\,,\qquad E_0F_0v''-\varrho_0F_0\ddot{v}+p(x,t)=0 \tag{3}$$

$E=E(x)$, $F=F(x)$ обозначают переменные по длине модуль Юнга и площадь поперечного сечения исходного стержня, а E_0, F_0 — постоянные модуль Юнга и площадь поперечного сечения сопутствующего стержня. Через $p(x,t)$ обозначена переменная по координате и времени продольная сила. К уравнениям (3) необходимо добавить одинаковые начальные условия и одинаковые условия на концах стержня.

Решение исходной задачи выражается через решение сопутствующей задачи по формуле вытекающей из общей зависимости (1), которую следует переписать для случая одной координаты. При этом $C(x)$ нужно заменить на $E(x)F(x)$, а $\varrho(x)$ на $\varrho(x)F(x)$

$$u(x,t)=v(x,t)+ \tag{4}$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^L\left[\overline{EF}(\xi)\frac{\partial G(\xi,x,t-\tau)}{\partial\xi}v'(\xi,\tau)+\overline{\varrho F}(\xi)G(\xi,x,t-\tau)\ddot{v}(\xi,\tau)\right]d\xi\,d\tau$$

Формула для установившихся продольных колебаний в стержне также следует из общего выражения (2)

$$\overset{*}{u}\ (x)=\overset{*}{v}\ (x)+$$
$$+\int\limits_0^L\overline{EF}(\xi)\frac{\partial\ \overset{*}{G}\ (\xi,x)}{\partial\xi}\ \overset{*}{v}\,'(\xi)\,d\xi-\omega^2\int\limits_0^L\overline{\varrho F}(\xi)\ \overset{*}{G}\ (\xi,x)\ \overset{*}{v}\ (\xi)d\xi \tag{5}$$

Амплитуды $\overset{*}{u}(x)$ и $\overset{*}{v}(x,\xi)$ удовлетворяют исходному и сопутствующему уравнениям Гельмгольца

$$\begin{gathered}\left[E(x)F(x)\,\overset{*}{u}{}'\right]' + \omega^2\varrho(x)F(x)\,\overset{*}{u} + \overset{*}{p}(x) = 0\,,\\ E_0F_0\,\overset{*}{v}{}'' + \omega^2\varrho_0F_0\,\overset{*}{v} + \overset{*}{p}(x) = 0\,,\end{gathered} \tag{6}$$

а $\overset{*}{G}(x,\xi)$ — непрерывная и симметричная по переменным x и ξ функция Грина исходного уравнения Гельмгольца

$$\left[E(x)F(x)\,\overset{*}{G}{}'(x,\xi)\right]' + \omega^2\varrho(x)F(x)\,\overset{*}{G}(x,\xi) + \delta(x-\xi) = 0 \tag{7}$$

В интегральной формуле (5) явно не присутствуют входные данные задачи. Следовательно, и при любых конкретных граничных условиях вид этой формулы не меняется. Она останется точно такой же и в случае представления общего решения исходного дифференциального уравнения через общее решение сопутствующего дифференциального уравнения. Кроме этого, подстановка выражения (5) в исходное уравнение (6) обращает левую часть уравнения в нуль независимо от того каковы условия на концах стержня. Эти соображения наводят на мысль о том, что функция Грина, присутствующая в интегральном представлении общих решений, не должна зависеть от типа краевой задачи. Для выделения единственной функции Грина, пригодной для представления общего решения исходной задачи, примем условия

$$\overset{*}{G}(0,\xi) = \overset{*}{G}(L,\xi)\,, \qquad \left\langle \overset{*}{G}(x,\xi)\right\rangle_x = 0\,, \tag{8}$$

где угловые скобки обозначают среднее значение функции по переменной x.

В интегральных представлениях (4) и (5) остаются неопределенными коэффициенты ϱ_0, E_0 и F_0. Вернее, не эти коэффициенты по отдельности, а произведения E_0F_0 и ϱ_0F_0. Если для функции Грина принять условия (8), то из самих интегральных представлений получаются следующие выражения для произведений коэффициентов:

$$\varrho_0F_0 = \langle\varrho F\rangle\,, \qquad E_0F_0 = \frac{1}{\langle 1/(EF)\rangle}\,, \tag{9}$$

Отметим, что из двух соотношений (9) нельзя единственным образом определить три величины ϱ_0, E_0 и F_0 по отдельности.[2]

[2]Приведём два возможных варианта выхода из этой ситуации Пусть $\varrho_0 = \langle\varrho\rangle$, тогда $F_0 = \dfrac{\langle\varrho F\rangle}{\langle\varrho\rangle}$, $E_0 = \dfrac{\langle\varrho\rangle}{\langle 1/EF\rangle\langle\varrho F\rangle}$. Пусть $E_0 = \dfrac{1}{\langle 1/E\rangle}$, тогда $F_0 = \dfrac{\langle 1/E\rangle}{\langle 1/EF\rangle}$, $\varrho_0 = \dfrac{\langle\varrho F\rangle\langle 1/EF\rangle}{\langle 1/E\rangle}$.

3. Разложение функции Грина в ряд по частоте установившихся колебаний. В формуле (5) функция Грина, как видно из уравнения (7), зависит от ω^2. Представим её в виде ряда

$$\overset{*}{G}(x,\xi,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\omega^{2n}\overset{*}{G}_{2n}(x,\xi), \tag{10}$$

где коэффициенты $\overset{*}{G}_{2n}(x,\xi)$ уже не зависят от ω. Подстановка ряда (10) в уравнение (7) и последующее приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ω в левой и правой частях даёт последовательность рекуррентных уравнений для функций $\overset{*}{G}_{2n}(x,\xi)$

$$\begin{gathered}\left[EF\,\overset{*}{G}_0{}'(x,\xi)\right]'=-\delta(x-\xi),\\ \left[EF\,\overset{*}{G}_{2n}'(x,\xi)\right]'=-\varrho F\,\overset{*}{G}_{2(n-1)}(x,\xi)\quad(n>0)\end{gathered} \tag{11}$$

Уравнения (11) легко интегрируются в общем виде с точностью до двух произвольных функций от переменной ξ, которые находятся из условий (8)

$$\begin{aligned}G_0(x,\xi)=\frac{1}{\langle 1/(EF)\rangle}\left\langle\frac{h(y-\xi)}{E(y)F(y)}\right\rangle\left[\int_0^x\frac{dy}{E(y)F(y)}-\left\langle\frac{L-y}{E(y)F(y)}\right\rangle\right]-\\ -\int_0^x\frac{h(y-\xi)}{E(y)F(y)}dy+\left\langle\frac{(L-y)h(y-\xi)}{E(y)F(y)}\right\rangle\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}G_{2n}(x,\xi)=\frac{1}{\langle 1/(EF)\rangle}\left\langle\frac{1}{E(z)F(z)}\int_0^z\varrho(y)F(y)G_{2(n-1)}(y,\xi)dy\right\rangle\cdot\\ \cdot\left[\int_0^x\frac{dy}{E(y)F(y)}-\left\langle\frac{L-y}{E(y)F(y)}\right\rangle\right]-\int_0^x\frac{dz}{E(z)F(z)}\int_0^z\varrho(y)F(y)G_{2(n-1)}(y,\xi)dy+\\ +\left\langle\frac{L-z}{E(z)F(z)}\int_0^z\varrho(y)F(y)G_{2(n-1)}(y,\xi)dy\right\rangle\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $h(x-\xi)$ — единичная функция Хевисайда [5].

На рисунках изображены поверхности функций $\overset{*}{G}_0(x,\xi)$ и $\overset{*}{G}_2(x,\xi)$, построенные по формулам (12) и (13) для случая однородного стержня с переменным поперечным сечением, составленным из двух частей длины

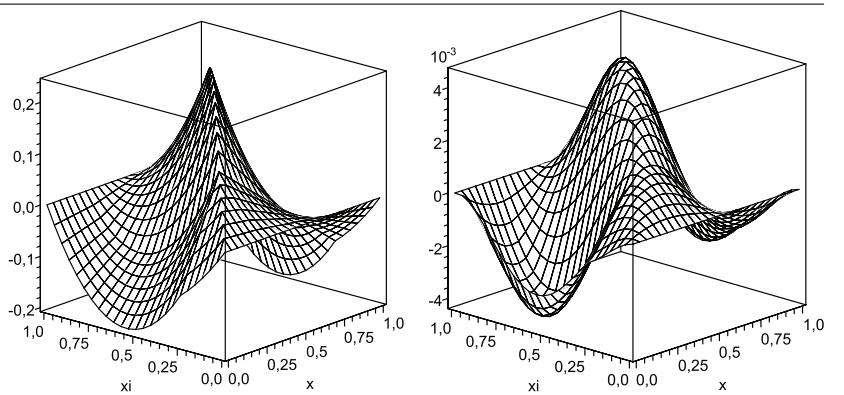


Рис. 1. G0(x,kci) (левый рисунок) и G2(x,kci) (рисунок справа)

($L_1 = L/4,\ L_2 = 3L/4$) и с отношением площадей поперечных сечений равным двум ($F_1/F_2 = 2$). Поверхности построены в безразмерных переменных, отнесенных к длине стержня, а сами функции также обезразмерены и отнесены к EF_1/L. Из рисунков видно, что функции $\overset{*}{G}_0(x,\xi)$ и $\overset{*}{G}_2(x,\xi)$ симметричны относительно диагонали, делящей пополам прямой угол между осями x и ξ. На диагонали разрывны первые частные производные функции $\overset{*}{G}_0(x,\xi)$ и вторые частные производные функции $\overset{*}{G}_2(x,\xi)$. Экстремальные значения функции $\overset{*}{G}_2$ примерно на два порядка меньше экстремумов функции $\overset{*}{G}_0$.

4. Общее решение одномерного уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами. Общее решение однородного сопутствующего уравнения Гельмгольца (6) имеет вид:

$$\overset{*}{v} = K_1 \cos\frac{\omega x}{c_0} + K_2 \sin\frac{\omega x}{c_0}, \qquad c_0 = \sqrt{\frac{E_0 F_0}{\varrho_0 F_0}} = \sqrt{\frac{1}{\langle \varrho F\rangle\langle 1/(EF)\rangle}}, \quad (14)$$

где c_0 — скорость продольной волны в сопутствующем однородном стержне с эффективными характеристиками (эффективная стержневая скорость)[3].

[3]Пусть стержень однородный, но поперечное сечение переменное т.е. ϱ = const, E = = const, а $F = F(x)$, тогда $c_0 = \sqrt{E/\varrho}\ \sqrt{1/(< F >< 1/F >)} \leqslant \sqrt{E/\varrho}$, поскольку $\langle F\rangle\langle 1/F\rangle \geqslant 1$. Таким образом, *в стержне с переменным поперечным сечением эффективная скорость стержневых волн меньше в* $\sqrt{1/(\langle F\rangle\langle 1/F\rangle)}$ *раз по сравнению со скоростью стержневых волн в стержне с постоянным сечением*. Например, для двухступенчатого стержня, состоящего из двух одинаковых по длине частей с различными площадями поперечного сечения, постоянными в пределах каждой из частей $c_0 = 2\sqrt{E/\varrho}\ /\sqrt{\eta + 1/\eta + 2}$, где $\eta = F_1/F_2$. В частности, при $\eta = 4$ имеем $c_0 = 0.8\sqrt{E/\varrho}$, а при $\eta = 10$ имеем $c_0 = 0.2\sqrt{E/\varrho}$.

Подставив выражение (14) в интегральное соотношение (5) получим общее решение однородного уравнения (6), представленное через функцию Грина исходного уравнения Гельмгольца

$$\overset{*}{u}(x) = K_1\left[\cos\frac{\omega x}{c_0} - \omega A(x,\omega)\right] + K_2\left[\sin\frac{\omega x}{c_0} + \omega B(x,\omega)\right], \qquad (15)$$

где

$$A(x,\omega) \equiv \int_0^L \left[\frac{1}{c_0}\overline{EF}(\xi)\frac{\partial \overset{*}{G}(\xi,x)}{d\xi}\sin\frac{\omega\xi}{c_0} + \omega\,\overline{\varrho F}(\xi)\,\overset{*}{G}(\xi,x)\cos\frac{\omega\xi}{c_0}\right]d\xi, \qquad (16)$$

$$B(x,\omega) \equiv \int_0^L \left[\frac{1}{c_0}\overline{EF}(\xi)\frac{\partial \overset{*}{G}(\xi,x)}{d\xi}\cos\frac{\omega\xi}{c_0} - \omega\,\overline{\varrho F}(\xi)\,\overset{*}{G}(\xi,x)\sin\frac{\omega\xi}{c_0}\right]d\xi \qquad (17)$$

Если в эти формулы подставить ряд (10), то ряд для перемещений примет вид:

$$\overset{*}{u}(x) = K_1\left[\cos\frac{\omega x}{c_0} - \sum_{n=0}^{\infty}\omega^{2n+1}A_{2n}(x,\omega)\right] + K_2\left[\sin\frac{\omega x}{c_0} + \sum_{n=0}^{\infty}\omega^{2n+1}B_{2n}(x,\omega)\right], \qquad (18)$$

$$A_{2n}(x,\omega) = \int_0^L \left[\frac{1}{c_0}\overline{EF}(\xi)\frac{\partial \overset{*}{G}_{2n}(\xi,x)}{d\xi}\sin\frac{\omega\xi}{c_0} + \omega\,\overline{\varrho F}(\xi)\,\overset{*}{G}_{2n}(\xi,x)\cos\frac{\omega\xi}{c_0}\right]d\xi, \qquad (19)$$

$$B_{2n}(x,\omega) \equiv \int_0^L \left[\frac{1}{c_0}\overline{EF}(\xi)\frac{\partial \overset{*}{G}_{2n}(\xi,x)}{d\xi}\cos\frac{\omega\xi}{c_0} - \omega\,\overline{\varrho F}(\xi)\,\overset{*}{G}_{2n}(\xi,x)\sin\frac{\omega\xi}{c_0}\right]d\xi. \qquad (20)$$

5. Задача о собственных частотах продольных колебаний стержня с переменными параметрами. Для определения собственных частот продольных колебаний стержня требуется найти отличное от тождественного нуля решение однородного исходного уравнения (6), удовлетворяющее заданным нулевым граничным условиям. В случае закрепленного конца $x = 0$ и при свободном конце $x = L$ получаем уравнение для частот,

при которых такое решение существует

$$\cos\frac{\omega L}{c_0}+\int_0^L\left[\frac{1}{\langle 1/(EF)\rangle}-E(\xi)F(\xi)\right]\frac{\partial^2\overset{*}{G}(\xi,x,\omega)}{\partial x\partial\xi}\Big|_{x=L}\cos\frac{\omega\xi}{c_0}\,d\xi-$$
$$-\omega c_0\int_0^L\left[\langle\varrho F\rangle-\varrho(\xi)F(\xi)\right]\frac{\partial\overset{*}{G}(\xi,x,\omega)}{\partial x}\Big|_{x=L}\sin\frac{\omega\xi}{c_0}\,d\xi=0. \tag{21}$$

Если вместо бесконечной суммы (10) функцию Грина представить частичной суммой, то из (21) получается приближенное частотное уравнение. Чем больше слагаемых участвует в частичной сумме, тем более высокие частоты удается определить с приемлемой точностью. В случае однородного стержня с переменным поперечным сечением и при $\overset{*}{G}(\xi,x,\omega)\approx\overset{*}{G}_0(\xi,x)$ получим следующее приближенное частотное уравнение

$$\cos(p\varphi)=\left\langle\left[\frac{1}{\tilde F(x)\langle 1/\tilde F\rangle}-1\right]\cos(p\varphi x)\right\rangle-$$
$$-\frac{p}{\varphi}\left\langle\left[\langle\tilde F\rangle-\tilde F(x)\right]\left[\int_0^x\frac{dy}{\tilde F(y)}-\left\langle\frac{1-y}{\tilde F(y)}\right\rangle\right]\sin(p\varphi x)\right\rangle \tag{22}$$

где x — безразмерная продольная координата, отнесенная к L, $p=\omega L/c$ — безразмерная частота, $c=\sqrt{E/\varrho}$ — скорость продольных волн в однородном стержне, $\varphi=\sqrt{<F><1/F>}\geqslant 1$ — безразмерный параметр, $\tilde F(x)=F(x)/F(0)$ — безразмерная площадь поперечного сечения.

На рис.2 представлены графики первой безразмерной собственной частоты продольных колебаний в защемленном двухступенчатом стержне со свободным концом в зависимости от относительной длины $v=L_1/L$ защемленной ступени, площадь поперечного сечения которой обозначена через F_1. Штриховая горизонтальная линия $p=\pi/2$ соответствует безразмерной первой собственной частоте в стержне с постоянным поперечным сечением. Три кривые выше линии $p=\pi/2$ построены при $\eta\equiv F_1/F_2=2$, а вторая, третья и четвертая кривые ниже линии $p=\pi/2$ — при

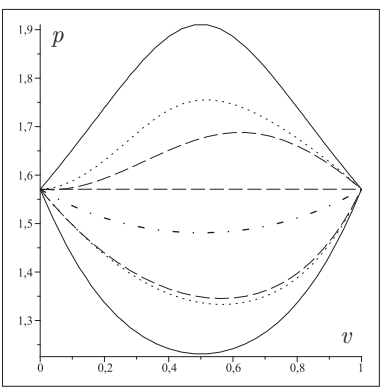


Рис. 2.

$\eta = 0.5$. Самая верхняя и самая нижняя кривые нарисованы сплошными линиями и соответствуют точным значениям первой собственной частоты, найденным из точного частотного уравнения $\mathrm{tg}(p\upsilon)\ \mathrm{tg}[p(1-\upsilon)] = \eta$, приведенного в справочнике [6 стр. 292]. Штриховые графики соответствуют нулевому приближению, т.е. $\overset{*}{G}(\xi, x, \omega) \approx \overset{*}{G}_0(\xi, x)$ и построены из решения приближенного частотного уравнения (22), а пунктирные — второму приближению, т.е. случаю, когда $\overset{*}{G}(\xi, x, \omega) \approx \overset{*}{G}_0(\xi, x) + p^2\ \overset{*}{G}_2(\xi, x)$.

Из рисунков видно, что уже нулевое приближение к первой собственной частоте качественно и количественно хорошо соответствует точному решению. Второе приближение еще лучше соответствует точному решению. Однако уточнение для первой собственной частоты не столь существенно. Для высших частот уточнение более существенно. Первая кривая, лежащая ниже линии $p = \pi/2$, изображенная штрих-пунктирной линией соответствует случаю, когда собственные частоты находятся из приближенного уравнения $\cos(p\varphi) = 0$ (приближение стержня с эффективными характеристиками). Для двухступенчатого стержня выражение для φ имеет вид $\varphi = \sqrt{1 + \upsilon(1-\upsilon)(\eta + 1/\eta - 2)}$, поэтому кривая зависимости $p(\upsilon)$ не меняется при замене $\eta \leftrightarrow 1/\eta$ и остается всегда ниже линии $p = \pi/2$.

Литература

1. *Горбачев В.И., Кокарев А. Е.* Интегральная формула в динамической задаче неоднородной упругости // Вестник МГУ, 2005. №2. С.62–66.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. Мир, Москва, 1975.
3. *Hashin Z., Strikman S.* On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elassticity // J. Mech. Phys. Solids, 10(4):335–343, 1962.
4. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. Издательство МГУ, Москва, 1990.
5. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. Мир, Москва, 1978.
6. *Пановко Е.Г. Биргер И.А.* (редакторы). Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Машиностроение, Москва, 1988.

КВАТЕРНИОННАЯ ФОРМУЛА СТОКСА И ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ

Е. Н. Горечин [1], ***В. Н. Кутрунов*** [2]

Тюменский государственный университет
Тюмень, Россия
[1]**gorechin-egor@mail.ru,** [2]**kvnkvnkvn@rambler.ru**

В данном докладе рассматривается обобщение классических интегральных теорем Остроградского и Стокса на кватернионные функции и их применение к кватернионному аналогу интеграла типа Коши.

Аппарат функций комплексного переменного являются инструментом исследования плоских задач теории упругости. Существенный вклад в такое использование внесен Н.И. Мусхелишвили [1]. В случае трех пространственных переменных для исследования пространственных задач теории упругости представляют интерес техника кватернионов и кватернионных функций. Соответствующие теории сегодня находятся в развитии [2, 3].

В работе [4] методом кватернионного анализа была получена кватернионная формула Стокса

$$\frac{1}{2}\int_S d\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})Z(\boldsymbol{r}) = \oint_l d\boldsymbol{r}\,Z(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

включающая в себя все ее классические варианты [5]. В данном случае S — односвязная, регулярная поверхность, ограниченная регулярной замкнутой кривой l, $Z(\boldsymbol{r})$ — кватернионная функция. Здесь кватернионный дифференциальный оператор $\boldsymbol{n}\times\nabla = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})$ является оператором касательного дифференцирования по поверхности, причем в левой части формулы сначала вычисляется векторное произведение, а затем орты интерпретируются как мнимые единицы кватерниона. В зависимости от потребностей используется либо левая, либо правая формы записи. Эта теорема верна во всех случаях, когда верна классическая теорема Стокса.

Распространим эту теорему на случай замкнутых поверхностей S. Для этого разобьем всю поверхность на две. С помощью сферы достаточно малого радиуса ϵ с центром в произвольной точке $\boldsymbol{r}_0 \in S$ вырежем ее ϵ -окрестность S_ϵ и вычислим интеграл по поверхности с учетом этого

разбиения:

$$\frac{1}{2}\int_S dS(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})Z(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\int_{S_\epsilon} dS(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})Z(\boldsymbol{r}) + \\ + \frac{1}{2}\int_{S\setminus S_\epsilon} dS(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})Z(\boldsymbol{r}).$$

Пусть $\epsilon \to 0$. Так как функция $Z(\boldsymbol{r})$ по предположению в каждой точке поверхности дифференцируема по касательному направлению, то интеграл по S_ϵ обращается в нуль на основании теоремы о среднем, интеграл по $S \setminus S_\epsilon$ преобразуется к криволинейному интегралу по теореме Стокса:

$$\frac{1}{2}\int_S dS(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})Z(\boldsymbol{r}) = \oint_{l_\epsilon} d\boldsymbol{r}\, Z(\boldsymbol{r}).$$

Здесь l_ϵ замкнутая кривая, полученная пересечением сферы радиуса ϵ и поверхности S. Так как эта кривая находится в бесконечно малой окрестности точки r_0, то функцию $Z(\boldsymbol{r})$ вследствие ее непрерывности можно считать постоянной и вынести из под знака интеграла. Оставшийся интеграл вычисляет сумму замкнутого векторного многоугольника, поэтому равен нулю. Следовательно в декларируемых условиях теорема Стокса для замкнутой поверхности имеет вид:

$$\int_S dS(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})Z(\boldsymbol{r}) = \int_S dS(\boldsymbol{n}\times\nabla)Z(\boldsymbol{r}) = 0. \qquad (2)$$

Здесь и далее нормаль $\boldsymbol{n}$ является внешней по отношению к поверхности S.

Представляет интерес применить полученные результаты к кватернионным потенциалам простого и двойного слоев. Переобозначим кватернион $\boldsymbol{r}$ (радиус-вектор) буквой x, обозначим также буквой y произвольный радиус-вектор точки пространства, не лежащей на поверхности S. Интегрирование всюду выполняется по точке x. Введем расстояние между этими точками $r = |x - y|$ и заменим в интегралах кватернионную функцию $Z(\boldsymbol{r})$ на функцию $Z(x)/r$. По формуле Стокса получим:

$$\int_S dS(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})\frac{Z(x)}{r} = 0.$$

Дифференцирование под знаком интеграла дает:

$$\int_S [(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})\frac{1}{r}]Z(x)dS = -\int_S \frac{1}{r}(\boldsymbol{n}\nabla - \overline{\boldsymbol{n}\nabla})Z(x)dS$$

или в другой форме это важное следствие теоремы Стокса переписывается следующим образом:

$$\int_S (\boldsymbol{n} \times \nabla \frac{1}{r}) Z(x) dS = -\int_S \frac{1}{r} (\boldsymbol{n} \times \nabla) Z(x) dS. \qquad (3)$$

Используя данное следствие, можно получить представление интеграла типа Коши. Вследствие ассоциативности операции умножения кватернионов, выполняется преобразование

$$\nabla \frac{1}{r} \boldsymbol{n} Z(x) = (\nabla \frac{1}{r} \boldsymbol{n}) Z(x) = -(\nabla \frac{1}{r} \cdot \boldsymbol{n}) Z(x) + (\nabla \frac{1}{r} \times \boldsymbol{n}) Z(x).$$

Подстановка под интеграл и учет теоремы Стокса в форме равенства приводят к представлению

$$\int_S \nabla \frac{1}{r} \boldsymbol{n} Z(x) dS = -\int_S (\nabla \frac{1}{r} \cdot \boldsymbol{n}) Z(x) dS + \int_S (\nabla \frac{1}{r} \times \boldsymbol{n}) Z(x) dS. \qquad (4)$$

Интеграл типа Коши представлен через классический потенциал двойного слоя и потенциал простого слоя, но от касательной производной плотности.

Отметим, что подобное свойство имеет место и для интеграла типа Коши в теории функций комплексного переменного (см. [6], стр.85.) И в этой теории интеграл типа Коши выражается через потенциалы двойного и простого слоев, причем у потенциала простого слоя плотность является производной вдоль кривой интегрирования по ее длине от исходной плотности интеграла типа Коши.

Еще одно интересное следствие интегральной теоремы Стокса связано с известными [7] интегральными представлениями кватернионных функций, заданных внутри, или вне объема V, ограниченного поверхностью S. Рассмотрим случай функций, заданных внутри области:

$$\int_S \nabla \frac{1}{r} \boldsymbol{n} Z(x) dS - \int_V \nabla \frac{1}{r} \nabla Z(x) dV = \begin{cases} 0, & y \in V^-, \\ 4\pi Z(y), & y \in V^+. \end{cases} \qquad (5)$$

Эту интегральную формулу можно назвать представлением кватернионных функций класса C^1. Изучим это представление несколько подробней, используя следствия теоремы Стокса, полученные выше. В данном представлении интеграл типа Коши можно заменить через потенциалы двойного и простого слоев, если, пользуясь ассоциативностью кватернионного умножения, сначала перемножить $\nabla(\frac{1}{r})$ и $\boldsymbol{n}$, а затем с помощью следствия теоремы Стокса заменить интеграл с векторным произведени-

ем. Результат подстановки имеет следующий вид:

$$-\int_S (\nabla\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{n})Z(x)dS+\int_S (\nabla\frac{1}{r}\times\boldsymbol{n})Z(x)dS- \\ -\int_V \nabla\frac{1}{r}\nabla Z(x)dV=\begin{cases}0, & y\in V^-,\\ 4\pi Z(y), & y\in V^+.\end{cases} \tag{6}$$

Из формулы видно, что для представления кватернионной функции $Z(x)$ класса C^1 необходимо знать ее значение и касательную производную на границе S, а также кватернионную функцию ∇Z в области V.

Если функция $Z(x)$ имеет вторые производные, то из (11) следует представление кватернионных функций класса C^2, совпадающее с соответствующим классическим представлением для действительных функций класса C^2 :

$$-\int_S (\nabla\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{n})Z(x)dS+\int_S \frac{1}{r}(\nabla\times\boldsymbol{n})Z(x)dS- \\ -\int_V \nabla\frac{1}{r}\nabla Z(x)dV=\begin{cases}0, & y\in V^-,\\ 4\pi Z(y), & y\in V^+.\end{cases} \tag{7}$$

Из (11) и (12) следует множество частных случаев для вещественных, скалярных, векторных, гармонических, кватернионных аналитических функций.

Литература

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М: Наука, 1968. 512 с.
2. *Кутрунов В.Н., Курята З.С.* Кватернионы и интегральные уравнения теории упругости// Упругость и неупругость. Под ред. проф. И.А. Кийко, проф. М.Ш. Исраилова, проф. Г.Л. Бровко. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. С. 303-305.
3. *Кутрунов В.Н., Кутрунова З.С.* Интегральные тождества теории упругости и регуляризация сингулярных интегральных уравнений// Упругость и неупругость. Под ред. проф. И.А. Кийко, проф. Р.А. Васина, проф. Г.Л. Бровко. - М.: ЛЕНАНД, 2006. С. 343-350.
4. *Горечин Е.Н., Кутрунов В.Н.* Кватернионные интегральная формула Стокса и аналог интеграла типа Коши// Современные проблемы математического и инновационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений. Тюмень, 2010. 248 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М: Наука, 1974. 831 с.
6. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.
7. *Кутрунов Г.Н., Курята З.С.* Некоторые интегральные тождества математической физики// Вестник Тюменского государственного университета, 1998. с. 34-41.

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В.Т. Гринченко [1], ***В.В. Мелешко*** [2], ***Н.С. Якименко*** [3]

[1] ***Институт гидромеханики НАН Украины, Украина***
[2] ***Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина***
[3] ***Кировоградский национальный технический университет, Украина***

[1] **grinchenko@hydromech.com.ua,** [2] **meleshko@univ.kiev.ua,**
[3] **m.yakymenko@gmail.com**

Исследуются осесимметричные колебания конечных изотропных упругих цилиндров в окрестности частоты запирания второй нормальной моды цилиндрического волновода. Применяется метод суперпозиции, использующий возможность построения частных решений уравнений движения в цилиндрических координатах для удовлетворения граничных условий на боковой поверхности и на торцах цилиндра. Анализируется влияние коэффициента Пуассона на кривизну ветви вблизи частоты запирания и связь с появлением «террасоподобных» структур в спектре собственных частот.

1. В мае 1981 года два первых автора этой статьи имели прекрасную возможность сделать доклад на семинаре Алексея Антоновича Ильюшина о закономерностях гармонических колебаний в изотропных упругих телах конечных размеров. Были представлены результаты исследований спектров собственных частот и форм осесимметричных колебаний толстых дисков [1] в окрестности частот краевого и толщинного резонансов и длинного цилиндра [2] в окрестности частоты лишь краевого резонанса. При этом удалось полностью прояснить экспериментально наблюдаемую сложную структуру резонансных спектров дисков [3, 4, 5] и цилиндров [6, 7]. Доклад был позитивно воспринят слушателями среди которых находился и Виктор Степанович Ленский – переводчик одной из первых монографий [8] по волнам напряжения в упругих телах. Докладчики до сих помнят раздумчивое высказывание Алексея Антоновича, что «краевой резонанс – это крайне необычное явление».

С тех пор минуло почти 30 лет, авторами была опубликована «черная книга» [9], но детальный анализ спектра собственных частот осесимметричных колебаний длинных конечных цилиндров в окрестности частоты первого радиального резонанса бесконечно длинного цилиндра при изменении коэффициента Пуассона оставался не проведенным. Молчаливо полагалось, что картина будет качественно подобной спектрам толстых дисков в окрестности частоты толщинного резонанса слоя, тем более, что имеющиеся в литературе экспериментальные данные [3, 4, 5] показа-

ли, что сложная структура спектров дисков сохраняется при различных значениях коэффициента Пуассона. Кроме того, для длинных цилиндров это подтверждалось как расчетами [10] по так называемой "теории второго порядка" [11], так и строгим решением [12] для нулевого значения коэффициента Пуассона.

Детальный анализ данного вопроса послужил темой кандидатской диссертации третьего автора, защищенной в Киевском университете в 2008 году. Результаты оказались неожиданными и целью настоящей статьи является демонстрация того, что происходит со спектром собственных частот длинных цилиндров в случаях, отличных от наиболее простых.

2. Исследование особенностей спектра собственных частот и форм колебаний упругих цилиндров конечной длины представляет актуальную научную и прикладную задачу. Из всех многочисленных приложений укажем лишь на возможность тщательного тестирования возможностей современных коммерческих численных пакетов ANSYS, COMSOL, FEMLAB для высокоточного определения собственных частот цилиндров сложной формы в проекте Advanced LIGO по нахождению возможности существования гравитационных волн [13, 14].

В то время как, в области низких частот моды колебаний длинного стержня и тонкого диска давно изучены исчерпывающим образом, высочастотный спектр колебаний и сегодня представляет значительный интерес. В работе [1] подробно исследованы частотные спектры упругих дисков в районе частот первого толщинного резонанса (или в диапазоне между частотами запирания второй и третьей распространяющихся нормальных мод бесконечного слоя, описываемых уравнением Рэлея – Лэмба). Представляет интерес рассмотрение особенностей частотных спектров связанных задач для длинных цилиндров в области частоты первого радиального или сдвигового резонанса бесконечного цилиндра, задаваемых уравнением Похгаммера – Кри. В этом направлении можно выделить лишь статьи [2, 12], в которых, в частности, было детально исследованы свойства краевой моды цилиндра [6] и объяснена природа "дублетов" и "триплетов", экспериментально наблюдаемых в частотных спектрах [7].

Изотропный материал плотности ρ конечного цилиндра высоты $2H$ и диаметром $2a$ характеризуется модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν. Цилиндр совершает установившиеся колебания с собственной круговой частотой ω. Мы будем исследовать структуру уплотнения высокочастотного спектра на картинах зависимости безразмерных собственных частот $\Omega = \omega a/c_2$ ($c_2 = \sqrt{G/\rho}$ — скорость сдвиговых волн в упругой среде) от отношения размеров $h = H/a$ при нескольких типичных значениях коэффициента Пуассона. Это уплотнение проявляется в виде возникновения "террасоподобных" спектров вблизи частоты запирания второй распространяющейся моды. Для простоты рассмотрим только

симметричные относительно срединной плоскости моды колебаний цилиндра. Однако аналогичный "террасоподобный" спектр с теми же граничными значениями частот, которые определяются частотами запирания действительных веток дисперсионного спектра наблюдается и для антисимметричного типа движения.

Аналитическое решение векторной граничной задачи о колебаниях конечного цилиндра строится методом суперпозиции, хорошо развитым как в Киевской школе механиков [9, 15] так и в ряде зарубежных публикаций [16, 17]. Представление решения уравнений движения Ламе для компонент вектора перемещений выбирается в виде суммы двух рядов по полным системам тригонометрических функций и функций Бесселя по продольной и радиальной координатам, соответственно. Произвольные коэффициенты в этих рядах определяются при выполнении всех граничных условий, что в силу неортогональности функций приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Бесконечная система решается методом улучшенной редукции, с использованием асимптотического закона поведения неизвестных [9, 15]. Равенство нулю определителя такой системы дает характеристическое уравнение для определения бесконечного набора безразмерных собственных частот Ω в зависимости от h при параметре ν. Детали построения решения приведены в наших предыдущих работах [1, 2, 12] и не требуют здесь детальных пояснений. Такой подход является простым при численной реализации и требует малых затрат машинного времени: два десятка секунд для одного просчета до 15 первых собственных частот на фоне впечатляющего результата [18] о необходимости почти 17 часов непрерывной работы процессора Pentium4 для нахождения при помощи метода Ритца первых пяти частот почти кубообразного цилиндра ($h = 0,853$) или необходимости выбора десятков тысяч узлов в пакетах ANSYS или COMSOL [13].

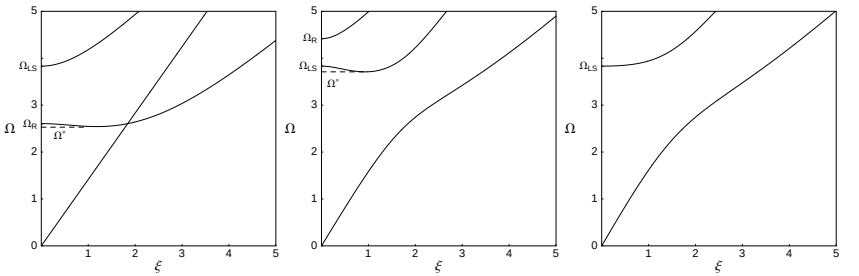
Высокочастотной областью спектра собственных частот конечного цилиндра мы будем называть область частот между критической частотой и частотой запирания второй и третьей распространяющихся осесимметричных нормальных мод в соответствующем бесконечном цилиндре со свободной поверхностью. Такое распространение на заданной частоте Ω описывается значениями постоянной распространения ξ — действительными корнями уравнения Похгаммера – Кри [19, 20]

$$(\Omega^2 - \xi^2)^2 J_0(\alpha) J_1(\beta) + 4\xi^2 \alpha\beta J_0(\beta) J_1(\alpha) - 2\Omega^2 \alpha J_1(\alpha) J_1(\beta) = 0\,,$$

где обозначено

$$\alpha^2 = \Omega^2/k^2 - \xi^2\,, \quad \beta^2 = \Omega^2 - \xi^2\,, \quad k = \sqrt{2\frac{1-\nu}{1-2\nu}}\,,$$

а J_0 и J_1 - функции Бесселя нулевого и первого порядка.



а) $\nu = 0$ б) $\nu = 0.34$ в) $\nu = 0.45$

Рис. 1. Дисперсионные кривые продольных нормальных волн в цилиндре.

Дисперсионные кривые для продольных мод бесконечного цилиндра спектра приведены на рис. 1 для трех типичных значений коэффициента Пуассона ν. На этих рисунках Ω_{LS} и Ω_R обозначают, соответственно, частоты запирания продольно-сдвиговых и радиальных нормальных мод, Ω^* — критическое (минимальное) значение частоты при которой появляются распространяющиеся ветви второй и третьей нормальных мод и наблюдается явление "обратной волны" с противоположными знаками групповой и фазовой скорости распространяющейся моды.

Известно [19, 20], что первая частота $\Omega_{LS} = \lambda_1$, где λ_1 — низший ненулевой корень уравнения $J_1(\lambda) = 0$, а первая частота Ω_R есть низший корень уравнения $k\Omega J_0(\Omega/k) - 2J_1(\Omega/k) = 0$. Частота Ω_{LS} не зависит от ν, в то время как для частоты Ω_R имеется существенная зависимость от коэффициента Пуассона. При $\nu = \nu_c = 0.283$ происходит перемена типа движения на второй частоте запирания от радиального (с частотой Ω_R) на продольно-сдвиговый (на частоте $\Omega = \lambda_1$). Важно отметить, что несмотря на перемену типа движения на второй частоте запирания частотный минимум Ω^* имеет место вплоть до $\nu < \nu_* = 0.417$. Последнее свойство можно установить, анализируя знак кривизны второй (или третьей) дисперсионной кривой в окрестности частоты запирания при $\xi = 0$. Имеем [19]

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{d^2\Omega}{d\xi^2} = \Omega\left[1 - \frac{8J_1(\Omega/k)}{k\Omega J_0(\Omega/k) - 2J_1(\Omega/k)}\right], \quad \Omega = \Omega_{LS} = \lambda_1,$$

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{d^2\Omega}{d\xi^2} = \frac{\lambda_1 k^3}{\Omega}\left[1 + \frac{4((k^2-4)J_1(\Omega) + 2\Omega J_0(\Omega))}{(k^2\Omega^2 - 4(k^2-1))J_1(\Omega)}\right], \quad \Omega = \Omega_R.$$

Отсутствие при $\nu > \nu_*$ частотного минимума Ω^* на второй дисперсионной ветви принципиально отличает поведение осесимметричных дисперсионных кривых уравнения Похгаммера – Кри от аналогичных по структуре дисперсионных кривых уравнения Рэлея – Лэмба для симметричных мод слоя. В случае слоя частотный минимум Ω^* существует при всех допустимых значениях $-1 < \nu \le 0.5$.

Именно с таким поведением дисперсионных кривых уравнения Похгаммера – Кри связана принципиальная перестройка структуры частотного спектра для конечного цилиндра: при $\nu > \nu_*$ «террасоподобная» структура высокочастного спектра полностью исчезает!

На рис. 2 приведены частотный спектр для $\nu = 0$. В этом случае частично устраняется связь между продольными и радиальными компонентами движения, следствием чего являются точки двухкратного и трехкратного (известные моды Кри – Лэмба) пересечения спектральных кривых. На этом рисунке штриховыми линиями обозначены резонансные кривые чисто продольных («стержневых») колебаний (гиперболы) и чисто радиальной (горизонтальная прямая) моды колебаний цилиндра.

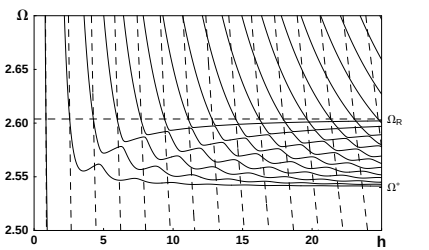


Рис. 2. Частотный спектр цилиндра при $\nu = 0$

Несмотря на очевидное разделение продольных и радиальных деформаций в цилиндре при $\nu = 0$ в динамике все же сохраняется их связь за счет инерциальных членов. Третье спектральное семейство, обозначенное сплошными линиями, не может быть выведено из элементарных решений и связано со сложным характером отражения и взаимного превращения упругих продольных и сдвиговых волн от цилиндрических и плоских поверхностей. Типичным для этой «террасоподобной» картины спектра является присутствие четко выраженных участков B-мод, для которых имеет место увеличение собственной частоты с увеличением длины и массы цилиндра. По-видимому, эвристическая теорема Рэлея о понижении собственной частоты при увеличении массы резонатора оказывается не всегда выполнимой для распределенных упругих систем.

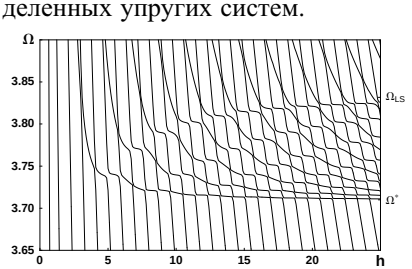


Рис. 3. Частотный спектр цилиндра при $\nu = 0.34$

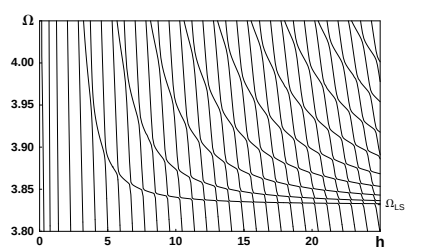


Рис. 4. Частотный спектр цилиндра при $\nu = 0.45$

На рис. 3 приведен спектр собственных частот длинных цилиндров для коэффициента Пуассона $\nu = 0.34$. Такое значение ν превышает значение ν_c и здесь уже произошла смена типов движения на частотах за-

пирания бесконечного волновода. Однако и здесь присутствуют остатки «террасоподобной» структуры спектра и фрагменты B-мод.

На рис. 4 приведен спектр собственных частот длинных цилиндров для коэффициента Пуассона $\nu = 0.45$. Частотный спектр в этом случае имеет значительно более простой вид. Отсутствие при $\nu > \nu_* = 0.417$ частотного минимума на второй дисперсионной ветви приводит к полному качественному изменению спектра собственных частот – полностью исчезает как "террасоподобное" сгущение так и B-моды. Резонансные частоты двух четко выраженных семейств (круто и слабо спадающие гиперболические кривые, соответственно) можно надежно определять по одномодовому приближению с использованием либо первой либо второй дисперсионных кривых на рис. 1*в*.

По нашему мнению, качественное различие структуры спектра осесимметричных продольных колебаний длинных цилиндров при изменении коэффициента Пуассона указано в мировой литературе впервые. Полезным упражнением для воображения была бы интересная попытка проанализировать реакцию Алексея Антоновича Ильюшина на этот результат.

Литература

1. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Анализ мод колебаний круглого диска в окрестности толщинного резонанса // Прикл. мех. 1979. Т.15. Вып.6. С.3–19.
2. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акуст. ж. 1978. Т.24. Вып.6. С.861–866.
3. *Shaw E.A.G.* On the resonant vibrations of thick barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol.28. P.38–50.
4. *Ikegami S., Ueda I., Kobayashi S.* Frequency spectra of resonant vibration in disk plates of $PbTiO_3$ piezoelectric ceramics // J. Acoust. Soc. Am. 1974. Vol.55. P.339–344.
5. *Ikegami S., Nagata T., Nakajima Y.* Frequency spectra of extensional vibration in $Pb(Zr{\cdot}Ti)O_3$ disks with Poisson's ratio larger then 1/3 // J. Acoust. Soc. Am. 1976. Vol.60. P.113–116.
6. *Oliver J.* Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band short-duration pulse technique // J. Acoust. Soc. Am. 1957. Vol. 29. P. 189–194.
7. *Booker R.E., Sagar E.H.* Velocity dispersion of the lowest-order longitudinal mode in finite rods of circular cross section // J. Acoust. Soc. Am. 1971. Vol.49. P.1491–1498.
8. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М.: ИЛ, 1955. 192 с.
9. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
10. *McNiven H.D., Perry D.C.* Axially symmetric waves in finite, elastic rods // J. Acoust. Soc. Am. 1962. Vol.34. P.433–437.
11. *Mindlin R.D., McNiven H.D.* Axially symmetric waves in elastic rods // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1960. Vol.27. P.145–151.
12. *Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л.* Анализ частотного спектра и форм колебаний длинных цилиндров // Прикл. мех. 1980. Т.16. Вып.1. С.3–7.
13. *Strigin S.E., Blair D.G., Gras B., Vyatchanin S.P.* Numerical calculations of elastic modes frequencies for parametric oscillatory instability in Advanced LIGO interferometer // Phys. Lett. 2008. Vol.**A**372. P.5727–5731.
14. *Meleshko V.V., Strigin S.E., Yakymenko M.S.* Parametric oscillatory instability on axially-symmetrical test mass elastic modes in Advanced LIGO interferometer // Phys. Lett. 2009. Vol.**A**373. P. 3701–3704.

15. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.
16. *Hutchinson J.R.* Axially vibrations of a free finite-length rod // J. Acoust. Soc. Am. 1972. Vol.51. P.233–240.
17. *Ebenezer D.D., Ravichandran K., Padmanabhan C.* Forced vibrations of solid elastic cylinders // J. Sound Vibr. 2005. Vol.282. P.991–1007.
18. *Nieves F.J.,Bayón A., Gaskón F.* Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinders// J. Sound Vibr. 2008. Vol.311. P.588–596.
19. *Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1962. Vol.29. P.729–734.
20. *Zemanek J., Jr.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Am. 1972. Vol. 51. P. 265–283.

НАЗЕМНО-КОСМИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ ПРЕДВЕСТНИКОВ И КРАТКОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Л. Н. Дода [1], ***В. Л. Натяганов*** [2], ***И. В. Степанов*** [1]

[1] ***Научный центр оперативного мониторинга Земли,***
[2] ***Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова***
Москва, Россия

[1] **l.doda@mail.ru,** [2] **tenzor@bks-mgu.ru**

Рассмотрены основные геофизические закономерности краткосрочного прогноза землетрясений по времени, месту и магнитуде. Из литосферно-атмосферно-ионосферных (ЛАИ) признаков подготовки землетрясений особое внимание уделено облачным сейсмоиндуцированным структурам (ОСИС), локализующим место и определяющим магнитуду будущих землетрясений.

1. Основные закономерности прогноза землетрясений.

Основные геофизические закономерности, отвечающие на вопросы главной триады прогноза (“Когда? Где? Какой силы?”), заключаются в следующих формулах [1,2] для расчета даты, места и магнитуды M готовящихся землетрясений:

$$d_* = d_s + [p \pm 2] + 27n \tag{1}$$

$$\lambda_* = \lambda_s - 45^\circ n_j = \lambda_s \mp \varphi \cdot \mathrm{tg}\, 11^\circ \tag{2}$$

$$M = \ln (L/L_0), \mathrm{L_0} = 1\,км \tag{3}$$

где обычно число Кэррингтоновых оборотов Солнца n равно 0, иногда 1 или 2; p равно 14 или 21; λ_s — долгота подсолнечной точки на дату d_s геоэффективного события на Солнце типа коронального выброса массы или солнечной вспышки; L — максимальный линейный размер ОСИС, трассирующих энергоактивированные геомагнитными возмущениями литосферные разломы в зоне действия сейсмомагнитного меридиана, долгота λ_* которого в проекции Меркатора определяется через широту φ, номер n_j трехчасового интервала (j=1,2,3,. . . ,8) замера геомагнитной активности и скачки геомагнитных индексов алгоритмом (2).

2. Наземно-космический мониторинг и процедура прогноза.

Подчеркнем, что кроме учета основных закономерностей (1)-(3), процедура прогноза конкретных землетрясений по не имеющей аналогов эмпирической схеме Научного центра оперативного мониторинга Земли (НЦ

ОМЗ) включает наземно-космический мониторинг [1-3] за целым комплексом взаимосвязанных ЛАИ признаков. Многие из этих признаков считаются необходимыми условиями подготовки землетрясений (главным из которых является потенциал сейсмотектонических напряжений и деформаций в литосферных разломах земной коры), но только пересечение нескольких из них часто дает и достаточность сейсмического события.

Для землетрясений с $M \geqslant 6$ схема НЦ ОМЗ дает около 95% реализации прогноза с ошибками ± 2 суток по дате, $\pm 3^{\circ}$ по месту и $\pm 0{,}3$ по магнитуде. За последние 3–4 года удалось повысить точность прогноза на 15% за счет создания многоцелевой системы наземно-космического мониторинга, включающей следующие структурные элементы:

1. Станцию гравиметрических измерений Центра "Прогноз" (рук. О.В. Мартынов) Тульского государственного университета;

2. Станцию подземных протонных измерений "Космометеотектоника" (г. Петропавловск-Камчатский, рук. В.С. Бобровский);

3. Станции электротеллурических измерений в Греции (Athens, Pirgos, Hirgos) и Японии (Kanoya, Kakioka, Memambetsu);

4. Базы данных гелио-геофизических параметров разных стран с открытым Интернет-доступом, в том числе Парижского центра вращения Земли и геомагнитных станций;

5. Спутниковые системы (Метеор, Ресурс, Aqua, Meteosat, MTSAT, Terra и др.) мониторинга облачного покрова и поиска вдоль сейсмомагнитных меридианов ОСИС, базы данных их накопления и тематической обработкой всего комплекса ЛАИ признаков в НЦ ОМЗ.

Теоретическое обоснование отдельных граней и этапов в подготовке, запуске и прогнозе землетрясений по схеме НЦ ОМЗ можно найти в [1-6]. В частности, формула (3) является обобщением на ОСИС известной формулы Добровольского [7] по размеру радиуса зоны проявления предвестников землетрясений по деформациям в земной коре, а двухнедельная гармоника в (1) связана с 13.7-суточной периодичностью приливных сил в системе трех тел Земля–Луна–Солнце. Теоретическое обоснование этому получено на основе обобщения на геоид [1] аналитических решений [8] для цилиндрической "вертушки" Бобрякова–Ревуженко–Шемякина [9], специально предназначенной для экспериментального исследования некоторых видов сложного нагружения деформируемых сред по А.А. Ильюшину [10].

Не касаясь важного вопроса о теоретическом обосновании алгоритма (2), примем гипотезу Рикитаке о существовании в окрестностях литосферных разломов некоторых проводящих каналов, которые могут соединять земную поверхность через сеть площадок скольжения в литосфере с верхними слоями мантии. Активизацию таких каналов геомагнитными бурями может обеспечить электрокинетический механизм по развитой системе

капилляров верхнего слоя, а ниже – комбинированный механизм аквапроводимости [5] вдоль площадок скольжения и цепочка мезопробоев [2,6] во флюидных полостях литосферы.

Пусть в результате геомагнитных возмущений вдоль подобного канала в литосфере прошел нисходящий электротепловой пробой преимущественно по одному из семейств площадок скольжения, сделав обходной зигзаг по другому семейству лишь в одном (особом) месте. В результате ротационного движения Земли и под действием приливных сил наиболее интенсивно будут изменяться взаиморасположения [9] площадок скольжения, относящиеся к разным семействам. Поэтому именно в этом особом месте проводящий канал “разорвется” в первую очередь, что на время сделает неосуществимым возможный восходящий (или возвратный, по аналогии с молниевыми разрядами в атмосфере) электротепловой пробой [2,5].

Однако через полный период действия приливных сил (13.7 суток в размерных единицах) каждая лагранжева точка литосферы практически вернется в свое исходное положение, а проводник Рикитаке фактически восстановит свою первоначальную конфигурацию. Это сделает возможным возвратный или восходящий макропробой [5] по тому же каналу за счет участия в его реализации глубинного водорода, в том числе и в протонной форме [2,6]. Подобный электротепловой пробой часто является триггером землетрясений [5] именно в этой зоне за счет нагрева и водородного охрупчивания бортов разлома и снижения прочности на сдвиговые усилия [2,6].

Получить на таком простом уровне обоснование трехнедельной гармоники в формуле (1) не удается. Очевидная сложность заключается в трехмерной геометрии задачи и слоистом строении Земли с наличием твердого ядра.

3. Примеры успешных прогнозов. Методикой дистанционного прогноза по схеме НЦ ОМЗ пока владеют лишь разработчики этой схемы, но ее эффективность постепенно получает и международное признание: в ходе Тайваньского сейсмопрогнозного эксперимента был получен уникальный результат – 6 реализаций прогноза (при одном пропуске события с M =6,4) за 7 месяцев проведения мониторинга по Тайваньско-Филиппинской сейсмоопасной зоне.

Причем прогноз всех событий был осуществлен по схеме НЦ ОМЗ чисто дистанционным образом из Москвы, тогда как тайваньские коллеги явных локальных признаков подготовки землетрясений традиционными способами обнаружить не смогли. В ходе этого совместного эксперимента был обнаружен интересный факт влияния траекторий тайфунов на потенциальную магнитуду (по наблюдаемым ОСИС).

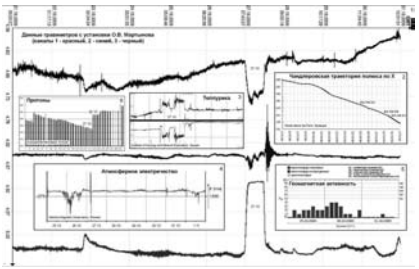


Рис. 1. Глобальные геофизические признаки подготовки мощных землетрясений.

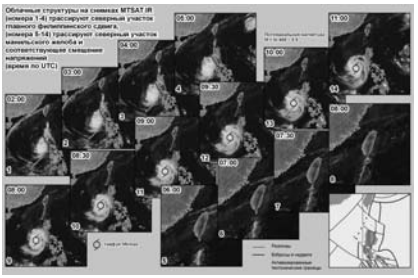


Рис. 2. Облачные сейсмотектонические индикаторы в Тайваньской и Филиппинской зонах на 31 октября 2009 года.

Подчеркнем, что специфические ОСИС — новый класс предвестников землетрясений – не только определяют значение M по формуле (3), но и дают дополнительную локализацию места возможных землетрясений в зоне действия сейсмомагнитного меридиана. Пример композиции зарегистрированных глобальных и локальных ЛАИ признаков перед землетрясением 05.11.2009 г. на Тайване с $M \approx 6$ приведен на рис. 1,2, которые были представлены И.В. Шуганом (МГУ) в упреждающем докладе 04.11.2009 г. в Тайнаньском университете за сутки до события.

После реализаций прогнозов, выставленных на сайтах НЦ ОМЗ и центра “Прогноз” (г. Тула), в ходе Греко-Итальянского сейсмопрогнозного эксперимента летом 2010 г. (когда попутно оправдались 30.07.2010 с $M = 6{,}2$ и 15.08.2010 с $M = 5{,}6$ прогнозы по Камчатке, оказавшейся на одном сейсмомагнитном меридиане сначала с Балканами, а потом и Сицилией) повышенный интерес к дистанционному прогнозу по схеме НЦ ОМЗ проявили итальянские коллеги.

Примеры других успешных прогнозов по различным сейсмоопасным регионам планеты с демонстрацией космоснимков ОСИС и регистрацией возмущений других ЛАИ признаков будут приведены на симпозиуме.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-08-00712).

Литература

1. *Дода Л.Н., Натяганов В.Л., Степанов И.В.* Краткосрочный прогноз землетрясений — реальность // ДАН, (в печати).
2. *Дода Л.Н., Натяганов В.Л., Степанов И.В., Чайка А.А.* Космо-геофизическая концепция прогноза землетрясений // Сб. Динамика деформируемых сред (памяти ак. Е.И. Шемякина), (в печати).
3. *Дода Л., Новикова Н., Пахомов Л., Степанов И.* Космический мониторинг предвестников землетрясений. // Наука в России, 2009, № 6.
4. *Дода Л.Н., Натяганов В.Л., Шивринская Е.В.* О причинах, предвестниках и прогнозе землетрясений (со времен М.В. Ломоносова до наших дней) // Сб. науч. Трудов “Математика. Компьютер. Образование.”, вып. 15, т.2, 2008.
5. *Натяганов В.Л.* Ломоносов и загадки природного электричества. Часть 2. Электротепловой пробой в литосфере как триггер землетрясений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех., 2007, №4.

6. *Натяганов В.Л.* Ломоносов и загадки природного электричества. Часть 3. Электромагнитная природа световых предвестников землетрясений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех., 2010, № 3.
7. *Добровольский И.П.* Теория подготовки тектонического землетрясения. –М.: ИФЗ АН СССР, 1991.
8. *Куксенко Б.В.* Два аналитических решения для установки сложного нагружения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех., 2005, №5.
9. *Ревуженко А.Ф.* Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.
10. *Ильюшин А.А.* Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

МИКРО И МАКРОМЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Э.Б. Завойчинская

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Москва, Россия

Теоретической основой построения теории объемного микро и макроразрушения металлов при сложном напряженном состоянии служит теория предельных процессов нагружения для хрупких материалов [1] и вероятностный подход к оценке поэтапного развития микро и макроразрушения при одномерном нагружении [2,3]. Предлагаются зависимости между предельными значениями касательной и нормальной компонент вектора напряжений на площадке максимальных касательных напряжений и долговечностью для субмикроскопических, микроскопических и коротких микротрещин; коротких, средних и значительных макроскопических трещин. При этом принцип развития разрушения состоит в том, что процесс разрушения по *i*- ому виду трещин начинается с достижения *(i-1)*-ым видом трещин порогового уровня.

Рассмотрим процесс простого гармонического нагружения $\sigma_k = \sigma_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, в главных осях тензора напряжений на интервале времени $[0, t^*]$ вида:

$$\begin{aligned} &\sigma_k(t) = \sigma_k^+ f(t), \quad k = 1, 2, 3; \quad |\sigma_1^+| \geqslant |\sigma_2^+| \geqslant |\sigma_3^+|, \\ &0 \leqslant t \leqslant t^*; \quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant 1, \end{aligned} \tag{1}$$

или на площадке максимальных касательных напряжений

$$\begin{aligned} &\tau_{\max}(t) = \tau_{\max} f(t) = (\sigma_1^+ - \sigma_3^+) f(t)/2, \\ &\sigma_n(t) = \sigma_n f(t) = (\sigma_1^+ + \sigma_3^+) f(t)/2, \end{aligned} \tag{2}$$

где σ_k^+ — максимальные значения главных нормальных напряжений: $\sigma_k^+ = \max\{\sigma_k(t) : 0 \leqslant t \leqslant t^*, k = 1, 2, 3\}$; $\tau_{\max}$, σ_n — максимальные значения касательной и нормальной компонент вектора напряжений на площадке максимальных касательных напряжений соответственно, $\tau_{\max} = \max\{\tau_{\max}(t) : 0 \leqslant t \leqslant t^*\}$, $\sigma_n = \max\{\sigma_n(t) : 0 \leqslant t \leqslant t^*\}$; $f = \sin \omega t$, $n = \omega t/2\pi$, ω — частота, n — число циклов изменения компонент тензора напряжений.

Предельный простой процесс нагружения $\left(\tau^*_{\max}(t), \sigma^*_n(t)\right)$ переводит материал из начального состояния при $t = 0$ в предельное состояние при $t = t_f$.

Согласно общей теории предельных процессов нагружения зависимость между пре-

дельными значениями компонент вектора напряжений на площадке максимальных касательных напряжений $(\tau^*_{\max}, \sigma^*_n)$ при простом гармоническом нагружении хрупких материалов имеет вид:

$$\frac{\tau^*_{\max}}{\tau_{-1}(n,t)} + \sigma^*_n \left(\frac{2}{\sigma_{-1}(n,t)} - \frac{1}{\tau_{-1}(n,t)} \right) = 1, \tag{3}$$

где $\sigma_{-1} = \sigma_{-1}(n,t)$, $\tau_{-1} = \tau_{-1}(n,t)$, $n = \omega t/2\pi$ — пределы ограниченной усталости металлов при симметричных одномерном напряжении и сдвиге соответственно.

Соотношение (3) описывает выносливость чугунов двух марок, разрушение которых обусловлено развитием субмикро, микроскопических и коротких трещин при макроупругом деформировании, по экспериментальным данным Г.Гафа [1].

Процесс обьемного микроразрушения металла начинается с образования и развития субмикротрещин ($l_1 \leqslant 10^{-2}$ *мкм*, l_1 — средняя длина субмикротрещин). Для простого трехмерного процесса нагружения вероятность субмикроразрушения металла $P_1 = P_1(\tau_{\max}, \sigma_n, t)$, т.е. степень объемной концентрации субмикротрещин [2], определяется по такой зависимости:

$$P_1 = \frac{\tau_{\max} - \sigma_n}{\tau_1(\omega)} \phi_{1,\tau}(n_s) + \frac{2\sigma_n}{\sigma_1(\omega)} \phi_{1,\sigma}(n_s), \tag{4}$$

где $n_s \equiv \dfrac{\lg n}{\lg N_1}$, $\quad 2\pi n = \omega t$; $\tau_1 = \tau_1(\omega), \sigma_1 = \sigma_1(\omega)$ — циклические пределы пропорциональности при сдвиге и одномерном нагружении соответственно для сталей на базе $N_1 = 10^9$циклов [2]; $\phi_{1,\tau} = \phi_{1,\tau}(n_s), \phi_{1,\sigma} = \phi_{1,\sigma}(n_s)$ — монотонно возрастающие функции числа циклов нагружения, характеризующие меру приближения к микроразрушению материала по субмикротрещинам , при сдвиге и одномерном нагружении соответственно, $0 \leqslant \varphi_{1,\sigma}(n_s) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi_{1,\tau}(n_s) \leqslant 1$.

При предположении $\tau_1(\omega) = \sigma_1(\omega)$ выражение (4) приводится к виду:

$$P_1 = \frac{\sigma_1^+}{k_1 \sigma_{-1}(\omega)} \phi_1(n_s), \tag{5}$$

где $\sigma_{-1} = \sigma_{-1}(\omega)$ — предел выносливости сталей и сплавов на базе $N_4 = 5 * 10^6$ циклов, $0.4 \leqslant k_1 \leqslant 0.6$, $9 \leqslant \lg N_1 \leqslant 10$.

При достижении порогового уровня объемной плотности субмикротрещин, которой соответствует значение вероятности $p_1 = \text{const}$, начинается слияние субмикротрещин и формирование микроскопических трещин ($l_2 \in (10^{-2}, 1.0)$ *мкм*, l_2 — средняя длина микротрещин) [3]. Момент

времени нагружения t_2, характеризующий начало их образования, является решением уравнения: $P_1(\tau_{\max}, \sigma_n, t_2) = p_1$. Ему соответствует пороговое значение коэффициента интенсивности напряжений по микротрещинам: $K_{1,m} = (\tau_{\max}+\sigma_n)\sqrt{\pi l_s}$, где l_s — приведенная длина субмикротрещин; $l_s = 10^{-2} q_s$, q_s — количество субмикротрещин в макрообразце объемом 1 куб. мм.

Вероятность микроразрушения $P_2 = P_2(\tau_{\max}, \sigma_n, \lg \dfrac{t}{t_2})$ — вероятность достижения объемной плотностью микротрещин порогового значения, т.е. степень объемной концентрации микроскопических трещин определяется по следующей зависимости:

$$P_2 = \frac{(\tau_{\max} - \sigma_n - \tau_1(\omega))\,\phi_{2,\tau}(n_m)}{\tau_2(\omega) - \tau_1(\omega)} + \frac{(2\sigma_n - \sigma_1(\omega))\,\phi_{2,\sigma}(n_m)}{\sigma_2(\omega) - \sigma_1(\omega)}, \qquad (6)$$

$$n_m \equiv \frac{\lg\left(n/n_2\right)}{\lg\left(N_2/n_2\right)}, \quad n_2 = \omega t_2/2\pi \quad , \quad n = \omega t/2\pi,$$

где $\tau_2 = \tau_2(\omega)$, $\sigma_2 = \sigma_2(\omega)$ — соответственно циклические пределы текучести при сдвиге и одномерном нагружении металлов на базе $N_2 = 5 * 10^8$ циклов; $\phi_{1,\tau} = \phi_{1,\tau}(n_m), \phi_{1,\sigma} = \phi_{1,\sigma}(n_m)$ — монотонно возрастающие функции числа циклов нагружения, характеризующие меру приближения к микроразрушению материала по микротрещинам при сдвиге и одномерном нагружении соответственно; $0 \leqslant \varphi_{1,\sigma}(n_m) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi_{1,\tau}(n_m) \leqslant 1$ — интервалы изменения функций во времени. Выражение (6) с учетом закономерностей формирования механических характеристик металлов в области микроразрушения приводится к виду:

$$P_2 = \phi_2(n_m)\left(\frac{(1.5+\beta_0)\left(\tau^0_{\max} - \sigma^0_n - k_1\right)}{2.5k_2 - k_1\,(1.5+\beta_0)} + \frac{\left(2\sigma^0_n - k_1\right)}{k_2 - k_1}\right), \qquad (7)$$

где $\tau^0_{\max} \equiv \dfrac{\tau_{\max}}{\sigma_{-1}(\omega)}$, $\sigma^0_n \equiv \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{-1}(\omega)}$, $\beta_0 = \dfrac{\sigma_{-1}(\omega)}{\tau_{-1}(\omega)}$, $0.5 \leqslant k_2 \leqslant 0.7$, $7.5 \leqslant \lg N_2 \leqslant 8.5$.

При достижении порогового уровня объемной плотности микротрещин, которой соответствует значение вероятности $p_2 = \text{const}$, начинается слияние микротрещин и образование коротких трещин ($l_3 \in \in (1.0, 5.0)$ *мкм*, l_3 — средняя длина коротких трещин). Момент времени нагружения t_3, характеризующий начало образования коротких трещин, является решением уравнения: $P_2(\tau_{\max}, \sigma_n, \lg \dfrac{t_3}{t_2}) = p_2$. Ему соответствует пороговое значение коэффициента интенсивности напряжений по коротким трещинам $K_{1,sh} = (\tau_{\max} + \sigma_n)\sqrt{\pi l_m}$, где l_m — приведенная длина

микротрещин ($l_m = q_m$, q_m — количество микротрещин в макрообразце объемом 1 куб. мм).

Вероятность микроразрушения по коротким нераспространяющимся трещинам $P_3 = P_3(\tau_{\max}, \sigma_n, \lg \frac{t}{t_3})$, т.е. вероятность достижения обьемной плотностью коротких трещин порогового значения, находят по следующим зависимостям:

$$P_3 = \frac{(\tau_{\max} - \sigma_n - \tau_2(\omega))\,\phi_{3,\tau}(n_{sh})}{\tau_3(\omega) - \tau_2(\omega)} + \frac{(2\sigma_n - \sigma_2(\omega))\,\phi_{3,\sigma}(n_{sh})}{\sigma_3(\omega) - \sigma_2(\omega)} \quad , \qquad (8)$$

$$n_{sh} \equiv \frac{\lg\left(n/n_3\right)}{\lg\left(N_3/n_3\right)}, \quad n_3 = \omega t_3/2\pi \quad , \quad n = \omega t/2\pi,$$

где $\tau_3 = \tau_3(\omega)$, $\sigma_3 = \sigma_3(\omega)$ — базовые значения амплитуд напряжений при числе циклов N_3 для сдвига и одномерного нагружения соответственно; $\phi_{1,\tau} = \phi_{1,\tau}(n_{sh})$, $\phi_{1,\sigma} = \phi_{1,\sigma}(n_{sh})$ — меры приближения к микроразрушению металла по коротким трещинам при сдвиге и одномерном нагружении; $0 \leqslant \phi_{3,\sigma}(n_{sh}) \leqslant 1$; $0 \leqslant \phi_{3,\tau}(n_{sh}) \leqslant 1$. Соотношение (8) с учетом закономерностей формирования механических характеристик металлов имеет вид:

$$P_3 = \phi_3(n_{sh}) \left(\frac{(1+4\beta_0)\left((1.5+\beta_0)\left(\tau^0_{\max} - \sigma^0_n\right) - 2.5k_2\right)}{5k_3\,(1.5+\beta_0) - 2.5k_2\,(1+4\beta_0)} + \frac{\left(2\sigma^0_n - k_2\right)}{k_3 - k_2} \right), \qquad (9)$$

$$\sigma_3(\omega) = 0.2(1 + 4\beta_0)\tau_3(\omega), \quad \sigma_3(\omega) = k_3\sigma_{-1}(\omega),$$
$$0.6 \leqslant k_3 \leqslant 0.8, \quad 6.5 \leqslant \lg N_3 \leqslant 7.5.$$

Развитие коротких трещин ведет к образованию макроскопических трещин длиной $\left(5 * 10^{-2}, 1\right)$ *мм*, которые разделяются на три группы: короткие ($l_4 \in (5 \cdot 10^{-2}, 10^{-1})$ *мм*), средние ($l_5 \in (10^{-1}, 0.5)$ *мм*) и значительные ($l_6 \in (0.5, 1.0)$ *мм*) макроскопические трещины (l_i — средняя длина i — го вида макротрещин). Область обьемного макроразрушения по коротким распространяющимся макротрещинам (длиной до 0.1 мм) характеризуется следующим условием: $\varepsilon_{u,н} \leqslant 0.1\varepsilon_{u,y}$, где $\varepsilon\varepsilon_{u,y}$ и $\varepsilon_{u,н}$ — максимальные значения интенсивности упругих и неупругих деформаций соответственно. Области обьемного макроразрушения по средним макротрещинам (длиной до 0.5 мм) соответствует следующее условие: $\varepsilon_{u,н} \leqslant 0.5\varepsilon_{u,y}$. В области обьемного макроразрушения по значительным макротрещинам (длиной до 1.0 мм) интенсивность неупругих деформаций не превышает интенсивность упругих деформаций.

Используя математическую модель разрушения по макротрещинам при одномерном нагружении [2,3], вероятность макроразрушения образца $P_i = P_i(\tau_{\max}, \sigma_n, \lg \frac{t}{t_i})$, $i = 4, 5, 6$, по макротрещинам i — *го* вида, т.е.

степень объемной концентрации коротких, средних и значительных макротрещин, определяют по следующим зависимостям:

$$P_i = \frac{(\tau_{\max} - \sigma_n - \tau_{i-1}(\omega))\,\phi_{i,\tau}(n_{i,m})}{\tau_i(\omega) - \tau_{i-1}(\omega)} + \frac{(2\sigma_n - \sigma_{i-1}(\omega))\,\phi_{i,\sigma}(n_{i,m})}{\sigma_i(\omega) - \sigma_{i-1}(\omega)} \quad , \quad (10)$$

$$n_{i,m} \equiv \frac{\lg\left(n/n_i\right)}{\lg\left(N_i/n_i\right)}, \quad n_i = \omega t_i/2\pi \quad , \quad n = \omega t/2\pi, \quad i = 4, 5, 6,$$

где $\tau_4 = \tau_4(\omega) = \tau_{-1}(\omega)$, $\sigma_4 = \sigma_4(\omega) = \sigma_{-1}(\omega)$ — базовые значения амплитуд напряжений при числе циклов N_4 для описания разрушения по коротким макротрещинам при сдвиге и одномерном нагружении соответственно; $\tau_5 = \tau_5(\omega)$, $\sigma_5 = \sigma_5(\omega)$ — базовые значения амплитуд напряжений для описания разрушения по средним макроскопическим трещинам при сдвиге и одномерном нагружении соответственно, $\tau_5 = (\tau_s + \tau_{-1}(\omega))/2$, $\sigma_5 = (\sigma_s + \sigma_{-1}(\omega))/2$ (σ_s, τ_s — статический пределы текучести при одномерном нагружении и сдвиге соответственно); N_5 — базовое значение числа циклов изменения базовых напряжений для описания разрушения по средним макротрещинам, $\lg N_5 = 2\sigma_{-1}(\omega)\lg N_4/(\sigma_s + \sigma_{-1}(\omega))$; $\tau_6 = \tau_s$, $\sigma_6 = \sigma_s$; N_6 — базовое значение числа циклов изменения базовых напряжений для описания разрушения по значительным макротрещинам при сдвиге и одномерном нагружении соответственно, $\lg N_6 = \sigma_{-1}(\omega)\lg N_4/\sigma_s$; $\phi_{i,\sigma}(n_{i,m})$, $\phi_{i,\tau}(n_{i,m})$ — монотонно возрастающие функции числа циклов нагружения, характеризующие меру приближения к макроразрушению материала по $i - му$ виду макротрещин при сдвиге и одномерном нагружении соответственно, $0 \leqslant \phi_{i,\sigma}(n_{i,m}) \leqslant 1$; $0 \leqslant \phi_{i,\tau}(n_{i,m}) \leqslant 1$.

Базовые значения амплитуд напряжений $\sigma_i = \Phi_i(p_1, \ldots p_s, T)$, $\tau_i = F_i(p_1, \ldots p_s, T)$ и чисел циклов нагружения $N_i = N_i(p_1, \ldots p_s, T)$, i =1,. . . ,6, в предлагаемой модели микро и макроразрушения металлов являются функциями структурных параметров p_s и температуры T. В качестве структурных параметров сталей p_s рассматривают средний линейный размер зерен, удельную поверхность границ зерен, среднее расстояние между включениями или среднее расстояние между полосами вытянутых включений, характерных для прокатанных сталей.

С учетом вышеизложенного соотношения (10) переписываются в следующей форме:

$$P_4 = \phi_4(n_{4,m})\left(\frac{(0.2\,(1+4\beta_0)\,(\tau^0_{\max} - \sigma^0_n) - k_3)\,\beta_0}{0.2\,(1+4\beta_0) - k_3\beta_0} + \frac{(2\sigma^0_n - k_3)}{k_4 - k_3}\right), \quad (11)$$

$$P_5 = 2\phi_5(n_{5,m})\left(\frac{(\beta_0\,(\tau^0_{\max} - \sigma^0_n) - 1)}{\gamma\sigma_s(\omega) - 1} + \frac{(2\sigma^0_n - 1)}{\sigma_s(\omega) - 1}\right), \quad (12)$$

$$P_6 = \phi_6(n_{6,m})\left(\frac{\left(2\beta_0\left(\tau^0_{\max} - \sigma^0_n\right) - \gamma\sigma_s(\omega) - 1\right)}{\gamma\sigma_s(\omega) - 1} + \frac{\left(4\sigma^0_n - \sigma_s(\omega) - 1\right)}{\sigma_s(\omega) - 1}\right), \quad (13)$$

где $\sigma_s(\omega) \equiv \sigma_s/\sigma_{-1}(\omega)$, $\gamma = \sigma_s\beta_0/\tau_s$, $0.7 \leqslant k_4 \leqslant 0.9$.

Момент времени нагружения t_4 и число циклов n_4, характеризующие начало образования коротких макротрещин, являются решением уравнения: $P_3(\tau_{\max}, \sigma_n, \lg\frac{t_4}{t_3}) = p_3$, p_3 = const, где вероятность микроразрушения по коротким трещинам P_3 определяется по (9). Критерий прочности материала по предельному состоянию, соответствующему макроразрушению по коротким макротрещинам, имеет вид: $P_4 = p_4^*$, p_4^* = const (для вероятности $P_4 = P_4(\tau_{\max}, \sigma_n, \lg\frac{t}{t_4})$ — выражение (11)), и связывает время до разрушения t, число циклов до разрушения n и предельные значения компонент вектора напряжений на площадке максимальных касательных напряжений $\tau^*_{\max}$ и σ^*_n при макроразрушении по коротким макротрещинам. Входящие в критерий характеристики микроразрушения металла - моменты начала образования коротких, микро и субмикротрещин находятся из последовательного решения соответствующих уравнений.

Момент времени нагружения t_5 и число циклов n_5, характеризующие начало образования средних макротрещин, являются решением уравнения: $P_4(\tau_{\max}, \sigma_n, \lg\frac{t_5}{t_4}) = p_4$, p_4 = const. Предельное состояние материала, соответствующее макроразрушению по средним макротрещинам, описывается условием: $P_5 = p_5^*$, p_5^* = const (вероятность $P_5 = P_5(\tau_{\max}, \sigma_n, t)$ определяется по (12)); входящие в него характеристики микро и макроразрушения металла находятся как последовательное решение соответствующих уравнений.

Момент времени нагружения t_6 и число циклов n_6, характеризующие начало образования значительных макротрещин, являются решением уравнения: $P_5(\tau_{\max}, \sigma_n, \lg\frac{t_6}{t_5}) = p_5$, p_5 = const; критерий разрушения, связывающий время до разрушения t, число циклов до разрушения n и предельные значения компонент вектора напряжений на площадке максимальных касательных напряжений $\tau^*_{\max}$ и σ^*_n при макроразрушении по значительным макротрещинам, представляется в виде: $P_6 = p_6^*$, p_6^* = const; вероятность $P_6 = P_6(\tau_{\max}, \sigma_n, t)$ задано соотношением (12).

При описании конкретного нагружения после нахождения времени разрушения по коротким трещинам нужно подставить его в выражения для вероятности макроразрушения по средним макротрещинам P_5 (12) и по значительным макротрещинам P_6 (12) . Если при этом $P_4 < p_4^*$, $P_5 = p_5^*$ или $P_4 < p_4^*$, $P_5 \leqslant p_5^*$, $P_6 = p_6^*$, то разрушение произойдет

не по коротким, а по средним или значительным макротрещинам и для данного процесса необходимо рассматривать соответствующие критерии разрушения.

Во всем диапазоне чисел циклов до разрушения идут одновременно два процесса – процесс развития усталостных трещин и процесс вязкого разрушения. При $N_5 \geqslant N \geqslant N_4$, $N_4 = 5 * 10^6$ циклов нагружения микроразрушение происходит, в основном, по усталостным трещинам, которое может сопровождаться микропластическим деформированием. С уменьшением числа циклов вероятность разрушения по усталостным трещинам практически не уменьшается, но при этом растет вероятность вязкого разрушения $N_6 \geqslant N > N_5$, обусловленного развитием неупругого деформирования. Для одномерного гармонического нагружения примерно при амплитуде напряжений $\sigma_a = \sigma_s$ (σ_s - статический предел текучести, $N_6 = 5 * 10^3 - 5 * 10^4$ циклов) разрушение по усталостным трещинам и вязкое разрушение равновероятно (при этом накопленная неупругая деформация порядка упругой деформации). На базе чисел циклов, меньших N_6, вероятность вязкого разрушения превышает вероятность разрушения по усталостным трещинам. Энергия обьемного (множественного) микро и макроразрушения металлов является составной частью энергии упругого макродеформирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №10-08-00933.

Литература

1. *Завойчинский Б.И.* Долговечность магистральных и технологических трубопроводов. Теория, методы расчета, проектирование. М:., Недра, 1992. 271 с.
2. *Завойчинская Э.Б.* Об одной модели описания микроразрушения металлов// Проблемы машиностроения и автоматизации. 2009. №1. С. 60–65.
3. *Завойчинская. Э.Б.* Об одной гипотезе микроразрушения металлов при полигармоническом нагружении// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. №3. С.27–34.
4. *Завойчинская Э.Б.* Моделирование процесса микроразрушения металлов при сложном напряженном состоянии// Труды Международной научно-технической конференции «Инновации в машиностроении», 26–29 октября 2010 года. 2010. 6 с.

МЕТОД ФИКТИВНЫХ НАГРУЗОК В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯЖЕСТКОГО ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.В. Звягин, А.Г. Геворкян

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Москва, Россия

При численном решении многих задача теории упругости можно с успехом использовать Методы граничных элементов (МГЭ). Одним из МГЭ является Метод фиктивных нагрузок (МФН). Основу МФН, как и всех МГЭ, составляет представление решения задачи в виде линейной комбинации некоторых базовых решений уравнений теорий упругости, взятых с неопределенными коэффициентами, которые определяются из граничных условий решаемой задачи. МФН можно успешно применить при решении контактных задач теории упругости. В данной работе продемонстрирован МФН на примере задачи дозвукового движения жесткого штампа по границе упругой полуплоскости. В задаче требуется определить напряженно-деформированное состояние среды и область контакта штампа со средой. В работе приведены результаты численного решения данной задачи в случае штампа с основанием в форме параболы при скоростях движения меньших скорости волн Релея и превосходящих ее.

В случае установившегося движения штампа по границе упругой полуплоскости для малых деформаций ([1], [2], [4]) уравнения движения в системе координат, связанной с движущимся штампом сводятся к двум уравнениям для потенциалов продольных и поперечных волн

$$\alpha^2\varphi_{,xx}+\varphi_{,yy}=0,\quad \beta^2\psi_{,xx}+\psi_{,yy}=0, \tag{1}$$

где $\alpha^2=1-(\frac{V_0}{a})^2$, $\beta^2=1-(\frac{V_0}{b})^2$, $a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, λ,μ — упругие модули. Перемещения и напряжения задаются производными потенциалов продольных и поперечных волн

$$u_x=\varphi_{,x}+\psi_{,y},\quad u_y=\varphi_{,y}-\psi_{,x}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{xy}}{\mu}&=2\varphi_{,xy}-(1+\beta^2)\psi_{,xx},\\ \frac{\sigma_{yy}}{\mu}&=-(1+\beta^2)\varphi_{,xx}-2\psi_{,xy},\\ \frac{\sigma_{xx}}{\mu}&=-\frac{\sigma_{yy}}{\mu}+2(\alpha^2-\beta^2)\varphi_{,xx},\end{aligned} \tag{3}$$

Так как уравнениям (1) удовлетворяют произвольные аналитические функции $\Phi(z_1), \Psi(z_2)$, где $z_1 = x + i\alpha y, \quad z_2 = x + i\beta y$, то выражения для перемещений и напряжений (2), (3) можно переписать в следующей форме:

$$u_x = Re\Phi'(z_1) - \beta Im\Psi'(z_2); \quad u_y = -\alpha Im\Phi'(z_1) - Re\Psi'(z_2); \tag{4}$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = -2\alpha Im\Phi''(z_1) - (1+\beta^2) Re\Psi''(z_2),$$
$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = -(1+\beta^2) Re\Phi''(z_1) + 2\beta Im\Psi''(z_2), \tag{5}$$
$$\frac{\sigma_{xx}}{\mu} = (1+2\alpha^2-\beta^2) Re\Phi''(z_1) - 2\beta^2 Im\Psi''(z_2).$$

На границе упругой полуплоскости вне области контакта вектор напряжений равен нулю. В области контакта считаем заданным вертикальное перемещение, определяемое формой основания штампа и принимаем модель взаимодействия штампа с упругой средой в форме закона сухого трения. В случае малых деформаций граничные условия можно линеаризовать и снести на невозмущенную границу полуплоскости (рис.1):

$$y = 0, \quad 0 < x < L, \quad u_y = u_0(x), \quad \sigma_{xy}(x) = -k\sigma_{yy}(x); \tag{6}$$

$$y = 0, \quad x < 0, x > L, \quad \sigma_{xy}(x) = 0, \quad \sigma_{yy}(x) = 0. \tag{7}$$

Здесь и ниже использованы обозначения: u_x, u_y — компоненты вектора перемещений; σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} — компоненты тензора напряжений; k —коэффициент трения; $y = u_0(x)$ — уравнение контура штампа. Система координат (x,y) связана со штампом, $y = 0$ соответствует поверхности среды в невозмущенном состоянии, $x = 0$ — началу области контакта, $x = L$ — концу области контакта, $x = L_x$ характеризует положение максимального заглубления контура штампа и зависит от его формы (для параболического штампа это положение вершины параболы, для плоского штампа $L_x = 0$), P — нормальная нагрузка штампа на полуплоскость.

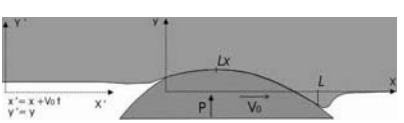


Рис. 1.

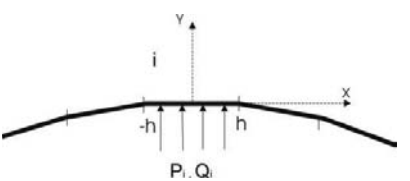


Рис. 2.

Разобьем область контакта на N элементов и будем считать на каждом элементе нагрузку со стороны штампа равномерно распределенной

(рис. 2). Плотность распределения нормальной нагрузки на i-ом элементе, отнесенную к модулю сдвига μ, положим равной P_i, касательной нагрузки — Q_i. Решая задачу с помощью МФН, в качестве базовых решений предлагается использовать решения двух краевых задач для i-ого элемента. В задаче 1 необходимо решить систему уравнений для потенциалов продольных и поперечных волн (1) в локальной системе координат, началом которой является центр рассматриваемого граничного элемента со следующими краевыми условиями на отрезке $y = 0^-$, $|x| < h$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = P_i \mu \tag{8}$$

и с граничными условиями на внешнсти отрезка

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0.$$

Граничному условию $\sigma_{xy} = 0$ можно тождественно удовлетворить выбором функции $\Psi(z_2)$ в форме

$$\Psi(z_2) = \frac{2\alpha}{(1+\beta^2)} i \Phi(z_2).$$

Тогда на границе $y = 0$ второе граничное условие $|x| < h$, $\sigma_{yy}(x) = P_i\mu$, $|x| > h$, $\sigma_{yy}(x) = 0$ примет вид

$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = \frac{\Delta}{(1+\beta^2)} Re\Phi'' = f(x), \tag{9}$$

$$\Delta = 4\alpha\beta - (1+\beta^2)^2, \quad f(x) = P_i, \quad |x| < h; \quad f(x) = 0, \quad |x| > h.$$

Полученная задача Дирихле имеет следующее решение

$$\Phi''(z) = \frac{(1+\beta^2)}{\Delta} \frac{P_i}{\pi i} \ln \frac{z-h}{z+h} = \frac{(1+\beta^2)}{\Delta} \frac{P_i}{\pi} \left(-i \ln \frac{\sqrt{(x-h)^2+(\alpha y)^2}}{\sqrt{(x+h)^2+(\alpha y)^2}} + \right.$$
$$\left. + \arccos \frac{x-h}{\sqrt{(x-h)^2+(\alpha y)^2}} - \arccos \frac{x+h}{\sqrt{(x+h)^2+(\alpha y)^2}} \right). \tag{10}$$

Интегрируя выражение (10), находим

$$\Phi'(z) = \frac{(1+\beta^2) P_i}{\Delta \pi i} ((z-h)\ln(z-h) - (z+h)\ln(z+h)).$$

Найденное решение позволяет получить перемещение $u_y(x)$ на границе $y = 0$

$$u_y(x) = -\alpha Im\Phi'(z_1) - Re\Psi'(z_2) = P_i \alpha \frac{(1-\beta^2)}{(1+\beta^2)} Im\Phi'(x). \tag{11}$$

Компоненты тензора напряжений σ_{yy} будут иметь следующий вид

$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = \frac{\Delta}{(1+\beta^2)} Re\Phi'' = \frac{P_i}{\pi}(arg(z-h) - arg(z+h)). \qquad (12)$$

Коэффициент влияния самого элемента на себя может быть вычислен предельным переходом $x = 0, `y- > 0^+$

$$u_y(0, 0^+) = -P_i\alpha\frac{(1-\beta^2)}{\pi\Delta}2h\ln h. \qquad (13)$$

Для точки границы стоящей справа на расстоянии a>h от центра данного элемента, коэффициент влияния будет равен

$$u_y(x) = -P_i\alpha\frac{(1-\beta^2)}{\pi\Delta}((a-h)\ln(a-h) - (a+h)\ln(a+h)). \qquad (14)$$

Для точки границы стоящей слева на расстоянии a>h от центра данного элемента, коэффициент влияния будет равен

$$u_y(x) = -P_i\alpha\frac{(1-\beta^2)}{\pi\Delta}(-(a+h)\ln(a+h) + (a-h)\ln(a-Sh)). \qquad (15)$$

Как видим, данные величины одинаковы. Влияние определяется только расстоянием.

В задаче 2 необходимо решить систему уравнений (1) для потенциалов со следующими краевыми условиями на отрезке $y = 0^-, \quad |x| < h$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = Q_i\mu \qquad (16)$$

и с граничными условиями на внешности отрезка

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \qquad (17)$$

Она решается аналогично. В этом случае имеем следующие выражения для производных функции $\Phi(z)$

$$\Phi''(z) = -\frac{2\beta Q_i}{\Delta\pi i}\ln\frac{z-h}{z+h}, \qquad (18)$$

$$\Phi'(z) = -\frac{2\beta Q_i}{\Delta\pi}((z-h)\ln(z-h) - (z+h)\ln(z+h)). \qquad (19)$$

Перемещение $u_y(x)$ и компоненты тензора напряжений σ_{xy} на границе $y = 0$ имеют следующий вид

$$u_y(x) = \frac{(1+\beta^2-2\alpha\beta)}{\pi\Delta} Im\Phi'(z) =$$

$$= Q_i \frac{(1+\beta^2-2\alpha\beta)}{\pi\Delta}((x-h)arg(z-h)-(x+h)arg(z+h)), \qquad (20)$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = -\frac{\Delta}{2\beta} Im\Phi'' = \frac{Q_i}{\pi}(arg(z-h)-arg(z+h). \qquad (21)$$

Далее, учитывая локальность системы координат, соответствующей каждому элементу, решение общей задачи для штампа представляется в виде суммы решений для N элементов

$$u_y(x) = \sum_{i=1}^{N} P_i u_y^1(x-x_i) + \sum_{i=1}^{N} Q_i u_y^2(x-x_i), \qquad (22)$$

где x_i — координата центра соответствующего элемента с номером i, $u_y^1(x)$, $u_y^2(x)$ — перемещения на границе, полученные в задаче 1 и в задаче 2.

Выполнение граничного условия $u_y = u_0(x)$ в центре каждого граничного элемента позволяет написать систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} P_i u_y^1(x_k-x_i) + \sum_{i=1}^{N} Q_i u_y^2(x_k-x_i) = u_0(x_k), \quad k = 1,2,3,...,N. \quad (23)$$

Второе граничное условие, записанное для центра каждого граничного элемента $y = 0, \quad 0 < x_k < L, \quad \sigma_{xy}(x_k) = -k\sigma_{yy}(x_k), \quad k = 1,2,3,...,N$ дает еще N уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} P_i(-k\sigma_{yy}^1(x_k-x_i)) + Q_i\sigma_{xy}^2(x_k-x_i) = 0, \quad k = 1,2,3,...,N, \quad (24)$$

гже $\sigma_{yy}^1(x), \sigma_{xy}^2(x)$ — компоненты тензора напряжений на границе, полученные в задаче 1 и в задаче 2.

Таким образом, получается система из 2N линейных алгебраических уравнений с 2N неизвестными, которую можно решить численно методом Гаусса.

При движении штампа с контуром в виде параболы в контактной задаче неизвестными являются два параметра. Это положение вершины параболы относительно начала области контакта – L_x и длина области контакта L. Для определения этих параметров используется условие $\int_0^L \sigma_{yy}|_{y=0} dx = -P$ и условие ограниченности решения в передней точке контакта в случае $V_0 < V_R$ и в задней точке в случае $V_0 > V_R$, где V_0 - скорость движения штампа, V_R - скорость волн Релея [1].

Ниже приведено графическое сравнение численного решения с помощью

МФН с аналитическим решением, полученным в [4]. Распределение нормальной нагрузки в области контакта при скорости штампа не превосходящей скорость волн Релея представлено на рисунке 3, при скорости штампа большей скорости волн Релея на рисунке 4.

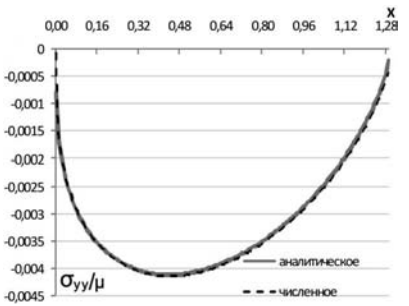


Рис. 3.

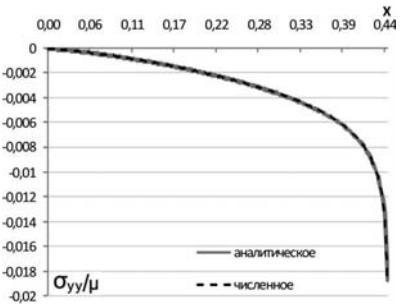


Рис. 4.

Как видно из рисунков 3 и 4 численное решение с помощью МФН практически совпадает с аналитическим решением [4].

Основные результаты:

1. Предложен численный метод граничных элементов (МФН) и найдены базовые решения для динамических задач теории упругости в случае установившегося движения.
2. Метод реализован программой для ЭВМ и проверена его эффективность сравнением с аналитическим решением.
3. Результаты сравнения показывают, что предложенный метод можно с успехом использовать при решении динамических контактных задач теории упругости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-08-00396-а).

Литература

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970 . –Т. 1,2. - 492с., 568 с.
3. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир, 1987. – 328 с.
4. *Звягин А.В.* Дозвуковое движение твердых тел конечных размеров в деформируемой среде и некоторые динамические контактные задачи // Дисс... канд. физ. - мат. наук: 01.02.04. - Москва, 1979. - 114 с.

АСИММЕТРИЧНОЕ РАСКЛИНИВАНИЕ СРЕДЫ С ОБРАЗОВАНИЕМ ОТРЫВНЫХ ЗОН

А. В. Звягин, Г. А. Ромашов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Москва, Россия

Одной из актуальных задач динамики деформируемой твердой среды продолжает оставаться задача ее разрушения жестким ударником в процессе проникания. Движение тела в среде очень сильно зависит от возникающих областей отрыва среды от тела, которые определяют устойчивость движения. Поэтому при контактном разрушении важным является определение возможных зон отрыва среды от поверхности тела, поскольку их наличие резко меняет баллистические характеристики внешних сил и моментов, действующих на тело со стороны среды. Такие проблемы характерны для задач проникания тел при наличии асимметрии движения. Сама асимметрия движения практически всегда присутствует в реальных задачах. В данной работе получено аналитическое решение и проведено исследование процесса стационарного расклинивания среды телом при наличии асимметрии.

Основными параметрами задачи являются параметры среды, скорость движения, геометрия поверхности ударника, коэффициент трения и угол атаки, характеризующий асимметрию движения. В широком диапазоне скоростей движения исследовано влияние перечисленных выше параметров на поведение отрывных зон, определены действующие на тело внешние силы и моменты.

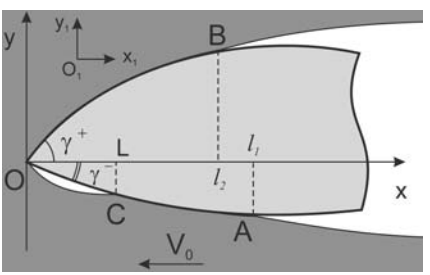


Рис. 1.

Будем считать, что тело движется с постоянной скоростью V_0 относительно неподвижной системы координат $O_1X_1Y_1$, а движение среды плоскопараллельное. Отрыв среды от тела происходит в точках A для верхней части контура и B для нижней. Также будем считать углы γ^-, γ^+ малыми и $\gamma^- < \gamma^+$ + (рис. 1). В случае асимметрии движения возможен отрыв среды от поверхности тела на стороне меньшего угла γ^- в окрестности носовой части тела. На рис. 1 OC – область возможного отрыва. Ее размер L является неизвестным и должен быть определен в ходе решения.

На поверхности контакта движущегося тела и среды ставились условия, обеспечивающие контакт и закон Кулона-Мора о наличии сухого трения между средой и телом. На поверхности, соответствующей областям отрыва среды от тела ставились условия равенства нулю внешних усилий. Математически данная смешанная краевая задача сводится к определению двух гармонических функций во внешней области, ограниченной контуром тела и свободными поверхностями по заданным на границе соотношениям между вторыми производными искомых функций.

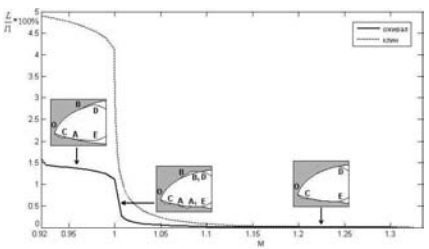


Рис. 2.

С использованием конформных отображений, определение решения сведено к задаче сопряжения Римана-Гильберта для полуплоскости. Задача осложняется наличием дополнительных неизвестных в виде размеров областей отрыва. Применяя методы решения краевых задач теории функций комплексного переменного, получено решение задачи в квадратурах. Используя условия нарушения и восстановления контакта, определены области отрыва.

Размер свободной поверхности L определяется численно из условия непрерывности скорости в точке отрыва и проверки условия контакта. На рис. 2 приведены графики зависимости длины области отрыва L от числа Маха M для поперечных волн для тел в форме клина и оживала для углов $\gamma^- = \pi/60$, $\gamma^+ = \pi/40$ и коэффициента трения $k = 0.1$ для диапазона скоростей $(V_R, \sqrt{2}b)$, где V_R – скорость волны Релея, в случае $l_1 = l_2$ (этот случай эквивалентен движению симметричного тела под углом атаки). Зависимость подъемной силы F_L и силы сопротивления F_R от числа Маха M для поперечных волн для тел в форме клина и оживала приведены на рис. 3. В табл. 1 представлена зависимость предельного значения меньшего угла γ^- от числа Маха M для поперечных волн, при котором зона отрыва OC отсутствует, при фиксированном угле раствора тела $\gamma = \gamma^+ + \gamma^- = \pi/30$ и отсутствии трения.

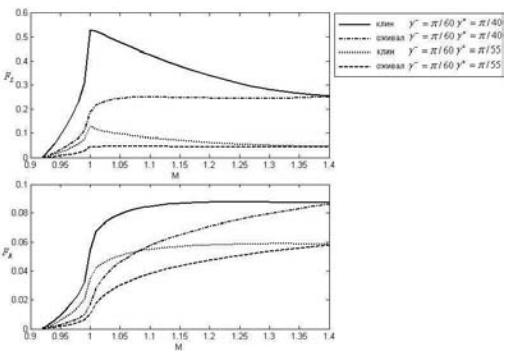


Рис. 3.

Отдельный интерес представляет картина обтекания тела оживальной формы в рассматриваемом диапазоне скоростей. В отличие от клина, требуется определить не только свободную поверхность OC, но и точки A, B отрыва среды от тела. При переходе через скорость распространения продольных возмущений отрыв среды из точек A, B ложится на тело, образуя в диапазоне скоростей $V_0 \in (b, 1.01b)$ отдельные, быстро исчезающие при увеличении скорости, зоны отрыва AA_1, BB_1, и дальнейший отрыв среды происходит от вершин оживала D и E (рис. 2).

Таблица 1.

γ^+	$\pi/61$	$\pi/65$	$\pi/100$	$\pi/2000$	$\pi/10^4$	$\pi/10^5$	$\pi/10^6$
M клин	1.2052	1.3359	1.3877	1.41046	1.41256	1.41369	1.41405
M оживал	1.0722	1.2993	1.3764	1.40888	1.41186	1.41348	1.41398

Подводя общие итоги, можно сделать следующие выводы:

1. Удалось получить аналитическое решение, как в дозвуковом, так и в трансзвуковом диапазоне скорости движения тела (клин и оживал).
2. Во всем диапазоне рассматриваемых скоростей определены точки отрыва среды для контура тела в форме клина и оживала.
3. В случае движения тела оживальной формы при переходе через скорость распространения продольных возмущений, образуются отдельные, быстро исчезающие при увеличении скорости, зоны отрыва.
4. При увеличении скорости движения тела длина области отрыва на носу тела уменьшается (рис.2).
5. Длина зоны отрыва на носу тела при переходе через скорость распространения поперечных возмущений не терпит разрыва. Далее, с увеличением скорости движения, свободная поверхность резко сокращается, что вызвано прекращением влияния на среду перед телом поперечных возмущений, и затем ее размер медленно уменьшается до нуля (рис. 2).
6. Существует предельная величина скорости , при которой исчезает зона отрыва на носу тела (табл. 1). При превышении этой скорости силы, действующие на тело, одинаковы для клина и ударника с формой в виде оживала. Сами силы определяются скоростью ударника, параметрами среды, коэффициентом трения и толщиной тела и не зависят от геометрии тела (рис. 3).

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ 09-08-00396-а.

СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОДИНАМИКИ ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА

М.Ш. Исраилов

Грозненский государственный нефтяной институт
Грозный, Россия

israiler@hotmail.com

Значительный раздел сейсмодинамики протяженных подземных сооружений базируется на предложенной А.А. Ильюшиным модели взаимодействия сооружения и грунта. В одномерном случае взаимодействие описывается связью между касательным напряжением на границе контакта и относительным смещением, аналогичной зависимости между напряжением и деформацией для линейно упругого, вязкоупругого или упругопластического материала. Это предложение Ильюшина вызвало прогресс в инженерной сейсмодинамике и привело к большому числу экспериментальных исследований по определению констант и функций, входящих в указанные типы взаимодействия. На основе принятых моделей были проведены сейсмодинамические расчеты многих подземных сооружений, в частности, трубопроводов. Однако в этих расчетах не учитывалось взаимное влияние движений объекта и среды – движение среды задано и не искажается. В настоящей работе даны новая формулировка и решение задачи о движении трубопровода при сейсмическом воздействии или взрыве в точной (связанной) постановке как задачи о совместном движении упругой среды и стержня. Приведенные здесь результаты по форме (но не по физическому содержанию) соответствуют полученным по "модели взаимодействия". При этом аналог "коэффициента взаимодействия определяемого экспериментальным путем в предыдущих исследованиях, обретает из решения внешней задачи для среды точное теоретическое значение. Выявлены качественные явления, имеющие принципиальное значение для оптимального проектирования и выбора условий прокладки магистральных трубопроводов в сейсмических районах.

1. Вывод дифференциального уравнения связанного движения (связанных колебаний) трубопровода

Изучается совместное движение упругой среды и бесконечного трубопровода, рассматриваемого как толстостенный упругий цилиндр (стержень) внешнего радиуса a, вызванное распространением вдоль него в среде плоской продольной волны. Примем, что в цилиндрической системе координат (r, θ, z) с осью Oz, направленной вдоль оси стержня, движение среды $(r > a)$ является одномерным. А именно, будем счи-

тать, что компоненты u_r, u_θ вектора перемещений равны нулю и, значит, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(0, 0, u_z)$, $u_z \equiv u(r, \theta, z, t)$.

В качестве основной задачи сейсмодинамики трубопровода (совместного движения среды и стержня) сформулируем задачу об определении движения стержня по измеренным на некотором расстоянии $r = R$ от оси стержня перемещениям (сейсмическим колебаниям) среды $u_R(\theta, z, t)$.

Примем $a < R \leq R_0$, где R_0 глубина залегания трубопровода. Если $R \gg a$ (скажем, больше $(3 \div 5)a$), то приближенно можно считать, что характеристики волны не искажаются на расстоянии R из-за наличия стержня и тогда за u_R могут быть приняты перемещения на поверхности $r = R$ в сейсмической волне в отсутствие трубопровода, т. е. $u_R \simeq u_0(\theta, z, t) \equiv u_0(R, \theta, z, t)$.

Примем за начало координат на оси z положение фронта волны Π в момент времени $t = 0$. Фронт Π перпендикулярен оси z и движется по среде в положительном направлении этой оси со скоростью $c_1' = \sqrt{((\lambda' + 2\mu')/\rho')}$ (штрихом помечаются характеристики, относящиеся к среде; ρ' — плотность среды, λ', μ' — константы Ляме). Тогда в момент времени t положение Π определяется координатой $z = c_1' t$.

Для металлических труб (стальной, чугунной) стержневая скорость $c = \sqrt{(E/\rho)}$ (E модуль Юнга материала трубы), как правило, больше скорости продольных волн в грунте. Но из-за гашения скорости на стыках, а также в случае неметаллических труб (бетонных, асбестоцементных и т. п.), на практике может реализоваться два режима распространения сейсмической волны вдоль трубопровода – сверхзвуковой, когда число Маха $M \equiv c_1'/c \geq 1$ и дозвуковой с $M < 1$. В первом случае возмущения, как в среде, так и в стержне, имеют место позади фронта Π, во втором (дозвуковом) возмущения существуют и за и перед фронтом Π.

Предположим, что измеряемое на расстоянии $r = R$ перемещение $u_R \simeq u_0$ является функцией расстояния $Z = c_1' t - z$ от фронта Π. Тогда реализуется установившийся режим, когда все функции (перемещения среды u и стержня U) зависят от переменной Z и (r, θ). В этих условиях движение среды описывается уравнением Лапласа (по переменным r и θ)

$$\Delta_{(r,\theta)} u(r, \theta; Z) = 0, \quad \Delta_{(r,\theta)} = \partial^2/\partial^2 r + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial^2\theta, \qquad (1)$$

в котором зависимость от Z является параметрической.

К уравнению (1) необходимо присоединить граничные условия

$$u(r, \theta; Z)\big|_{r=R} = u_0(\theta; Z)H(Z), \quad u(r, \theta; Z)\big|_{r=\phi} = U(Z). \qquad (2)$$

Второе условие в (2) означает, что на поверхности контакта среды и стержня принято условие полного прилипания. В сверхзвуковом случае в

(1), (2) $Z \geq 0$, а в дозвуковом $-\infty < Z < +\infty$; через $H(Z)$ обозначена единичная функция Хевисайда.

Разлагая граничное значение u_0 в ряд по θ, можно искать решение краевой задачи (1), (2) методом Фурье. Если угол θ отсчитывается от верхней образующей цилиндрической трубы, то задача симметрична по θ и u_0, а значит и неизвестное решение u, разлагаются в ряды по косинусам. Из дальнейшего элементарно видно, что коэффициенты $u^{(n)}(r;Z)$ при $\cos n\theta$ для $n \geq 1$ в разложении решения u не дают вклада в результирующую силу, действующую на трубопровод и приводящую его в движение. Поэтому для написания уравнения движения трубы достаточно найти функцию $u^{(0)}(r;Z)$, удовлетворяющую обыкновенному дифференциальному уравнению

$$D_r^2 u^{(0)} + r^{-1} D_r u^{(0)} = 0, \quad D_r \equiv d/dr.$$

Граничные условия для $u^{(0)}$ совпадают с (2), только надо в первом условии $u_0(\theta;Z)$ заменить ее средним значением (первым коэффициентом ее ряда Фурье) $\overline{u}_0(Z) = a_0/2 = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} u_0(\theta;Z)d\theta$. В случае однородной волны $\overline{u}_0 = u_0$.

Решая поставленную задачу, имеем

$$u^{(0)}(r;Z) = \frac{ln(r/a)}{ln(R/a)}[\overline{u}_0(Z)H(Z) - U(Z)] + U(Z). \tag{3}$$

Для получения уравнения движения трубопровода необходимо вычислить касательные напряжения $\sigma_{rz} = -\mu' \partial u^{(0)}/\partial r$, исходя из (3). Тогда результирующая сила, действующая на поверхности элемента стержня длиной dz, равна

$$f(Z) = dz \int\limits_0^{2\pi} (-\sigma_{rz})_{r=a} a d\theta = \frac{2\pi\mu'}{ln(R/a)}[\overline{u}_0(Z)H(Z) - U(Z)]. \tag{4}$$

В качестве массовой силы, приводящей в движение трубопровод, выступает сила (4), отнесенная к единице его массы, с учетом чего уравнение продольных колебаний трубопровода в установившемся режиме принимает вид

$$d^2U/dZ^2 \pm \lambda^2 U(Z) = \pm\lambda^2 \overline{u}_0(Z)H(Z), \tag{5}$$

где

$$\lambda = \left(\frac{2\mu'}{E|1-M^2|h(2a-h)ln(R/a)}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Здесь h есть толщина стенки цилиндрической трубы. Верхние знаки в уравнении (5) берутся в сверхзвуковом случае ($M > 1$), а нижние в дозвуковом ($M < 1$).

Уравнение (5) по форме совпадает с уравнением, полученным для колебаний стержня по "модели взаимодействия" [1, 2], однако здесь λ определяется точным теоретическим выражением (6), тогда как в предыдущих исследованиях [2] оно выражается через экспериментально определяемые величины.

2. Решения для дозвуковых и сверхзвуковых режимов

К уравнению необходимо присоединить условия равенства нулю перемещения и скорости перед фронтом волны ($Z < 0$) в сверхзвуковом случае и ограниченности решения при $Z \to \pm\infty$ в дозвуковом. Решения, удовлетворяющие этим условиям, находятся так же, как в [1] и имеют вид при $M > 1$

$$U(Z) = \lambda \int_{0-}^{Z} \overline{u}_0(Z') sin\lambda(Z - Z') dZ'$$

и при $M < 1$

$$U(Z) = \frac{\lambda}{2}\left(e^{\lambda Z} \int_{Z}^{\infty} \overline{u}_0(Z') H(Z') e^{-\lambda Z'} dZ' + H(Z) e^{-\lambda Z} \int_{0-}^{Z} \overline{u}_0(Z') e^{\lambda Z'} dZ'\right).$$

Установившиеся (предельные) колебательные режимы для обоих случаев изучены в [3]. При этом установлено, что в сверхзвуковом случае возможно появление резонанса. Для гармонических сейсмических волн $\overline{u}_0(Z) = A_0 \sin\omega_1 Z = A_0 \sin\omega(t - z/c_1')$ поведение решений (в частности, динамический коэффициент напряжений равный отношению максимального напряжения в трубе к максимальному напряжению в сейсмической волне) существенно зависит от значений ω_1 и λ (и порядка их отношения). Характерное значение $\omega_1 \sim 30^{-1}$ м$^{-1}$ (длина волны около 190 м). По формуле (6) вычислялись значения λ для стальных и чугунных труб диаметра 20 см с толщиной стенок 0, 5 см. При глубине залегания $0,5 \sim 1,5$ м для различных типов грунтов (мягкий грунт, неуплотненная глина и плотная глина) λ меняется в пределах $1,2 \sim 2,9$ м$^{-1}$. В вычислениях использованы характеристики грунтов, приведенные в [4]. Для бетонных труб ($E \sim 20 \cdot 10^9$ Нм$^{-2}$) диаметра 60 см и толщины 1 см при глубине залегания $0,9 \sim 1,5$ м λ меняется в пределах $2,1 \sim 3,5$ м$^{-1}$. Таким образом, во всех случаях $\lambda \geq \omega_1$, что упрощает анализ полученных решений.

Литература

1. *Ильюшин А. А., Рашидов Т.* Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук, 1971, №1. С.37–42.
2. *Рашидов Т.* Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Изд-во "Фан"УзССР, 1973. 180 с.
3. *Исраилов М. Ш.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ., 1996, №5. С.41–45.
4. *Чедвик П., Кокс А., Гопкинс Г.* Механика глубинных подземных взрывов. М.: Изд-во "Мир 1966. 126 с.

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГОЙ КОНСОЛЬНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПОЛОСЫ

И. А Кийко, В. В. Показеев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Московский государственный технический университет "МАМИ"
Москва, Россия

pokazeyev@yandex.ru

Исследуется нестационарный панельный флаттер вязкоупругой консольно закрепленной полосы, когда один край полосы жестко заделан, а второй — свободен. Приближенные оценки значений критической скорости флаттера получены в классе функций, представимых в виде линейной комбинации многочленов специального вида.

Первые результаты по флаттеру вязкоупругой прямоугольной пластины были получены в работах [1-3] с использованием метода Бубнова-Галеркина и усреднения [4]. Было обнаружено, что критическая скорость потока примерно в два раза меньше, чем для соответствующей упругой пластины с мгновенным модулем Юнга, и это отношение не зависит от «вязких» свойств материала. В публикации [6] получен, казалось бы, естественный результат, поскольку речь идёт об асимптотической устойчивости: для случая «малой» вязкости оценками показано,что скорость потока, найденная по предельному модулю, обеспечивает достаточное условие устойчивых колебаний. В статье [7] получен принципиально новый результат: одним точным и одним приближенным решениями задачи о флаттере вязкоупругой полосы установлено, что критическая скорость равна мгновенно-модульной.

В предлагаемой работе, в развитие результатов [8], предложена система многочленов, тождественно удовлетворяющих граничным условиям задачи; приближенное решение задачи флаттера находится в форме линейной комбинации этих многочленов. Точность решения и сходимость метода тестируется на известных результатах [9-11], относящихся к флаттеру и дивергенции упругой полосы. В задаче флаттера вязкоупругой консольно закрепленной полосы получен тот же результат, что и в [7]; в случае дивергенции обнаружен новый результат: критическая скорость флаттера совпадает с предельно-модульной.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную вязкоупругую полосу, которая в прямоугольной системе координат занимает область $0 \le y \le l$, $|x| \le \infty$. Предполагается, что один край полосы ($y = 0$) жестко заделан, а второй ($y = l$) – свободен. Полоса обтекается потоком газа с вектором

скорости $\bar{v} = \bar{n}_0 v$, $\bar{n}_0 = (\cos\theta, \sin\theta)$ и невозмущенными параметрами потока p_0, ρ_0, c_0 – соответственно: давление, плотность и скорость звука.

Материал полосы примем линейным вязкоупругим

$$\sigma(t) = E_0 \left(\varepsilon(t) - \varepsilon_1 \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)\, d\tau \right) \equiv E_0(1 - \varepsilon_1 \Gamma_1)\varepsilon(t)$$

Колебания полосы описываются уравнением [5,6]

$$D_0 \,(1 - \varepsilon_1 \Gamma_1)\; \Delta^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\gamma\; p_0}{c_0} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v\, \bar{n}_0 \mathrm{grad}\, w \right) = 0 \qquad (1)$$

в котором введены обозначения: $D_0 = E_0 h^3/(12(1-\nu^2))$ – цилиндрическая жесткость, h – толщина полосы, E_0 – модуль Юнга, ρ, ν – плотность и коэффициент Пуассона материала полосы, γ – показатель политропы газа. Уравнение (1) исследуется при граничных условиях консольного закрепления

$$\begin{aligned} &y = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ &y = l: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы определить наименьшее значение скорости потока v^* такое, что при $v < v^*$ возмущенное движение будет асимптотически устойчивым, а при $v > v^*$ – асимптотически неустойчивым.

В предположении $\Gamma(t) = \exp(-\beta t)$ введем в уравнении (1) безразмерные координаты x/l, y/l, время βt и скорость $M = v/c_0$, сохранив за координатами и временем прежние обозначения. В безразмерных координатах уравнение (1) примет вид:

$$\left(1 - \lambda_1 \hat{\Gamma}_1\right) \Delta^2 w + a_1 \frac{\partial w}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_3\, M\, \bar{n}_0 \cdot \mathrm{grad}\, w = 0 \qquad (3)$$

Здесь введены обозначения: $a_1 = 12\left(1-\nu^2\right)\beta \ell^4 \gamma p_0 / \left(h^3 E_0 c_0\right)$, $a_2 = 12(1-\nu^2)\beta^2 \ell^4 \rho/(h^2 E_0)$, $a_3 = 12(1-\nu^2)\ell^3 \gamma p_0/(h^3 E_0)$, $\lambda_1 = \varepsilon_1/\beta$.

2. Структура приближенного решения. Начальное возмущение, ограниченное в бесконечности, выберем в виде

$$t = 0, \quad w(x, y, 0) = \sum_k G_{k,0} \varphi_k(y) \exp(-i\alpha x)$$

$$w'_t(x, y, 0) = \sum_k G_{k,1} \varphi_k(y) \exp(-i\alpha x), \quad \alpha, G_{k,0}, G_{k,1} \in R$$

Соответственно этому примем для прогиба представление $w = \sum\limits_k G_k(t)\,\varphi_k(y)\exp(-i\alpha x)$, в котором каждая из функций $\varphi_k(y)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \varphi_k(0) = 0, \quad \varphi_k'(0) = 0\,, \\ \varphi_k''(1) - \nu\alpha^2\varphi_k(1) = 0, \quad \varphi_k'''(1) - (2-\nu)\alpha^2\varphi_k'(1) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

В качестве $\varphi_k(y)$ удобно выбрать совокупность многочленов

$$\varphi_k(y) = A_k\,y^k + B_k\,y^{k-1} + C_k\,y^{k-2}, \quad k \geq 4 \tag{5}$$

подчинив каждую из функций $\varphi_k(y)$ граничным условиям. После подстановки (5) в (4) придем к системе линейных уравнений для определения коэффициентов A_k, B_k, C_k:

$$\begin{cases} \zeta_k A_k + \zeta_{k-1} B_k & = -\,\zeta_{k-2} C_k\,, \\ k\,\xi_k A_k + (k-1)\,\xi_{k-2} B_k & = -\,(k-2)\,\xi_{k-3} C_k \end{cases} \tag{6}$$

здесь $\zeta_k = k(k-1) - \alpha^2\nu$, $\xi_k = k(k-1) - \alpha^2(2-\nu)$. Нетрудно показать, что определитель системы (6) отличен от нуля для любых $\nu \in [0;\,1/2]$ и целых $k \geq 4$. Полагая $C_k = 1/k!$, из (6) получим

$$\begin{aligned} A_k &= ((k-1)\zeta_{k-2}\xi_{k-2} - (k-2)\zeta_{k-1}\xi_{k-3})/D_k\,, \\ B_k &= -(k\zeta_{k-2}\xi_{k-1} - (k-2)\zeta_k\xi_{k-3})/D_k \end{aligned}$$

здесь $D_k = k!(k\,\zeta_{k-1}\xi_{k-1} - (k-1)\zeta_k\xi_{k-2})$.

3. Исследование устойчивости решения. Примем для прогиба полосы представление вида

$$w = \sum_{k=4}^{n} G_k(t)\,\varphi_k(y)\exp(-i\alpha x) \tag{7}$$

подставим (7) в уравнение (3) и проведем преобразование Лапласа по времени с учетом начальных условий. В результате придем к равенству

$$\sum_{k=4}^{n} \tilde{G}_k(s)(1 - \lambda_1\tilde{\Gamma}_1(s))\,\Phi_k(y, \alpha, \theta, M, s) = Q(s, y) \tag{8}$$

здесь

$$\begin{aligned} \Phi_k(\alpha, \theta, M, s, y) = \varphi_k^{(4)} - 2\alpha^2\varphi_k'' + \alpha^4\varphi_k + (a_2 s^2 + a_1 s)\,\varphi_k + \\ + a_3 M(\varphi_k'\sin\theta - i\alpha\varphi_k\cos\theta) \end{aligned}$$

и функция $Q(s, y)$ зависит лишь от начальных данных и коэффициентов задачи. Умножая соотношение (8) на $\varphi_m(y)$ ($m = 4,\ 5,\ \ldots, n$) и интегрируя по отрезку $[0; 1]$, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных образов $\tilde{G}_k(s)$

$$\sum_{k=4}^{n} \tilde{G}_k(s)(1 - \lambda_1 \tilde{\Gamma}_1(s)) \int_0^1 \Phi_k(\alpha, \theta, M, s, y)\varphi_m(y)\, dy = \\ = \int_0^1 Q(s, y)\varphi_m(y)\, dy \tag{9}$$

Поведение оригиналов $G_k(t)$ и формы движения полосы зависят от нулей определителя системы (9), который представляет собой многочлен от переменной s. Колебания полосы будут асимптотически устойчивыми, если все комплексные корни многочлена располагаются в левой полуплоскости. При переходе любого из корней многочлена в правую полуплоскость движение полосы становится асимптотически неустойчивым. Границе областей устойчивости и неустойчивости отвечает случай, когда для одного из корней выполняется требование $\mathrm{R}es_j = 0$, при условии, что все остальные корни расположены в левой полуплоскости. С указанными условиями связана скорость флаттера $\tilde{M}$, которая зависит от параметра волнообразования α: по определению для критической скорости полагаем $M^* = \tilde{M}(\alpha^*)$, α^* находится из условия минимума функции $\tilde{M}(\alpha)$.

Результаты расчетов приведены для следующих значений параметров $n = 6$, $p_0/E_0 = 5 \cdot 10^{-7}$, $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\gamma = 1,4$, $\upsilon = 0,3$, $c_0 = 330$ м/с, $\ell/h = 250$. В случае, когда $\Gamma(t) = \exp(-\beta t)$, $\beta = 10^{-1}$, $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ результаты сведены в таблицу 1.

Таблица 1

θ/π	$-1/2$	$-5/18$	$-1/4$	$-7/30$	$-1/6$	$-1/18$
α_0^*	0	0	0,87	1,09	1,50	1,81
M_0^*	0,05300	0,06919	0,07165	0,07117	0,06736	0,06431
α^*	0	0	0	1,09	1,50	1,81
M^*	0,04770	0,06227	0,06746	0,07119	0,06738	0,06432
θ/π	0	$1/18$	$1/4$	$15/32$	$31/64$	$1/2$
α_0^*	1,92	2,01	2,38	0,042	0,021	0
M_0^*	0,06520	0,06795	0,10428	1,14798	1,14403	1,14272
α^*	1,92	2,01	2,39	0,042	0,021	0
M^*	0,06521	0,06797	0,10430	1,14799	1,14403	1,14272

Здесь M_0^* — критическая скорость флаттера, определяемая по мгновенному модулю, α_0^* — соответствующее значение параметра вол-

нообразования, M^* и α^* — значения критической скорости флаттера и параметра волнообразования для вязкоупругой полосы.

Эти результаты позволяют сделать следующие выводы: при $\theta \in \in [-7\pi/30; \pi/2]$ наблюдается аналогия с результатами, полученными для вязкоупругой полосы [7], — критическая скорость флаттера вязкоупругой полосы практически совпадает с критической скоростью, рассчитанной по мгновенному модулю, при этом близки или полностью совпадают соответствующие значения параметра волнообразования.

Совсем другая картина наблюдается в случае дивергенции. Прежде всего отметим, что задача обтекания вязкоупругой консольно закрепленной полосы под углом $\theta = -\pi/2$ допускает более детальное исследование. Так, предполагая, что в общем виде для прогиба справедливо представление

$$w = A(t)\,\psi(y)\exp(-i\alpha x) \tag{10}$$

где $A(t)$ и $\psi(y)$ – неизвестные функции времени и координаты, подставим выражение (10) в уравнение (1) и проведем преобразование Лапласа. Тогда при одном экспоненциальном слагаемом в ядре релаксации получим равенство $\tilde{A}(s)\Psi(y, s, \alpha, \varepsilon_1, \beta, M) = (s+\beta)Q(s, y)$. Здесь

$$\Psi(y, s, \alpha, \varepsilon_1, \beta, M) = (s+\beta-\varepsilon_1)(\psi^{(4)} - 2\alpha^2\psi'' + \alpha^4\psi) + \\ +(a_2 s^2 + a_1 s)\,\psi + (s+\beta)\,a_3\,M(\psi'\sin\theta - i\alpha\psi\cos\theta)$$

Полагая $s = 0$ в уравнении $\Psi(y, s, \alpha, \varepsilon_1\beta, M) = 0$, придем к равенству $\psi^{(4)} - 2\alpha^2\psi'' + \alpha^4\psi - a_3 M_1\psi' = 0$, $M_1 = M/(1-\lambda_1)$, $\lambda_1 = \varepsilon_1/\beta$, а в условиях, когда $\alpha = 0$, получим уравнение вида $\psi^{(4)} - a_3 M_1\psi' = 0$, которое с точностью до обозначений повторяет соответствующее уравнение для упругой консольной полосы [9].

Таким образом, если $M_{1,div}$ — значение критической скорости дивергенции упругой полосы при $\theta = -\pi/2$, то критическая скорость M^* дивергенции вязкоупругой полосы определяется равенством $M^* = (1 - -\lambda_1)M_{1,div}$. Приближенные вычисления целиком подтверждают этот вывод, и, следовательно, при $\theta = -\pi/2$ критическую скорость флаттера можно вычислить как предельно-модульную.

Литература

1. *Ларионов Г.С.* Устойчивость колебаний вязкоупругой пластинки при больших сверхзвуковых скоростях.// В сб. Вопр. вычисл. и прикл. мат. Ташкент. 1970. Вып. 3. С.156–163.
2. *Матяш В.И.* Флаттер вязкоупругой пластинки.// Механика полимеров. 1971. № 6. С.1077–1083.
3. *Ларионов Г.С.* Нелинейный флаттер упруговязкой пластины.// Изв.АН СССР.МТТ. 1974. №4. С.95–100.
4. *Ильюшин А.А., Ларионов Г.С., Филатов А.Н.* К усреднению в системах нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.// Докл. АН СССР. 1969. Т.188. № 1. С.49–52.
5. *Ильюшин А.А., Кийко И.А.* Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки.// ПММ. 1994. т.58. Вып. 3. С.167–171.

6. *Кийко И.А.* Флаттер вязкоупругой пластины.// ПММ. 1996. Т.60. Вып. 1. С.172–175.
7. *Кийко И.А., Показеев В.В.* Колебания и устойчивость вязкоупругой полосы в потоке газа.// Докл. РАН. 2005. Т. 401. № 3. С.342–344.
8. *Александров В.М., Гришин С.А.* Динамика конической оболочки при внутреннем сверхзвуковом потоке газа.// ПММ. 1994. Т.58. Вып.4. С.123–132.
9. *Мовчан А.А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе.// ПММ. 1956. Т.20. Вып.2 С.211–222.
10. *Кудрявцев Б.Ю.* Колебания и устойчивость упругой полосы в сверхзвуковом потоке газа. Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук. М. 1995. 96 С.
11. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука. 1961. 340 с.

ТЕРМОМИКРОМЕХАНИЧЕСКАЯ СВЯЗАННАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОСТИ, ПОВРЕЖДЕННОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ

В. Н. Кукуджанов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Москва, Россия

kukudz@ipmnet.ru http://ipmnet.ru/∼kukudz

Предложена микромеханическая связанная модель упруговязкопластического деформирования с учетом поврежденности для общего случая напряженно-деформированного состояния (НДС). Модель обобщает дислокационную теорию пластичности Тейлора-Гилмана на случай разупрочняющегося деформирования, предшествующего разрушению. Полученные на микроуровне уравнения, с помощью качественных корреляционных соотношений между микро- и макропараметрами, записываются относительно макропараметров. В результате получаются уравнения упруговязкопластичности для пористой среды с модифицированным условием пластичности Гарсона. При обращении пористости в нуль условие Гарсона переходит в условие пластичности Мизеса с температурным разупрочнением. Установлено предельное значение коэффициента трехосности, которое определяет смену механизма разрушения пористого материала отрывом – сдвиговым. Доказана корректность полученных уравнений. Численное решение задач подтверждает корректность и адекватность модели экспериментальным результатам для разных НДС.

Впервые поврежденность в упругую модель была введена Л.М. Качановым [1] и почти одновременно Ю.Н. Работновым [2], и описывалась скалярной величиной. А.А. Ильюшин обобщил эту модель и предложил рассматривать поврежденность как тензорную величину в различных моделях сплошной среды [3].

В настоящей работе, в отличие от предшествующих исследований, поврежденность рассматривается на основе микромеханического подхода Тейлора–Гилмана [4-6]. Цель — обобщение этой теории на случай разупрочняющейся вязкопластической среды. Принимается, что поврежденность характеризуется тензором 2-го ранга. Модель микропластичности основывается на термофлуктуационном механизме движения дислокаций, который при упрочнении описывается уравнениями

$$\dot{\gamma}^{p} = abN_m V \tag{1}$$

$$V = V_0 \exp\left(\frac{U_0 - (s - s^r)}{k\,\theta}\right) \tag{2}$$

$$N_m = (N_0 + a\gamma^p)^n \exp(-N/N_*) \tag{3}$$

$$(1-\eta)\,p_{ij} = \omega_{ij} \tag{4}$$

где $\dot{\gamma}^p$ — скорость пластических деформаций, N_m — число подвижных дислокаций, V — средняя скорость дислокаций, s, s^r — девиатор полных и остаточных напряжений, θ — абсолютная температура. p_{ij} — полный поток дислокаций, ηp_{ij} — поток подвижных дислокаций, ω_{ij} — поток дислокаций, аккумулирующихся на границах зерен.

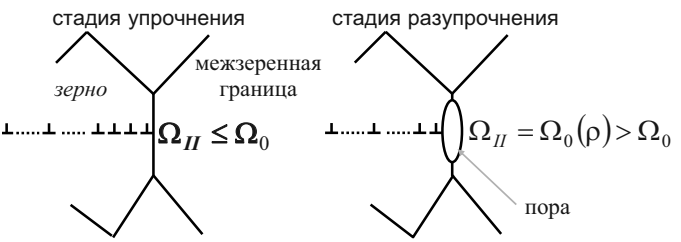


Рис. 1. Аннигиляция дислокаций и образование пор.

Для описания механизма разупрочнения необходимо рассмотреть уравнения баланса дислокационных потоков на стадии появления дефектов – микропор

$$(1-\eta)\,\dot{p}_{ij} = \dot{\omega}_{ij} + \dot{b}_{ij} \tag{5}$$

Поток аннигилирующих дислокаций $\dot{b}_{ij}$ пропорционален потоку скопившихся дислокаций на границе (рис. 1)

$$\dot{b}_{ij} = \lambda\omega_{ij} \tag{6}$$

Интенсивность тензора аннигилирующих дислокаций $\dot{B}_{II}$ предполагается монотонной функцией избыточной интенсивности ω_{ij}.

$$\dot{B}_{II} = \frac{1}{\tau_p}\hat{Q}\,(\Omega_{II} - \Omega_0) \quad \hat{Q}\,(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0 \\ Q\,(z) & \text{при } z \geqslant 0 \end{cases} \tag{7}$$

τ_p – время релаксации остаточных напряжений.

Окончательное уравнение для потока ω_{ij} следуют из уравнения баланса (5)-(7)

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} + \frac{\hat{Q}\,(\Omega_{II} - \Omega_0)}{\tau_p \Omega_{II}}\omega_{ij} = \frac{1-\eta}{\eta}\frac{d\gamma_{ij}^p}{dt} \tag{8}$$

Когда интенсивность тензора аккумулирующихся на границах зерен дислокаций $\Omega_{II} = \left(\frac{1}{2}\omega_{ij}\omega_{ij}\right)^{1/2}$ достигает критического значения Ω_0 начинается процесс аннигиляции дислокаций и образование пор между зернами кристаллического материала.

Корреляция микро- и макропараметров. Между микро- и макропараметрами имеет место соответствие: $\omega_{ij} \overrightarrow{} s^r_{ij}$, $\eta\, \dot{p}_{ij} \to \dot{\gamma}^p_{ij}$, $\dot{\omega}_{ij} = \dfrac{1-\eta}{\eta}\dot{\gamma}^p_{ij}$, $s^r_{ij} = 2\mu^*\omega_{ij} = 2\alpha\gamma^p_{ij}$, $\alpha = \mu^*\dfrac{1-\eta}{\eta}$ – модуль упрочнения. На макроуровне эволюционное уравнение микропор (8) дает релаксациолнное уравнение для тензора остаточных напряжений

$$\frac{ds^r_{ij}}{dt} + \frac{2\mu^*}{\tau_p}\frac{\hat{Q}\left(S^r_{II} - S^r_0\right)}{S^r_{II}}s^r_{ij} = 2\alpha\frac{d\gamma^p_{ij}}{dt} \tag{9}$$

Релаксационный член $\dot{b}_{ij}$ соответствует девиатору повреждаемости $\dot{d}_{ij}$

$$\dot{b}_{ij} \to \dot{d}_{ij} = \frac{2\mu^*}{\tau_p}\frac{\hat{Q}\left(S^r_{II} - S^r_0\right)}{S^r_{II}}s^r_{ij} \tag{10}$$

шаровая часть тензора повреждаемости соответствует пористости материала $b_{ii} \to f$.

Критерий образования дефектов $S^r_{II} = S^r_0$, где S^r_0 – критическая интенсивность остаточных напряжений

Корректность задачи. Исследование корректности начально-краевой задачи для полученной системы уравнений показывает:

- однозначная зависимость $\sigma = \sigma_Y(\varepsilon)$ на участке разупрочнения ***c-d"*** приводит к некорректной постановке начально-краевых задач;
- для корректного описания процесса разупрочнения необходимо считать предел текучести многопараметрической функцией $\sigma_Y = \sigma_Y(\varepsilon, f, T, \sigma^r, k)$, $\dfrac{\partial\sigma_Y}{\partial\varepsilon} > 0$, а $d\sigma_Y < 0$ – полный дифференциал (рис. 2).

где f – повреждаемость, T – температура, $k = \dfrac{\frac{1}{3}\sigma_{kk}}{\sigma_e}$ – коэффициент трехосности НДС, $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$ – интенсивность касательных напряжений, σ^r – остаточные напряжения и падающая ветвь ***c-d"*** связана с повреждаемостью, а не с деформацией.

Для получения зависимости $\sigma_Y = \sigma_Y(\varepsilon, f, T, \sigma^r, k)$ привлекаются сведения о разрушении из микромеханики. Коэффициент k определяет НДС материала и играет наиважнейшее значение для механизмов и характера разрушения.

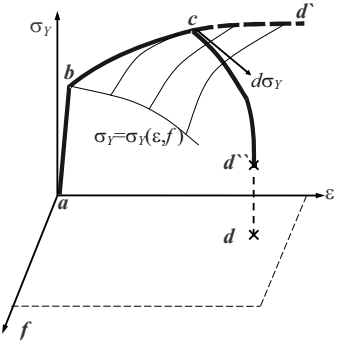


Рис. 2. Нагружение и разрушение в трехмерном пространстве

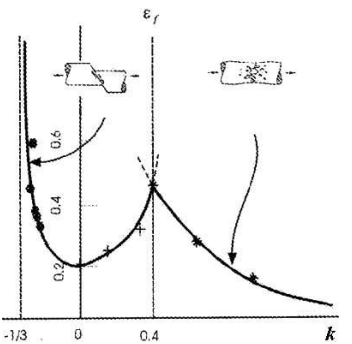


Рис. 3. Тип разрушения в зависимости от параметра трехосности k [13]

Для того, чтобы имело место разупрочнение материала должны выполняться ограничения на частные производные функции σ_Y, которые следуют из условий

$$d\sigma_Y = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial f} df + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \sigma^r} d\sigma^r < 0 \quad \text{при} \quad k > 0.4$$

$$f = 0, \quad d\sigma_Y = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \sigma^r} d\sigma^r < 0 \quad \text{при} \quad k < 0.4$$

при этом следует учитывать, что $\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \varepsilon^p} \geqslant 0$, $\frac{\partial \sigma_Y}{\partial T} dT < 0$, $\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \dot{\varepsilon}^p} > 0$.

Приведем характерные величины коэффициента трехосности для некоторых НДС

- Сдвиг ($\sigma_{12} \neq 0$, все другие компоненты равны 0) – $k = 0$.
- Одноосное растяжение ($\sigma_{11} \neq 0$, все другие компоненты 0) – $k = 1/3$.
- Плоская деформация (растяжение при упругой и пластической несжимаемости) $k = \sqrt{3}/3 \approx 0.577$.
- Стержни с вырезами – $k = 0.6 - 2.5$.
- Вблизи конца трещины – $k \approx 3$ для неупрочняющегося материала и затупленного конца трещины. Для упрочняющегося материала – $k \approx 5$.
- Одноосная деформация ($\varepsilon_{11} \neq 0$, остальные компоненты 0) – $k \to \infty$ при $\nu \to 1/2$.

Ограничение для GTN-модели. Модель Гарсона [7] и её модификация GTN [8,9] применимы при $k \geqslant 0.4$ (рис. 3).

Кривые, отвечающие разрушению в плоскости эквивалентной деформации и коэффициента трехосности напряженного состояния. Справа ($k > 0.4$) разрушение за счет образования пор. Слева ($k < 0.4$) разрушение по полосам адиабатического сдвига (рис. 3).

Экспериментальные данные [13] получены при квазистатическом нагружении, ε_f – критическая интенсивность деформаций, при которых происходит разрушение.

Ассоциированный закон вязкопластичности. Условие пластичности типа Гарсона для пористых материалов с упруговязкопластической матрицей при кинематическом упрочнении:

$$F(\tau_{ij}, f, T_s) = \frac{3}{2}\frac{s^a_{ij}s^a_{ij}}{S_Y^2} + 2fq_1 \operatorname{ch}\left(\frac{3q_2}{2}\frac{\sigma^a_{kk}}{S_Y}\right) - 1 - q_1^2 f^2 = 0 \qquad (11)$$

где s^a_{ij} – девиатор активных напряжений σ^a_{ij}, S_Y – предел текучести пористого упруговязкоплстического материала, определяемый из условия равенства пластических работ для эффективного материала и матрицы

$$\sigma^a_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij} = (1-f)\ \dot{\gamma}^p\left[S_Y(\gamma^p) + \Psi(\tau\,\dot{\gamma}^p)\right];\ \ S_Y = S_Y(\gamma^p) + \Psi^{-1}(\tau\,\dot{\gamma}^p) \quad (12)$$

где $\varepsilon^p_e = \sqrt{\frac{2}{3}\gamma^p_{ij}\gamma^p_{ij}}$ – интенсивность пластических деформаций, τ – время релаксации Ψ – функция влияния скорости деформаций.

Для получения определяющих уравнений (12) использован ассоциированный закон при аддитивности деформационного и скоростного упрочнений

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \Lambda\frac{\partial F}{\partial\tau_{ij}}; \qquad \Lambda = \frac{T_s}{\tau}\Psi(T_s - \tau(\gamma^p))\ \left(\frac{\partial F}{\partial\tau_{ij}}\tau_{ij}\right)^{-1} \qquad (13)$$

Определяющие уравнения эволюции дефектов. Зарождение и рост микропор. Сферическая часть тензора аннигиляции $\dot{b}_{ii}$ пропорциональна пористости $f = \Delta V_p/V$. Эволюционное уравнение для пористости состоит из двух слагаемых

$$\dot{f} = \dot{f}_{\mathrm{g}r} + \dot{f}_{\mathrm{n}ucl} \qquad (14)$$

где рост пор определяется законом сохранения массы $\dot{f}_{\mathrm{g}r} = (1-f)\,\dot{\varepsilon}^p_{kk}$, зарождение пор управляется величиной интенсивности пластических деформаций в матрице $\dot{f}_{\mathrm{n}ucl} = A\dot{\bar{\varepsilon}}^p_m$, $A = \dfrac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\bar{\varepsilon}^p_m - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right]$ – нормальное распределение деформаций $\bar{\varepsilon}^p_m$ с главным значением ε_N и стандартным отклонением s_N, f_N – объемная доля зарождающихся пор [8].

Определяющие соотношения при отсутствии пористости ($k < 0.4$, $f = 0$). Условие Гарсона [7] переходит в условие пластичности Мизеса для упруговязкопластического материала с деформационным и скоростным упрочнениями и термическим разупрочнением. При мультипликативном законе упрочнения в форме Johnson-Cook [11] предел текучести записывается в виде

$$\sigma_Y\sigma^0_Y\left(\varepsilon^p_e, \hat{T}\right)\ R\left(\dot{\varepsilon}^p_e\right) = \left[A + B\left(\varepsilon^p_e\right)^n\right]\ \left[1 + C\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}^p_e}{\dot{\varepsilon}_0}\right)\right]\ \left(1 - \hat{T}^m\right)$$

где безразмерная температура

$$\hat{T} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad T < T_{\text{transition}} \\ (T - T_{\text{transition}})/(T_{\text{melt}} - T_{\text{transition}}) & \text{при} \quad T_{\text{transition}} \leqslant T \leqslant T_{\text{melt}} \\ 1 & \text{при} \quad T > T_{\text{melt}} \end{cases}$$

Модель разрушения. Критерии разрушения:

- $f = f_{cr}$ (по пористости) – при преобладании растягивающих напряжений $k \geqslant 0.4$;
- $\varepsilon_e^p = \left(\frac{2}{3}\gamma_{ij}^p \gamma_{ij}^p\right)^{1/2} = \varepsilon_{cr}^p$ (по интенсивности пластической деформации) – при преобладании сжатия $k < 0.4$.

Модель разрушения — подход Майнчена и Сака [12] (разрушение отдельных элементов). Если в лагранжевой ячейке выполняется критерий разрушения, то связи между узлами в таких ячейках освобождаются и напряжения либо релаксируют к нулю, либо сопротивление сохраняется только по отношению к сжатию. Лагранжевы узловые массы при разрушении превращаются в самостоятельные частицы, уносящие массу, импульс и энергию, движущиеся по инерции как жесткое целое и не взаимодействующие с неразрушенными частицами [9, 10].

Литература

1. *Качанов Л.М.* О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. С. 26-31.
2. *Работнов Ю.Н.* Механизм длительного разрушения // Сб. “Вопросы прочности материалов и конструкций”. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5-7.
3. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 3. С. 21-35.
4. *Taylor J.W.* Dislocation dynamics and dynamic yielding // J. Appl. Phys., 1965. V. 36. No. 10. P. 22599-2602.
5. *Gilliman J.J.* Dislocation dynamics and the response of material to impact // Appl. Mech. Rev. 1968. V. 21. No. 8. P. 767-783.
6. *Гилман Дж.Д.* Микродинамическая теория пластичности // Микропластичность. М.: Металлургия, 1972. С. 18-37.
7. *Gurson A.L.* Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Materials // Journal of Engineering Materials and Technology. 1977. V. 99. P. 2–15.
8. *Chu C.C., Needleman A.* Void Nucleation Effects in Biaxially Stretched Sheets // Journal of Engineering Materials and Technology. 1980. V. 102. P. 249–256.
9. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Численное решение задач континуального разрушения // Препринт № 746. М.: ИПМ РАН, 2004. 40 с.
10. *Кукуджанов В.Н.* Связанные модели упругопластичности и поврежденности и их интегрирование // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 103-135.
11. *Johnson G.R., Cook W.H.* A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures // Proc. 7th Intern. Symp. Ballistics. 1983. P. 541-547.
12. *Maenchen G., Sack S.* The "Tensor"code // Methods Comput. Phys. N.Y.:Acad. Press, 1964. V. 3. P. 188-210.
13. *Bao Y., Wierzbicki T.* A Comparative Study on Various Ductile Crack Formation Criteria. Journal of Engineering Materials and Technology. 2004 (126), 314-324.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ЧЕРЕЗ СКАЛЯРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Э. А. Леонова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

Предлагается новый вариант выражения общего решения трехмерных уравнений классической теории упругости через введенные скалярные потенциалы. Аналогичное представление уравнений медленных течений несжимаемой вязкой жидкости может быть использовано при выборе начального приближения в методе гидродинамических приближений [1] , применяемом практически для решения задач обработки металлов давлением.

Поиск возможностей приведения уравнений классической теории упругости к уравнениям Лапласа и Пуассона для привлечения методов теории потенциала продолжается с начала создания теории упругости до настоящего времени.

Анализ опубликованных в работах [2 – 7] и цитированной в них литературе многочисленных форм представления общего решения уравнений через гармонические функции показал, что все они могут быть классифицированы по выражению решения через 1) два гармонических вектора, 2) гармонический вектор и гармонический скаляр, связанные или не связанные, 3) две компоненты гармонического вектора и гармонический скаляр, 4) один гармонический вектор. Во все предложенные формы решения входит гармонический вектор. Предметом многих дискуссий являлся также вопрос о минимальном числе гармонических функций, образующих общее решение.

В предложенном ниже представлении трехмерных уравнений упругости, справедливых для сжимаемого и механически несжимаемого материала, решение выражается через скалярные трехмерные и двумерные гармонические функции.

Уравнения теории упругости и несвязанной теории термоупругости для однородного изотропного тела в статических или квазистатических условиях деформирования записываем в виде, включающем случаи сжимаемого и механически несжимаемого материала.

$$\begin{gathered}(1+2\chi)\,\nabla\sigma - \nabla\times\bar{\omega} + \bar{f} + 2\alpha\nabla\vartheta = 0, \quad \chi = 2\mu/3k \\ \nabla\cdot\bar{u} - 3\,(\chi\sigma + \alpha\vartheta) = 0\,, \quad \nabla\times\bar{u} = 2\bar{\omega}\,, \quad \chi \geqslant 0\end{gathered} \tag{1}$$

В безразмерных уравнениях (1) σ и $\bar{f}$ — среднее гидростатическое напряжение и вектор объёмных сил, отнесённые к удвоенному модулю сдвига 2μ, k — модуль всестороннего сжатия, ϑ - температура, α — линейный коэффициент теплового расширения. Механически несжимаемому материалу соответствует значение $\chi = 0$.

Разложение вектора перемещения $\bar{u}$ на два ортогональных вектора представим в виде [8]

$$\bar{u} = (\bar{u} \cdot \bar{n})\bar{n} + 2\nabla\psi \times \bar{n}, \quad (\bar{u} \cdot \bar{n}) = 2\varphi \tag{2}$$

где φ и ψ — искомые скалярные функции, $\bar{n}$ — нормаль к координатной поверхности $q^3 = \text{const}$ в общем случае произвольной криволинейной системы координат q^1, q^2, q^3, и рассмотрим поле нормалей в семействе координатных поверхностей.

Из (2) следует, что $\nabla \cdot \bar{u}$ является функцией только φ, а $\bar{n} \cdot \bar{\omega}$ — функцией только ψ

$$\bar{\omega} = \nabla\varphi \times \bar{n} + \nabla \times (\nabla\psi \times \bar{n}) \tag{3}$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнения (1), получаем систему трёх уравнений для трёх скалярных функций σ, φ, ψ . В декартовой системе координат с ортонормированным репером $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{n}$ система имеет вид

$$\begin{gathered}(1+2\chi)\ \sigma_{,1} - \varphi_{,13} + (\Delta\psi)_{,2} = -f_1 - 2\alpha\vartheta_{,1}\,, \\ (1+2\chi)\ \sigma_{,2} - \varphi_{,23} - (\Delta\psi)_{,1} = -f_2 - 2\alpha\vartheta_{,2}\,, \\ (1+2\chi)\ \sigma_{,3} + \Delta_2\varphi = -f_3 - 2\alpha\vartheta_{,3}\end{gathered} \tag{4}$$

где Δ и Δ_2 соответственно трёхмерный и двумерный операторы Лапласа.

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{u}$ через φ и ψ представятся в виде

$$\begin{gathered}\bar{\omega} = (\varphi_{,2} + \psi_{,13})\ \bar{e}_1 + (-\varphi_{,1} + \psi_{,23})\ \bar{e}_2 - (\psi_{,11} + \psi_{,22})\ \bar{e}_3, \\ \bar{u} = 2\,[\psi_{,2}\ \bar{e}_1 - \psi_{,1}\ \bar{e}_2 + \varphi\bar{e}_3]\end{gathered} \tag{5}$$

Отсюда следуют соотношения

$$\Delta_2\psi = -\bar{n} \cdot \bar{\omega}\,, \quad \Delta_2\varphi = -\bar{n} \cdot \nabla \times \bar{\omega} \tag{6}$$

Система (4) записывается в виде

$$\begin{gathered}[(1+2\chi)\sigma - \varphi_{,3}]_{,1} + (\Delta\psi)_{,2} = -f_1 - 2\alpha\vartheta_{,1}\,, \\ [(1+2\chi)\sigma - \varphi_{,3}]_{,2} - (\Delta\psi)_{,1} = -f_2 - 2\alpha\vartheta_{,2}\,, \\ [(1+2\chi)\sigma - \varphi_{,3}]_{,3} + \Delta\varphi = -f_3 - 2\alpha\vartheta_{,3}\end{gathered} \tag{7}$$

Из системы (7) или (4) вытекают следствия

$$(\Delta\varphi)_{,2}+(\Delta\psi)_{,13}=f_{2,3}-f_{3,2},\quad (\Delta\varphi)_{,1}-(\Delta\psi)_{,23}=f_{1,3}-f_{3,1},$$
$$\Delta_2\Delta\psi=f_{2,1}-f_{1,2},\quad \Delta_2\Delta\varphi=-\Delta_2 f_3+(f_{1,1}+f_{2,2})_{,3}, \tag{8}$$
$$(1+2\chi)\,\Delta_2\sigma-\Delta_2\varphi_{,3}=-(f_{1,1}+f_{2,2})-2\alpha\Delta_2\vartheta$$

Известные следствия уравнений теории упругости

$$\Delta\sigma=\frac{-1}{1+2\chi}\left(\nabla\cdot\bar f+2\alpha\Delta\vartheta\right),\quad \Delta\bar\omega=-\nabla\times\bar f \tag{9}$$

выразим также через φ и ψ . В результате получим следующее.

Первое из следствий (9) удовлетворяется тождественно, второе приводит к трём первым соотношениям (8).

Из последнего уравнения (8) и второго уравнения из (1) имеем систему

$$\begin{cases}(1+2\chi)\Delta_2\sigma-\Delta_2\varphi_{,3}=-(f_{1,1}+f_{2,2})-2\alpha\Delta_2\vartheta\\ 3\chi\Delta_2\sigma-2\Delta_2\varphi_{,3}=-3\alpha\Delta_2\vartheta\end{cases} \tag{10}$$

Решение этой системы приводит к двумерным уравнениям Пуассона для функций σ и $\varphi_{,3}$

$$\Delta_2\sigma=-\frac{1}{2+\chi}\,[2(f_{1,1}+f_{2,2})+\alpha\Delta_2\vartheta],$$
$$\Delta_2\varphi_{,3}=-\frac{3}{2+\chi}\,[\chi(f_{1,1}+f_{2,2})-\alpha\Delta_2\vartheta] \tag{11}$$

Для функций $\Delta_2\psi$ и $\Delta_2\varphi$ имеем также уравнения

$$\Delta\Delta_2\psi=f_{2,1}-f_{1,2};\quad \Delta\Delta_2\varphi=(f_{1,1}+f_{2,2})_{,3}-\Delta_2 f_3$$

Отметим, что температурное поле ϑ влияет только на определение σ. Величины $\Delta_2\varphi$ и $\Delta_2\psi$ определяются только массовыми силами.

Тождества (8) допускают выбор из эквивалентных их форм при решении конкретных задач. Во всех случаях задача сводится к решению скалярных трёхмерных и двумерных уравнений Лапласа или Пуассона. В частности

$$\Delta\Phi=Q;\quad Q=\begin{cases}-\dfrac{1}{1+2\chi}\left(\nabla\cdot\bar f+2\alpha\Delta\vartheta\right), & \text{если } \Phi=\sigma\\ -\Delta_2 f_3+(f_{1,1}+f_{2,2})_{,3}, & \text{если } \Phi=\Delta_2\varphi\\ f_{2,1}-f_{1,2}, & \text{если } \Phi=\Delta_2\psi\end{cases}$$

После решения уравнений для σ,φ,φ' вектор перемещения находится по формуле (5) простым дифференцированием.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Некоторые вопросы теории пластического течения //Изв. АН СССР, ОТН. 1958. Вып. 2. С. 64-86.
2. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
4. *Папкович П.Ф.* Теория упругости. М.: Оборонгиз. 1939. 640 с.
5. *Папкович П.Ф.* Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции// Изв. АН СССР. Серия матем. и естеств. Наук. 1932. № 10. С. 1425-1435.
6. *Слободянский М.Г.* Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 1. С. 55-74.
7. *Бородачев Н.М.* О преобразовании Нахди-Хсу и решении Папковича-Нейбера // Изв. РАН, МТТ. 1996. №5. С. 36-43.
8. *Леонова Э.А.* Структура векторных полей в кинематике материального континуума // Упругость и неупругость. М. Изд-во Моск. ун-та. 2006. С.181-187.

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ И НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛОЖНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ

А. М. Локощенко

Институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

loko@imec.msu.ru

Проведен анализ известных экспериментальных данных по длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии. Получены эквивалентные напряжения, которые характеризуют результаты испытаний при различных видах напряженных состояний. Рассмотрены возможности векторного представления параметра поврежденности при моделировании длительной прочности в случае стационарных и нестационарных сложных напряженных состояний.

В данной работе моделирование длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния проводится с использованием критериального и кинетического подходов. Среди множества вариантов кинетических подходов безусловный интерес представляет работа А.А.Ильюшина [1], в которой он ввел симметричный тензор повреждений второго ранга. Этот тензор рассматривается как функционал от процесса нагружения, характеризуемого тензорами напряжений и моментов различных порядков. В монографии Э.Б.Завойчинской и И.А.Кийко [2] рассмотрено развитие этого подхода: введен оператор повреждений, предложено обобщение механических теорий прочности, исследованы предельные процессы нагружения в пространстве А.А.Ильюшина.

1. Анализ экспериментальных данных с помощью критериального подхода

При исследовании результатов испытаний, полученных при стационарных напряженных состояниях, обычно используется критериальный подход. В [3-4] приведены результаты систематического анализа известных экспериментальных данных, полученных в этих условиях. При этом в качестве характеристики напряженного состояния рассматривается эквивалентное напряжение σ_e, представляющее собой различные комбинации главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 $(\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3, \quad \sigma_1>0)$. В качестве

σ_eв данной работе рассматриваются четыре такие базовые комбинации:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{e1} = \sigma_1, \quad \sigma_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}, \\ &\sigma_{e3} = \frac{1}{2}(\sigma_{e1}+\sigma_{e2}), \quad \sigma_{e4} = \sigma_1 - \sigma_3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

В качестве зависимости времени до разрушения t^* от эквивалентного напряжения σ_e (критерий длительной прочности) используются степенная и дробно-степенная функции

$$t* = C\sigma_e^{-n}, \quad t* = D\left[(\sigma_b - \sigma_e)/\sigma_e\right]^k \quad (2)$$

Под σ_b понимается напряжение, характеризующее мгновенное разрушение металла при температуре испытаний.

Используемые в (2) материальные константы *C, n, D, k* вычисляются из условия минимального суммарного расхождения экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

В тонкостенных образцах одно из главных напряжений (радиальное напряжение) принималось равным нулю. При анализе компонентов тензора напряжений в толстостенных трубах проводилось их осреднение.

Для оценки суммарного расхождения экспериментальных значений времен до разрушения t^* и теоретических значений $t*(\sigma_{em})$, соответствующих зависимостям $t*(\sigma_e)$ и эквивалентным напряжениям σ_{em} $(m = = 1-4)$, были введены различные меры суммарного расхождения экспериментальных и теоретических времен до разрушения. При выборе критерия длительной прочности для каждого исследуемого материала определяется та комбинация вида эквивалентного напряжения σ_{em} (1) и форм зависимости $t*(\sigma_{em})$ (2), которая приводит к наименьшему значению этого суммарного разброса.Вычисления показали, что степенная и дробно-степенная модели длительной прочности приводят к практически одинаковым выводам относительно выбора вида эквивалентного напряжения σ_{em}.

Анализ результатов всех известных автору серий испытаний (35 серий) показал [4]: при расчете длительного разрушения элементов конструкций, находящихся в условиях плоского напряженного состояния, в качестве эквивалентного напряжения рекомендуется принимать σ_{e3} при $\sigma_3 < 0$ $(\sigma_2 = 0)$ и σ_{e4} при $\sigma_2 > 0$ $(\sigma_3 = 0)$. При анализе результатов испытаний толстостенных труб также следует использовать σ_{e4} (при учете осредненных значений главных напряжений).

Детальный анализ результатов испытаний показал, что некоторые экспериментальные данные отличаются от основной массы данных. Был определен критерий случайности отдельных испытаний, результаты этих опытов в дальнейшем были исключены из общего набора экспериментальных данных. Вычисления показали, что около 10% экспериментальных

данных имеют случайный характер, однако исключение их из рассмотрения практически не отразилось на общем выводе относительно выбора σ_{em}.

Если ни одно из рассмотренных четырех простейших выражений эквивалентного напряжения σ_{em} (m=1-4) не приводит к удовлетворительному соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения, то следует использовать усложненные выражения σ_e с дополнительными константами.

Вычисления показали, что применение рассмотренных усложненных форм эквивалентного напряжения σ_e с одной дополнительной константой при анализе известных экспериментальных данных, как правило, не приводит к существенному сближению экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

2. Анализ результатов испытаний с помощью кинетического подхода

При анализе результатов испытаний металлов в условиях сложного напряженного состояния некоторые эффекты невозможно описать с помощью базовых эквивалентных напряжений $\sigma_{e1} - \sigma_{e4}$. В частности, описание длительной прочности при нестационарном сложном напряженном состоянии с помощью критериального подхода невозможно.

Рассмотрим анализ результатов испытаний на длительную прочность с помощью кинетической теории Ю.Н.Работнова [5]. При описании экспериментальных данных в условиях сложного напряженного состояния как правило используется параметр поврежденности, имеющий тензорную природу. Такому подходу сопутствует большое количество определяемых материальных функций и констант, связанное с громоздкими вычислениями.

В данной работе рассматриваются возможности применения параметра поврежденности, имеющего векторную природу. При этом основное внимание уделено подходам Л.М.Качанова [6] и И.В.Наместниковой и С.А.Шестерикова [7]. Эти подходы в данной статье обобщены с помощью дополнительного учета анизотропии материала, поврежденности, накапливаемой в процессе кратковременного квазистатического нагружения, и взаимной зависимости компонентов вектора поврежденности.

2.1. Сравнение результатов испытаний при одноосном и равноосном плоском напряженных состояниях

Известные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что добавление к осевому растягивающему напряжению σ_0 поперечного растягивающего напряжения той же величины σ_0 приводит к уменьшению времени до разрушения в несколько раз. Различие этих времен до разрушения при использовании критериального подхода (при рассмотрении базовых эквивалентных напряжений $\sigma_{e1} - \sigma_{e4}$) в принципе невозможно описать.

Этот эффект можно описать с помощью двух вариантов кинетической теории [8].

2.2. Влияние пути кратковременного нагружения на длительную прочность

А.М.Локощенко [9] провел испытания трубчатых образцов на длительную прочность при напряжениях $\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_0$, которые получены в результате трех программ кратковременного нагружения. Во всех этих испытаниях время нагружения в среднем на два порядка меньше, чем время последующих испытаний при постоянных напряжениях, тем не менее времена до разрушения различались в этих испытаниях в 2.5 раза. Этот результат можно описать с помощью следующей системы уравнений [8]:

$$d\omega_k = \phi\,(s_k,\ \omega_k,\ \omega)\,d\sigma_k + f\,(s_k,\ \omega_k,\ \omega)\,dt,\quad k = z,\quad \theta,$$
$$\omega = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\theta^2},\quad \omega\,(0) = 0,\quad \omega(t^*) = 1,$$

где s_k - компоненты девиатора напряжений σ_k в главных осях.

2.3. Длительная прочность при нестационарном плоском напряженном состоянии

Известны серии испытаний на длительную прочность, в которых компоненты тензора напряжений являются кусочно-постоянными или синусоидально изменяющимися функциями времени. Особый интерес представляют испытания трубчатых образцов, в которых нормальное напряжение остается постоянным, а касательное напряжение в течение опыта однократно или многократно меняет знак. В ряде испытаний показано, что изменение знака касательных напряжений приводит к увеличению времени до разрушения в несколько раз. Этот результат можно описать с помощью следующего кинетического уравнения для анизотропного материала:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = f\,(\sigma_{\max}) \cdot \left(\frac{\vec{\sigma}_{\max}}{\sigma_{\max}}\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №08-08-00142 и 08-08-00407).

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Инженерный журнал. Механ. тверд. тела. 1967. №3. С. 21-35.
2. *Завойчинская Э.Б., Кийко И.А.* Введение в теорию процессов разрушения твердых тел. Изд-во МГУ. М. 2004. 168 с.
3. *Локощенко А.М.* Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. -М. -МГИУ. 2007. 268 с.
4. *Локощенко А.М.* Оценка эквивалентных напряжений при анализе длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. №4. С. 166-183.
5. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. - М.: Наука, 1966. - 752 с.
6. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. - М.: Наука, 1974. - 312 с.

7. *Наместникова И.В., Шестериков С.А.* Векторное представление параметра поврежденности // “Деформирование и разрушение твердых тел”. Тр. Института механики МГУ. М. 1985. С. 43-52.
8. *Локощенко А.М., Назаров В.В.* Длительная прочность металлов при равноосном плоском напряженном состоянии // Прикладная механика и техническая физика. 2009. № 4. С. 150-157.
9. *Локощенко А.М.* Исследование длительной прочности при сложном напряженном состоянии с помощью кинетического подхода // Сб. “Вопросы долговременной прочности энергетического оборудования”. Труды ЦКТИ, Ленинград.1986. Вып. 230. С. 107-109.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ВНЕДРЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА В ВЯЗКОУПРУГИЙ ОБРАЗЕЦ

Е.Д. Мартынова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

elemarta@mail.ru

Рассмотрен вопрос об определении свойств вязкоупругого материала из эксперимента на внедрение с постоянной скоростью сферического индентора в вязкоупругий образец. На основании известного решения задачи о контакте жесткой сферы с вязкоупругим полупространством получена формула, выражающая ядро сдвиговой релаксации через зависимость приложенной к индентору силы от времени. Приведен пример, иллюстрирующий применение полученной формулы для обработки экспериментальных данных.

Распространенным способом исследования механических свойств материалов является индентирование. В последние годы появилось также много работ, посвященных наноиндентированию. Этот способ эффективен в случае малого объема изучаемого материала, например, при рассмотрении тонких пленок, напылений, а также, когда требуется охарактеризовать локальное поведение неоднородных материалов или состояние поверхностных слоев образца, получивших повреждение в пройессе изготовления. При квазистатическом индентировании регистрируются зависимости от времени t глубины внедрения индентора h и действующей на него силы P. На основе анализа этих данных определяются механические характеристики материалов.

В работе [1] рассматривается эксперимент на внедрение с постоянной скоростью V сферического индентора в вязкоупругий образец и излагается способ нахождения из этого опыта ядра сдвиговой релаксации материала $R(t)$ в предположении, что коэффициент Пуассона ν является константой. При этом для обработки экспериментальных данных используется известное решение задачи о контакте жесткой сферы радиуса $r = a$ с вязкоупругим полупространством [2]. Согласно этому решению связь силы P и глубины внедрения h имеет вид

$$P(t) = \frac{4\sqrt{a}}{3(1-\nu)} \int_0^t R(t-x) dh^{3/2}(x)$$

или, т.к. $h(t) = Vt$,

$$P(t)=\frac{2\sqrt{a}V^{3/2}}{(1-\nu)}\int_0^t R(t-x)x^{1/2}dx=\frac{2\sqrt{a}V^{3/2}}{(1-\nu)}\int_0^t R(t)\sqrt{t-x}dx. \quad (1)$$

Подстановка сюда ядра сдвиговой релаксации $R(t)=E_0+\sum_{k=1}^{N}E_k e^{-\alpha_k t}$ дает

$$P(t)=\frac{2\sqrt{a}V^{3/2}}{(1-\nu)}\left(\frac{2}{3}E_0 t^{3/2}+\int_0^t\sum_{k=1}^{N}E_k\exp(-\alpha_k t)\sqrt{t-x}dx\right). \quad (2)$$

Далее константы E_k и μ_k, входящие в ядро $R(t)$, должны определяться из условия наилучшего совпадения кривой $P(t)$, найденной по формуле (2), и соответствующей кривой, полученной экспериментально. В работе [1] отмечается, что интегралы в выражении (2) не берутся аналитически, что создает трудности при отыскании упомянутых констант и требует реализации итерационного процесса, например, с использованием генетического алгоритма.

Изложим другой способ анализа данных, получаемых в экспериментах на индентирование, аналогичных описанным в [1]. Чтобы избежать указанную выше трудность, рассмотрим соотношение (1) как интегральное уравнение относительно $R(t)$. Известно [3], что решение интегрального уравнения

$$f(t)=\int_0^t\sqrt{(t-x)}y(x)dx$$

при $f(0) = 0$ имеет вид

$$y(t)=\frac{2}{\pi}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t\frac{f(x)}{\sqrt{t-x}}dx. \quad (3)$$

Также известно [4], что для интеграла $I(t)=\int_0^t\frac{f(x)}{\sqrt{t-x}}dx$, где $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны при $0 \le x \le b$, при $0 \le t \le b$ производная от $I(t)$ вычисляется по формуле

$$I'(t)=\frac{f(0)}{\sqrt{t}}+\int_0^t\frac{f'(x)}{\sqrt{t-x}}dx. \quad (4)$$

Применяя формулу (4) два раза к выражению (3) и учитывая, что $f(0) = 0$, получим

$$y(t) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{f'(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{f''(x)}{\sqrt{t-x}}dx\right].$$

Значит, решение уравнения (1) для $R(t)$ имеет вид

$$R(t) = \frac{V^{-3/2}(1-\nu)}{\pi\sqrt{a}}\left[\frac{P'(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{P''(x)}{\sqrt{t-x}}dx\right]. \qquad (5)$$

Аппроксимируя экспериментальную кривую $P(t)$ подходящей функцией, по формуле (5) найдем ядро $R(t)$. Полученная формула (5) существенно облегчает определение из опыта на индентирование ядра сдвиговой ползучести вязкоупругого материала по сравнению с использованием выражения (2) и фактически сводит эту процедуру к аппроксимации функцией заданного вида экспериментальной кривой $P(t)$.

Проиллюстрируем описанную процедуру на примере использования кривой $P(t)$, полученной в опыте на внедрение сферического индентора с постоянной скоростью $V = 1$мкм/с в резиновый образец. На рис.1 эта кривая изображена крестиками. Аппроксимируем эту кривую функцией вида

$$P(t) = c_0\,(1 - \exp(-c_1 t)) + c_2 t + c_3 t^2. \qquad (6)$$

Входящие в неё константы найдём из условия наилучшего описания экспериментальных данных функцией (6). В результате получим $c_0 = -9.27$, $c_1 = 0.08$, $c_2 = 4.27$, $c_3 = 0.03$. Соответствующая функция $P(t)$ изображена на рис.1 непрерывной линией, $[P(t)] =$ мН, $[t] = c$.

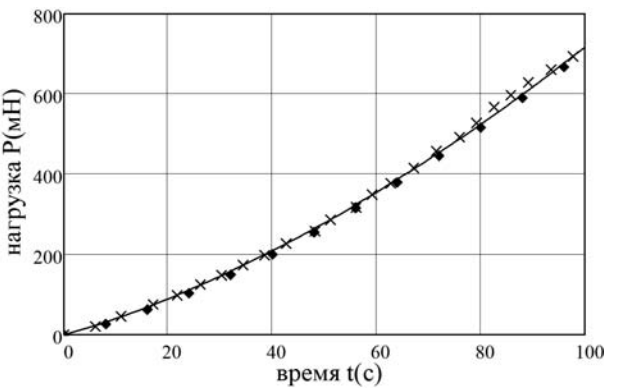


Рис. 1. Обозначения на графиках: xxx — экспериментальные данные, —·— — аналитическая аппроксимация, ♦♦♦ — нагрузка, вычисленная по формуле (2).

Подстановка найденного выражения P(t) в формулу (5) при $\nu = 0.5$ даёт следующее выражение для ядра сдвиговой релаксации R(t)

$$R(t) = 0.004\left[\frac{3.52}{\sqrt{t}} + 0.12\sqrt{t} + 0.38\exp(-0.08t)\,\mathrm{erfi}(0.285t)\right], \qquad (7)$$

$[R\,(t)]$ = мН/мкм^2. Это выражение не является аналитическим представлением ядра R(t), т.к. содержит так называемый интеграл вероятности мнимого аргумента $\mathrm{erfi}(t) = 2/\sqrt{\pi}\int_0^t \exp(x^2)dx$. Его значение легко находится численно, после чего строится график функции $R(t)$. Вид этой функции, полученный с помощью пакета программ Mathcad, изображен на рис.2 сплошной линией. Представляя искомое ядро в виде

$$R(t) = E_0 + E_1\exp(-\lambda_1 t) + E_2\exp(-\lambda_2 t) \qquad (8)$$

и находя неизвестные коэффициенты E_0, E_k, λ_k, $k = 1, 2$ из условия наилучшего совпадения кривых, построенных по формулам (7) и (8), получим вид ядра сдвиговой релаксации исследуемого материала

$$R(t) = 1.52 + 3.42\exp(-1.23t) + 1.49\exp(-0.21t). \qquad (9)$$

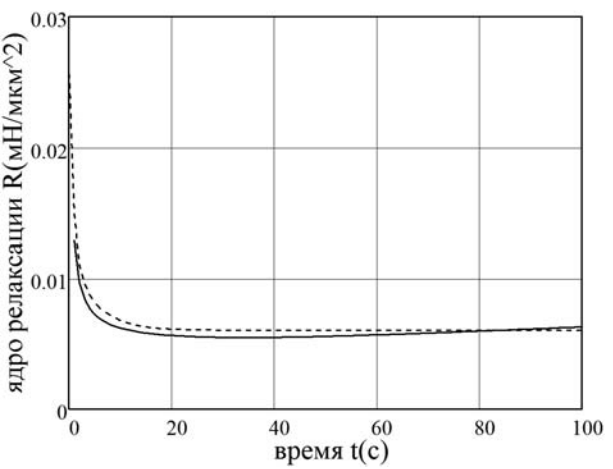


Рис. 2. Сплошная линия построена по формуле (7), пунктирная линия — по формуле (9).

Соответствующая этому выражению кривая показана на рис.2 пунктирной линией. Для проверки соответствия найденного ядра экспериментальным данным, подставим выражение (9) в (1). В результате получим кривую, изображенную на рис.1 квадратами. Сравнение этой кривой с экспериментальной показывает высокую точность предлагаемого способа анализа данных получаемых, при внедрении сферического индентора в вязкоупругий образец.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №09-01-00210, №11-01-00345).

Литература

1. *Huang G., Lu H.* Measurement of Young's relaxation modulus using nanoindentation // Mech. Time-Depend. Mater. 2006. №10. Pp.229–243.
2. *Lee E.H., Radok J.R.M*. The contact problem for viscoelastic bodies //Trans. ASME. 1960. September. Pp.438–444.
3. *Манжиров А.В., Полянин А.Д*. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.
4. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977. 528 с.

ИЗГИБ КЛИНОВИДНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

В. В. Мелешко, А. Л. Кипнис

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
Киев, Украина

meleshko@univ.kiev.ua

В работе с использованием метода интегрального преобразования Меллина построены точные решения задач об изгибе тонкой упругой клиновидной пластины сосредоточенной силой, одна из сторон которой жестко защемлена, а другая либо свободна от нагрузки либо шарнирно оперта. Определены прогиб, изгибающие и крутящий моменты и поперечные усилия. Исследовано локальное поведение и установлен характер особенности этих характеристик вблизи вершины.

1. Введение. Задачи изгиба тонких изотропных пластин различных очертаний нормальными нагрузками при различных условиях закрепления контура принадлежат к основным задачам теории пластин [1]. Определенный интерес вызывает вопрос о локальном поведении ряда силовых характеристик (изгибающие моменты и перерезывающая сила) в классической модели Кирхгоффа в окрестности либо точки изменения типа граничных условий на гладком контуре [2, 3] либо точки излома контура [4]. Для типичного случая круглой пластинки подход, основанный на использовании метода интегральных уравнений [5, 6], привел авторов работ [2, 3] после сложных выкладок к определенным заключениям относительно локального поведения перерезывающей силы в окрестности точки смены типа условий. Для случая шарнирно опертого и свободного края [2] особенность имела вид $\sqrt{x}\ln x$ при $x \to 0$. Такой необычный тип поведения стимулировал наш интерес к рассмотрению этого вопроса; при этом мы решили рассмотреть более простые задачи об изгибе клиновидной пластины с различными, но однотипными условиями на ее боковых сторонах. Задачи допускают точное решение, изложенное для ряда частных случаев в известном задачнике [7]. Частный случай клина, развернутого в полуплоскость, и определит локальное поведение величин для случая круглой пластинки.

2. Постановка задач. Тонкая изотропная упругая пластина в виде клина с углом раствора α занимает область $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \alpha$ в полярных координатах (r, θ) и нагружена в точке (r_0, θ_0) сосредоточенной силой P. В рамках классической теории пластин Кирхгоффа прогиб пластинки $w(r, \theta)$ определяется из неоднородного бигармонического уравнения

$$D\Delta\Delta w = \frac{P}{r}\,\delta(r - r_0)\,\delta(\theta - \theta_0)\,, \qquad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – двумерный оператор Лапласа в полярных координатах, величина D — постоянная цилиндрическая жесткость пластинки.

Известные выражения [1, § 62] для изгибающего момента M_θ и обобщенной перерезывающей силы V_θ

$$M_\theta = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right), \quad V_\theta = Q_\theta - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r},$$
$$Q_\theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta w), \quad M_{r\theta} = D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \tag{2}$$

(ν – коэффициент Пуассона) дают возможность сформулировать граничные условия для уравнения (1) в терминах прогиба w.

Для случая жесткого защемления края $\theta = 0$ и свободного края $\theta = \alpha$ граничные условия имеют вид:

$$(w)_{\theta=0} = 0, \ \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)_{\theta=0} = 0, \quad (M_\theta)_{\theta=\alpha} = 0, \ (V_\theta)_{\theta=\alpha} = 0, \tag{3}$$

Для случая жесткого защемления края $\theta = 0$ и свободного опирания края $\theta = \alpha$ граничные условия имеют вид:

$$(w)_{\theta=0} = 0, \ \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)_{\theta=0} = 0, \quad (w)_{\theta=\alpha} = 0, \ (M_\theta)_{\theta=\alpha} = 0. \tag{4}$$

Для случая свободного края $\theta = 0$ и свободного опирания края $\theta = \alpha$ граничные условия имеют вид:

$$(M_\theta)_{\theta=0} = 0, \ (V_\theta)_{\theta=0} = 0, \quad (w)_{\theta=\alpha} = 0, \ (M_\theta)_{\theta=\alpha} = 0. \tag{5}$$

Ставится задача определения прогиба w, изгибающих моментов M_r, M_θ, крутящего момента $M_{r\theta}$, перерезывающих сил Q_r, Q_θ и исследования этих характеристик вблизи вершины клиновидной пластинки.

3. Построение решения. Для построения решения задачи используется интегральное преобразование Меллина [8, 9]. При этом в рассмотрение вводится функция преобразованного прогиба

$$\bar{w}(p,\theta) = \int_0^\infty w(r,\theta) r^{p-2} \mathrm{d}r, \tag{6}$$

где $p = \sigma + \mathrm{i}\tau$ $(-\sigma_1 < \sigma < 0)$ — комплексный параметр. Тогда уравнение (1) с учетом условий затухания прогиба на бесконечности примет вид:

$$\frac{d^4\bar{w}}{d\theta^4} + \left[(p-1)^2 + (p+1)^2\right]\frac{d^2\bar{w}}{d\theta^2} + (p-1)^2(p+1)^2\bar{w} = \frac{P}{D} r_0^{p+1}\delta(\theta-\theta_0). \tag{7}$$

Решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения (7) находится стандартным методом вариации произвольных постоянных

$$\bar{w} = A_1 \cos(p-1)\theta + B_1 \sin(p-1)\theta + A_2 \cos(p+1)\theta + B_2 \sin(p+1)\theta + \bar{w}^* ,$$

$$\bar{w}^* = \begin{cases} \frac{Pr_0^{p+1}}{4pD}\left[\frac{\sin(p-1)(\theta-\theta_0)}{p-1} - \frac{\sin(p+1)(\theta-\theta_0)}{p+1}\right] & \text{при} \quad \theta_0 < \theta \le \alpha, \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le \theta \le \theta_0. \end{cases}$$

Выполнение нулевых граничных условий (3) дает возможность определить постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 и получить выражение для прогиба

$$w(r,\theta) = \frac{Pr_0 r}{8D\pi \mathrm{i}} \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \frac{\Omega_{c-f}(p,\theta)}{p\left(p^2-1\right)\Delta_{c-f}(p)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-p} \mathrm{d}\tau , \qquad (8)$$

где

$$\Delta_{c-f}(p) = \nu^2 + 2\nu + 5 + (1-\nu)(3+\nu)\left[\cos(2p\alpha) - \frac{2(1-\nu)}{3+\nu} p^2 \sin^2\alpha\right], \quad (9)$$

а выражение для $\Omega_{c-f}(p,\theta)$, содержащее в качестве параметров величины ν, θ_0 и α, имеет громоздкий вид и здесь не приводится. Интеграл берется по τ вдоль произвольной прямой L ($p = \sigma + \mathrm{i}\tau$), параллельной мнимой оси и лежащей в полосе ($-\sigma_1 < \sigma < 0$).

Аналитические представления решения для граничных условий (4) и (5) имеют вид, аналогичный выражению (8), только в знаменателе стоит, соответственно

$$\Delta_{c-ss}(p) = \sin(2p\alpha) - p\sin(2\alpha) \qquad (10)$$

и

$$\Delta_{f-ss}(p) = (3+\nu)\sin(2p\alpha) + p(1-\nu)\sin(2\alpha) . \qquad (11)$$

4. Анализ решения. Применяя к интегралу (8) теорему о вычетах получим выражения для прогиба, (а, следовательно, моментов и сил) через бесконечные степенные ряды. Анализ их главных членов при $r \to 0$ позволяет заключить:

1. Для случая жесткозащемленного и свободного краев пластинки при угле раскрыва $\alpha < 180°$ изгибающий момент M_θ и перерезывающая сила Q_θ имеют при $r \to 0$ сложное осцилляционное поведение вида $r^\lambda[A\sin(\omega \ln r) + B\cos(\omega \ln r)]$ с показателями λ_1 и $\lambda_2 = \lambda_1 - 1$, соответственно. Здесь A, B, ω есть известные постоянные величины, зависящие от α и ν. Зависимость показателей λ_1 и λ_2 от угла α при $\nu = 0.3$ приведены на рис. 1а.

Для случая полуплоскости ($\alpha = 180°$) такие ряды несколько упрощаются и, например, выражение для изгибающего момента M_θ на защемленном крае $\theta = 0$ при $r < r_0$ имеет вид

$$M_\theta(r,0) = M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{k-3/2} \left[b_k \cos\left(\omega \ln \frac{r}{r_0}\right) - a_k \sin\left(\omega \ln \frac{r}{r_0}\right)\right],$$

в котором $M = P\frac{1-\nu}{4(1+\nu)\pi}$, а a_k и b_k есть известные постоянные величины, зависящие от θ_0 и ν.

Анализируя первые член этого ряда и аналогичных рядов для прогиба и перерезывающей силы, делаем вывод что при приближении к вершине клина со стороны защемления имеют место осцилляции вида

$$\begin{aligned} w(r,0) &\sim r^{3/2}[A_w \sin(\omega_0 \ln r) + B_w \cos(\omega_0 \ln r)], \quad \omega_0 = \ln\frac{1-\nu}{3+\nu}, \\ M_\theta(r,0) &\sim r^{-1/2}[A_M \sin(\omega_0 \ln r) + B_M \cos(\omega_0 \ln r)], \\ Q_\theta(r,0) &\sim r^{-3/2}[A_Q \sin(\omega_0 \ln r) + B_Q \cos(\omega_0 \ln r)] \end{aligned} \tag{12}$$

соответственно.

2. Для случая жестко защемленного и шарнирно опертого краев пластинки при угле раскрыва $\alpha < 180°$ изгибающий момент M_θ и перерезывающая сила Q_θ r имеют при $r \to 0$ степенное поведение вида Ar^{λ_1} и Br^{λ_2} с показателями λ_1 и $\lambda_2 = \lambda_1 - 1$, соответственно. Здесь A, B есть известные постоянные величины, зависящие от α и ν. Зависимость показателей λ_1 и λ_2 от угла α при $\nu = 0.3$ приведены на рис. 1б. Видно, что при $\alpha > 90°$ перерезывающая сила имеет особенность, а при $\alpha > 129°$ особенность имеется также в изгибающем моменте.

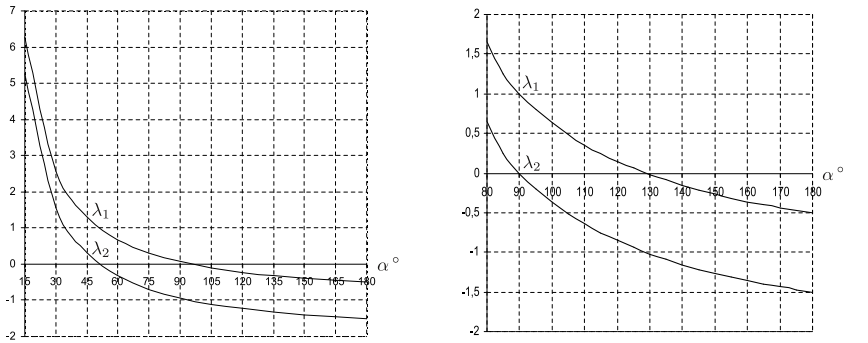
Для частного случая полуплоскости ($\alpha = 180°$), когда сила P приложена на биссектрисе ($\theta_0 = 90°$), зависимость от r изгибающего момента и перерезывающей силы от вдоль защемленного края $\theta = 0$ при $r < r_0$ имеет вид

$$M_\theta(r,0) = -\frac{P}{\pi\sqrt{2}} \frac{\sqrt{r/r_0} + \sqrt{r_0/r}}{1 + (r/r_0)^2}, \; Q_\theta(r,0) = \frac{2P}{\pi r_0 \left(1 + (r/r_0)^2\right)^2}. \tag{13}$$

Таким образом, на защемленном крае $M_\theta(r,0) \sim Ar^{-1/2}$ при $r \to 0$, а сила $Q_\theta(r,0)$ остается конечной и достигает максимального значения $0.637P/r_0$ при $r = 0$.

На шарнирно опертом крае $\theta = \alpha = 180°$ имеем при $r < r_0$

$$Q_\theta(r,\pi) = \frac{P}{2\sqrt{2}\pi r_0} \frac{(r/r_0)^{-3/2} + (r/r_0)^{-1/2} + 5(r/r_0)^{1/2} - 4\sqrt{2}}{\left(1 + (r/r_0)^2\right)^2} \tag{14}$$



а) б)

Рис. 1. Поведение степенных показателей для локальных особенностей в изгибающем моменте (λ_1) и перерезывающей силе (λ_2) в зависимости от угла пластинки α; а) жесткозащемленный и свободный края; б) жесткозащемленный и шарнирно опертый края. $\nu = 0.3$.

и сила имеет особенность $Q_\theta(r,\pi) \sim Br^{-3/2}$ при $r \to 0$.

3. В случае, когда одна из сторон пластины ($\theta = 0$) свободна от нагрузки, а другая ($\theta = \alpha$) шарнирно оперта, ближайший к мнимой оси корень уравнения (11) является действительным для всех значений коэффициента Пуассона, следовательно, осцилляции в данной задаче не наблюдается. Заметим, что $\nu = 0.3$ особенность у перерезывающих усилий появляется при углах $\alpha > 50°$, а особенность у изгибающих моментов — при углах $\alpha > 90°$.

В случае полуплоскости ($\alpha = 180°$) уравнение (11) имеет счетный набор корней $p_k = k/2$ ($k = 1, 2, ...$). Таким образом, поведение изгибающего момента и поперечного усилия вблизи точки смены граничных условий суть $M_\theta(r,\pi) \sim Ar^{-1/2}$, $Q_\theta(r,\pi) \sim Br^{-3/2}$ при $r \to 0$.

5. Выводы. Сравнивая полученные результаты локального поведения изгибающего момента и перерезывающей силы для полуплоскости, как частного случая клиновидной пластинки с различными условиями закрепления ее сторон, с результатами работ [2, 3] для круглой пластинки, мы не получили полного соответствия. Любопытная особенность вида $\sqrt{x}\ln x$ при $x \to 0$ локального поведения перерезывающей силы для случая шарнирно опертого и свободного края [2] не была нами получена. Этот вопрос требует дальнейшего изучения, путем более внимательного рассмотрения сложного пути построения решения интегрального уравнения в указанной статье.

Кроме того, по мнению авторов подход к анализу локальных особенностей некоторых интегральных характеристик в рамках классической теории пластин Кирхгоффа нуждается в серьезном уточнении. Правильное поведение таких величин может быть получено лишь при решении

пространственных задач линейной теории упругости для клиновидного слоя со смешанными граничными условиями на его гранях. Решение таких задач и сегодня представляет вызов современным аналитическим методам, как это было свыше 150 лет назад со знаменитой задачей Ламе о равновесии упругого параллелепипеда.

Литература

1. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 636 с.
2. *Monegato G., Strozzi A.* On the form of the contact reaction in a solid circular plate simply supported along two antipodal edge arcs and defelected by a central transverse concentrated force // J. Elasticity. 2002. Vol. 68. P.13–35.
3. *Strozzi A., Monegato G.* Solid circular plate clamped along two antipodal edge arcs and defelected by a central transverse concentrated force // J. Elasticity. 2009. Vol. 97. P.155–171.
4. *Meleshko V.V., Gomilko A.M., Gourjii A.A.* Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate // J. Eng. Math. 2001. Vol. 40. P.377–398.
5. *Шерман Д.И.* Об изгибе круглой пластинки частично защемленной и частично опертой вдоль контура // Докл. АН СССР. 1955. Т. 101. Вып. 3. С.623–626.
6. *Шерман Д.И.* Об изгибе круглой пластинки частично опертой и частично свободной вдоль контура // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. Вып. 6. С.1180–1183.
7. *Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С.* Сборник задач по математической физике. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 420 с.
8. *Трантер К.Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 204 с.
9. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН ВО ФРИКЦИОННОЙ НАКЛАДКЕ

В.М. Мирсалимов, Дж.И. Заркеш

Институт математики и механики НАН Азербайджана
Баку, Азербайджан

mir-vagif@mail.ru

Дается математическое описание зарождения трещин во фрикционной накладке колесной машины под действием термоупругих напряжений при торможении. Считается, что при многократном торможении происходит зарождение трещин и разрушение материала накладки. Задача о равновесии фрикционной накладки с системой зон предразрушения сводится к решению системы нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром типа Коши. Условие зарождения трещины формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала.

Постановка задачи. Одной из причин появления напряжений и деформаций во фрикционной накладке при торможении является ее неравномерный нагрев. В связи с этим представляет теоретический и практический интерес разработка эффективного расчетного метода, позволяющего прогнозировать зарождение трещин во фрикционной накладке при действии температурных напряжений с учетом реальной обработанной поверхности.

Тепловое разрушение вызывается теплообразованием при трении. Будем предполагать, что в процессе торможения имеет место установившийся поток тепла. В этом случае температура $T(r,\theta)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению теории теплопроводности. Отнесем накладку к полярной системе координат $r\theta$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_0, L с радиусами R_0, R. Фрикционную накладку моделируем кривым (круговым) брусом с сечением близким к узкому прямоугольнику. Считается, что наружный контур накладки близок к круговому.

Представим границу внешнего контура накладки L' в виде $r = \rho(\theta)$, $\rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta)$, где малый параметр $\varepsilon = R_{\max}/R$; $R_{\max}$ — наибольшая высота выступа (впадины), неровности наружной поверхности накладки. При эксплуатации фрикционной пары в тормозных накладках будут возникать зоны предразрушения (прослойки перенапряженного материала), которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов этих зон с нарушенной структурой материала моделируем введением между берегами зон предразрушения

связей (сил сцепления), имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеров зон предразрушения зависят от вида материала.

Рассмотрим систему полос предразрушения, каждая длиной $2\ell_k$ ($k = 1, 2, ..., N_0$), расположенных на отрезках $|x_k| \leqslant \ell_k$, $y_k = 0$. В центрах полос предразрушения разместим начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$, оси x_k которых совпадают с линиями соответствующих зон и образуют углы α_k с осью x (θ=0). Считается, что в начальной стадии образования полос предразрушения, их размер гораздо меньше толщины накладки. При торможении под действием тепловой нагрузки, в связях, соединяющих берега полос предразрушения, возникнут нормальные $q_{y_k}(x_k)$ и касательные $q_{x_k y_k}(x_k)$ усилия. Эти усилия и размер полос предразрушения неизвестны и должны быть определены при решении задачи механики разрушения. Граничные условия рассматриваемой задачи о зарождении трещин во фрикционной накладке при действии температурных напряжений имеют вид

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0;$$
$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{при} \quad r = \rho(\theta).$$

На прямолинейных концах накладки:

$$\int_{R_0}^{R} \sigma_\theta dr = 0, \quad \int_{R_0}^{R} \tau_{r\theta} dr = 0, \quad \int_{R_0}^{R} \sigma_\theta r dr = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm\theta_0$$

на берегах зон предразрушения

$$\sigma_{y_k} = q_{y_k}(x_k), \quad \tau_{x_k y_k} = q_{x_k y_k}(x_k) \quad (k = 1, 2, ..., N_0).$$

Метод решения задачи. Температуру, напряжения и перемещения в накладке ищем виде разложения по малому параметру. Для получения решения задачи термоупругости в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений [2]. Найденные с помощью термоупругого потенциала перемещений напряжения $\overline{\sigma}_r^{(0)}$, $\overline{\sigma}_{r\theta}^{(0)}$, $\overline{\tau}_{r\theta}^{(0)}$ и перемещения $\overline{v}_r^{(0)}$,$\overline{v}_\theta^{(0)}$ не удовлетворяют граничным условиям термоупругого напряженного состояния во фрикционной накладке. Поэтому необходимо найти второе напряженно-деформированное состояние $\overline{\overline{\sigma}}_r^{(0)}$, $\overline{\overline{\sigma}}_{r\theta}^{(0)}$, $\overline{\overline{\tau}}_{r\theta}^{(0)}$,$\overline{\overline{v}}_r^{(0)}$, $\overline{\overline{v}}_\theta^{(0)}$ такое, чтобы $\overline{\sigma}_r^{(0)} + \overline{\overline{\sigma}}_r^{(0)}$, $\overline{\sigma}_{r\theta}^{(0)} + \overline{\overline{\sigma}}_{r\theta}^{(0)}$, $\overline{\tau}_{r\theta}^{(0)} + \overline{\overline{\tau}}_{r\theta}^{(0)}$, $\overline{v}_r^{(0)} + \overline{\overline{v}}_r^{(0)}$, $\overline{v}_\theta^{(0)} + \overline{\overline{v}}_\theta^{(0)}$ удовлетворяли условиям термоупругой задачи в нулевом приближении.

Используя формулы Колосова–Мусхелишвили [3], краевые условия второго напряженно-деформированного состояния запишем в виде краевой задачи для отыскания двух аналитических функций $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$.

Удовлетворяя комплексными потенциалами краевым условиям на круговых границах, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Удовлетворяя комплексными функциями краевым условиям на берегах зон предразрушения, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k^0(x_k)$. Сингулярные интегральные уравнения при дополнительных условиях с помощью процедуры алгебраизации (см. [4], приложение) сводятся к системе $N_0 \times M$ алгебраических уравнений для определения $N_0 \times M$ неизвестных $g_k(t_m)$ $(m = = 1, 2, ..., M)$

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N_0}\ell_k\left[g_k^0(t_m)K_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_r) + \overline{g_k(t_m)}L_{mk}(\ell_k t_m, \ell_n x_r)\right] = f_n^0(x_r)$$

$$\sum_{m=1}^{M} g_n(t_m) = 0 \quad (n = 1, 2, ..., N_0;\ r = 1, 2, ..., M-1)$$

где $t_m = \cos\dfrac{2m-1}{2M}\pi$; $x_r = \cos\dfrac{\pi r}{M}$.

В правые части этих алгебраических систем входят неизвестные значения нормальных $q_{y_k}^0$ и касательных $q_{x_k y_k}^0$ усилий в узловых точках соответствующих зон предразрушения. Используя полученное решение находим

$$g_k^0(x_k) = \frac{2\mu}{i(1+k_0)}\frac{d}{dx_k}\left[C(x_k, \sigma_k^0)(q_{y_k}^0(x_k) - iq_{x_k y_k}^0(x_k))\right],$$

где x_k — аффикс точек берегов k-той зоны предразрушения.

Требуя выполнения этих условий в узловых точках, получим недостающие алгебраические уравнения для нахождения приближенных значений усилий $q_{y_k}^{(0)}(t_m)$ и $q_{x_k y_k}^{(0)}(t_m)$ в узловых точках. При этом используется метод конечных разностей. В результате получается комплексная алгебраическая система уравнений. Так как решение системы сингулярных интегральных уравнений ищется в классе всюду ограниченных функций, то к системе необходимо добавить условия ограниченности напряжений на концах зон предразрушения $x_k = \pm\ell_k$

$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{M+m}g_k^0(t_m)\operatorname{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi = 0;\ \sum_{m=1}^{M}(-1)^M g_k^0(t_m)\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi = 0$$

Полученная алгебраическая система из-за неизвестных размеров зон предразрушения является нелинейной. Для решения объединенной алгебраической системы использовали метод последовательных приближений. В

случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в зонах предразрушения также использовался алгоритм, подобный методу упругих решений А.А. Ильюшина [5]. После решения объединенной алгебраической системы перейдем к построению решения задачи в первом приближении. При $r = R$ находим функции N и T. С помощью формул Колосова–Мусхелишвили [3], граничные условия в первом приближении можно записать в виде краевой задачи для определения комплексных потенциалов $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$. Функции $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$ ищутся в виде аналогичном нулевому приближению с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения задачи такой же как в нулевом приближении. После определения искомых величин для прогнозирования критического значения контактного давления в тормозном механизме, при котором может появиться трещина, использовали критерий критического раскрытия берегов зон предразрушения

$$\left|u_k^+(x_k,0) - u_k^-(x_k,0) - i\left(v_k^+(x_k,0) - v_k^-(x_k,0)\right)\right| = \delta_c,$$

где δ_c — характеристика сопротивления материала фрикционной накладки трещинообразованию, определяется опытным путем.

Литература

1. *Mirsalimov V.M.* The soluton of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair.// J. of Applied matematics and mechanics, 2007, v.71, №1, p. 120–136.
2. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. *Мирсалимов В.М.* Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
5. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат., 1948. 376 с.

ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ БИНГАМА–ИЛЬЮШИНА В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Л. В. Муравлева

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

lvmurav@gmail.com

В работе на основе вариационной постановки численно исследовано течение вязкопластической среды Бингама–Ильюшина в плоских каналах переменной ширины. Изучено влияние геометрии области и предела текучести на форму, размеры и расположение жестких зон. Отмечены неизвестные ранее качественные особенности течений.

Исследования вязкопластических течений занимают особое место в работах А.А. Ильюшина [1]. В 1937–38 годах им были защищены кандидатская и докторская диссертации по вязкопластическим течениям, впервые установлена эквивалентность дифференциальных уравнений вязкопластичности вариационному принципу минимума мощности внутренних сил, решены новые задачи. Вариационная постановка впоследствии заняла преобладающее место в теории. В [2, 3] решались задачи для более сложных моделей: вязкоупругопластической среды и течения вязкопластической жидкости в пористых средах. Большой интерес представляют течения в областях с криволинейной границей, в частности, в каналах переменной ширины.

Рассмотрим плоские стационарные течения несжимаемой вязкопластической среды под действием перепада давления $\triangle P$ в каналах переменной ширины с границей Γ. Запишем уравнения движения и определяющие соотношения:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = \nabla p, \qquad \operatorname{div}\,\boldsymbol{v} = 0,$$
$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \sigma_s \frac{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})|}, & |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})| \neq 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| \leq \sigma_s, & \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ — скорость, p — давление, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ — тензор скоростей деформаций, $|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})| = (D_{ij}D_{ij})^{1/2}$, $\boldsymbol{\tau}$ — девиатор тензора напряжений, μ — коэффициент вязкости, σ_s — предел текучести. Система уравнений решается при условии прилипания среды к стенкам канала $\boldsymbol{v}\,|_\Gamma = 0$.

В задачах о течении вязкопластической среды характерной особенностью является необходимость строить решения в областях с неизвестной границей, разделяющей два типа движения среды: жесткие зоны и зоны

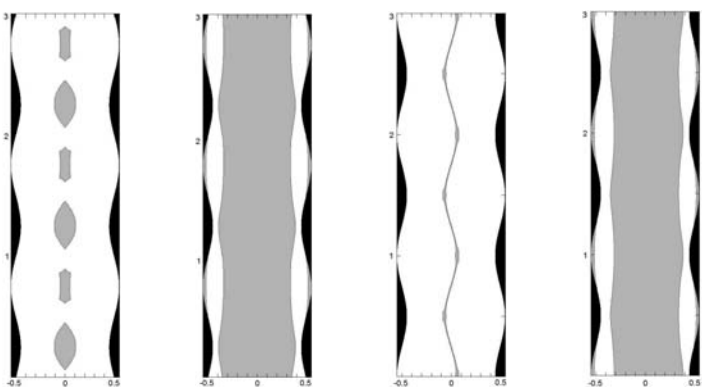
деформируемого течения. Наиболее эффективными методами для преодоления этой сложности являются вариационные методы. Задача (1) с граничными условиями $\boldsymbol{v}\,|_{\Gamma} = 0$ эквивалентна задаче минимизации следующего функционала:

$$\boldsymbol{v} = \min_{\boldsymbol{u}\in U_B} J(\boldsymbol{u}), \qquad (2)$$
$$J(\boldsymbol{u}) = 2\mu \int_{\Omega} D_{ij}(\boldsymbol{u}) D_{ij}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega + \sigma_s \int_{\Omega} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})|\mathrm{d}\Omega - \triangle P \int_{\Omega} v_1 \mathrm{d}\Omega$$

где U_B – подпространство $(H^1(\Omega))^2$, состоящее из функций, удовлетворяющих условию несжимаемости и главным граничным условиям. Главная сложность при решении (2) связана с недифференцируемостью второго слагаемого. В [6] доказано, что решение задачи (2) сводится к нахождению седловой точки следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda}) = 2\mu \int_{\Omega} D_{ij}(\boldsymbol{v}) D_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\Omega + \sigma_s \int_{\Omega} \lambda_{ij} D_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\Omega - \triangle P \int_{\Omega} v_1 \mathrm{d}\Omega,$$

где $\sigma_s\boldsymbol{\lambda}$ — пластические напряжения, то есть $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \sigma_s\boldsymbol{\lambda}$, $\lambda_{ij} = D_{ij}(\boldsymbol{v})/|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})|$ в области течения и $|\boldsymbol{\lambda}| < 1$ в жесткой зоне. Для нахождения седловой точки воспользуемся алгоритмом типа Узавы [6], его обоснование и детали реализации подробно изложены в [7].



(a) (b) (c) (d)

Рис. 1. Распределение жестких зон в каналах с волнообразными стенками.

Рассмотрим каналы с границами Γ: $|x_1| = 0.5{+}0.05\cos(2\pi x_2)$ (симметричный канал) и $x_1 = \pm 0.5 + 0.05\cos(2\pi x_2)$ (канал постоянной ширины). Расход выбирался равным расходу в прямолинейном канале с соответствующим пределом текучести. Распределение жестких зон приведено на рис. 1, серый цвет соответствует жестким зонам, белый – области деформируемого течения. Для канала с симметричными стенками при малых значениях τ_s ядро разрывно (рис. 1(a), $\tau_s = 0.1$): отдельные «островки» расположены периодически в наиболее узких и широких частях канала,

при этом их размеры и форма различны; скорость большего ядра была чуть выше, а меньшего - чуть ниже, чем для прямолинейного канала. С увеличением τ_s значения этих скоростей постепенно сближались до одинаковой величины в сплошном ядре, средняя ширина которого чуть меньше ширины ядра в прямолинейном канале, а скорость – несколько больше. С ростом предела текучести увеличивается размер жестких зон и уменьшается амплитуда волнообразной границы ядра, при больших значениях τ_s в самых широких частях канала появляются застойные зоны (рис. 1(b), $\tau_s = 0.4$).

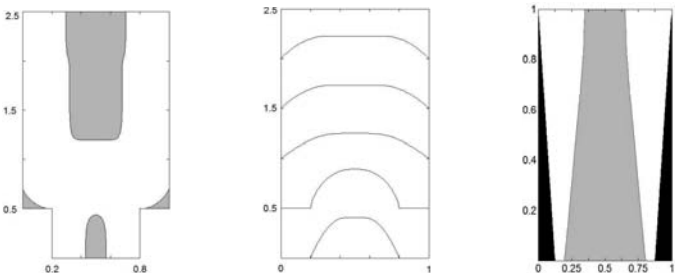
Ранее эта задача уже решалась другими авторами. В [4, 8] была предсказана возможность разрыва ядра. В [5, 8] задача решалась в приближении тонкого слоя, были найдены границы квазиядра, которые повторяют границы канала, в то время как границы ядра, полученного при численном решении, находятся в противофазе с границей канала. В общем случае квазиядро жесткой зоной не является, и определить границы физического ядра в приближении тонкого слоя нельзя. В каждом из поперечных сечений канала профиль скорости среды «близок» к профилю скорости в канале постоянной ширины: почти параболический в области течения (меняющийся от нуля на границе до v_{max} на границе с ядром) и постоянный, равный v_{max} в ядре (v_{max} не зависит от продольной координаты). Для того чтобы расход был постоянным (в силу несжимаемости среды) в самой узкой части канала должна быть максимальная ширина ядра, и наоборот. Форма квазиядра противоречит этой закономерности.

Для канала постоянной ширины расчеты проводились в широком диапазоне значений τ_s от 0.01 до 0.45. Распределение жестких зон приведено на рис. 1: (c) $\tau_s = 0.025$, (d) $\tau_s = 0.4$. Для всех рассмотренных значений τ_s существует непрерывное ядро течения, ширина которого очень близка к ширине ядра для прямолинейного канала ($2\tau_s$). Как и ранее, при больших значениях τ_s появляются застойные зоны.

На рис. 2 приведено распределение жестких зон (рис. 2(a)) и вертикальной составляющей скорости (рис. 2(b)) при $y = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ для прямоугольного канала с внезапным расширением. Среда движется медленнее в широкой части канала (в силу несжимаемости среды). Для данного канала ядро также разрывно: у входного отверстия в канал ядро уже и двигается с большей скоростью по сравнению с ядром у выходного отверстия. Кроме того, за ступеньками канала расположены застойные зоны.

На рис. 2(c) представлено распределение жестких зон в плоском диффузоре ($\tau_s = 0.3$). Отмеченная ранее закономерность сохраняется: с увеличением ширины канала уменьшается ширина ядра.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00353.



(a) (b) (c)

Рис. 2. Распределение жестких зон (a) и профили скорости (b) в канале с внезапным расширением, распределение жестких зон в диффузоре (c).

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Деформация вязко-пластического тела // Уч.записки МГУ. Механика. 1940. Вып. 39.
2. *Магомедов О.Б., Победря Б.Е.* Некоторые задачи вязко упругопластического течения // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 4. С.152–169.
3. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред // М.: Наука, 1989. 394 с.
4. *Вишняков В.И., Павлов К.Б., Романов А.С.* Перистальтическое течение неньютоновской вязкопластичной жидкости в щелевом канале // ИФЖ. 1976. Т. 31. №3. С.499–505.
5. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Основы теории течений бингамовских сред // М.: Физматлит, 2004.
6. *Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
7. *Muravleva L.V., Muravleva E.A.* Uzawa-like algorithm on semi-staggered grids for unsteady Bingham medium flows // Rus. J. of Num. Anal. and Math. Modelling. 2009. V. 24. №6. P.543–563.
8. *Frigaard I.A., Ryan D.* Flow of a visco-plastic fluid in a channel of slowly varying width // J. Non-Newtonian Fluid. Mech. 2004. V. 123. P.67–83.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ БИНГАМА–ИЛЬЮШИНА

Л. В. Муравлева [1], ***Е. А. Муравлева*** [2]

[1] ***МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия***
[2] ***Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Лейпциг, Германия***
[1] **lvmurav@gmail.com**, [2] **catmurav@gmail.com**

В работе численно исследована задача остановки течения вязкопластической среды в трубах различного поперечного сечения. При численном решении обнаружены неизвестные ранее качественные особенности — появление при остановке застойных зон, полностью или частично охватывающих контур границы, в зависимости от формы сечения канала.

В природе и технике существует широкий круг материалов, которые обладают поведением вязкопластической среды Бингама-Ильюшина [1]: если интенсивность напряжений ниже предела текучести, среда ведёт себя как жёсткое тело, выше этого предела - как несжимаемая вязкая жидкость. Близкими свойствами обладает вязкоупругопластическая среда [2].

Рассмотрим нестационарное течение вязкопластической среды в цилиндрической трубе с поперечным сечением Ω и границей Γ под действием перепада давления C. Поле скорости среды имеет одну отличную от нуля компоненту v, $\boldsymbol{v} = (0, 0, v)$, направленную вдоль оси x_3 и зависящую от времени t и координат x_1, x_2. Необходимо найти скорость v, удовлетворяющую уравнению:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} - \mu\triangle v - \tau_s\nabla\cdot\left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right) = C \quad \text{в } \Omega\times(0,T); \tag{1}$$

$$v = 0 \ \text{ на } \Gamma\times(0,T), \ \ v|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega \quad \left(v_0\Big|_{\Gamma} = 0\right),$$

где ρ - плотность, μ - коэффициент вязкости, τ_s - предельное напряжение сдвига. Отметим, что соотношение (1) не имеет смысла в жесткой зоне $\Omega_0 = \{(x, t)|(x, t) \in \Omega\times(0, T), \nabla v(x, t) = \mathbf{0}\}$.

В задачах о течении среды Бингама-Ильюшина характерной особенностью является необходимость строить решения в областях с неизвестной границей. Это обстоятельство создает большие трудности при построении эффективных численных методов. Существуют две основные группы методов для преодоления математических сложностей, связанных с течением вязкопластической среды. Первая из них включает методы регуляризации, заключающиеся в аппроксимации недифференцируемых

определяющих соотношений гладкой функцией. Этот упрощенный подход иногда приводит к неточному решению. Альтернативой регуляризованным моделям служат вариационные методы, впервые предложенные для вязкопластической среды в [1].

Для дискретизации по времени используем неявную схему Эйлера. Пусть $\triangle t$ – постоянный шаг по времени. Положим $v^0 = v_0$. Для $k \geq 1$, зная v^{k-1}, находим v^k как решение задачи минимизации функционала $J : H_0^1(\Omega) \to \mathrm{R}$. Требуется найти $v^k \in H_0^1(\Omega)$, такую что $J(v^k) \leq J(u) \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$, где

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\alpha|u|^2 + \mu|\nabla u|^2\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \tau_s \int_\Omega |\nabla u|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega f u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$\alpha = \rho/\triangle t$, $f = C(k\triangle t) + \alpha v^{k-1}$.

Для нахождения точки минимума функционала J используется итерационный алгоритм ALG2 [3]. В работе [4] предложены и обоснованы разностные схемы для численного расчета течений вязкопластических сред, описан алгоритм и детали его реализации, а также проведен подробный анализ численного решения стационарной задачи.

Характерным свойством вязкопластической среды является невозможность существования течения при малых градиентах давлений. Существует критическое значение градиента давлений C^* такое, что при $C < C^*$ течение отсутствует, то есть $v \equiv 0$; при $C > C^*$ течение существует.

Традиционно рассматриваются два вида жестких зон: ядра течения, в которых среда движется как твердое тело с постоянной скоростью, и зоны застоя - жёсткие зоны, примыкающие к границе области, в которых среда покоится. Качественые особенности стационарного течения в каналах исследованы в [5]: при стационарном течении в трубах всегда существует жёсткое ядро внутри области течения, наличие застойных зон зависит от геометрических особенностей границы. Так, в круглом и кольцевом сечении застойных зон нет, в каналах с треугольным или прямоугольным сечениями застойные зоны находятся в углах. При снижении градиента давления зона течения между ядром и застойными зонами уменьшается (истончается); в момент блокирования течения ($C = C^*$) жёсткие зоны смыкаются, а область течения вырождается в кривую L, называемую контуром страгивания. Застойные зоны всегда заключены между границей области Γ и контуром страгивания L. Для прямоугольника и треугольника контур страгивания состоит из дуг окружностей, вписанных в углы, и отрезков сторон. Полученные авторами численные решения полностью согласуются с данными теоретическими предсказаниями. На фиг. 1 приведено распределение жёстких зон для некоторых поперечных сечений.

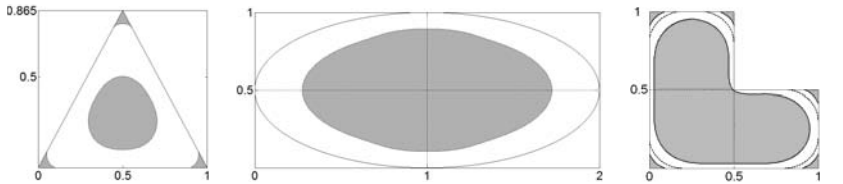


Рис. 1.

Нестационарные течения вязкопластической среды исследованы значительно меньше, чем стационарные. Результаты численного моделирования нестационарных течений относятся или к одномерным задачам, или получены в приближении тонкого слоя. Важной качественной особенностью задач о нестационарном движении вязкопластических сред является конечность промежутка времени затухания движения при отсутствии внешних сил. Это является принципиальным отличием от соответствующего течения вязкой жидкости, которое затухает экспоненциально за бесконечно большое время.

В работе [3] получена верхняя граница для времени остановки течения (1) среды Бингама-Ильюшина с начальной скоростью v_0 под действием постоянного градиента давления C_1 ниже критического C^*: пусть $C < \tau_s \gamma |\Omega|^{-1/2}$, тогда $v(t) \equiv 0 \quad \forall\, t > T_C$, где

$$T_C = \frac{\rho}{\mu\lambda_0} \ln\left[1 + \frac{\mu\lambda_0 \|v_0\|_{L^2(\Omega)}}{\gamma\tau_s - C|\Omega|^{1/2}}\right], \quad \gamma = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}},$$

λ_0 — минимальное собственное значение оператора Лапласа с однородными граничными условиями Дирихле ($\lambda_0 > 0$).

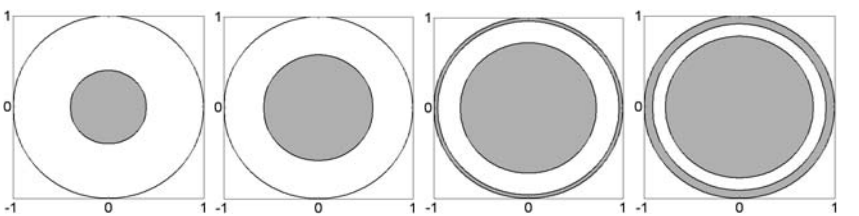


Рис. 2.

Численно решалась задача об остановке течения (1), при этом начальное распределение скорости $\boldsymbol{v}_0$ соответствует стационарному течению с градиентом давления C. При мгновенном уменьшении перепада давления до значения ниже критического $C_1 < C^*(C_1 \neq 0)$ скорость уменьшалась и течение остановилось. При этом вычисленное время остановки было ниже теоретической верхней границы для всего диапазона изменения предела текучести. Было проведено исследование зависимости вычисленного времени остановки от внутренних параметров ρ, μ, τ_s. Вычисленное время линейно зависит от плотности, обратно пропорционально – от вязкости.

С увеличением предела текучести увеличиваются жесткие зоны, уменьшается скорость и расход, следовательно, среда останавливается быстрее.

Важной составляющей решения является эволюция жестких зон. При численном моделировании задачи об остановке течения в круглой трубе наблюдается следующая картина: увеличивается ядро течения, уменьшается скорость и появляется застойная зона на границе (фиг. 2). Этот эффект имел место для всех рассмотренных значений τ_s, при этом размер застойной зоны увеличивается при уменьшении предела текучести. Появление застойных зон, охватывающих всю границу, наблюдалось также для кольцевого сечения (у внешней границы), сечения в форме квадрата и правильного треугольника.

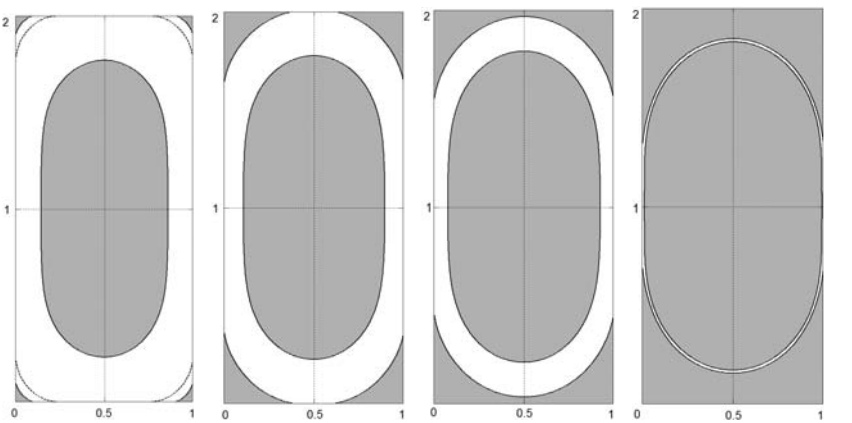


Рис. 3.

В канале прямоугольной формы в начальный момент времени в центре находится ядро течения, в углах — застойные зоны. Далее жесткие зоны увеличиваются, причем можно отметить быстрый рост застойных зон. При торможении, начиная с некоторого момента, зона застоя полностью охватывает узкие стороны прямоугольника, выходя за контуры страгивания; на широких сторонах течение примыкает к границе, что проиллюстрировано на фиг. 3. Кроме канонических областей, рассматривались области сложной формы (с криволинейной границей, входящими углами, и т.д.). Эволюция жестких зон проходила аналогично уже описанным случаям: застойные зоны выходили за контур страгивания, иногда охватывая всю границу.

Также рассматривались остановка течения между пластинами под действием градиента давления (плоское течение Пуазейля) и при движении одной из пластин (плоское течение Куэтта) [7] и процессы установления и остановки течения между вращающимися соосными цилиндрами (круговое течение Куэтта) [8, 9]. Интересно, что застойные зоны при остановке

течения между пластинами не появляются, а для кругового течения Куэтта — появляются рядом со внешними цилиндрами. Стационарное круговое течение Куэтта является установочным экспериментом для определения коэффициента вязкости и предела текучести вязких и вязкопластических сред на ротационном вискозиметре. Поэтому процесс установления соответствует началу работы вискозиметра, остановка течения — завершению работы.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 08-01-00353, 09-01-00565.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Деформация вязко-пластического тела // Уч.записки МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С.3–81.
2. *Магомедов О.Б., Победря Б.Е.* Некоторые задачи вязко упругопластического течения // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 4. С.152–169.
3. *Glowinski R., Le Tallec P.* Augmented Lagrangians and Operator- Splitting Methods in Nonlinear Mechanics // Philadelphia, PA, SIAM, 1989.
4. *Муравлёва Е.А.* Разностные схемы для расчета течений вязкопластической среды в канале // Математическое моделирование. 2008. Т.20. № 12. С. 76–88.
5. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1971.
6. *Муравлева Е.А., Муравлева Л. В.* Нестационарные течений вязкопластической среды в каналах // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2009. № 5. С. 164-188.
7. *Muravleva L.V., Muravleva E.A., Georgiou G.C., Mitsoulis E.* Numerical simulations of cessation flows of a Bingham plastic with the augmented Lagrangian method // J. Non-Newtonian Fluid. Mech. 2010. V. 165. № 9-10. P.544–550.
8. *Муравлева Л.В., Муравлева Е.А.* Численное моделирование разгона и остановки течения вязкопластической среды Бингама–Ильюшина между соосными цилиндрами // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. 2010. Т. 65. №. 3. С.57-–60.
9. *Muravleva L.V., Muravleva E.A., Georgiou G.C., Mitsoulis E.* Numerical simulations of unsteady circular Couette flow of a Bingham plastic with the Augmented Lagrangian Method // Rheologica Acta. DOI: 10.1007/s00397-010-0497-y

ДИФРАКЦИЯ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ (АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

С. Е. Носов

РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина
Москва, Россия

Эвристическая теория дифракции Кирхгофа, очень удобная для решения задач оптики, до настоящего времени не применялась к задачам упругости. Математическая постановка задач оптики и упругих волн в антиплоском случае совпадают, но различны физические компоненты решения. В настоящей работе проведен сравнительный анализ двух теорий на примере дифракции на полуплоскости, позволивший сделать вывод об их хорошем совпадении. Подробный обзор двух теорий для оптической задачи дан в работе [3]

Постановка задачи. В упругое пространство вставлена жесткая полубесконечная пластина, на границе которой перемещения равны нулю (или имеется разрез, свободный от напряжений). Введена цилиндрическая система координат r, θ, z, где ось Oz совпадает с ребром пластины, а полярная ось направлена вдоль нее. Единственная компонента перемещений v, отличная от нуля, параллельна ребру пластины и зависит от r, θ. На пластину набегает плоская гармоническая SH-волна с фронтом, параллеленым ребру пластины $v_0 = \exp(ikr\cos(\theta - \theta_0))$. Для определения $v(r, \theta)$ получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & r > 0, \theta \in [0, 2\pi] \\ v(r, 0) = v(r, 2\pi) = 0, & r > 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} r\left(\dfrac{\partial v}{\partial r} - ikv\right) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Для свободного разреза граничное условие надо изменить на $\partial v/\partial\theta = 0$. К системе (1) добавляем и т.н. условие Мейкснера $v \sim r^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$ для жесткой полуплоскости и $v \sim const + r^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$ при $r \sim 0$ для свободного разреза.

Решение Зоммерфельда. Точное решение Зоммерфильда получается методами контурного интегрирования; для компактной записи выражений для перемещений и напряжений удобно обозначить вслед за [1]

$$Q(a) = e^{-ia^2} \int_a^\infty e^{it^2} dt\,,$$

$$\alpha = -\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta - \theta_0}{2}\,, \quad \beta = -\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta + \theta_0}{2}\,.$$

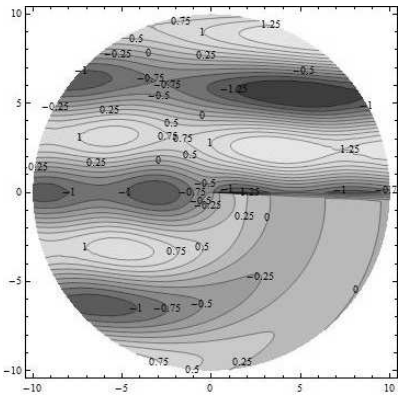


Рис. 1. Теория Кирхгофа, перемещения

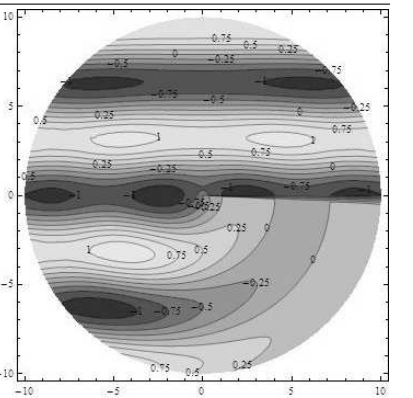


Рис. 2. Перемещения, угол падения $\pi/2$. Дифракция на разрезе

Тогда для перемещений получим следующее выражение:

$$v = \frac{\exp(\frac{-i\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{ikr}\,(Q(\alpha) \mp Q(\beta)) \tag{2}$$

Причем знак «−» берется для жестко заделанной границы, знак «+» — для свободного от напряжений разреза.

Решение Кирхгофа. Согласно Кирхгофу волнове поле в точке P задается интегралом по отверстию S:

$$v(P) = \int\limits_S \left(v_0 \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial v_0}{\partial \vec{n}} G \right) dS \tag{3}$$

где v_0 — поле падающей волны, а $G(\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)$ — функция Грина. На полуплоскости выполнены так называемые граничные условия Кирхгоффа-Френеля $v = 0, \quad \partial v/\partial \vec{n} = 0$. После преобразований интеграл приводится к виду

$$v = \frac{\exp(\frac{-i\pi}{4})}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{ikr}\, Q(\alpha) \tag{4}$$

что совпадает с асимптотиткой точного решения вблизи границы геомерической тени. В окрестности экрана формула неприменима, т.к. граничные условия (4) неточны.

Сравнение теорий. Как уже указывалось, из аналитических представлений решения Зоммерфельда (2) и Кирхгофа (4) следует их хорошее совпадение вблизи границы геометрической тени.

Этот вывод подтверждают результаты расчетов. На фиг. 1 представлены графики перемещений для теории Кирхгофа, на фиг. 2 — для свободного

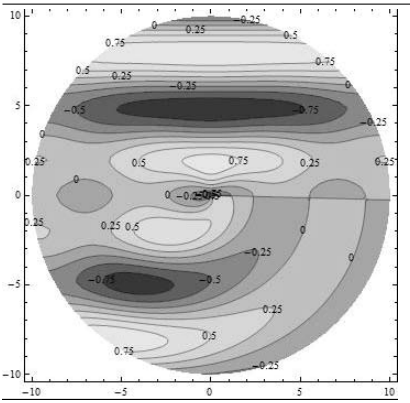


Рис. 3. Напряжения σ_{xz}, угол падения $\pi/2$. Теория Кирхгофа.

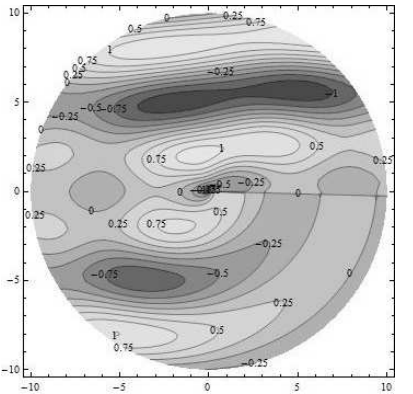


Рис. 4. Напряжения σ_{xz}, угол падения $\pi/2$. Жесткая заделка.

разреза. Теория Кирхгофа дает во всей плоскости хорошее совпадение с точным решением. Различие между точным решением и кирхгофовским становится существенным только вблизи экрана. На фиг. 3, 4 представлены графики напряжений σ_{xz} для жестко заделанной границы. Вновь теория Кирхгофа хорошо приближает точное решение.

Приведенные результаты относились к углу падения $\pi/2$, но аналогичные расчеты проделаны и для других значений угла падения, причем результат сравнения оказался примерно тот же.

Выводы. Во-первых, теория Кирхгофа дает хорошее приближение точного решения краевой задачи, причем не только в области полутени, но и во всей плоскости. Существенные расхождения имеются в окрестности экрана, т.е. там, где наибольшее влияние оказывают краевые условия.

Во-вторых, на поведение решения на границе геометрической тени краевые условия существенного влияния не оказывают.

Литература

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.,Наука, 1973. 720 с.
2. *Хёнл Х., Мауэ А., Вестфаль К.* Теория дифракции. М., Мир, 1961. 428 с.
3. Nye J., Hannay H., Liang W. Diffraction by a black half-plane: teory and observation // Proc. R. Soc. Lond. A, 1995, v. 449, p.515–535.

КОНТАКТ ДВУХ УПРУГИХ КЛИНЬЕВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

В.И. Острик [1], ***А.Ф. Улитко*** [2]

[1] ***Институт прикладной физики НАН Украины,***
[2] ***Киевский национальный университет им.Тараса Шевченко***
[1] ***Сумы, Украина;*** [2] ***Киев, Украина***
[1] **ostrik_v@rambler.ru;** [2] **ulitko@univ.kiev.ua**

Рассмотрено взаимодействие двух упругих клиньев, первоначально касающихся своими вершинами, при наличии трения и частичного сцепления в области контакта. С использованием метода Винера - Хопфа получено аналитическое решение задачи. Найдено распределение контактных напряжений.

Влияние трения на деление области контакта на зоны сцепления и проскальзывания изучалось во многих работах [1, 2]. Следует упомянуть работу Л. А. Галина [3] о фрикционном контакте жесткого штампа с прямолинейным основанием и упругой полуплоскости. Им было установлено, что зоны проскальзывания у концевых точек штампа могут занимать значительную часть области контакта (например, в случае коэффициента Пуассона $m = 0,3$ и коэффициента трения $\mu_0 = 0,25$ каждая из зон проскальзывания занимает приблизительно четверть области контакта).

Если контакт тел начинается в точке, а увеличение нагружения ведет к расширению области контактного сжатия, то в присутствии трения даже в условиях чисто упругой деформации истинное распределение контактных напряжений нельзя отделить от теоретически возможных без учета истории нагружения [1, 4]. Зависимость решений контактных задач с трением от истории нагружения можно обосновать тем, что из-за необратимой потери энергии в зонах проскальзывания процесс нагрузки и разгрузки не будет идеально упругим. А как известно, при отходе от модели идеально упругого тела необходимо учитывать историю нагружения. Ярким примером этому являются замечательные работы А. А. Ильюшина по теории пластичности [5, 6].

От истории нагружения также зависит и закон распределения так называемой "защемленной"деформации, которая накапливается в зоне сцепления. Согласно терминологии А. А. Ильюшина, будем рассматривать простой процесс нагружения [5], при котором поле перемещений и напряжений остается во все моменты времени подобным самому себе. В этом случае, как показал Д. А. Спенс [7], "защемленная"деформация постоянна вдоль зоны сцепления.

Раньше авторами исследовано взаимодействие упругого и жесткого клиньев, первоначально соприкасающихся своими вершинами, в случаях гладкого контакта, фрикционного контакта при полном проскальзывании [2] и контакта со сцеплением и проскальзыванием [8]. Показано, что когда угол полураствора α упругого клина превосходит значение $\alpha_* = \pi/2 - (1/2)\mathrm{arctg}\,(2\mu_0(m-1)/(m-2)) < \pi/2$, контакт с полным проскальзыванием переходит в контакт со сцеплением и проскальзыванием. Последняя схема фрикционного контакта рассмотрена в [9] в случае взаимодействия жесткого клина с упругой полуплоскостью ($\alpha = \pi/2$). Гладкий и скользящий контакт двух упругих клиньев изучен в работах [2, 10].

Постановка задачи. Пусть два упругих клина с углами полураствора α_1 и α_2, оси которых совпадают, касаются друг друга своими вершинами; углы $\varepsilon = \pi - \alpha_1 - \alpha_2$ зазора между клиньями малы. Клинья сжимаются под действием напряжений, приложенных на бесконечности, с главным вектором P для каждого клина. В процессе нагружения клинья деформируются и их берега входят в контакт вблизи их общей вершины. Длина области контакта заранее неизвестна и может быть определена в процессе решения задачи.

С каждым клином (G_1, G_2, $m^{(1)}$, $m^{(2)}$ — их модули сдвига и числа Пуассона) свяжем полярные системы координат r, ϑ_j ($0 \leqslant r < \infty$, $-\alpha_j \leqslant \vartheta_j \leqslant \alpha_j$, $j = 1, 2$). Считаем, что область контакта $0 \leqslant r \leqslant l$ на каждой грани обоих клиньев разделяется в неизвестном отношении на зону сцепления $0 \leqslant r \leqslant l_1$ и зону проскальзывания $l_1 < r \leqslant l$. Также полагаем, что в зоне проскальзывания касательные напряжения связаны с нормальными законом трения Амонтона–Кулона, а второй клин является более жестким по сравнению с первым ($G_2 > G_1$), так что проскальзывание поверхности первого клина относительно поверхности второго клина происходит в направлении к их общей вершине.

Таким образом, приходим к следующей формулировке смешанной граничной задачи для двух упругих клиньев:

$$u_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1} - u_\vartheta^{(2)}\Big|_{\vartheta_2=\mp\alpha_2} = \pm\varepsilon r \quad (0 \leqslant r \leqslant l),$$
$$u_r^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1} - u_r^{(2)}\Big|_{\vartheta_2=\mp\alpha_2} = Cr \quad (0 \leqslant r \leqslant l_1), \quad (1)$$

$$\sigma_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1} = \sigma_\vartheta^{(2)}\Big|_{\vartheta_2=\mp\alpha_2} \quad (0 < r \leqslant l),$$
$$\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1} = \tau_{r\vartheta}^{(2)}\Big|_{\vartheta_2=\mp\alpha_2} \quad (0 < r \leqslant l_1), \quad (2)$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(j)}\Big|_{\vartheta_j=\pm\alpha_j} = \pm(-1)^j \mu_0\, \sigma_\vartheta^{(j)}\Big|_{\vartheta_j=\pm\alpha_j} \quad (l_1 < r \leqslant l),\ j = 1, 2, \quad (3)$$

$$\sigma_{\vartheta}^{(j)}\Big|_{\vartheta_j=\pm\alpha_j} = 0, \quad \tau_{r\vartheta}^{(j)}\Big|_{\vartheta_j=\pm\alpha_j} = 0 \ (r > l), \ j = 1, 2, \tag{4}$$

где C — постоянная "защемленной" деформации.

Для определения длины l области контакта служит условие равновесия

$$2\int_0^l (\sigma_{\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\alpha_1} \sin\alpha_1 - \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\alpha_1} \cos\alpha_1)dr = -P. \tag{5}$$

Система интегральных уравнений и ее сведение к системе функциональных уравнений Винера–Хопфа. Общее решение уравнений равновесия упругих клиньев, обеспечивающее равенство напряжений на смежных гранях клиньев, находим с использованием интегрального преобразования Меллина. На берегах клиньев имеем [2]:

$$u_{\vartheta}^{(j)}\Big|_{\vartheta_j=\pm\alpha_j} = \mp\tfrac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tfrac{1}{s}[M_{11}^{(j)}(s)a_1(s) + M_{12}^{(j)}(s)a_2(s)]\, r^{-s}ds,$$

$$u_{r}^{(j)}\Big|_{\vartheta_j=\pm\alpha_j} = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tfrac{1}{s}[M_{21}^{(j)}(s)a_1(s) + M_{22}^{(j)}(s)a_2(s)]\, r^{-s}ds,$$

$$\sigma_{\vartheta}^{(j)}\Big|_{\vartheta_j=\pm\alpha_j} = \tfrac{G_1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_1(s)\, r^{-s-1}ds,$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(j)}\Big|_{\vartheta_j=\pm(-1)^{j+1}\alpha_j} = \pm\tfrac{G_1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_2(s)\, r^{-s-1}ds, \quad c < 0;$$

$$M_{\nu n}^{(j)}(s) = m_1^{(1)}\lambda_{\nu n}^{(j)}(s)\Big/\Delta^{(j)}(s) \quad (\nu, \ n = 1, \ 2);$$

$$\lambda_{11}^{(j)}(s) = \bar{G}^{j-1}(\cos 2s\alpha_j - \cos 2\alpha_j), \quad \lambda_{22}^{(j)}(s) = -\bar{G}^{j-1}(\cos 2s\alpha_j + \cos 2\alpha_j),$$

$$\lambda_{12}^{(j)}(s) = -\bar{G}^{j-1}[(m_2^{(j)}\Big/m_1^{(j)})\sin 2s\alpha_j - (s\Big/m_1^{(j)} - 1)\sin 2\alpha_j],$$

$$\lambda_{21}^{(j)}(s) = -\bar{G}^{j-1}[(m_2^{(j)}\Big/m_1^{(j)})\sin 2s\alpha_j - (s\Big/m_1^{(j)} + 1)\sin 2\alpha_j],$$

$$\Delta^{(j)}(s) = \sin 2s\alpha_j + s\sin 2\alpha_j, \quad \bar{G} = (m_1^{(2)}G_1)\Big/(m_1^{(1)}G_2),$$

$$m_1^{(j)} = 2(m^{(j)} - 1)\Big/m^{(j)}, \quad m_2^{(j)} = (m^{(j)} - 2)\Big/m^{(j)} \quad (j = 1, \ 2). \tag{6}$$

Введем неизвестные функции контактных напряжений

$$(2G_1)^{-1}\,\sigma_{\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1}=p(r),\ \pm(2G_1)^{-1}\,\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1}=q(r)(0\leqslant r\leqslant l_1),$$

$$(2G_1)^{-1}\,\sigma_{\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1}=\mp(2G_1\mu_0)^{-1}\,\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1}=\sigma(r)(l_1<r\leqslant l). \quad (7)$$

Обращая третье и четвертое соотношения (6), с учетом условий (4) найдем

$$a_1(s)=\int_0^{l_1}p(y)y^s dy+\int_{l_1}^{l}\sigma(y)y^s dy,\ \ a_2(s)=\int_0^{l_1}q(y)y^s dy-\mu_0\int_{l_1}^{l}\sigma(y)y^s dy. \quad (8)$$

Продифференцируем граничные условия (1) и подставим в них выражения для перемещений из (6), в которых плотности $a_1(s)$, $a_2(s)$ представим через функции контактных напряжений $p(y)$, $q(y)$, $\sigma(y)$ согласно (8). Произведя замены переменных

$$s=-i\tau,\quad r=le^{-\xi},\quad y=le^{-\eta} \quad (9)$$

и переходя к новым неизвестным функциям контактных напряжений

$$\psi_1(\eta)=p(le^{-\eta})e^{-\eta},\quad \psi_2(\eta)=q(le^{-\eta})e^{-\eta}\quad (a\leqslant\eta<\infty),$$
$$\phi(\eta)=\sigma(le^{-\eta})e^{-\eta}\quad (0\leqslant\eta<a);\quad l_1=le^{-a},\quad a=\ln(l/l_1), \quad (10)$$

получим систему интегральных уравнений

$$\int_a^{\infty}[k_{11}(\xi-\eta)\,\psi_1(\eta)+k_{12}(\xi-\eta)\,\psi_2(\eta)]\,d\eta+\int_0^{a}k_1(\xi-\eta)\,\phi(\eta)d\eta=$$
$$=\tfrac{\varepsilon}{m_1^{(1)}}e^{-\xi}\quad (0\leqslant\xi<\infty),$$
$$\int_a^{\infty}[k_{21}(\xi-\eta)\,\psi_1(\eta)+k_{22}(\xi-\eta)\,\psi_2(\eta)]\,d\eta+\int_0^{a}k_2(\xi-\eta)\,\phi(\eta)d\eta=$$
$$=-\tfrac{C}{m_1^{(1)}}e^{-\xi}\quad (a\leqslant\xi<\infty), \quad (11)$$

$$k_{\nu n}(\xi-\eta)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic}\tfrac{K_{\nu n}(\tau)}{-i\tau}e^{-i\tau(\xi-\eta)}d\tau,\ \ k_{\nu}(\xi-\eta)=k_{\nu 1}(\xi-\eta)-\mu_0 k_{\nu 2}(\xi-\eta),$$

$$K_{\nu n}(\tau)=(-i\tau\Big/m_1^{(1)})[M_{\nu n}^{(1)}(-i\tau)-M_{\nu n}^{(2)}(-i\tau)],$$

$$K_{\nu}(\tau)=K_{\nu 1}(\tau)-\mu_0 K_{\nu 2}(\tau)\quad (\nu,\ n=1,\ 2).$$

Распространим интегральные уравнения (11), после их дифференцирования, на всю числовую ось при условии, что $\psi_{1,2}(\eta) = 0$ $(\eta < a)$, $\phi(\eta) = 0$ $(\eta < 0, \eta > a)$, и применим к ним интегральное преобразование Фурье. Вводя неизвестные функции

$$\Phi^+(z) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \phi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \phi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Psi_1^+(z) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_1(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Psi_2^+(z) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_2(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Psi_1^-(z) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \tfrac{d}{d\xi} \int_0^\infty [k_1^*(\xi - \eta)\, \phi(\eta) + k_{11}^*(\xi - \eta)\, \psi_1(\eta) + \quad (12)$$

$$+ k_{12}^*(\xi - \eta)\, \psi_2(\eta)]\, d\eta,$$

$$\Psi_2^-(z) = \tfrac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{iz\xi} d\xi \tfrac{d}{d\xi} \int_0^\infty [k_2^*(\xi - \eta)\, \phi(\eta) + k_{21}^*(\xi - \eta)\, \psi_1(\eta) +$$

$$+ k_{22}^*(\xi - \eta)\, \psi_2(\eta)]\, d\eta,$$

$$k_\nu^*(\xi - \eta) = k_\nu(\xi - \eta) + \tfrac{1}{2} K_\nu(0), \; k_{\nu n}^*(\xi - \eta) = k_{\nu n}(\xi - \eta) + \tfrac{1}{2} K_{\nu n}(0) \; (\nu, n = 1, 2)$$

аналитические в полуплоскостях $Im\ z > c^+$ и $Im\ z < c^-$ $(c^+ < 0, c^- > 0)$ комплексной плоскости, приходим к системе функциональных уравнений Винера–Хопфа [2, 11]

$$K_1(z)\Phi^+(z) + e^{iza}[K_{11}(z)\Psi_1^+(z) + K_{12}(z)\Psi_2^+(z)] - \Psi_1^-(z) = F_1^+(z),$$
$$K_2(z)\Phi^+(z) + e^{iza}[K_{21}(z)\Psi_1^+(z) + K_{22}(z)\Psi_2^+(z) - \Psi_2^-(z)] = F_2^+(z),$$
$$Phi^+(z) = e^{iza}\Phi^-(z) \quad (c^+ < Imz < c^-). \quad (13)$$

Коэффициенты и правые части системы уравнений (13) имеют вид

$$K_{\nu n}(\tau) = -i\tau\lambda_{\nu n}(-i\tau)/\Delta(-i\tau),$$
$$\lambda_{\nu n}(s) = \lambda_{\nu n}^{(1)}(s)\Delta^{(2)}(s) - (-1)^\nu \lambda_{\nu n}^{(2)}(s)\Delta^{(1)}(s),$$
$$\lambda_\nu(s) = \lambda_{\nu 1}(s) - \mu_0\lambda_{\nu 2}(s) \quad (\nu, n = 1, 2), \quad \Delta(s) = \Delta^{(1)}(s)\Delta^{(2)}(s),$$
$$F_1^+(z) = -\frac{\varepsilon}{m_1^{(1)}\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 - iz}, \quad F_2^+(z) = \frac{Ce^{-a}}{m_1^{(1)}\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iza}}{1 - iz}. \quad (14)$$

Решение системы функциональных уравнений. Введем вспомогательную неизвестную функцию $\Psi^+(z) = \mu_0\Psi_1^+(z) + \Psi_2^+(z)$. Исключая из первых

двух уравнений системы (13) функцию $\Phi^+(z)$, будем иметь следующее функциональное уравнение:

$$K(z)\Psi^+(z) + e^{-iza}\lambda_2(-iz)\Psi_1^-(z)\Big/\lambda_1(-iz) - \Psi_2^-(z) = F(z) \qquad (15)$$

$$(c^+ < Imz < c^-);$$

$$K(z) = -iz\lambda(-iz)/\lambda_1(-iz),$$

$$F(z) = \frac{1}{m_1^{(1)}\sqrt{2\pi}}\left(\varepsilon\frac{\lambda_2(-iz)}{\lambda_1(-iz)}e^{-iza} + Ce^{-a}\right)\frac{1}{1-iz},$$

$$\lambda(s) = \lambda^{(1)}(s)\Delta^{(2)}(s) - \lambda^{(2)}(s)\Delta^{(1)}(s) - \lambda_{11}^{(1)}(s)\lambda_{22}^{(2)}(s) +$$

$$+\lambda_{11}^{(2)}(s)\lambda_{22}^{(1)}(s) - \lambda_{21}^{(1)}(s)\lambda_{12}^{(2)}(s) + \lambda_{21}^{(2)}(s)\lambda_{12}^{(1)}(s),$$

$$\lambda^{(j)}(s) = -\bar{G}^{2(j-1)}(m_1^{(j)})^{-2}(m_3^{(j)}\sin 2\alpha_j s - s\sin 2\alpha_j),$$

$$m_3^{(j)} = (3m^{(j)} - 4)\Big/m^{(j)} \quad (j = 1, 2).$$

Перейдем к системе функциональных уравнений, состоящей из первого уравнения (13) и уравнения (15). Методом Винера–Хопфа сведем эту систему к бесконечной системе алгебраических уравнений. Для этого факторизуем коэффициенты $K_1(z)$, $K(z)$ в произведение, а отдельные составляющие и правые части полученной системы функциональных уравнений – в разность функций, аналитических в верхней ($Im\ z > c^+$) и нижней ($Im\ z < c^-$) полуплоскости

$$K_1(z) = \kappa_1 K_1^+(z)K_1^-(z),\ K(z) = \kappa z^2 K^+(z)K^-(z),\ \kappa_1 = K_1(0),\ \kappa = \tfrac{1}{2}K''(0),$$

$$\frac{e^{iza}}{K_1^-(z)}[K_{11}(z)\Psi_1^+(z) + K_{12}(z)\Psi_2^+(z)] = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z),$$

$$e^{-iza}\frac{\lambda_2(-iz)}{\lambda_1(-iz)}\frac{\Psi_1^-(z)}{K^-(z)} = \chi^+(z) - \chi^-(z),$$

$$F_1^+(z)/K_1^-(z) = f_1^+(z) - f_1^-(z), \quad F^+(z)/K^-(z) = f^+(z) - f^-(z)$$

$$K_1^+(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \tfrac{iz}{t_n}\right)\left(1 - \tfrac{iz}{\delta_n}\right)^{-1}, \quad K_1^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \tfrac{iz}{t_n'}\right)\left(1 + \tfrac{iz}{\delta_n}\right)^{-1},$$

$$K^+(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \tfrac{iz}{\tau_n}\right)\left(1 + \tfrac{iz}{t_n}\right)^{-1}, \quad K^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \tfrac{iz}{\tau_n}\right)\left(1 + \tfrac{iz}{t_n'}\right)^{-1},$$

$$\chi_1^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^+}{t_k' + iz}\Psi^+(it_k')e^{-t_k'a}, \quad \chi^+(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^-}{t_k + iz}\Psi_1^-(it_k)e^{t_k a},$$

$$f_1^+(z) = -\frac{\varepsilon}{m_1^{(1)}\sqrt{2\pi}K_1^-(-i)(1 - iz)},$$

$$f^+(z) = \frac{1}{m_1^{(1)}\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-a}\tilde{C}}{K^-(-i)(1-iz)} + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^- e^{t_k a}}{(1+t_k)(t_k+iz)}\right),$$

$$\tilde{C} = C - \varepsilon\sum_{j=1}^{2}\frac{(-1)^j G_{3-j}}{G_1+G_2}\left(\frac{m_2^{(j)}}{\mu_0} + m_1^{(j)}\operatorname{ctg}2\alpha_j\right),$$

$$\alpha_k^+ = \kappa_1\frac{\lambda_{12}(t_k')}{\lambda_1'(t_k')}K_1^+(it_k'), \quad \alpha_k^- = -\frac{\lambda_2(t_k)}{\lambda_1'(t_k)K^-(it_k)}(k = 1, 2, \ldots). \qquad (16)$$

Здесь t_n, t_n', $n = 1, 2, \ldots$ — корни уравнений $\lambda_1(s) = 0$ из полуплоскостей $Re\, s < 0$, $Re\, s > 0$ соответственно; δ_n — корни уравнения $\Delta(s) = 0$ из полуплоскости $Re\, s > 0$; τ_n — корни уравнения $\lambda(s) = 0$ из полуплоскости $Re\, s < 0$ ($n = 1, 2, \ldots$).

В результате [10] находим

$$\Phi^+(z) = \frac{f_1^+(z) - \chi_1^+(z)}{\kappa_1 K_1^+(z)}, \quad \Psi_1^-(z) = K_1^-(z)[f_1^-(z) - \chi_1^-(z)],$$

$$\Psi^+(z) = \frac{f^+(z) - \chi^+(z)}{\kappa z^2 K^+(z)}, \quad \Psi_2^-(z) = K^-(z)[f^-(z) - \chi^-(z)] \qquad (17)$$

при двух дополнительных условиях

$$f^+(0) - \chi^+(0) = 0, \quad \frac{d}{dz}[f^+(z) - \chi^+(z)]\big|_{z=0} = 0, \qquad (18)$$

обеспечивающих аналитичность функции $\Psi^+(z)$ в полуплоскости $Im\, z > c^+$.

Выражения (17) не определяют полностью функции $\Phi^+(z)$, $\Psi^+(z)$, $\Psi_{1,2}^-(z)$, а лишь выражают их, согласно соотношениям (16), через неизвестные значения $\Psi^+(it_k')$, $\Psi_1^-(it_k)$ ($k = 1, 2, \ldots$). Для определения указанных значений в третьем равенстве (17) возьмем $z = it_n'$, а во втором — $z = it_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Обозначив

$$\tilde{\alpha}_k^- = \alpha_k^- e^{(\pi k/2\alpha + t_k)a}, \quad \tilde{\alpha}_k^+ = \alpha_k^+ e^{(\pi k/2\alpha - t_k')a},$$

$$\beta_n^+ = -[\kappa t_n'^2 K^+(it_n')]^{-1}, \quad \beta_n^- = K_1^-(it_n),$$

$$f_n^+ = \frac{e^{-a}\beta_n^+\tilde{C}}{m_1^{(1)}K^-(-i)(1+t_n')}, \quad f_n^- = -\frac{\beta_n^-\varepsilon}{m_1^{(1)}K_1^-(-i)(1+t_n)}, \qquad (19)$$

$$z_k^+ = \sqrt{2\pi}\,\Psi^+(it_k'), \quad z_k^- = \sqrt{2\pi}\,\Psi_1^-(it_k) - \frac{\varepsilon}{m_1^{(1)}(1+t_k)} \quad (k, n = 1, 2, \ldots)$$

и введя малый параметр $\lambda = e^{-\pi a/(2\alpha_1+2\alpha_2)} = (l_1/l)^{\pi/(2\alpha_1+2\alpha_2)}$ на основе асимптотики корней $t_k \sim t_k' \sim -\pi k/(2\alpha_1 + 2\alpha_2)$, $k \to \infty$, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных

$z_k^{\pm}$ $(k = 1, 2, ...)$:

$$z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{t_k - t_n'} z_k^- \lambda^k = f_n^+,\ z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{t_k' - t_n} z_k^+ \lambda^k = f_n^- \ (n = 1, 2, ...). \tag{20}$$

Система уравнений (20) имеет экспоненциально затухающие по k коэффициенты и относится к регулярным системам типа Пуанкаре–Коха. Ее решение ищем в рядах по степеням параметра λ. Для определения коэффициентов разложения методом неопределенных коэффициентов получаем рекуррентные соотношения. Неизвестные C и λ находим из дополнительных условий (18). По значению параметра λ определяем относительный размер зоны сцепления l_1/l. Длину l области контакта (на каждой грани клина) находим из условия равновесия (5) в виде

$$l = \frac{P}{2G_1} \left(\frac{\sin\alpha_1}{2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1} + \bar{G} \frac{\sin\alpha_2}{2\alpha_2 + \sin 2\alpha_2} \right) \left(\frac{\varepsilon}{m_1^{(1)} K_1^-(-i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{t_k'} z_k^+ \lambda^k \right)^{-1}. \tag{21}$$

Контактные напряжения. Нормальные и касательные напряжения (7), (10) в области контакта определим обратным преобразованием Фурье равенств (12) для функций $\Phi^+(z)$, $\Psi_1^+(z)$, $\Psi_2^+(z)$. Разлагая соответствующие интегралы Фурье в ряды по теории вычетов, после преобразований получим

$$\frac{1}{2G_1} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta_1 = \pm\alpha_1} = -\frac{G_2 \varepsilon}{(G_1 + G_2)\mu_0} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{l}{l_1} \frac{\lambda_{12}(t_k')}{\lambda_1'(t_k')} z_k^+ \left(\frac{r}{l_1} \right)^{-t_k' - 1} + \frac{\Delta(t_k)}{t_k \lambda_1'(t_k)} z_k^- \left(\frac{r}{l} \right)^{-t_k - 1} \right] (l_1 < r \leqslant l),$$

$$\frac{1}{2G_1} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta_1 = \pm\alpha_1} = G_2 \frac{(G_2 m_1^{(1)} \operatorname{ctg} 2\alpha_1 - G_1 m_1^{(2)} \operatorname{ctg} 2\alpha_2)\varepsilon + (G_1 + G_2) C}{(G_2 - G_1)(G_2 m_2^{(1)} + G_1 m_2^{(2)})} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{12}(\tau_k) u_k(r), \tag{22}$$

$$\pm \frac{1}{2G_1} \tau_{r\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta_1 = \pm\alpha_1} = \frac{G_2}{G_2 - G_1} \frac{G_2 m_2^{(1)} - G_1 m_2^{(2)}}{G_2 m_2^{(1)} + G_1 m_2^{(2)}} \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{11}(\tau_k) u_k(r) \ (0 \leqslant r \leqslant l_1),$$

$$u_k(r) = \frac{K^-(i\tau_k)}{\tau_k \lambda'(\tau_k)} \left(\frac{\tilde{C}}{m_1^{(1)} K^-(-i)(1 + \tau_k)} - \frac{l}{l_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m^-}{t_m - \tau_k} z_m^- \lambda^m \right) \left(\frac{r}{l_1} \right)^{-\tau_k - 1}.$$

Контактные напряжения ограниченны в случае $\alpha_1 \leqslant \pi/2$, $\alpha_2 \leqslant \pi/2$ и неограниченны в вершине клиньев, когда один из углов α_1, α_2 превышает $\pi/2$.

Результаты вычислений. Распределение контактных напряжений в случае взаимодействия упругого клина ($\alpha_1 = 4\pi/9$, $m^{(1)} = 1/3$) с абсолютно жестким ($G_2/G_1 = \infty$) показано на рис. 1. Сплошные кривые 1, 2 соответствуют безразмерным нормальным $\bar{\sigma} = \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big/ (2G_1\varepsilon)\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1}$ и касательным $\bar{\tau} = \mp\tau_{r\vartheta}^{(1)} \Big/ (2G_1\varepsilon)\Big|_{\vartheta_1=\pm\alpha_1}$ напряжениям при контакте клиньев с трением ($\mu_0 = 0,25$) и частичным сцеплением ($l_1/l = 0,2644$, $l = 0,672P/(2G_1\varepsilon)$). Пунктирная кривая 1 отвечает нормальным контактным напряжениям при гладком контакте упругого и жесткого клиньев ($\mu_0 = 0$, $l = 0,697P/(2G_1\varepsilon)$) [8]. Видно, что трение имеет незначительное влияние на распределение нормальных контактных напряжений. Лишь в малой окрестности вершины клина неограниченные нормальные контактные напряжения при учете трения переходят в конечные, хотя имеют в вершине клина $r/l = 0$ большое пиковое значение $\bar{\sigma} = -10,71$. При наличии трения также возникают касательные контактные напряжения со значительным градиентом в вершине упругого клина ($\bar{\tau} = -1$ при $r/l = 0$).

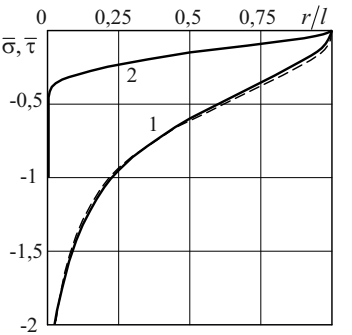


Рис. 1.

Литература

1. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
2. *Острик В.И., Улитко А.Ф.* Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 2006. 328 с.
3. *Галин Л.А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикл. математика и механика. 1945. **9**, вып. 5, С. 413–424.
4. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Роль истории нагружения в механике контактного взаимодействия при учете сил трения в зоне контакта. // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. №4. С. 16–25.
5. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Упругопластические деформации. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
6. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
7. *Spence D. A.* Self similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1968. **305**. P. 55–80.
8. *Острик В.І.* Контакт пружного та жорсткого клинів з урахуванням тертя і зчеплення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, №3. – С. 88–100.
9. *Острик В. И., Улитко А. Ф.* Контактное взаимодействие жесткого клина с упругой полуплоскостью с учетом зон сцепления и проскальзывания в области контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – №1. – С. 93–105.
10. *Острик В. И., Улитко А. Ф.* Контакт двух упругих клиньев с учетом сил трения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – №3. - С. 93–100.
11. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ДВУСТОРОННЕМ СЖАТИИ

И. И. Поспелов

Московский государственный технический университет "МАМИ"
Москва, Россия

vm@mami.ru

Методика и результаты испытаний несущей способности панелей, подкрепленных продольными стрингерами, при двустороннем сжатии. Описание экспериментальной установки, обеспечивающей, в отличие от известной, шарнирное опирание панелей. Расчет устойчивости и несущей способности. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

1. Установка для испытания панелей при двустороннем сжатии

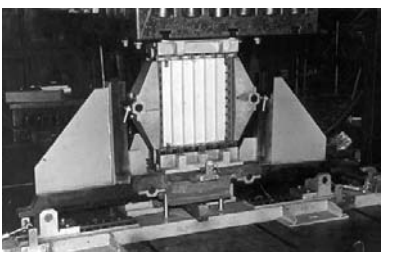


Рис. 1.

Подкрепленная панель является одним из существенных элементов конструкции крыла, вертикального и горизонтального оперения, фюзеляжа летательного аппарата. На панель крыла малого удлинения, которое изгибается в двух взаимно перпендикулярных направлениях, действуют одновременно сжимающие усилия в двух направлениях и сдвиг. В качестве расчетной схемы панели крыла принимается пластинка, усиленная ребрами жесткости в одном или двух направлениях, шарнирно опертая на пояса двух соседних лонжеронов и нервюр. Экспериментальное исследование панелей на устойчивость и несущую способность проводилось только при одностороннем сжатии с граничными условиями в виде торцевого опирания. Недостатком таких испытания является низкая точность определения величины критической нагрузки потери устойчивости панели, подкрепленной продольными стрингерами, из-за отсутствия свободного поворота ее торцов в процессе нагружения, что искажает условия шарнирного опирания и приводит к завышенным значениям величин критической нагрузки.

Для проведения экспериментального исследования устойчивости подкрепленной панели при одновременном двустороннем сжатии и шарнир-

ном опирании торцов панели была спроектирована специальная установка [1], изображенная на рис. 1. Указанная цель достигается тем, что в установке для исследования устойчивости панели при двустороннем сжатии, содержатся две пары нажимных плит, размещенных во взаимно перпендикулярных направлениях, и нажимной механизм, причем в нажимных плитах одной пары выполнены полуцилиндрические продольные пазы, в которых последовательно установлен набор полуцилиндрических сегментов (разрезные опоры).

Установка монтируется на испытательной машине Riehle, создающей вертикальную нагрузку P_z, которая через систему рычагов вызывает горизонтальную нагрузку P_x.

На рис. 2 и 3 изображен чертеж спроектированной установки. Установка включает траверсу 1, закрепленную на неподвижной станине 2 испытательной машины Riehle. На траверсе 1 закреплены призматические опоры 3 рычагов 4, которые шарнирно связаны с основанием 5 нижней нажимной плиты 6 и с боковыми нажимными плитами 7. Нажимные плиты 7 через ролики 8 и подкладки 9 взаимодействуют с боковой поверхностью испытываемой панели 10. На подвижной плите 11 испытательной машины закреплена верхняя нажимная плита 12.

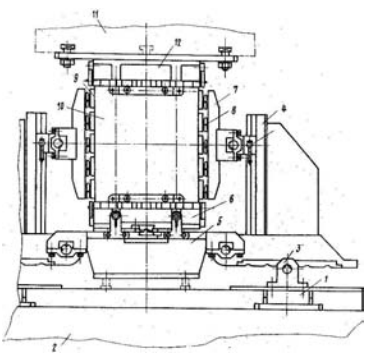


Рис. 2.

При шарнирном опирании всех сторон панель при потере устойчивости искривляется так, что торцы различных стрингеров поворачиваются на различные углы. Для того, чтобы обеспечить независимые друг от друга углы поворота торцов отдельных стрингеров, чтобы каждый стрингер поворачивался на свой угол, были спроектированы разрезные шарнирные опоры следующим образом: в нижней 6 и верхней 12 нажимных плитах выполнены полуцилиндрические пазы, в которых последовательно установлен набор полуцилиндрических сегментов 13 (количество сегментов соответствует количеству продольных стрингеров испытываемой панели 10), которые оперты на ролики 14 и удерживаются в рабочем положении с помощью кронштейна 15.

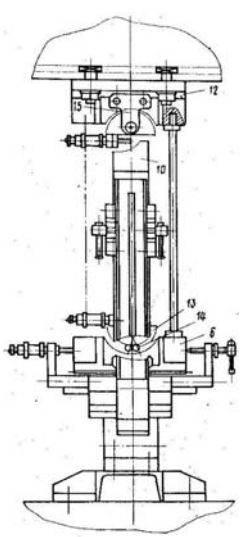


Рис. 3.

Установка работает следующим образом. На нижней нажимной плите 6 устанавливают испытываемую панель 10 таким образом, чтобы центр тяжести торцового сечения панели проходил через ось сегментов 13. Затем таким же образом центрируют верхнюю нажимную плиту 12, после чего на рычагах 4 устанавливают боковые нажимные плиты 7 и производят нагружение панели 10 сжимающим усилием.

Усилие, создаваемое испытательной машиной, с помощью рычагов 4 раскладывается в заданном отношении на две действующие во взаимно перпендикулярных направлениях сжимающие силы, которые передаются на испытываемую панель 10 через нажимные плиты 12, 6 и 7.

В процессе двустороннего сжатия нагрузка на боковые поверхности панели передается от нажимных плит 7 через ролики и десять подвижных опор (ножей), собранных в сепараторе, что дает возможность вертикальным боковым кромкам панели перемещаться по боковой нажимной плите 7 с меньшим трением, оставаясь прямолинейными.

Максимальная комбинированная нагрузка составляет P_z=27 т, P_x=15 т. Установка позволяет воспроизводить комбинированное нагружение в следующих отношениях $\frac{P_x}{P_z}$, равных 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6. Это осуществляется наличием шести фиксированных положений на нижних частях рычагов 4 и перемещением призматических опор 3 относительно траверсы 1. При тарировке горизонтальной составляющей P_x погрешность не превышала 3%.

2. Образцы и методика эксперимента

Образцы для испытаний были вырезаны из крыла самолета Ту-144 и имели следующие геометрические характеристики: длина (расстояние между нервюрами) c = 342 мм, ширина (расстояние между лонжеронами) a = 289 мм, размеры профиля b = 48, 3 мм (ширина обшивки), δ_b = = 1, 2 мм (толщина обшивки), h = 20 мм (высота стрингера), δ_c = 1, 8 мм (толщина обшивки). Материал - АК4-1Т1 с характеристиками: Е=7200 кг/мм^2, $\sigma_{\text{ПЦ}}$=28 кг/мм^2, σ_{02}=35 кг/мм^2.

Перед испытанием панели опоры 3 рычагов 4 устанавливаются в положение, соответствующее заданному отношению нагрузок $\frac{P_x}{P_z}$. Затем установка ставится между опорами испытательной машины так, чтобы ось симметрии установки совпадала с линией действия испытательной машины. Затем верхняя и нижняя шарнирные опоры центрируются при помощи фиксирующих штанг и верхняя опора болтами крепится к верхней плите испытательной машины. Испытуемая панель ставится в установку по центру тяжести. На рис. 1 показана панель, подготовленная к испытаниям при $\varphi = \frac{P_x}{P_z}$=0,6.

После установки панели между опорами производится установка боковых нажимных плит и системы крепления боковых кромок, обеспечивающей прямолинейность боковых кромок и смещение их по вертикали с меньшим трением.

После этого производится нагружение панели вплоть до разрушения.

3. Результаты испытаний

Было испытано 12 панелей. Некоторые из них имели начальный прогиб. Результаты испытаний представлены в таблице 1.

Панели №1 и №2 испытывались при одностороннем сжатии; №1 — в шарнирных опорах, №2 — в торец. Коэффициент заделки составил $c = 1,57$. Некоторое превышение можно объяснить тем, что в панели №1 был значительный начальный прогиб.

Панели №1–3 выпучиваются по одной полуволне в обоих направлениях.

Панели №4–12 выпучиваются в продольном направлении по одной полуволне, в поперечном направлении — по трем полуволнам. Напряжения разрушения в продольном направлении в зависимости от соотношения продольной и поперечной нагрузок $\varphi = \dfrac{P_x}{P_z}$ изображены на рис. 4 кружочками.

4. Расчет панелей на устойчивость при двустороннем сжатии

Расчет подкрепленных панелей на устойчивость и несущую способность при двустороннем сжатии проводился по методике, изложенной в работе [2].

При возрастании внешней нагрузки на панель возможны общая и местная формы потери устойчивости. При общей форме потери устойчивости панели искривляются линии пересечения обшивки и стенки стрингеров. Панель рассматривалась как конструктивно ортотропная пластина, шарнирно опертая по краям.

Уравнение устойчивости имеет вид:

$$D_1 \frac{d^4 w}{dz^4} + 2D \frac{d^4 w}{dz^2 dx^2} + D \frac{d^4 w}{dx^4} + P_z \frac{d^2 w}{dz^2} + P_x \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

D_1, D — жесткость пластины в продольном и поперечном направлениях. P_z, P_x — усилия, действующие на панель в продольном и поперечном направлениях, w — прогиб пластины.

Критические напряжения в направлении стрингеров при двустороннем сжатии $\sigma_z^{\text{кр}}$ определяются уравнением:

$$\sigma_z^{кр} = \frac{P_z}{\delta_{пр}} = \frac{\pi^2 D_1}{c^2 \delta_{пр}} \cdot k; \quad \sigma_x^{кр} = \sigma_z^{кр} \cdot \varphi \cdot \frac{\delta_{пр}}{\delta_в}, \tag{1}$$

где $\delta_в$ — толщина обшивки, $\delta_{пр}$ — приведенная толщина обшивки, c — длина панели, k — коэффициент устойчивости, определяемый уравнением:

$$k = \frac{1 + 2\frac{D}{D_1}\left(\frac{\bar{m}c}{a}\right)^2 + \frac{D}{D_1}\left(\frac{\bar{m}c}{a}\right)^4}{1 + \varphi\left(\frac{\bar{m}c}{a}\right)^2}, \qquad (2)$$

где а — толщина панели, $\varphi = \frac{P_x}{P_z}$, $\bar{m}$ — число полуволн в поперечном направлении. В продольном направлении реализуется одна полуволна.

При местной форме потери устойчивости обшивка искривляется, а линии пересечения обшивки и стрингеров остаются прямыми.

Критические напряжения местной формы потери устойчивости при двустороннем сжатии $\bar{\sigma}_z^{кр}$, $\bar{\sigma}_x^{кр}$ определяются из уравнения

$$\frac{\bar{\sigma}_z^{кр}}{\sigma_z^0} + \frac{\bar{\sigma}_x^{кр}}{\sigma_x^0} = 1, \qquad (3)$$

где σ_z^0, σ_x^0 — критические напряжения местной формы потери устойчивости при раздельном действии σ_z, σ_x.

Несущая способность панели определялась по методу Блейха [3]:

$$\sigma_z^{разр} = \sqrt{\sigma_z^{кр} \cdot \bar{\sigma}_z^{кр}}, \quad \sigma_x^{разр} = \sigma_z^{разр} \cdot \varphi \cdot \frac{\delta_{пр}}{\delta_в}. \qquad (4)$$

Результаты расчета коэффициента устойчивости, критических напряжений, общей и местной форм потери устойчивости приведены в таблице 1 и на рис. 4.

Таблица 1.

№	$\varphi = \frac{P_x}{P_z}$	Теория					Эксперимент		
		k	$\sigma_z^{кр}$	$\sigma_x^{кр}$	$\tilde{\sigma}_z$	$\sigma_z^{разр}$	$\sigma_z^{разр}$	$\sigma_x^{разр}$	$\bar{m}$
1	0	1,127	21,8	0	16	18,7	17,3	0	1
2	0	-	-	-	-	-	27,3	0	Испытания в торец
3	0,1	0	18,9	1,9	13,8	16,2	16,1	2,22	1
4	0,2	0,870	16,0	3,4	12,2	14,0	14,7	4,37	3
5	0,3	0,718	13,9	4,2	10,9	12,2	11,1	4,79	3
6	0,4	0,611	11,8	4,7	9,8	10,7	8,6	5,1	3
7	0,5	0,532	10,3	5,1	8,9	9,6	7,2	5,4	3

№	$\varphi = \frac{P_x}{P_z}$	Теория					Эксперимент		
		k	$\sigma_z^{кр}$	$\sigma_x^{кр}$	$\tilde{\sigma}_z$	$\sigma_z^{разр}$	$\sigma_z^{разр}$	$\sigma_x^{разр}$	$\bar{m}$
8	0,6	0,471	9,1	5,5	8,2	8,6	6,6	5,9	3
9	0,2	0,870	16,8	3,4	12,2	14,3	16,1	4,8	3
10	0,4	0,611	11,8	4,7	9,8	10,7	11	6,6	3
11	0,4	0,611	11,8	4,7	9,8	10,7	10,7	6,4	3
12	0,5	0,532	10,3	5,1	8,9	9,6	8,1	6,0	3

На рис. 4 приведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов. Кривая 1 изображает зависимость критических напряжений общей формы потери устойчивости от соотношения поперечной и продольной нагрузки φ. Кривая 2 - зависимость критических напряжений местной формы потери устойчивости от φ. Кривая 3 описывает несущую способность панели. Совпадения теоретических и экспериментальных результатов удовлетворительные.

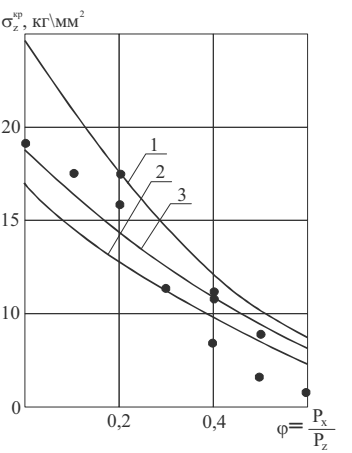


Рис. 4.

Литература

1. *Галкин В.Ф., Нестеров В.И., Поспелов И.И.* Устройство для исследования устойчивости панелей при двустороннем сжатии. Авторское свидетельство №1004810, 1982.
2. *Белоус А.А., Поспелов И.И.* Метод расчета на устойчивость панели крыла малого удлинения. Труды ЦАГИ, вып. 1783, Москва, 1976.
3. *Блейх Ф.* Устойчивость металлических конструкций. М., Физматгиз, 1959.

ВЛИЯНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА НА ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

С.Г. Пшеничнов

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова
Москва, Россия

serp56@yandex.ru

Изучение переходных волновых процессов в линейно-упругих телах, параметры материала которых непрерывно зависят от координат, проводилось в ряде работ (например, [1], [2]) на основе аналитических решений при частных видах неоднородностей. Для тел с гладкими границами и непрерывной неоднородностью материала общего вида была предложена методика [3], состоящая в замене исходного непрерывно неоднородного тела соответствующим кусочно-однородным с большим количеством составляющих так, чтобы имела место аппроксимация функций, характеризующих непрерывно изменяющиеся свойства материала изначально заданного тела. Такой подход позволяет использовать известные решения динамических задач теории упругости для кусочно-однородных тел. Его правомерность при гладкости границ и непрерывности внешних нагрузок подтверждена на конкретных примерах одномерных волновых процессов [3], [4]. В данной работе указанный подход применяется к изучению в условиях плоской деформации неодномерных переходных волновых процессов в цилиндрах, параметры материала которых непрерывно зависят от радиуса.

Рассмотрим динамику бесконечно длинного упругого изотропного полого цилиндра: $R_0 \leqslant R \leqslant R_{\max}$, $-\pi < \theta \leqslant \pi$, $-\infty < Z < +\infty$, (R, θ, Z – цилиндрические координаты), когда модуль сдвига G, коэффициент Пуассона ν и плотность ρ непрерывно зависят от R и неизменны вдоль образующей и в окружном направлении. Цилиндр изначально не деформирован и покоится, а в момент $t = 0$ к его внешней поверхности приложена нормальная нагрузка вида $f_R(\theta, t) = P(t)Q(\theta)$, постоянная вдоль образующей; граница $R = R_0$ свободна. Считая деформации малыми, исследуем эту задачу, заменив ее аналогичной для цилиндра с теми же радиусами R_0 и $R_{\max}$, но состоящего из большого количества ($N >> 1$) однородных коаксиальных слоев, на границах контакта между которыми $R = R_m$ ($m = 1, 2, 3, \cdots N - 1$) векторы перемещений и напряжений непрерывны. Толщины слоев для простоты возьмем одинаковыми, а функцию $Q(\theta)$ будем полагать такой, чтобы нагрузка была самоуравновешенной (рис. 1).

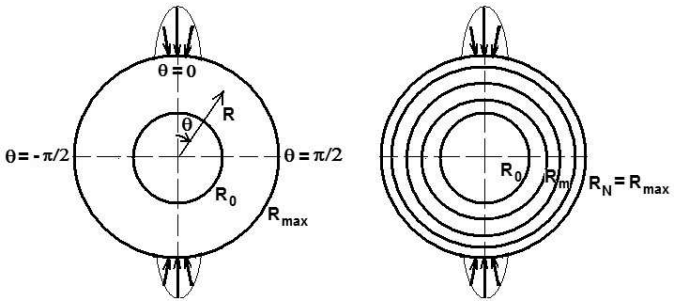


Рис. 1. Поперечные сечения и схемы нагружения исходного и слоистого цилиндров.

Обозначим G_n, ν_n, ρ_n, c_{1n}, c_{2n} – модуль сдвига, коэффициент Пуассона, плотность и скорости продольных и поперечных упругих волн в n-м слое ($n = 1, 2, \dots N$), $R_N = R_{\max}$. Введем безразмерные величины: $r = R/R_N$, $r_{n-1} = R_{n-1}/R_N$, $\tau = t/t_0$, $u_i^{(n)}(r,\theta,\tau) = U_i^{(n)}(R,\theta,t)/R_N$, $\sigma_{ij}^{(n)}(r,\theta,\tau) = P_{ij}^{(n)}(R,\theta,t)/(2G_n)$, $i, j = r, \theta$, где $U_i^{(n)}$, $P_{ij}^{(n)}$ $(i, j = = r, \theta)$ — размерные перемещения и напряжения; $t_0 = R_N/c_{1N}$; $P_0 f(\tau) = = P(t)/(2G_N)$, константа P_0, а также функция $Q(\theta)$ безразмерные. Функции $G(r)$,$\nu(r)$, $\rho(r)$, характеризующие материал исходного цилиндра, аппроксимируем с помощью равенств: $G_n = G(r_n)$, $\nu_n = \nu\ (r_n)$, $\rho_n = \rho(r_n)$, причем $r_N = 1$.

Выразив перемещения через потенциалы

$$u_r^{(n)}(r,\theta,\tau) = \frac{\partial \varphi_1^{(n)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_2^{(n)}}{\partial \theta},\ u_\theta^{(n)}(r,\theta,\tau) = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1^{(n)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2^{(n)}}{\partial r}, \tag{1}$$

запишем для слоистого цилиндра уравнения динамики

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]\varphi_k^{(n)} - \alpha_{kn}^2\frac{\partial^2 \varphi_k^{(n)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad \alpha_{kn} = c_{1N}/c_{kn},\ k = 1, 2 \tag{2}$$

граничные условия

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}^{(N)}(1,\theta,\tau) = -P_0 f(\tau) Q(\theta), \\ &\sigma_{r\theta}^{(N)}(1,\theta,\tau) = \sigma_{rr}^{(1)}(r_0,\theta,\tau) = \sigma_{r\theta}^{(1)}(r_0,\theta,\tau) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

условия непрерывности на контакте слоев $r = r_m$ $(m = 1, 2, \cdots N - 1,$ $j = r, \theta)$

$$\begin{aligned} &u_j^{(m)}(r_m,\theta,\tau) = u_j^{(m+1)}(r_m,\theta,\tau); \\ &G_m \sigma_{rj}^{(m)}(r_m,\theta,\tau) = G_{m+1}\sigma_{rj}^{(m+1)}(r_m,\theta,\tau) \end{aligned} \tag{4}$$

и однородные начальные условия

$$\varphi_k^{(n)}(r,\theta,0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial \tau}(r,\theta,0) = 0, \quad k = 1, 2, \tag{5}$$

при этом

$$\sigma_{rr}^{(n)} = w_n \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \frac{(w_n - 1)}{r}(u_r^{(n)} + \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta}),$$
$$\sigma_{\theta\theta}^{(n)} = \frac{w_n}{r}(u_r^{(n)} + \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta}) + (w_n - 1)\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r}, \qquad (6)$$
$$\sigma_{r\theta}^{(n)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(n)}}{r}), \quad w_n = (1 - \nu_n)/(1 - 2\nu_n).$$

С помощью аналитического решения задачи (1) — (6), построенного в работе [5], путем расчетов при разных исходных данных с непрерывными $Q(\theta)$ и $f(\tau)$ изучен характер $u_i^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(n)}$ как функций τ при фиксированных r и θ в зависимости от числа слоев. С ростом N, начиная с $N \approx 30 \div 50$, эти функции практически не менялись.

Примером применения методики для непрерывно неоднородного цилиндра служат графики зависимости от τ концентрации кольцевых напряжений (рис. 2, 3): $k_\theta = G(r)\sigma_{\theta\theta}/(G(1)P_0) = P_{\theta\theta}/(2G(1)P_0)$ при $r = 1$, $\theta = \pi/2$ и $r = r_0$, $\theta = \pi/2$. Нагрузка имеет вид "сглаженной ступеньки" по времени и определяется функциями: $Q(\theta) = (1 + \cos 16\theta)/2$ при $\theta \in [-\pi;\ -\pi + \pi/16] \cup [-\pi/16;\ \pi/16] \cup [\pi - \pi/16;\ \pi]$ и $Q(\theta) \equiv 0$ вне этих отрезков, что отвечает схеме на рис. 1; $f(\tau) = 1 - e^{-100\tau}$ ($\tau \geqslant 0$), при этом $2G(1)P_0$ – это предел максимума внешней нагрузки ($\theta = 0$) при $\tau \to \infty$.

Сплошные кривые соответствуют следующим исходным данным (ν, ρ — константы): $r_0 = 0.5$, $\nu(r) \equiv 0.3$, $\rho(r)/\rho(1) \equiv 1$, $G(r)/G(1) = e^{3(r-1)}$, при этом взято $N = 50$. Для вычисления $k_\theta(r, \theta, \tau)$ этих данных достаточно, а значения $\rho(1)$ и $G(1)$ не важны.

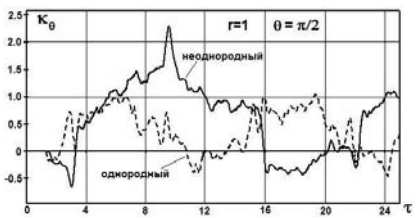


Рис. 2. Графики $k_\theta(1; \pi/2; \tau)$ при двух разных материалах

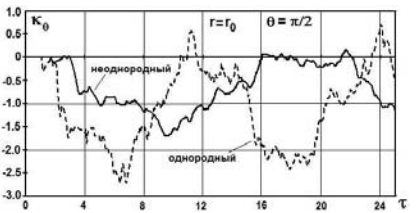


Рис. 3. Графики $k_\theta(r_0; \pi/2; \tau)$ при двух разных материалах

Пунктирные кривые даны для сравнения и соответствуют результатам при той же нагрузке для однородного цилиндра с параметрами: $r_0 = 0.5$, $\nu \equiv 0.3$ (разумеется, здесь $\rho(r)/\rho(1) \equiv 1$, $G(r)/G(1) \equiv 1$). Отрицательные напряжения являются сжимающими. Видно, что при $\theta = \pi/2$ неоднородность указанного типа приводит к увеличению максимума модуля k_θ на внешней границе и к уменьшению его на внутренней границе.

Литература

1. *Сеницкий Ю.Э.* Расчет неоднородных анизотропных цилиндра и сферы при действии произвольной радиально-симметричной динамической нагрузки // Прикл. механика. – 1978. – Т.14. №12. – С.9 – 15.
2. *Скрябин В.М.* Исследование напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндров при динамическом нагружении / Дисс. канд. техн. наук.: Куйбышевский инж.-строит. ин-т. – 1979. – 229 с.
3. *Булычев Г.Г., Пшеничнов С.Г.* Осесимметричная задача динамики длинного упругого неоднородного цилиндра// Строит. механика и расчет сооружений. – 1989. №4. – С.35 – 37.
4. *Пшеничнов С.Г.* Об одном способе исследования динамических задач теории упругости для неоднородных тел// Междунар. конф. "Современные проблемы математики, механики и информатики" 2009. Тула: ТулГУ. Тез. докл. С.260–261.
5. *Булычев Г.Г., Пшеничнов С.Г.* Распространение упругих волн в слоистом цилиндре// Докл АН СССР. – 1988. Т. 303. №2. – С.1074–1078.

АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОДИНАМИКИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ А. А. ИЛЬЮШИНА)

Т. Р. Рашидов

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева
Ташкент, Узбекистан

tur.rashidov@list.ru

Выдающийся ученый-механик XX века Алексей Антонович Ильюшин во время Второй мировой войны (1943 г.) приехал в Узбекистан и побывал в городах Ташкенте и Самарканде. Здесь заседала Артиллерийская академия, которая обсуждала вопрос нехватки артиллерийских снарядов для фронта. А.А. Ильюшин во время пребывания в Узбекистане встречался с Магометом Ташевичем Уразбаевым, впоследствии основоположником механики и антисейсмической науки в Узбекистане, академиком АН РУз, гостил у него дома. Они познакомились еще в Москве, когда М.Т. Уразбаев обучался в МГУ. О вкладе А.А. Ильюшина в артиллерийскую науку М.Т. Уразбаев хорошо отметил в научно-автобиографической статье “Динамика”.

В 1969 году А.А. Ильюшин приезжал в Ташкент читать курс лекций “Теория вязкоупругости” для студентов 4 курса механико-математического факультета Ташкентского государственного гниверситета (ныне Национальный Университет Узбекистана
им. М.Улугбека). Одновременно консультировал ученых и специалистов Узбекистана по проблемам механики. Большая часть времени его пребывания проходила в Институте механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз (ИМСС АН РУз). Мне, молодому директору этого института, было поручено сопровождать его.

До 1969 года я не был знаком лично с А.А. Ильюшиным, хотя хорошо знал его труды по проблемам механики сплошных сред и проблемам прочности. В то время я занимался проблемами сейсмостойкости зданий и сооружений. В 1966 году в Ташкенте произошло сильное землетрясение, которое поставило перед исследователями, учеными и строителями ряд актуальных задач. Наш институт (ИМСС АН РУз) не только подключился к их решению, но и занимался всеми проблемами по изучению последствий этого землетрясения и восстановлению города Ташкента. Уже в 1969 году Ташкент стал перестраиваться, все Республики бывшего Союза пришли на помощь Узбекистану по восстановлению разрушенного города. Большая организационная работа, связанная с руководством ин-

ститута, а также проблемы сейсмической безопасности нового Ташкента целиком занимали мое время. Естественно, что его катастрофически не хватало для глубоких научно-исследовательских работ. Тем не менее, я постоянно был с А.А. Ильюшиным, слушал его лекции вместе со студентами, участвовал в его беседах с научными работниками, посещал его встречи с авторитетными лицами Узбекистана.

Перед каждой нашей встречей меня, молодого ученого, мучил один и тот же вопрос - его высокий авторитет, его огромная роль в развитии механики, его заслуги. Вдруг такой великий ученый спросит меня: “Молодой человек, какие у Вас имеются научные достижения?”. Познакомившись с ними, оценит их очень низко, хотя к этому времени он уже консультировал моих учеников. И только в последний месяц пребывания в Ташкенте (май 1969 г.) А.А. Ильюшин сказал мне: “Дорогой директор, давайте поговорим о том, чем Вы занимаетесь, какие работы и результаты получены Вами?”. Мы расположились в кабинете, где я рассказывал о моих работах по сейсмостойкости подземных трубопроводов. В эти годы в мире отсутствовали данные о последствиях воздействия землетрясений на подземные сооружения, в частности, на подземные трубопроводы. Имелись только единичные материалы. После Ташкентского землетрясения были получены материалы по большому количеству повреждений и разрушений подземных водопроводных трубопроводов. Помню, в течение получаса я доложил свои результаты А.А. Ильюшину, потом он остановил меня и сказал: “Турсун Рашидович! Давайте в оставшееся время моего пребывания здесь мы займемся Вашим направлением, я хочу оставить от своего пребывания в Ташкенте некоторую память”. После так и получилось.

Оказывается, до этого он ознакомился со всеми моими работами (42 наименования), чтобы лучше подготовиться к беседе. Затем он взял ручку, бумагу и стал обсуждать новые проблемы сейсмостойкости подземных сооружений, т.е., уже трубопровод рассматривался не только как стержень, но и как сложная пространственная трубопроводная система, уложенная в грунтовой среде. Я у него за это время получил 11 консультаций, забыл обо всех своих административных делах, увлекся научной работой.

Главным стал вопрос взаимодействия твердых тел с окружающим грунтом, что было изучено крайне недостаточно, в особенности, для грунтовых условий Средней Азии. Уже были сформулированы несколько задач по изучению взаимодействия твердого тела с грунтом, были разработаны первые эскизы оригинальных установок, начались экспериментальные исследования в лабораторных условиях. Тогда же было установлено, что эти взаимодействия сходны по характеру со взаимодействиями с упруговязко-пластическими средами [1].

Все экспериментальные работы легли на плечи моего ученика Г.Х. Хожметова, окончившего МВТУ им. Баумана, впоследствии ставшего доктором технических наук, профессором, лауреатом Государственной премии в области науки и техники. Алексей Антонович Ильюшин неоценимо помогал в становлении многих узбекистанских ученых. Среди них академики АН РУз Т. Буриев, Я. Мубораков; доктора физико-математических наук К. Бабамуратов, Ф. Бадалов, Б. Курбонбоев, А. Абдусаттаров, Б. Мардонов; доктора технических наук А. Ишанходжаев, Т. Мавлянов, Ш. Маматкулов и многие другие, а также несколько десятков кандидатов наук.

После отъезда А.А. Ильюшина в Москву, через некоторое время мы встретились с ним в Баку, принимали участие в семинарах, беседах, которые он проводил с видными учеными и государственными деятелями Азербайджана, где обсуждались проблемы нефтяной механики, в частности, прочности тросов и др.

В это время получило развитие использование вычислительных машин в технике. В научно-исследовательской работе по кандидатской диссертации я уже использовал вычислительную машину. По своему характеру задачи сейсмодинамики подземных сооружений совпадают с задачами движения самолета в воздушном пространстве. Все те вычисления, которые нужно было производить с помощью ЭВМ, выполнялись в ЦАГИ им. Жуковского моей командой. Нам очень хорошо помог крупный математик, вычислитель – программист ЦАГИ Сормин. Когда я приносил А.А. Ильюшину кривые, характеризующие напряженно-деформированное состояние подземных тел при сейсмических нагружениях, он удивлялся, как быстро и качественно они были получены. За это время мне удалось опубликовать совместно с А.А. Ильюшиным две статьи:

1. “О существовании двух типов волн, условно названных “до” и “сверх”- звуковыми, распространяющихся в подземных сооружениях”;

2. “О методах упрощения задач сейсмодинамики сложных систем подземных сооружений, т.е. приведение их к упрощенным алгоритмам”.

Эти две работы опубликованы в трудах А.А. Ильюшина [1,2].

Здесь отметим, что получить подпись А.А. Ильюшина на соавторство было очень трудно, приходилось доказывать роль и значение тех или иных результатов, которые были получены с его значительной помощью, приносить из библиотек г. Москвы различные публикации иностранных авторов, в том числе японских, только тогда он соглашался на соавторство и писал свою фамилию на статье.

В Москве, за одну ночь (28 мая 1971 года), мною был написан автореферат докторской диссертации, днем печатал, на следующий вечер А.А. Ильюшин откорректировал его, затем показал проф. М.А. Колтунову, который был раньше знаком с моими работами, получил его согласие на

оппонирование. Защитил докторскую диссертацию 02.07.1971 г. На базе докторской диссертации в 1973 году мною была издана монография “Сейсмодинамика сложных систем подземных сооружений” [1], ответственным редактором которой был А.А. Ильюшин. Он же написал к ней предисловие, которое я привожу здесь дословно [1]:

“Большинство основных подземных сооружений с точки зрения их прочности представляет собой конструкции типа рам, все элементы которых находятся в контакте с окружающим грунтом. Узловые соединения элементов имеют увеличенные габариты, к ним под разными углами могут сходиться линейные элементы различных сечений (рис.1).

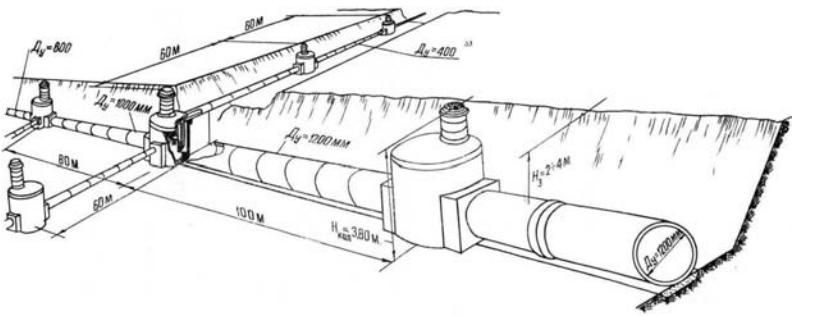


Рис. 1. Вариант сложной системы подземных сооружений

Точное решение задачи динамики такой системы при прохождении в грунте сейсмической волны встречает непреодолимые трудности. Например, задача дифракции волн решена лишь для простейших тел (абсолютно твердые, конус, шар) при однородной волне. Упрощение, принимаемое в динамике наземных сооружений (основание движется как жесткое целое), непригодно, так как многократно занижает напряжения. Более точное предположение о том, что сооружение всюду жестко скреплено с грунтом, т. е. деформации его равны деформациям грунта внутри фронта волны (распространено, например, в Японии), также может приводить к ошибкам порядка 100%.

В монографии профессора Т. Рашидова принята наиболее целесообразная схема совместной деформации грунта и сооружения: учитываются пространственная неоднородность сейсмической волны и относительные смещения всех элементов сооружения (относительно грунта). Все линейные элементы сооружения деформируются по схеме бруса (растяжение, кручение, пространственный изгиб), все узлы — абсолютно твердые тела с шестью степенями свободы. Учитывается возможность упругой стыковки (с шестью степенями свободы) между собой линейных элементов. Эта схема, сильно упрощенная (без заметных ошибок в результатах [1, 2]), привела к созданию законченной прикладной теории. Проведены необходимые экспериментальные исследования (коэффициен-

тов контакта и стыковок) и большие расчетные работы для реальных схем сооружений.

Книга Т. Рашидова может служить основой оптимального проектирования подземных сооружений в сейсмических районах".

А. А. Ильюшин

Таким образом, памятью о пребывании А.А. Ильюшина в Ташкенте стало новое направление в сейсмостойкости сооружений, которое получило название "Сейсмодинамика подземных сооружений", которому я посвятил всю свою жизнь и ныне неустанно тружусь, и по которому работают мои многочисленные последователи. Термин сейсмодинамика вошел в научную литературу с этого момента.

В то время мне удалось собрать достаточный материал по повреждениям подземных трубопроводов различного назначения. Ташкентское землетрясение дало возможность выявить около полутора тысяч аварийных отказов подземных трубопроводов г. Ташкента
(в большинстве случаев водопроводы, канализация и газопроводы). Установлено, что подземные сооружения типа трубопроводов и тоннелей в основном повреждаются и разрушаются в местах присоединения их к резервуарам, колодцам, насосным станциям, фундаментам зданий, домовым вводам, ответвлениям, вблизи резких поворотов, при прохождении сооружений через реки и овраги и т.д., т.е. около сложных узлов. Сами колодцы, камеры, насосные станции и др. существенных повреждений не имеют; больше всего разрушаются стыковые соединения, гибкие стыки являются более сейсмостойкими; на повреждаемость подземных сооружений влияют грунтовые условия. Наибольшее количество повреждений отмечалось в сооружениях, уложенных в рыхлых грунтах. На сейсмостойкость трубопроводов влияют глубина заложения, напор содержимого; немаловажное значение имеет геометрия сооружения и т.д.

В сейсмодинамической теории подземных сооружений важно установление модели взаимодействия в системе "сооружение — грунт". Для установления конкретного закона взаимодействия подземных трубопроводов с различными грунтами сконструированы и созданы различные установки и приспособления, разработана методика проведения статических и динамических опытов по изучению сопротивления грунтов перемещению подземных труб. Результаты натурных и лабораторных опытов подтвердили применяемость упруго-вязко-пластической модели для изучения взаимодействия сооружений с грунтом. Исследованы реологические свойства взаимодействия труб с окружающим грунтом и для их описания применена наследственная теория Больмана – Вольтерра. Вопросы взаимодействия тонкостенных конструкций и сооружений с окружающей

средой с учетом вязкоупругих и упругопластических свойств материалов рассматривались в дальнейших работах.

На основе теоретического обобщения и использования результатов экспериментальных исследований сейсмодинамическая теория подземных сооружений развита путем распространения ее основных предпосылок на грунты, обладающие упрогопластическими и вязкоупругими свойствами. Эти задачи решены методами, предложенными А.А. Ильюшиным.

В этот период в расчетах обращалось внимание на малые относительные движения в системе “труба – грунт”, т.е. в большинстве случаев сила взаимодействия в системе “сооружение – грунт” выбиралась в виде линейного закона.

В августе 2008 г. в Китае (Пекин) состоялась 14 Всемирная конференция по сейсмостойкому строительству. Подобные форумы проводятся через каждые 4 года в крупных городах, расположенных в сейсмоактивных районах мира. Пекинская конференция была представлена большим числом специалистов (более 3000). Опубликованные материалы содержат в общей сложности 3050 докладов [3]. Около 200 докладов охватывали различные аспекты сейсмобезопасности подземных систем жизнеобеспечения: тоннели метрополитенов; тоннели, одновременно транспортирующие воду, газ и электричество; трубопроводные системы: газо- и нефтепроводы, водо- и теплопроводы, системы канализации; мосты различной этажности, железные и автомобильные дороги, плотины, резервуары и др. Особое внимание было уделено динамическим натурным и модельным экспериментальным исследованиям с использованием новейших средств приборостроения и компьютерной техники; изучено влияние разломов, сильных движений грунта, обвалов, трещин, разжижения и водонасыщенности грунта на НДС систем жизнеобеспечения. Рассматривались повреждения и разрушения трубопроводов после сильных землетрясений, произошедших в Китае, Японии, США, Индонезии за последний период времени.

По результатам Пекинской Конференции нами подготовлен обзор этих докладов:

1. В отличие от наземных сооружений, таких как здания и мосты, силы инерции от землетрясения не являются основной причиной повреждения подземных труб. Скорее всего, основной причиной повреждений являются относительные перемещения грунта и трубы (особенно в условиях сжижения или смещения грунта по разлому). Кроме того, хотя изгибные деформации имеют место, осевые деформации являются преобладающими, когда труба связывает две точки с различными характеристиками грунта или пересекает разрыв, появление сейсмических повреждений более вероятно. Анализ сейсмических повреждений показывает, что когда исключаются из рассмотрения разлом грун-

та или сильный оползень, существуют два типа причин повреждений подземных труб: деформирование вследствие распространения сейсмических волн и осевое деформирование вследствие относительных движений трубы и грунта. Сейсмические повреждения из-за осевых деформаций вследствие относительного движения трубы и грунта встречаются, в частности, когда труба переходит от твердого к мягкому грунту.

2. Существуют три основные причины повреждения подземных трубопроводов вследствие землетрясения: а) избыточные осевые и изгибные напряжения и деформации, возникающие из-за разности фаз и шага формы волны между двумя точками;
б) разламывающие движения во время землетрясения, если трубопровод пересекает большой разлом; в) сжижение грунта. Сейсмическое поведение подземных трубопроводов совершенно отличается от поведения наземных сооружений в основном в следующем: а) силы инерции являются основным фактором воздействия в расчете наземных сооружений, а для подземных трубопроводов более существенно сопротивление окружающего грунта. Этот факт был установлен нами еще 40 лет назад [1]; б) движение грунта для большинства наземных сооружений рассматривается как связное, в то время как для подземных трубопроводов (особенно длинных непрерывных систем) оно рассматривается как несвязное вследствие разности фаз между различными точками и изменением формы в связи с изменениями свойств грунта вдоль трубопровода; в) повреждение одного наземного сооружения ограничивается только им одним, а повреждение определенного места в сети труб будет влиять на другие части системы".

Как следует из приводимых обзоров, в настоящее время следует считать твердо установленным, что для подземных сооружений силы инерции не являются определяющими; эта роль отводится силам взаимодействия между подземным сооружением и окружающим его грунтом, возникающим при их взаимных перемещениях. В докладах имелись упоминания о том, что впервые исследование этого взаимодействия датируется серединой 70-х годов прошлого века. Здесь следует отметить, что в обработанных докладах совершенно не упоминается роль советских ученых и ученых из страны СНГ в исследованиях проблемы сейсмостойкости подземных сооружений.

На самом деле, те проблемы, которые вышли на передний план в науке и практике по сейсмодинамике подземных сооружений, задолго до этого стали рассматриваться в нашей лаборатории ИМиСС АН РУз, а результаты, полученные нами, находятся на уровне современных исследований, проводимых за рубежом, как вытекает из предисловия нашей работы с А.А. Ильюшиным. Нужно отдать должное тому, что в экспе-

риментах зарубежных авторов хорошо изучены динамические свойства взаимодействия системы “сооружение – грунт”.

Установлено, что результаты сейсмодинамической теории подземных сооружений, разработанной в этой лаборатории, находятся на мировом уровне и в большинстве случаев даже превосходят. Хотелось бы отметить необходимость дальнейшего развития проблем изучения динамического взаимодействия в системе “сооружение – грунт”. Исходя из материалов Международной конференции по сейсмостойкому строительству, следует больше уделять внимания проблемам исследования сейсмонапряженного состояния подземных трубопроводных систем, когда они проходят в зонах разлома, в местах возникновения обвалов и в случаях строительства этих сооружений в водонасыщенных грунтах. Дальнейшее внимание исследованиям по проблеме сейсмодинамики подземных сооружений должно быть посвящено рассмотрению решения нелинейных задач с учетом нелинейностей взаимодействия в системе “сооружение – грунт”.

Литература

1. *Рашидов Т.Р.* Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан. 1973.
2. *Ильюшин А.А.* Труды IV. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерных приложениях. М.: Физматлит.2009.
3. 14th WORLD CONFERENCE ON EARTHQUAKE ENGINEERING (Материалы 14 Всемирной конференции по сейсмостойкому строительству, касающиеся описания повреждений и разрушений подземных систем жизнеобеспечения в различных регионах мира). Пекин. 2008.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ РАЗВОРАЧИВАНИИ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ ВО ВРЕМЯ ПОЛЕТА КА «ФОТОН М-3»

Н.Н. Смирнов, А.В. Звягин, А.А. Малашин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

В статье анализируется динамическая задача о разворачивании троса грузом на конце в условиях орбитального движения спутника. Даются прогнозы динамики относительного движения системы спутник-трос-спускаемая масса, а также анализируется волновая картина движения троса на момент окончания эксперимента.

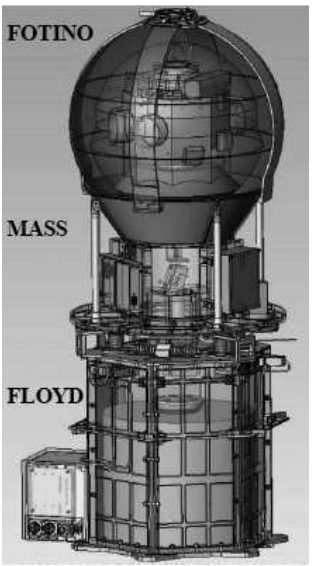
14 сентября 2007 г. состоялся старт космического корабля «Фотон М-3» с научной аппаратурой на борту — совместный проект Роскосмоса и Европейского Космического Агентства. По завершении полета был запланирован эксперимент по разворачиванию 30 километровой тросовой системы на орбите. Цель проекта — продемонстрировать возможность возвращения субкапсулы из космоса на Землю и одновременного повышения орбиты космического аппарата, сбрасывающего капсулу. Перспектива использования — доставка материалов с орбиты без транспортного корабля («космическая почта») и удаление отходов околоземного пространства («космический мусор» [1]). Для данного эксперимента используются 30-километровый трос и легкая спускаемая капсула ФОТИНО.

Расчеты процесса разворачивания троса были выполнены различными организациями с использованием квазистатических моделей. Ввиду того, что большинство предыдущих экспериментов по разворачиванию тросовых систем в космосе окончилось неудачей, в целях обеспечения безопасности основного спускаемого аппарата «Фотон М-3» Европейское Космическое Агентство обратилось к специалистам механико-математического ф-та МГУ с предложением в кратчайшие сроки разработать модель и провести расчеты динамического поведения троса в процессе размотки с учетом конечных скоростей продольных и поперечных звуковых волн [2].

Экспериментальная установка для размотки тросовой системы массой 36 кг (рис. 1) была закреплена на капсуле «Фотон М-3» (рис. 2). Предполагалась размотка 32 км троса с целью поместить спускаемую капсулу массой 6 кг на траекторию входа в атмосферу. Суммарная расчетная масса на конце разматываемого троса составляла 12 кг (фактически оказалась 14 кг).

Математическая модель предполагала, что спутник находится на круговой орбите (радиус орбиты R) и вращается в плоскости с постоянной

угловой скоростью ω. На конце троса, который разматывается с некоторой скоростью, находится малый спутник массы m. Предположительно, размотка троса осуществляется таким образом, что малый спутник движется к Земле.



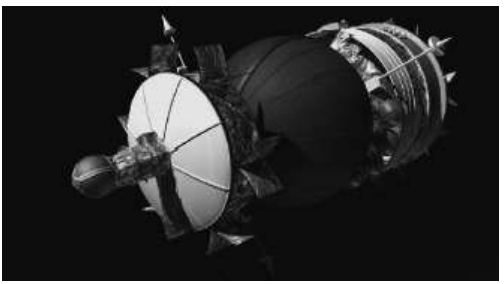


Рис. 1. (слева) Компоновка экспериментального блока: FLOYD - устройство размотки троса, MASS - система сбора и обработки данных, FOTINO - сферическая спускаемая капсула.
Рис. 2. (вверху) Экспериментальный блок на корпусе КА «Фотон М-3».

Основные уравнения.

Применение закона изменения импульса для элемента троса дает уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{l}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\vec{T}\right) + f$$

s — лагранжева координата, ρ — погонная плотность нити, $\vec{l}$ — вектор смещения элемента нити, T — натяжение, f — плотность внешних сил. В системе координат, связанной со спутником внешними силами являются сила гравитационного взаимодействия с Землей, центробежная сила и сила Кориолиса. Ось OX направим от спутника по направлению к Земле, ось OY — против направления движения спутника. Сила Кориолиса, действующая на элемент нити, в проекциях на оси координат

$$f_{KX} = 2\omega\rho \frac{\partial y}{\partial t}, \quad f_{KY} = -2\omega\rho \frac{\partial x}{\partial t}$$

Если элемент троса находится на орбите с радиусом $R - h$, то суммарное действие гравитационной и центробежной сил на элемент Δs определяется

так:

$$f_g = \rho\Delta s\frac{GM}{(R-h)^2} - \rho\Delta s\omega^2(R-h) = \\ = \rho\Delta s\frac{GM}{R^2}\left(1+\frac{2h}{R}\right) - \rho\Delta s\omega^2 R\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

Так как $\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R$, то $f_g = 3\rho\Delta s\omega^2 h$. Таким образом, в проекциях на оси координат уравнение движения имеет вид:

$$\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(T\sin\gamma) + 2\rho\omega\frac{\partial y}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(T\cos\gamma) - 2\rho\omega\frac{\partial x}{\partial t} + 3\rho\omega^2(s+y). \tag{2}$$

где γ — угол отклонения элемента троса от оси OX, $T = Ee$ — закон Гука, $e = \sqrt{(1+{}^{\partial x}/_{\partial s})^2 + ({}^{\partial y}/_{\partial s})^2} - 1$ — относительная деформация элемента нити, $\sin\gamma = \frac{1}{1+e}\frac{\partial x}{\partial s}$, $\cos\gamma = \frac{1}{1+e}\left(1+\frac{\partial y}{\partial s}\right)$.

Вводя скорость распространения продольных волн $a = \sqrt{E/\rho}$, запишем (1) и (2) так:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial s}(e\sin\gamma) + 2\omega\frac{\partial y}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial s}(e\cos\gamma) - 2\omega\frac{\partial x}{\partial t} + 3\omega^2(s+y). \tag{4}$$

Граничные условия Граничные условия при $s = 0$ выражаются равенствами $x(0,t) = y(0,t) = 0$ и, так как в эксперименте контролируется натяжение, то $T(0,t) = T_0(t)$. Длина нити переменная, то есть $l = l(t)$: $x(l(t),t) = X_l(t)$, $y(l(t),t) = Y_l(t)$, где $X_l(t)$, $Y_l(t)$ подчиняются следующим динамическим условиям:

$$m\frac{\partial^2 X_\ell}{\partial t^2} = T(\ell,t)\sin\gamma(\ell,t) + 2m\omega\frac{\partial Y_\ell}{\partial t},$$

$$m\frac{\partial^2 Y_\ell}{\partial t^2} = T(\ell,t)\cos\gamma(\ell,t) - 2m\omega\frac{\partial X_\ell}{\partial t} + 3m\omega^2(\ell+Y_\ell).$$

Начальные условия Начальные условия принимаются в виде: $l(0) = 0$, $X_l(0) = 0$, $Y_l(0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}X_l\big|_{t=0} = V_0$, $\frac{\partial}{\partial t}Y_l\big|_{t=0} = 0$, где V_0 — начальная скорость движения малого спутника.

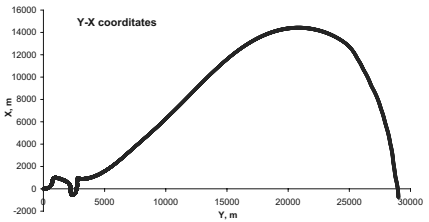


Рис. 3. Расчетная траектория спускаемого груза в системе координат, связанной со путником.

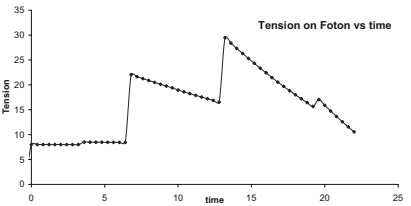


Рис. 4. Расчетное изменение натяжения троса на катушке при окончании размотки.

Результаты расчётов

На рис. 3 приведена расчётная траектория движения малого спутника в процессе размотки троса. Спускаемая капсула отклоняется от вертикали, и затем, в результате притормаживания размотки возвращается. В момент прохождения вертикали трос освобождается и размотка возобновляется, что приводит к повторному отклонению и необходимости повторного торможения. Динамические эффекты проявляются, в основном, при окончании размотки троса, когда происходит рывок. Вариация натяжения троса (в ньютонах) при этом показана на рис. 4 как функция времени в секундах. Скорость спускаемой массы на конце троса показана на рис. 5. Из рисунков видно, что при остановке троса натяжение возрастает до 8 N и остается постоянным, пока отраженная от конца троса (спускаемой массы) волна не возвращается и не увеличивает натяжение до 23 N, которое постепенно уменьшается ввиду торможения спускаемой массы. Отразившись от точки закрепления, волна опять уходит к спускаемой капсуле и, возвратившись от нее, приводит к еще одному всплеску натяжения. В дальнейшем спускаемая масса приобретает отрицательную скорость (рис. 5.), что приводит к падению натяжения в точке закрепления.

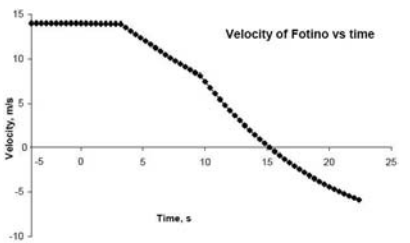


Рис. 5. Скорость спускаемой массы (м/с) как функция времени (с).

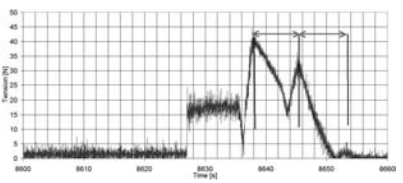


Рис. 6. Экспериментально замеренное изменение натяжения троса на катушке при окончании размотки.

На рис. 6 приведены экспериментальные данные по изменению натяжения троса (N) от времени (с). Сравнение данных рис. 4 и 6 показывает практически полное совпадение при базовой длине троса 32 км. Поэтому объявление о размотке троса только на 8 км, сделанное СМИ сразу по

завершении полета на основании данных телеметрии, является ошибочным.

Работа подготовлена при поддержке РФФИ (09-01-13505).

Литература

1. *N.N. Smirnov (Ed.)* Space debris hazard evaluation and mitigation. Taylor and Francis, 2002, London, New York. 220 p.
2. *N.N. Smirnov, Yu.A. Demyanov, A.V. Zvyaguin, A.A. Malashin, A.A. Luzhin* Dynamical simulation of tether in orbit deployment. // Acta Astronautica 2010, vol.67 №(3-4), pp.324–332.

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

Э.И. Старовойтов [1], ***Д.В. Леоненко*** [2]

Белорусский государственный университет транпорта
Гомель, Республика Беларусь
[1] **edstar@mail.by,** [2] **leoden@tut.by**

Bending of the elastoplastic circle sandwich plate on elastic foundation Thermoforce bending of elastoplastic sandwich circular plate with light filler lying on elastic foundation is considered. For the description of kinematics of package with asymmetrical thickness the broken normal hypothesis was accepted. Reaction of foundation was described on the base of Winkler's model. Combined equations of equilibrium and recurrent solutions via displacement were received. Numerical results for sandwich metal-polymeric plate were adduced.

Введение. В рамках теории малых упругопластических деформаций [1] рассмотрен термосиловой изгиб поперечно нагруженной упругопластической круговой трехслойной пластины с легким заполнителем, покоящейся на упругом основании. Деформирование трехслойных элементов конструкций, не связанных с упругим основанием, исследовалось в [2].

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z (рис. 1. Для изотропных несущих слоев, толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине заполнитель ($h_3 = 2c$) легкий, в нем пренебрегается работа касательных напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении. Деформированная нормаль заполнителя остается прямолинейной, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ.

На границах слоев перемещения непрерывны. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

Пусть в начальный момент времени на трехслойную круговую пластину, находящуюся на упругом основании, начинают действовать симметричная вертикальная нагрузка $q_0(r)$ и тепловой поток интенсивности q_t, направленный перпендикулярно несущему слою. Задача определения температурного поля рассмотрена в [2], поэтому считаем температуру $T(z,t)$ известной.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi(k) = 0$ (k — номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости

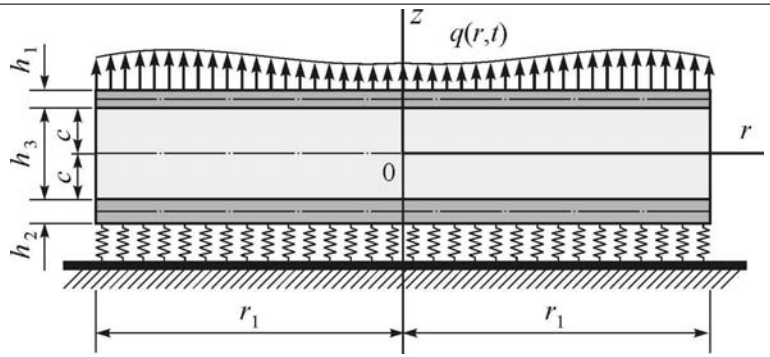


Рис. 1. Расчетная схема

не зависят от координаты φ, т. е. $u(r), \psi(r), w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r(k)$ через эти функции можно получить, используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0.

Напряжения и деформации в слоях связаны неизотермическими соотношениями теории малых упругопластических деформаций. В физически нелинейном заполнителе дополнительно учитывается влияние вида напряженного состояния:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(T_k)(1-\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k))e_\alpha^{(k)}, \quad \alpha = r,\ \varphi, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)}-\alpha_{0k}T_k), \quad k = 1,\ 2,$$

$$\varphi_1(\sigma^{(3)},\ T_3)s_{\alpha\beta}^{(3)} = 2G_3(T_3)(1-\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3))e_{\alpha\beta}^{(3)}, \quad (\alpha,\ \beta = r,\ \varphi),$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\,f^{(3)}(\varepsilon^{(3)},\ T_3)e_{rz}^{(3)}, \phi_2(\sigma^{(3)})\sigma^{(3)} = 3K_3(T_3)(\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03}T_3). \quad (1)$$

Здесь $s_\alpha^{(k)},\ e_\alpha^{(k)}$ - девиаторы, а $\sigma^{(k)},\ \varepsilon^{(k)}$ - шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k), K_k(T_k)$ - температурно-зависимые модули упругости материалов слоев; α_{0k} - коэффициент линейного температурного удлинения; $\omega_k(\epsilon_u(k), T_k)$ - функции пластичности материалов несущих слоев и физической нелинейности заполнителя, зависящие от интенсивности деформаций $\epsilon_u(k)$ и температуры T_k; в заполнителе функции нелинейности $\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3), \varphi_2(\sigma^{(3)})$ дополнительно учитывают влияние гидростатического напряжения $\sigma^{(3)}$; k - номер слоя.

Связь между реакцией основания и прогибом пластины описывается моделью Винклера:

$$q_R = \kappa_0 w,$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Уравнения равновесия пластины следуют из вариационного принципа Лагранжа. Для их решения применяется метод упругих решений Ильюшина [1]. В результате для прогиба пластины имеем рекуррентное уравнение:

$$w^{n}_{,rrrr} + \frac{2}{r} w^{n}_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w^{n}_{,rr} + \frac{1}{r^3} w^{n}_{,r} + \kappa^4 w^n = q + f_{\omega}^{n-1}. \qquad (2)$$

где n - номер приближения; функцию f_{ω}^{n-1} — называют дополнительной "внешней"нагрузкой и на первом шаге полагают равной нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения в соответствии с соотношениями (1);

$$\kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D,$$

$$f_{\omega}^{n-1} = -Dq_{\omega}^{n-1} + D_1 \frac{1}{r}(r p_{\omega}^{n-1})_{,r} + D_2 \frac{1}{r}(r h_{\omega}^{n-1})_{,r},$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},$$

$$D_1 = \frac{a_1(a_3 a_4 - a_2 a_5)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},$$

$$D_2 = \frac{a_1(a_1 a_5 - a_2 a_3)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2};$$

a_i — коэффициенты, определяемые механическим и геометрическими параметрами слоев [2].

Общее решение уравнения (2) можно записать в виде [3]:

$$w^m = C_1^m \,\mathrm{ber}(\kappa r) + C_2^m \,\mathrm{bei}(\kappa r) + C_3^m \,\mathrm{ker}(\kappa r) + C_4^m \,\mathrm{kei}(\kappa r) + w_0^m(r), \quad (3)$$

где $\mathrm{ber}(\kappa r)$, $\mathrm{bei}(\kappa r)$, $\mathrm{ker}(\kappa r)$, $\mathrm{kei}(\kappa r)$ — функции Кельвина нулевого порядка; $w_0^n(r)$ — частное решение уравнения (2); C_1^n, C_2^n, C_3^n, C_4^n — константы интегрирования, следующие из граничных условий, причем $C_3^n = C_4^n = 0$ из условия ограниченности решения в центре пластины.

Частное решение в (3) можно получить с помощью ядра Коши:

$$w_0^n(r) = \int_0^r K(r,s)\left[q(s) + f_{\omega}^{n-1}(s)\right] ds,$$

где

$$K(r,s) = C_1(s)\varphi_1(r) + C_2(s)\varphi_2(r) + C_3(s)\varphi_3(r) + C_4(s)\varphi_4(r),$$

$$\varphi_1(r) = \mathrm{ber}(\kappa r), \quad \varphi_2(r) = \mathrm{bei}(\kappa r), \quad \varphi_3(r) = \mathrm{ker}(\kappa r), \quad \varphi_4(r) = \mathrm{kei}(\kappa r).$$

Функции $C_n(s)$ определяются отношениями

$$C_1(s) = \frac{W_1(s)}{W(s)}, \quad C_2(s) = \frac{W_2(s)}{W(s)}, \quad C_3(s) = \frac{W_3(s)}{W(s)}, \quad C_4(s) = \frac{W_4(s)}{W(s)},$$

где $W_i(s)$ - определители Вронского [3].

Численные исследования проводились для защемленной по контуру пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Геометрические параметры пластины отнесены к ее радиусу r_0, относительные толщины слоев: $h_1 = h_2 = 0,04, h_3 = 0,4$. Интенсивность поверхностной нагрузки $q_0 = -1$ МПа, теплового потока – $q_t = 5000$ Дж / (м^2 с). Температура во внешнем слое достигает значения $T_1 = 597$ К в момент времени $t_0 = 60$ мин., что соответствует достаточному разогреву дюралюминия, но меньше температуры плавления заполнителя-фторопласта. Во втором слое температура постоянна.

Для описания зависимости модулей упругости материалов несущих слоев (металлов) от температуры используется формула, предложенная Беллом [2]. Функции пластичности материалов несущих слоев и физической нелинейности заполнителя приведены в [2].

На рис. 2, *а, б* показано изменение прогиба вдоль радиуса упругой круговой трехслойной пластины на упругих основаниях различной жесткости (МПа/м): *а* – $\kappa_0 = 1$, *б* –$\kappa_0 = 100$: *1* - изотермический прогиб, *2* - термоупругий прогиб при t_0. Если основание малой жесткости (см. рис. 2, *а*), то температура вызывает увеличение прогиба на 18 %. При основании средней жесткости (см. рис. 2, *б*), воздействие температуры сказывается в несколько меньшей степени: прогиб увеличивается на 11 %.

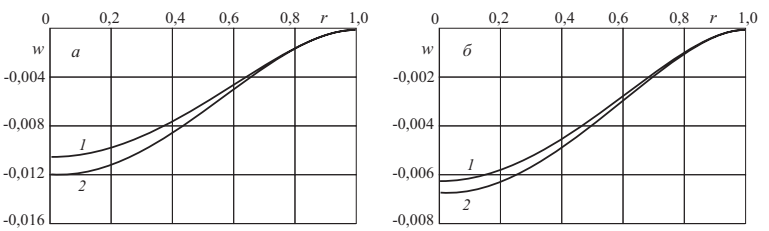


Рис. 2. Изменение прогиба вдоль радиуса пластины

Исследование изгиба упругопластической пластины проведено при основании средней жесткости ($q_0 = -20$ МПа). Оно продемонстрировало быструю сходимость метода упругих решений. Максимальное отличие перемещений в 4-м приближении, принятом за искомое решение, от предыдущих составляет менее 1 %.

На рис. 3 показан прогиб в рассматриваемой пластине: *1* - упругий изгиб, *2* - термоупругий, *3* - термоупругопластический, *4* - пределы текучести материалов слоев уменьшены в 2 раза. Учет физически нелинейного

термосилового деформирования материалов слоев приводит к увеличению упругого расчетного прогиба на 12,5 %. Если принять материалы несущих слоев более пластичными (*4*), то эта разница составит 17 %.

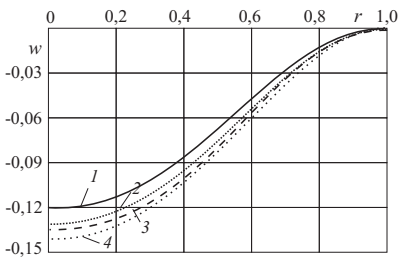


Рис. 3. Термоупругопластический прогиб

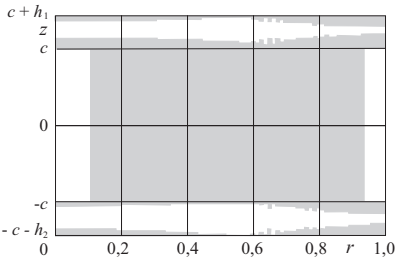


Рис. 4. Области физической нелинейности

Распределение соответствующих областей физической нелинейности (темная заливка) в вертикальном сечении рассматриваемой трехслойной пластины показано на рис. 4. Заполнитель на 82 % деформируется нелинейно. В несущих слоях зоны пластичности занимают до 25 % объема материала.

Выводы. Приведенное в работе общее решение можно использовать для исследования любого случая изгиба симметричной термосиловой нагрузкой трехслойной круговой пластины с легким заполнителем на упругом основании, при наличии отверстия или без него.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука. 1976. 576 с.

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ШИН

С. В. Шешенин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

Развитие компьютеров и метода конечных элементов сделало возможным трехмерное моделирование шин, идея которого весьма проста. Именно, с помощью современных компьютеров нужно заменить решение краевой задачи решением конечно–элементной системы. Метод конечных элементов и возник собственно, исходя из идеи замены бесконечно малых элементов, для которых формулируются уравнения механики деформируемого твердого тела, на конечные. Основная трудность здесь состоит в том, что требуется получить результаты, наблюдаемые экспериментально. В том числе, при значительных нагрузках и искажениях формы шины.

Поэтому, во–первых, требуется построить адекватную механическую модель шины и, прежде всего, резинокорда с учетом геометрической и физической нелинейности. Во–вторых, численное решение результирующей конечно–элементной системы оказывается сложной проблемой. Конечно, это происходит вследствие сильной нелинейности, анизотропии и неоднородности элементов шины. Действительно, модуль Юнга резины имеет значения $1 \div 15\, MPa$, тогда как модуль Юнга резинокорда в направлении корда достигает значения $40000\, MPa$, а в поперечном направлении только на 30% больше модуля резины. Возникающие в области механики резинокордных композитов задачи переплетены с вычислительными, что типично для вычислительной механики композитов.

Механическая модель должна прежде всего включать гомогенизированную трехмерную модель резинокорда при больших деформациях. Гомогенизация или осреднение свойств резинокорда требуется поскольку дискретизация отдельно нитей корда пока не реалистична. Действительно, расстояние между нитями корда составляет $1\, mm$, тогда как длина окружности пассажирской шины около $2\, m$. Следовательно, число узлов конечно-элементной сетки в окружном направлении должно быть не менее нескольких тысяч, в то время как сегодня это число может быть не более двух, трех сотен. Таким образом, требуемое для детальной дискретизации число узлов, по крайней мере, на порядок больше лишь в окружном направлении. Поскольку в радиальном направлении картина та же, то общее число узлов конечно–элементной сетки, требуемое для детализации нитей корда, не менее, чем на два порядка превышает современные возможности.

Также необходимы определяющие соотношения, адекватно описывающие поведение резины во всем диапазоне от малых до больших деформаций, иногда с учетом вязкоупругих свойств.

Следующий аспект трехмерного моделирования связан с пространственной дискретизацией. Малая толщина резинокордных слоев требует разработки и применения оболочечно-трехмерных конечных элементов. Такой элемент соответствует асимптотической модели резинокордного слоя и позволяет точнее описывать его изгибные, продольные и поперечные жесткости.

Второй тип дискретизации, необходимый для получения решения, – дискретизация по параметру нагружения (или по времени при учете сил инерции). Она основывается на вариационных уравнениях, сформулированных либо в рамках полностью лагранжевого подхода (TL – Total Lagrangian), либо лагранжевого подхода с адаптацией (UL – Updated Lagrangian). Как показывает теоретический анализ и практические расчеты, оба подхода эквивалентны друг другу, если не используется перестроение конечно–элементной сетки по ходу решения. По существу, дискретизация вариационного уравнения по параметру прослеживания процесса деформирования является единственным методом решения геометрически нелинейных задач и основывается на линеаризированных вариационных постановках. При использовании TL подхода задача относительно тензора Пиолы (первого тензора Пиолы – Кирхгофа) $\underset{\sim}{P}$ в начальной конфигурации имеет вид

$$\int\limits_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla}\vec{w} : \underset{\sim}{C}^{F} : \overset{0}{\nabla}\delta\vec{u}\, d\overset{0}{V} = \delta A^{e}(\vec{u})[\vec{w}], \quad \forall \vec{w} \in G \tag{1}$$

где

$$\underset{\sim}{C}^{F} = \frac{\partial^2 W}{\partial \underset{\sim}{F}^2}, \quad A^{e}(\vec{u})[\vec{w}] = \int\limits_{\overset{0}{V}} \vec{f}\cdot\vec{w}\, d\overset{0}{V} + \int\limits_{\overset{0}{\Sigma}_2} \vec{S}(\vec{u})\cdot\vec{w}\, d\overset{0}{\Sigma},$$

$\underset{\sim}{F}$ – градиент деформирования. Вектор $\vec{u}$ есть решение (действительное перемещение), $\vec{w}$ – пробная функция или возможное, в соответствии с граничным условием на $\overset{0}{\Sigma}_1$, перемещение.

Вторая форма вариационного уравнения (1) использует тензор напряжений Кирхгофа (второй тензор Пиолы – Кирхгофа) $\underset{\sim}{S}$ и тензор деформаций Лагранжа – Грина $\underset{\sim}{E}$

$$\int\limits_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla}\vec{w} : \underset{\sim}{C}^{TAN} : \overset{0}{\nabla}d\vec{u}\, d\overset{0}{V} + \int\limits_{\overset{0}{V}} \underset{\sim}{S} : \left[\overset{0}{\nabla}\vec{w}^{T}\cdot\overset{0}{\nabla}d\vec{u}\right] d\overset{0}{V} = d\, A^{e}[\vec{w}] \tag{2}$$

Здесь $\underset{\sim}{C}^{TAN}_{ijpq} = C^{E}_{kjnq} F_{i,k} F_{p,n}$, а модуль $\underset{\sim}{C}^{E}$ входит в определяющее соотношение

$$d\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{C}^{E}(\underset{\sim}{E}) : d\underset{\sim}{E} \tag{3}$$

Приведенные выше вариационные уравнения (1), (2) используют определяющие соотношения разного типа (гиперупругости и гипоупругости) и служат отправной точкой для применения методов интегрирования по параметру процесса деформирования. Здесь возможно: 1) применение методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, 2) использование одного из вариантов метода Ньютона, 3) сочетание этих процедур. В любом случае решение достаточно сложно, так как результирующая система уравнений может содержать более полмиллиона уравнений и является плохо обусловленной из-за контрастных свойств материалов, составляющих конструкцию. Поэтому решение результирующей линейной системы на самом внутреннем этапе алгоритма решения может закончиться неудачей даже при использовании современных эффективных решателей.

Как показывают численные эксперименты, ключевую роль при этом играет положительная определенность матрицы системы. Если положительность отсутствует, часто никакой метод решения не работает. В геометрически линейной теории, положительная определенность матрицы системы уравнений определяется положительностью так называемого касательного модуля [2, 6]. Обобщение понятия касательного модуля в геометрически нелинейной теории рассматривается в настоящей статье.

Из теории вариационных задач геометрически линейной теории деформирования известно, что на связь $\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{\varepsilon})$ тензоров напряжений и деформаций можно наложить условия положительности и ограниченности касательного модуля [2, 6], которые обеспечивают существование и единственность решений краевых задач

$$\begin{gathered} \underset{\sim}{h} : D\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{\varepsilon})[\underset{\sim}{h}] \geq c_1\, \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h} > 0, \\ \underset{\sim}{h} : D\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{\varepsilon})[\underset{\sim}{h}] \leq c_2\, \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h}, \end{gathered} \tag{4}$$

которые должны выполняться для любого симметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{h}$. Условие (4) обеспечивает сильную эллиптичность (коэрцитивность) вариационной задачи. Условие (4) является обобщением условий, которые предлагались разными авторами и в различных областях механики деформируемого твердого тела. В теории пластичности известен постулат Драккера [1]. Этот постулат, называемый также постулатом устойчивости материала, имеет своим следствием условие эллиптичности (4). Условие устойчивости материала запрещает ему иметь, так называемую, "падающую" диаграмму напряжение – деформация $\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{\varepsilon})$. Интересно отметить, что "нырок" на диаграмме $\sigma_u(\varepsilon_u)$ в теории пластичности двухзвенных ломаных не нарушает постулата Дракера и неравенство (4), а

связан с тем, что процесс деформирования не является простым. В теории пластичности неравенсто типа неравенства (4) впервые предложено А.А. Ильюшиным для деформационной пластичности [4].

В геометрически нелинейной теории деформирования известен критерий монотонности Колемана–Нолла [5]

$$\left(\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{F}_2) - \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{F}_1)\right) : \left(\underset{\sim}{F}_2 - \underset{\sim}{F}_1\right) > 0,$$

из которого следует дифференциальный критерий

$$d\underset{\sim}{F}^T : D\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{F})[d\underset{\sim}{F}] > 0. \tag{5}$$

Следует сразу заметить, что последнее неравенство является слишком строгим. Если оно выполняется, например, для ”мертвой” нагрузки можно доказать, что решение вариационной задачи единственно. Однако единственности, вообще говоря, нет в краевых задачах геометрически нелинейной теории. Поэтому возникает вопрос, какое условие является разумным ограничением на определяющее соотношение в геометрически нелинейной теории?

Тензор, называемый касательным модулем, возникает, если представить дифференциал тензора Пиолы через производную в виде

$$D\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{F})[d\underset{\sim}{F}] = \frac{\partial \underset{\sim}{P}}{\partial \underset{\sim}{F}} : d\underset{\sim}{F}$$

Касательный модуль $\underset{\sim}{C}^F = \partial \underset{\sim}{P}/\partial \underset{\sim}{F}$ в литературе (см., например, [5]) называется лагранжевым тензором упругости. Представим квадратичную форму $C^F_{ijkl}h_{ij}h_{kl}$ следующим образом

$$C^F_{ijkl}h_{ij}h_{kl} = C^F_{(ij)(kl)}h_{(ij)}h_{(kl)} + 2C^F_{[ij](kl)}h_{[ij]}h_{(kl)} + C^F_{[ij][kl]}h_{[ij]}h_{[kl]}$$

где

$$h_{(ij)} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}), \qquad h_{[ij]} = \frac{1}{2}(h_{ij} - h_{ji})$$

$$C^F_{(ij)kl} = \frac{1}{2}(C^F_{ijkl} + C^F_{jikl}), \qquad C^F_{[ij]kl} = \frac{1}{2}(C^F_{ijkl} - C^F_{jikl})$$

и аналогично относительно второй пары индексов у тензора $\underset{\sim}{C}^F$.

Предлагается считать обобщением условия положительности касательного модуля следующее неравенство

$$\underset{\sim}{h} : C^F_{sym} : \underset{\sim}{h} \geq c_1 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h}, \quad \left(C^F_{(ij)(kl)}h_{ij}h_{kl} > c_1 h_{ij}h_{ij}\right), \tag{6}$$

которое предполагается выполненным для любого симметричного тензора $\underset{\sim}{h}$.

До сих пор условия, накладываемые на определяющее соотношение, обсуждались в случае, когда $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{F})$. Если определяющее соотношение задано в виде (3) , то обычно подразумевается, что оно используется в специальном случае деформирования, который характеризуется малыми деформациями, но большими поворотами материальных частиц. Тогда обобщение условия положительности и ограниченности касательного модуля можно сформулировать условия в виде неравенств

$$c_1 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h} \leq \underset{\sim}{h} : \frac{\partial \underset{\sim}{S}}{\partial \underset{\sim}{E}} : \underset{\sim}{h} \leq c_2 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h} \tag{7}$$

Отношение $\xi_c = c_1/c_2$ в определенном смысле показывает насколько сложно решить численно краевую задачу для упругого материала с тензором модулей упругости, определяемым касательным модулем $\frac{\partial \underset{\sim}{S}}{\partial \underset{\sim}{E}}$. Отношение $1/\xi_c$ можно назвать числом обусловленности тензора $\frac{\partial \underset{\sim}{S}}{\partial \underset{\sim}{E}}$

Проверка показывает, что для многих известных потенциалов, задающих гиперупругий материал, положительная определенность выполняется только в определенном диапазоне деформаций.

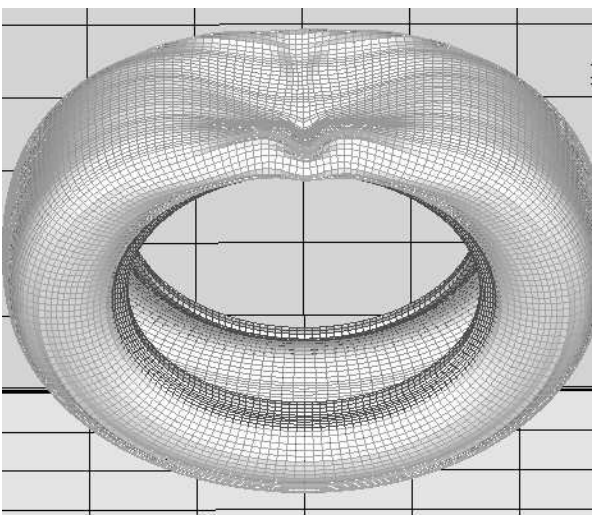


Рис. 1. Деформация шины под воздействием индентора.

Потенциалы Муни и Муни–Ривлина оказались положительно определенными в широком диапазоне деформаций, в котором аппроксимацию можно считать достоверной. Свойством положительной определенности обладает и потенциал Блатца и Ко. Однако со стандартным квадратичным потенциалом ([3]) дело обстоит совсем не так. Квадратичный потенциал не положителен при одноосной деформации сжатия, превышающей

7%. Однако это свойство стандартного потенциала не является крупным минусом, поскольку он предназначен для описания только малых деформаций. Основная проблема состоит в отсутствии положительности у объемных потенциалов. Например, увеличение объема всего на 2% ведет к отсутствию положительной определенности соответствующего касательного модуля, что в свою очередь приводит часто к невозможности решить систему уравнений, к которой приводит МКЭ.

Успешное разрешение описанных проблем позволило разработать программный комплекс, которое надежно моделирует процессы сильного деформирования шин и позволяет вычислить важные для проектировщиков параметры НДС в резинокорде.

Пример моделирования процесса такого типа, именно проникновения индентора в шину пассажирского автомобиля показан на рис 1.

Литература

1. *Клюшников В.Д.* Математическая теория пластичности. Изд-во Моск. ун-та, М., 1979.
2. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. Изд-во МГУ, Москва, 1999. 2-е издание.
3. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости. Машиностроение, Л., 1986.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Гос. изд.техн.-теор. лит-ры, М.-Л., 1948.
5. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. Наука, М., 1980.
6. *Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Фан, Ташкент, 1988.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ПРИМЕНИИ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

А. Абдусаттаров, М. М. Расулмухамедов

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
Ташкент, Узбекистан

icenter@tashiit.uz

Функционирование большинства конструкций происходит на фоне выхода материалов в пластическую область в наиболее напряженных участках, что при действии переменных нагрузок приводит к возникновению ряда дополнительных эффектов, таких, как эффект Баушингера, возникновение вторичных пластических деформаций, изменение диаграмм деформирования от цикла к циклу, проявления свойств циклического упрочнения-разупрочнения и анизотропии, деформационное старение, накопление повреждений и распространение трещин, приводящих к разрушению.

Для анализа упругопластического деформирования несущих элементов конструкций при переменных нагружениях и оценки влияния накопления повреждений используются обобщенный принцип Мазинга и обобщенная диаграмма деформирования Гусенкова-Шнейдеровича.

Разработанный модифицированный программный комплекс обеспечивает автоматизацию процесса исследования напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций на основе метода конечных элементов и метода упругих решений Ильюшина –Москвитина.

В процессе создания данной системы основное внимание уделялось следующим принципам: 1) принцип системного подхода; 2) учет перспективы развития технических средств вычислительной техники; 3) принцип оптимального сочетания возможностей пользователей-проектировщиков и средств автоматизации; 4) принцип обеспечения гибкости, устойчивости и надежности эксплуатации; 5) принцип создания алгоритмической системы.

По характеру выполняемых функций управляющие программы осуществляют две группы операций: I) логические операции, связанные с вводом и анализом оперативной информации, в которой формализована содержательная постановка задачи, и постановка краевой задачи переменной пластичности; 2) операции вычислительного характера, связанные с численным решением краевых или оптимизационных задач, реализацией

алгоритмов расчета на компьютере и выполнением расчетов конкретных классов конструкций пространственной компоновки на НДС.

В качества примера применения программного комплекса анализируется НДС консольного прямоугольного параллелепипеда.

Задача решается методом конечных элементов, расчленение области выполняется с использованием изопараметрических конечных элементов в форме шестигранника с восьми узлами в вершинах. Характеристики параметров дискретизации и системы линейных алгебраических уравнений определяются следующими значениями: количество конечных элементов-1000, количество узлов-1331, порядок системы-3993, половина ширины ленты-402, количество делений по осям-11,11,11.

Исследована кинетика изменения полей перемещений и напряжений параллелепипеда в зависимости от числа циклов нагружений для различных конструкционных материалов (В-96, Д-16Т, Ст.ТС). Приведены максимальные значения расчетных величин для параллелепипеда соответственно по обобщенному принципу Мазинга и обобщенной диаграммы деформирования Гусенкова-Шнейдеровича.

Заметим, что разница между результатами, полученными по двум теориям небольшая (порядка 10%), что подтверждается экспериментально. С ростом числа циклов нагружений зона пластичности уменьшается для циклически упрочняющихся материалов.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТАЛИ 45 НА ВИНТОВЫХ ТРАЕКТОРИЯХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ

В. И. Гультяев

Тверской государственный технический университет
Тверь, Россия

В статье представлены результаты базовых испытаний стали по многозвенным пространственным винтовым траекториям деформирования.

Представлены результаты экспериментального исследования напряжённо-деформированного состояния трубчатых образцов при растяжении, кручении с внутренним давлением в пространстве деформаций по винтовой траектории. Образец имел толщину стенки h = 1 мм, радиус срединной поверхности R = 15,5 мм, длину рабочей части l = 110 мм. Материал образцов в достаточной степени начально изотропен. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона μ = 0,3; $\sigma_т$ = 270 МПа. При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости (ε_0= 0). Программа испытаний реализовывалась в векторном пространстве деформаций. Соответствующий ей отклик реализовывался в плоскости векторного пространства девиатора напряжений. Экспериментальные исследования проводились на винтовых пространственных траекториях постоянной кривизны и кручения, которые были реализованы в трехмерном девиаторном пространстве деформаций на цилиндрических стальных тонкостенных оболочках в состоянии поставки при плоском напряженном состоянии.

В экспериментальных исследованиях были реализованы несколько типов винтовых траекторий с центром кривизны винтовой плоскости $Э_1$-$Э_3$, совпадающей с началом координат.На первом этапе образец закручивался до значения $Э_3$=0,5%. Затем производился излом на 90˚ и реализовывался один виток окружности в плоскости $Э_1$-$Э_3$с постоянным радиусом 0,5% относительно начала координат. Далее было реализовано три с половиной витка при увеличивающемся значении $Э_2$. Шаг винта в направлении $Э_2$ составил 0,25%. Также были выполнены экспериментальные исследования с шагом винта 0,5; 0,75; 1; 1,25%.

Исследовались скалярные и векторные свойства материалов.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ НАКОПЛЕНИИ ПОВРЕЖДЕНИЙ

И. М. Дунаев [1], ***В. И. Дунаев*** [2]

[1] ***Кубанский государственный технологический университет***
[2] ***Кубанский государственный университет***
Краснодар, Россия

Предложена [1, 2] статистическая теория прочности кристаллов и поликристаллических тел при накоплении повреждений. Физическая основа статистической теории состоит в предположении, что функции распределения вероятностей времен прочности твердых тел под действием внешних сил определены процессом накопления повреждений на каждом уровне структурной организации материала: микроуровень (кристаллы и кристаллиты – зерна), макроуровень (макрочастица, твердое тело). Возникновение, накопление и развитие повреждений различных типов (вакансий, дислокаций, микротрещин) на всех уровнях происходят в результате накопления на наноуровне необратимо разрывающихся, перемещающихся, “скользящих” связей (атомных, молекулярных), обеспечивающих сцепление в материале. В процессе разрыва (перемещения) связей, атомы преодолевают некоторый энергетический барьер. В соответствии со статистической теорией разрыва [3] или перемещения [4] связей, величина энергетического барьера уменьшается в зависимости от средней удельной внутренней энергии деформации или ее эффективной части. В макрочастице твердого тела акты разрыва и восстановления связей происходит одновременно. В отсутствие действия внешних сил вероятности разрыва (перемещения) связей в единицу времени одинаковы, общее число эффективных связей остается неизменным и не происходит процесса накопления повреждений. При действии внешних сил вероятность разрыва (перемещения) связей в единицу времени будет больше, чем вероятность их восстановления и происходит процесс их накопления. Исходя из этого, вычислены плотность распределения и функция распределения вероятностей времен необратимого разрыва (перемещения) связей. Поскольку микроструктура материала содержит дефекты и неоднородности удельная внутренняя энергия деформации неравномерно распределена по связям. Начало и развитие процессов разрушения во времени значительно локализовано и определяется функциями распределения вероятностей минимальных времен прочности на каждом уровне. Используя вышеизложенные предположения и предложенную, в отличие от классической, модель “наислабейшего звена” с переменным числом звеньев (дефектов) эти функции вычислены в виде распределения Вейбулла, причем параметры распределения на каждом уровне вычислены теоретически. Ис-

пользуя полученные функции распределения, вычислены математическое ожидание, дисперсия, масштабный фактор времен длительной прочности твердого тела на различных уровнях. В частности, для случая статической усталости материалов в хрупком состоянии получена предельная кривая в пространстве главных напряжений в виде удельной энергии изотропного термоупругого тела в зависимости от физико-механических параметров, температуры и математического ожидания времен прочности. Аналогично, получена кривая текучести Мизеса для материалов, пластическое течение которых не зависит от гидростатического давления. Отметим также, что предложенная теория прочности удовлетворяет условиям общей теории накопления повреждений А.А. Ильюшина сформулированной на основе постулатов механики деформируемого твердого тела [5].

Литература

1. *Dunaev I.M., Dunaev V.I.* Energy criterion of material strength at damage accumulation // Proc.Int.Conf.Fatigue Damage on Structural Materials VI. MA USA, 2006, Elsevier, p.53.
2. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Критерий прочности материалов, учитывающий накопление повреждений // Металловедение и термическая обработка металлов. М.: 2002, №2, с.26–27.
3. *Weiner J.H.* Statistical Mechanics of Elasticity. NY, 1983, 510 p.
4. *Фридель Ж.* Дислокации. М.: Из.-во “Мир”, 1967, 643 с.
5. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Механика твердого тела. М.: 1967, №3, с.65–71

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

А. М. Каримов

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
Ташкеннт, Узбекистан

В работе методом длинноволнового приближения [1] решается задача о распространении нестационарных волн упругом однонаправленном волокнистом полупространстве периодической структуры под действием вектора перемещений, который является однородной функцией степени $n + 1$.

Полученное аналитическое решение поставленной задачи дает точное представление о поле перемещений для больших расстояний и для достаточно удаленных моментов времени [6, 7].

Литература

1. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М. Изд-во МГУ. 1984.
2. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1991.
3. *Мольков В.А., Победря Б.Е.* Эффективные модули упругости однонаправленного волокнистого композита // ДАН СССР, 1984, 275, №3.
4. *Willis J.R.* Self-similar problems in elastodynamics // Phil. Trans. Royal. Soc. London. Ser A, 1973, 274, №1240, p.435–491.
5. *Каримов А.М.* Задача Лэмба для волокнистого композита периодической структуры. Узбекский журнал проблемы механики, №5, 2003 г.
6. *Ильюшина Е.А.* Вариант моментной теории упругости для одномерной сплошной среды неоднородной периодической структуры. Прикладная математика и механика. 1972. 36. №6. С.1086–1093.
7. *Каримов А.М.* Решение первой начально-краевой задачи теории упругости для волокнистого композита периодической структуры. Материалы международной конференции “Проблемы механики”, Самарканд, 2007.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ГОРНОГО ПЛАСТА В ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЕ

А. Б. Киселев, П. П. Захаров

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия

Данная работа посвящена численному моделированию в двумерной плоской постановке нефтегазонасыщенной среды в призабойной зоне при внезапном снятии нагрузки в скважине.

В качестве модели, описывающей нефтеносный пласт, используется модель повреждаемой термоупруговязкопластической среды с двумя скалярными параметрами повреженности . Первый параметр ω - первый инвариант тензора поврежденности ω_{ij}, который интерпретируется как объемное содержание микропор в материале, заполненных хидкостью и/или газом. Второй параметр α — второй инвариант девиатора тензора поврежденности, который описывает сдвиговое макроразрушение материала.

В качестве критерия макроразрушения материала (зарождения и распространения трещин) используется энтропийный критерий предельноый удельной диссипации, а для явного выделения берегов макроскопического нарушения сплошности материала применяется алгоритм локальной перестройки лагранжевой расчетной – разделение узлов. На берегах разрыва реализуется граничные условия свободной от напряжений поверхности, либо поверхности контакта сред.

Для определения направления распространения трещины исползуется аналог критерия Давиденкова–Фридамана.

Для расчета начального напряженно-деформированного состояния сжатого материала в прискважинной области , нагруженной по внутренней границе радиуса a постоянным давлением p_a, а на бесконечности — разными горными давлениями в двух ортогональных направлениях x и y используются аналитические решение в упругом прилижении в полярной системе координат или решение упруго-пластической задачи Галина.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00144.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В. Л. Колмогоров, В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак

Екатеринбург, Россия

Вариационный подход к решению краевых задач деформирования является эффективным средством расчета напряженно деформированного состояния [1, 2]. Основной проблемой при этом является выбор виртуальных полей, удовлетворяющих соответствующим уравнениям и граничным условиям. Использование граничных интегральных уравнений для построения виртуальных полей при решении задач упругопластического деформирования вариационными методами дает возможность разработать универсальные алгоритмы расчета, не зависящие от геометрии деформируемой среды и свойств материала. Такой подход сформулирован как граничный вариационный метод [3, 4]. В нем определяющие класс виртуальных состояний линейные дифференциальные уравнения и граничные условия краевой задачи удовлетворяются с использованием граничных интегральных уравнений, а нелинейные определяющие уравнения и условия трения – с помощью вариационного принципа виртуальных скоростей и напряжений [1]. В выражения для универсальных полей входят интегралы по граничным элементам от известных функций влияния. Использование при расчетах численного интегрирования делает процедуру трудоемкой и вносит дополнительную вычислительную погрешность. В связи с этим были использованы аналитические формулы для точного вычисления интегралов, являющиеся основой модифицированного подхода к применению метода граничных элемента [3, 4]. В результате виртуальные поля принимают вид конечных аналитических выражений, зависящих от значений напряжений и перемещений на граничных элементах.

Применение универсальных виртуальных полей в методе разделения переменных, основанном на вариационной постановке [1] также расширяет возможности применения этого метода и дает возможность использовать предложенный подход к решению нестационарных задач. Здесь значения поверхностных напряжений и перемещений являются искомыми функциями времени и определяются из решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается в результате решения вариационной части метода разделения переменных.

На основе описанного подхода были решены ряд плоских задач упругого и упругопластического деформирования, в том числе, для областей с дефектами различной геометрии. Результаты решения показали высокую

точность расчетов. При этом процедура решения существенно упростилась по сравнению с классическими вариационными методами, поскольку она не требует специальной адаптации к каждой конкретной задаче.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00121-а.

Литература

1. *Колмогоров В.Л.* Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2001. 836 с.
2. *Колмогоров В.Л., Джонсон У., Рид С.Р., Корбетт Г.Г.* Ударное нагружение и разрушение твердых тел: обзор и новая теория. г.Екатеринбург: УрО РАН, 2006. 321 с.
3. *Федотов В.П., Спевак Л.Ф.* Решение связных диффузионно-деформационных задач на основе алгоритмов параллельного действия. Екатеринбург: УрО РАН. 2007. 172 с.
4. *Федотов В.П., Спевак Л.Ф.* Модифицированный метод граничных элементов в задачах механики, теплопроводности и диффузии. Екатеринбург: УрО РАН. 2009. 164 с.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОТЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОКРУЖАЮЩИМИ СРЕДАМИ

Ш. Маматкулов, М. Маматкулова, Н. Т. Маматова

Ташкент, Узбекистан

В докладе будут освещены следующие вопросы:

- аналитические решения по распространению упругих и упругопластических волн в стержневых конструкциях, взаимодействующих с окружающей средой по закону сухого трения Кулона;
- квазистатические задачи о распространении волн в упругопластических стержневых конструкциях с внешним сухим трением;
- осесимметричные волны кручения в грунтовых и упругопластических средах и их решения в автомодельных переменных;
- некоторые задачи о распространении волн в грунтовых средах Х.А.Рахматулина с учетом конечных деформаций;
- определение областей гиперболичности систем квазилинейных дифференциальных уравнений;
- интегралы уравнений характеристик и условий вдоль них;
- численное решение обратной задачи о динамическом сжимающем ударном нагружении полубесконечного стержня, находящегося в упругой среде и взаимодействующей с ней по закону сухого трения Кулона;
- задача об отражении волн нагружения от закреплений, отстоящих на определенных участках от торцевого сечения конструкции;
- о применимости результатов исследований в расчетной практике.

РАБОЧИЕ ОРГАНЫ СИМПОЗИУМА

1. ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ СИМПОЗИУМА

В. А. Садовничий (председатель)	академик, вице-президент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, ректор Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, РОССИЯ
И. А. Кийко (заместитель председателя)	доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета, Московский государственный университет, РОССИЯ
Д. Л. Быков (заместитель председателя)	доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ЦНИИМАШ, РОССИЯ
Г. Л. Бровко	доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета, Московский государственный университет, РОССИЯ
Р. А. Васин	доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией НИИ Механики, Московский государственный университет, РОССИЯ
Д. В. Георгиевский	доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета, Московский государственный университет, РОССИЯ
В. Г. Зубчанинов	доктор технических наук, профессор Тверского государственного технического университета, РОССИЯ
А. М. Локощенко	доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора НИИ Механики, Московский государственный университет, РОССИЯ
Е. В. Ломакин	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета, Московский государственный университет, РОССИЯ
А. А. Маркин	доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Тульского государственного университета, РОССИЯ
И. Н. Молодцов	доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета, Московский государственный университет, РОССИЯ

Б. Е. Победря	доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета, Московский государственный университет, РОССИЯ
Н. Н. Смирнов	доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета, Московский государственный университет, РОССИЯ

2. ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ СИМПОЗИУМА

Г. Л. Бровко (председатель)	РОССИЯ
В. С. Бондарь	РОССИЯ
Р. В. Гольдштейн	РОССИЯ
И. Г. Горячева	РОССИЯ
С. С. Григорян	РОССИЯ
А. Дуда	ГЕРМАНИЯ
Д. Д. Ивлев	РОССИЯ
Ж. Кайето	ФРАНЦИЯ
С. Клежа-Цигою	РУМЫНИЯ
Д. М. Климов	РОССИЯ
В. Л. Колмогоров	РОССИЯ
А. А. Лебедев	УКРАИНА
Е. В. Ломакин	РОССИЯ
В. П. Матвеенко	РОССИЯ
Н. Ф. Морозов	РОССИЯ
Ж. А. Можен	ФРАНЦИЯ
В. Мюллер	ГЕРМАНИЯ
Р. И. Нигматулин	РОССИЯ
Я. К. Рыхлевский	ПОЛЬША
П. В. Трусов	РОССИЯ
А. Ф. Улитко	УКРАИНА

3. СЕКРЕТАРИАТ СИМПОЗИУМА

Д. В. Георгиевский (ответственный секретарь)	РОССИЯ
Р. Вилле	ГЕРМАНИЯ
П. Н. Демидович	РОССИЯ
Э. Б. Завойчинская	РОССИЯ
Е. Д. Мартынова	РОССИЯ
А. В. Муравлёв	РОССИЯ
М. У. Никабадзе	РОССИЯ
М. Ю. Рязанцева	РОССИЯ
З. Г. Тунгускова	РОССИЯ

Оглавление

Предисловие 7
Preface 8
К 100-летию со дня рождения А.А.ИЛЬЮШИНА 9
Вступительное слово председателя Оргкомитета ректора Московского университета академика В.А. Садовничего 13

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ **16**

Ильюшина Е.А. Научная биография А.А.Ильюшина по архивным источникам 17
Бровко Г.Л. Подходы к построению определяющих соотношений в механике сплошной среды 30
Быков Д.Л. Использование критериев разрушения в определяющих соотношениях высоконаполненных полимерных материалов 38
Васин Р.А. Теория упругопластических процессов и экспериментальная пластичность 44
Георгиевский Д.В., Вилле Р. Асимптотическое интегрирование в краевых задачах идеальножесткопластического течения в тонком слое 52
Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Моделирование диссипации энергии и адгезионной составляющей силы трения при скольжении шероховатых упругих тел 60
Зубчанинов В.Г. Теория процессов и постулат изотропии А.А. Ильюшина 73
Маркин А.А. Термомеханическая модель равновесного деформирования 80
Нигматулин Р.И. Многофазность и многомасштабность в естествознании и экономике 86
Победря Б.Е. О вычислительной механике нанокомпозитов 88
Maugin G.A. A.A. Ilyushin's works: An appraisal from Paris 92

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА И ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПЛАСТИЧНОСТИ **100**

Аннин Б.Д. Симметрийный анализ уравнений пластического течения Мизеса 101

Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Факторизационные методы в задачах для сплошных сред 106
Баженов В.Г., Баранова М.С., Жегалов Д.В., Павленкова Е.В. Теоретическое и экспериментальное исследование упругопластических процессов деформирования и предельных состояний тел вращения при комбинированных нагружениях кручением-растяжением (сжатием) 113
Белов Н.А., Кадымов В.А. Об одном случае решения краевой задачи о растекании пластического слоя между сближающимися жесткими плитами 117
Богданов Р.И., Богданов М.Р. Термодинамические потенциалы в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ) 120
Бондарь В.С. Термовязкопластичность. Теория и эксперимент 122
Бровко Г.Л., Шуткин А.С. Модели материалов с памятью формы при конечных деформациях 129
Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Шушпанников П.С. К возможности потери сферичности когерентными преципитатами в кристаллах кремния 134
Гудрамович В.С., Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов в задачах упругопластического деформирования пластин с отверстиями 144
Киликовская О.А., Овчинникова Н.В., Пендюрина М.Н. Задача о толстостенной трубе из сжимаемого упруго-пластического материала при совместном действии внутреннего и внешнего давления. . . 148
Корнеев С.А. Вязкоупругопластичность твердых тел при конечных деформациях 152
Король Е.З. Обобщенная постановка задач определения собственных осесимметрических форм цилиндрической оболочки при нагружении осевой силой и давлением и их анализ 158
Кравчук А.С. Метод А.А.Ильюшина для расчета конструкций из материалов с функциональными определяющими соотношениями . . 165
Ломакин Е.В., Мельников А.М. Растяжение пластины с разрезом, пластические свойства которой зависят от вида напряженного состояния 172
Лурье С.А., Белов П.А., Тучкова Н.П. Вариационная формулировка расширенной термодинамики связанных термоупругих процессов с учетом градиентных эффектов 178
Малый В.И., Малый И.В. Неожиданные аналогии между процессами поляризации в иммунных клетках и упругопластическими процессами 183
Матченко Н.М. Об условии пластичности листовых прокатных металлов 187

Мельников Б.Е., Изотов И.Н., Семёнов А.С. Экспериментальное исследование поверхностей равных пластических податливостей . . . 193
Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко Т.Л. Нелинейное деформирование сплавов с памятью формы: экспериментальные данные и определяющие соотношения 198
Молодцов И.Н. Вариант термомеханики упругопластических процессов при сложном нагружении 202
Моссаковский П.А., Васин Р.А., Антонов Ф.К. Развитие метода СН-ЭВМ Ильюшина применительно к краевым задачам динамической прочности 210
Муравлёв А.В. Экспериментальные методики исследования механических свойств термовязкопластических материалов при сложном нагружении и конечных деформациях 216
Нетребко А.В., Нейман В.Л. Методики аттестации и верификации моделей динамической пластичности 221
Никабадзе М.У., Кантор М.М. Термовязкопластичность. Теория и эксперимент 226
Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Этапы развития эндохронной теории неупругости 232
Рязанцева М.Ю. Свободные колебания упругих трехслойных пластин 236
Саркисян С.О. Общая теория тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости со стесненным вращением 241
Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический анализ теории пластин Рейсснера–Миндлина 246
Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Швейкин А.И. Двухуровневая модель для описания эволюции структуры поликристаллических материалов при неупругом деформировании 250
Тунгускова З.Г. Масштабный эффект упругих свойств дисперсно-упрочненных композитов 255
Шоркин В.С., Фроленкова Л.Ю., Азаров А.С. Поверхностная энергия и прочность линейно упругих материалов 259
Goto S., Gratus J., Hale A., Tucker R., Walton T. Covariant electromagnetic constitutive theory for dispersive continua 264
Lucchesi M., Šilhavý M., Zani N. Admissible and equilibrated stress fields for masonry bodies 272
Müller W., Abali B. An analytic solution for the transition from a highly viscous fluid to a rigid solid and its relation to thermodynamic principles 282
Podio-Guidugli P. On Microscopic and Macroscopic Notions of Stress . 289

ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТЬ, РЕОЛОГИЯ, ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ 296

Александров В.М., Костырева Л.А. Продольная трещина в преднапряженном несжимаемом упругом слое с шарнирно опертыми гранями 297
Алиев Г.Г. Об одной механической модели деформирования заполимеризованного пучка из волокон в шейке 302
Амензаде Р.Ю., Мехтиева Г.Ю. Точное решение задачи о пульсирующем течении жидкости в деформируемой трубке конечной длины с учетом ее сужения 305
Астафьев В.И., Федорченко Г.Д. О развитии трещины гидроразрыва пласта 310
Березин А.В. Трещины в разносопротивляющихся дилатирующихся материалах 314
Вайсфельд Н.Д., Попов Г.Я., Реут В.В. Осесимметричные задачи о напряженном состоянии упругого конуса, усеченного по сферической поверхности 318
Вакулюк В.В. О новом типе определяющих соотношений интегрального вида в нелинейной теории вязкоупругости 322
Головин Г.Н. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек за пределами упругости 326
Горбачев В.И. О колебаниях в неоднородном упругом теле 329
Горечин Е.Н., Кутрунов В.Н. Кватернионная формула Стокса и интеграл типа Коши 337
Гринченко В.Т., Мелешко В.В., Якименко Н.С. Высокочастотные осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины . . 341
Дода Л.Н., Натяганов В.Л., Степанов И.В. Наземно-космический мониторинг предвестников и краткосрочный прогноз землетрясений 348
Завойчинская Э.Б. Микро и макромеханика разрушения металлов при сложном напряженном состоянии 353
Звягин А.В., Геворкян А.Г. Метод фиктивных нагрузок в контактных задачах теории упругости на примере задачи движенияжесткого штампа по границе упругой полуплоскости 360
Звягин А.В., Ромашов Г.А. Асимметричное расклинивание среды с образованием отрывных зон 366
Исраилов М.Ш. Связанные задачи сейсмодинамики подземного трубопровода 369
Кийко И.А, Показеев В.В. Колебания и устойчивость вязкоупругой консольно закрепленной полосы 373

Кукуджанов В.Н. Термомикромеханическая связанная модель пластичности, поврежденности и разрушения 379
Леонова Э.А. Представление общего решения уравнений теории упругости через скалярные потенциалы 385
Локощенко А.М. Методы моделирования длительной прочности металлов при стационарном и нестационарном сложных напряженных состояниях 389
Мартынова Е.Д. Определение свойств вязкоупругих материалов из экспериментов на внедрение сферического индентора в вязкоупругий образец 394
Мелешко В.В., Кипнис А.Л. Изгиб клиновидной упругой пластины . 399
Мирсалимов В.М., Заркеш Дж.И. Влияние температурных напряжений на зарождение трещин во фрикционной накладке 405
Муравлева Л.В. Течения вязкопластической среды Бингама–Ильюшина в плоских каналах сложной геометрии 409
Муравлева Л.В., Муравлева Е.А. Нестационарные течения вязкопластической среды Бингама–Ильюшина 413
Носов С.Е. Дифракция на полуплоскости (антиплоская задача) . . . 418
Острик В.И., Улитко А.Ф. Контакт двух упругих клиньев с учетом трения и сцепления 421
Поспелов И.И. Экспериментальное исследование устойчивости и несущей способности подкрепленных панелей при двустороннем сжатии 430
Пшеничнов С.Г. Влияние непрерывной неоднородности материала на волновые процессы в упругих цилиндрических телах 436
Рашидов Т.Р. Актуальные задачи сейсмодинамики подземных сооружений (к 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина) 440
Смирнов Н.Н., Звягин А.В., Малашин А.А. Динамические процессы при разворачивании тросовой системы во время полета КА «Фотон М-3» 448
Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины на деформируемом основании 453
Шешенин С.В. Трехмерное моделирование пневматических шин . . 458

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ **464**

Абдусаттаров А., Расулмухамедов М.М. О применении программного комплекса для расчета пространственных конструкций при переменных нагружениях 465
Гультяев В.И. Экспериментальные исследования процессов деформирования стали 45 на винтовых траекториях постоянной кривизны и кручения 467

Дунаев И.М., Дунаев В.И. Статистическая теория прочности твердых тел при накоплении повреждений 468
Каримов А.М. Нестационарные задачи теории упругости для волокнистого композита периодической структуры 470
Киселев А.Б., Захаров П.П. Численное моделирование динамики деформирования и разрушения горного пласта в призабойной зоне . 471
Колмогоров В.Л., Федотов В.П., Спевак Л.Ф. Применение модифицированного метода граничных элементов и вариационных принципов для решения задач упругопластического деформирования 472
Маматкулов Ш., Маматкулова М., Маматова Н.Т. Распространение волн в линейных и нелинейных протяженных конструкциях, взаимодействующих с окружающими средами 474

Рабочие органы симпозиума **475**

УПРУГОСТЬ И НЕУПРУГОСТЬ. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20–21 января 2011 года

М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. — 483 стр.

Издательство Московского университета
Подписано к печати Формат 60x90 1/16. Печ. л. .
Зак. № . Тираж 300 экз.
Отпечатано в типографии