ISSN 1997-3217

Труды
КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 5, 2012

transactions.krc.karelia.ru

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. Выпуск 3

СОДЕРЖАНИЕ

Подписной индекс в каталоге «Роспечать» **57397**

ТРУДЫ КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН. № 5, 2012

Карельский научный центр
Российской академии наук

ТРУДЫ

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Выпуск 3

Петрозаводск
2012

Научный журнал
Труды Карельского научного центра
Российской академии наук
№ 5, 2012
Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
вып. 3

Scientific Journal
Proceedings of the Karelian Research Centre
of the Russian Academy of Sciences
No 5, 2012
MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES Series
Vol. 3

ISSN 1997-3217

Зав. редакцией Н. В. Михайлова
Адрес редакции: 185910 Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
тел. (8142)780109; факс (8142)769600
E-mail: trudy@krc.karelia.ru
Электронная полнотекстовая версия: http://transactions.krc.karelia.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный выпуск Трудов Карельского научного центра РАН содержит избранные статьи участников Восьмой Международной Петрозаводской конференции «Вероятностные методы в дискретной математике», а также некоторые статьи участников XIII Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике. Эти научные мероприятия были проведены в Карельском научном центре летом 2012 г., и информация о них приводится ниже в разделе «Хроника». Содержание публикуемых статей соответствует тематике названных конференций и охватывает теоретические и прикладные вопросы дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики, теории массового обслуживания, теории игр, теории случайных графов и математического моделирования. Решение опубликовать в этом выпуске такие статьи, по мнению редакционной коллегии серии, позволило расширить круг авторов и обсуждаемых проблем, что будет способствовать известности нашего журнала.

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 4–7

УДК 330

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИНАНСОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ В УСЛОВИЯХ РИСКОВ

А. И. Бородин, И. С. Кулакова

Национальный исследовательский университет Высшая Школа экономики

В статье предложена математическая модель оценки вероятности банкротства фирмы в условиях неопределенности и заданных критических уровней его финансового состояния. Объектом исследования является крупное логистическое предприятие, работающее в условиях рисков международного рынка.

Ключевые слова: финансовая устойчивость, риски, предприятие, математическое моделирование, финансовое состояние.

A. I. Borodin, I. S. Kulakova. MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESSES OF FINANCIAL STABILITY OF AN ENTERPRISE EXPOSED TO RISKS

The paper offers a mathematical model for estimating the probability of bankruptcy of a firm in the situation of uncertainty and under specified critical levels of its financial condition. The study object is a major logistics company operating in the context of international market risks.

Key words: financial stability, risks, enterprise, mathematical modeling, financial condition.

Введение

Создание, изучение и адаптация гибких математических моделей, анализирующих и совершенствующих рыночные тенденции и динамику финансовых потоков, всегда являлось важным аспектом теории экономического прогнозирования. Особенно актуальным данное научное направление становится в посткризисный период. В условиях восстановления рыночного баланса чрезвычайно важным является своевременное распознавание и минимизация, а зачастую и полная ликвидация негативных финансовых тенденций как в рамках отдельного предприятия, так и целой отрасли.

Европейская и американская теоретико-методологические системы моделирования вероятности банкротства и финансовой устойчивости предприятия строятся на базе исследований Альтмана, Ольсона и Змиевски, которые и до сегодняшнего дня остаются одними из основополагающих в анализе финансовой устойчивости предприятий [4–6]. Среди российских авторов следует отметить работы А. А. Новоселова [1], В. В. Калашникова, Д. Константинидиса [2] и др. Особое внимание в исследованиях этих ученых уделяется таким методам анализа финансовых рисков как: неравенство Лундберга, метод Крамера, модели риска Спарре Андерсена, теория Винера-Хопфа, эвристическая аппроксимация де Вильдера, процесс Пуассона.

Демонстрация моделей по определению вероятности наступления банкротства предприятия, как правило, проводится на примере деятельности страховых компаний как хозяйственной единицы, где процесс возникновения коллективного риска как показателя финансовой устойчивости может быть наглядно показан и охарактеризован [2]. В то же время недостатком методов, задействованных при анализе финансовых и статистических показателей деятельности страховых компаний, является то, что они не охватывают макроэкономические риски, воздействующие на финансовую стабильность компаний, ведущих деятельность на международной арене.

Основные результаты

Целью статьи является рассмотрение проблемы финансовой устойчивости предприятия вследствие нарушения его стабильной работы в условиях неопределенности, а также нерационального использования финансовых ресурсов за определенный промежуток времени. Данные анализируются посредством использования схемы изъятия ресурса из ресурсного контейнера с линейным трендом и нормальными к нему возмущениями. Преимущество данной модели заключается в том, что она позволяет провести как аналитическое исследование, так и выполнить моделирующие эксперименты. Исследуемое предприятие является крупным логистическим провайдером на международном рынке, одним из основных направлений деятельности которого является организация процесса доставки импортируемой продукции в страны Восточной Европы. Данный вид деятельности характерен тем, что зачастую для проведения одной сделки необходимо согласовать требования и возможности трех и более стран (страны отправителя, страны получателя, транзитных стран). Использование различных мировых валют, косвенная зависимость от стабильности и надежности экономик других стран мира, дополнительные риски, возникающие при использовании различных транспортных цепочек и сообщений (например, несогласованность законодательства, «фактор доверия» к агентам других стран, криминальные элементы), создают риски возникновения непредвиденных расходов. К сожалению, эти, равно как и другие случаи, не всегда могут быть покрыты страховыми выплатами, но существенно влияют на объем выручки компаний, работающих в логистической отрасли. В условиях кризиса эти и другие риски приобретают особенную актуальность и оказывают прямое влияние на снижение финансовой стабильности предприятий. Стандартные показатели и модели анализа стабильности предприятия, как правило, помимо внутренних отчетных показателей предприятия, учитывают локальные особенности рынка (сезонные колебания, политическая и экономическая стабильность в стране, имидж и политика компании на рынке). В данном случае анализу подлежат результаты деятельности предприятия на международной арене в докризисный и кризисный периоды. Анализ данных за период 2007–2011 гг. выявил колебания доходности предприятия по причине изменения структуры и величин финансовых потоков и, как следствие, возникновение опасности банкротства предприятия. Необходимым является создание модели определения вероятности достижения предприятием нулевого уровня доходности, используя имеющийся массив данных хозяйственной деятельности и с учетом выявленных рисков.

Математическая модель: линейный функционал

Решение многих практических задач приводит к необходимости изучения вероятностных характеристик времени достижения некоторого заданного уровня процессом на выходе инерционного детектора накопительного типа [1–3]. Рассмотрим аддитивную смесь $\xi(t)$ детерминированного положительного сигнала s(t) и шума x(t):

$$\xi(t) = s(t) + x(t). \tag{1}$$

Если на вход указанного линейного детектора поступает такая аддитивная смесь, то результат детектирования имеет случайный характер, на его выходе формируется величина

$$\eta(t) = \int_0^t [s(t') + x(t')]dt'. \tag{2}$$

Рассмотрим такие схемы, критерием срабатывания у которых служит достижение величиной $\eta(t)$ некоторого заданного уровня L. Поскольку $\eta(t)$ – случайный процесс, то время достижения уровня L также случайно. Для положительно-определенных функций s(t) и больших t этот момент времени будет определяться уровнем достижения $\eta(\tau) =$ L , т. е. тем моментом времени T, для которого будет выполняться случайное событие $\{$A:$\eta(\tau) = L\}$. Для моментов достижения выполняется

$$p(\tau) = \langle \delta(\tau - \eta^{-}1(L)) \rangle, \tag{3}$$

где $\delta(.)$ – дельта-функция Дирака, а $\eta^{-}1(L)$ – функция, обратная к $\eta(\tau)$, $p(\tau)$ – плотность распределения времени достижения τ. Угловыми скобками $\langle\ .\ \rangle$ здесь и далее будет обозначаться операция нахождения безусловного математического ожидания относительно множества реализаций случайного процесса x(t), т. е. функциональный интеграл в пространстве функций x(t). Из свойств δ-функций следует, что

$$p(\tau) = \langle \frac{\partial \eta(\tau)}{\partial \tau} \delta(\eta(\tau) - L) \rangle. \qquad (4)$$

Используя Фурье-представление для δ-функции, получим

$$p(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^{-}1 \exp(i\lambda L) \frac{\partial}{\partial \tau} \langle \exp(-i\lambda \eta(\tau)) \rangle d\lambda. \qquad (5)$$

Далее будем предполагать, что x(t) – нормальный марковский процесс (НМП). Рассмотрим характеристическую функцию $Q_\tau(\lambda) =< \exp(-i\lambda\eta(\tau)) >$. Поскольку $x(t)$ – нормальный процесс, то свойством нормальности обладает и процесс $\eta(t)$. Для него имеем

$$\langle \eta(\tau) \rangle = \int_0^\tau s(t) dt.$$

$$D_\tau = D(\tau) = \langle \eta^2(t) \rangle - \langle \eta(t) \rangle^2 = \iint_0^\tau \langle x(t_1) x(t_2) \rangle dt_1 dt_2. \qquad (6)$$

В силу нормальности случайной величины $\eta(t) = \eta(\tau)$ приведенных моментов достаточно для нахождения характеристической функции $Q_\tau(\chi)$, что дает $Q_\tau(\chi) = \exp(-i\chi < \eta(t) > -\lambda^2 D_\tau/2)$. Поэтому

$$p(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda\tau) Q_\tau(\lambda) d\lambda, \qquad (7)$$

откуда

$$p(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^{-}1 \exp(i\lambda L) \frac{\partial}{\partial \tau} \exp(-i\lambda \langle \eta_\tau \rangle - \frac{1}{2}\lambda^2 D_\tau) d\lambda. \qquad (8)$$

Дифференцирование по τ последующее интегрирование по χ приводит к выражению общего типа

$$p(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\tau}} [D_\tau \frac{L - \langle \eta_\tau \rangle}{D_\tau} + \langle \eta_\tau \rangle] \exp\{-\frac{(L - \langle \eta_\tau \rangle)^2}{2 D_\tau}\}. \qquad (9)$$

Для получения выражений, пригодных для последующего численного моделирования, необходимо задаться конкретным видом случайного НМП-процесса x(τ) вместе с соответствующими ему функциями $< \eta(t) >$ и D_τ. Ниже будем рассматривать хорошо известный винеровский процесс, для использования которого достаточно задать интенсивность σ. В статье будем использовать регулярный процесс $s(t)$ линейного вида с постоянной c, поэтому $<\eta(t) >= c\tau$, $<\eta(t) >= c$. Далее, для винеровского процесса имеем $D_\tau = \sigma\tau/2$, $D_\tau = \sigma/2$. В приведенных предположениях, учитывая нормировку для искомой плотности распределения P(τ) времени достижения τ, имеем

$$p(\tau) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\tau\tau_c}} \exp\{-\gamma \frac{(\tau - \tau_c)^2}{\tau\tau_c}\}, \quad \gamma = \frac{c}{\sigma} L, \tau_c = \frac{L}{c}. \qquad (10)$$

Численное моделирование процесса финансовой устойчивости

Для модельного примера были выбраны следующие параметры: временная длительность расчета $\tau \leqslant 365$ и $\tau \geqslant 400$ (дней), временной шаг $\delta\tau = 1$, уровень разорения L1 = 365 и L2 = 400, постоянная регулярной компоненты c = 1, интенсивность случайной компоненты σ = 0,1. В модели система «забывает» о своем состоянии к следующему временному шагу. Временной ряд статистического моделирования составил M = 10000. Такая величина временного ряда M дает возможность на основании результатов статистического моделирования делать заключения о значениях P искомых вероятностей вплоть до величин P = 0,001 или P = 0,999.

В нашем случае функция описывается выражением (10), отличающимся от нормального. Существенным здесь оказывается тот факт, что благодаря наличию случайной компоненты в изучаемом явлении, эмпирические распределения, будучи сосредоточены около критических уровней L1 = 365 и L2 = 400 , содержат возможность разорения как ранее этих временных уровней, так и позже.

Заключение

Анализ приведенных кумулят показывает, что для выбранных параметров моделирования и критических уровней финансового состояния предприятия имеют место заметные вероятности достичь заданный уровень раньше, чем в заданные моменты времени $\tau = 365$ и $\tau = 400$ (дней). Так, для обеспечения вероятности избежать финансового банкротства $P = 0,997$ (банкротство допускается в 3 случаях из 1000) в выбранных условиях требуется $\tau = 370$ и $\tau = 407$ (дней) соответственно. На практике это может привести к потере экономической эффективности в работе предприятия. Например, при прочих равных условиях, предприятие будет склонно выбирать менее рискованную тактику своего поведения (меньшие объемы производства, большие сроки поставки, игнорирование многосторонних соглашений и пр.) по сравнению с условиями определенности. Соответственно актуальным становится вопрос сокращения неопределенности в работе предприятия и экономической эффективности затрат на это сокращение.

Математическая модель, предложенная в статье, может быть использована для решения различных прикладных задач повышения эффективности работы предприятий в условиях неопределенности и риска. Данные расчета и их сравнение с аналитической моделью свидетельствуют о хорошем их соответствии. Достаточно большой объем статистической выборки, используемый в настоящей работе, дает основания предполагать возможность использования предложенного подхода и в тех случаях, когда не оказывается возможным получить явное аналитическое выражение для распределения вероятностей $P(\tau)$.

Литература

1. *Новоселов А. А.* Математическое моделирование финансовых рисков // Теория измерения. Российская академия наук, Сибирское отделение. Институт вычислительного моделирования. Новосибирск, 2001. 99 с.

2. *Калашников В. В.* Вероятность разорения / В. В. Калашников, Д. Константинидис // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. № 4. С. 1050–1100.

3. *Зорин В. А., Мухин В. И.* Элементы теории процессов риска. Н. Новгород: ННГУ, 2003. 25 с.

4. *Altman E. I.* Financial Ratios Discrimintal Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy // Journal of Fmance. 1968. P. 589–609.

5. *Ohlson J. A.* Finantial Ratios and the Probabilistic Prediction of Bankruptcy // Journal of Accounting Research. 1980. P. 109–131.

6. *Mark E. Zmijewski.* Methodology Issues Related to the Estimation of Financial Distress Prediction models // Journal of Accounting Research, Supplement. 1984. P. 59–82.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Бородин Александр Иванович
д. экон. н., профессор кафедры «экономика и финансы фирмы» Национального исследовательского университета Высшая Школа Экономики
ул. Мясницкая д. 20, Москва, Россия, 101000
эл. почта: aib-2004@yandex.ru
тел.: 8(495)621 91 92

Кулакова Инна Сергеевна
аспирантка кафедры «экономика и финансы фирмы» Национального исследовательского университета Высшая Школа Экономики
ул. Мясницкая д. 20, Москва, Россия, 101000
эл. почта: saharapeace@rambler.ru
тел.: 8(495)621 91 92

Borodin, Alexandr
High school of Economy
20 Myasnitskaya St., 101000 Moscow, Russia
e-mail: aib-2004@yandex.ru
tel.: 8(495)621 91 92

Kulakova, Inna
High school of Economy
20 Myasnitskaya St., 101000 Moscow, Russia
e-mail: saharapeace@rambler.ru
tel.: 8(495)621 91 92

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 8–17

УДК 519.872.1

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ОЦЕНОК ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. В. Бородина, Е. В. Морозов

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
Петрозаводский государственный университет

В статье рассматриваются методы оценивания эффективной пропускной способности системы с постоянной скоростью обслуживания. Проводится сравнение оценок эффективной пропускной способности, построенных с помощью метода группового среднего и регенеративного метода. Регенеративный подход предлагается в качестве альтернативы традиционному методу группового среднего, который не учитывает структуру входного потока. С помощью имитационного моделирования проводится анализ свойств обеих оценок, а также их сравнение с известными аналитическими результатами и с оценкой по методу Монте-Карло. Численные эксперименты показывают определенные преимущества регенеративной оценки над оценкой по методу группового среднего.

Ключевые слова: система с постоянной скоростью обслуживания, эффективная пропускная способность, теория больших уклонений, регенеративная оценка, метод группового среднего.

A. V. Borodina, E. V. Morozov. COMPARISON OF TWO QUEUING SYSTEM EFFECTIVE BANDWIDTH ESTIMATES

This article discusses methods for estimating effective bandwidth in a system with constant service rate. The effective bandwidth estimates constructed using the group average method and the regenerative method are compared. The regenerative approach is suggested as an alternative to the traditional batch means method, which does not take into account the structure of the input stream. Simulation helps analyze the properties of both estimates and compare the experimental values with known theoretical results and Monte-Carlo evaluation. These experiments confirm the conservatism of regenerative estimates, and good consistency with known theoretical values.

Key words: system with constant service rate, effective bandwidth, large deviation theory, regenerative estimator, batch means method.

Введение

Быстрое развитие телекоммуникационных технологий неразрывно связано с проблемой улучшения технической оснащенности и производительности устройств связи, которые гарантировали бы требуемое качество сетевого обслуживания (QoS гарантии). Для изучения современных IP-ориентированных мультисервисных сетей с высокоагрегированным трафиком приходится привлекать методы теории очередей, теории больших уклонений, ускоренные методы моделирования редких событий. В зависимости от назначения, сетевые устройства могут предъявлять различные требования к определенному уровню качества обслуживания. Например, передача данных требует определенного уровня надежности, связанного с вероятностью перегрузки и потери данных; мультимедийные приложения предъявляют повышенные требования к пропускной способности канала, а для VoIP-сетей более важны показатели задержки и джиттера (т. е. вариации задержки передачи пакета в сети). Другим примером является управление энергопотреблением мобильных устройств, которое связано с оцениванием вероятности превышения нагрузкой буфера передатчика. В беспроводных каналах связи с затуханием не только коэффициент затухания и интерференция могут существенно снижать пропускную способность канала, но также параметры средней задержки и вероятность переполнения буфера, см. [2]. Кроме того, на уровень надежности критически влияет *эффективная пропускная способность* (ЭПС) устройства, которая гарантирует заданную (малую) вероятность превышения стационарной нагрузкой заданного уровня (или объема буфера).

В данной статье с помощью имитационного моделирования сравниваются оценки ЭПС обслуживающего устройства, принимающего регенеративный входной поток. Рассматривается оценка на основе метода группового среднего и оценка, учитывающая регенеративную структуру входного процесса.

Эффективная пропускная способность

Одним из важнейших показателей качества обслуживания является вероятность превышения $P_b := \mathsf{P}(W > b)$ стационарным процессом нагрузки W (т. е. незавершенной работы) некоторого достаточно большого уровня b. Такая вероятность переполнения тесно связана с ЭПС. Если мощность обслуживающего устройства C (величина работы, которую прибор может сделать за единицу времени) можно выбирать, то естественная задача QoS состоит в выборе такого значения C, которое гарантирует, что вероятность P_b не превысит заданной (малой) величины Γ, т. е.

$$P_b := \mathsf{P}(W > b) \leqslant \Gamma. \tag{1}$$

Упомянутая задача называется *выбором ЭПС*. Пусть $W(n)$ есть незавершенная работа в момент (дискретного времени) n, v_i – величина работы, поступившая в интервале $(i-1,\, i]$, тогда $V(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i$ есть суммарная работа, поступившая в интервале $(0,\, n]$. Имеет место рекурсия Линдли

$$W(n+1) = [W(n) + v_n - C]^+,\ n = 0, 1, \ldots. \tag{2}$$

Если буфер для ожидания неограничен, то предполагается также выполненным следующее условие стационарности

$$\mathsf{E}X = \mathsf{E}v - C := \lambda - C < 0. \tag{3}$$

(Здесь и далее типичный элемент последовательности н. о. р. с. в. обозначается без соответствующего индекса.) Процесс W для широкого класса систем обслуживания удовлетворяет *принципу больших уклонений* [4, 6], именно:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} \ln \mathsf{P}(W > b) = -\theta^*, \tag{4}$$

где $\theta^* > 0$ — некоторый (искомый) параметр. Это влечет экспоненциальную аппроксимацию вероятности большого уклонения стационарного процесса нагрузки, т. е.

$$\mathsf{P}(W > b) = e^{-\theta^* b + o(b)} \asymp e^{-\theta^* b}, \tag{5}$$

($\asymp$ означает логарифмическую асимптотику). Соотношения (1), (5) дают такое значение параметра θ^*:

$$\theta^* = -\ln \Gamma / b > 0. \tag{6}$$

Далее предполагается, что существует конечный (для всех θ в некоторой положительной окрестности $(0,\, \theta_0)$) предел

$$\Lambda_V(n) := \frac{1}{n} \ln \mathsf{E} e^{\theta V(n)} \to \Lambda_V(\theta),\ \ n \to \infty, \tag{7}$$

который называется (нормированной) предельной логарифмической производящей функцией моментов входного процесса. Из теории больших уклонений [4] следует, что ЭПС определяется из условия

$$\Lambda_V(\theta^*) = \theta^* C. \tag{8}$$

В данной статье не обсуждаются подробно условия существования предела $\Lambda_V(\theta^*)$ (называемого функционалом действия). В простейшем случае н. о. р. с. в. $\{v_i\}$, в частности, требуется $\mathsf{E} e^{\theta^* v} < \infty$ при $\theta^* \in (0,\, \theta_0)$. (Условие $\mathsf{E} e^{\theta^* v} < \infty$ означает, что с. в. v имеет так называемое распределение *с легким хвостом.*) В более общем случае требуется, чтобы последовательность $\{v_i\}$ была стационарной с перемешиванием. Ввиду (8) ЭПС определяется (разумеется, приближенно) из условия

$\mathsf{P}(W > b) = \Gamma = e^{-\theta^* b}$ как

$$C := \frac{\Lambda_V(\theta^*)}{\theta^*} = \frac{\Lambda_V(-\ln\Gamma/b)b}{-\ln\Gamma}. \qquad (9)$$

Этот результат верен также и для системы с конечным буфером (большого) размера b, т. е. для системы с потерями.

Оценивание ЭПС методом группового среднего

Когда с. в. $\{v_i\}$ — н. о. р., то функция $\Lambda_V(\theta^*) = \ln \mathsf{E}e^{\theta^* v}$. (Напомним, что $\mathsf{E}e^{\theta^* v} < \infty$.) Несмещенной и сильно состоятельной оценкой функции Λ_V является выборочное среднее, т. е. с вероятностью 1 (с в. 1)

$$\ln \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^{\theta^* v_i} \to \Lambda_V(\theta^*),\ k \to \infty. \qquad (10)$$

Гораздо труднее оценить Λ_V для зависимых $\{v_i\}$. Наиболее распространенным методом оценивания функции Λ_V является метод группового среднего (*batch-means method*), когда последовательность $\{v_i\}$ разбивается на блоки данных одинаковой длины B. Существуют разные подходы к выбору величины B и способу формирования блоков [10, 11, 14]. (В частности, могут рассматриваться блоки с перекрытием, когда часть данных попадает в два соседних блока ([8, 12].) Далее рассматривается стандартный вариант разбиения с блоками фиксированной длины B, определяемыми следующим образом:

$$\hat{X}_j = \sum_{i=(j-1)B+1}^{jB} v_i, \quad j \geqslant 1.$$

Основное предположение состоит в том, что при большом B эти блоки являются (приближенно) н. о. р. Считая, что общее число наблюдений $n = kB$ кратно величине блока, получим

$$\frac{1}{n} \ln \mathsf{E}e^{\theta \sum_{i=1}^{n} v_i} = \frac{\ln \mathsf{E}e^{\theta \hat{X}}}{B} := \Lambda_V(\theta,\, B), \qquad (11)$$

где $\hat{X}$ означает типичный блок (и предполагается, что $\ln \mathsf{E}e^{\theta\hat{X}} < \infty,\ \theta \in (0,\, \theta_0)$). Равенство в (11) надо понимать приближенно, так как возможная зависимость между блоками игнорируется. Очевидно, при фиксированном размере блока B, выборочная оценка

$$\hat{\Lambda}_k(\theta,\, B) := \frac{1}{B} \ln \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^{\theta \hat{X}_i} \qquad (12)$$

является сильно состоятельной оценкой функции $\Lambda_V(\theta,\, B)$, т. е. при $k \to \infty$

$$\hat{\Lambda}_k(\theta,\, B) \to \Lambda_V(\theta,\, B) \text{ с в. } 1.$$

Соответствующая оценка ЭПС определяется тогда следующим образом (см. (9)):

$$\hat{C}_k(\theta^*, B) = \frac{\hat{\Lambda}_k(\theta^*, B)}{\theta^*},\ \ \theta^* = -\ln\Gamma/b. \qquad (13)$$

Оценка $\hat{C}_k(\theta^*, B)$ является смещенной (см. [9]). Действительно, поскольку функция ln является вогнутой, то неравенство Йенсена дает

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\hat{C}_k(\theta^*, B)\right] &= \mathsf{E}\left[\frac{1}{\theta^* B} \ln \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^{\theta \hat{X}_i}\right] \\
&= \frac{1}{\theta^* B} \mathsf{E}\left[\ln \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^{\theta \hat{X}_i}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{\theta^* B} \ln \mathsf{E}\left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^{\theta \hat{X}_i}\right] \\
&= \frac{1}{\theta^* B} \ln \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}\left[e^{\theta \hat{X}_i}\right].
\end{aligned}$$

В силу предположения о независимости блоков $\{\hat{X}_i\}$ отсюда следует

$$\mathsf{E}\left[\hat{C}_k(\theta^*, B)\right] \leqslant \frac{1}{\theta^* B} \ln \mathsf{E}\left[e^{\theta \hat{X}}\right] = C(\theta^*, B). \qquad (14)$$

Ниже это смещение оценки $\hat{C}_k(\theta^*, B)$ иллюстрируется результатами численного моделирования. Отметим, что при выборе числа наблюдений кратным числу блоков, т. е. при $n = kB$, оценки по шкале блоков и по шкале наблюдений очевидным образом согласованы:

$$\hat{\Lambda}_k(\theta,\, B) = \frac{1}{B} \ln \frac{B}{n} \sum_{i=1}^{n/B} e^{\theta \hat{X}_i}. \qquad (15)$$

Замечание 1. Смещенность оценки (13) в сторону меньших значений говорит о том, что она не очень пригодна для оценки ЭПС в системах высокой надежности. Кроме того, основной проблемой при данном подходе является выбор размера блока B: небольшой размер блока может не соответствовать предположению о независимости, а слишком большая величина неэффективна с точки зрения требуемого времени моделирования.

Регенеративная оценка ЭПС

В работах [3, 13] для входной последовательности $\{v_n\}$ с моментами регенерации β_k и периодами регенерации $\alpha_k = \beta_{k+1} - \beta_k$, было предложено строить оценку ЭПС путем группировки данных по циклам регенерации, что приводит к *регенеративным блокам* вида

$$\hat{X}_k := \sum_{i=\beta_k}^{\beta_{k+1}-1} v_i,\ k \geqslant 0,\ \beta_0 = 0, \tag{16}$$

которые, действительно, являются н. о. р. В основе этого подхода лежит предположение о том, что более точный учет структуры зависимости между данными $\{v_i\}$ может улучшить качество оценки (уменьшить дисперсию) по сравнению с оценкой в методе группового среднего. В предположении

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\alpha < \infty,\ \ln \mathsf{E}e^{\theta^* \hat{X}} < \infty,\ \theta^* \in (0, \theta_0), \\ &\mathsf{E}(\alpha - \mathsf{E}\alpha)^2 := \sigma^2 \in (0, \infty), \end{aligned} \tag{17}$$

рассмотрим функцию $\Lambda_V(n)$ из (7) и определим число регенераций для n наблюдений как $k(n) = \max(k \geqslant 0 : \beta_k \leqslant n)$. Рассмотрим, как отразится регенеративная структура входного процесса на свойствах выборочной оценки. Учитывая неотрицательность всех рассматриваемых величин, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \mathsf{E}\left[e^{\theta^* \sum_{i=1}^{k(n)} \hat{X}_i}\right] &\leqslant \frac{1}{n} \ln \mathsf{E}\left[e^{\theta^* \sum_{i=1}^{n} v_i}\right] \\ &\leqslant \frac{1}{n} \ln \mathsf{E}\left[e^{\theta^* \sum_{i=1}^{k(n)+1} \hat{X}_i}\right]. \end{aligned}$$

В силу моментных условий (17) из теории восстановления следует, что величина работы $\sum_{i=k(n)}^{n} v_i$, поступающей на текущем (в момент n) цикле регенерации, с в. 1 есть величина $o(n)$, $n \to \infty$. Далее, по элементарной теореме восстановления, $\mathsf{E}k(n)/n \to 1/\mathsf{E}\alpha$. Поэтому в силу независимости блоков можно ожидать, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \ln \mathsf{E}e^{\theta^* \sum_{i=1}^{n} v_i} \approx \\ &\frac{\mathsf{E}k(n)}{n} \frac{1}{\mathsf{E}k(n)} \ln \mathsf{E}e^{\theta \sum_{i=1}^{k(n)} \hat{X}_i} \to \frac{1}{\mathsf{E}\alpha} \ln \mathsf{E}e^{\theta^* \hat{X}}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Lambda_{REG}(\theta^*) := \frac{1}{\mathsf{E}\alpha} \ln \mathsf{E}e^{\theta^* \hat{X}}. \tag{18}$$

Приведенные выше аргументы приводят к такой *регенеративной оценке*, которая строится по k регенеративным блокам,

$$\hat{\Lambda}_k(\theta^*) := \frac{k}{\beta_k} \ln \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^{\theta^* \hat{X}_i}. \tag{19}$$

Поскольку $\beta_k/k \to \mathsf{E}\alpha$, то с в. 1

$$\hat{\Lambda}_k(\theta^*) \to \Lambda_{REG}(\theta^*),\ \ k \to \infty,$$

и в предельной функции присутствует *средний размер блока* $\mathsf{E}\alpha$. Таким образом, регенеративную оценку ЭПС естественно определить как

$$\hat{C}_k(\theta^*) = \frac{\hat{\Lambda}_k(\theta^*)}{\theta^*}. \tag{20}$$

(В обзорной работе [7] также рассматривается возможность использовать блоки случайной длины, в частности, отражающие структуру зависимости между величинами $\{v_i\}$.) В работе [1] было показано, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathsf{E}e^{\theta^* \sum_{i=1}^{n} v_i} \geqslant \Lambda_{REG}(\theta^*), \tag{21}$$

т. е., что $\Lambda_{REG}(\theta^*)$ является нижней границей для функции $\Lambda_V(\theta^*)$. Однако обоснование (той же самой) верхней границы для (18) пока остается открытой проблемой. Тем не менее результаты численных экспериментов позволяют сделать предположение о строгой состоятельности и *консервативности* регенеративной оценки $\hat{C}_k(\theta^*)$. Консервативность означает, что оценка несколько завышает требования к ЭПС, т. е. всегда гарантирует выполнение условия (1) (однако, вообще говоря, с вероятностью, меньшей чем Γ). Это смещение очень важно для систем *высокой надежности.*

Для получения регенеративной оценки ЭПС можно использовать два основных сценария. Первый предполагает искусственно заданный входной поток, с известным распределением длины цикла регенерации α. В этом случае можно заранее потребовать выполнение необходимых моментных условий как для α, так и для объема $\hat{X}$ поступающей на цикле работы. (Заметим, что эти условия в любом случае исключают распределения $\hat{X}$ *с тяжелым хвостом.*) Во втором сценарии можно рассматривать двухузловую тандемную сеть. На вход узла 1 поступает процесс восстановления (к примеру, пуассоновский) с интенсивностью λ и н. о. р. временами обслуживания $\{S_n\}$ со средним $\mathsf{E}S = 1/\mu$ при условии стационарности $\rho_1 := \lambda/\mu < 1$. В этом случае, как хорошо известно, выходной процесс из первого узла является положительно возвратным регенерирующим, т. е. $\mathsf{E}\alpha < \infty$. Поэтому на вход узла 2 поступает положительно возвратный регенерирующий процесс, моменты регенерации β_n которого определяются как моменты прихода заявок в пустой узел 1. Однако в качестве моментов регенерации мы будем рассматривать *моменты ухода из узла 1 тех заявок, которые пришли в пустой узел 1.* Именно, пусть t_n – момент прихода заявки с номером n в узел 1, t_n^* – момент ее ухода из узла $n \geqslant 1$. Тогда упомянутые моменты регенерации определяются следующим образом:

$$\beta_0 = 0,\ \beta_{n+1} = \min_k (t_k^* > \beta_n : \nu(t_k^-) = 0), n \geqslant 0, \tag{22}$$

где $\{\nu(t), t \geqslant 0\}$ – непрерывный справа процесс очереди в узле 1. Хотя в моменты $\{\beta_n\}$ узел 1, вообще говоря, не пустой, легко проверить, что распределение накопленной в этот момент нагрузки является одним и тем же и не зависит от n. (Это вариант классической, но *невырожденной* регенерации. Такие моменты $\{\beta_n\}$ связаны с событиями выходного потока и более удобны для процесса имитационного моделирования.) Хотя длины циклов $\alpha_n = \beta_{n+1} - \beta_n$ выражаются в числе поступивших заявок, в методе группового среднего поступающая нагрузка рассматривается на единичных интервалах времени (слотах). Чтобы иметь возможность сравнивать оценки, получаемые обоими методами, необходимо перейти от шкалы, считающей заявки, поступающие в узел 2, к шкале слотов. Будем далее считать, что заявки в узел 2 поступают по одной в слоте. На практике это предположение может означать, что заявки из узла 1 поступают в узел 2 через некоторый синхронизирующий буфер достаточно большого объема. Такие буфера широко применяются в коммуникационных сетях. Например, пакеты от одного отправителя к одному и тому же получателю могут иметь в сети различные маршруты. Это ведет к разбросу значений задержки пакетов (джиттеру) и нарушает синхронизацию исходного трафика. Величина джиттера является важным показателем качества обслуживания. В частности, в широко используемых в настоящее время VoIP сетях, неконтролируемый джиттер может существенно влиять на качество передаваемого звука. Одним из вариантов сокращения джиттера является введение синхронизирующего буфера, который позволяет восстановить равные промежутки времени между пакетами при получении (см. [5]). Таким образом, для сравнения двух оценок достаточно моделировать процесс незавершенной нагрузки согласно соотношению (1).

При проведении экспериментов рассматривалась некоторая комбинация двух описанных выше сценариев. Именно, в узел 2 поступает последовательность данных v_i (по одному на единичных слотах), однако регенеративные блоки формируются в соответствии с циклами регенерации выходного потока из (гипотетического) узла 1. Кроме того, в большинстве экспериментов предполагалось, что с. в. $\{v_i\}$ являются н. о. р. Даже при таких упрощающих предположениях, представленные ниже результаты численного моделирования демонстрируют важные свойства описанных выше оценок.

Результаты численных экспериментов

Целью численных экспериментов является выяснение свойств регенеративной оценки ЭПС и их сравнение со свойствами оценки по методу группового среднего. (Эти эксперименты существенно расширяют результаты, полученные в работе [1].) Опираясь на сделанные выше предположения, рассмотрим модель с интервалами единичной длины между поступлениями заявок в узел 1 и входной последовательностью н. о. р. экспоненциальных с. в. $\{v_n\}$ с параметром μ_2. (Случай зависимых с. в. $\{v_n\}$ рассматривается в эксперименте 7.)

Хотя для независимых с. в. $\{v_i\}$ группировка не требуется, тем не менее, интересно сравнить обе оценки (13), (20) с известным аналитическим значением ЭПС и с оценкой, полученной методом Монте-Карло. Это трудно (или невозможно) сделать в случае зависимых $\{v_i\}$. Более того, такой анализ может быть полезен, если, например, независимость $\{v_i\}$ априори неизвестна. Поскольку в рассматриваемом случае

$$\mathsf{E}e^{\theta^* v} = \int_0^\infty e^{\theta^* x} \mu_2\, e^{-\mu_2 x} dx = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \theta^*},$$

то ЭПС (9) принимает вид

$$C = \frac{\ln(\frac{\mu_2}{\mu_2 - \theta^*})}{\theta^*}, \tag{23}$$

где необходимо выбрать параметр $\mu_2 > \theta^* = -\ln\Gamma/b$. Для удобства будем использовать сокращения *метод Р* для регенеративного метода и *метод ГС* для метода группового среднего, соответственно. Также назовем величину $e^{\theta^* \hat{X}}$ *экспоненциальной нагрузкой* на блоке. Введем следующие обозначения:

- B — размер блока в методе ГС;
- k — количество блоков или циклов регенерации;
- $\hat{C}_{REG}$ — оценка ЭПС с помощью метода Р, вычисляется по формуле (20);

- $\hat{C}_{BM}$ — оценка ЭПС методом ГС, вычисляется по формуле (13);
- $\hat{C}_{MC}$ — оценка ЭПС методом Монте-Карло в случае н. о. р. $\{v_i\}$;
- n_{REG} — число наблюдений, проведенных при моделировании методом Р;
- n_{BM} — число наблюдений, проведенных при моделировании методом ГС, $n_{BM} = Bk$;
- $V_{REG}[\alpha]$ — выборочная оценка дисперсии длины цикла регенерации;
- $V_{REG}[e^{\theta^* \hat{X}}]$ — выборочная оценка дисперсии экспоненциальной нагрузки на цикле-блоке в методе Р;
- $V_{BM}[e^{\theta^* \hat{X}}]$ — выборочная оценка дисперсии экспоненциальной нагрузки на блоке в методе ГС;
- $V[\hat{C}_{REG}]$ — выборочная дисперсия регенеративной оценки;
- $V[\hat{C}_{BM}]$ — выборочная дисперсия оценки по методу ГС;
- $V_{REG}[C]$ — среднеквадратическое отклонение регенеративной оценки от теоретического значения ЭПС C;
- $V_{BM}[C]$ — среднеквадратическое отклонение оценки по методу ГС от теоретического значения ЭПС C.

Эксперимент 1. В табл. 1 приведены результаты моделирования описанной выше системы при $\Gamma = 10^{-8}$, $b = 60$ (т. е. $\theta^* = 0,307011$) и н. о. р. показательных $\{v_i\}$ с параметром μ_2. Напомним, что в этом случае можно сравнить результаты моделирования с явным значением C из (23).

Таблица 1. Оценивание ЭПС при умеренной загрузке узлов

ρ_1	μ_2	$\hat{C}_{BM}$	C	$\hat{C}_{REG}$	n_{REG}
0,5	0,6	1,88705	2,33475	2,65482	1007
0,5	0,9	1,18603	1,35897	1,39296	1003
0,5	1,3	0,79928	0,87749	1,03916	10047
0,3	2,5	0,414878	0,42677	0,42745	19815

Число наблюдений n_{BM}, зависящее от заданной величины блока B и заданного числом блоков k, принималось равным 1000, 10000 и 20000, соответственно. Для метода Р число наблюдений n_{REG} определялось в процессе моделирования на (целом) числе циклов, исходя из условия $n_{REG} \geqslant n_{BM}$. Значение коэффициента ρ_1 и параметра $\mu_2 > \theta^*$ соответствуют умеренной нагрузке на оба узла. При этом заметные изменения коэффициента μ_2 с $0,6$ до $2,5$ почти не влияют на оценки $\hat{C}_{REG}$ и $\hat{C}_{BM}$, которые оказываются близки к теоретическому значению C. В частности, из табл. 1 видно, что наиболее близкое к теоретическому значению C метод Р дает при $\rho_1 = 0,3$ и $\mu_2 = 2,5$. Данный результат обусловлен тем, что при выбранной загрузке узла 1 длины циклов регенерации (размер блоков) варьируются слабо. (Вариация длин циклов в зависимости от коэффициента загрузки ρ_1 обсуждается в последующих экспериментах.) Заметим также, что $\hat{C}_{BM} < C < \hat{C}_{REG}$, и в частности, эксперименты подтверждают консервативность оценки $\hat{C}_{REG}$.

Эксперимент 2. Сохранив значения Γ, b, θ^* такими же как в эксперименте 1, возьмем $B = 1500$, $n_{BM} = 30000$ и, уменьшая значение параметра $\mu_2 (> \theta^* = 0,3070011)$, увеличим тем самым нагрузку на узел 2.

Таблица 2. Оценивание ЭПС при увеличении нагрузки на узел 2

ρ_1	μ_2	$\hat{C}_{BM}$	C	$\hat{C}_{REG}$	n_{REG}
0,4	0,5	2,09545	3,10079	4,32887	29680
0,3	0,4	2,61066	4,75223	5,04857	30236
0,4	0,35	2,97821	6,83036	11,9739	29700
0,6	0,32	3,27348	10,4369	32,6247	26611

Из табл. 2 видно, что при этом растет различие между C и обеими оценками ЭПС. Такое поведение оценки $\hat{C}_{REG}$ можно объяснить тем, что даже незначительное увеличение ρ_1 при большой нагрузке на узел 2 ведет к значительному росту дисперсии суммарной нагрузки, поступающей на цикле. Тем не менее, оценка $\hat{C}_{REG}$ остается консервативной. Напротив, оценка $\hat{C}_{BM}$ нечувствительна к увеличению ρ_1, а большие значения B нивелируют дисперсию величины нагрузки, поступающей на блоке. Однако значение оценки $\hat{C}_{BM}$ *существенно меньше*, чем C.

Таким образом, решение, основанное на $\hat{C}_{BM}$, может привести к драматической ошибке в выборе ЭПС и, как следствие, к серьезной перегрузке системы обслуживания. В то же время, решение на основе (консервативной) оценки $\hat{C}_{REG}$ может быть полезно при расчете высоконадежных систем.

Эксперимент 3. Как было отмечено ранее, для н. о. р. $\{v_n\}$ можно либо найти явное значение функции $\Lambda(\theta^*) = \ln \mathsf{E}e^{\theta^* v}$, либо использовать для ее оценки стандартное выборочное среднее $\hat{C}_{MC}$ на основе метода Монте-Карло. Рассмотрение этого простейшего случая позволяет экспериментально оценить качество оценок $\hat{C}_{BM}$ и $\hat{C}_{REG}$ путем их сравнения либо с известным значением, либо с оценкой $\hat{C}_{MC}$. В табл. 3 даны результаты вычисления оценок ЭПС при различных значениях параметра θ^* и при $\rho_1 = 0,4$, $\mu_2 = 0,9$.

Таблица 3. Сравнение оценок ЭПС

θ^*	$\hat{C}_{REG}$	$\hat{C}_{MC}$	C	$\hat{C}_{BM}$
0,8008	3,37599	2,29366	2,75472	1,4685
0,7084	3,3423	2,13291	2,18415	1,44997
0,6140	2,48644	1,82857	1,86717	1,42216
0,4605	1,87695	1,55257	1,5565	1,38025
0,3684	1,58691	1,42744	1,42918	1,35425
0,3349	1,51458	1,38869	1,38967	1,3329

Варьирование параметра θ^* происходит за счет изменения Γ и b. Для всех методов оценки строились по 10000 наблюдений. Отметим, что оценка $\hat{C}_{BM}$ во всех случаях дает заниженное значение ЭПС.

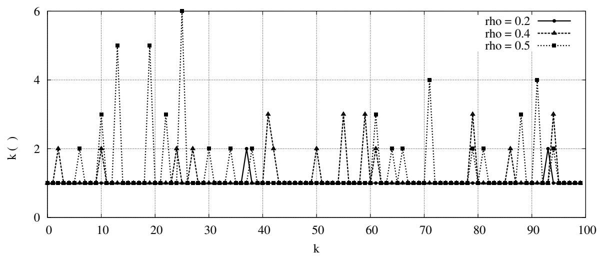

Рис. 1. Длины циклов выходного потока узла 1 при умеренной загрузке

Эксперимент 4. Чтобы проанализировать, каким образом дисперсия длины цикла регенерации влияет на качество оценки $\hat{C}_{REG}$, снова исследуем случаи умеренной и сильной загрузки узла 1. Выберем $\mu_2 = 1,5$, $\Gamma = 10^{-8}$, $b = 60$ и будем варьировать коэффициент загрузки ρ_1.

На рис. 1 и 2 показан характер изменения длины цикла регенерации выходного потока из узла 1 при заданном ρ_1 для 100 циклов. На рис. 2 (при большом ρ_1) видны большие колебания длины цикла, что существенно влияет на суммарную величину нагрузки в регенеративном блоке.

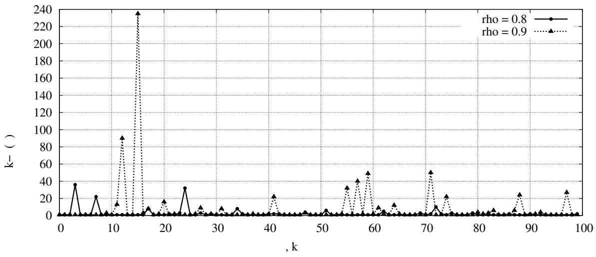

Рис. 2. Длины циклов выходного потока узла 1 при большой загрузке

Соответствующее данным рис. 1 и 2 изменение величины $e^{\theta^* \hat{X}}$ на циклах регенерации показано на рис. 3 и 4. Рис. 3 отражает изменение величины $e^{\theta^* \hat{X}}$ при умеренном ρ_1, а рис. 4 — при большом значении ρ_1.

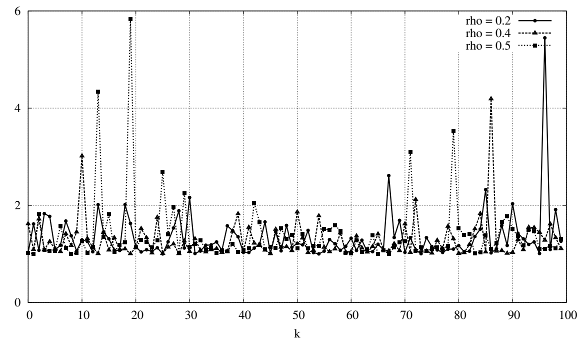

Рис. 3. Экспоненциальная нагрузка узла 2 на блоках при умеренной загрузке узла 1

Видно, что небольшие изменения длины цикла приводят к значительному изменению экспоненциальной нагрузки. Таким образом, колебания длины цикла при увеличении ρ_1 влекут существенный рост дисперсии регенеративной оценки $\hat{C}_{REG}$.

Заметим, что для $\rho_1 = 0,8$ максимум экспоненциальной нагрузки $e^{\theta^* \hat{X}_3} = 4709,35$ (см. рис. 4), что соответствует максимальной длине цикла $\alpha_3 = 36$ (см. рис. 2). Для $\rho_1 = 0,9$ максимум равен $e^{\theta^* \hat{X_{15}}} = 7,63318e + 22$ при $\alpha_{15} = 235$.

Таблица 4. Зависимость дисперсии оценки ЭПС от ρ_1

ρ_1	0,1	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8
$V_{REG}[\alpha]$	0,0001	0,063635	0,249424	0,753058	7,91327	34,38
$V_{REG}[e^{\theta^* \hat{X}}]$	0,744988	1,01771	4,32138	51,2856	3,82251e+16	3,90876e+35
$V_{BM}[e^{\theta^* \hat{X}}]$	2,78e+163	3,94e+156	5,30e+159	8,69e+156	4,23e+155	2,36e+159
$V[\hat{C}_{REG}]$	4,394e-4	4,39e-4	1,13e-3	1,022	59,10	566,80
$V[\hat{C}_{BM}]$	6,64e-4	6,13e-4	6,81e-4	8,85e-4	6,29e-4	7,15e-4

Следует отметить, что изменение ρ_1 не влияет на оценку $\hat{C}_{BM}$, так как блоки имеют фиксированный размер B. Это также подтверждается результатами следующего эксперимента.

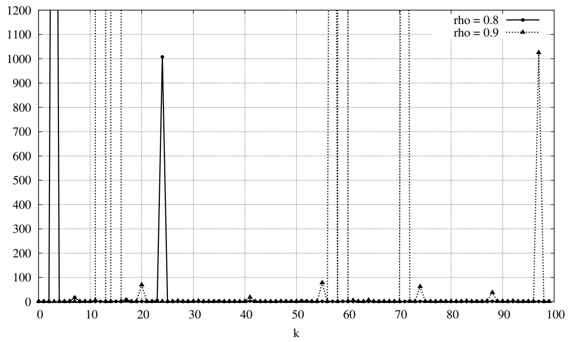

Рис. 4. Экспоненциальная нагрузка узла 2 на блоках при сильной загрузке узла 1

Эксперимент 5. Выберем $B = 500$, $\mu_2 = 0,9$, $\theta^* = 0,307011$, $b = 60$, число наблюдений $n_{BM} = 10000$, размер выборки для вычисления оценок дисперсии равен 50.

В табл. 4 приведены выборочные дисперсии оценок экспоненциальной нагрузки в блоке для метода ГС и метода Р, а также оценки ЭПС для обоих методов при различных значениях ρ_1.

Изменение ρ_1 не влияет на вариацию экспоненциальной нагрузки в блоке для метода ГС, однако, как видно из табл. 4, значение $V_{BM}[e^{\theta^* \hat{X}}]$ стабильно велико (имеет порядок 10^{156}). Тем не менее, эти колебания в блоке нивелируются за счет выбора большого значения B, и поэтому выборочная дисперсия оценки $\hat{C}_{BM}$ оказывается невелика. Эта оценка попрежнему смещена в сторону меньших значений.

Эксперимент подтверждает, что рост дисперсии оценки $\hat{C}_{REG}$ прямо пропорционален росту дисперсии длины цикла, которая, в свою очередь, связана с увеличением коэффициента ρ_1. При этом отметим незначительную разницу в дисперсии обеих оценок $\hat{C}_{REG}$ и $\hat{C}_{BM}$ при малых и умеренных значениях ρ_1.

Замечание 2. Важно отметить, что в системах с высокими требованиями QoS наиболее интересным является случай средней и малой загрузки. И именно в этих случаях эксперименты подтверждают преимущество оценки $\hat{C}_{REG}$ над оценкой $\hat{C}_{BM}$.

Таблица 5. Отклонение оценок ЭПС от теоретического значения C

ρ_1	0,1	0,3	0,5	0,7
$V[\hat{C}_{REG}]$	0,344	0,482	64,37	295,13
$V[\hat{C}_{BM}]$	5,69e-3	6,4e-3	5,56e-3	9,13e-3
$V_{REG}[C]$	54,48e-3	3,20e-3	1,89	34,97
$V_{BM}[C]$	36,86	36,91	37,05	36,70

Эксперимент 6. Теперь сравним оба метода, увеличив нагрузку на узел 2, когда объемы поступающей нагрузки распределены показательно с параметром $\mu_2 = 0,35$. Будем изменять ρ_1 на первом узле, а остальные параметры оставим без изменения (см. эксперимент 5). Поскольку для рассматриваемой модели известно точное значение ЭПС, то можно найти среднеквадратическое отклонение обеих оценок $\hat{C}_{REG}$ и $\hat{C}_{BM}$ от теоретического значения C. (Выше мы обозначили эти отклонения $V_{REG}[C]$ и $V_{BM}[C]$, соответственно.)

Из табл. 5 видно, что отклонение $V[\hat{C}_{BM}]$ оценки $\hat{C}_{BM}$ от выборочного среднего остается небольшим, однако, отклонение $V_{BM}[C]$ от известного значения C стабильно велико. Отклонение $V[\hat{C}_{REG}]$ оценки $\hat{C}_{REG}$ от выборочного среднего больше, чем у $\hat{C}_{BM}$, но она существенно ближе к C (за исключением больших значений ρ_1). Более того, эксперименты снова подтверждают установленный ранее результат $\hat{C}_{BM} < C < \hat{C}_{REG}$.

Таблица 6. Сравнение оценок ЭПС для зависимых с. в. v ($\eta \sim exp$) на циклах

n	50	100	500	1000	5000	10000	20000
$\hat{C}_{REG}$	0,846919	0,829186	0,883955	0,87963	0,877652	0,879206	0,878917
$\hat{C}_{BM}$	0,801576	0,801067	0,847855	0,864714	0,899761	0,846297	0,857191
$V[\hat{C}_{REG}]$	0,0135	0,0141	0,0072	0,0017	0,000361	0,0001497	7,84896e-05
$V[\hat{C}_{BM}]$	0,0177	0,0116	0,005	0,0029	0,0023	0,00114	0,001046

Таблица 7. Сравнение оценок ЭПС для зависимых v ($\eta \sim weib$) на циклах

n	100	500	1000	5000	10000	20000
$\hat{C}_{REG}$	0,576674	0,575671	0,579387	0,576897	0,576467	0,57678
$\hat{C}_{BM}$	0,570715	0,568081	0,567508	0,569535	0,569611	0,56978
$V[\hat{C}_{REG}]$	0,000649	8,89196e-05	4,73991e-05	1,12482e-05	7,6528e-06	4,28579e-06
$V[\hat{C}_{BM}]$	0,000747277	0,00010108	7,78538e-05	1,37676e-05	9,87332e-06	3,90953e-06

Таким образом, в случае н. о. р. $\{v_i\}$ при малой и средней загрузке первого узла, оценка $\hat{C}_{REG}$ имеет сравнительно небольшую дисперсию и при этом ее отклонение от известного значения C существенно меньше, чем у оценки $\hat{C}_{BM}$. Таким образом, оценка $\hat{C}_{REG}$ имеет явные преимущества перед оценкой $\hat{C}_{BM}$.

Эксперимент 7. Однако на практике, как правило, имеет место зависимость между с. в. $\{v_i\}$, и тогда получить теоретическое значение ЭПС (9) очень сложно (или невозможно), в силу трудности вычисления функции моментов (7). Для построения оценок ЭПС в этом случае рассмотрим пример зависимости между v_i на цикле регенерации следующего вида:

$$v_j = \frac{\sum_{k=1}^{j} \eta_k}{j}, \qquad (24)$$

где с. в. $\{\eta_k\}$ — н. о. р., j – номера заявок на цикле регенерации, α_i – длина i-го цикла, $1 \leqslant j \leqslant \alpha_i$, $i \in [1, k]$. Такую зависимость можно считать сильной в том смысле, что все с. в. на одном цикле зависимы (причем, функционально). На самом деле зависимость может быть произвольной и определяться, к примеру, протоколом передачи данных. В то время как $\hat{C}_{REG}$ строится по действительно независимым блокам, при построении оценки $\hat{C}_{BM}$ не исключена ситуация, когда зависимые данные попадают в разные блоки. Это обстоятельство может негативно отразиться на дисперсии оценки.

Пусть $b = 80$, $\Gamma = 10^{-8}$, $\theta^* = 0,230259$, $\rho_1 = 0,4$. Дисперсия оценок вычисляется по выборке размера 100. Будем варьировать общее количество наблюдений n. В табл. 6 приведены результаты для экспоненциальной с. в. η с параметром $\mu_2 = 1,3$. Как и в предыдущих экспериментах, $\hat{C}_{BM} < \hat{C}_{REG}$, и кроме того, оценка $\hat{C}_{REG}$ имеет меньшую дисперсию. (Напомним, что в случае независимых данных дисперсия $\hat{C}_{REG}$ была, как правило, больше.) В табл. 7 представлены оценки при $\rho_1 = 0,4$ для с. в. η с распределением Вейбулла (weib) с легким хвостом,

$$F_\eta(x) = 1 - e^{-\gamma x^c}, \ \gamma > 0, \ c \geqslant 1, \qquad (25)$$

где $\gamma = 3$, $c = 4$, а зависимость на цикле определяется по формуле (24).

Из анализа данных табл. 7 можно сделать вывод о близости оценок $\hat{C}_{REG}$ и $\hat{C}_{BM}$. При этом (см. табл. 6) для экспоненциальной с. в. η дисперсия $\hat{C}_{REG}$ существенно меньше чем у $\hat{C}_{BM}$. Таким образом, в рассмотренном примере выбор длины цикла регенерации в качестве длины блока позволяет более эффективно оценить ЭПС.

Заключение

В статье обсуждаются свойства регенеративной оценки и оценки по методу группового среднего для нахождения ЭПС 2-го узла в тандемной сети. Хотя случай зависимых данных во входном потоке узла 2 также рассмотрен, основное внимание уделено свойству оценок для н. о. р. данных. При упрощающих предположениях показано, что широко используемая оценка по методу группового среднего занижает требования к ЭПС, в то время как регенеративная оценка является консервативной. Последнее свойство может рассматриваться как преимущество при анализе и проектировании высоконадежных коммуникационных систем.

Работа выполнена в рамках Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития». Работа поддержана РФФИ, проект 10-07-00017.

Литература

1. *Бородина А., Дюденко И., Морозов Е.* Ускоренное оценивание вероятности переполнения регенеративных систем обслуживания. ОППМ. 2009. Т. 16, вып. 4. С. 577–593.

2. *De Turck K.* Performance Evaluation of Buffers in Wireless Networks, PhD thesis, University of Ghent, 2010–2011.

3. *Dyudenko I., Morozov E., Pagano M.* Regenerative estimator for effective bandwidth, Proceedings of the International Conference "Mathematical methods for analysis and optimization of information telecommunication networks". Minsk: Belarusian State University, 2009. C. 58–60.

4. *Ganesh A., O'Connell N., Wischik D.* Big Queues. Springer-Verlag, Berlin, 2004. 260 p.

5. *Ganz A., Ganz Z., Wongthavarawat K.* Multimedia Wireless Networks: Technologies, Standards, and QoS. Prentice Hall PTR. 2003. 352 p.

6. *Glynn P. W., Whitt W.* Logarithmic asymptotics for steady-state tail probabilities in a single-server queue. Journal of Applied Probability 31A. 1994. P. 131–156.

7. *Lewis J. T., Russell R.* An introduction to large deviation for teletraffic engineers, DIAS Report, 1996.

8. *Meketon M. S., Schmeiser B. W.* Overlapping batch means: Something for nothing? // Proceedings of the Winter Simulation Conference. 1984. P. 227–230.

9. *Rabinovitch P.* Statistical estimation of effective bandwidth, M.Sc.thesis, University of Cambridge, 2000. 75 p.

10. *Schmeiser B.* Batch size effects in the analysis of simulation output. Oper. Res. 30. 1982. P. 556–568.

11. *Song W.-M. T.* On the estimation of optimal batch sizes in the analysis of simulation output. European Journal of Operational Research. 1996. Vol. 88, N 2. P. 304–319, January 20.

12. *Song W. T., Mingchang Chih.* Implementable mse-optimal dynamic partial-overlapping batch means estimators for steady-state simulations // Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference. 2008. P. 426–435.

13. *Vorobieva I., Morozov E., Pagano M., Procissi G.* A New Regenerative Estimator for Effective Bandwidth Prediction // Proceedings of AMICT 2007. Petrozavodsk, Russia, 2008. P. 175–186.

14. *Welch P. D.* On the relationship between batch means, overlapping batch means and spectral estimation // Proceedings of the Winter Simulation Conference, 1987. P. 320–323.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Бородина Александра Валентиновна
младший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185610
старший преподаватель кафедры ИМО
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: borodina@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Borodina, Alexandra
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185610 Petrozavodsk, Karelia, Russia
Department of Computer Science
Petrozavodsk State University
33 Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: borodina@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370

Морозов Евсей Викторович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
профессор кафедры ПМиК
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: emorozov@karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Morozov, Evsey
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185610 Petrozavodsk, Karelia, Russia
Professor at the Department of Applied Mathematics and Cybernetics
Petrozavodsk State University
33 Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: emorozov@karelia.ru
tel.: (8142) 763370

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 18–21

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ СО СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ

М. Е. Галахова[1], А. Н. Кириллов[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров
[2] Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассмотрена задача управляемости динамических систем со структурными изменениями. Предложен метод управления дискретным состоянием линейной последовательной системы.

Ключевые слова: управление, переменная структура, гибридная система.

M. E. Galakhova, A. N. Kirillov. THE LINEAR VARIABLE STRUCTURE SYSTEM CONTROL

The problem of controllability of variable structure dynamical systems is considered. A method for controlling the discrete state of a linear sequential system is proposed.

Key words: control, variable structure, hybrid system.

Введение

Проблема управляемости динамических систем является одной из наиболее важных в теории управления и далека от своего решения. Для линейных стационарных систем управления известен критерий полной управляемости Р. Калмана, а для нестационарных – достаточный признак Н. Н. Красовского при условии непрерывной дифференцируемости матриц коэффициентов вплоть до $(n-1)$-го порядка, где n – порядок системы. Имеется критерий устойчивости линейных систем с аналитическими коэффициентами [4]. Для нелинейных систем известны результаты по локальной управляемости. Общих результатов, разрешающих проблему, как в линейном случае, нет и, скорее всего, их невозможно получить. Надо учитывать качественные свойства динамических систем, классификация которых нереальна. Для гибридных систем, к которым относятся системы с изменяющейся структурой, даже в линейном стационарном случае результатов, сравнимых по завершенности с критерием Калмана, нет. Это связано со сложностью исследуемого объекта и продолжающимся формированием самого понятия гибридной системы. Неясно также, что понимать под управляемостью гибридной системы, сочетающей непрерывное и дискретное поведение. Некоторые результаты в этом направлении для линейных гибридных систем представлены в [3]. В настоящей статье рассмотрена задача управления дискретным состоянием линейной системы с переменной структурой. Предложен метод построения управления, целенаправленно изменяющего структуру системы.

Замечание 1. Авторы не стремятся к обобщающим построениям, поэтому не будет рассматриваться громоздкая модель системы со структурными изменениями. Наоборот, специфика задач управляемости систем с переменной структурой будет показана на относительно простой модели гибридной системы.

S-линейная система

Сложные динамические системы, состоящие из подсистем, характеризуются тем, что их состав и взаимосвязи между подсистемами изменяются в процессе функционирования. В [1, 2] был предложен подход для описания динамики структурных изменений в системе. Предположим, что в состав системы S могут входить подсистемы $S_i \in \{S_1, \ldots, S_n\}$, подключаясь к S или отключаясь от нее. При этом подсистемы, входящие в S, взаимодействуют между собой. Введем вектор $\gamma(t) = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ такой, что $\gamma_i(t) = 1$, если подсистема S_i в момент времени t входит в S, $\gamma_i(t) = 0$ – в противном случае. Вектор $\gamma(t)$ называется внешней структурой системы S в момент времени t. Для задания динамики структуры $\gamma(t)$ в [1] предложено понятие системы со структурными изменениями (ССИ), которую можно отнести к классу гибридных систем. При этом для реализации ССИ был разработан метод динамической декомпозиции. Суть его состоит в том, что для описания динамики системы, помимо фазовых переменных, вводятся дополнительные переменные, задаваемые дифференциальными уравнениями. При достижении этими переменными некоторых пороговых значений происходит отключение или подключение подсистемы к системе. Тем самым система переходит в другое фазовое пространство, возможно, не мгновенно, а через некоторое время. Если допустимы только структуры вида $\gamma = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, где первые k элементов вектора структуры равны 1, а остальные – 0, и переход между структурами происходит добавлением $(k+1)$-й единицы или исключением k-й единицы, то система S называется последовательной ССИ, или S-системой. Если возможны произвольные структуры и переходы между ними, то S называется параллельной ССИ, или P-системой. Будем говорить, что S-система находится в состоянии $S(k)$, если она имеет структуру $\gamma = (1, \ldots, 0, \ldots, 0)$ с единицами на k первых местах. Рассмотрим линейную S-систему [1], которая при условии

$$y(t) \in \Delta_k = (y_k, y_{k+1}) \qquad (1)$$

задается уравнениями

$$\dot{X}_k = A_k X_k, \qquad \dot{y} = B_k^T X_k + u, \qquad (2)$$

где $X_k^T = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ – состояние системы, $\mathbb{R} \ni y(t)$ – эволюционное время [1], A_k – квадратная матрица порядка k с постоянными элементами a_{ij}, $B_k^T = (b_1, ..., b_k) \in \mathbb{R}^k$ – постоянный вектор, u – управление, y_k – заданные постоянные (пороговые значения), $k = 1, ..., n$, $y_1 = -\infty$, $y_{n+1} = +\infty$. Система S, задаваемая уравнениями (1), (2), находится в состоянии $S(k)$.

Далее, пусть при попадании траектории системы (1), (2) из области $\mathbb{R}^k \times \Delta_k$ на плоскость $y = y_k$ в некоторый момент времени t_k происходит переход из состояния $S(k)$ в состояние $S(k-1)$, $2 \leqslant k \leqslant n$, а при попадании на плоскость $y = y_{k+1}$ в момент времени t_{k+1} происходит переход в состояние $S(k+1)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. При этом отображения $\varphi_{k,k\pm1}$, осуществляющие переход из $S(k)$ в $S(k+1)$, имеют вид:

$$\varphi_{k,k-1} : Z_k \to C(k-1,k) Z_k + E_{k-1}(-\varepsilon),$$

где $Z_k = (x_1, ..., x_k, y_k)^T$, $E_{k-1}(-\varepsilon) = (0, ..., 0, -\varepsilon)^T$, $-\varepsilon)$ на k-ом месте, причем

$$0 \leqslant \varepsilon < min_k(y_{k+1} - y_k), k = 1, ..., n-1,$$

$C(k-1,k)$ – матрица размерности $k \times (k+1)$ с постоянными элементами c_{ij}, причем $c_{k,k+1} = 1$, $c_{k,j} = 0$, $j = 1, ..., k$, $c_{i,k+1} = 0$, $i = 1, ..., k-1$,

$$\varphi_{k-1,k} : Z_{k-1} \to D(k,k-1) Z_{k-1} + E_{k1}(\varepsilon),$$

где $D(k,k-1)$ – матрица размерности $(k+1) \times k$, с элементами d_{ij}, $d_{k+1,k} = 1$, $d_{k+1,j} = 0$, $j = 1, ..., k-1$, $d_{i,k} = 0$, $i = 1, ..., k$. При этом $\varphi_{k,k-1}(Z_k)$, $\varphi_{k-1,k}(Z_{k-1})$ – начальные данные для систем S_k, S_{k-1}, соответственно, а переключение происходит мгновенно.

Задача: построить управление u, переводящее систему S за конечное время из состояния S_k в состояние S_m, $k \neq m, k, m = 1, ..., n$.

Замечание 2. Рассмотренная задача отличается от традиционной задачи управления, состоящей в переводе системы из одного фазового состояния в другое. Данная система характеризуется как непрерывным состоянием (X_k, y), так и дискретным – $S(k)$. Управление происходит по дискретному состоянию.

Управление

Ниже будет предложен алгоритм построения допустимого управления вида $u = p_1 x_1 + ... + p_{k(t)} x_{k(t)}$, для которого коэффициенты p_i будут определяться в явном виде. Здесь $k(t)$–

целочисленная функция, принимающая значения из множества $\{1,...,n\}$. Перейдем к построению управления. Надо показать, что с помощью допустимого управления траектория может из любой начальной точки $M_{k0} = (X_{k0}, y_0)$, такой, что $y_0 \in \Delta_k$, попасть на гиперплоскость $y = y_k$ или $y = y_{k+1}$. Тогда, переходя от S_k к $S_{k\pm1}$, придем к терминальной системе S_m.

Будем полагать, что $X_k = 0$ – единственное асимптотически устойчивое положение равновесия системы $\dot{X}_k = A_k X_k$. Тогда $detA_k \neq 0$. Пусть $X_{k0} \neq 0$. Подставив допустимое управление в (2), получим

$$\dot{y} = (b_1 + p_1)x_1 + ... + (b_k + p_k)x_k. \qquad (3)$$

Нетрудно показать [2], что система (1), (3) имеет интегральные плоскости $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} y = c$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $(\alpha_1, ..., \alpha_{k+1})$ – ненулевое решение системы

$$a_{1i}\alpha_1 + ... + a_{ki}\alpha_k + (b_i + p_i)\alpha_{k+1} = 0, \qquad (4)$$

где $i = 1, ..., k$. Если $\alpha_{k+1} = 0$, то, в силу условия $detA_k \neq 0$, получим $\alpha_i = 0$, $i = 1, ..., k$, поэтому в ненулевом решении $\alpha_{k+1} \neq 0$. Идея построения управления, решающего задачу, состоит в нахождении вектора $(p_1, ..., p_k)$, обеспечивающего такое положение интегральной плоскости, при котором она пересекала бы ось Y при $y > y_{k+1}$ (или при $y < y_k$). Тогда в силу асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1) траектории, приближаясь к нему, пересекут плоскость $y = y_{k+1}$ или $y = y_k$. В результате произойдет переход к системе S_{k+1} (или S_k).

Пусть $y = \bar{y}$ при $X_k = 0$. Тогда из уравнения интегральной плоскости

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} y =$$
$$= \alpha_1 x_{10} + ... + \alpha_k x_{k0} + \alpha_{k+1} y_0$$

получаем

$$\bar{y} = y_0 - \frac{1}{\alpha_{k+1}}(\alpha_1 x_{10} + ... + \alpha_k x_{k0}). \qquad (5)$$

Из системы (4) находим

$$\alpha_i = \alpha_{k+1}\frac{detA_{ki}}{detA_k},$$

где A_{ki} – матрица, полученная из A_k заменой в ней i-го столбца на $-(b_1 + p_1, ..., b_k + p_k)^T$. Тогда из (5) получаем

$$\bar{y} = y_0 - \frac{1}{detA_k}(detA_{k1}x_{10} + ... + detA_{kk}x_{k0}). \quad (6)$$

Далее

$$detA_{ki} = -\sum_{j=1}^{k}(b_j + p_j)\hat{A}_{(k-1),i}(j),$$

где $\hat{A}_{(k-1),i}(j)$ – алгебраическое дополнение элемента j-й строки, i-го столбца матрицы A_{ki} или, что то же самое, матрицы A_k, $k-1$ – порядок соответствующего минора. Тогда из (5) получаем

$$\bar{y} = y_0 + \frac{1}{detA_k}\sum_{i,j=1}^{k}(b_j + p_j)\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0}. \quad (7)$$

Предположим, что следует перейти из состояния S_k в S_{k+1}. Для этого надо найти решение $p_1, ..., p_k$ неравенства

$$y_0 + \frac{1}{detA_k}\sum_{i,j=1}^{k}(b_j + p_j)\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} > y_{k+1},$$

которое сводится к неравенству

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \sum_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} >$$

$$> detA_k(y_{k+1} - y_0) - \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot \sum_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0}.$$

Лемма 1. *Существует* $j \in \{1, .., k\}$ *такое, что* $\sum\limits_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} \neq 0$.

Доказательство. Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} = detA_k(j),$$

где матрица $A_k(j)$ получена из A_k заменой ее j-й строки строкой X_{k0}^T. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $detA_k(j) = 0$ при всех $j = 1, .., k$. Тогда, раскладывая определители $detA_k(j)$ по j-й строке каждый, получаем систему равенств

$$\sum_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} = 0, j = 2, ..., k. \qquad (8)$$

Поскольку по условию $X_{k0} \neq 0$, то найдется компонента $x_{i0} \neq 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $x_{10} \neq 0$. Далее, раскладывая $detA_k$ по первому столбцу и выражая алгебраические дополнения, входящие в это разложение из равенств (8), получаем

$$detA_k = \sum_{j=1}^{k} a_{j1}\hat{A}_{(k-1)1}(j) =$$

$$= -\frac{1}{x_{10}} \sum_{i=2}^{k} x_{i0} \sum_{j=1}^{k} a_{j1} \hat{A}_{(k-1)i}(j) = 0.$$

Последнее равенство нулю обязано свойству "фальшивого разложения" определителей: сумма произведений элементов одного столбца квадратной матрицы на соответствующие алгебраические дополнения элементов других столбцов равна нулю. Поскольку по предположению $detA_k \neq 0$, то получили противоречие, доказывающее лемму. □

Далее, пусть при некотором $j = l$ имеем $A(l) := \sum_{i=1}^{k} \hat{A}_{(k-1),i}(l) x_{i0} = 0$. Тогда для разрешимости неравенства, предшествующего лемме, достаточно, чтобы p_l удовлетворяло неравенству

$$p_l > \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \hat{A}_{(k-1),i}(l) x_{i0}} (detA_k(y_{k+1} - y_0) - \Sigma_1 - \Sigma_2) \tag{9}$$

если $A(l) > 0$, где

$$\Sigma_1 = \sum_{i,j=1}^{k} b_j x_{i0} \hat{A}_{(k-1),i}(j),$$

$$\Sigma_2 = \sum_{j=1, j\neq l}^{k} p_j \sum_{i=1}^{k} x_{i0} \hat{A}_{(k-1),i}(j),$$

или противоположному неравенству, если $A(l) < 0$. Переход от S_k к S_{k-1} осуществляется аналогично, с той разницей, что неравенства (9) в случаях $A(l) > 0$ и $A(l) < 0$ берутся противоположными. Получаем окончательный результат.

Теорема 1. *Пусть $X_k = 0$ – единственное асимптотически устойчивое положение равновесия системы (1) при $k = 1, ..., n$. Тогда управление $u = p_1 x_1 + ... + p_k x_k$, где коэффициенты p_i удовлетворяют (9), обеспечивает переход системы из состояния S_k в S_{k+1} при любом начальном $X_k \neq 0$. Если же выполняются противоположные неравенства (при $A(l) > 0$ и $A(l) < 0$, соответственно), то происходит переход от S_k к S_{k-1}.*

Замечание 3. В силу неоднозначности значений коэффициентов p_i управления можно поставить задачу оптимальной стабилизации структуры в смысле некоторого критерия.

Заключение

Предложен метод решения задачи управляемости линейной последовательной системой со структурными изменениями. При этом поставлена нетрадиционная задача управления дискретным состоянием системы, а не ее фазовым вектором. Строится соответствующее управление в виде линейной обратной связи.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках реализации стратегического развития ПетрГУ.

Литература

1. *Кириллов А. Н.* Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2006. № 4. С. 127–131.

2. *Кириллов А. Н.* Задача оптимального управления в системе со структурными изменениями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 9. С. 2–7.

3. *Куржанский А. Б., Точилин П. А.* Слабоинвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. № 11. С. 1523–1533.

4. *Chang A.* An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. Autom. Control. 1965. № 1. P. 112–114.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Галахова Мария Евгеньевна
аспирантка
Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров
ул. Ивана Черных, 4, Санкт-Петербург, Россия, 198095
эл. почта: secretgate@mail.ru
тел.: (8812) 7712780

Galakhova, Mariya
State Technological University of Plant Polymers
4 Ivan Chernykh St., 198095 Saint-Petersburg, Russia
e-mail: secretgate@mail.ru
tel.: (8812) 7712780

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Kirillov, Alexandr
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 22–32

УДК 519.6:539.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДОРОДОПРОНИЦАЕМОСТИ СКВОЗЬ ДЕФЕКТ ЗАЩИТНОГО ПОКРЫТИЯ

Ю. В. Заика, Е. К. Костикова

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Рассматривается водородопроницаемость цилиндрической перегородки при наличии дефекта защитного покрытия на входной поверхности конструкционного материала. Лимитирующим фактором является диффузия. На основе неявной разностной схемы разработан вычислительный алгоритм решения соответствующей краевой задачи, приведены результаты численного моделирования проникающего потока.

Ключевые слова: водородопроницаемость, краевые задачи, разностные схемы, численное моделирование.

Yu. V. Zaika, E. K. Kostikova. MODELING OF HYDROGEN PERMEABILITY THROUGH PROTECTIVE COATING DEFECT

We consider the hydrogen permeability of a cylindrical barrier with a protective coating defect at the inlet surface of the structural material. Diffusion is the limiting factor. The computing algorithm based on implicit difference scheme was developed for solving the corresponding boundary-value problem. Results of numerical modeling of the permeability flux are presented.

Key words: hydrogen permeability, boundary-value problems, difference schemes, numerical modelling.

Постановка задачи

Снижение проникновения водорода и его изотопов сквозь конструкционные материалы является одной из важнейших задач при решении комплексных проблем хранения и транспортировки водорода, защиты от водородного охрупчивания, контроля содержания трития в защитных системах реакторов (проект ITER). Конструкция из металла или сплава обеспечивает необходимую механическую прочность, а нанесенное защитное покрытие должно препятствовать миграции изотопов водорода. Дефекты защитной пленки могут подвергать соответствующую область конструкционного материала прямому воздействию водорода. Исследование влияния на водородопроницаемость геометрических факторов на поверхности (шероховатости, трещин) и в объеме (дефектов кристаллической структуры, пор) представлено в [5]. В статье [12] анализируется модель водородопроницаемости цилиндрического образца (радиуса основания L и высоты H), когда диффузия является единственным лимитирующим процессом. На входной поверхности $z=0$, покрытой тонкой защитной пленкой, присутствует дефект покрытия малого радиуса r_0 («булавочное отверстие»), через который проникает водород. Остальная часть входной поверхности водородонепроницаема, как и боковая поверхность. На выходной стороне $z=H$ поддерживается вакуум. В начальный момент времени $t=0$ образец обезводорожен. Затем на входной стороне скачкообразно повышается давление молекулярного водорода до уровня p. Если пренебречь относительно быстрым (это зависит от p, материала и размеров образца) переходным процессом, то можно считать, что концентрация растворенного водорода под дефектом поддерживается на постоянном уровне $\bar{c}$ (находится в равновесии с газообразной фазой по закону Сивертса, $\bar{c} \propto \sqrt{p}$). Растворенный (атомарный) водород диффундирует к выходной поверхности, рекомбинирует в молекулы и десорбируется. С помощью масс-спектрометра регистрируется проникающий поток.

Аналитический анализ соответствующей краевой задачи проведен лишь для случая «бесконечной пластины» ($L \to +\infty$) [10, 11]. Основным недостатком является то, что динамика поверхностных процессов, которым в последнее время уделяется повышенное внимание, в модели не учитывается.

Цель работы — построить на основе разностной аппроксимации вычислительный алгоритм моделирования водородопроницаемости цилиндрического образца («перегородки трубопровода») при наличии дефекта защитного покрытия. Результаты численного моделирования позволяют, в частности, оценить влияние граничных условий и геометрических характеристик перегородки и дефекта на уровень стационарной проницаемости, времена установления и запаздывания.

Диффузионная модель

Рассмотрим краевую задачу водородопроницаемости цилиндрической перегородки с дефектом в центре круга защитного покрытия входной поверхности, когда лимитирующим фактором является диффузия [10–12]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

$$r \in (0,L),\ z \in (0,H),\ t \in (0,t_*),$$

$$c(t,r,0) = c_0, \quad r \in [0,r_0],\ r_0 < L, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z}(t,r,0) = 0,\ r \in (r_0,L],\ t \geqslant 0, \qquad (3)$$

$$c(t,r,H) = 0, \quad r \in [0,L], \quad t \geqslant 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}(t,L,z) = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial r}(t,+0,z) = 0, \qquad (5)$$

$$c(0,r,z) = 0,\ r \in [0,L],\ z \in [0,H]. \qquad (6)$$

Здесь $c(t,r,z)$ — концентрация атомарного водорода в конструкционном материале (металле или сплаве); $c_0 = \mathrm{const}$ (для определенности считаем $c_0 = \bar{c}$); D — коэффициент диффузии. Предполагается, что эксперимент проводится при постоянной температуре $T = \overline{T}$, материал практически однороден, так что c_0, D — константы. Линейные размеры дефекта относительно малы, считаем его круговым. Момент времени t_* определяется выходом проникающего потока на стационарное значение. Установление носит асимптотический характер: $J(t) \approx \mathrm{const}$, $t \geqslant t_*$. Но t_* не следует выбирать слишком большим, чтобы переходные процессы «не потерялись» на фоне стационара. Граничное условие (2) соответствует быстрому (в масштабе t_*) достижению локального равновесия. Условие $c_r(t,+0,z)=0$ следует из симметрии распределения $c(t,r,z)$.

Уточнение постановки задачи. В рамках модели (1)–(6) задача состоит в разработке алгоритма численного моделирования потока водорода с выходной поверхности:

$$J(t) = -D\int_0^L \frac{\partial c}{\partial z}\Big|_{z=H} 2\pi r\, dr.$$

Замечание 1. Формально нулевые начальные данные (6) не согласованы с начальным условием (2) при $t=+0$ (мгновенный скачок концентрации). Решение краевой задачи следует понимать в рамках теории обобщенных решений. При последующей дискретизации модели на нескольких первых шагах по времени учтен реальный (пусть и относительно быстрый) переходный процесс.

Разностная аппроксимация

По стандартной технике [9], введем сетки

$$\Omega_h=\left\{(r_i,z_j)\middle|\begin{array}{l} r_i=ih_r,\ i=0,...,N_1,\ h_r=L/N_1\\ z_j=jh_z,\ j=0,...,N_2,\ h_z=H/N_2\end{array}\right\},$$

$$\omega_\tau=\left\{\,t_k=k\tau,\ k=0,1,...,K,\ \tau=t_*/K\right\}.$$

Обозначим через $c_{i,j}^k$ приближенные значения объемной концентрации $c(t_k,r_i,z_j)$. С целью некоторого технического упрощения изложения при переходе с k-го на $(k+1)$-й слой по времени t будем опускать номер слоя:

$$c_{i,j}=c_{i,j}^k,\quad \bar c_{i,j}=c_{i,j}^{k+1/2},\quad \hat c_{i,j}=c_{i,j}^{k+1}.$$

Для уравнения (1) рассмотрим неявную разностную схему метода переменных направлений, называемую продольно-поперечной (схемой Писмена-Рэкфорда) [2]. Переход от слоя k к слою $(k+1)$ осуществляется в два этапа. На первом этапе определяются промежуточные значения $\bar c_{i,j}$ из соотношений

$$\frac{\bar c_{i,j}-c_{i,j}}{0{,}5\,\tau D}=\frac{c_{i,j-1}-2\,c_{i,j}+c_{i,j+1}}{h_z^2}+ \\ +\frac{\bar c_{i-1,j}-2\,\bar c_{i,j}+\bar c_{i+1,j}}{h_r^2}+\frac{\bar c_{i+1,j}-\bar c_{i-1,j}}{2\,r_ih_r}.$$

На втором этапе, пользуясь уже известными $\bar c_{i,j}$, находим $\hat c_{i,j}$ из системы уравнений

$$\frac{\hat c_{i,j}-\bar c_{i,j}}{0{,}5\,\tau D}=\frac{\hat c_{i,j-1}-2\,\hat c_{i,j}+\hat c_{i,j+1}}{h_z^2}+ \\ +\frac{\bar c_{i-1,j}-2\,\bar c_{i,j}+\bar c_{i+1,j}}{h_r^2}+\frac{\bar c_{i+1,j}-\bar c_{i-1,j}}{2\,r_ih_r}. \quad (7)$$

Данные выражения (для первого и второго этапа) рассматриваются во внутренних узлах (при $i=2,...,N_1-1,\ j=1,...,N_2-1$). Погрешность аппроксимации есть $O(\tau^2+h_r^2+h_z^2)$.

Прогонка по радиусу r

Рассмотрим переход с k-го на $(k+1/2)$-й слой. В обозначениях $\varkappa=2\big(1+h_r^2/[D\tau]\big)$,

$$A_i=\frac{1-[2i]^{-1}}{\varkappa},\quad B_i=\frac{1+[2i]^{-1}}{\varkappa},\quad \Big(i=\frac{r_i}{h_r}\Big),$$

$$F_{i,j}=\Big(\frac{h_r}{h_z}\Big)^2\frac{c_{i,j-1}-2c_{i,j}+c_{i,j+1}}{\varkappa}+\Big[1-\frac{2}{\varkappa}\Big]c_{i,j}$$

при каждом фиксированном $j=1,2,\ldots,N_2-1$ получаем при $k\geqslant 0$

$$A_i\bar c_{i-1,j}-\bar c_{i,j}+B_i\bar c_{i+1,j}+F_{i,j}=0,\ (0<i<N_1). \quad (8)$$

Значения в начальный момент времени известны: $c_{i,j}^0=0$. Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на $(k+1/2)$-м слое $(k\geqslant 0)$ в виде

$$\bar c_{i,j}=\alpha_{i+1,j}\,\bar c_{i+1,j}+\beta_{i+1,j},\ i=0,...,N_1-1. \quad (9)$$

Прогоночные коэффициенты: $i=2,3,\ldots,N_1$,

$$\alpha_{i,j}=\frac{B_{i-1}}{1-A_{i-1}\,\alpha_{i-1,j}},\qquad \beta_{i,j}=\frac{F_{i-1,j}+A_{i-1}\,\beta_{i-1,j}}{1-A_{i-1}\alpha_{i-1,j}}. \quad (10)$$

Варианты начальных коэффициентов

- Запишем соотношение (8) для $i=1$:

$$\frac{1}{2\varkappa}\,\bar c_{0,j}-\bar c_{1,j}+\frac{3}{2\varkappa}\,\bar c_{2,j}+F_{1,j}=0. \quad (11)$$

  Используя второе из граничных условий (5) $(c_r|_{+0}=0)$, с точностью до $O(h_r^2)$

$$-\bar c_{2,j}+4\bar c_{1,j}-3\bar c_{0,j}\approx \\ \approx 2h_rc_r(t_{k+1/2},+0,z_j)=0. \quad (12)$$

  Учитывая (11) и (12), находим

$$\alpha_{1,j}=(6-\varkappa)/4,\quad \beta_{1,j}=F_{1,j}\,\varkappa/4. \quad (13)$$

- При $r\to+0$ имеем

$$c_r/r=(c_r(t,r,z)-c_r(t,+0,z))/r\approx c_{rr}.$$

  Начальные прогоночные коэффициенты $\alpha_{1,j}$, $\beta_{1,j}$ находим из аппроксимации уравнения $c_t=D(2c_{rr}+c_{zz})$ на $(k+1/2)$-м слое при $i=1$ и условия $c_r|_{+0}=0$:

$$2(\bar c_{0,j}+\bar c_{2,j})/\varkappa-\bar c_{1,j}(1+2/\varkappa)+F_{1,j}=0, \quad (14)$$

  $\bar c_{2,j}=4\bar c_{1,j}-3\bar c_{0,j}$, откуда

$$\alpha_{1,j}=(6-\varkappa)/4,\quad \beta_{1,j}=F_{1,j}\,\varkappa/4. \quad (15)$$

  Получили те же выражения, что и (13).

- Для нахождения начальных прогоночных коэффициентов воспользуемся осевой симметрией. Значению $r=0$ соответствует ось цилиндра. Формально пространственную область $[0,L]\times[0,H]$ можно рассматривать как половину осевого сечения цилиндра. Ориентируясь на общую идею метода фиктивных областей [8], формально добавим симметричный узел $(i=-1)$ и положим $\bar c_{-1,j}=\bar c_{1,j}$,

$$\bar c_{-1,j}\approx c(t_{k+1/2},-h_r,z_j)=c(t_{k+1/2},h_r,z_j).$$

Продолжая действовать формально, запишем уравнение (8) для $i = 0$ ($r \approx 0$), учитывая условие симметрии $\bar{c}_{-1,j} = \bar{c}_{1,j}$:

$$\frac{\bar{c}_{-1,j}}{\varkappa}\Big(1-\frac{h_r}{2r}\Big)-\bar{c}_{0,j}+\frac{\bar{c}_{1,j}}{\varkappa}\Big(1+\frac{h_r}{2r}\Big)+F_{0,j} = 0.$$

Особенность (деление на $r \approx 0$) при условии $\bar{c}_{-1,j} = \bar{c}_{1,j}$ «сокращается», получаем $\alpha_{1,j} = 2/\varkappa$, $\beta_{1,j} = F_{0,j}$. Отметим, что при $h_r^2/[D\tau] \to 1$ начальные прогоночные коэффициенты такие же, как и в (13), (15). Сравнимости по порядку $h_r^2/[D\tau] \sim 1$ целесообразно придерживаться из соображений соизмеримости ошибок аппроксимации производных по времени и пространственным переменным.

- Продолжим функцию симметрично: $c(t, r, z) = c(t, -r, z)$ ($r < 0$), т. е. допустим $r \in [-L, L]$, оставив то же уравнение диффузии. Непосредственно при $r = 0$ имеем за счет $c_r|_{+0} = 0$ разрешимую особенность: $c_t = D(2c_{rr} + c_{zz})$, $r = \pm 0$. Формально «склеим» уравнение диффузии на $[-L, L]$. Аналогично соотношению (14) получаем

  $$2(\bar{c}_{-1,j} + \bar{c}_{1,j})/\varkappa - \bar{c}_{0,j}(1 + 2/\varkappa) + F_{0,j} = 0.$$

  Положив $\bar{c}_{-1,j} = \bar{c}_{1,j}$, находим

  $$\alpha_{1,j}=4/(2+\varkappa),\ \beta_{1,j}=F_{0,j}\varkappa/(2+\varkappa). \quad (16)$$

Численные эксперименты показали, что все варианты нахождения начальных коэффициентов при расчете на достаточно мелкой сетке приводят к одинаковым результатам.

После выполнения прямого хода прогонки (вычисления $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$) *ближайшая цель* — найти значение $\bar{c}_{N_1,j}$, необходимое для реализации обратного хода прогонки. Запишем аппроксимацию первого из граничных условий (5) при $r = L$ $\big(c_r(t, L, z) = 0\big)$. В граничном узле с точностью до $O(h_r^2)$ [1] имеем

$$2h_r c_r(t_{k+1/2}, L, z_j) \approx \bar{c}_{N_1-2,j} - 4\bar{c}_{N_1-1,j} + 3\bar{c}_{N_1,j}.$$

Подставляя значения $\bar{c}_{N_1-2,j}$, $\bar{c}_{N_1-1,j}$ из соотношения (9), находим

$$\bar{c}_{N_1,j} = \frac{\beta_{N_1,j}(4-\alpha_{N_1-1,j}) - \beta_{N_1-1,j}}{3+\alpha_{N_1,j}(\alpha_{N_1-1,j}-4)}.$$

По формуле (9) $\big(\bar{c}_{i,j} = \alpha_{i+1,j}\,\bar{c}_{i+1,j} + \beta_{i+1,j}$, $i = 0,..., N_1 - 1\big)$ определяем искомые значения $\bar{c}_{i,j}$, $i = 0, \ldots, N_1 - 1$, $j = 1, \ldots, N_2 - 1$.

Теперь найдем оставшиеся приближения $\bar{c}_{i,j}$ при $j = 0$ и $j = N_2$, $i = 0, 1, \ldots, N_1$. Значения $\bar{c}_{i,N_2} = 0$ согласно граничному условию (4) при $z = H$ $\big(c(t, r, H) = 0\big)$. Введем обозначение $i_0 = \max\{i\colon r_i \leqslant r_0\}$. Тогда из граничных условий (2), (3) ($z = 0$) получаем приближения $\bar{c}_{i,0} = c_0$, $i = 0, 1, \ldots, i_0$ и $\bar{c}_{i,0} = (4\bar{c}_{i,1} - \bar{c}_{i,2})/3$, $i = i_0 + 1, \ldots, N_1$.

Прогонка по переменной z

Поскольку в цилиндрических координатах возникает особенность при $r \to +0$, и на границе $z = 0$ задано смешанное краевое условие, то переход с $(k + 1/2)$-го на $(k + 1)$-й слой по времени совершается в два шага.

Первый шаг: $i = 1$, $r \to +0$ (аппроксимируем $c_r/r \approx c_{rr}$), реализуется алгоритм прогонки для уравнения $c_t = D(2c_{rr}+c_{zz})$. Аппроксимация уравнения $c_t = D(2c_{rr} + c_{zz})$:

$$\frac{\hat{c}_{1,j} - \bar{c}_{1,j}}{0{,}5\,\tau D} = \frac{\hat{c}_{1,j-1} - 2\,\hat{c}_{1,j} + \hat{c}_{1,j+1}}{h_z^2} + {} + 2\,\frac{\bar{c}_{0,j} - 2\,\bar{c}_{1,j} + \bar{c}_{2,j}}{h_r^2}.$$

В обозначениях $G = 2\big(1 + h_z^2/[D\tau]\big)$,

$$\bar{F}_{1,j} = 2\Big(\frac{h_z}{h_r}\Big)^2\big(\bar{c}_{0,j} - 2\bar{c}_{1,j} + \bar{c}_{2,j}\big)+(G-2)\bar{c}_{1,j}$$

получаем

$$\hat{c}_{1,j-1} - G\,\hat{c}_{1,j} + \hat{c}_{1,j+1} + \bar{F}_{1,j} = 0,\ \ k \geqslant 0. \quad (17)$$

Ищем приближенные значения концентрации на $(k + 1)$-м слое по времени в виде

$$\hat{c}_{1,j}=\alpha_{1,j+1}\hat{c}_{1,j+1}+\beta_{1,j+1},\ j=0,..., N_2-1. \quad (18)$$

Подставляя в (17), находим прогоночные коэффициенты: $j = 2, 3, \ldots, N_2$,

$$\alpha_{1,j}=\frac{1}{G-\alpha_{1,j-1}},\ \beta_{1,j}=\frac{\bar{F}_{1,j-1}+\beta_{1,j-1}}{G-\alpha_{1,j-1}}. \quad (19)$$

Начальные коэффициенты $\alpha_{1,1}$, $\beta_{1,1}$ находим из формулы (18) при $j = 0$ и условия (2) ($\hat{c}_{1,0} = c_0$): $\alpha_{1,1} = 0$, $\beta_{1,1} = c_0$.

Второй шаг: $i = 2, \ldots, N_1-1$, $r > 0$, прогонка для уравнения (1) ($c_t = D(c_{rr} + c_r/r + c_{zz})$). Из разностного соотношения (7), обозначив

$$\bar{F}_{i,j} = \Big(\frac{h_z}{h_r}\Big)^2\bigg[\Big(1-\frac{1}{2i}\Big)\bar{c}_{i-1,j} - {} - 2\Big(1-\frac{h_r^2}{D\tau}\Big)\bar{c}_{i,j} + \Big(1+\frac{1}{2i}\Big)\bar{c}_{i+1,j}\bigg],$$

при каждом $i = 2, 3, \ldots, N_1 - 1$ получаем

$$\hat{c}_{i,j-1} - G\hat{c}_{i,j} + \hat{c}_{i,j+1} + \bar{F}_{i,j} = 0, \quad k \geqslant 0. \qquad (20)$$

Ищем значения концентрации в узлах сетки на $(k+1)$-м слое по времени в виде

$$\hat{c}_{i,j} = \alpha_{i,j+1}\,\hat{c}_{i,j+1} + \beta_{i,j+1}, \; j = 0, ..., N_2. \qquad (21)$$

Прогоночные коэффициенты: $j = 2, 3, \ldots, N_2$,

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{G - \alpha_{i,j-1}}, \;\; \beta_{i,j} = \frac{\bar{F}_{i,j-1} + \beta_{i,j-1}}{G - \alpha_{i,j-1}}. \qquad (22)$$

Начальные коэффициенты при $r \leqslant r_0$ $(i \leqslant i_0)$ находим из (21) $(j = 0)$ и условия (2) $\hat{c}_{i,0} = c_0$: $\alpha_{i,1} = 0$, $\beta_{i,1} = c_0$. Начальные коэффициенты при $r > r_0$ $(i > i_0)$ определяем из (20) при $j = 1$ и условия (3) $c_z(t, r, 0) = 0, r > r_0$: $\alpha_{i,1} = 2 - G/2$, $\beta_{i,1} = \bar{F}_{i,1}/2$.

Граничные значения, необходимые для реализации обратного хода прогонки, находим из условия (4): $\hat{c}_{i,N_2} = 0$. По формулам (18), (21) вычисляем значения $\hat{c}_{i,j}$ для $i = 1, \ldots, N_1 - 1$, $j = 0, \ldots, N_2 - 1$.

Найдем оставшиеся значения $\hat{c}_{i,j}$ при $i = 0$ и $i = N_1$, $j = 0, 1, \ldots, N_2$. Используя второе из условий (5) $(c_r|_{+0} = 0)$, из аппроксимации (12) получаем $\hat{c}_{0,j} = (4\hat{c}_{1,j} - \hat{c}_{2,j})/3$. Аналогично, согласно первому условию (5) $c_r(t, L, z) = 0$ и

$$\hat{c}_{N_1,j} = (4\hat{c}_{N_1-1,j} - \hat{c}_{N_1-2,j})/3.$$

Как и на этапе прогонки по r можно предложить другой вариант вычислений с использованием дополнительного (фиктивного) узла. В этом случае значения концентрации на границе $(i = 0)$ можно искать в цикле прогонки по переменной z, а при нахождении $\bar{F}_{0,j}$ формально считать, что имеются узлы $\hat{c}_{-1,j}$ $(\hat{c}_{-1,j} = \hat{c}_{1,j})$.

Вычислительный алгоритм

Для контроля вычислений используем критерий материального баланса в объеме:

$$\int_0^{t_*} \Big[-D\int_0^{r_0} \frac{\partial c}{\partial z}\Big|_0 2\pi r\,dr \Big] dt - \\ - \int_0^{t_*} \Big[-D\int_0^{L} \frac{\partial c}{\partial z}\Big|_H 2\pi r\,dr \Big] dt = \\ = \int_0^{H}\int_0^{L} c(t_*, r, z)\, 2\pi r\,dr dz.$$

Слева — разность количеств атомов водорода, растворившихся в образце на входной стороне сквозь дефект покрытия и покинувших выходную сторону, а справа — количество H, находящихся в материале. Вместо t_* можно использовать и другие «контрольные» значения t.

Обозначим входной и выходной потоки через

$$J_0(t) = -D\int_0^{r_0} \frac{\partial c(t,r,0)}{\partial z}\, 2\pi r\,dr,$$

$$J_H(t) = -D\int_0^{L} \frac{\partial c(t,r,H)}{\partial z}\, 2\pi r\,dr.$$

В программной реализации предусмотрен контроль дисбаланса относительно входного потока на уровне процента:

$$\frac{\Big|\int_0^{t_*} J_0(t)\,dt - \int_0^{t_*} J_H(t)\,dt - \int_0^{H}\int_0^{L} c(t_*, r, z) 2\pi r\,dr dz\Big|}{\int_0^{t_*} J_0(t)\,dt} \leqslant 0,01.$$

Для повышения точности результата вычислений использовалось *правило Рунге-Ромберга* [1]. Кратко приведем его реализацию в контексте рассматриваемой задачи. Первая и вторая производная по переменной r заменялись центральными разностными производными, поэтому, выполнив дополнительную серию расчетов с шагом по радиусу $(h_r/2)$, можно улучшить аппроксимацию в объеме на два порядка. Уточненные значения концентрации находим по формуле

$$C(t, r, z) = \big(4c_{h_r/2}(t, r, z) - c_{h_r}(t, r, z)\big)/3. \qquad (23)$$

Чтобы сохранить общий порядок аппроксимации $O(h_r^4 + h_z^2 + \tau^2)$, в граничных узлах сетки с точностью до $O(h_r^4)$ (используем метод неопределенных коэффициентов [7]) полагаем для c_r

$$c_r(t, L, z_j) \approx \frac{3c_{N_1-4,j} - 16c_{N_1-3,j} + 36c_{N_1-2,j} - 48c_{N_1-1,j} + 25c_{N_1,j}}{24h_r}. \qquad (24)$$

Приведем в компактной форме *алгоритм вычислений*. Переход от k-го слоя по времени к $(k+1)$-му осуществляется в два этапа.

I-й этап: на $(k+1/2)$-м слое ($k \geqslant 0$) проводим следующие вычисления.

1. Вычисляем прогоночные коэффициенты $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ по формулам (13). Находим значение концентрации $c_{N_1,j}$ для граничного узла из аппроксимации $c_r(t,L,z) = 0$ с точностью до $O(h_r^4)$ по формуле (24). Обратным ходом прогонки восстанавливаем значения концентрации в оставшихся узлах.
2. В соответствии с граничными условиями (2), (3) и (4) определяем значения концентрации $c_{i,j}$ для $j = 0$ и $j = N_2$, $i = 0, 1, \ldots, N_1$.
3. Выполняем повторно пункты $1, 2$ с шагом по радиусу $h_r/2$. По правилу Рунге-Ромберга (формула (23)) находим уточненные значения концентрации во всех узлах слоя.

II-й этап — переход на $(k+1)$-й слой.

1. Для $i = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$ вычисляем наборы прогоночных коэффициентов $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$ по формулам (19), (22). В силу граничного условия $c_{i,N_2} = 0$. Обратным ходом прогонки восстанавливаем значения концентрации в узлах сетки по формулам (18), (21).
2. В соответствии с граничными условиями $c_r|_{r=+0,L} = 0$ определяем значения концентрации $c_{i,j}$ ($i = 0$ и $i = N_1$, $j = 0, 1, \ldots, N_2$) с точностью до $O(h_r^4)$ согласно формуле (24).
3. Выполняем повторно пункты $1, 2$ с половинным шагом по радиусу (на $(k+1/2)$-м слое по времени). По правилу Рунге-Ромберга (см. (23)) находим уточненные значения концентрации во всех узлах слоя.
4. Проверяем выполнение материального баланса с заданной точностью.

Результаты моделирования

Безразмерная форма краевой задачи

Для численного моделирования перейдем к безразмерным переменным, используя естественные для данной задачи нормировки: $u = c/c_0$, $\rho = r/L$, $\zeta = z/H$, $\tau = (D/L^2)t$. Значение L^2/D интерпретируется как характерное время диффузионного выравнивания концентрации [4] в области с линейными размерами порядка L (в вертикальном направлении, по оси z, диффузия при сравнимых H быстрее вследствие вакуумирования с выходной стороны). Обозначив $\rho_0 = r_0/L$, $R = L/H$, приходим к безразмерной краевой задаче:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\Big) + R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},\\
&\rho \in (0,1),\ \zeta \in (0,1),\ \tau > 0,\\
&u(\tau,\rho,0) = 1, \quad \rho \in [0,\rho_0],\ \rho_0 < 1,\\
&\frac{\partial u}{\partial \zeta}(\tau,\rho,0) = 0, \quad \rho \in (\rho_0, 1],\ \tau \geqslant 0,\\
&u(\tau,\rho,1) = 0, \quad \rho \in [0,1],\ \tau \geqslant 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial \rho}(\tau,1,\zeta) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(\tau,+0,\zeta) = 0,\ \zeta \in [0,1],\\
&u(0,\rho,\zeta) = 0, \quad \rho \in [0,1],\ \zeta \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Варьируемыми являются $R > 0$ и $\rho_0 \in (0,1)$. Формально получили уравнение диффузии в анизотропной среде: $D_\rho = 1$, $D_\zeta = R^2$. Чем меньше H (тоньше перегородка), тем быстрее диффузия в направлении ζ (оси z). Коэффициент D_ζ отражает соотношение геометрических характеристик образца. За «время» τ характерной «длиной» по ρ является величина $\sqrt{\tau}$, а по ζ — $R\sqrt{\tau}$. Установление ($u_\tau \approx 0$) определяется значением $\tau_* = (D/L^2)t_*$.

Введем безразмерный усредненный (по основанию площади π) выходной поток

$$U(\tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 R^2 \frac{\partial u}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta=1} 2\pi\rho\, d\rho.$$

Функция $U(\tau)$ монотонно растет, выходя асимптотически на стационарное значение $U_* = U(\tau_*)$. В отсутствие защитного покрытия (формально $\rho_0 = 1$) имеем максимум $U_* = R^2$.

Исходный усредненный поток имеет вид

$$\frac{J(t)}{\pi L^2} = \frac{Dc_0}{H}\, V(\tau), \quad \big(\tau = DL^{-2}t\big),$$

$$V(\tau) = R^{-2}U(\tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta=1} 2\pi\rho\, d\rho.$$

Величина Dc_0/H равна плотности проникающего стационарного потока в отсутствие защитного покрытия ($\rho_0 = 1$). Следовательно, число $V(DL^{-2}t) \in (0,1)$ является долей $J(t)/(\pi L^2)$ в максимально возможной плотности выходного потока Dc_0/H. В пределе имеем максимум $V_* = R^{-2}U_* = 1$ ($\rho_0 = 1$).

Для определенности фиксируем диапазон коэффициента диффузии D: 10^{-7} – 10^{-5} см$^2/c$, и будем рассматривать цилиндрическую перегородку, соизмеримую с мелкой монетой. В безразмерной модели остановимся на следующих значениях параметров:

$$\rho_0 = \{1/50, 2/50, \ldots, 1/5\},$$
$$R = \{1/3, 1/2, 7/10, 1, 3/2, 3, 5, 7, 10\}.$$

На начальных шагах по времени, когда в образце еще пренебрежимо мало водорода, но в приповерхностном объеме под дефектом покрытия уже устанавливается концентрация $u(\rho, 0) = 1$ ($\rho \leqslant \rho_0$), происходит резкий скачок концентрации в узлах, прилегающих к дефекту, что приводит к росту погрешности по критерию материального баланса. Чтобы сгладить этот начальный всплеск, при решении безразмерной задачи концентрацию водорода под дефектом защитного покрытия наращиваем постепенно, но относительно быстро. Это соответствует физическим предположениям и лишь формализовано в модели начальным скачком концентрации. Для относительно малых шагов $\Delta\tau$ (порядка секунды в исходном времени t — за это время ничего значительного в «копейке» не произойдет) определим $u(\Delta\tau, \rho, 0) = 10^{-3}$, $u(2\Delta\tau, \rho, 0) = 10^{-2}$, $u(3\Delta\tau, \rho, 0) = 10^{-1}$, $u(4\Delta\tau, \rho, 0) = 0,5$, $u(5\Delta\tau, \rho, 0) = 1$, $\rho \leqslant \rho_0$. За пять шагов выходим на уровень $u = 1$ под дефектом и за счет этого сглаживаем начальный модельный всплеск входного потока. Формально при контроле материального баланса сдвигаем время начала эксперимента: $0 \to 5\Delta\tau$.

Выходными параметрами эксперимента являются τ_*, τ_0, U_*, V_*, где τ_0 — время запаздывания, вычисляемое по формуле

$$\tau_0 = \tau_* - S(\tau_*)/\dot{S}(\tau_*) = \tau_* - S(\tau_*)/U(\tau_*),$$
$$S(\tau) \equiv \int_0^\tau U(\tau)\, d\tau \quad (\dot{S} \equiv dS/d\tau).$$

В исходном времени $t_0 = t_* - \int_0^{t_*} J(t)\, dt / J(t_*)$. Геометрически это точка пересечения асимптоты графика количества проникающего сквозь перегородку водорода с осью t. С учетом асимптотического характера выхода на стационарный режим проницаемости точность вычислений $\tau_0(t_0)$ возрастает с ростом $\tau_*(t_*)$. Время выхода на стационар, значения установившегося потока и время запаздывания — регистрируемые величины, являющиеся входной информацией при решении обратной задачи оценки кинетических параметров проницаемости по экспериментальным данным.

Критерий останова и тестирование

При выборе критерия останова использовались два условия:

$$\Big\{U(\tau_n) > \alpha(\rho_0 R)^2\Big\} \wedge \Big\{\frac{U(\tau_n) - U(\tau_{n-\bar{n}})}{CR^2} < \varepsilon\Big\}.$$

Здесь первое условие необходимо, чтобы исключить останов в начале эксперимента, когда выходной поток очень мал. Ориентиром является $\max U(\tau_*) = R^2$ ($\rho_0 = 1$) и пропорциональность (в линейном приближении) потока площади дефекта ($\sim \rho_0^2$). Коэффициент α является эмпирическим, в рассматриваемом диапазоне параметров модели использовалось значение $\alpha = 1/30$. Второе условие срабатывает, когда изменение потока относительно мало в течение «заметного» времени реального эксперимента (например, $t_n - t_{n-\bar{n}} \sim 1$ мин.).

Второй вариант критерия останова:

$$\Big\{\ddot{U}(\tau_n) < 0\Big\} \wedge \Big\{\frac{U(\tau_n) - U(\tau_{n-\bar{n}})}{C \cdot R^2} < \varepsilon\Big\}.$$

В этом случае первое условие учитывает, что графики усредненного потока имеют точку перегиба: сначала кривая выпуклая, а по мере насыщения образца становится вогнутой. Цель первого условия в этом критерии та же — не остановить вычисления преждевременно.

В данной работе решается прямая задача с целью выявления качественных зависимостей величин U_*, τ_*, τ_0 от параметров модели.

На рис. 1–3 представлены результаты численных экспериментов для различных C $\big([D] =$см$^2/c\big)$: $C_1 = \rho_0^2$ (моменты останова для соответствующего значения ε обозначены $\bigcirc$), $C_2 = U(\tau_{n-\bar{n}})$($\blacksquare$), $C_3 = \tau_n - \tau_{n-\bar{n}}$ ($\triangle$). Результаты для различных R, ρ_0, D показали, что на модельных кривых наиболее приемлемо ограничение «производной» выходного потока ($\triangle$). В последующих расчетах использовался второй критерий при $C = C_3$ и $\varepsilon = 10^{-3}$.

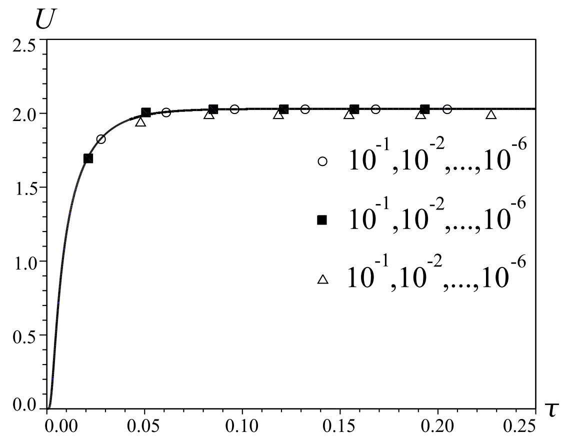

Рис. 1. Останов: $D = 10^{-5}$, $R = 5$, $\rho_0 = 0,2$

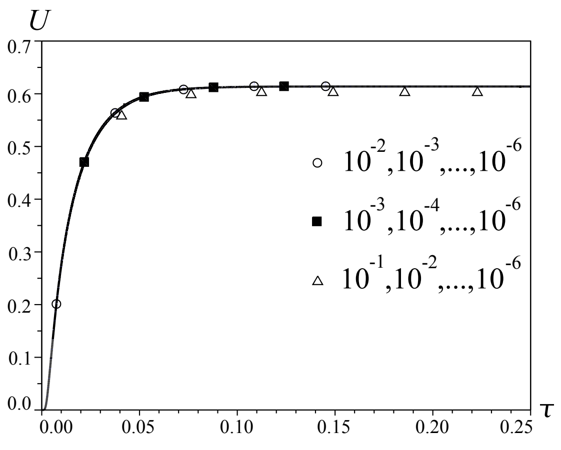

Рис. 2. Останов: $D = 10^{-7}$, $R = 5$, $\rho_0 = 0,08$

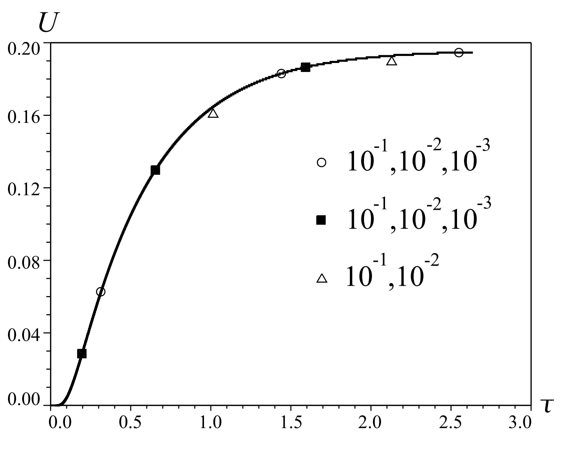

Рис. 3. Останов: $D = 10^{-5}$, $R = 0,8$, $\rho_0 = 0,2$

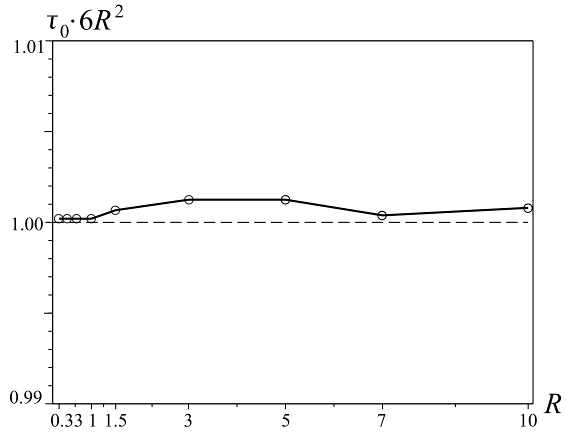

Рис. 4. Контроль: τ_0, $\rho_0 = 1$

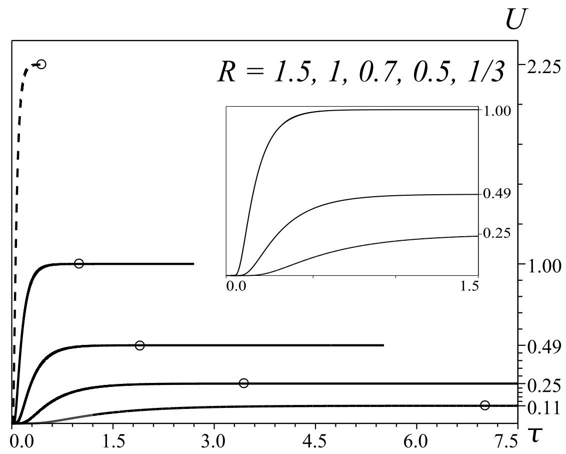

Рис. 5. Выбор τ_*, $R \leqslant 1,5$

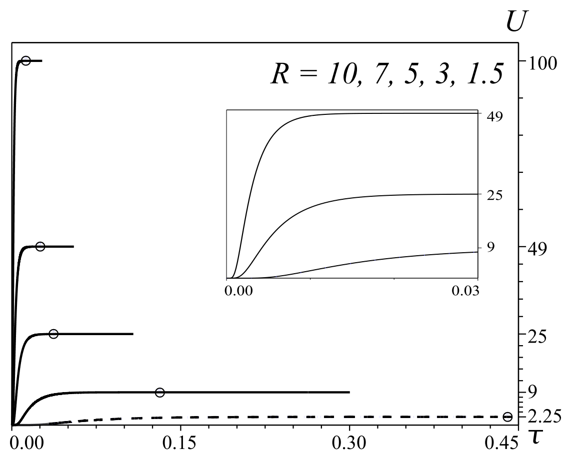

Рис. 6. Выбор τ_*, $R \geqslant 1,5$

Дополнительно проведены контрольные расчеты при $\rho_0 = 1$ — это соответствует пластине без защитного покрытия. Расчеты подтвердили, что выполняется асимптотический выход на линейное стационарное распределение $u(\tau, \rho, \zeta) = 1 - \zeta$ $(\tau \geqslant \tau_*)$. Кроме того, как известно, время запаздывания проникающего потока сквозь пластину толщины ℓ

равно $\ell^2/[6D]$ [3], в нашем случае $1/[6R^2]$ (рис. 4). Также проверена асимптотика $U_* \to R^2$ при $\rho_0 \to 1$. Правильность автоматического выбора момента окончания эксперимента для различных R проиллюстрирована на рис. 5–6.

На рис. 7–16 представлены результаты численного моделирования при варьировании параметров R и ρ_0. По итогам эксперимента в безразмерной форме рассматриваем три основные характеристики τ_*, τ_0, U_* ($V_* = R^{-2}U_*$). Каждый из выходных параметров эксперимента представлен на двух рисунках: отдельно для $R \leqslant 1,5$ и $R \geqslant 1,5$, так как полученные значения на этих промежутках отличаются на порядок. По умолчанию очередность перечисления значений соответствует убыванию максимумов. «Водораздел» $R = 1,5$, разумеется, достаточно условен. В широком диапазоне параметров (в том числе и D) на качественном уровне следует говорить об относительно малых и больших R и ρ_0.

На рис. 7–10 заметна слабая зависимость (безразмерных) временны́х характристик τ_*, τ_0 от радиуса дефекта. Пунктиром обозначены графики с повторяющимися значениями R на смежных рисунках. В пределах $\rho_0 < 0,2$ (при $\rho_0 \to 1$ уже трудно говорить о наличии защитного покрытия) наблюдается экстремум функций $\tau_*(\rho_0)$, $\tau_0(\rho_0)$ при $R < 1,5$ (смена знака производных на рис. 11, 12). При $R \geqslant 1,5$ сохраняется монотонность. По рисункам 13, 14 можно оценить скорость изменения стационарного уровня U_* при вариациях R и ρ_0.

В целом, на качественном уровне (ориентируясь на экспериментальные погрешности в несколько десятков процентов) можно утверждать, что при $R = L/H > 3$ влияние граничных условий при $r = L$ незначительно и можно практически считать цилиндр пластиной ($L \to +\infty$). Это согласуется с результатом работы [12] и позволяет использовать аналитические методы исследования [10].

Таким образом, вычислительный алгоритм моделирования водородопроницаемости сквозь дефект защитного покрытия (в рамках принятых допущений) протестирован, получены зависимости качественного характера для регистрируемых экспериментально времен установления и запаздывания, а также уровня стационарного режима водородопроницаемости. Разностная схема для случая, когда существенно влияние поверхностных процессов, представлена в [6].

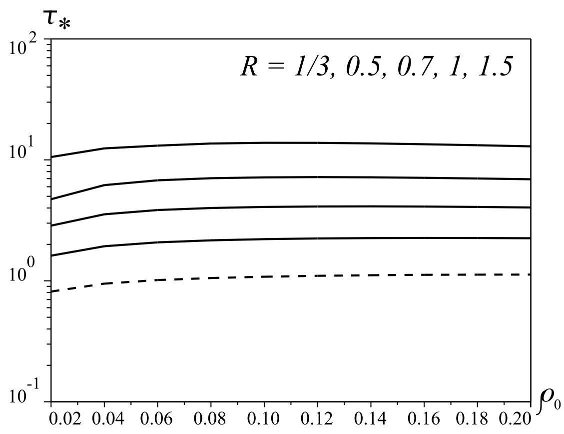

Рис. 7. Время эксперимента, $R \leqslant 1,5$

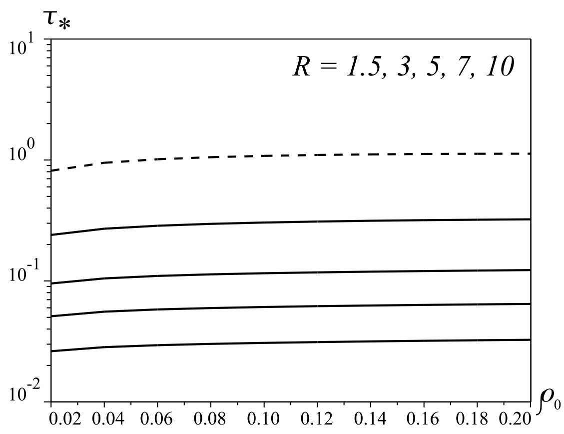

Рис. 8. Время эксперимента, $R \geqslant 1,5$

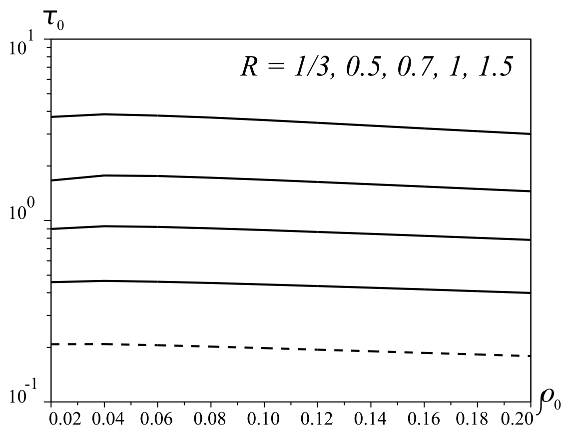

Рис. 9. Время запаздывания, $R \leqslant 1,5$

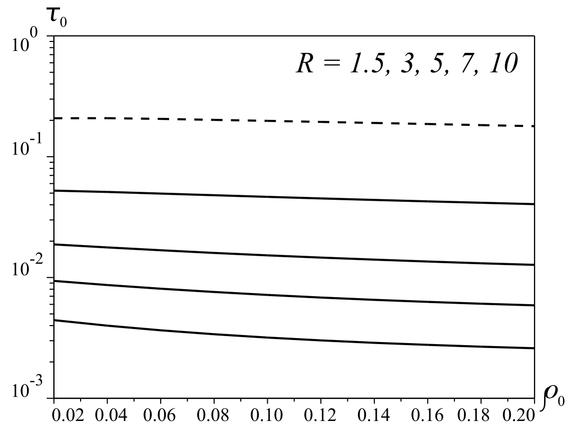

Рис. 10. Время запаздывания, $R \geqslant 1,5$

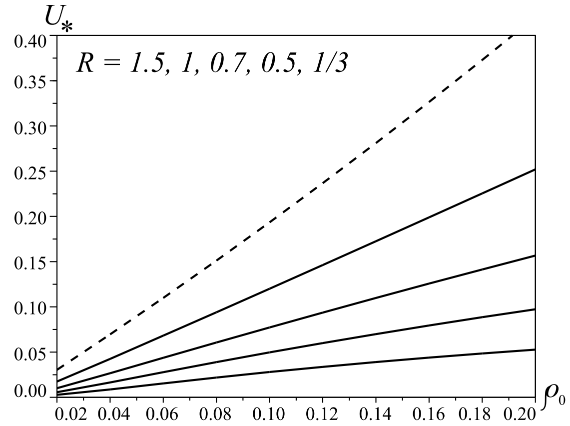

Рис. 13. Стационарный поток, $R \leqslant 1,5$

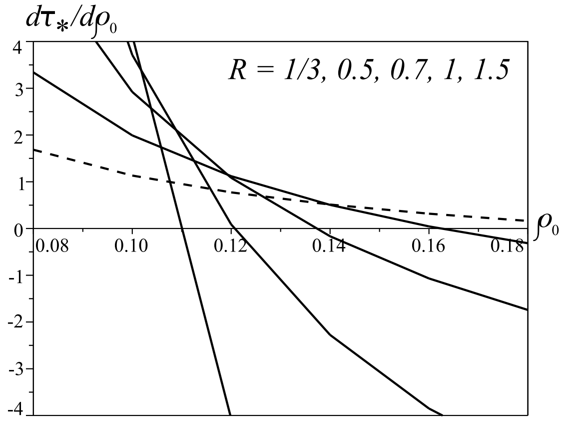

Рис. 11. Скорость изменения τ_*, $R \leqslant 1,5$

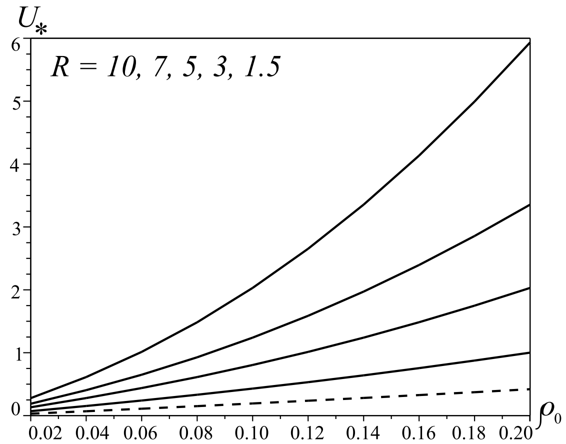

Рис. 14. Стационарный поток, $R \geqslant 1,5$

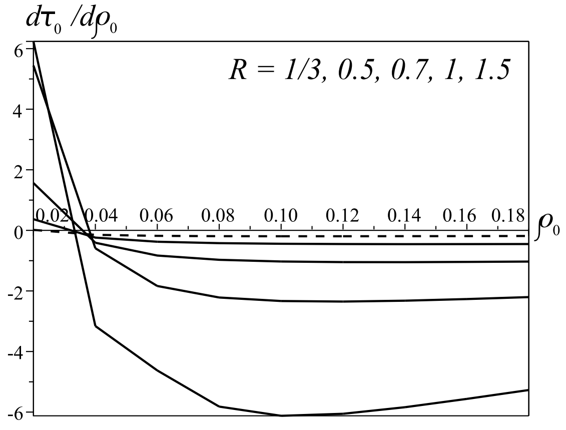

Рис. 12. Скорость изменения τ_0, $R \leqslant 1,5$

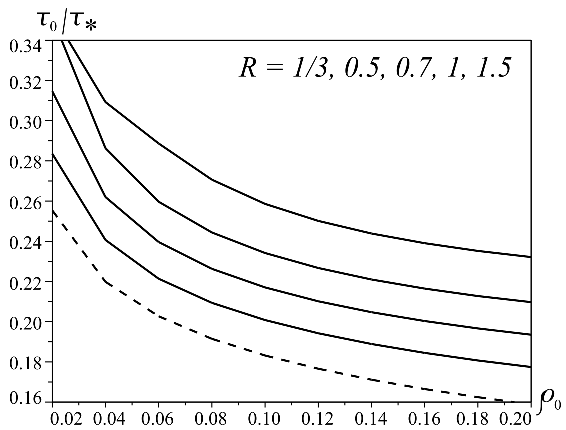

Рис. 15. Доля времени запаздывания, $R \leqslant 1,5$

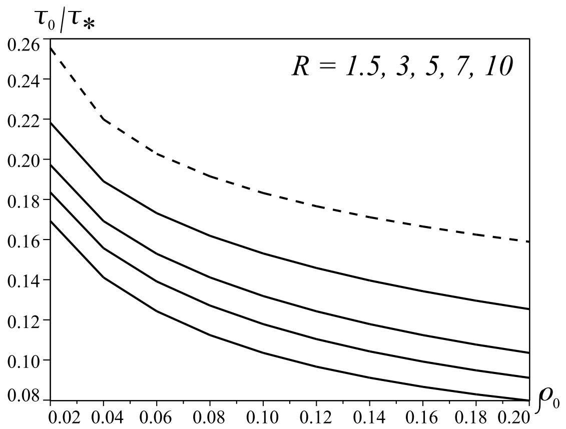

Рис. 16. Доля времени запаздывания, $R \geqslant 1,5$

Литература

1. *Волков Е. А.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 248 с.

2. *Косарев В. И.* 12 лекций по вычислительной математике. М.: МФТИ, 2000. 224 с.

3. *Кунин Л. Л., Головин А. И., Суровой Ю. И. Хохрин В. М.* Проблемы дегазации металлов. М.: Наука, 1972. 324 с.

4. *Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Добросвет; КДУ, 2011. 338 с.

5. *Писарев А. А., Цветков И. В., Маренков Е. Д., Ярко С. С.* Проницаемость водорода через металлы. М.: МИФИ, 2008. 144 с.

6. *Родченкова Н. И., Костикова Е. К.* Разностная схема для краевой задачи водородопроницаемости при наличии дефекта защитного покрытия // Труды Карельского научного центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. Вып. 2. 2011. № 5. С. 97–102.

7. *Рябенький В. С.* Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 2000. 296 с.

8. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

9. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.

10. *Rajendran L., Sangaranarayanan M. V.* A two-point Pade approximation for the non-steady-state chronoamperometric current at ultramicrodisc electrodes // Journal of Electroanalytical Chemistry. Elsevier, 1995. Vol. 392. P. 75–78.

11. *Warrick A. W., Broadbridge P., Lomen D. O.* Approximations for diffusion from a disc source // Applied Mathematical Modelling. Elsevier, 1992. Vol. 16. P. 155–161.

12. *Zajec B.* Hydrogen permeation barrier-recognition of defective barrier film from transient permeation rate // International Journal of Hydrogen Energy. Elsevier, 2011. Vol. 36. P. 7353–7361.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Заика Юрий Васильевич
зав. лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Zaika, Yury
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: zaika@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Костикова Екатерина Константиновна
младший научный сотрудник
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: fedorova@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Kostikova, Ekaterina
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: fedorova@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 33–37

УДК 519.216.5

МАКСИМИЗАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ УСПЕХА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ДВУКРАТНОЙ ОСТАНОВКИ ДЛЯ УРНОВОЙ СХЕМЫ

А. А. Ивашко

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассматривается задача оптимальной двукратной остановки в урновой схеме. Урна содержит положительные и отрицательные шары. В каждый момент времени из урны вынимаются шары без возвращения. Значение -1 соответствует отрицательному шару, а значение $+1$ — положительному. Ведется наблюдение за суммой поступающих случайных величин. В работе рассматривается задача оптимальной остановки, в которой необходимо с максимальной вероятностью остановиться сначала на наименьшем значении суммы, а затем — на наибольшем. Найдены оптимальные стратегии, а также проведено численное моделирование для нахождения значений порогов принятия решений.

К л ю ч е в ы е с л о в а: оптимальная остановка, выборка из урны, задача о баллотировке.

A. A. Ivashko. MAXIMIZATION OF SUCCESS PROBABILITY IN THE OPTIMAL DOUBLE STOPPING PROBLEM FOR AN URN SCHEME

The optimal double-stopping problem for the urn scheme is considered. An urn contains minus balls and plus balls. One draws balls from the urn sequentially one at a time without replacement. The value -1 is attached to minus ball and value $+1$ to plus ball. One observes the sum of input random variables. The goal is to stop with maximum probability first on the minimum and then on the maximum of the sum. The optimal stopping strategies and the numerical results on decision-making thresholds are obtained.

K e y w o r d s: optimal stopping, urn sampling, ballot problem.

Введение

В работе рассматривается следующая задача оптимальной двукратной остановки. Пусть в урне имеется m_0 отрицательных и p_0 положительных шаров. Значение -1 соответствует отрицательному шару, а значение $+1$ — положительному. Из урны вынимаются шары последовательно по одному в каждый момент времени без возвращения. Обозначим последовательность $Z_0 = 0$, $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $1 \leqslant n \leqslant m_0 + p_0$, где X_k — значение шара, выбранного в момент времени k. Данная последовательность формирует некоторую траекторию (см., например, рис. 1). В каждый момент времени при выборе шара необходимо решить: остановиться или продолжить процесс выбора. В работе рассматривается задача оптимальной остановки, в которой необходимо с максимальной вероятностью остановиться сначала на наименьшем значении траектории, а затем — на наибольшем. Такие модели могут быть использованы, например, при принятии решений о покупке-продаже финансового актива в случае, если вероятность успешного выбора на каждом шаге меняется.

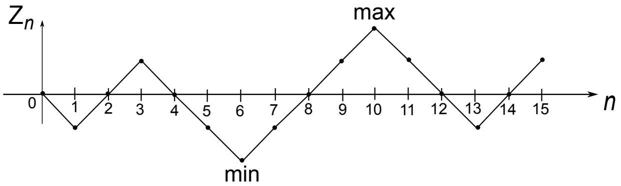

Рис. 1. Пример траектории Z_n для $p_0 = 8$, $m_0 = 7$

В задаче двукратной остановки необходимо найти правило принятия решения, т. е. оптимальные моменты остановки $(\sigma*, \tau*)$ такие, что

$$P\{Z_{\sigma*} = \min_{0 \leqslant n \leqslant m_0+p_0} Z_n,\ Z_{\tau*} = \max_{0 \leqslant l \leqslant m_0+p_0} Z_l\} = \sup_{(\sigma,\tau)\in C, \sigma<\tau} P\{Z_\sigma = \min_{0\leqslant l \leqslant m_0+p_0} Z_l,\ Z_\tau = \max_{0 \leqslant n \leqslant m_0+p_0} Z_n\},$$

где C — класс всех моментов двукратной остановки.

Модели с одной остановкой в урновой схеме были рассмотрены в различных вариантах в зависимости от целей игрока. В работе Л. Шеппа [6] была исследована задача, в которой необходимо максимизировать значение траектории. М. Тамаки [8] получил решение в задаче максимизации вероятности остановки на наибольшем значении траектории. В. Мазалов, М. Тамаки [5] рассмотрели вариант задачи о продолжительности нахождения случайного блуждания в наилучшем состоянии. Модели двукратной остановки последовательностей одинаково распределенных случайных величин можно найти в работах М. Л. Николаева [2], Г. Софронова и др. [7], В. В. Мазалова, А. А. Фалько (Ивашко) [1], А. А. Фалько (Ивашко) [3]. В настоящей работе рассмотрено обобщение задачи М. Тамаки [8] на случай двукратной остановки.

Предположим без потери общности, что $p_0 > m_0$. Пусть из урны уже вынули k шаров. Также известно, что в урне еще осталось m отрицательных шаров и p положительных, т. е. изначально было $k + m + p = p_0 + m_0$ шаров. Обозначим данное состояние (m, p).

Исходная задача двукратной остановки решается в два этапа. Сначала необходимо найти правило остановки траектории на максимальном значении при условии, что известно значение минимума. А затем требуется найти значение оптимального момента остановки на минимальном значении. В следующем разделе приводится решение первого этапа задачи.

Принятие решения при выборе максимума

Пусть наблюдатель уже остановился на минимальном значении $-x$ в состоянии (m_1, p_1), $p_1 \geqslant m_1$, $x = p_1 - m_1 - (p_0 - m_0)$. Для нахождения максимального значения необходимо также знать значение локального максимума траектории, обозначим его $y' = p_0 - m_0 + \max\{m' - p', 0\}$ в состоянии (m', p'), $m' \geqslant p'$ (рис. 2).

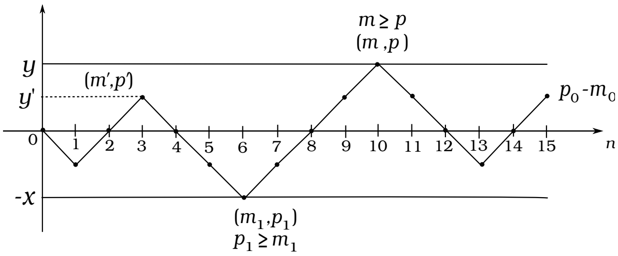

Рис. 2. Z_n для $p_0 = 8$, $m_0 = 7$

Введем обозначения:

$v(m, p, m_1, p_1)$ — вероятность того, что в состоянии (m, p) выбрано наибольшее значение траектории, если наименьшее значение было выбрано в состоянии (m_1, p_1) (вероятность успеха в состоянии (m, p)),

$s(m, p, m_1, p_1)$ — вероятность успеха при остановке процесса выбора,

$c(m, p, m_1, p_1)$ — вероятность успеха при продолжении процесса выбора в состоянии (m, p).

Из теории оптимальной остановки следует

$$v(m, p, m_1, p_1) = \max\{s(m, p, m_1, p_1), c(m, p, m_1, p_1)\},$$

где $m - p \geqslant \max\{m' - p', 0\}$.

При вычислении вероятности успеха при продолжении используется правило «one-stage look-ahead stopping policy», согласно которому наблюдатель продолжает процесс выбора до следующего локального максимума и затем останавливается.

Для вычисления вероятности успеха применяется следующая лемма [4].

Лемма 1 [Феллер] *Пусть $N_{n,x}$ — число траекторий из начала координат в точку (n, x). Пусть $a > 0, b > 0$ и $-b < c < a$. Число траекторий, ведущих в точку (n, c) и не имеющих* *общих точек с прямыми $x=-b$ и $x=a$ равно*

$$\sum_{k\in Z} N_{n,2k(a+b)+c} - N_{n,2k(a+b)+2a-c}. \qquad (1)$$

Заметим, что $n=p+m$, $x=p-m$,

$$N_{n,x} = \binom{p+m}{p} = \binom{n}{(n+x)/2}.$$

Выражение (1) можно переписать в виде

$$\sum_{k\in Z}\left[\binom{p+m}{p+k(a+b)} - \binom{p+m}{m+k(a+b)+a}\right]. \qquad (2)$$

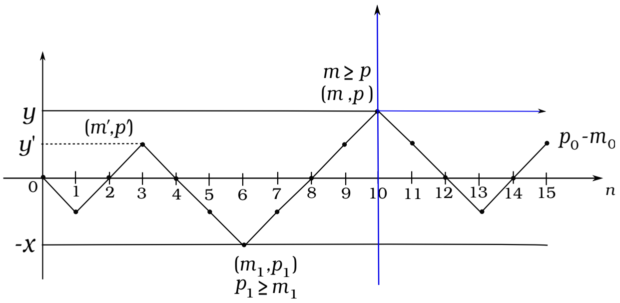

Рис. 3. Принятие решения об остановке в состоянии (m,p)

Из леммы 1 следует, что вероятность успеха при остановке равна

$$s(m,p,m_1,p_1) = P(\{-x-y-1 < Z_j < 1\}_1^{p+m}),$$

$$m-p \geqslant \max\{m'-p',0\},$$

где $y = m-p+p_0-m_0$ — текущее значение максимума (рис. 3). При вычислении вероятности успеха воспользуемся леммой 1 $a=1$, $b=y+x+1=m-p+p_1-m_1+1$, $c=p-m$.

$$s(m,p,m_1,p_1) = \frac{\sum\limits_{k\in Z}\binom{m+p}{p+kr}-\binom{m+p}{m+kr+1}}{\binom{m+p}{p}} = \frac{\sum\limits_{k\in Z}\binom{m+p}{p+kr}-\binom{m+p}{p-1-kr}}{\binom{m+p}{p}} = \frac{\sum\limits_{k=-\left[\frac{p}{r}\right]}^{\left[\frac{m}{r}\right]}\binom{m+p}{p+kr}\frac{m-p-2kr+1}{m-kr+1}}{\binom{m+p}{p}},$$

где $y+x+2 = m-p+p_1-m_1+2 = r$.

Вероятность успеха при продолжении (рис. 4) равна

$$c(m,p,m_1,p_1) = q_1(m,p)s(m,p-1,m_1,p_1) + \\ +\sum_{i=1}^{p} q_{2i}(m,p,m_1,p_1)s(m-i,p-i,m_1,p_1),$$

где $q_1(m,p) = \frac{p}{m+p}$.

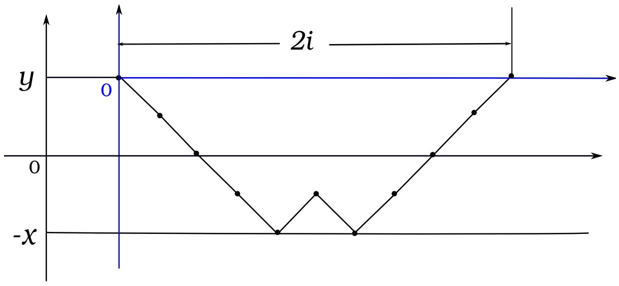

Рис. 4. Вероятность того, что траектория вернется на уровень y через $2i$ шагов и не опустится ниже $-x$

$$q_{2i}(m,p,m_1,p_1) = P\{\min\{n: Z_n=0, Z_j \geqslant -x-y, 1\leqslant j<n\leqslant m+p\} = 2i \mid \text{выбрано } i \text{ отр. и } i \text{ пол. шаров за } 2i \text{ шагов}\}\cdot\frac{\binom{m}{i}\cdot\binom{p}{i}}{\binom{m+p}{2i}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k\in Z}\binom{2i-2}{i-1+k(y+x+1)} - \binom{2i-2}{i-1+k(y+x+1)+1}}{\binom{2i}{i}}\cdot\frac{\binom{m}{i}\cdot\binom{p}{i}}{\binom{m+p}{2i}} =$$

$$= \sum_{k\in Z}\binom{2i-2}{i+k(y+x+1)}\frac{2k(y+x+1)+1}{i-1-k(y+x+1)}\cdot\frac{\binom{m+p-2i}{m-i}}{\binom{m+p}{p}}.$$

При выводе формулы использовалась лемма 1 ($b=y+x$, $a=1$, $c=0$) и тождество $\binom{n}{a} - \binom{n}{a+1} = \binom{n}{a+1}\frac{2a-n+1}{n-a}$.

Процесс выбора останавливается, если $s(m,p,m_1,p_1) \geqslant c(m,p,m_1,p_1)$, $m-p \geqslant \max\{m'-p',0\}$.

Принятие решения при выборе минимума

Теперь перейдем ко второму этапу задачи.

Пусть локальный максимум траектории был достигнут в состоянии (m',p') и равен $y' = p_0-m_0+\max\{m'-p',0\}$. В состоянии (m,p) наблюдается значение $-x$, $x = p_0-m_0+p-m$ (рис. 5).

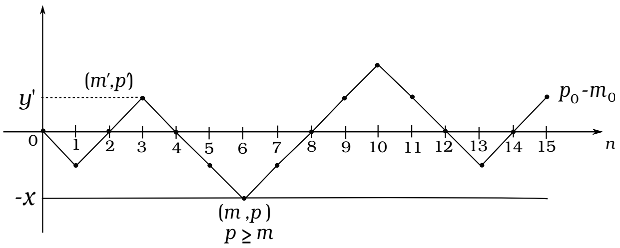

Рис. 5. Принятие решения при выборе минимума в состоянии (m, p)

Обозначим:

$l = x + y' = p - m + \max\{m' - p', 0\}$;

$u(m, p, m', p')$ — вероятность того, что минимальное значение выбрано в состоянии (m, p), а затем будет выбрано максимальное значение позже (вероятность успеха в состоянии (m, p));

$s_1(m, p, m', p')$ — вероятность успеха при остановке процесса выбора;

$c_1(m, p, m', p')$ — вероятность успеха при продолжении процесса выбора в состоянии (m, p).

Так же как и ранее

$$u(m, p, m', p') = \max\{s_1(m, p, m', p'), c_1(m, p, m', p')\},$$

где $p \geqslant m$.

Вероятность успеха при остановке (рис. 6) равна

$$s_1(m, p, m', p') = \sum_{i=0}^{\min\{m, p-l\}} p_{2i+l}(m, p, m', p') \cdot$$
$$\cdot v(m - i, p - (i + l), m, p),$$

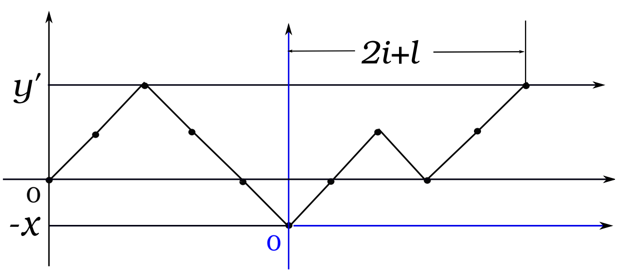

Рис. 6. Вероятность того, что траектория поднимется до уровня y' за $2i + l$ шагов и при этом не опустится ниже $-x$

$$p_{2i+l}(m, p, m', p') = P\{\min\{n\colon Z_n = l, Z_j \geqslant 0, 1 \leqslant j < n \leqslant m + p\} = 2i + l|\ \text{выбрано } i \text{ отр. и } i+l \text{ пол. шаров за } 2i+l \text{ шагов}\} \cdot \frac{\binom{m}{i} \cdot \binom{p}{i+l}}{\binom{m+p}{2i+l}}$$
$$= \frac{\sum\limits_{k \in Z} \binom{2i+l-1}{i+k(l+1)} - \binom{2i+l-1}{i+l-1+k(l+1)+l}}{\binom{2i+l}{i}} \cdot \frac{\binom{m}{i} \cdot \binom{p}{i+l}}{\binom{m+p}{2i+l}}$$

Вероятность успеха при продолжении вычисляется по формуле:

$$c_1(m, p, m', p') = p_1(m, p) s_1(m - 1, p, m', p') + \sum_{i=1}^{m} \bar{p}_{2i}(m, p, y') s_1(m - i, p - i, m', p') + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} p_{2i}(m, p, y' + j) s_1(m - i, p - i, m', p' - j),$$

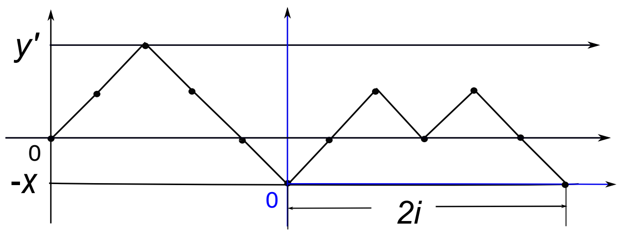

Рис. 7. Вероятность того, что траектория вернется на уровень $-x$ через $2i$ шагов

$p_1(m, p) = \frac{m}{m+p}$,

$\bar{p}_{2i}(m, p, y' + j)$ — вероятность того, что траектория достигнет уровня $-x$ через $2i$ шагов и при этом не поднимется выше уровня y' (рис. 7),

$p_{2i}(m, p, y' + j)$ — вероятность того, что траектория достигнет уровня $-x$ через $2i$ шагов и до этого момента достигнет уровня $y' + j$.

$$p_{2i}(m, p, y' + j) = \Big[P\{\min\{n : Z_n = 0, Z_k \leqslant x + y' + j, 1 \leqslant k < n \leqslant m + p\} = 2i|\ \text{выбрано } i \text{ отр. и } i \text{ пол. шаров за } 2i \text{ шагов}\} - P\{\min\{n\colon Z_n = 0, Z_k \leqslant x + y' + j - 1, 1 \leqslant k < n \leqslant m + p\} = 2i|\ \text{выбрано } i \text{ отр. и } i \text{ пол. шаров за } 2i \text{ шагов}\}\Big] \cdot \frac{\binom{m}{i} \cdot \binom{p}{i}}{\binom{m+p}{2i}}.$$

Процесс выбора останавливается, если $s_1(m, p, m', p') \geqslant c_1(m, p, m', p')$, $p \geqslant m$.

На рис. 8 показаны оптимальные пороги для принятия решения об остановке при выборе минимального и максимального значений для случая $m_0 = p_0 = 10$. Различными линиями показаны пороги для ситуаций, в которых может находиться игрок. На данном примере видно, что с ростом значений y' пороги остановки на минимальном значении приближаются к оптимальным порогам для случая $p = m$, а с уменьшением выбранного минимального значения пороги для наибольшего значения становятся ниже.

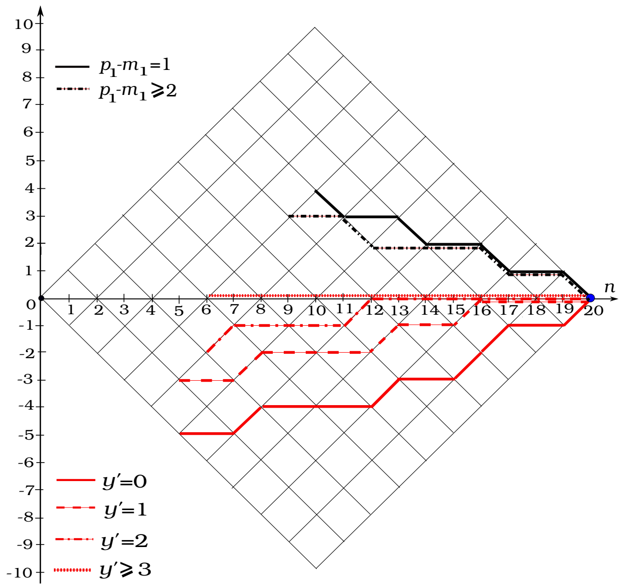

Рис. 8. Оптимальные пороги для принятия решения об остановке, $m_0 = p_0 = 10$

Заключение

В статье рассмотрена задача оптимальной двукратной остановки в урновой схеме. Получено аналитическое решение, позволяющее вычислить значения выигрышей и оптимальных порогов принятия решений. Представлены результаты численного моделирования.

Автор выражает благодарность проф. В. В. Мазалову за помощь в постановке задачи и обсуждении полученных результатов.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 10-01-00089а и Отделением математических наук.

Литература

1. *Мазалов В. В., Фалько (Ивашко) А. А.* Задача наилучшего выбора и ее применение в рекламных кампаниях поисковой системы Яндекс // Интернет-Математика 2007. Яндекс, 2007. С. 126–134.

2. *Николаев М. Л.* Об оптимальной многократной остановке марковских последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, вып. 2. С. 374–382.

3. *Фалько (Ивашко) А. А.* Задача наилучшего выбора двух объектов // Методы математич. моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ Карельский НЦ РАН. Вып. 8. Петрозаводск: Карельский НЦ РАН, 2007. С. 34–42.

4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М: Мир, 1984. 738 с.

5. *Mazalov V. V., Tamaki M.* Duration problem on trajectories // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes. 2007. Vol. 79(3–4). P. 211–218.

6. *Shepp L. A.* Explicit solutions to some problems of optimal stopping // Annals of Mathematical Statistics. 1969. N 40. P. 993–1010.

7. *Sofronov G., Keith J., Kroese D.* An optimal sequential procedure for a buying-selling problem with independent observations // J. Appl. Prob. 2006. Vol. 43. P. 454–462.

8. *Tamaki M.* Optimal stopping on trajectories and the ballot problem // Journal of Applied Probability. 2001. N 38. P. 946–959.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ивашко Анна Антоновна
научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: aivashko@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Ivashko, Anna
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: aivashko@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 38–43

УДК 519.8

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ В УСЛОВИЯХ ДЕФИЦИТА ЧИСЛОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

В. В. Корников, Н. В. Хованов, М. С. Юдаева

Санкт-Петербургский государственный университет

Для многокритериальной классификации объектов по нечисловой информации, получаемой из источников, обладающих различной надежностью, разработана специальная модификация известного метода рандомизации сводных показателей (МРСП). Возможности разработанной модификации МРСП продемонстрированы на примере классификации договоров страхования жизни по степени их рискованности.

Ключевые слова: метод рандомизации сводных показателей (МРСП), нечисловая информация, байесовская рандомизация неопределенности.

V. V. Kornikov, N. V. Hovanov, M. S. Yudaeva. MULTIPLE CRITERIA CLASSIFICATION UNDER DEFICIENCY OF NUMERIC INFORMATION

A special case modification of well known Aggregate Indices Randomization Method (AIRM) was developed for multi-criteria classification of objects according to non-numeric information obtained from sources of varying reliability. The capabilities of the resultant AIRM modification are demonstrated through the example of life insurance contracts classification by their riskiness.

Key words: Aggregate Indices Randomization Method (AIRM), nonnumeric information, Bayesian randomization of uncertainty.

Введение

В настоящее время существует хорошо развитая система методов распознавания (классификации, диагностики), позволяющих сравнительно успешно классифицировать объекты, описываемые наборами точно определяемых *числовых характеристик* [1]. Однако в ряде случаев (например, при отнесении экономической ситуации в стране к классу кризисных состояний, при классификации ситуаций в регионах по шкале террористических угроз и т. д.) имеет место дефицит *статистической числовой информации*. Поэтому исследователю приходится привлекать экспертов к оценке вероятностей принадлежности исследуемого объекта к альтернативным классам.

Эксперты же обычно не могут дать *точных числовых оценок* этих вероятностей и ограничиваются только совокупностью сравнительных суждений о превосходстве (равенстве) вероятностей принадлежности объекта к разным классам. Более того, обычно исследователю приходится учитывать информацию, приходящую из многих источников (от многих экспертов), имеющих разную значимость (надежность, информативность, достоверность и т. п.). При этом оценка относительной значимости источников при помощи *числовых весовых коэффициентов* (“весов”) также затруднена, и приходится довольствоваться лишь сравнительными суждениями о величине весовых коэффициентов, аналогичных сравнительным суждениям о вероятностях.

Многочисленные психологические эксперименты и практические наблюдения последних десятилетий показали, что такая нечисловая (точнее *порядковая*, *ординальная*) форма представления знаний о вероятностях и/или весовых коэффициентах вполне естественна для экспертов. Более того, оказалось, что попытки принудить экспертов к представлению своих знаний о вероятностях в точной числовой форме ведет к смещенным оценкам и к неверным суждениям [12].

Другая форма представления экспертных оценок вероятностей предполагает наличие информации лишь об интервалах их возможных значений [8]. Такая *интервальная неточная информация* может быть объединена с упомянутой *ординальной* (*нечисловой*) информацией. Но даже эта объединенная информация может оказаться недостаточно полной для однозначного определения числовых значений всех вероятностей. Поэтому далее предполагается, что каждый эксперт обладает *нечисловой* (ординальной), *неточной* (интервальной) и *неполной* экспертной информацией (*ННН*-информацией) об оцениваемых вероятностях, а исследователь, выступающий в роли супер-эксперта, имеет *ННН*-инфомацию о весовых коэффициентах, определяющих значимость соответствующих экспертных мнений.

В первом разделе статьи кратко излагается метод построения оценок вероятностей альтернатив по *ННН*-информации, основанный на *байесовской модели рандомизации неопределенности* выбора вектора вероятностей из множества всех допустимых вероятностных векторов. Во втором разделе описывается синтез сводных оценок вероятностей альтернатив; при этом используются рандомизированные весовые коэффициенты, моделирующие неопределенность выбора вектора весовых коэффициентов по *ННН*-информации исследователя о сравнительной значимости для него мнений экспертов. Третий раздел содержит иллюстративный пример оценки специалистом страховой компании степени рискованности заключения с клиентом договора страхования жизни по нескольким источникам нечисловой информации.

Оценка вероятностей альтернатив при дефиците числовой информации

Пусть необходимо оценить вероятность p_i принадлежности изучаемого объекта к классу A_i из фиксированной совокупности r альтернативных классов по информации I. Относительно информации I, получаемой из некоторого источника (от некоторого эксперта), предполагается, что она может быть двух типов — *ординальная* (*нечисловая*) информация OI, выражаемая сравнительными суждениями типа “вероятность альтернативы A_i больше, чем вероятность альтернативы A_s” и “вероятности альтернатив A_i, A_s равны”, и *интервальная (неточная)* информация II, состоящая в указании диапазонов $[a_i, b_i]$, $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$, $i = 1, \ldots, r$, возможного варьирования вероятностей $p_1, \ldots, p_r$. Иными словами, нечисловая и неточная объединенная информация $I = OI \bigcup II$ задается системой $I = \{p_i > p_l, p_u = p_v;\ a_s \leqslant p_s \leqslant b_s;\ i, l, u, v, \in \{1, \ldots, r\}\}$ равенств и неравенств для вероятностей $p_1, \ldots, p_r$ альтернатив $A_1, \ldots, A_r$. Поскольку возможно, что даже объединенная информация $I = OI \bigcup II$ не позволяет однозначно определить числовые значения вероятностей $p_1, \ldots, p_r$, постольку можно говорить, что информация I *неполна*. Таким образом, можно считать, что у эксперта имеется *нечисловая, неточная и неполная информация* (*ННН-информация*) I о вероятностях $p_1, \ldots, p_r$ альтернатив $A_1, \ldots, A_r$.

Учет *ННН*-информации I позволяет сформировать множество $P(r; I)$ *всех допустимых* (с точки зрения информации I) векторов вероятностей, представляющее собой $(r-1)$-мерный полиэдр $P(r; I)$. Таким образом, *ННН*-информация I определяет вектор вероятностей $p = (p_1, \ldots, p_r)$ “с точностью до множества $P(r; I)$”. Иными словами, имеет место так называемая *теоретико-множественная неопределенность* задания вероятностей альтернатив [5]. При построении стохастической модели такой неопределенности мы будем следовать идее Т. Бейеса, изложенной в его известной работе [7] и состоящей в предложении моделировать неопределенный выбор математического объекта x из множества таких объектов X случайным (рандомизированным) выбором этого объекта. В нашем случае, моделируя неопределенность выбора вектора вероятностей $p = (p_1, \ldots, p_r)$ из множества $P(r; I)$ при помощи рандомизации этого выбора, получаем случайный вектор $\tilde{p}(I) = (\tilde{p_1}(I), \ldots, \tilde{p_r}(I))$,

$\tilde{p_i}(I) \geqslant 0$, $\tilde{p_1}(I) + \ldots + \tilde{p_r}(I) = 1$, распределенный на полиэдре $P(r; I)$.

Компонента $\tilde{p_i}(I)$ случайного вектора $\tilde{p}(I)$ есть *рандомизированная* (*стохастическая, случайная*) оценка вероятности альтернативы A_i, учитывающая *ННН*-информацию I. Математические ожидания $\bar{p}_i(I_j) = E\tilde{p}_i(I_j)$ служат искомыми усредненными оценками вероятностей p_i, $i = 1, \ldots, r$. Стандартные же отклонения $\delta_i(I) = \sqrt{D\tilde{p_i}(I)}$ определяют разброс стохастических оценок $\tilde{p_i}(I)$ вокруг соответствующих усредненных значений $\bar{p}_i(I)$. Можно сказать, что вектор $\bar{p}(I) = (\bar{p_1}(I), \ldots, \bar{p_n}(I))$ усредненных оценок вероятностей есть *числовой образ нечисловой, неточной и неполной информации* I.

Для построения простого алгоритма вычисления статистических характеристик случайного вектора $\tilde{p}(I) = (\tilde{p_1}(I), \ldots, \tilde{p_r}(I))$ на ЭВМ положим, что вероятности $p_1, \ldots, p_r$ отсчитываются с конечным шагом $h = 1/n$, т. е. принимают дискретные значения из множества $\{0, 1/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$. Тогда множество $P(r, n; I) = \{p^{(t)} : t = 1, \ldots, N(r, n; I)\}$ всех допустимых (с точки зрения *ННН*-информации I) векторов вероятностей конечно и простейшее равномерное распределение вектора вероятностей $\tilde{p}(I)$ на этом множестве может быть задано случайным номером $\tilde{t}$, равномерно распределенным на множестве значений $\{1, \ldots, N(r, n; I) : P(\{\tilde{p}(I) = p^{(t)}\}) = P(\{\tilde{t} = t = 1/N(r, n; I)\})\}$.

Решение же проблемы генерации всех возможных векторов $p^{(t)} = (p_1^{(t)}, \ldots, p_r^{(t)})$ из множества $P(r, n)$ можно свести к задаче генерации всех возможных *композиций* $\delta^{(t)} = (\delta_1^{(t)}, \ldots, \delta_r^{(t)})$, $\delta_i^{(t)} \in \{0, 1, \ldots, n-1, n\}$, $\delta_1^{(t)} + \ldots + \delta_r^{(t)} = n$, $t = 1, \ldots, N(s, k)$, $N(m, n) = (n + m - 1)!/n!(m-1)!$ Действительно, вектору вероятностей $p^{(t)} = (p_1^{(t)}, \ldots, p_r^{(t)})$ можно взаимно однозначно сопоставить композицию $\delta^{(t)} = (\delta_1^{(t)}, \ldots, \delta_r^{(t)})$ с компонентами $\delta_i^{(t)} = np_i^{(t)}$, $i = 1, \ldots, r$. Композиции $\delta^{(t)} = (\delta_1^{(t)}, \ldots, \delta_r^{(t)})$, $t = 1, \ldots, N(r, n)$, удобно генерировать в лексикографическом порядке — от первой композиции $\delta^{(1)} = (0, \ldots, 0, k)$ до последней $\delta^{(N(s,k))} = (k, 0, \ldots, 0)$. Для перехода от предшествующей (в лексикографическом порядке) композиции $\delta^{(t)} = (\delta_1^{(t)}, \ldots, \delta_r^{(t)})$ к последующей композиции $\delta^{(t+1)} = (\delta_1^{(t+1)}, \ldots, \delta_r^{(t+1)})$ можно предложить следующий простой алгоритм [4]. Для $i = 1, \ldots, m-1$ компонента $\delta_i^{(t+1)}$ композиции $\delta^{(t+1)}$ вычисляется по формуле

$$\delta_i^{(t+1)} = \begin{cases} \delta_i^{(t0}, & \text{if} \quad \delta_{i+1}^{(t)} < n - \Delta_i^{(t)}, \\ \delta_i^{(t)} + 1, & \text{if} \quad \delta_{i+1}^{(t)} = n - \Delta_i^{(t)} \quad \text{and} \quad \delta_i^{(t)} < n - \Delta_{i-1}^{(t)}, \\ 0, & \text{if} \quad \delta_{i+1}^{(t)} = n - \Delta_i^{(t)} \quad \text{and} \quad \delta_i^{(t)} = n - \Delta_{i-1}^{(t)}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta_i^{(t)} = \delta_1^{(t)} + \ldots + \delta_i^{(t)}$. Последняя компонента $\delta_m^{(t+1)}$ композиции $\delta^{(t+1)}$ определяется формулой $\delta_m^{(t)} = 1 - \delta_i^{(t+1)} + \ldots + \delta_{m-1}^{(t+1)}$.

Искомые математические ожидания, стандартные отклонения и другие статистические характеристики рандомизированных вероятностей могут быть вычислены на ЭВМ путем суммирования соответствующих функций от векторов вероятностей $p^{(t)} = (p_1^{(t)}, \ldots, p_r^{(t))}$, компоненты которых удовлетворяют системе равенств и неравенств, определяющих *ННН*-информацию I.

Построение сводных оценок вероятностей альтернатив

Пусть *ННН*-информация, доступная исследователю, задана кортежем $I = (I_1, \ldots, I_m)$, компонента I_j которого есть определенная система равенств и неравенств для вероятностей $p_1, \ldots, p_r$, определяющая множество $p(r; I)$ всех допустимых (с точки зрения *ННН*-информации I_j) векторов $p = (p_1, \ldots, p_r)$ вероятностей альтернатив $A_1, \ldots, A_r$. Рандомизируя, как это было описано в предыдущем разделе, неопределенный выбор вектора $p = (p_1, \ldots, p_r)$ из множества $P(r; I_j)$, мы получаем случайный вектор вероятностей $\tilde{p}(I_j) = (\tilde{p_1}(I_j), \ldots, \tilde{p_r}(I_j))$, $\tilde{p_i}(I_j) \geqslant 0$, $\tilde{p_1}(I_j) + \ldots + \tilde{p_r}(I_j) = 1$. Каждая компонента $\tilde{p}(I_j)$ вектора $\tilde{p}(I_j)$ может рассматриваться как стохастическая оценка неизвестной вероятности p_i, построенная по *ННН*-информации I_j, полученной от соответствующего эксперта.

Дополнительно предполагается, что исследователь обладает *ННН*-информацией $J = \{w_i > w_t, w_u = w_v \ldots; A_l \leqslant w_l \leqslant B_l \ldots\}$ о сравнительной значимости отдельных источников, измеряемой весовыми коэффициентами $w_1, \ldots, w_m$, $w_j \geqslant 0$, $w_1 + \ldots + w_m = 1$. Таким образом, вся *ННН*-информация, доступная исследователю, может быть представлена в виде кортежа $(I,J) = (I_1,\ldots,I_m,J)$, последняя компонента которого есть система равенств и неравенств для весовых коэффициентов $w_1,\ldots,w_m$.

Введенная информация J определяет множество $W(m;J)$ всех допустимых (с точки зрения *ННН*-информации J) векторов $w = (w_1,\ldots,w_m)$ весовых коэффициентов. Рандомизируя неопределенный выбор вектора $w = (w_1,\ldots,w_m)$ из множества $W(m;J)$, мы получаем случайный вектор весовых коэффициентов $\tilde{w}(J) = (\tilde{w_1}(J),\ldots,\tilde{w_m}(J)$, $\tilde{w_j}(J) \geqslant 0$, $\tilde{w_1}(j)+\ldots+\tilde{w_m}(J) = 1$. Каждая компонента $\tilde{w}_j(J)$ вектора $\tilde{w}(J)$ может рассматриваться как *стохастическая оценка неизвестного весового коэффициента* w_j, построенная по *ННН*-информации J. Математические ожидания $\bar{w}_j(J) = E\tilde{w}_j(J)$ служат искомыми усредненными оценками "весов" w_j, $j=1,\ldots,m$. Стандартные же отклонения $\varepsilon_j(J) = \sqrt{D\tilde{w}_j(J)}$ определяют разброс стохастических оценок $\tilde{w}_j(J)$ вокруг соответствующих усредненных значений $\bar{w}_j(J)$. Можно сказать, что вектор усредненных оценок весовых коэффициентов есть *числовой образ нечисловой, неточной и неполной информации* J.

Рассмотрим матрицу $(\tilde{p}_i(I_j))$, $i=1,\ldots,r$, $j=1,\ldots,m$ рандомизированных оценок вероятностей альтернатив. Строки этой матрицы являются, как уже было сказано, случайными векторами $\tilde{p}(I_j)$, компоненты которых суть рандомизированные оценки вероятностей альтернатив, отвечающие *ННН*-информации I_j, полученной из соответствующего источника. Транспонированный столбец матрицы $(\tilde{p}_i(I_j))$ представляет собой случайный вектор $\tilde{p}(i) = (\tilde{p_1}(I_1,\ldots,\tilde{p_i}(I_m)$, компоненты которого суть различные рандомизированные оценки $\tilde{p}_i(I_j)$, $j=1,\ldots,m$, вероятности p_i альтернативы A_i. Иными словами, вектор $\tilde{p}^{(i)}$ есть *рандомизированная многокритериальная оценка вероятности* p_i альтернативы A_i.

Теперь можно ввести *дважды рандомизированную сводную оценку*

$$\tilde{\tilde{p}}_i(I;J) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{p}_i(I_i)\tilde{w}_j(J) \qquad (2)$$

вероятности альтернативы A_i, построенную путем линейного взвешенного рандомизированного агрегирования рандомизированных оценок $\tilde{p}_i(I_j)$ со случайными весовыми коэффициентами $\tilde{w}_j(J)$, $j=1,\ldots,m$. Отметим, что построенная дважды рандомизированная оценка $\tilde{\tilde{p}}_i(I;J)$ вероятности p_i альтернативы A_i учитывает всю *ННН*-информацию $(I;J) = (I_1,\ldots,I_m;J)$, доступную исследователю.

Математическое ожидание и дисперсию дважды рандомизированной вероятности $\tilde{\tilde{p}}_i(I;J)$ можно подсчитать по формулам:

$$\bar{\bar{p}}_i(I;J) = E\tilde{\tilde{p}}_i(I;J) = \sum_{j=1}^{m} \bar{p}_i(I_j)\bar{w}_j(J), \qquad (3)$$

$$S_i^2(I,J) = D\tilde{\tilde{p}}_i(I,J) = \sum_{j,l=1,\, j\neq l}^{m} \bar{p}_i(I_j)\varepsilon_{jl}(J) \qquad (4)$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left[\delta_i^2(I_j)\varepsilon_j^2(J) + \delta_i^2(I_j)\bar{w}_j^2(J) + \bar{p}_i^2(I_j)\varepsilon_j^2(J)\right],$$

где $\varepsilon_{jl} = cov(\tilde{w}_j(J),\tilde{w}_i(J))$ есть ковариация $\varepsilon_{jl} = cov(\tilde{w}_j(J),\tilde{w}_i(J))$ рандомизированных весовых коэффициентов $\tilde{w}_j(J)$, $\tilde{w}_i(J)$, $j\neq l$.

Итак, полученные усредненные оценки $\bar{\bar{p}}_i(I,J)$ вероятностей альтернатив и соответствующие стандартные отклонения $S_i(I,J) = \sqrt{S_i^2(I;J)} = \sqrt{D\tilde{\tilde{p}}_i(I;J)}$, $i=1,\ldots,r$, решают задачу оценки вероятностей $p_1,\ldots,p_r$ принадлежности исследуемого объекта альтернативным классам $A_1,\ldots,A_r$ с учетом всей *ННН*-информации $(I,J) = (I_1,\ldots,I_m,J)$, имеющейся у исследователя относительно вероятностей и весовых коэффициентов.

Классификация страховых договоров по степени риска

Рассмотрим следующий иллюстративный пример классификации специалистом страховой компании договора страхования жизни, когда следует определить вероятности $p_1,\ldots,p_5$ принадлежности потенциального клиента к пяти альтернативным градациям степени риска: A_1 — "существенно пониженный уровень риска", A_2 — "несколько пониженный уровень риска", A_3 — "обычный уровень риска", A_4 – "несколько повышенный уровень риска", A_5 — "существенно повышенный уровень риска". Предположим, что *ННН*-информацию о вероятностях $p_1,\ldots,p_5$ альтернатив степени риска $A_1,\ldots,A_5$ специалист черпает из трех источников: 1) сведения о наличии у потенциального клиента заболеваний, сокращающих продолжительность жизни; 2) сведения о наличии у потенциального клиента вредных привычек; 3) сведения о рискованности профессии потенциального клиента [6]. Пусть *ННН*-информация, полученная из этих трех источников, описывается, соответственно, тремя системами равенств и неравенств для вероятностей: $I_1 = p_1 > p_5 = p_4 > p_2 = p_3$, $I_2 = p_1 > p_3 = p_4; p_3 > p_2$, $I_3 = p_1 > p_5 > p_2 = p_3 = p_4; p_1 \geqslant 0,50$.

Оценки $\bar{p}_i(I_j)$, $i = 1, \ldots, 5$, $j = 1, 2, 3$, приведенные в трех первых столбцах табл.1, вычислены по *ННН*-информации $I = (I_1, I_2, I_3)$ с использованием программы AIRM, расположенной на сайте polydecision.com и представляющей собой модификацию зарегистрированной программы ASPID-3W [2].

Таблица 1. Оценки $\bar{p}_i(I_j)$, $\bar{\bar{p}}_i(I, J)$ вероятностей p_i, $i = 1, \ldots, 5$, $j = 1, 2, 3$

i j	1	2	3	(I, J)
1	0,52	0,40	0,67	0,50
2	0,06	0,05	0,04	0,06
3	0,06	0,15	0,04	0,08
4	0,18	0,15	0,04	0,16
5	0,18	0,25	0,21	0,20

Пусть мнение специалиста страховой компании о сравнительной значимости указанных трех источников *ННН*-информации о вероятностях альтернатив $A_1, \ldots, A_5$ описывается *ННН*-информацией, представленной в виде системы равенств и неравенств $J = \{w_1 > w_2 > w_3; w_1 \geqslant 0,50\}$ для весовых коэффициентов w_j, $j = 1, 2, 3$ ($w_j \geqslant 0$, $w_1 + w_2 + w_3 = 1$). С помощью программы AIRM получаем числовые оценки $\bar{w}_1(J) = 0,67$, $\bar{w}_2(J) = 0,25$, $\bar{w}_3(J) = 0,08$ весовых коэффициентов, соответствующие *ННН*-информации J. Подставляя полученные оценки $\bar{p}_i(I_j)$, $w_j(J)$ в формулу (3), получаем искомую оценку $\bar{\bar{p}}_i(I, J)$ вероятности p_i того, что потенциальный клиент относится к степени риска, соответствующей альтернативе A_i, $i = 1, \ldots, 5$ (см. последний столбец табл.1). Полученные усредненные оценки $\bar{\bar{p}}_i(I, J)$ учитывают, как *ИНН*-информацию $I = (I_1, I_2, I_3)$ о вероятностях, так и *ННН*-информацию J о сравнительной значимости используемых источников информации. Используя формулу (4), можно найти стандартные отклонения $S_i(I, J) = \sqrt{D\tilde{\bar{p}}_i(I, J))}$, характеризующие точность оценок $\bar{\bar{p}}_i(I, J)$.

В разобранном примере речь шла об оцениваемых экспертами "вероятностях" попадания классифицируемого объекта в соответствующую категорию. Разумеется, возможны и совершенно другие интерпретации получаемых оценок, которые можно, например, трактовать как оценки функций принадлежности нечетких множеств [9], как результат взвешенного голосования экспертов и/или синтеза сводной оценки принадлежности к фиксированному классу [3, 13] и т. д.

Выводы

Описанный метод оценки вероятностей попадания классифицируемого объекта в альтернативные категории на основе *нечисловой экспертной информации*, получаемой из источников различной значимости, позволяет выявить *представления экспертов* о значениях вероятностей соответствующих альтернативных событий и об оценках весовых коэффициентов. Получающиеся оценки вероятностей и весовых коэффициентов представляют собой, так сказать, "*числовой образ нечисловой информации*", который *заведомо соответствует эмпирически выявляемой* нечисловой, неточной и неполной экспертной информации (*ННН*-информации). Другое дело, что сама эта ННН-информация может быть "ложной" (искажать "истинные" равенства и неравенства, имеющие место между вероятностями и/или весовыми коэффициентами). Но это не есть какой-то специфический недостаток рассматриваемого метода – результаты практического применения любого математического метода обработки эмпирических данных зависят, увы, от качества обрабатываемой исходной информации. Гибкость рассматриваемого метода, позволяющего зачастую получать достаточно точные числовые оценки даже по очень "бедной" нечисловой информации, делают его применимым при решении задач теории распознавания образов в разных прикладных областях [3, 5], [9–11].

Литература

1. *Журавлев Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В.* Распознавание. М.: ФАЗИС, 2005. 176 с.

2. *Хованов К. Н., Хованов Н. В.* Система поддержки принятия решений АСПИД-3W. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 960087 от 22.03.1996. Российское агентство по правовой охране программ для ЭВМ, баз данных и топологии интегральных микросхем. М.: РосАПО, 1996.

3. *Хованов Н. В.* Синтез сводной оценки при решении задачи распознавания в условиях дефицита информации // Тез. докл. 4-й Всесоюз. конф. «Математические методы распознавания образов». Ч. 2. Секция 1. Рига: РИО МИПКРР, 1989. С. 162–164.

4. *Хованов Н. В.* Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб.: СПбГУ, 1996. 196 с.

5. *Хованов Н. В.* Математические модели риска и неопределенности. СПб.: СПбГУ, 1998. 204 с.

6. *Чернова Г. В., Кудрявцев А. А., Хованов Н. В.* Андеррайтинг личного страхования. СПб.: Институт страхования, 1997. 168 с.

7. *Bayes T.* An essay towards solving a problem in the doctrine of chances // Biometrika. 1958. Vol. 45. P. 296–315.

8. *Engemann K. J., Yager R. R.* A general approach to decision making with interval probabilities // International Journal of General Systems. 2001. Vol. 30. P. 623–647.

9. *Hovanov N., Kornikov V., Seregin I.* Randomized synthesis of fuzzy sets as a technique for multicriteria decision making under uncertainty // Proc. Int. Conf. "Fuzzy Logic and Applications". Zichron Yaakov (Israel): IEEE, 1997. P. 281–288.

10. *Hovanov N., Yudaeva M., Hovanov K.* Multicriteria estimation of probabilities on basis of expert non-numeric, non-exact and non-complete knowledge // European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 195, Issue 3. P. 857–863.

11. *Hovanov N. V., Yudaeva M. S., Kotov N. V.* Event-Tree with randomized transition probabilities as a new tool for alternatives probabilities estimation under uncertainty // Proc. 6-th Int. Sci. School "Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems". SPb.: RAS, 2006. P. 118–125.

12. *Moshkovich H., Mechitov A., Olson D.* Ordinal judgments for comparison of multiattribute alternatives // European Journal of Operational Research. 2002. Vol. 137. P. 625–641.

13. *Ryazanov V. V., Senko O. V., Zhuravlev Yu. I.* Methods of recognition and prediction based on voting procedures // Pattern Recognition and Image Analysis. 1999. Vol. 9, N 4. P. 713–718.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Корников Владимир Васильевич
к. ф.-м. н., доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, Россия, 199034
эл. почта: vkornikov@mail.ru
тел.: (8142) 763370

Хованов Николай Васильевич
д. ф.-м. н., профессор
Санкт-Петербургский государственный университет
Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, Россия, 199034
эл. почта: nick@polyidea.com
тел.: (812)3227630

Юдаева Мария Сергеевна
ассистент
Санкт-Петербургский государственный университет
Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, Россия, 199034
эл. почта: udaeva@mail.ru
тел.: (812) 2727534

Kornikov, Vladimir
St. Petersburg State University
Universitetskaja nab., 7/9, St. Petersburg, Russia, 199034
e-mail: vkornikov@mail.ru
tel.: (812) 4271207

Hovanov, Nikolai
St. Petersburg State University
Universitetskaja nab., 7/9, St. Petersburg, Russia,199034
e-mail: nick@polyidea.com
tel.: (812)3227630

Yudaeva, Mariya
St. Petersburg State University
Universitetskaja nab., 7/9, St. Petersburg, Russia, 199034
e-mail: udaeva@mail.ru
tel.: (812) 2727534

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 44–48

УДК 517.929.5

О ПЕРИОДЕ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Ласунский

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Показано, что дискретное периодическое логистическое уравнение

$$x_{n+1} = x_n exp\,(r_n(1 - x_n))$$

с положительным ω-периодическим коэффициентом r_n ($\omega \neq 1$) не может иметь Ω-периодического решения ($\Omega \neq 1$), период которого взаимно прост с ω. Получен дискретный аналог теоремы Массера-Курцвейля. С помощью компьютерной программы строятся примеры ω-периодического логистического уравнения, имеющего периодические решения периода ω, 2ω, 3ω. Решения исследуются на устойчивость.

К л ю ч е в ы е с л о в а: дискретное периодическое логистическое уравнение, период решения, устойчивость.

A. V. Lasunsky. ON THE PERIOD OF SOLUTIONS OF A DISCRETE PERIODIC LOGISTIC EQUATION

It is shown that the discrete periodic logistic equation

$$x_{n+1} = x_n exp\,(r_n(1 - x_n))$$

with a positive ω-periodic coefficient r_n ($\omega \neq 1$) cannot have Ω-periodic solutions ($\Omega \neq 1$) with the period coprime to ω. A discrete analog of the Massera-Kurzweil theorem was obtained. Examples of the ω-periodic logistic equation with periodic solutions of the period ω, 2ω, 3ω were constructed using a computer program. The solutions are examined for stability.

K e y w o r d s: discrete periodic logistic equation, period of solution, stability.

Введение

Дискретное периодическое логистическое уравнение

$$y_{n+1} = y_n exp\,(r_n(1 - y_n k_n^{-1})), \quad n \in Z_+, \qquad (1)$$

где $\{r_n\}$ и $\{k_n\}$ – положительные последовательности, является одной из основных моделей роста популяций изолированных видов. Если коэффициенты $\{r_n\}, \{k_n\}$ постоянны, то динамика уравнения (1) достаточно хорошо изучена [4], [8]. Уравнение

$$y_{n+1} = y_n exp\,(r(1 - y_n k^{-1})), r > 0, k > 0$$

при любом r имеет положительное положение равновесия $y_n \equiv k$. Это положение равновесия устойчиво, если $0 < r < 2$. Если

$2 < r < 2,526$, то появляются двухточечные циклы. Если $2,526 < r < 3,102$, то появляются циклы длины $4, 8, 16, ..., 2^k$. Если $r > 3,102$, то существуют трехточечные циклы и квазистохастические решения.

Заметим, что при $k_n \equiv k$ заменой $y_n = kx_n$, уравнение (1) можно привести к виду

$$x_{n+1} = x_n exp\,(r_n(1 - x_n)) \qquad (2)$$

с единственным положительным положением равновесия $x_n \equiv 1$.

Если $\{r_n\}$ и $\{k_n\}$ – положительные периодические последовательности с общим периодом ω, то у уравнения (1) существует ω-периодическое решение [14]. В этой работе не исключается случай $\omega = 1$. Это периодическое решение глобально асимптотически устойчиво при дополнительном условии

$$k^* k_*^{-1} exp\,(r^* - 1) \leqslant 2, \qquad (3)$$

где $r^* = \max\limits_{n \in N}\{r_n\}$, $k_* = \min\limits_{n \in N}\{k_n\}$, $k^* = \max\limits_{n \in N}\{k_n\}$. Если $k_n \equiv k$, то неравенство (3) принимает вид $r^* \leqslant 1 + ln 2$. Из работы [13] следует, что предыдущий результат можно усилить. Если $k_n \equiv k$ и для периодической положительной последовательности $\{r_n\}$ выполнено неравенство $r^* \leqslant 2$, то все решения уравнения (1) стремятся к положительному равновесию. Любопытно, что для уравнения (2) с $r_n = const < 2$ положение равновесия $x_n \equiv 1$ асимптотически устойчиво. Оценку для r^*, по-видимому, улучшить нельзя [6]. В цитированной работе получен следующий результат.

Если положительная ω-периодическая последовательность $\{r_n\}$ такова, что

$$\prod_{k=0}^{\omega-1}(1 - r_k) > 1, \qquad (4)$$

то уравнение (2) имеет не менее двух положительных ω-периодических решений, отличных от положения равновесия.

Разумеется, в этом случае не может идти речь о глобальной асимптотической устойчивости. Заметим, что из неравенства (4) следует, что среди членов положительной ω-периодической последовательности $\{r_n\}$ есть $r_n > 2$. Даже если все члены периодической последовательности $\{r_n\}$ принадлежат интервалу (2; 2,526), уравнение (2) может иметь решения с периодами 4, 6 и т. д. Как мы знаем, это невозможно в случае $r_n = r \in (2; 2,256)$. Соответствующие примеры мы рассмотрим позднее.

Дискретный аналог теоремы Массера-Курцвейля

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Может ли уравнение (2) с ω-периодическим коэффициентом r_n иметь периодическое решение, период которого $\Omega \neq 1$ взаимно прост $\omega \neq 1$? Для ответа на поставленный вопрос обратимся к дифференциальным уравнениям [7].

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \qquad (5)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, функция $X : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывна по своим аргументам, удовлетворяет какому-либо условию, обеспечивающему единственность решения задачи Коши, и $X(x, t + \omega) = X(x, t)$ для всех x и t. Массера заметил [11], [12], что периодическое решение системы (5) может иметь период, несоизмеримый с ω. Я. Курцвейль установил [5], что для всякой системы (5), имеющей периодическое решение, период которого несоизмерим с периодом правых частей, справедлив следующий факт. Правые части системы (5) вдоль такого решения не зависят от времени. Оказывается, что аналогичные факты имеют место и для разностных уравнений, только теперь здесь уже речь идет о взаимной простоте периодов ω и Ω.

Пример 1. Скалярное уравнение

$$x_{n+1} = -x_n + (x_n^2 - 1) sin\frac{2\pi n}{k}, \quad k > 2,$$

правая часть которого периодична с периодом $\omega = k$, имеет решение $x_n = (-1)^n$ с периодом $\Omega = 2$. Эти периоды могут быть взаимно простыми числами.

Заметим, что скалярное уравнение (5) не может иметь периодического решения, период которого несоизмерим с периодом правой части [2].

Пример 2. (Дискретный вариант примера Н. П. Еругина [1]).

Период ω системы ($n \in N$, $k > 2$)

$$\begin{cases} x_{n+1} = -y_n, \\ y_{n+1} = x_n + (x_n^2 + y_n^2 - 1) sin\frac{2\pi n}{k} \end{cases}$$

равен k. Система имеет решение

$$x_n = cos\frac{\pi n}{2},\, y_n = sin\frac{\pi n}{2},$$

период которого $\Omega = 4$ может быть взаимно простым с $\omega = k$.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = X(x_n, n),$$

$$X(x, n + \omega) = X(x, n),\ \omega \neq 1.$$

Пусть эта система имеет Ω-периодическое решение $\varphi(n)$, $\Omega \neq 1$.

Теорема 1. *(дискретный аналог теоремы Массера-Курцвейля). Если НОД$(\omega, \Omega) = 1$, то для любого $n_0 \in Z_+$ имеем $X(\varphi(n_0), n) = X(\varphi(n_0), n_0) = const$.*

Доказательство. Воспользуемся известным фактом [3] из теории чисел о представлении наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Если НОД$(p, q) = d$, то $\exists\, m, n \in Z$ такие, что $mp + nq = d$. Отсюда сразу следует, что если p, q взаимно простые числа, то $\forall\, l \in Z\, \exists\, m, n \in Z$ такие, что $mp + nq = l$. Возьмем произвольное $n_0 \in Z_+$. Для Ω-периодического решения $\varphi(n)$ имеем

$$\varphi(n_0 + k\Omega + 1) = \varphi(n_0 + 1),$$

$$X(\varphi(n_0 + k\Omega), n_0 + k\Omega) = X(\varphi(n_0), n_0),$$

$$X(\varphi(n_0), n_0 + k\Omega) = X(\varphi(n_0), n_0),$$

$$X(\varphi(n_0), n_0 + k\Omega + m\omega) = X(\varphi(n_0), n_0),$$

$$X(\varphi(n_0), n) = X(\varphi(n_0), n_0) = const.$$

Из этой теоремы сразу следует, что логистическое уравнение (2) с ω-периодическим коэффициентом $r_n\, (\omega \neq 1)$ не может иметь Ω-периодическое решение $(\Omega \neq 1)$, период которого взаимно прост с ω.

Построение примеров

Как выше уже отмечалось, при выполнении неравенства (4) уравнение (2) имеет не менее двух положительных ω-периодических решений, отличных от положения равновесия. В работе [6] показано, что для $\omega = 2$ таких решений уравнение (2) имеет ровно 2. Может ли ω-периодическое уравнение (2), если $\omega > 2$, иметь больше двух ω-периодических решений? Ясно, что если

$$\prod_{k=0}^{\omega-1} (1 - r_k) > 1,$$

то для любого $m \in N$

$$(\prod_{k=0}^{\omega-1} (1 - r_k))^m > 1$$

и уравнение (2) с ω-периодическим коэффициентом r_n может иметь $m\omega$-периодические решения. Как ведут себя решения по отношению к устойчивости? Соответствующие примеры мы рассмотрим в этом пункте. Эти примеры построены с помощью компьютерной программы (свид. о гос. регистрации № 2011614359 от 02.06.2011), разработанной автором. Количество ω-периодических решений ω-периодического уравнения (2) совпадает с количеством ненулевых корней некоторого уравнения $\varphi(t) = t$, $\varphi(0) = 0$ [6]. Отметим, что корень $t = 0$ соответствует положительному положению равновесия $x_n = 1$. С помощью этой же программы мы можем построить для ω-периодического уравнения (2) решения периода 2ω, 3ω и т. д. Разумеется, что теперь количество ненулевых корней уравнения $\varphi(t) = t$ не совпадает с количеством искомых решений. С помощью программы Maple строим в одной и той же системе координат график функции $\varphi(t)$ и прямую $y = t$ для различных значений положительной последовательности r_n. В программе вычисляем элементы периодических решений и соответствующие мультипликаторы, которые позволяют ответить на вопрос об устойчивости периодического решения.

Пример 3. Период коэффициентов логистического уравнения равен 3, $r_0 = 2, r_1 = 4, r_2 = 0,1$. Уравнение (2) имеет ровно два 3-периодических решения:

x(3n)	2,69666	0,38988
x(3n+1)	0,09060	1,32091
x(3n+2)	3,44284	0,36593
мультипликатор	-1,83678	-0,90892
решение	неустойчиво	устойчиво

Пример 4. Период коэффициентов логистического уравнения равен 3, $r_0 = 2, r_1 = 6, r_2 = 0,3$. Уравнение (2) имеет ровно четыре 3-периодических решения:

x(3n)	1,39344	0,32989
x(3n+1)	0,63438	1,26014
x(3n+2)	5,68946	0,26458
мультипликатор	-3,54444	-2,05496
решение	неустойчиво	неустойчиво
x(3n)	0,02089	0,03691
x(3n+1)	0,14798	0,25329
x(3n+2)	24,5679	22,3547
мультипликатор	-0,68449	2,74698
решение	устойчиво	неустойчиво

Пример 5. Период коэффициентов логистического уравнения равен 2, $r_0 = 3, r_1 = 5$.

Уравнение (2) имеет ровно два 2-периодических решения:

x(2n)	2,63405	0,10480
x(2n+1)	0,01957	1,53712
мультипликатор	-6,22667	-4,58361
решение	неустойчиво	неустойчиво

Для этих же значений коэффициентов $r_0 = 3, r_1 = 5$ уравнение (2) имеет четыре 4-периодических решения:

x(4n)	5,25746	0,72839
x(4n+1)	1,49212e-05	1,64528
x(4n+2)	0,00221	0,06532
x(4n+3)	0,04418	1,0785
мультипликатор	-11,43172	-30,24777
решение	неустойчиво	неустойчиво
x(4n)	4,28204	2,96557
x(4n+1)	0,00023	0,00815
x(4n+2)	0,03361	1,16137
x(4n+3)	0,61038	0,71568
мультипликатор	21,83112	-48,51786
решение	неустойчиво	неустойчиво

Для уравнения (2) с указанными коэффициентами приведем пример 6-периодического решения.

x(6n)	7,86525
x(6n+1)	8,93489e-009
x(6n+2)	1,32606e-006
x(6n+3)	2,66344e-005
x(6n+4)	0,00395
x(6n+5)	0,07845
мультипликатор	-13,56790
решение	неустойчиво

Пример 6. Период коэффициентов логистического уравнения равен 4, $r_0 = 2,01, r_1 = 2,5$, $r_2 = 2,2, r_3 = 2,5$. Хотя все значения r_n лежат на промежутке (2; 2,526), уравнение (2) имеет, например, такое 4-периодическое решение.

x(4n)	1,74441
x(4n+1)	0,39069
x(4n+2)	1,79218
x(4n+3)	0,31369
мультипликатор	0,03706
решение	устойчиво

Заключение

В работе рассмотрен вопрос о периоде решений дискретного ω-периодического ($\omega \neq 1$) логистического уравнения (2). Показано, что это уравнение не может иметь Ω-периодического решения ($\Omega \neq 1$), период которого взаимно прост с ω. Этот факт вытекает из дискретного аналога теоремы Массера-Курцвейля. Здесь уместно привести следующий результат, касающийся автономного случая [10]. Если при частном значении параметра логистическое или другое одномерное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет решение периода три, то оно имеет бесконечное множество решений всех прочих периодов. Заметим, что самые общие закономерности сосуществования периодических решений различных периодов в одномерных непрерывных отображениях установил [9]. В настоящей работе построены примеры ω-периодического логистического уравнения, имеющего периодические решения периода $\omega, 2\omega, 3\omega$. Решения исследованы на устойчивость. Примеры показывают отсутствие явной связи бифуркационных значений параметра r логистического уравнения $x_{n+1} = x_n exp(r(1 - x_n))$ со значениями периодического коэффициента r_n с точки зрения существования периодических решений.

Литература

1. *Еругин Н. П.* О периодических решениях дифференциальных уравнений // ПММ. 1956. Т. 20, вып. 1. С. 148–152.
2. *Ильин Ю. А.* О периодических решениях линейных систем, период которых несоизмерим с периодом системы // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2010. № 4. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/(дата обращения: 07.08.2012).
3. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 496 с.
4. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
5. *Курцвейль Я., Вейвода О.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений // Чехосл. матем. журн. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
6. *Ласунский А. В.* О циклах дискретного периодического логистического уравнения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 154–157.
7. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.
8. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

9. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. № 1. С. 61–71.

10. *Li T.-Y., Yorke J. A.* Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82. P. 982–985.

11. *Massera J.* Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones differenciales // Bol. de la Facultad de Ingen. Montevideo. 1950. Vol. 4, N 1. P. 37–45.

12. *Massera J.* Estabilidad total y vibraciones aproximadamente periodicas // Publ. Inst. Mat. Estadistica. Fac. Ing. 1954. Vol. 2, N 7. P. 135–145.

13. *Xiang Hong-jun, Liao Lu-sheng, Wang Jinhua.* Global attractivity of a nonautonomous discrete Smith equation // J. Changde Teach. Univ. Sci. Ed. 2001. Vol. 13, N 1. P. 13–15.

14. *Zhou Zhan, Zou Xingfu.* Stable periodic solutions in a discrete periodic logistic equation // Appl. Math. Lett. 2003. Vol. 16. P. 165–171.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ласунский Александр Васильевич
доцент кафедры высшей математики, к. ф.-м. н.
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, Россия, 173003
эл. почта: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru
тел.: (8162) 629 968

Lasunsky, Alexandr
Novgorod State University
41 B. Saint Petersburgskaya St., 173003,Veliky Novgorod, Russia
e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru
tel.: (8162) 629 968

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 49–53

УДК 519.2

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ ИНТЕРНЕТ-ТИПА

М. М. Лери

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассматриваются случайные графы Интернет-типа, т. е. графы, степени вершин которых имеют степенное распределение с параметром τ из интервала $(1, 2)$. Посредством имитационного моделирования проведен анализ устойчивости этих графов к таким внешним воздействиям, как направленное удаление вершин и равновероятное удаление вершин. Показано, как изменяется структура графа (объемы гигантской и второй по размеру компонент и общее число компонент) с удалением из него вершин в зависимости от объема графа N и значения параметра τ. Получены модели зависимости вероятности разрушения графа от N и τ при обоих условиях внешнего воздействия.

Ключевые слова: случайный граф, имитационное моделирование, устойчивость графа.

M. M. Leri. ON ROBUSTNESS OF POWER-LAW RANDOM GRAPHS

We consider random graphs with vertex degrees being drawn independently from a power-law distribution with parameter τ in the interval $(1, 2)$. By computer simulation we study the resistance of such graphs to «target attacks» such as removal of vertices with the highest degree and to «random breakdowns», i.e. to equiprobable vertex removal. We show how graph structure characteristics (sizes of the giant and the second components, and the number of components) change with vertex deletion depending on the graph size N and parameter τ. The probability of graph destruction depending on N and τ was modeled for both cases.

Key words: random graph, simulation modelling, graph robustness.

С появлением и быстрым развитием глобальных сетей передачи данных, таких как сети телекоммуникаций, телефонные сети и т. п., возрос и продолжает возрастать интерес к изучению их структуры и функционирования [3–8, 10, 11]. Одним из актуальных вопросов является исследование устойчивости этих сетей к такого рода внешним воздействиям, как выход из строя некоторых узлов сети (см., например, [4–6, 10]). Математическим аппаратом, используемым в такого рода исследованиях, являются случайные графы, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, распределение которых является дискретным аналогом распределения Парето [7, 11]. В некоторых источниках (см., например, [11] и др.) было высказано предположение, что такие графы могут быть использованы при описании Интернет-топологии (на уровне как доменов, так и маршрутизаторов). Следуя этой интерпретации, такие графы иногда стали называть графами Интернет-типа (см., например, [2]).

Рассматриваются случайные графы, число вершин которых равно N. Степени вершин графа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ являются независимыми случайными величинами, общее распределение которых имеет следующий вид:

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant k\} = k^{-\tau},\ k = 1, 2, \dots,\ \tau \in (1, 2). \quad (1)$$

В этом случае распределение (1) имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию. При построении графа степени вершин $1, 2, \dots, N$ являются реализациями случайной величины ξ и определяют различимые полуребра графа (под полуребром понимается ребро, инцидентное некоторой вершине, для которой смежная вершина еще не определена) [11]. Если сумма степеней вершин оказывается нечетной, то равновероятно выбирается вершина графа, степень которой увеличивается на 1. При равновероятном соединении всех полуребер графа образуются ребра. Построенный таким образом граф имеет как петли, так и кратные ребра. Известно [2, 11], что графы Интернет-типа имеют единственную гигантскую компоненту связности, математическое ожидание объема которой пропорционально cN, где $0 < c < 1$ – некоторая положительная постоянная. Теоретические исследования случайных графов Интернет-типа касаются как изучения предельного поведения структурных характеристик таких графов (см., например, [2, 3, 6, 8, 11]), так и исследования их устойчивости к разного рода разрушениям [4–6, 10]. Кроме теоретических подходов, одним из удобных средств изучения случайных графов является имитационное моделирование.

Целью настоящей работы было исследование с помощью метода Монте-Карло устойчивости случайных графов Интернет-типа к процессу разрушения, а именно, к такому внешнему воздействию, как случайное (равновероятное) удаление вершин, а также направленное удаление вершин с большими степенями. Рассматривалось поведение объемов компонент связности графа и их количества в зависимости от процента удаленных из графа вершин при разных значениях параметра распределения степеней вершин графа τ и объема графа N.

Была построена имитационная модель случайного графа Интернет-типа [1] на основе алгоритма, предложенного в [12], с использованием генератора псевдослучайных чисел «вихрь Мерсенна» [9]. С помощью этой модели было показано [1], что структура таких графов главным образом зависит от параметра распределения степеней вершин τ и слабо зависит от фактического объема графа N. Чем ближе значение τ к 1, тем больше доля вершин графа, входящих в гигантскую компоненту (около 95 %), тогда как при значениях τ, близких к 2, в нее входит только чуть более половины всех вершин графа. Что касается объема второй компоненты, то он хоть и несколько увеличивается с ростом значения параметра τ, но, несмотря на это, остается пренебрежимо малым по сравнению с размером гигантской компоненты. При этом существенно возрастает общее число компонент графа. Поэтому были проведены вычислительные эксперименты для графов других размерностей, чем в [1], а именно для значений N от 500 до 5000 с шагом в 500 вершин и для 9 значений параметра τ из отрезка $(1, 2)$ с шагом $0,1$. Для каждого из значений N и τ было сгенерировано по 100 случайных графов. Моделирование графов и имитационные эксперименты проводились на вычислительном кластере КарНЦ РАН. Процесс разрушения графа был представлен следующим образом. Из сгенерированного начального графа на каждом шаге выбиралась одна вершина (либо равновероятно, либо вершина, имеющая наибольшую степень), которая удалялась вместе с выходящими из нее ребрами. Затем вершины, ставшие изолированными, тоже удалялись из графа.

Через $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ обозначим случайные величины, равные объемам компонент графа и расположенные в порядке убывания (η_1 – объем гигантской компоненты, η_2 – объем второй по размеру компоненты и т. д.), где s – общее число компонент. В качестве критерия разрушения графа будем рассматривать наступление следующего события $A : \{\eta_1 \leqslant 2\eta_2\}$. Таким образом, если объем второй по размеру компоненты графа не меньше, чем половина размера наибольшей компоненты, граф считается разрушенным. По полученным посредством имитационного моделирования статистическим данным с помощью методов регрессионного анализа были оценены следующие зависимости: объема гигантской компоненты η_1 (в %), объема второй по размеру компоненты η_2 (в %) и общего числа компонент s случайного графа Интернет-типа от начального размера графа N, параметра распределения степеней вершин τ и процента удаленных из графа вершин r. При «случайных сбоях» (т. е. при равновероятном удалении вершин графа) получены следующие оценки:

$$\eta_1 = 129 - 36\tau - 1,1r,$$

$$\eta_2 = 2 - 0,25 \ln N + 0,42\tau - 0,017 \ln r,$$

$$\frac{s}{N} = -0,18 + 0,2\tau - 0,004 r \ln \tau.$$

Коэффициенты детерминации моделей равны, соответственно, $0,98$, $0,7$ и $0,98$. Приведенные выше модели могут быть использованы при следующих ограничениях на значения процента удаленных из графа вершин: $100/N \leqslant r \leqslant 117 - 32,7\tau$. Здесь и далее ограничение снизу означает удаление из графа одной вершины, а введение ограничения сверху связано с тем, что при удалении большего процента вершин граф уже будет разрушен. Таким образом, при фиксированном τ с ростом процента вершин, удаленных из графа, объем гигантской компоненты η_1 уменьшается линейным образом и не зависит от объема графа, тогда как объем второй компоненты η_2, логарифмически уменьшаясь, в целом не превосходит 2 % от объема графа. А общее число компонент графа с равновероятным удалением из него вершин будет линейно уменьшаться.

Далее рассмотрим результаты, полученные в случае «направленной атаки» (т. е. когда целенаправленно удаляются вершины по одной так, что на каждом шаге исключается вершина с макимальной степенью). Были получены следующие регрессионные зависимости:

$$\eta_1 = 130 - 46\tau - 9r,$$

$$\eta_2 = 4,36 - 0,44 \ln N + \tau + 0,4 \ln r,$$

$$\ln s = -3,3 + \ln N + 2,3 \ln \tau + 0,1r,$$

где коэффициенты детерминации моделей равны, соответственно, $0,95$, $0,6$ и $0,98$, и действует следующее ограничение на процент удаленных вершин: $100/N \leqslant r \leqslant 14 - 5,15\tau$. Это означает, что при фиксированном τ в данном случае, как и при «случайном сбое», получаем линейную зависимость объема гигантской компоненты η_1 от процента удаленных из графа вершин r и здесь также отсутствует зависимость η_1 от объема графа. Объем второй компоненты η_2 тоже, как и при равновероятном удалении вершин, логарифмически уменьшаясь, в целом не превосходит чуть более 4 % от объема графа, а общее число компонент графа с удалением из него вершин экспоненциально возрастает.

Обозначим через p оценку вероятности $\mathsf{P}\{A\}$, где $A : \{\eta_1 \leqslant 2\eta_2\}$. При «случайных сбоях» была получена следующая регрессионная зависимость:

$$p = \begin{cases} 0, & \text{при } r < 37/\sqrt{\tau}, \\ -0,2 + 1,5 \cdot 10^{-4} \tau r^2, & \text{при } 37/\sqrt{\tau} \leqslant r < 89/\sqrt{\tau}, \\ 1, & \text{при } r \geqslant 89/\sqrt{\tau}, \end{cases}$$

где $R^2 = 0,84$. Это означает, например, что оценка вероятности разрушения графа равна 0 при $\tau = 1,1$ для всех $r < 35,3$ %, а при $\tau = 1,9$ для $r < 26,9$ %; и $p = 1$ для $r > 84,8$ % при $\tau = 1,1$, а при $\tau = 1,9$ для $r > 64,5$ %.

В случае же «направленной атаки» зависимость оказалась следующей:

$$p = \begin{cases} 0, & \text{при } \ln r < 1,85 - \tau, \\ -0,38 + 0,06 r e^{\tau}, & \text{при } 1,85 - \tau \leqslant \ln r \leqslant 3,13 - \tau, \\ 1, & \text{при } \ln r > 3,13 - \tau, \end{cases}$$

где $R^2 = 0,76$. То есть, $p = 0$ при $\tau = 1,1$ для всех $r < 2,12$ %, а при $\tau = 1,9$ для $r < 0,95$ %; и $p = 1$ для $r > 7,6$ % при $\tau = 1,1$, а при $\tau = 1,9$ для $r > 3,4$ %.

Заметим, что имитационные эксперименты показывают, что вероятность разрушения графа как при направленном, так и при случайном воздействиях, не зависит от объема графа. Рассмотрим теперь критические значения вероятностей разрушения графа. В таблицах 1 и 2 приведены эти значения при «направленной атаке» (табл. 1) и при «случайных сбоях» (табл. 2).

Рассмотрим графы, для которых $\tau = 1,1$. Если из такого графа удалять вершины равновероятно, то для того чтобы вероятность разрушения не превысила 5 %, т. е. $\mathsf{P}\{A\} \leqslant 5$ % из него можно удалить не более 38,9 % вершин. Тогда как при целенаправленном разрушении вершин, имеющих максимальную степень на каждом шаге, удаление уже 2,4 % вершин приводит к тому же результату. Заметим, что с ростом значения параметра τ процент вершин, которые могут быть удалены из графа до того, как он может считаться разрушенным, уменьшается. Чтобы полностью разрушить любой граф Интернет-типа с помощью «направленной атаки», достаточно удалить из него чуть менее 8 % вершин, тогда как при «случайных сбоях» граф может быть не разрушен даже при удалении из него 80 % вершин.

Исследование показало, что рассматриваемые случайные графы сильно уязвимы к направленному разрушению, такому как удаление вершин с большими степенями. Но в то же время, они достаточно устойчивы к случайным сбоям, т. е. к такому воздействию, как равновероятное удаление вершин. Что

Таблица 1. Критические значения вероятностей разрушения графа при «направленной атаке»

$p\backslash\tau$	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$	$1,6$	$1,7$	$1,8$	$1,9$
$0,01$	$2,2$	$2,0$	$1,8$	$1,6$	$1,5$	$1,3$	$1,2$	$1,1$	$1,0$
$0,05$	$2,4$	$2,2$	$2,0$	$1,8$	$1,6$	$1,4$	$1,3$	$1,2$	$1,1$
$0,1$	$2,7$	$2,4$	$2,2$	$2,0$	$1,8$	$1,6$	$1,5$	$1,3$	$1,2$
$0,5$	$4,9$	$4,4$	$4,0$	$3,6$	$3,3$	$3,0$	$2,7$	$2,4$	$2,2$
$0,9$	$7,1$	$6,4$	$5,8$	$5,3$	$4,8$	$4,3$	$3,9$	$3,5$	$3,2$
$0,95$	$7,4$	$6,7$	$6,0$	$5,5$	$4,9$	$4,5$	$4,0$	$3,7$	$3,3$
$0,99$	$7,6$	$6,9$	$6,2$	$5,6$	$5,1$	$4,6$	$4,2$	$3,8$	$3,4$

Таблица 2. Критические значения вероятностей разрушения графа при «случайных сбоях»

$p\backslash\tau$	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$	$1,6$	$1,7$	$1,8$	$1,9$
$0,01$	$35,7$	$34,2$	$32,8$	$31,6$	$30,6$	$29,6$	$28,7$	$27,9$	$27,1$
$0,05$	$38,9$	$37,3$	$35,8$	$34,5$	$33,3$	$32,3$	$31,3$	$30,4$	$29,6$
$0,1$	$42,6$	$40,8$	$39,2$	$37,8$	$36,5$	$35,4$	$34,3$	$33,3$	$32,4$
$0,5$	$65,1$	$62,4$	$59,9$	$57,7$	$55,8$	$54,0$	$52,4$	$50,9$	$49,6$
$0,9$	$81,6$	$78,2$	$75,1$	$72,4$	$69,9$	$67,7$	$65,7$	$63,8$	$62,1$
$0,95$	$83,5$	$79,9$	$76,8$	$74,0$	$71,5$	$69,2$	$67,2$	$65,3$	$63,5$
$0,99$	$84,9$	$81,3$	$78,1$	$75,3$	$72,7$	$70,4$	$68,3$	$66,4$	$64,6$

касается зависимости устойчивости графов Интернет-типа от изменения значения параметра распределения степеней вершин τ, то оказалось, что как при «направленном», так и при «случайном» удалении вершин, чем ближе значение параметра τ к 1, тем граф оказывается более устойчивым, и, соответственно, чем ближе значение τ к 2, тем разрушение такого графа будет происходить быстрее.

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития».

Литература

1. *Лери М. М.* Моделирование случайных графов Интернет-типа // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, вып. 5. С. 737–744.

2. *Павлов Ю. Л.* Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 22–34.

3. *Aiello W., Chung F., Lu L.* A random graph model for massive graphs // Proc. of the 32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 2000. P. 171–180.

4. *Bollobas B., Riordan O.* Robustness and vulnerability of scale-free random graphs // Internet Mathematics. 2004. Vol. 1, N 1. P. 1–35.

5. *Cohen R., Erez K., Ben-Avraham D., Havlin S.* Resilience of the Internet to Random Breakdowns // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 4626–4628.

6. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 212 p.

7. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262.

8. *Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Watts D. J.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 026118.

9. *Matsumoto M., Nishimura T.* Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator // ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation. 1998. Vol. 8, N 1. P. 3–30.

10. *Norros I., Reittu H.* Attack resistance of power-law random graphs in the finite mean, infinite variance region // Internet Mathematics. 2008. Vol. 5, N 3. P. 251–266.

11. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23.

12. *Tangmunarunkit H., Govindan R., Jamin S. et al.* Network topology generators: degree-based vs. structural // Proceedings of the SIGCOMM'02. Pittsburgh, USA, 2002. P. 147–159.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Лери Марина Муксумовна
научный сотрудник, к. т. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: leri@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Leri, Marina
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: leri@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 54–60

УДК 519.872.6

PERFORMANCE ANALYSIS OF BRIDGE MONTE-CARLO ESTIMATOR

O. V. Lukashenko[1], E. V. Morozov[1], M. Pagano[2]

[1] Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of RAS
[2] Dept. of Information Engineering, University of Pisa, Italy

The overflow probability is an important QoS (Quality of Service) parameter. In this paper, we analyze the performance of Bridge Monte-Carlo (BMC), an interesting approach for the estimation of the overflow probability for queueing systems fed by a Gaussian input process.

K e y w o r d s: Gaussian queue, fractional Brownian motion, overflow probability, estimation.

О. В. Лукашенко, Е. В. Морозов, М. Пагано. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ BMC-ОЦЕНКИ

Вероятность переполнения является важным показателем качества обслуживания. В данной статье мы изучаем качественные свойства BMC-оценки этой вероятности для различных гауссовских входных процессов.

К л ю ч е в ы е с л о в а: гауссовская очередь, дробное броуновское движение, вероятность переполнения, оценивание.

Introduction

We consider a single server queueing system with constant service rate C fed by a Gaussian input, which is defined as follows:

$$A_t = mt + X_t, \tag{1}$$

where constant $m > 0$ and $\{X_t, t \in T\}$ with $T = \{\mathbb{Z}_+\}$ (or $T = \{\mathbb{R}_+\}$) is a centered Gaussian process with stationary increments, which describes random fluctuations of the input around its linearly increasing mean. To guarantee stability of such a system we assume that $m < C$. Let us denote $v_t := \mathbb{D}X_t$ – the variance of X_t. Then the covariance function has the following expression:

$$\Gamma_{s,t} = \frac{1}{2}\left(v_t + v_s - v_{|t-s|}\right). \tag{2}$$

The stationary overflow probability (i.e., the probability that stationary workload Q exceeds some treshold level B) has the following representation [12]:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\text{overflow}} &:= \mathbb{P}(Q \geqslant B) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}(A_t - Ct) \geqslant B\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}(X_t - \varphi_t) \geqslant 0\right), \end{aligned} \tag{3}$$

where $\varphi_t := B + rt$, $r := C - m > 0$.

We consider the following important cases of Gaussian inputs:

1. Fractional Brownian Motion (FBM). In this case $v_t = t^{2H}$, with Hurst parameter $H \in (0,1)$ (in the teletraffic framework usually $H \in (0.5, 1)$, corresponding to traffic processes with long range

dependence). It has been shown in [13] that FBM arises as the scaled limit process when the cumulative workload is a superposition of on-off sources with mutually independent heavy-tailed on and/or off periods.

2. Sum of two independent FBMs with $v_t = t^{2H_1} + t^{2H_2}$. The use of this model is also motivated by the fundamental result in [13] in case of heterogeneous on-off sources.

3. Integrated Ornstein-Uhlenbeck process (IOU) with $v_t = t + e^{-t} - 1$. IOU is the Gaussian counterpart of the well-known Anick-Mitra-Sondi fluid model [1], and its relevance is further motivated in [8].

Asymptotic regimes

There are no explicit expressions for (3) in case of general Gaussian input (there are some results for specific simple cases like standard Brownian motion). Therefore researches were concentrated on asymptotic analysis and simulation technique in different regimes which are described below.

Large buffer regime

In this regime the overflow probability

$$\mathbb{P}_B = \mathbb{P}(Q \geqslant B)$$

is analyzed for large B. The following logarithmic asymptotic result has been found in [3]:

$$\log \mathbb{P}_B \sim -\inf_{t \geqslant 0} \frac{V^2(t)}{2}, \ as\ B \to \infty, \tag{4}$$

where $f \sim g$ means $f/g \to 1$ and

$$V(t) = \frac{B + rt}{\sqrt{v_t}}.$$

Expression (4) means that for sufficiently large values of B

$$\mathbb{P}_B \approx \exp\left(-\inf_{t \geqslant 0} \frac{V^2(t)}{2}\right). \tag{5}$$

The so- called most-likely time τ of the overflow is the optimizing argument in (4) and (5). For FBM input, time τ has the following explicit form

$$\tau = \frac{H}{1-H} \cdot \frac{B}{r}, \tag{6}$$

implying

$$V(\tau) = \left(\frac{B}{1-H}\right)^{1-H} \left(\frac{r}{H}\right)^{H}. \tag{7}$$

Calculation of exact asymptotics (which are more informative than log asymptotics) is typically much more difficult problem depending on the Gaussian component X of the input. We refer to [7, 10, 11] where such results can be found.

Many sources regime

Often in a large network the input to a station is typically a superposition of a large number n of the streams generated by the i.i.d. sources. This observation leads to analysis of the so-called many sources regime where the input to a station has a form $A_t = mnt + \sum_{i=1}^{n} X_t^i$, with the i.i.d. centered Gaussian processes $\{X^i\}$ (with stationary increments), and the threshold and capacity are scaled accordingly, i. e., $B = nb$ and $C = nc$ where parameter $b > 0$ and c corresponds to capacity of a single station. Let now be $r := c - m > 0$ and $\varphi_t = b + rt$. Then the overflow probability in the many-source regime becomes:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n &:= \mathbb{P}\left(\sup_{t \in T}\left(\sum_{i=1}^{n} X_t^i - nrt\right) \geqslant nb\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{t \in T}\left(\sum_{i=1}^{n} X_t^i - n\varphi_t\right) \geqslant 0\right) \\ &=_d \mathbb{P}\left(\sup_{t \in T}\left(X_t^{(n)} - \varphi_t\right) \geqslant 0\right), \end{aligned}$$

where $X_t^{(n)} := \sqrt{1/n} X_t$ (X_t denotes a generic element of X_t^i). Note that the last expression corresponds to equation (3) with the Gaussian input component $X_t^{(n)}$.

There are several asymptotic results for the overflow probability. Most of them claim that, under mild conditions, such a probability decays exponentially fast in n. The following results has been proved in [2]:

$$-\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_n = \inf_{t \geqslant 0} \frac{V^2(t)}{2}, \tag{8}$$

where

$$V(t) = \frac{b + rt}{\sqrt{v_t}}.$$

Expression (8) means that for n sufficiently large

$$\mathbb{P}_n \approx \exp\left(-n \inf_{t \geqslant 0} \frac{V^2(t)}{2}\right). \tag{9}$$

As in a large buffer regime, the optimizing argument τ in (8) is called the most-likely time of the overflow. Result (8) gives only logarithmic asymptotics. In discrete time the following exact large deviation (LD) asymptotic holds [9]:

$$\mathbb{P}_n \sim \Phi\left(V(\tau)\sqrt{n}\right),\ n \to \infty, \tag{10}$$

where

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy.$$

For other exact asymptotics we refer to [4].

BMC estimator

Bridge Monte-Carlo (BMC) is a new approach to estimation of the overflow probability in a queueing system with Gaussian input.

Originally proposed by some of the authors in [5], BMC is based on the idea of expressing the overflow probability as the expectation of a function of the *Bridge* $Y := \{Y_t\}$ of the Gaussian input process X, i.e., the process obtained by conditioning X to reach a certain level at some prefixed time $\bar{t}$:

$$Y_t = X_t - \psi_t X_{\bar{t}}, \tag{11}$$

where function ψ_t is expressed via covariance function Γ as

$$\psi_t := \frac{\Gamma_{t,\bar{t}}}{\Gamma_{\bar{t},\bar{t}}}.$$

Because the variance of the input is increasing function of t in all models we consider in the paper, it is easy to see that $\psi_t > 0$ for all $t \in T$. Moreover, we note that the process Y is independent of X_τ since

$$\mathbb{E}[X_{\bar{t}} Y_t] = \Gamma_{\bar{t},t} - \frac{\Gamma_{t,\bar{t}}}{\Gamma_{\bar{t},\bar{t}}} \Gamma_{\bar{t},\bar{t}} = 0.$$

Further, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\text{overflow}} &:= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}(X_t - \varphi_t) \geqslant 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}(Y_t + \psi_t X_{\bar{t}} - \varphi_t) \geqslant 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\inf_{t\in T}(\varphi_t - Y_t - \psi_t X_{\bar{t}}) \leqslant 0\right).
\end{aligned}$$

Consider two events:

$$A = \left\{\inf_{s\in T}(\varphi_s - Y_s - \psi_s X_{\bar{t}}) \leqslant 0\right\},$$

$$B = \left\{\inf_{t\in T} \psi_t^{-1}[\varphi_t - Y_t] \leqslant X_{\bar{t}}\right\}.$$

Fix any $\omega \in A$ and let $s^* = \mathrm{argmin}(\varphi_s - Y_s - \psi_s X_{\bar{t}})$. Note that the event A is not empty since

$$\varphi_{\bar{t}} - Y_{\bar{t}} - \psi_{\bar{t}} X_{\bar{t}} = 0.$$

Then

$$\varphi_{s^*} - Y_{s^*}(\omega) - \psi_{s^*} X_{\bar{t}}(\omega) \leqslant 0.$$

Thus, the following inequality holds

$$\inf_{t\in T} \psi_t^{-1}[\varphi_t - Y_t(\omega)] \leqslant \psi_{s^*}^{-1}[\varphi_{s^*} - Y_{s^*}(\omega)] \leqslant X_{\bar{t}}(\omega).$$

That is $\omega \in B$, and hence $A \subseteq B$. Similarly, we can check that $B \subseteq A$. It means that $A = B$. Denote

$$\overline{Y} := \inf_{t\in T} \frac{\varphi_t - Y_t}{\psi_t}. \tag{12}$$

Recall that

$$X_t = N(0,\,\Gamma_{t,t}) =_d \sqrt{\Gamma_{t,t}}\, N(0,\,1),$$

where $=_d$ stands for stochastic equivalence. Then, the overflow probability can be rewritten as follows

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\text{overflow}} &= \mathbb{P}\left(\overline{Y} \leqslant X_{\bar{t}}\right) = \int_R \mathbb{P}(X_{\bar{t}} \geqslant u)\mathbb{P}(\overline{Y} \in du) \\
&= \int_R \mathbb{P}\Big(N(0,\,1) \geqslant \frac{u}{\sqrt{\Gamma(\bar{t},\,\bar{t})}}\Big)\mathbb{P}(\overline{Y} \in du) \\
&= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{\overline{Y}}{\sqrt{\Gamma_{\bar{t},\bar{t}}}}\right)\right],
\end{aligned}$$

where independence $\overline{Y}$ and $X_{\bar{t}}$ is used. Given an i.i.d sequence $\{\overline{Y}^{(i)},\ i = 1, ..., N\}$ distributed as $\overline{Y}$, the estimator of $\mathbb{P}_{\text{overflow}}$ is defined as follows:

$$\widehat{\mathbb{P}}_{\text{overflow}} := \widehat{\mathbb{P}}_{\text{overflow}}(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Phi\left(\frac{\overline{Y}^{(i)}}{\sqrt{\Gamma_{\bar{t},\bar{t}}}}\right).$$

In spite of the fact that the BMC estimator is not asymptotically efficient, its variance is lower than for the single-twist Importance Sampling (which is comparable in the terms of computational complexity) [6]. Moreover, the approach using BMC estimator is extremely flexible since it does not rely on a change of measure. Furthermore, to apply this estimator the knowledge of the correlation structure of the incoming traffic is only required. (As we mentioned above the assumption of the Gaussianity of X_t is typically fulfilled when a lot of flows are multiplexed together.) Although the choice of $\bar{t}$ is arbitrary, in the following we will always assume that $\bar{t} = \tau$, i.e. as the conditioning point we will consider the most-likely time of the overflow. For a wide range of values of the queue parameters, the minimum in (12) is almost always attained near the most-likely time and does not vary significantly. Let us denote

$$G(t) := \frac{\varphi_t - Y_t}{\psi_t}.$$

and note that $G(\bar{t}) = \varphi_{\bar{t}}$ is deterministic.

Assume that $\overline{Y}^{(i)} \in [\varphi_\tau - h, \varphi_\tau]$, where evidently the span h depends on the samples $\{Y^{(i)},\ i = 1, ..., N\}$. Then by the monotonicity of the tail distribution Φ,

$$\Phi\left(\frac{\varphi_\tau}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}}\right) \leqslant \widehat{\mathbb{P}}_{\text{overflow}} \leqslant \Phi\left(\frac{\varphi_\tau - h}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}}\right). \quad (13)$$

Consider the difference

$$\Delta(h) \ := \ \Phi\left(\frac{\varphi_\tau - h}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}}\right) - \Phi\left(\frac{\varphi_\tau}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}}\right),$$

which can be approximated as

$$\begin{aligned} \Delta(h) \ &\approx \ -\Phi'\left(\frac{\varphi_\tau}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}}\right)\frac{h}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}} \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-Z^2/2}\,\frac{h}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}}, \end{aligned} \quad (14)$$

where $Z = \frac{\varphi_\tau}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}}$. Actually if the distance Δ between lower and upper bound in (13) is not too large, we can estimate the accuracy of approximation (10). We note that $V(\tau)\sqrt{n} = \frac{\varphi_\tau}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}}$, so expression (10) indeed gives only lower bound of $\widehat{\mathbb{P}}_{\text{overflow}}$. Below we verify the accuracy of approximation (10) by simulation.

Simulation results

In this section, a few numerical results are presented which demonstrate the properties and accuracy of the BMC estimator.

We first show the accuracy of the BMC estimator for the different input processes, by comparing the simulation results with the known asymptotics (both for large buffer regime and for many sources regime).

Then we investigate the properties of the BMC estimator from an analytical point of view, taking into account the dependence of the conditional overflow probability from the simulated sample paths of the input process in the case of FBM traffic.

Comparison with asymptotic results

The first set of simulations compares the estimates of BMC with the asymptotic expressions recalled above.

Figures 1–3 refer to many sources regime for different input processes: FBM, sum of independent FBMs and IOU, respectively. In all cases the estimation of the overflow probability uses $N = 10^6$ sample paths and is compared with the exact asymptotic given by (10). The following parameters are used in simulation: $r = 0.1$; $b = 0.3$; $H = H_1 = 0.8$; $H_2 = 0.6$. As figures show, a good consistency between theoretical values and simulation results are obtained over a wide range of the overflow probability values.

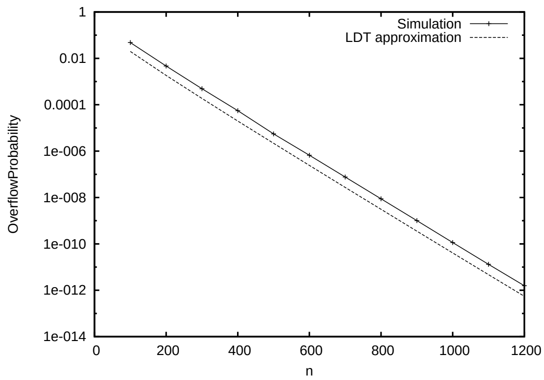

Fig. 1. Simulation vs. asymptotic (10): FBM

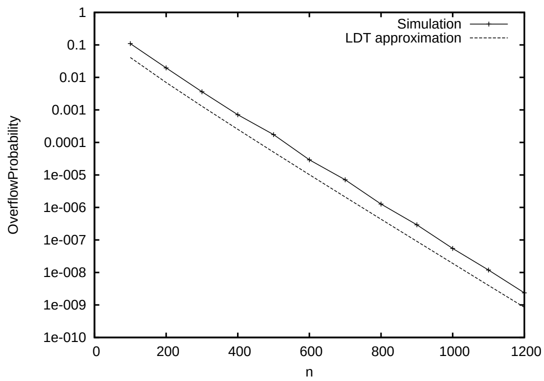

Fig. 2. Simulation vs. asymptotic (10): the sum of two independent FBMs

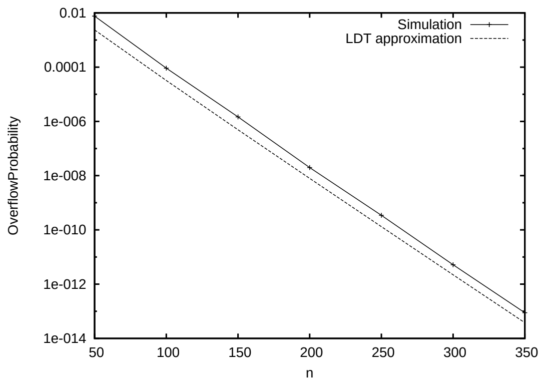

Fig. 3. Simulation vs. asymptotic (10): IOU

Moreover, for FBM input Figure 4 shows the behavior of the relative error of the BCM estimator (defined as the ratio between the empirical standard deviation and the corresponding probability). Although the relative error is not bounded (indeed, BMC is not even asymptotically efficient [6]), it grows slowly, and for the overflow probabilities of the order of 10^{-12} (compare the values in figures 1 and 4) is still less than 1 %.

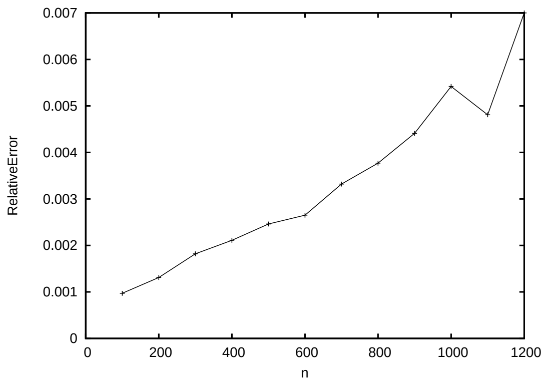

Fig. 4. Relative Error for FBM

Finally, figure 5 refers to the large buffer regime and compares the LD bound (5) with the simulation results in the case of a single FBM (with $H = 0.8$ as before) process. In this case B goes from 10 to 100 and $r = 1$, considering $N = 10^4$ sample paths (the choice is motivated by the relative high values of the simulated probability).

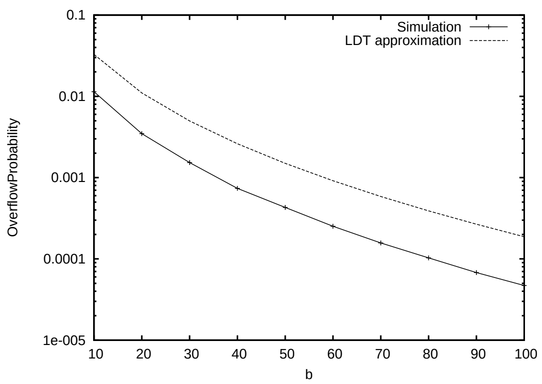

Fig. 5. Simulation vs. asymptotic (5) for FBM

Performance analysis of BMC

The second set of simulations aimed at checking the variability of h, and hence of Δ in (14), in order to understand the goodness of the asymptotic approximation (10).

The tests are performed considering a single FBM flow in the many sources regime and using the same parameters as in previous section.

To give a visual idea of the variability of $\overline{Y}^{(i)}$, figure 6 compares its first 1000 samples with the theorethical upper bound $G(\tau) = \varphi_\tau$ for $n = 500$ FBM sources.

As highlighted in the figure, in this example $h \approx 0.298$ is not significantly lower than $\varphi_\tau = 1.5$, confirming the goodness of the LD approximation (10).

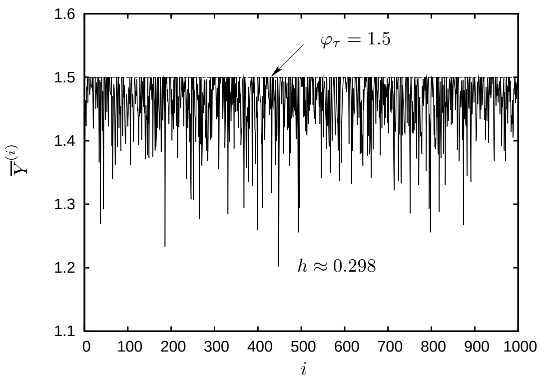

Fig. 6. Simulation results for $\overline{Y}^{(i)}$

To better understand the variability of $\overline{Y}$, figures 7 – 10 shows the empirical distribution of $\overline{Y}$ for different values of n. As expected, for large values of n, $\overline{Y}$ is concentrated near $G(\tau) = 1.5$, and this fact gives a formal motivation for the analysis of Δ in (14).

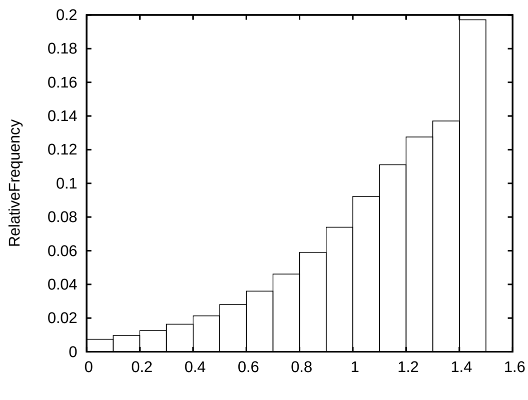

Fig. 7. Histogram of the distribution of $\overline{Y}$ $(n = 50)$

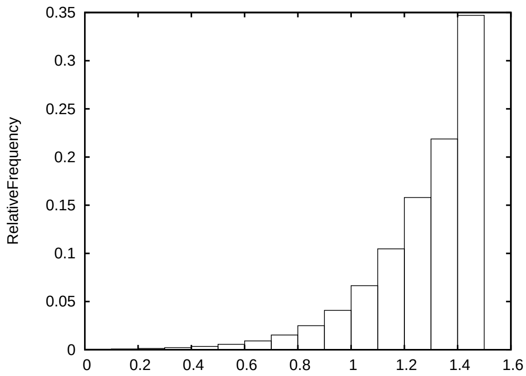

Fig. 8. Histogram of the distribution of $\overline{Y}$ $(n = 100)$

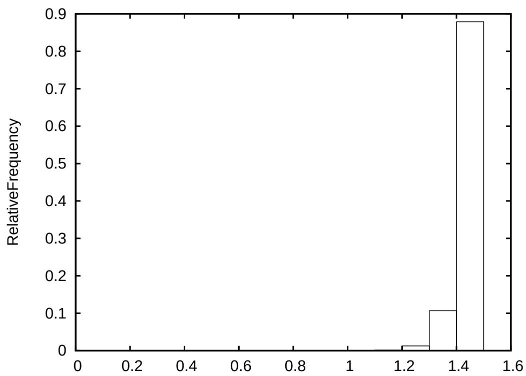

Fig. 9. Histogram of the distribution of $\overline{Y}$ $(n = 500)$

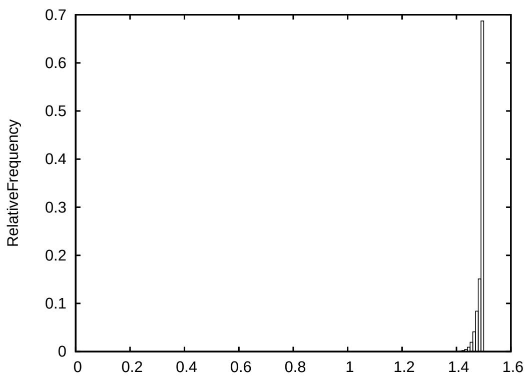

Fig. 10. Histogram of the distribution of $\overline{Y}$ $(n = 2000)$

For sake of completeness, figure 11 shows the variation of $\overline{Y}^{(i)}$ for FBM in the large buffer regime (buffer size $b = 2000$) and the following values of the system parameters: $H = 0.8$; $r = 1$; $N = 10^3$. In this example $h \approx 658.941$, but the ratio $\frac{h}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}} \approx 0.497$. Thus, inspite of that h is rather large, the increment of the argument of function Φ in (13) is $\frac{h}{\sqrt{\Gamma_{\tau,\tau}}}$ and comparably small. It shows that approximation (14) can be applied.

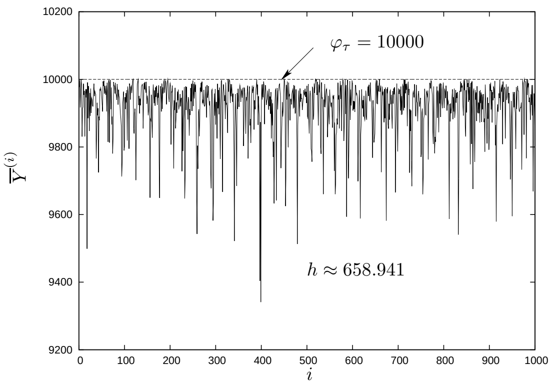

Fig. 11. Simulation results for $\overline{Y}^{(i)}$

Conclusions

In this paper, we have analyzed the main properties of BMC estimator, a simulation approach that exploits the Gaussian nature of the input process and relies on the properties of Bridges.

Several sets of simulations were carried out in order to compare the estimations with well-known asymptotic bounds for different input processes and in different working conditions, considering large buffers as well as the superposition of many i.i.d. sources.

Focusing on the latter scenario, we investigated the empirical distribution of the estimates and the dependence of the conditional overflow probability from the simulated sample paths of the bridge process, in order to understand the applicability of asymptotic results. The simulations highlighted that the shape of the histograms strongly depends on the number of multiplexed sources, confirming the well-known heuristic that rare event happens in the more likely way.

This work is supported by the strategic development program of Petrozavodsk State University for 2012–2016 and Russian Foundation for Basic research, project N 10-07-00017.

References

1. *Addie R., Mannersalo P., Norros I.* Most probable paths and performance formulae for buffers with Gaussian input traffic // European Transactions in Telecommunications. 2002. Vol. 13. P. 183–196.

2. *Botvich D., Duffield N.* Large deviations, the shape of the loss curve, and economies of scale in large multiplexers // Queueing Systems. 1995. Vol. 20. P. 293–320.

3. *Debicki K.* A note on LDP for supremum of Gaussian processes over infinite horizon // Stat. Probab. Lett. 1999. Vol. 44. P. 211–220.

4. *Debicki K., Mandjes M.* Exact overflow asymtotics for queues with many Gaussian inputs. Report PNA-R0209 March 31, 2002.

5. *Giordano S., Gubinelli M., Pagano M.* Bridge Monte-Carlo: a novel approach to rare events of Gaussian processes // Proc. of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Petersburg, Russia, 2005. P. 281–286.

6. *Giordano S., Gubinelli M., Pagano M.* Rare events of Gaussian processes: a performance comparison between Bridge Monte-Carlo and Importance Sampling. In Next Generation Teletraffic and Wired/Wireless Advanced Networking. St. Petersburg, Russia, 2007. P. 268–280.

7. *Hüsler J., Piterbarg V. I.* Extremes of a certain class of Gaussian processes // Stochastic Processes and their Applications. 1999. Vol. 83. P. 257–271.

8. *Kulkarni V., Rolski T.* Fluid model driven by an Ornstein-Uhlenbeck process // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 1994. Vol. 8. P. 403–417.

9. *Likhanov N., Mazumdar R.* Cell loss asymptotics in buffers fed with a large number of independent stationary sources // Journal of Applied Probability. 1999. Vol. 36. P. 86–96.

10. *Massoulié L., Simonian A.* Large buffer asymptotics for the queue with FBM input // Journal of Applied Probability. 1999. Vol. 36. P. 894–906.

11. *Narayan O.* Exact asymptotic queue length distribution for fractional Brownian traffic // Advances in Performance Analysis. 1998. Vol. 1. P. 39–63.

12. *Reich E.* On the On the integrodifferential equation of Takacs I. // Ann. Math. Stat. 1958. Vol. 29. P. 563–570.

13. *Taqqu M. S., Willinger W., Sherman R.* Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling // Computer communication review. 1997. Vol. 27. P. 5–23.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Лукашенко Олег Викторович
аспирант
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: lukashenko-oleg@mail.ru
тел.: (8142) 763370

Lukashenko, Oleg
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: lukashenko-oleg@mail.ru
tel.: (8142) 763370

Морозов Евсей Викторович
ведущий научный сотрудник
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: emorozov@karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Morozov, Evsey
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: emorozov@karelia.ru
tel.: (8142) 763370

Пагано Микеле
профессор
факультет информационной инженерии Университета г. Пизы, Италия
эл. почта: m.pagano@iet.unipi.it
тел.: +39 050 2217575

Pagano, Michele
Associated Professor
Department of Information Engineering,
University of Pisa, Italy
e-mail: m.pagano@iet.unipi.it
tel.: +39 050 2217575

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 61–67

УДК 519.83

РЕПУТАЦИИ АРБИТРОВ В МОДЕЛЯХ ПРОВЕДЕНИЯ ПЕРЕГОВОРОВ

В. В. Мазалов[1], Ю. С. Токарева[2]

[1] *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*
[2] *Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет им. Н. Г. Чернышевского*

В данной работе рассматриваются модели проведения переговоров двух лиц с применением согласительного арбитража и арбитража по последнему предложению, в которых независимая сторона представлена арбитражным комитетом. Исследовано влияние репутации членов арбитражного комитета на решение игры.

Ключевые слова: переговоры, репутация, арбитражные схемы.

V. V. Mazalov, Ju. S. Tokareva. REPUTATION OF ARBITRATORS IN BARGAINING MODELS

We consider a two-person bargaining model based on Conventional and Final-Offer Arbitration procedures in which the independent party is represented by an arbitration committee. We investigate the effect of the reputation of the arbitrators on the solution of the game.

Key words: bargaining, reputation, arbitration schemes.

Введение

Важный момент в переговорах — репутация участников. Под репутацией понимается приобретаемая кем-, чем-нибудь общественная оценка, общее мнение о качествах, достоинствах и недостатках кого-, чего-нибудь [4]. В зависимости от поведения участников переговоров при принятии решений формируется их репутация. Поэтому при проведении переговоров участники на каждой стадии должны думать не только о максимизации своего выигрыша на данной стадии, но и о своей репутации, от которой также зависит их дальнейший выигрыш.

В случае, когда в процессе переговоров участники не могут достигнуть соглашения самостоятельно, они могут обратиться к независимому эксперту – арбитру (жюри) или арбитражному комитету. Такие процедуры называются арбитражными схемами. Существуют различные арбитражные схемы. Наиболее распространена в применении арбитражная процедура по последнему предложению (Final-Offer Arbitration), когда в качестве решения спора выступает предложение игрока, оказавшееся ближе к мнению арбитра или арбитражного комитета [5]. Кроме нее часто используется схема согласительного арбитража, по которой окончательным решением переговоров будет мнение самого независимого эксперта [6].

Теоретико-игровым моделям репутаций посвящено достаточно много работ (см. [2], [8], [10]). В данной же работе рассматриваются теоретико-игровые модели проведения переговоров с участием арбитражного комитета [9], в которых имеет значение репутация членов арбитражного комитета. При этом дизайн переговоров представлен арбитражной процедурой по последнему предложению или согласительным арбитражем, а индивидуальная репутация игрока (арбитра) рассматривается с точки зрения другого игрока (или арбитра). В работе исследовано влияние репутации членов арбитражного комитета на решение игры традиционной модели переговоров и в модели проведения конкурса. Для моделирования репутаций используется матричная модель динамики мнений, впервые предложенная Де Гроотом [7] и затем расширенная многими авторами (на русском языке см. [1], [2]).

Репутации в переговорах

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество игроков, участвующих в переговорах при решении какой-то проблемы. Каждый из игроков имеет свое мнение о решении этой проблемы. Обозначим через $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ набор мнений всех игроков, $x_i \in S$ $(i = 1, 2, ..., n)$, где $S \subset R^k$ – допустимое множество в пространстве решений.

Переговоры проходят последовательными этапами в моменты времени $t = 0, 1, ...$ В начальный момент времени мнения игроков обозначим $x(0)$. Затем игроки встречаются, обсуждают проблему, обмениваются мнениями и, возможно, меняют свое мнение. В общем случае данное обсуждение можно представить как динамическую систему

$$x(t+1) = f_t(x(t)), \quad t = 0, 1, ...$$

Если существует предел данной последовательности

$$x = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

и при этом все компоненты вектора x равны, то это значение называется консенсусом в переговорах.

Пусть R – пространство решений. Рассмотрим матрицу доверия игроков друг к другу $A \in [0;1]^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – степень доверия i-го игрока к j-му игроку. Например, a_{11} – степень доверия первого игрока к самому себе, а a_{12} – степень доверия первого игрока ко второму игроку.

Мы предполагаем, что A – стохастическая матрица, т. е. все элементы матрицы неотрицательны и доверие каждого из игроков распределяется между всеми игроками, в том числе и к самому себе:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \ \forall i.$$

Тогда, после очередного этапа переговоров мнение участников становится равным взвешенному мнению всех участников переговоров с учетом доверия к каждому из них

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t), \quad \forall i.$$

Или, в матричной форме,

$$x(t+1) = Ax(t); \quad t = 0, 1, ...; \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Итерируя равенство (1) t раз, получим

$$x(t) = A^t x(0).$$

Поведение стохастических матриц хорошо исследовано в теории марковских цепей. Перенумеровав игроков соответствующим образом, любую стохастическую матрицу можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & A_m & 0 \\ & & A_{m+1} & & \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы A_i, $(i = 1, ..., m)$ также являются стохастическими и соответствуют классам сообщающихся состояний. Состояния из класса $A_{(m+1)}$ являются несущественными, в предельной матрице этим состояниям будут соответствовать нули.

В терминах теории репутаций это означает, что игроку, входящему в соответствующий класс A_i, важна репутация игроков только данного класса. Игроки же из класса A_{m+1} не играют в переговорах никакой роли, их сила влияния равна нулю.

Для существования консенсуса необходимо и достаточно, чтобы цепь была непериодической и существовал ровно один класс сообщающихся состояний, т. е. $m = 1$. Тогда существует предельная матрица $\lim\limits_{t\to\infty} A^t$, обозначим ее

$$A^\infty = \lim_{t\to\infty} A^t$$

и данная предельная матрица состоит из одинаковых строк $(a_1, a_2, ..., a_n)$, где a_i называется силой влияния игрока i. Тогда существует и предел

$$\lim_{t\to\infty} A^t x(0) = A^\infty x(0) = x(\infty) = (x, x, ..., x).$$

Пример 1. Пусть матрица репутаций имеет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

согласно которой первый игрок доверяет себе так же как и второму игроку. Второй же игрок доверяет себе в три раза больше. Находим

$$\lim_{t\to\infty} A^t = A = \lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, сила влияния игроков распределяется следующим образом:

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{2}{3}.$$

Пример 2. Предположим, что матрица репутаций имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Здесь первый игрок доверяет всем одинаково. Второй же арбитр доверяет больше третьему игроку, в то время как третий игрок доверяет больше второму игроку. Тогда сила влияния игроков распределяется следующим образом:

$$a_1 = \frac{1}{5},\ a_2 = a_3 = \frac{2}{5}.$$

Так как все строки матрицы A_∞ одинаковы, то все компоненты предельного вектора $x(\infty)$ одинаковы и представляют собой консенсус x. Заметим, что

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(0),$$

где a_i – сила влияния игрока и $x_i(0)$ его начальное мнение.

Интерпретация в контексте переговоров означает, что игроки в результате длительных переговоров с учетом доверия друг к другу, приходят к окончательному единому решению.

Влияние репутации арбитров в согласительном арбитраже

Рассмотрим следующую модель переговоров. Два игрока – профсоюз L и менеджмент M – обращаются в арбитражный суд для решения спора о зарплате. Пусть арбитражный комитет состоит из n арбитров, которые руководствуются правилами согласительного арбитража. Согласительный арбитраж – это наиболее традиционная процедура разрешения спора. Основываясь на предложениях спорящих сторон, арбитражный комитет навязывает игрокам окончательное решение, которое считает справедливым со своей точки зрения.

Предположим, что каждый из арбитров имеет некоторое начальное мнение о том, какая должна быть величина заработной платы. Обозначим данное мнение как $x_i(0);\ i = 1, ..., n$. Пусть также арбитры обладают определенной репутацией, которая выражается некоторой матрицей доверия $A \in [0;1]^{n\times n}$. Как отмечалось выше, арбитры обладают силой влияния a_i $(i = 1, 2, ..., n)$, которая играет роль при определении решения спора.

Игроки – профсоюз и менеджмент – представляют свои предложения в арбитражный комитет. Арбитры собираются и обсуждают поступившие предложения для вынесения окончательного решения.

В процессе обсуждения с коллегами арбитры могут корректировать свои мнения в соответствии с динамикой репутаций, описанной выше. Тогда после длительных переговоров арбитры приходят к консенсусу

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(0),$$

который и является решением спора.

Консенсус может означать собой, например, выделение бюджетных средств на строительство какого-то объекта или выделение квот на вылов рыбы или решение территориальных проблем. Решение зависит от репутации членов комитета и их мнений. На окончательное решение можно повлиять, если изменить начальное мнение кого-то из арбитров. Естественно это более эффективно, если данное лицо имеет высокую репутацию.

Предположим, что игрок M обладает определенной суммой средств c_M, чтобы повлиять на мнение арбитров. Данная задача является оптимизационной и имеет вид

$$H_M(y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x_j(0) - k_j y_j) +$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \to min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \leqslant c_M, \quad y_i \geqslant 0, \quad j = 1, .., n,$$

где первое слагаемое – это изменение начального мнения арбитра i, а второе слагаемое – затраты игрока M. Здесь k_j $(j = 1, ..., n)$ неотрицательные коэффициенты, а y_i – денежная сумма, переданная игроком M арбитру i.

Заметим, что начальные мнения не зависят от y, поэтому данная задача эквивалентна следующей

$$H_M(y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{j=1}^{n} (a_j k_j - 1) y_j \to \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \leqslant c_M, \quad y_i \geqslant 0, \quad j = 1, .., n.$$

Решение данной задачи простое. Мы рассматриваем только тех арбитров j, для которых $a_j k_j > 1$ и среди них выбирается арбитр с максимальным значением $a_j k_j$. Затем все средства c_M вкладываются в данного арбитра.

Теперь предположим, что и вторая сторона (профсоюз) обладает определенной суммой средств c_L, которую может вложить для изменения мнения арбитров в свою пользу. Будем считать, что мнение арбитра меняется в пользу того лица, которое предложило большую сумму. Приходим к игре двух лиц с функциями выигрыша

$$H_M(y^M; y^L) = \sum_{j=1}^{n} (a_j k_j - 1) y_j^M I\left\{y_j^M > y_j^L\right\},$$

$$H_L(y^M; y^L) = \sum_{j=1}^{n} (a_j k_j - 1) y_j^L I\left\{y_j^M < y_j^L\right\}.$$

При этом стратегии обоих игроков удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^M \leqslant c_M, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j^L \leqslant c_L,$$

$$y_j^M \geqslant 0, \; y_j^L \geqslant 0, \; j = 1, ..., n.$$

Если арбитров двое и $c_M = c_L$, то в равновесии каждый из игроков должен с вероятностью $\frac{a_1 k_1}{a_1 k_1 + a_2 k_2}$ предложить свой ресурс первому арбитру, и с вероятностью $\frac{a_2 k_2}{a_1 k_1 + a_2 k_2}$ – второму арбитру.

Влияние репутации арбитров в арбитражной процедуре по последнему предложению

Пусть теперь арбитры руководствуются правилами арбитража по последнему предложению. По данной схеме принимается то предложение, которое оказывается ближе к выбору арбитра. В этом случае функция выигрыша имеет вид $H(x, y) = EH_z(x, y)$, где

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{если } x \leqslant y, \\ x, & \text{если } x > y, |x - z| < |y - z|, \\ y, & \text{если } x > y, |x - z| > |y - z|, \\ z, & \text{если } x > y, |x - z| = |y - z|, \end{cases}$$

x – это предложение игрока L, y – это предложение игрока M, z – это мнение арбитра, а E – математическое ожидание по распределению случайной величины z.

Стороны конфликта представляют свои предложения в арбитражный комитет. Арбитры собираются и обсуждают поступившие предложения для вынесения окончательного решения. Арбитры имеют определенную репутацию, которая играет роль при определении победителя в споре.

В процессе обсуждения с коллегами арбитры могут корректировать свои мнения. После длительных переговоров арбитры приходят к консенсусу, который представлен единым распределением вероятностей. Так если комитет представлен n арбитрами, мнения которых выражены функциями распределения $F_1, F_2, ..., F_n$, то консенсус будет выражен функцией распределения

$$F_a = a_1 F_1 + a_2 F_2 + ... + a_n F_n,$$

где a_i – сила влияния арбитра i в комитете, которая зависит от его репутации. При этом математическое ожидание распределения F_a состоит из выпуклой комбинации

$$a_1 E_1 + a_2 E_2 + ... + a_n E_n$$

математических ожиданий распределений $F_1, F_2, ..., F_n$.

Пример 3. Два игрока ведут спор о зарплате и обращаются к арбитражному комитету, состоящему из двух членов. Пусть мнение первого арбитра выражено функцией нормального распределения $N(1;1)$, а второго – $N(2;1)$.

Предположим, что матрица репутаций имеет вид из примера 1:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

и сила влияния игроков распределена следующим образом: $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. В результате переговоров арбитры приходят к единому мнению, которое выражено общим распределением

$$\frac{1}{3}N(1,1) + \frac{2}{3}N(2,1).$$

В данной задаче медиана общего распределения равна $m_F \approx 1,679$ и оптимальные стратегии игроков I и II равны соответственно:

$$x^* = m_F + \frac{1}{2f_a(m_F)} \approx 3,075,$$

$$y^* = m_F - \frac{1}{2f_a(m_F)} \approx 0,283.$$

Влияние репутации арбитров на результат конкурса

Рассмотрим теперь влияние репутации арбитров в модели проведения конкурсов, предложенную в [3]. Ограничимся здесь моделью конкурса для двух участников. Игроки I и II представляют на конкурс проекты, которые характеризуются двумя параметрами (x_i, y_i) $(i = 1,2)$ из некоторого допустимого множества S в пространстве R^2. Например, проект может включать описание его стоимости и времени выполнения или числа работников. Арбитр или арбитражный комитет рассматривает поступившие предложения и выбирает один из проектов, используя арбитражную процедуру по последнему предложению с распределением вероятностей, которое известно участникам конкурса. При этом победитель конкурса получает выигрыш, зависящий от параметров его проекта.

Рассмотрим, например, ситуацию, в которой первый игрок хочет максимизировать сумму $x + y$, а второй – минимизировать.

Предположим, что для определения победителя в споре приглашаются два арбитра, репутация которых выражается некоторой матрицей доверия A.

Рассмотрим симметричный случай, в котором мнения арбитров моделируются двумерными нормальными распределениями:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2\pi} exp\left\{-\left((x+c)^2 + (y-c)^2\right)/2\right\},$$

$$f_2(x,y) = \frac{1}{2\pi} exp\left\{-\left((x-c)^2 + (y+c)^2\right)/2\right\},$$

где c – параметр модели.

После продолжительных переговоров арбитры приходят к итоговому распределению

$$f_a(x,y) = a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y),$$

где a_1, a_2 – сила влияний арбитров, $a_2 = 1 - a_1$.

Игроки вносят свои предложения (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Плоскость решений арбитра разделяется на два множества S_1 и S_2, которые разбиваются прямой, проходящей через середину отрезка, соединяющего точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (рис. 1).

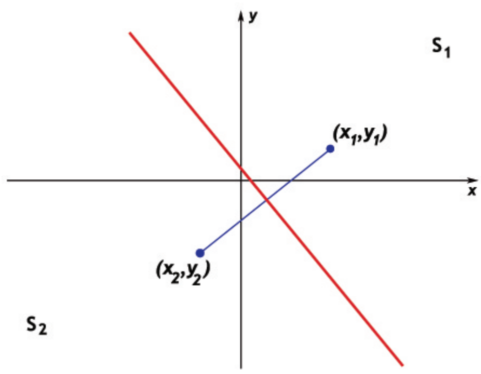

Рис. 1. Конкурс двух проектов на плоскости

Уравнение такой прямой

$$y = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}x + \frac{(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)}{2(y_1 - y_2)}.$$

Тогда выигрыш игрока I в данной игре имеет вид

$$H(x_1, y_1; x_2, y_2) = (x_1 + y_1)\mu(S_1) =$$
$$= (x_1 + y_1)\int_R\int_R f_a(x,y) I\{y \geqslant -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}x +$$
$$+ \frac{(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)}{2(y_1 - y_2)}\} dxdy,$$

где $I\{A\}$ – индикатор множества A.

Зафиксируем стратегию (x_2, y_2) второго игрока и найдем наилучший ответ первого игрока из условий $\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial y_1} = 0$. Находим

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \mu(S_1) + (x_1 + y_1)\frac{\partial \mu(S_1)}{\partial x_1} =$$

$$= \mu(S_1) + (x_1 + y_1)\int_R \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} f_a\left(x, \ -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}x +\right.$$

$$+\frac{(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)}{2(y_1 - y_2)}\Bigg) dx,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_1} = \mu(S_1) + (x_1 + y_1)\frac{\partial \mu(S_1)}{\partial y_1} =$$

$$= \mu(S_1) + (x_1 + y_1)\int_R \Bigg(-\frac{x_1 - x_2}{(y_1 - y_2)^2} +$$

$$+\frac{x_1^2 - x_2^2}{2(y_1 - y_2)^2 - \frac{1}{2}}\Bigg) f_a\Bigg(x,\ -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}x +$$

$$+\frac{(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)}{2(y_1 - y_2)}\Bigg) dx.$$

Приравняем данные равенства к нулю и потребуем, чтобы решение уравнения достигалось в точке $x_1 = -y_2,\ y_1 = -x_2$ (следует из симметрии задачи относительно прямой $y = -x$). Заметим, что при этом должно выполняться $\mu(S_1) = 1/2$. Это приводит к системе уравнений.

$$\frac{1}{2} + \int_R (x + y_2) f_a(x, -x) dx = 0,$$

$$\frac{1}{2} + \int_R (x_2 - x) f_a(x, -x) dx = 0.$$

Из первого уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y_2 + x)\left(a_1 e^{-(x+c)^2} + a_2 e^{-(x-c)^2}\right) dx = -\pi,$$

находим оптимальное значение y_2

$$y_2 = -\sqrt{\pi} + c(a_1 - a_2).$$

Аналогично, из второго уравнения

$$x_2 = -\sqrt{\pi} + c(a_2 - a_1).$$

Соответственно, оптимальное предложение игрока I есть

$$x_1 = \sqrt{\pi} + c(a_2 - a_1),\ y_1 = \sqrt{\pi} + c(a_1 - a_2).$$

Таким образом, оптимальные стратегии игроков в данной игре зависят от репутации арбитров. Если репутации арбитров равны, равновесие совпадает с найденным в [3], в котором обе компоненты предложения равны. Если же репутации игроков не равны, происходит смещение компонент в сторону арбитра с большим весом.

Пример 4. Пусть матрица репутаций имеет вид из примера 1 и репутации арбитров $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Тогда оптимальным проектом первого игрока будет

$$\left(\sqrt{\pi} + \frac{1}{3}c,\ \sqrt{\pi} - \frac{1}{3}c\right),$$

т. е. в своем предложении он должен увеличить первую компоненту.

Заключение

В работе рассмотрены прикладные модели переговоров с использованием арбитражных схем и репутаций участников. Предложенный подход может успешно применяться при изучении роли репутации в теоретико-игровых моделях переговоров, которые активно используются в экономике (задача «продавец-покупатель»), юриспруденции (задача «истец-ответчик»), страховых моделях и др., а также при исследовании процессов формирования и функционирования арбитражных комитетов и команды жюри.

Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки РФ ЗабГГПУ (проект № 8.3641.2011) и Программы стратегического развития ПетрГУ на 2012–2016 гг., а также была поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект 10-01-00089-а) и Отделением Математических наук РАН .

Литература

1. *Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Модели репутации и информационного управления в социальных сетях // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. № 2. С. 14–37.

2. *Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010. 228 с.

3. *Мазалов В. В., Токарева Ю. С.* Теоретико-игровые модели проведения конкурсов // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2010. Т. 2, вып. 2. С. 66–78.

4. *Ожегов С. И.* Словарь русского языка. М.: Русский язык, 1987. 797 с.

5. *Farber H.* An analysis of final-offer arbitration // Journal of conflict resolution. 1980. Vol. 24, N 4. P. 683–705.

6. *Gibbons R.* A Primer in game theory. N.Y.: Prentice Hall, 1992. 273 p.

7. *de Groot M. H.* Reaching a consensus // Journal of American Statistical Association. 1974. Vol. 69. P. 118–121.

8. *Josang A., Ismail R., Boyd C.* A survey of trust and reputation systems for online service provision // Decision Support Systems. 2007. Vol. 43:2. P. 618–644.

9. *Mazalov V., Tokareva J.* Arbitration procedures with multiple arbitrators // European Journal of Operational Research. 2012. Vol. 217, Issue 1. P. 198–203.

10. *Ramchurn S. D., Huynh D., Jennings N. R.* Trust in multi-agent systems // The Knowledge Engineering Review. 2004. Vol. 19, N 1. P. 1–25.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Мазалов Владимир Викторович
директор
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: vlmazalov@yandex.ru
тел.: 8(8142) 781108

Токарева Юлия Сергеевна
доцент
Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет им. Н. Г. Чернышевского
ул. Бабушкина, 129, Чита, Забайкальский край, Россия, 672007
эл. почта: jtokareva2@mail.ru
тел.: 8(3022) 441497

Mazalov, Vladimir
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: vlmazalov@yandex.ru
tel.: 8(8142) 781108

Tokareva, Julia
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N. Tchernishevsky
129 Babushkina St., 672007 Chita, Zabaykalsky Krai, Russia
e-mail: jtokareva2@mail.ru
tel.: 8(3022) 441497

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 68–77

УДК 519.872.1

СИСТЕМА С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ: ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ БЛОКИРОВКИ ВЫЗОВА НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Е. В. Морозов, Р. С. Некрасова

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

В статье рассматривается регенеративное оценивание вероятности занятости односерверной системы с повторными вызовами в переходном режиме. Первичная заявка, заставшая сервер занятым, поступает на орбиту бесконечной емкости, образуя очередь для повторной попытки попасть на сервер. Обсуждаются условия стационарности такой системы. Оценивание применяется как в области стационарности, так и в области нестационарности. В последнем случае рассматриваемая оценка сходится к вероятности занятости сервера в некоторой вспомогательной системе с потерями. Основное внимание в статье уделено оцениванию вероятности блокировки заявки на конечном интервале, т. е. в переходном режиме системы. Проведено сравнение эффективности стандартной выборочной оценки и альтернативной оценки. Приведены результаты численного моделирования и сравнения эффективности этих оценок.

Ключевые слова: система с повторными вызовами, условие стационарности, вероятность занятости, оценивание на конечном интервале.

E. V. Morozov, R. S. Nekrasova. A RETRIAL QUEUEING SYSTEM: ESTIMATION OF THE BLOCKING PROBABILITY IN A FINITE TIME INTERVAL

The paper deals with regeneration estimation of busy probability in a single server retrial queueing system in transient regime. Primary customer who finds the server busy joins the infinite capacity orbit to wait as in a queue for retrial. Stability conditions of such a system are discussed. Estimation is applied both to the stability and the instability domains of this system. The focus in the paper is on estimation of the blocking probability over a finite interval, that is in transient regime. Standard sample mean estimate and the alternative estimate based on the knowledge of the stationary blocking probability were compared.

Key words: Retrial queuing system, stability condition, busy probability, estimation on finite interval.

Введение

Рассмотрим односерверную систему с повторными вызовами Σ без буфера с пуассоновским входным потоком с интенсивностью λ и (произвольным) временем обслуживания S со средним $\mathsf{E}S := 1/\mu$. Заявки, поступающие в систему, когда сервер занят, уходят на орбиту бесконечного объема (блокируются), образуя “очередь” в порядке поступления на орбиту. Первая заявка в этой очереди делает попытку попасть на сервер через экспоненциально распределенное время с интенсивностью μ_0, и в случае неудачи (мгновенно) возвращается на орбиту. Заметим, что первая заявка может, в частности, снова возвращаться в начало очереди для следующей попытки. (Это не меняет распределения числа заявок на орбите и в системе в целом.) Тогда без ограничения общности можно считать, что неудачных попыток не существует и (первая) заявка на орбите делает попытку лишь при освобождении сервера. Однако ниже мы рассматриваем также и поток неудачных попыток. Рассматриваемая система с постоянной скоростью ухода заявок с орбиты радикально отличается от классических систем с повторными вызовами, где интенсивность орбитальных заявок растет с ростом их числа, поскольку заявки делают повторные попытки независимо. По этой причине и условия стационарности рассматриваемой и классической систем принципиально различаются. В частности, условие стационарности классической системы с повторными вызовами совпадает с условием стационарности стандартной системы с неограниченным буфером и (индивидуальная) интенсивность ухода заявки с орбиты не играет в нем никакой роли. Напротив, в системе с постоянной скоростью ухода с орбиты эта интенсивность существенным образом влияет на область стационарности.

Таким образом, в рассматриваемой системе сама орбита может рассматриваться как односерверная система обслуживания вида $G/M/1$, где в обозначении G входного потока на орбиту отражена его сложная структура, в частности, что он не является процессом восстановления. Этот поток является суперпозицией потока первичных блокируемых заявок и потока неудачных попыток орбитальных заявок попасть на сервер. Заметим, что источником нестационарности рассматриваемой системы может быть только неограниченно растущая орбита.

Отметим, что анализ таких нестандартных систем с повторными вызовами мотивирован поведением некоторых сетевых протоколов (подробнее см., например, [7–9]).

В ряде предшествующих работ найдены условия стационарности некоторых из описанных систем с повторными вызовами. Впервые такая модель вида $M/G/1/0$ (без буфера) исследована в работе [11], где также получено необходимое и достаточное условие стационарности. Позднее в работе [3] была исследована двухсерверная система вида $M/M/2/0$, а также получено необходимое и достаточное условие ее стационарности (условие эргодичности марковского процесса, описывающего ее динамику). В работе [13] рассмотрен стационарный режим системы с повторными вызовами вида $M/M/m/n$ (с буфером размера n) и приведен критерий стационарности для системы $M/M/1/1$. Также условия эргодичности многосерверной системы вида $M/M/m/0$ были получены в [4]. Наконец, в недавней работе [7] найдено достаточное условие стационарности немарковской m-серверной системы с повторными вызовами вида $GI/G/m/n$, у которой лишь интервалы между повторными попытками остаются показательными (с интенсивностью μ_0).

Данная статья организована следующим образом. Вначале приведены условия стационарности некоторых из описанных систем с повторными вызовами, а также явное выражение для стационарной вероятности блокировки P_b в системе вида $M/M/1/0$. (По свойству PASTA эта вероятность совпадает также с вероятностью занятости системы.) Затем описана регенеративная структура, включая квази-регенерацию, используемую для оценки вероятности блокировки в нестационарном режиме. Далее рассмотрена стандартная оценка вероятности блокировки, а также альтернативная оценка этой вероятности на конечном интервале. В заключение приведены результаты численного моделирования и сравнение эффективности рассмотренных оценок для систем вида $M/G/1/0$. Отметим, что результаты моделирования показали преимущество альтернативной оценки.

Условия стационарности системы с повторными вызовами

Рассмотрим простейшую систему с повторными вызовами вида $M/M/1/0$ без буфера. Состояние системы в момент t описывается двухмерным марковским процессом $Y(t) = (N(t), \nu(t))$, где $N(t)$ – число заявок на орбите, а $\nu(t) \in \{0, 1\}$ – число заявок в системе. Легко увидеть, что марковский процесс $\{Y(t)\}_{t \geqslant 0}$ – неприводимый со множеством состояний $\mathbf{S} = \mathbb{Z}_+ \times \{0, 1\}$. Обозначим его предельное распределение

$$\mathsf{P}_{ij} = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{N(t) = i; \nu(t) = j\}, \ \ (i, j) \in \mathbf{S},$$

когда оно существует. Заметим, что поток заявок, поступающих на сервер, складывается из двух (вообще говоря, зависимых) потоков:

потока первичных заявок (λ-потока) и потока вторичных заявок с интенсивностью $\tilde{\mu}_0$. При этом интенсивность $\tilde{\mu}_0$ в момент t определяется на событии $\{N(t) = i\}$ как $\tilde{\mu}_0 = \mu_0(1 - \delta_{i0})$, где δ_{i0} – символ Кронекера. (Очевидно, $\tilde{\mu}_0 \leqslant \mu_0$.) В работе [4] показано, что критерий стационарности имеет вид:

$$\rho_1 := \rho\frac{\lambda + \mu_0}{\mu_0} < 1, \qquad (1)$$

где $\rho := \lambda/\mu$, а стационарные вероятности состояний равны

$$\mathsf{P}_{i0} = \frac{\lambda}{\lambda + \tilde{\mu}_0}(1 - \rho_1)\rho_1^i, \ \ i \geqslant 0, \qquad (2)$$

$$\mathsf{P}_{i1} = \rho(1 - \rho_1)\rho_1^i, \ \ i \geqslant 0. \qquad (3)$$

Очевидно, стационарная вероятность занятости сервера ввиду (3) равна

$$\mathsf{P}_b = \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{P}_{i1} = \rho, \qquad (4)$$

и, таким образом, критерий стационарности (1) принимает вид:

$$(\lambda + \mu_0)\mathsf{P}_b < \mu_0. \qquad (5)$$

В работе [7] получено следующее достаточное условие стационарности (верное для широкого класса систем с повторными вызовами):

$$(\lambda + \mu_0)\mathsf{P}_{loss} < \mu_0, \qquad (6)$$

где P_{loss} – стационарная вероятность потери заявки в мажорирующей односерверной системе с потерями с пуассоновским входным потоком с параметром $\lambda + \mu_0$ и тем же распределением времени обслуживания, что и в исходной системе. При этом в системе $M/G/1/0$ вероятность P_{loss} определяется по формуле Эрланга

$$\mathsf{P}_{loss} = \frac{\lambda + \mu_0}{\lambda + \mu_0 + \mu}. \qquad (7)$$

Легко проверить, что условия (5) и (6) эквивалентны. Заметим, что условие (1), которое можно записать в виде

$$\rho < \frac{\mu_0}{\lambda + \mu_0} < 1, \qquad (8)$$

сводится к классическому условию $\rho < 1$ при $\mu_0 \to \infty$. Этот результат объясняется тем, что с ростом интенсивности μ_0 заявки все меньше времени проводят на орбите и рассматриваемая система сближается с классической системой с буфером неограниченного объема.

Регенеративная структура системы с повторными вызовами

Одно из основных преимуществ регенеративного метода состоит в том, что он применим к широкому классу немарковских процессов. Это, в частности, позволяет уменьшить размерность основного процесса, описывающего динамику системы. Например, состояние введенной выше системы с повторными вызовами (и даже более общей системы вида $GI/G/m/n$) в момент t может быть также описано с помощью скалярного (непрерывного справа) немарковского процесса $\{X(t) := N(t) + \nu(t), \, t \geqslant 0\}$, где $\nu(t) \in \{0, n + m\}$. Пусть λ-заявки поступают в моменты $\{t_n\}$, и пусть $X(t_n^-) := X_n$. Очевидно, система (процесс $X := \{X(t)\}$) регенерирует каждый раз, когда λ-заявка поступает в пустую систему (пустой сервер и пустая орбита). Положим $T_0 := 0$ и определим моменты регенерации процесса X (и других процессов в системе) следующим образом:

$$T_{k+1} = \inf_i (t_i > T_k : X_i = 0), \ k \geqslant 0.$$

Пусть $T =_{st} T_k - T_{k-1}$, $k \geqslant 1$ – типичный период регенерации ($=_{st}$ означает стохастическое равенство). Обозначим $\beta_k = A(T_k^-)$ и заметим, что моменты $\{\beta_k\}$ удовлетворяют рекурсии

$$\beta_{k+1} = \inf_i \{i > \beta_k : X_i = 0\} \ (\beta_0 = 0) \qquad (9)$$

и являются моментами регенерации (в дискретном времени), причем $T_k = t_{\beta_k}$. Ниже мы будем рассматривать более специальную систему с повторными вызовами вида $M/G/1/0$.

Стационарный режим. Предположим, что выполнено условие стационарности системы. Иными словами, процесс X – положительно-возвратный, т. е. $\mathsf{E}T < \infty$. Пусть $A(t)$ и $H(t)$ – число первичных λ-заявок, поступивших в систему и блокированных за время $[0, t]$, соответственно, а A и H – число приходов и блокировок, соответственно, на (типичном) цикле регенерации, так что $A =_{st} \beta_k - \beta_{k-1}$, $k \geqslant 1$. Пусть I_k есть индикатор блокировки k-й первичной заявки, тогда, в частности, $H(t) = \sum_{k=1}^{A(t)} I_k$. Процесс $\{I_k\}_{k \geqslant 0}$ регенерирует в моменты $\{\beta_k\}_{k \geqslant 0}$, и является положительно-возвратным, т. е. $\mathsf{E}A < \infty$. Ввиду свойства (пуассоновского) входного потока существует слабый предел $I_k \Rightarrow I$, при $k \to \infty$, и более того $\mathsf{P}(I_k = 1) = \mathsf{E}I_k \to \mathsf{E}I$, где, ввиду свойства PASTA, стационарная вероятность блокировки заявки $\mathsf{E}I$ совпадает с вероятностью занятости сервера. Суммируя сказанное и используя теорию регенерации, получаем с вероятностью 1 (с в. 1)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{A(t)}=\frac{\mathsf{E}H}{\mathsf{E}A}=\mathsf{P}_b=\rho. \qquad (10)$$

Заметим, что равенство $\mathsf{P}_b=\rho$ (см. (4)) верно не только для системы вида $M/M/1/0$, но и для более общей системы с повторными вызовами вида $M/G/1/0$. Доказательство этого результата дано ниже, см. (22). (Это равенство также имеет место в классической системе $M/G/1$ без орбиты и с *неограниченным буфером* [2].)

Нестационарный режим. В этом случае число заявок на орбите неограниченно растет и применение классической регенерации становится невозможным. В таком случае можно использовать *квази-регенерации*, когда поступающая в систему заявка (первичная или вторичная) встречает пустой сервер, а орбита может быть не пустой. Определение квази-регенераций см. в [1, 6, 7]. Поток повторных заявок сближается с пуассоновским потоком с интенсивностью μ_0, и со временем исходная система начинает вести себя как система Эрланга с потерями с пуассоновским потоком с параметром $\lambda+\mu_0$ и стационарной вероятностью потери P_{loss}, удовлетворяющей (7). Другими словами, квази-регенерации становятся классическими регенерациями, но для процесса очереди, рассматриваемого изолированно. Заметим, что по свойству PASTA вероятность P_{loss} совпадает со стационарной занятостью сервера (в системе с потерями).

Оценки среднего на конечном интервале

Выборочная оценка, как правило, хорошо аппроксимирует оцениваемый параметр лишь при большом числе наблюдений (большом t). В то же время процесс моделирования часто весьма затратен и поэтому ограничивается некоторым фиксированным интервалом $[0,\,t]$.

Рассмотрим общий случай оценивания предельного среднего по времени от (измеримой) функции $f[X(t)]$ регенерирующего процесса $\{X(t)\}$ на основе оценки

$$r(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f[X(u)]du. \qquad (11)$$

(В дискретном времени интеграл заменяется на сумму.) Предположим, что с в. 1 существует предел $r(t)\to r$, при $t\to\infty$ и требуется построить оценку нестационарного среднего $\mathsf{E}[r(t)]$ при моделировании на конечном интервале $[0,t]$. Заметим, что такое оценивание допредельной характеристики $\mathsf{E}[r(t)]$ в *переходном режиме* можно формально проводить и в условиях нестационарности. Предположим также, что $\mathsf{E}[r(t)]\to r$, для чего достаточно, например, равномерной интегрируемости семейства $\{r(t),\,t\geqslant 0\}$. В частности, последнее имеет место при оценивании вероятности занятости сервера P_b с использованием оценки

$$r(t)=\frac{1}{t}\int_0^t I(\nu(u)=0)du,$$

где, напомним, $\nu(t)$ есть суммарное число заявок на сервере и в буфере (если он существует) в момент t, а $r(t)\leqslant 1$.

Из сказанного выше следует, что важно иметь оценки среднего $\mathsf{E}r(t)$, эффективные при больших t.

Стандартная оценка для $\mathsf{E}[r(t)]$ является выборочным средним из m независимых траекторий $r_j(t)$ процесса на интервале $[0,t]$, именно

$$\hat r_m(t):=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m r_j(t). \qquad (12)$$

По усиленному закону больших чисел (УЗБЧ), при каждом t с в. 1

$$\hat r_m(t)\to\mathsf{E}r(t),\quad m\to\infty.$$

Регенеративная структура процесса $\{f[X(t)]\}$ позволяет получить следующий асимптотический результат для дисперсии оценки $\hat r_m(t)$ при $t\to\infty$ и фиксированном m [12].

Теорема 1. *Для любого фиксированного m,*

$$t\mathsf{D}[\hat r_m(t)]\to\frac{C_1}{m},\ \ t\to\infty, \qquad (13)$$

где C_1 – явно заданная константа.

Таким образом, дисперсия стандартной оценки среднего $\mathsf{E}r(t)$ убывает со скоростью $1/t$ с ростом t.

В работе [12] также предложена альтернативная оценка $\mathsf{E}r(t)$, построенная по остаточной длине цикла регенерации в момент t в предположении, что *предельное значение r известно.* Ситуация, когда r известно, а вычисление среднего на конечном интервале $\mathsf{E}r(t)$ вызывает большие сложности, встречается при моделировании довольно часто. Типичными примерами являются формулы Литтла, Поллачека-Хинчина, стационарное среднее незавершенное время восстановления и т. д. Как показывает дальнейший анализ, альтернативная оценка вероятности блокировки имеет существенно меньшую дисперсию чем стандартное выборочное среднее. Сохраним обозначение $\{T_n\}_{n\geqslant 0}$ моментов регенерации рассматриваемого процесса

$\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ и определим *незавершенное время регенерации* в момент t как

$$\mathcal{T}(t) := T_{N(t)+1} - t, \tag{14}$$

где $N(t)$ – число регенераций в интервале $(0,\, t]$, а также *"перескок" процесса накопления* на текущем в момент t цикле регенерации как:

$$\mathcal{I}(t) := \int_t^{T_{N(t)+1}} f[X(u)]du. \tag{15}$$

(Типичный процесс накопления имеет вид интеграла от регенерирующего процесса [14].)

В [12] предложена следующая взвешенная оценка (статистика) величины r

$$R(t) := r + r\frac{\mathcal{T}(t)}{t} - \frac{\mathcal{I}(t)}{t}, \tag{16}$$

которая имеет прозрачную физическую интерпретацию. Тогда выборочная оценка величины $\mathsf{E}r(t)$ *по остаточной длине цикла* принимает вид:

$$\hat{R}_m(t) := \frac{1}{m}\sum_j^m R_j(t), \tag{17}$$

где $R_j(t)$ – j-я (независимая) реализация статистики $R(t)$. Как показано в [12], оценка $\hat{R}_m(t)$ при всех t, m является несмещенной, т. е. $\mathsf{E}\hat{R}_m(t) = \mathsf{E}r(t)$. При исследовании эффективности, необходимо учитывать, что оценка по остаточной длине цикла требует дополнительных вычислений после момента t до окончания текущего цикла. Однако величины $\mathcal{T}(t)$ и $\mathcal{I}(t)$ (при определенных моментных требованиях, см. Теорема 2 ниже) асимптотически ведут себя как $o(t)$ при больших t и мало влияют на объем вычислений. Из теории процессов накопления следует, что если $\mathsf{E}T < \infty$, то $\mathsf{E}\mathcal{T}(t) = o(t)$, а если $\mathsf{E}|Y| < \infty$, где $Y = \int_0^T f[X(u)]du$, то $\mathcal{I}(t) = o(t)$ с в. 1 [14]. Имеет место следующий результат [12].

Теорема 2. *Если* $\mathsf{E}[T^3] < \infty$ *и* $E[TY^2] < \infty$, *то для любого фиксированного* m

$$t^2\mathsf{D}[\hat{R}_m(t)] \to \frac{C_2}{m},\ \ t \to \infty, \tag{18}$$

где C_2 *– явно заданная константа.*

Таким образом, дисперсия оценки $\hat{R}_m(t)$ сходится к нулю в t раз быстрее, чем дисперсия стандартной оценки $\hat{r}_m(t)$. Следовательно, оценка $\hat{R}_m(t)$ может существенно повысить эффективность регенеративного моделирования. (Дополнительные аргументы в пользу этой оценки можно найти в [12].) Ниже этот результат установлен при оценивании вероятности блокировки в рассмотренной выше системе с повторными вызовами в интервале $[0,\, t]$ при фиксированном t. Для оценивания в *стационарном режиме* рассмотрим соответствующий аналог величины $r(t)$ выше:

$$\frac{H(t)}{A(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{k(t)} I_i}{k(t)} := \theta[k(t)], \tag{19}$$

где I_i есть индикатор блокировки i-й заявки, а $k(t) = \max_i\{i : t_i \leqslant t\}$ есть число первичных заявок, поступивших в интервале $[0,\, t]$. Несмещенной и сильно состоятельной оценкой $\mathsf{E}\theta[k(t)]$ является выборочное среднее

$$\hat{\theta}_m(t) := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \theta_j[k_j(t)], \tag{20}$$

где $\theta_j[k_j(t)]$ есть j-я (независимая) реализация $\theta[k(t)]$ в интервале $[0, t]$ (которая включает случайное число наблюдений $k_j(t)$.) Отметим, что число регенераций в интервале $[0,\, t]$, содержащем $k(t)$ первичных заявок, равно $N(t) := \max_i\{i : \beta_i \leqslant k(t)\}$. Введем следующие аналоги величин $\mathcal{T}(t), \mathcal{I}(t)$, соответственно, для оценки вероятности блокировки

$$\mathcal{T}_{k(t)} := \beta_{N(t)+1} - k(t),\ \ \mathcal{I}_{k(t)} := \sum_{i=k(t)+1}^{\beta_{N(t)+1}} I_i. \tag{21}$$

Напомним, что $\mathsf{P}_b = \rho$ есть стационарная вероятность занятости системы с повторными вызовами вида $M/M/1/0$, см. (4). Используя иной подход, покажем, что и в системе с повторными вызовами вида $M/G/1/0$ с произвольным временем обслуживания S стационарная вероятность занятости

$$\mathsf{P}_b = \lambda \mathsf{E}S := \rho. \tag{22}$$

Именно, пусть $V(t)$ – поступившая, а $D(t)$ – обслуженная нагрузка в системе в интервале $[0,\, t]$, и пусть $W(t)$ – незавершенная в момент t работа в системе (в сервере и на орбите). Имеет место следующее уравнение баланса

$$V(t) = W(t) + D(t),\ \ t \geqslant 0. \tag{23}$$

Если система стационарна, то с в. 1 $W(t) = o(t)$, $t \to \infty$ [14]. Поскольку

$$\frac{V(t)}{t} \to \rho,\ \ \frac{D(t)}{t} \to \mathsf{P}_b$$

с в. 1, то из (23) следует соотношение (22). (Более детальный анализ см. в [2].) С учетом этих замечаний рассмотрим статистику

$$\Theta[k(t)] = \mathsf{P}_b + \frac{\mathsf{P}_b\mathcal{T}_{k(t)}}{k(t)} - \frac{\mathcal{I}_{k(t)}}{k(t)}, \tag{24}$$

которая приводит к такой (альтернативной) оценке величины $\mathsf{E}\theta[k(t)]$:

$$\hat{\Theta}_m(t) := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\Theta_j[k_j(t)], \tag{25}$$

где $\Theta_j[k_j(t)]$ есть j-я (независимая) реализация $\Theta[k(t)]$. (Отметим, что несмещенность оценки $\hat{\Theta}_m(t)$ не удается доказать по аналогии с $\hat{R}_m(t)$ (см. [12]), поскольку $k(t)$ является случайной величиной.)

Подчеркнем, что оценки $\hat{\Theta}_m(t)$ и $\hat{\theta}_m(t)$ строятся методом регенеративного моделирования, в котором удобнее использовать фиксированное число приходов k, чем фиксированный интервал $[0,\, t]$. Этот подход и реализован при численном моделировании в данной работе. Именно, (в очевидных обозначениях) каждая из m траекторий процессов $\{\theta(k)\}$ и $\{\Theta(k)\}$ строится для фиксированного числа наблюдений k. Такая аппроксимация величины $\mathsf{E}r(t)$ вполне приемлема, если значения k и t достаточно велики. Имеет место следующий результат, доказываемый аналогично равенству $\mathsf{E}\hat{R}_m(t) = \mathsf{E}r(t)$ в [12]. Обозначим $\theta(k) = \sum_{i=1}^{k} I_i/k$, см. (19).

Теорема 3. *Оценки вероятности блокировки*

$$\hat{\theta}_{m,k} := \frac{1}{m}\sum_{j}^{m}\theta_j(k) \ \ \text{и}\ \ \hat{\Theta}_{m,k} := \frac{1}{m}\sum_{j}^{m}\Theta_j(k),$$

построенные по k наблюдениям (в каждой из m независимых траекторий $\{\theta_j(k)\}$ и $\{\Theta_j(k)\}$) являются несмещенными,

$$\mathsf{E}[\hat{\theta}_{m,k}] = \mathsf{E}[\hat{\Theta}_{m,k}] = \mathsf{E}[\theta(k)],$$

при всех k и m.

Доказательство. Из определения $\hat{\theta}_{m,k}$ очевидным образом следует

$$\mathsf{E}[\hat{\theta}_{m,k}] \ = \ \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\mathsf{E}[\theta_j(k)] = \mathsf{E}[\theta(k)]. \tag{26}$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} k\theta(k) &= \sum_{i=1}^{k} I_i = \sum_{i=1}^{\beta_{n(k)+1}} I_i - \sum_{i=k+1}^{\beta_{n(k)+1}} I_i \\ &= \sum_{i=1}^{n(k)+1} H_i - \mathcal{I}_k = \sum_{i=1}^{n(k)+1} H_i \qquad (27) \\ &- \ \mathsf{P}_b \sum_{i=1}^{n(k)+1} A_i + \mathsf{P}_b\beta_{n(k)+1} - \mathcal{I}_k, \end{aligned}$$

где $n(k)$ – число регенераций при k наблюдениях, H_i – число блокировок заявок на i-м цикле регенерации, а $A_i = \beta_i - \beta_{i-1}$. Напомним, что $\mathsf{P}_b = \mathsf{E}H/\mathsf{E}A$, см. (10). Тогда, по тождеству Вальда:

$$\mathsf{E}\Big[\sum_{i=1}^{n(k)+1} H_i - \mathsf{P}_b \sum_{i=1}^{n(k)+1} A_i\Big] = 0.$$

Таким образом, взяв математическое ожидание в (27), получаем

$$\begin{aligned} k\mathsf{E}[\theta(k)] &= \mathsf{E}[\mathsf{P}_b(k+\mathcal{T}_k) - \mathcal{I}_k] \\ &= k\mathsf{E}[\mathsf{P}_b + \mathsf{P}_b\frac{\mathcal{T}_k}{k} - \frac{\mathcal{I}_k}{k}]. \end{aligned} \tag{28}$$

Поэтому $\mathsf{E}[\theta(k)] = \mathsf{E}[\Theta(k)]$, и кроме того, очевидно, $\mathsf{E}[\hat{\Theta}_{m,k}] = \mathsf{E}[\Theta(k)]$. □

Рассмотрим *нестационарный режим* той же системы с повторными вызовами. Пусть $\{z_i,\, i \geqslant 0\}$ есть моменты обращения заявок (*как первичных, так и вторичных*) к серверу. Обозначим $\nu_i = \nu(z_i^-)$ и определим рекурсивно моменты *квази-регенерации* таким образом

$$\alpha_{k+1} = \inf_i (i > \alpha_k : \nu_i = 0),\ k \geqslant 0,\ \ (\alpha_0 = 0).$$

Теперь оценка для вероятности блокировки в переходном режиме имеет тот же вид, что и (19)

$$\theta[k(t)] := \frac{\sum_{i=1}^{k(t)} I_i}{k(t)},$$

где, однако, I_i есть индикатор *неудачной попытки* обращения к серверу, а $k(t)$ – общее число попыток в $[0,\, t]$.

Как показано в [1], P_b в данном случае совпадает со стационарной вероятностью потери P_{loss} в системе с потерями $M/G/1/0$ с интенсивностью входного потока $\lambda+\mu_0$, см. (7). Ввиду свойства PASTA P_{loss} также равна предельной вероятности блокировки заявки. Интересно отметить, что это происходит в условиях *неограниченного роста орбиты*. Такую систему можно назвать *частично устойчивой*.

Теорема 4. *В системе с повторными вызовами вида $M/M/1/0$ в стационарном режиме интенсивность потока попыток с орбиты на сервер равна*

$$\tilde{\mu}_0 = \rho^2(\mu+\lambda+\mu_0). \tag{29}$$

Доказательство. Определим (потенциальное) общее число $\Lambda_0(t)$ попыток попасть на сервер, порожденных *блокированными заявками*, поступившими в интервале $[0,\, t]$, и пусть

γ_n есть число неудачных попыток n-й *повторной* заявки. Напомним, что общее число таких заявок в интервале $[0, t]$ есть $H(t)$. Для определенности будем считать, что блокируемая первичная заявка присоединяется к концу очереди заявок, находящихся на орбите. Заметим, что величины $\{\gamma_n\}$ – н.о.р. и что

$$p := \frac{\lambda}{\lambda + \mu_0}$$

есть вероятность того, что повторная заявка не попадет на освободившийся после обслуживания сервер, который в этом случае будет занят первичной заявкой. Поскольку вероятность не менее i таких неудачных попыток равна p^i, а среднее число неудачных попыток в течение (экспоненциального) времени обслуживания равно μ_0/μ, то нетрудно видеть, что

$$\mathsf{E}\gamma = \frac{\mu_0}{\mu}\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{\lambda + \mu_0}{\mu}. \qquad (30)$$

В области стационарности $H(t)/t \to \lambda \mathsf{P}_b = \lambda\rho$. Кроме того, все повторные заявки в конце концов попадают на сервер, и поэтому общее число попыток у n-й повторной заявки равно $\gamma_n + 1$. Таким образом, стационарная интенсивность потока повторных попыток $\tilde{\mu}_0$ определяется как предел

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_0 : &= \lim_{t\to\infty}\frac{\Lambda_0(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{H(t)}(1+\gamma_i)}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{H(t)}(1+\gamma_i)}{H(t)}\,\frac{H(t)}{t} \\
&= \lambda \mathsf{P}_b[1 + \frac{\lambda+\mu_0}{\mu}],
\end{aligned}$$

где $\gamma_0 := 0$. Альтернативный вывод (29) опирается на равенство $\tilde{\mu}_0 = \mu_0 q$, где $q = \mathsf{P}$(орбита не пуста)$=\sum_{i>0}(\mathsf{P}_{0i} + \mathsf{P}_{i1})$, и явный вид вероятностей (2), (3). □

Напомним доказанный выше результат (22) о том, что в системе вида $M/G/1/0$ стационарная вероятность простоя сервера

$$\mathsf{P}_0 := 1 - \mathsf{P}_b = 1 - \rho$$

и что условие (5) является *критерием стационарности* такой системы, см. [7]. Обозначим через (ν, N) основной стационарной процесс, т. е. $(\nu(t), N(t)) \Rightarrow (\nu, N)$. Перепишем условие (5) в виде

$$\rho + \rho\frac{\lambda}{\mu_0} < 1. \qquad (31)$$

В соответствии с общим принципом получения критерия стационарности, левая часть неравенства (31) должна быть равна предельной доле времени (вероятности) того, что *система не пуста.* Отсюда легко следует, что величина $\rho\lambda/\mu_0$ должна быть равна стационарной вероятности простоя сервера при непустой орбите. Иными словами, это *доля мощности, потерянной сервером из-за простоев при непустой орбите.* Поскольку эта вероятность положительна, то дисциплина в данной системе не является *консервативной.* Этот результат подтверждается в системе с повторными вызовами вида $M/M//1/0$, поскольку (см. (2))

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(\nu = 0,\, N > 0) \\
&= \mathsf{P}(\nu = 0) - \mathsf{P}(\nu = 0,\, N = 0) \\
&= 1 - \rho - \sum_{i>0}\mathsf{P}_{i0} = \rho\frac{\lambda}{\mu_0}.
\end{aligned}$$

Результаты численного моделирования

В данном разделе представлены результаты имитационного моделирования и оценивания вероятности блокировки P_b в системах $M/M/1/0$ и $M/Pareto/1/0$ в стационарном и нестационарном режимах. Эти (точечные) оценки дают очень хорошее согласие с полученными выше теоретическими результатами (см. близость величин P_b, $\hat{\theta}_m(t)$ и $\hat{\Theta}_m(t)$ в таблицах 1, 2).

В качестве исходных характеристик системы задаются величины λ, μ_0, μ. На основе условия (5) в работе [1] введена *мера стационарности*

$$\Gamma \;:=\; 1/\mathsf{E}S - \Big(\frac{\lambda^2}{\mu_0} + \lambda\Big) \equiv \mu - \Big(\frac{\lambda^2}{\mu_0} + \lambda\Big),$$

значение которой положительно в области стационарности (и растет по мере "углубления" в область стационарности). Заметим, что при больших $\Gamma > 0$ реальная интенсивность орбитальных заявок $\tilde{\mu}_0 \ll \mu_0$, и заданный параметр μ_0 не является показателем качества обслуживания. Ниже рассматривается следующая оценка интенсивности $\tilde{\mu}_0$ потока заявок с орбиты на сервер

$$\hat{\mu}_0(t) = \frac{\sum_{i=1}^{k(t)} I_i}{t},$$

где индикатор $I_i = 1$, если i-я попытка обращения к серверу неудачна, а $k(t)$ – общее число попыток за время наблюдения $[0, t]$. При этом, в стационарном режиме с в. 1, $\hat{\mu}_0(t) \to \tilde{\mu}_0$ при $t \to \infty$. Можно также показать (см. [1]), что в нестационарном режиме (т. е. при $\Gamma < 0$)

Таблица 1. Оценивание P_b в системе вида $M/M/1/0,\ \lambda = 1,\ m = 50$

μ_0	$\hat{\mu}_0(t)$	μ	$\hat{\rho}(t)$	Γ	P_b	$\hat{\theta}_m(t)$	$\hat{\Theta}_m(t)$	$VR(t)$
4,00	0,150	10,000	0,120	8,750	0,100	0,101	0,100	0,003
14,000	0,590	6,000	0,270	4,930	0,167	0,167	0,167	0,001
0,600	0,510	3,00	0,500	0,330	0,333	0,333	0,331	0,221
0,050	0,050	20,000	0,050	-1,000	0,050	0,051	0,050	0,001
0,200	0,200	1,000	1,200	-5,000	0,545	0,546	0,545	0,001
0,100	0,100	0,100	11,010	-10,900	0,917	0,917	0,917	0,004

Таблица 2. Оценивание P_b в системе вида $M/Pareto/1/0$, $\lambda = 0,5$, $m = 50$

μ_0	$\hat{\mu}_0(t)$	α	$\hat{\rho}(t)$	Γ	P_b	$\hat{\theta}_m(t)$	$\hat{\Theta}_m(t)$	$VR(t)$
10,000	2,810	10,000	3,680	0,370	0,556	0,565	0,552	0,011
5,000	2,140	5,000	3,300	0,250	0,625	0,629	0,620	0,025
0,200	0,200	40,00	0,720	-0,780	0,418	0,417	0,418	0,000
0,100	0,100	2,100	1,150	-2,480	0,534	0,532	0,534	0,002

$\hat{\mu}_0(t) \to \mu_0$ с в. 1. Кроме того, используя аргументы теории регенерации, можно показать, что $\mathsf{E}\hat{\mu}_0(t) \to \mu_0$ на границе области стационарности, т. е. при $\Gamma = 0$. В целом, коэффициент

$$\hat{\rho}(t) = (\lambda + \hat{\mu}_0(t))\mathsf{E}S$$

выражает загрузку сервера (в числе попыток в единицу времени) на конечном интервале $[0, t]$. Эффективность оценок $\hat{\theta}_m(t)$ и $\hat{\Theta}_m(t)$ выражается величиной отношения их дисперсий

$$VR(t) := \frac{\hat{D}[\hat{\Theta}_m(t)]}{\hat{D}[\hat{\theta}_m(t)]},$$

где

$$\hat{D}[\hat{\Theta}_m(t)] = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\Big[\Theta_j[k_j(t)] - \hat{\Theta}_m(t)\Big]^2,$$

$$\hat{D}[\hat{\theta}_m(t)] = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\Big[\theta_j[k_j(t)] - \hat{\theta}_m(t)\Big]^2.$$

Подчеркнем, что в области стационарности оценки строились на конечном интервале $[0, t]$ по числу $k(t) = \max_i\{i : t_i \leqslant t\}$ приходов первичных заявок, а в области нестационарности по числу $k(t) = \max_i\{i : z_i \leqslant t\}$ попыток обращения к серверу. Ниже приведены оценки вероятности занятости $\hat{\theta}_m(t)$ и $\hat{\Theta}_m(t)$ на основе фиксированного числа реализаций $m = 50$. (Эксперименты при значениях $m = 25$, $m = 100$ также дали аналогичные результаты.)

В табл. 1 представлены результаты для системы вида $M/M/1/0$ при значении параметра потока первичных заявок $\lambda = 1$.

В глубине области стационарности (строки 1–2 табл. 1) дисперсия альтернативной оценки существенно меньше, чем дисперсия стандартной оценки, $VR(k) \ll 1$. Внутри области стационарности вблизи ее границы (строка, соответствующая $\Gamma = 0,330$) наблюдается снижение эффективности альтернативной оценки, однако ее дисперсия не превосходит дисперсию стандартной оценки. Внутри области нестационарности ($\Gamma < 0$) альтернативная оценка также эффективнее стандартной и близка к точному значению.

Результаты табл. 2 показывают, что в системе с повторными вызовами типа $M/Pareto/1/0$ эффективность альтернативной оценки вероятности P_b также превышает эффективность стандартной оценки.

Как легко проверить, оценки $\hat{\mu}_0$ (3 первые строки в столбце 2 табл. 1) очень близки к значениям интенсивности $\tilde{\mu}_0$ из формулы (29), равным 0,15; 0,58 и 0,50, соответственно.

На рис. 1 представлена зависимость величин $t\hat{D}[\hat{\theta}_m(t)]$ и $t^2\hat{D}[\hat{\Theta}_m(t)]$ от времени наблюдения t для системы вида $M/Pareto/1/0$.

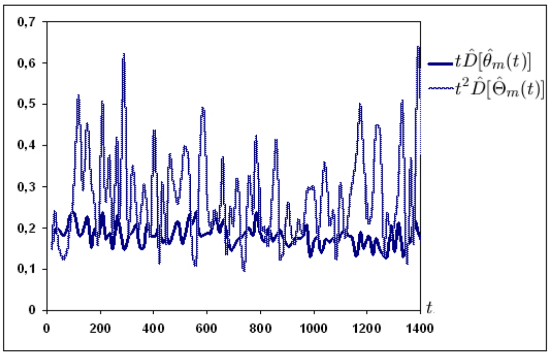

Рис. 1. Дисперсии оценок в системе $M/Pareto/1/0$ при $\lambda = 0,5$, $\mu_0 = 0,2$, $\alpha = 40$

Визуальный анализ рис. 1 показывает, что

$$t\,\hat{D}[\hat{\theta}_m(t)] \sim t^2\,\hat{D}[\hat{\Theta}_m(t)] \cdot C,$$

для некоторой постоянной C, что соответствует утверждениям Теорем 1, 2. Заметим также, что полученные выводы хорошо согласуются с результатами из [12] для систем с потерями.

Заключение

Численные результаты имитационного моделирования показали, что при оценивании вероятности занятости сервера на конечном интервале альтернативная оценка по остаточной длине цикла существенно эффективнее, чем стандартная, что согласуется с результатами из работы [12]. Эта эффективность выражается в уменьшении дисперсии оценки и проявляется как в области стационарности, так и в области нестационарности систем с повторными вызовами вида $M/M/1/0$ и $M/Pareto/1/0$. Однако необходимо учитывать, что альтернативная оценка строится на основе известного точного значения, которое не всегда известно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-07-00017 и при поддержке Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития».

Литература

1. *Морозов Е. В., Некрасова Р. С.* Оценивание вероятности блокировки в системе с повторными вызовами и постоянной скоростью возвращения заявок с орбиты // Труды Карельского научного центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. Вып. 2. 2011. № 5. С. 63–74.

2. *Морозов Е. В., Некрасова Р. С.* Об оценивании вероятности переполнения конечного буфера в регенеративных системах обслуживания // Информатика и ее применения. 2012. Т. 6, № 3. С. 90–98.

3. *Artalejo J. R.* Stationary analysis of the characteristics of the M/M/2 queue with constant repeated attempts // Operation search. 1996. Vol. 33. P. 83–95.

4. *Artalejo J. R., Gómez-Corral A., Neuts M. F.* Analysis of multiserver queues with constant retrial rate // European Journal of Operational Research. 2001. Vol. 135. P. 569–581.

5. *Asmussen S.* Applied Probability and Queues. Springer, 2002. P. 476.

6. *Avrachenkov K., Goricheva R. S., Morozov E. V.* Verification of stability region of a retrial queuing system by regenerative method // Proceedings of the Intenational Conference “Modern Probabilistic Methods for Analysis and optimization of Information and Telecommunication Networks”. Minsk, 2011. P. 22–28.

7. *Avrachenkov K., Morozov E. V.* Stability analysis of GI/G/c/K Retrial Queue with Constant Retrial Rate // INRIA (Sophia Antipolis), Research Report. 2010. N 7335. Available online at `http://hal.inria.fr/inria-00499261/en/`

8. *Avrachenkov K., Yechiali U.* Retrial networks with finite buffers and their application to Internet data traffic // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2008. Vol. 22. P. 519–536.

9. *Avrachenkov, K., Yechiali U.* On tandem blocking queues with a common retrial queue // Computers and Operations Research. 2010. N 37(7). P. 1174–1180.

10. *Billingsley P.* Convergence of probability measures 2nd edt. New-York: John Wiley, 1999. P. 296.

11. *Fayolle G.* A simple telephone exchange with delayed feedback/ In O. J. Boxma, J. W. Cohen and H. C. Tijms (eds.) // Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation. 1986. Vol. 7. P. 245–253.

12. *Kang W., Whitt W., Shahabuddin P.* Exploting Regenerative Structure to estimate finite time averages via simulation // ACM. 2006. P. 1–38.

13. *Ramalhoto M. F., Gómez-Corral A.* Some decomposition formulae for M/M/r/r+d queues with constant retrial rate // Stochastic Models. 1998. Vol. 14. P. 123–145.

14. *Smith W. L.* Regenerative stochastic processes // Proc. Royal Soc. Ser. A. 1955. Vol. 232. P. 6–31.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Морозов Евсей Викторович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185610,
эл. почта: emorozov@karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Некрасова Руслана Сергеевна
аспирантка
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185610,
эл. почта: ruslana.nekrasova@mail.ru
тел.: (8142) 763370

Morozov, Evsey
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185610 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: emorozov@karelia.ru
tel.: (8142) 763370

Nekrasova, Ruslana
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185610 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: ruslana.nekrasova@mail.ru
tel.: (8142) 763370

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 78–88

УДК 519.2

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН УСЛОВНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Рассматриваются случайные графы, состоящие из N занумерованных вершин. Степени вершин определяются независимо друг от друга в соответствии со степенным распределением с показателем $\tau > 0$. Все полуребра вершин занумерованы. Граф строится путем равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Получены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при условии, что сумма степеней равна n, где n четно, $\tau \in (1, 2)$ и $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайные графы, Интернет, конфигурационная модель, степень вершины, предельное распределение.

Yu. L. Pavlov. ON LIMIT DISTRIBUTIONS OF VERTEX DEGREES IN CONDITIONAL CONFIGURATION RANDOM GRAPH

We study random graphs consisting of N numbered verties. The degrees of the vertices are drawn independently from power-law distribution with the exponent $\tau > 0$. All of the stubs of the vertices are numbered. The graph is constructed by joining each stub to another equiprobably to form edges. We obtain the limit distributions of the maximum vertex degree and number of vertices with given degree under the condition that the sum of vertex degrees is equal to n, n is even, $\tau \in (1, 2)$ and $N, n \to \infty$ so that $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$.

K e y w o r d s: random graphs, Internet, configuration model, vertex degree, limit distribution.

Введение

Исследование случайных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет или социальные сети, в последние годы стало одним из важнейших направлений работы специалистов по вероятностным методам дискретной математики (см. например, [7, 9]). Одной из наиболее известных моделей такого типа является так называемый конфигурационный граф, степени вершин которого являются случайными величинами [9, 11, 13]. Пусть граф состоит из N основных вершин, занумерованных числами от 1 до N, а степени этих вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_N$. При описании структуры графа используется понятие полуребра, т. е. ребра, инцидентного данной вершине, но для которого смежная вершина еще не определена. Все полуребра графа считаются различными и при образовании ребер соединяются друг с другом попарно каким-то способом. Обычно используется равновероятное соединение, что и подразумевается в данной статье. Заметим, что поскольку сумма степеней должна быть четной, в случае нечетного значения суммы $\zeta_N = \xi_1 + \cdots + \xi_N$ в граф вводится дополнительная вершина единичной степени. Ясно, что в таком графе могут быть петли и кратные ребра.

Наблюдения за различными реальными сетями показали (см. например, [9, 10]), что в большинстве случаев число вершин степени k при больших k пропорционально $k^{-(\tau+1)}$, где $\tau \in (1, 2)$. В таком случае подходящим общим распределением для $\xi_1, \xi_2 ...$ является следующее выражение:

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \geqslant k\} = h(k)/k^{\tau}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{1}$$

где $h(k)$ — медленно меняющаяся (в смысле Карамата) функция. Исследования показали, что основные свойства сетей при больших N зависят главным образом от значений вероятностей (1), но при этом вид функции $h(k)$ почти не влияет на асимптотическую структуру графа. Поэтому в настоящей статье мы будем считать, что

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \geqslant k\} = k^{-\tau}.$$

В этом случае, как легко видеть,

$$p_k = \mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \ k = 1, 2, ... \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$\mathsf{E}\,\xi_1 = \zeta(\tau), \tag{3}$$

где $\zeta(\tau)$ — значение дзета-функции Римана в точке τ .

В статьях [6, 8] впервые рассматривались условные конфигурационные случайные графы при условии, что сумма степеней вершин известна и равна n, т. е. $\zeta_N = n$. Исследование таких графов представляет определенный интерес, поскольку на практике иногда удается оценить число связей в реальных сетях. Кроме того, если известны соответствующие результаты об условных графах при различных соотношениях между стремящимися к бесконечности N и n, то их можно использовать и для изучения случайных графов без ограничений на число ребер. Обозначим $\xi_{(N)}$ и μ_r максимальную степень вершины и число вершин степени r соответственно. В статье [8] были найдены предельные распределения этих случайных величин при $\tau > 0$ и $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \zeta(\tau)$, а в работе [6] эти результаты были распространены на случаи $n/N \downarrow 1$ и $n/N \uparrow \zeta(\tau)$, при этом для $\tau < 1$ было введено дополнительное условие $n/N^{1/\tau} \to 0$ (заметим, что как следует из (3), при $\tau \leqslant 1$ случайные величины $\xi_1, ..., \xi_N$ не имеют математического ожидания). В [3] предельные распределения $\xi_{(N)}$ и μ_r были найдены для $\tau > 1$ и $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \zeta(\tau)$, при этом для $\tau \in (1, 2)$ соответствующие результаты были получены в случае $|n - \zeta(\tau)N| = O(N^{1/\tau})$. Асимптотическое поведение этих случайных величин при $\tau \leqslant 1$ и $n/N^{1/\tau} \geqslant C > 0$ рассмотрено в [4]. Основным методом доказательства перечисленных результатов была обобщенная схема размещения частиц по ячейкам [1].

Далее было проведено исследование типичной структуры условного конфигурационного графа при $\tau \in (1, 2)$ и $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \zeta(\tau)$. Для этого была установлена связь между графами и ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона [5, 12]. Естественно, что полученные результаты оказались сходными с известными (см. например [13]) фактами, установленными для графов без ограничений на число ребер.

Главными результатами статьи являются доказанные ниже предельные теоремы для $\xi_{(N)}$ и μ_r в не рассматривавшемся ранее случае $\tau \in (1, 2)$ и $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$.

Основные результаты

В этом разделе сформулированы теоремы 1–3 о предельном поведении случайных величин $\xi_{(N)}, \mu_r$ и показано, что для доказательства этих теорем можно использовать обобщенную схему размещения [1].

Теорема 1. *Пусть $\tau \in (1, 2), \ N \to \infty, (n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$*

$$\mathsf{P}\{(n - \zeta(\tau)N - \xi_{(N)})/N^{1/\tau} \leqslant z\} \to \int_{-\infty}^{z} g(x)dx,$$

где $g(x)$ — плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\{|t|^{\tau}\Gamma(1-\tau)(\cos\frac{\pi\tau}{2})(1 - i\frac{t}{|t|}tg\frac{\pi\tau}{2})\}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть* $\tau \in (1,2), r, N \to \infty, (n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. *Тогда равномерно относительно целых неотрицательных* k, *для которых* $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$ *лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}} e^{-u_r^2/2}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\tau \in (1,2),\ N, r \to \infty, (n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. *Тогда равномерно относительно целых неотрицательных* k, *для которых* $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ *лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r}(1+o(1)).$$

В силу условия $\zeta_N = n$ в нашем графе случайные величины $\xi_1, ..., \xi_N$ не являются независимыми. Введем вспомогательные независимые случайные величины $\eta_1, ..., \eta_N$, распределение которых совпадает с (2). Тогда очевидно, что

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, ..., \xi_N = k_N\} \\ = \mathsf{P}\{\eta_1 = k_1, ...\eta_N = k_N | \eta_1 + ... + \eta_N = n\}. \tag{5}$$

Это равенство означает, что мы находимся в условиях обобщенной схемы размещения. Нам потребуются еще независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(r)}, ..., \eta_N^{(r)}$ и $\widetilde{\eta}_1^{(r)}, ..., \widetilde{\eta}_N^{(r)}$, для которых

$$\mathsf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathsf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \leqslant r\}, \tag{6}$$

$$\mathsf{P}\{\widetilde{\eta}_i^{(r)} = k\} \\ = \mathsf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\},\ i = 1, ..., N. \tag{7}$$

Обозначим также $\zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + ... + \eta_N^{(r)}$, $\widetilde{\zeta}_N^{(r)} = \widetilde{\eta}_1^{(r)} + ... + \widetilde{\eta}_N^{(r)}$, $P_r = \mathsf{P}\{\xi_1 > r\}$. Нетрудно видеть, что из (5) следует такая лемма (см. также [1]):

Лемма 1. *Справедливы равенства:*

$$\mathsf{P}\{\xi_{(N)} \leqslant r\} = (1-P_r)^N \frac{\mathsf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} \\ = \binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} \frac{\mathsf{P}\{\widetilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Заметим, что в утверждениях леммы 1 ζ_N является суммой независимых случайных величин. Доказательства основных результатов будут проведены обычным для обобщенной схемы образом. Для этого в следующих разделах исследуется предельное поведение вероятностей, входящих в правые части утверждений леммы 1 (леммы 2 и 3), а в конце статьи с помощью полученных результатов будут завершены доказательства теорем 1–3.

Предельное поведение ζ_N и $\zeta_N^{(r)}$

Для доказательства теоремы 1 с помощью первого утверждения леммы 1 нам необходимо найти асимптотику вероятностей $\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}$ и $\mathsf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}$, что и будет сделано в этом разделе.

Лемма 2. *Пусть* $\tau \in (1,2),\ N \to \infty$ *так, что* $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(A) $\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} = \tau N(N - \zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)} \times (1+o(1))$,

(B) *Если* $r = n - \zeta(\tau)N - zN^{1/\tau}$, *где* z — *фиксированное число, то* $\mathsf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} = \tau N(n - \zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1)) \int_z^\infty g(x)dx$,

где плотность распределения $g(x)$ *определена в теореме 1.*

Доказательство. Утверждение (A) следует из теоремы 3 статьи [2], однако случайные велечины $\xi_1^{(r)}, ..., \xi_N^{(r)}$ образуют схему серий и для $\zeta_N^{(r)}$ мы находимся в зоне больших уклонений. Поскольку общих теорем такого вида нет, доказательство приводится ниже, при этом оно включает и случай (A).

Обозначим

$$\gamma = (N^{1/\tau}/(n - \zeta(\tau)N))^{1/3}. \tag{8}$$

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j^{(1)} = \xi_j - \zeta(\tau)$, $\xi_j^{(2)} = \eta_j^{(r)} - \zeta(\tau)$, $j = 1, ..., N$, и их суммы $\hat{\zeta}_N^{(1)} = \xi_1^{(1)} + ... + \xi_N^{(1)} = \zeta_N - \zeta(\tau)N$, $\hat{\zeta}_N^{(2)} = \xi_1^{(2)} + ... + \xi_N^{(2)} = \zeta_N^{(r)} - \zeta(\tau)N$. Представим искомые вероятности в виде:

$$\mathsf{P}\{\hat{\zeta}_N^{(s)} = n - \zeta(\tau)N\} = P_1^{(s)} + NP_2^{(s)} + P_3^{(s)}, \\ s = 1,2; \tag{9}$$

где

$$P_1^{(s)} = \mathsf{P}\{\hat{\zeta}_N^{(s)} = n - \zeta(\tau)N,\ \xi_j^{(s)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N),$$

$$j=1,...,N\},$$

$$P_2^{(s)}=\mathbf{P}\{\hat\zeta_N^{(s)}=n-\zeta(\tau)N,\ \xi_j^{(s)}\leqslant\gamma(n-\zeta(\tau)N),$$

$$j=1,...,N-1,\ \xi_N^{(s)}>\gamma(n-\zeta(\tau)N)\},$$

$$P_3^{(s)}=\mathbf{P}\{\hat\zeta_N^{(s)}=n-\zeta(\tau)N,\bigcup_{i\neq j}\{\xi_j^{(s)}$$

$$>\gamma(n-\zeta(\tau)N),\ \xi_j^{(1)}>\gamma(n-\zeta(\tau)N),\}\}.$$

Ниже будет показано, что основной вклад в сумму (9) дает второе слагаемое. Рассмотрим сначала $P_1^{(s)}$. Положим

$$R^{(s)}(w)=\sum_{k\leqslant\gamma(n-\zeta(\tau))+\zeta(\tau)}\exp\{(k-\zeta(\tau))w\}\,\mathbf{P}\{\xi_1^{(s)}=k-\zeta(\tau)\}. \quad (10)$$

Из (2) следует, что при $k\to\infty$

$$p_k=\tau k^{-(\tau+1)}(1+o(1)). \quad (11)$$

Используя это соотношение, построим оценки для следующих сумм, справедливые для достаточно больших l:

$$\sum_{k>l}p_k<C_1\int\limits_l^\infty y^{-(\tau+1)}dy=C_2l^{-\tau}, \quad (12)$$

$$\sum_{k>l}(k-\zeta(\tau))p_k<C_3\int\limits_l^\infty y^{-\tau}dy=C_4l^{1-\tau}, \quad (13)$$

$$\sum_{k\leqslant l}(k-\zeta(\tau))^2p_k<C_5\int\limits_1^l y^{1-\tau}dy=C_6l^{2-\tau}, \quad (14)$$

здесь и далее символы $C_1,C_2,...$ означают некоторые положительные постоянные.

Из (8) и (12) следует, что при выполнении условий леммы

$$(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-\tau}=o(N^{-1}),\quad P_r=o(N^{-1}). \quad (15)$$

Учитывая, что при $0<y<1$ справедливо равенство $e^y=1+y+\delta(y)$, где $\delta(y)\leqslant y^2$, из (10), (12)–(15) получаем соотношение:

$$R^{(s)}(1/(\gamma(n-\zeta(\tau)N)))=1+o(N^{-1}),\quad s=1,2. \quad (16)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_{1,\gamma}^{(s)},...,\xi_{N,\gamma}^{(s)}$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma}^{(s)}=k-\zeta(\tau)\}=\frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(s)}=k\}\exp\{(k-\zeta(\tau))/(\gamma(n-\zeta(\tau)N))\}}{R^{(s)}(1/(\gamma(n-\zeta(\tau)N)))},$$

где $k\leqslant\gamma(n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau)$. Положим $\zeta_{N,\gamma}^{(s)}=\xi_{1,\gamma}^{(s)}+...+\xi_{N,\gamma}^{(s)}$. Тогда $P_1^{(s)}$ имеет следующее представление:

$$P_1^{(s)}=(R^{(s)}((\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-1}))^N\times\exp\{-1/\gamma\}\,\mathbf{P}\{\zeta_{N,\gamma}^{(s)}=n-\zeta(\tau)N\}. \quad (17)$$

Обозначим $\varphi_{s,\gamma}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_{1,\gamma}^{(s)}$. При $s=1$ из (10) следует, что

$$\varphi_{1,\gamma}(t)=(R^{(1)}((\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-1}))^{-1}\times R^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-1}+it), \quad (18)$$

а для случайной величины $\xi_{1,\gamma}^{(2)}$ характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi_{2,\gamma}(t)=((1-P_r)R^{(2)}((\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-1}))^{-1}\times R^{(2)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-1}+it). \quad (19)$$

По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N,\gamma}^{(s)}=n-\zeta(\tau)N\}=\frac{1}{2\pi N^{1/\tau}}\int\limits_{-\pi N^{1/\tau}}^{\pi N^{1/\tau}}\exp\left\{-\frac{it(n-\zeta(\tau)N)}{N^{1/\tau}}\right\}\times\left(\varphi_{s,\gamma}\left(\frac{t}{N^{1/\tau}}\right)\right)^N dt. \quad (20)$$

Если $k<\gamma(n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau)$, то $\exp\{(k-\zeta(\tau))/(\gamma(n-\zeta(\tau)N))\}\leqslant 1+2(k-\zeta(\tau))/(\gamma(n-\zeta(\tau)N))$, поэтому из (10), (12), (13) и (15) получаем, что

$$|R^{(s)}((\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-1}+it)|\leqslant|\varphi_s(t)|+o(N^{-1}), \quad (21)$$

где $\varphi_s(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\xi_1^{(s)}$.

Из определения $\xi_1^{(s)}$ следует, что

$$\varphi_1(t)=\exp\{-i\zeta(\tau)t\}\varphi(t), \quad (22)$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_1. Из (2) находим, что

$$\varphi_2(t)=\left(\varphi_1(t)-\sum_{k=r+1}^\infty\exp\{it(k-\zeta(\tau))\}p_k\right)\times(1-P_r)^{-1}. \quad (23)$$

Отсюда и из (12) видим, что при $r = n - \zeta(\tau)N - zN^{1/\tau}$

$$\varphi_2(t) = (1-P_r)^{-1}\exp\{-i\zeta(\tau)t\}\varphi_1(t) + o(N^{-1}).$$

Таким образом, в силу (15) неравенство (21) имеет вид:

$$|R^{(s)}((\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-1}+it)| \leqslant |\varphi_1(t)| + o(N^{-1}).$$

Тогда из (16), (18) и (19) получаем такую оценку:

$$|\varphi_{s,\gamma}(t)|^N \leqslant C_7|\varphi(t)|^N. \tag{24}$$

Разобьем интеграл, стоящий в правой части равенства (20), на сумму двух интегралов, соответствующих следующим значениям переменной интегрирования: $|t| \leqslant \varepsilon N^{1/\tau}$ и $\varepsilon N^{1/\tau} < |t| \leqslant \pi N^{1/\tau}$, где достаточно малое ε будет выбрано ниже. По свойству характеристических функций решетчатых распределений с единичным максимальным шагом при $\varepsilon < |t| \leqslant \pi$ выполняется неравенство

$$|\varphi(t)| \leqslant \exp\{-C_8\}. \tag{25}$$

Известно [3], что

$$\varphi(t) = 1 + (e^{it}-1)\Phi(e^{it},\tau,1), \tag{26}$$

где $\Phi(z,\tau,a)$ — трансцендентная функция Лерча, имеющая вид

$$\Phi(z,\tau,a) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{(j+a)^\tau} = \frac{1}{\Gamma(\tau)}\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-ze^{-x}}dx,$$

а $\Gamma(\tau)$ — значение гамма-функции в точке τ. При $t \to 0$ и $\tau \in (1,2)$ известно [14] следующее асимптотическое разложение:

$$\Phi(e^{it},\tau,1) = \zeta(\tau) + \Gamma(1-\tau)(-it)^{\tau-1} + O(t),$$

поэтому из (26) следует, что

$$\varphi(t) = 1 + it\zeta(\tau) + \Gamma(1-\tau)(-it)^\tau + O(t^2).$$

Отсюда и из (22) видно, что при достаточно малом ε и $|t| \leqslant \varepsilon$

$$|\varphi_1(t)| \leqslant \exp\{-C_9|t|^\tau\}. \tag{27}$$

Тогда из (20), (24), (25) и (27) следует, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N,\gamma}^{(1)} = n - \zeta(\tau)N\} \leqslant C_{10}N^{-1/\tau}$$
$$\times\Big(\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon N^{1/\tau}}\exp\{-C_9|t|^\tau\}dt$$
$$+\int\limits_{\varepsilon N^{1/\tau}<|t|\leqslant\pi N^{1/\tau}}\exp\{-NC_8\}dt\Big).$$

Таким образом, при $s=1$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N,\gamma}^{(s)} = n - \zeta(\tau)N\} < C_{11}N^{-1/\tau}.$$

Аналогичным образом эту оценку нетрудно получить и при $s=2$. Отсюда, из (8), (16) и (17) следует, что

$$\begin{aligned} P_1^{(s)} &\leqslant C_{12}N^{-1/\tau}\exp\{-1/\gamma\} \\ &= o(N(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}). \end{aligned} \tag{28}$$

Оценим вероятность $P_2^{(s)}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} P_2^{(s)} = \sum_{M_s}\mathbf{P}\{\xi_N^{(s)} = n-\zeta(\tau)-k\} \\ \times\mathbf{P}\{\xi_1^{(s)}+\ldots+\xi_{N-1}^{(s)} = k-\zeta(\tau)(N-1), \xi_i^{(s)} \\ \leqslant \gamma(n-\zeta(\tau)N), i=1,\ldots,N-1\}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $M_1 = \{k : N-1 \leqslant k < n-\zeta(\tau)-\gamma(n-\zeta(\tau)N)\}$, $M_2 = \{k : n-\zeta(\tau)-r \leqslant k < n-\zeta(\tau)-\gamma(n-\zeta(\tau)N)\}$.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_i^{(s)}(u), i=1,\ldots,N, s=1,2$, такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1^{(s)}(u) = k-\zeta(\tau)\} \\ = \mathbf{P}\{\xi_1^{(s)} = k-\zeta(\tau)|\xi_1^{(s)} \leqslant u\}. \end{aligned} \tag{30}$$

Ниже будут рассматриваться случайные величины $\xi_i^{(s)}(u)$ при $u = \gamma(n-\zeta(\tau)N)$ и $u = \gamma^{-1}N^{1/\tau}$. Пусть $\zeta_N^{(s)}(u) = \xi_1^{(s)}(u)+\ldots+\xi_N^{(s)}(u)$. Используя (12), (15), (29) и (30), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} P_2^{(s)} = (1+o(1))\sum_{M_s}\mathbf{P}\{\xi_N^{(s)} = n-\zeta(\tau)-k\} \\ \times\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(s)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) = k-\zeta(\tau)(N-1)\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Обозначим через $\varphi_{s,\gamma(n-\zeta(\tau)N)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_1^{(s)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))$. Из (2), (6), (12), (15) и (23) находим, что при любом фиксированном t

$$\varphi_{s,\gamma(n-\zeta(\tau)N)}(t/N^{1/\tau}) \to f(t),$$

где характеристическая функция $f(t)$ определена в (4). Поэтому

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(s)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) \leqslant yN^{1/\tau}\} \to \int\limits_{-\infty}^{y} g(x)dx. \tag{32}$$

Покажем, что при достаточно больших N, n и $s = 1, 2$

$$\mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(s)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \leqslant C_{13}\gamma^{\tau}. \tag{33}$$

Учитывая (30) и то, что $\gamma(n-\zeta(\tau)N) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}$, для искомой вероятности получаем следующее неравенство:

$$\mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}$$
$$\leqslant (N-1)\,\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \tag{34}$$
$$+\left(\frac{1-\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)} > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}}{1-\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)} > \gamma(n-\zeta(\tau)N)\}}\right)^{N-1}$$
$$\times\,\mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma^{-1}N^{1/\tau}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}.$$

Используя (12), (14) и (30), нетрудно получить соотношения:

$$(N-1)\,\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \leqslant C_{14}\gamma^{\tau},$$

$$\mathsf{E}(\xi_1^{(1)}(\gamma^{-1}N^{1/\tau}))^2 < C_{15}(\gamma^{-1}N^{1/\tau}))^{2-\tau}, \tag{35}$$

и, применяя неравенство Чебышева, видим, что

$$\mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma^{-1}N^{1/\tau} > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} < C_{16}\gamma^{\tau}. \tag{36}$$

Также из (12) и (15) следует равенство:

$$\left(\frac{1-\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)} > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}}{1-\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)} > \gamma(n-\zeta(\tau)N)\}}\right)^{N-1} = 1+o(1),$$

поэтому из (34)–(36) получаем оценку (33) для $s = 1$. Повторяя эти рассуждения для $s = 2$, опять приходим к (33).

Из (31) следует, что вероятность $P_2^{(1)}$ можно представить в виде суммы:

$$P_2^{(1)} = R_1^{(1)} + R_2^{(1)} + R_3^{(1)} + R_4^{(1)}, \tag{37}$$

где

$$R_i^{(1)} = (1+o(1))\sum_{K_i^{(1)}}\mathsf{P}\{\xi_N^{(1)} = n-\zeta(\tau)-k\}$$
$$\times\,\mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) = k-\zeta(\tau)(N-1)\},$$
$$K_1^{(1)} = \{k : N-1 \leqslant k$$
$$\leqslant -\gamma^{-1}N^{1/\tau} + \zeta(\tau)(N-1)\},$$
$$K_2^{(1)} = \{k : -\gamma^{-1}N^{1/\tau} + \zeta(\tau)(N-1) < k$$
$$\leqslant \gamma^{-1}N^{1/\tau} + \zeta(\tau)(N-1)\},$$
$$K_3^{(1)} = \{k : \gamma^{-1}N^{1/\tau} + \zeta(\tau)(N-1) < k$$
$$\leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/2}(n-\zeta(\tau)N)\},$$
$$K_4^{(1)} = \{k : n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/2}(n-\zeta(\tau)N)$$
$$< k \leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma(n-\zeta(\tau)N)\}.$$

Нетрудно видеть, что область $K_1^{(1)}$ может быть пустой.

Вероятность $P_2^{(2)}$ представим в виде:

$$P_2^{(2)} = R_1^{(2)} + R_2^{(2)} + R_3^{(2)}, \tag{38}$$

где

$$R_i^{(2)} = (1+o(1))\sum_{K_i^{(2)}}\mathsf{P}\{\xi_N^{(2)} = n-\zeta(\tau)-k\}$$
$$\times\,\mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(2)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) = k-\zeta(\tau)(N-1)\},$$
$$K_1^{(2)} = \{k : n-r \leqslant k \leqslant \gamma^{-1}N^{1/\tau}+\zeta(\tau)(N-1)\},$$
$$K_2^{(2)} = K_3^{(1)}, K_3^{(2)} = K_4^{(1)}.$$

Из (11) нетрудно получить, что при $k \in K_2^{(1)}$ для $\xi_N^{(1)}$ и $k \in K_1^{(2)}$ для $\xi_N^{(2)}$ выполнено соотношение:

$$\mathsf{P}\{\xi_N^{(s)} = n-\zeta(\tau)-k\} = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}$$
$$\times(1+o(1)).$$

Отсюда с помощью (8), (32) и (33) получаем, что

$$R_2^{(1)} = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1)),$$
$$R_1^{(2)} = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1))\int_z^{\infty} g(x)dx. \tag{39}$$

Из (8) и (11) ясно, что при $k \in K_1^{(1)}$

$$\mathsf{P}\{\xi_N^{(1)} = n-\zeta(\tau)-k\} \leqslant$$
$$C_{17}(n-\gamma^{-1}N^{1/\tau}-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}.$$

Учитывая соотношение $\gamma \to 0$, из (32) находим, что

$$R_1^{(1)} = o((n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}). \tag{40}$$

Пусть $k \in K_3^{(1)}$. Тогда из (8), (11) и (36) следует, что

$$R_3^{(1)} = o((n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}). \tag{41}$$

Рассмотрим $R_4^{(1)}$. Согласно (11),

$$R_4^{(1)} \leqslant C_{18}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-(\tau+1)}$$

$$\times\,\mathsf{P}\{\zeta^{(1)}_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) \qquad (42)$$
$$> (n-\zeta(\tau)N)(1-\gamma^{1/2})\}.$$

Используя (2), (6) и (16), нетрудно получить, что

$$\mathsf{E}(\xi^{(1)}_1(\gamma(n-\zeta(\tau)N)))^2 < C_{19}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{2-\tau},$$

поэтому из неравенства Чебышева следует, что

$$\mathsf{P}\{\zeta^{(1)}_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > (n-\zeta(\tau)N)(1-\gamma^{1/2})\}$$
$$< C_{20}N\gamma^{1/2}(n-\zeta(\tau)N)^{-\tau}.$$

Тогда из (8) и (42) получаем оценку:

$$R^{(1)}_4 = o((n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}). \qquad (43)$$

Учитывая, что слагаемые $R^{(2)}_2$ и $R^{(2)}_3$ оцениваются аналогично $R^{(1)}_3$ и $R^{(1)}_4$ соответственно, из представлений (37), (38) и соотношений (39)–(41), (43) делаем вывод, что

$$P^{(1)}_2 = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1)), \qquad (44)$$

$$P^{(2)}_2 = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1))\int\limits_z^\infty g(x)dx. \qquad (45)$$

Оценим $P^{(1)}_3$. Заметим, что при $k < n - 2\zeta(\tau) - 2\gamma(n-\zeta(\tau)N)$

$$P^{(1)}_3 = N(N-1)2^{-1}\sum_k \mathsf{P}\{\xi^{(1)}_1 + ... + \xi^{(1)}_{N-2}$$
$$= k-\zeta(\tau)(N-2)\}$$
$$\times\,\mathsf{P}\{\xi^{(1)}_{N-1} + \xi^{(1)}_N = n-2\zeta(\tau)-k,$$
$$\xi^{(1)}_{N-1} > \gamma(n-\zeta(\tau)N),$$
$$\xi^{(1)}_N > \gamma(n-\zeta(\tau)N)\}.$$

Отсюда следует, что

$$P^{(1)}_3 \leqslant C_{21}N^2\sum_k \mathsf{P}\{\xi^{(1)}_1 + ... + \xi^{(1)}_{N-2}$$
$$= k-\zeta(\tau)(N-2)\} \qquad (46)$$
$$\times\Big(\sum_K \mathsf{P}\{\xi^{(1)}_{N-1} = j-\zeta(\tau)\}$$
$$\times\,\mathsf{P}\{\xi^{(1)}_N = n-k-\zeta(\tau)-j\}\Big),$$

где

$$K = \{j : \gamma(n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau) < j$$
$$< n-k-\gamma(n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau)\}.$$

Из (11) видим, что при $j > \gamma(n-\zeta(\tau)N) + \zeta(\tau)$

$$\mathsf{P}\{\xi^{(1)}_{N-1} = j-\zeta(\tau)\} \leqslant C_{22}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-(\tau+1)},$$

поэтому из (12) находим, что

$$\sum_K \mathsf{P}\{\xi^{(1)}_{N-1} = j-\zeta(\tau)\}\,\mathsf{P}\{\xi^{(1)}_N = n-k-\zeta(\tau)-j\}$$
$$\leqslant C_{23}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-(\tau+1)}\,\mathsf{P}\{\xi^{(1)}_N > \gamma(n-\zeta(\tau)N)\}$$
$$\leqslant C_{24}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-2\tau-1}.$$

Тогда соотношение (46) выглядит следующим образом:

$$P^{(1)}_3 \leqslant C_{25}N^2(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-2\tau-1}$$
$$\times\,\mathsf{P}\{\xi^{(1)}_1 + ... + \xi^{(1)}_{N-2} < (n-\zeta(\tau)N)(1-2\gamma)\} \qquad (47)$$
$$\leqslant C_{26}N^2(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-2\tau-1}$$
$$= o(N(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}).$$

Для того чтобы оценить вероятность $P^{(2)}_3$, достаточно повторить рассуждения, приведенные при доказательстве (47) и получить, что

$$P^{(2)}_3 = o((N(n-\zeta(\tau)N))^{-(\tau+1)}). \qquad (48)$$

Утверждения леммы 2 теперь очевидным образом, следуют из (9), (28), (44), (45), (47) и (48). □

Предельное поведение $\tilde{\zeta}^{(r)}_{N-k}$

Для исследования асимптотического поведения μ_r мы будем использовать второе утверждение леммы 1, поэтому нам потребуется рассмотреть сумму $\tilde{\zeta}^{(r)}_{N-k}$.

Лемма 3. *Пусть $\tau \in (1,2)$, $N \to \infty$ так, что $(n-\zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. Тогда равномерно относительно целых неотрицательных k и целых положительных r, для которых $u_r = (k-Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathsf{P}\{\tilde{\zeta}^{(r)}_{N-k} = n-kr\}$$
$$= \tau N(n-\xi(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1)).$$

Замечание 1. Из приведенного ниже доказательства понятно, что утверждение леммы 3 верно как при фиксированных r, так и при $r \to \infty$.

Доказательство леммы 3. Мы будем следовать идее доказательства леммы 2. Поскольку при $r \to \infty$ случайные величины $\tilde{\eta}_1^{(r)}, ..., \tilde{\eta}_N^{(r)}$ образуют схему серий, рассмотрим одновременно оба случая: r фиксировано и $r \to \infty$. Из (2), (3), (7) нетрудно получить, что

$$m_r = \mathbf{E}\,\tilde{\eta}_1^{(r)} = \frac{\zeta(\tau) - p_r}{1 - p_r}. \qquad (49)$$

Введем независимые случайные величины $\xi_j^{(r)} = \tilde{\eta}_j^{(r)} - m_r$, $j = 1, 2, ..., N$ и сумму $\Lambda_S^{(r)} = \xi_1^{(r)} + ... + \xi_S^{(r)}$. Покажем, что если $l, S \to \infty$ так, что $l/S^{1/\tau} \to \infty$, то равномерно относительно целых положительных r

$$\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l\} = \frac{S\tau(1 + o(1))}{l^{\tau+1}(1 - p_r)}. \qquad (50)$$

Обозначим

$$\gamma = (S^{1-\tau}/l)^{1/3}, \qquad (51)$$

откуда ясно, что (8) является частным случаем (51). Искомую вероятность представим в виде суммы:

$$\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l\} = P_1(l) + SP_2(l) + P_3(l), \qquad (52)$$

где $P_1(l) = \mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l, \xi_j^{(r)} \leqslant \gamma l,\ i = 1, ..., S\}$,

$$P_2(l) = \mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l, \xi_i^{(r)} \leqslant \gamma l,$$

$$i = 1, ..., S-1, \xi_S^{(r)} > \gamma l\},$$

$$P_3(l) = \mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l,\ \bigcup_{i \neq j}\{\xi_i^{(r)} > \gamma l, \xi_j^{(r)} > \gamma l\}.$$

Как и при доказательстве леммы 2, начнем с оценки $P_1(l)$. Для этого введем функцию

$$R(w) = \sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} \exp\{w(j - m_r)\}\,\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = j - m_r\},$$

заметим при этом, что $\gamma l \to \infty$. Введем новые вспомогательные независимо распределенные случайные величины $\xi_i^{(r)}(\gamma)$, $i = 1, ..., S$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)}(\gamma) = j - m_r\} = R^{-1}\left(\frac{1}{\gamma l}\right)\exp\left\{\frac{j - m_r}{\gamma l}\right\}$$

$$\times\,\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)}(\gamma) = j - m_r\},$$

где $j \leqslant \gamma l + m_r$. Обозначим $\Lambda_S^{(r)}(\gamma) = \xi_1^{(r)}(\gamma)$ $+ ... + \xi_S^{(r)}(\gamma)$.
Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)}(\gamma) = l\} = R^{-S}(1/(\gamma l))e^{1/\gamma}$$

$$\times\,\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l, \xi_i^{(r)} \leqslant \gamma l,\ i = 1, ..., S\},$$

поэтому

$$P_1(l) = R^S(1/(\gamma l))e^{-1/\gamma}\,\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l\}. \qquad (53)$$

Пусть $f_\gamma^{(r)}(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\xi_1^{(r)}(\gamma)$. Тогда

$$f_\gamma^{(r)}(t) = R(1/(\gamma l) + it)R^{-1}(1/(\gamma l)).$$

По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)}(\gamma) = l\} \leqslant \frac{1}{2\pi S^{1/\tau}} \int\limits_{-\pi S^{1/\tau}}^{\pi S^{1/\tau}} \left| f_\gamma^{(r)}\left(\frac{t}{S^{1/\tau}}\right)\right|^S dt.$$

Подставляя это неравенство в (53), получаем, что при $0 < \varepsilon < 1$

$$P_1(l) \leqslant \frac{1}{2\pi S^{1/\tau} e^{1/\gamma}}\Bigg(\int\limits_{|t| \leqslant \varepsilon S^{1/\tau}} \left| R\left(\frac{1}{\gamma l} + \frac{it}{S^{1/\tau}}\right)\right|^S dt$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon S^{1/\tau} < |t| \leqslant \pi S^{1/\tau}} \left| R\left(\frac{1}{\gamma l} + \frac{it}{S^{1/\tau}}\right)\right|^S dt\Bigg). \qquad (54)$$

Покажем, что интегралы в правой части (54) ограничены. Для этого докажем, что равномерно по r

$$|R(1/(\gamma l) + it)| \leqslant |\varphi_r(t)| + O((\gamma l)^{-\tau}), \qquad (55)$$

где

$$\varphi_r(t) = \mathbf{E}\, e^{it\tilde{\eta}_1^{(r)}} = \frac{\varphi(t) - p_r e^{itr}}{1 - p_r}, \qquad (56)$$

а $\varphi(t)$ как и раньше, означает характеристическую функцию случайной величины ξ_1. Разлагая $\exp\{(i - m_r)/(\gamma l)\}$ по формуле Тейлора, находим, что

$$|R(1/(\gamma l)) + it|$$

$$\leqslant \Big|\sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} \exp\{(1/(\gamma l) + it)(j - m_r)\}\,\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_1^{(r)} = j\}\Big|$$

$$\leqslant \Big|\sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} e^{itj}\,\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_1^{(r)} = j\}\Big| \qquad (57)$$

$$+ (\gamma l)^{-1}\Big|\sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} (j - m_r)\,\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_1^{(r)} = j\}\Big|$$

$$+ O((\gamma l)^{-2}\sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} (j - m_r)^2\,\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_1^{(r)} = j\}).$$

Из (12)–(14) и (49) получаем, что

$$\Big|\sum_{j\leqslant\gamma l+m_r} e^{itj}\,\mathsf{P}\{\tilde\eta_1^{(r)}=j\}\Big|$$

$$\leqslant|\varphi_r(t)|+C_{28}(\gamma l)^{-\tau},$$

$$\Big|\sum_{j\leqslant\gamma l+m_r}(j-m_r)\,\mathsf{P}\{\tilde\eta_1^{(r)}=j\}\Big|\leqslant C_{29}(\gamma l)^{1-\tau},$$

$$\sum_{j\leqslant\gamma l+m_r}(j-m_r)^2\,\mathsf{P}\{\tilde\eta_1^{(r)}=j\}\leqslant C_{30}(\gamma l)^{2-\tau},$$

поэтому из (57) следует (55).

Пусть $\delta\in(0,1)$. В силу того, что для любого фиксированного r найдется $\varepsilon_r>0$ такое, что $|\varphi_r(t)|>\delta$ при $|t|\leqslant\varepsilon_r$, а из (2) и (56) следует, что $\varphi_r(t)\to\varphi(t)$ при $r\to\infty$, находим, что существует такое $\varepsilon>0$, что $|\varphi_r(t)|>\delta$ при $|t|\leqslant\varepsilon$. Учитывая, что $(\gamma l)^{-\tau}S\to 0$, из (55) получаем, что

$$|R(1/(\gamma l)+it)|^S\leqslant C_{31}|\varphi_r(t)|^S.$$

Это неравенство означает, что первый интеграл в (54) ограничен. Аналогично получаем, что при $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|R(1/(\gamma l)+it)|\leqslant C_{32}<1,$$

поэтому и второй интеграл ограничен. Отсюда вытекает оценка:

$$P_1(l)\leqslant C_{33}S^{-1/\tau}e^{-1/\gamma}=o(S/\gamma^{\tau+1}).\qquad(58)$$

Найдем асимптотику $P_2(l)$. Ясно, что

$$P_2(l)=\sum_{h>\gamma l+m_r}\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}$$

$$\times\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1}^{(r)}=l-h+m_r,\qquad(59)$$

$$\xi_j^{(r)}\leqslant\gamma l, j=1,...,S-1\}.$$

Обозначим $\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}=\xi_{1,\gamma l}^{(r)}+...+\xi_{S-1,\gamma l}^{(r)}$, где входящие в сумму случайные величины независимы, одинаково распределены и

$$\mathsf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k-m_r|\xi_1\neq r,\ \xi_1\leqslant\gamma l\}.$$

Тогда, в силу соотношения $(\gamma l)^{-\tau}S\to 0$, равномерно по h и r

$$\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1}^{(r)}=l-h+m_r,\ \xi_j^{(r)}\leqslant\gamma l,\ j=1,...,S-1\}$$

$$=(1-(1-p_r)^{-1}\sum_{h>\gamma l+m_r}\mathsf{P}\{\xi_1=h-m_r\})^{S-1}$$

$$\times\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}=l-h+m_r\}$$

$$=\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1}^{(r)}=l-h+m_r\}(1+o(1)),$$

поэтому из (59) следует, что равномерно по r

$$P_2(l)=\sum_{h>\gamma l+m_r}\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}$$

$$\times\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}=l-h+m_r\}(1+o(1)).$$

Представим эту сумму в следующем виде:

$$P_2(l)=R_1(l)+R_2(l)+R_3(l)+R_4(l),\qquad(60)$$

где

$$R_i(l)=\sum_{H_i}\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}$$

$$\times\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}=l-h+m_r\}(1+o(1)),$$

$H_1=\{h:\ \ \gamma l+m_r<h<l\gamma^{1/2}\}$,
$H_2=\{h:\ \ l\gamma^{1/2}\leqslant h<l-\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}$,
$H_3=\{h:\ \ l-\gamma^{-1}S^{1/\tau}\leqslant h\leqslant l+\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}$,
$H_4=\{h: h>l+\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}$.

Мы рассмотрим сначала слагаемое $R_3(l)$, поскольку оно дает главный вклад в сумму (60). Из (11) и соотношения $S^{1/\tau}/\gamma l\to 0$ получаем, что в H_3 равномерно по h

$$\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}=p_h/(1-p_r)$$

$$=\tau(1+o(1))/(h^{1+\tau}(1-p_r))$$

и эта вероятность равна нулю при $h=r$. Отсюда:

$$R_3(l)=\frac{\tau(1+o(1))}{h^{\tau+1}(1-p_r)}\qquad(61)$$

$$\times(1-\mathsf{P}\{|\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}-m_r|>\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}).$$

Аналогично доказательству неравенства (33), легко вывести, что

$$\mathsf{P}\{|\Lambda_{S-1}^{(r)}-m_r|>\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}\leqslant C_{34}\gamma^{\tau},\qquad(62)$$

поэтому из (51) и (61) находим, что

$$R_3(l)=\frac{\tau(1+o(1))}{l^{\tau+1}(1-p_r)}.\qquad(63)$$

Оценим $R_4(l)$. Из (11) следует, что $\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}\leqslant C_{35}l^{-(\tau+1)}$, поэтому, учитывая (51) и (62), видим, что

$$R_4(l)\leqslant C_{36}l^{-(\tau+1)}\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}-m_r<-\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}$$

$$\leqslant C_{37}l^{-(\tau+1)}\gamma^{\tau}=o(l^{-(\tau+1)}).\qquad(64)$$

Аналогично получаем оценку для $R_2(l)$:

$$\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} = h - m_r\} \leqslant C_{38}(l\gamma^{1/2})^{-(\tau+1)},$$

поэтому

$$R_2(l) \leqslant C_{39}(l\gamma^{1/2})^{-(\tau+1)}\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)} - m_r > \gamma^{-1}S^{1/\tau}\} \leqslant C_{40}l^{-(\tau+1)}\gamma^{(\tau+1)/2} = o(l^{-(\tau+1)}). \tag{65}$$

Оценим $R_1(l)$. Здесь $\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} = h - m_r\} \leqslant C_{41}(l\gamma)^{-(\tau+1)}$ и, следовательно,

$$R_1(l) \leqslant C_{42}(l\gamma)^{-(\tau+1)}\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)} > l - l\gamma^{1/2} + m_r\}.$$

Из (14), (51) и неравенства Чебышева находим, что

$$\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l} > l - l\gamma^{1/2} + m_r\} \leqslant C_{43}S(l\gamma)^{2-\tau}/l^2 = C_{43}\gamma^{3\tau},$$

поэтому

$$R_1(l) \leqslant C_{44}l^{-(\tau+1)}\gamma^{2\tau-1} = o(l^{-(\tau+1)}). \tag{66}$$

Из соотношений (60), (63)–(66) заключаем, что равномерно по r

$$P_2(l) = \frac{\tau(1+o(1))}{l^{\tau+1}(1-p_r)}. \tag{67}$$

Осталось оценить $P_3(l)$. Легко видеть, что

$$P_3(l) < S^2 \sum_{h>2(\gamma l+m_r)} \mathsf{P}\{\Lambda_{S-2}^{(r)} = l - h + 2m_r\} \times \mathsf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} + \xi_S^{(r)} = h - 2m_r,\ \xi_{S-1}^{(r)}, \xi_S^{(r)} > \gamma l\}.$$

Из (11) следует неравенство $\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} > \gamma l\} \leqslant C_{45}(\gamma l)^{-\tau}$, поэтому при $\gamma l + m_r < j < h - \gamma l - m_r$

$$\mathsf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} + \xi_S^{(r)} = h - m_r,\ \xi_{S-1}^{(r)}, \xi_S^{(r)} > \gamma l\} = \sum_j \mathsf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} = j - m_r\}\,\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} = h - j\} \leqslant C_{46}(\gamma l)^{-(\tau+1)}\,\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} > \gamma l\} < C_{47}(\gamma l)^{-(2\tau+1)}.$$

Отсюда и из (68) получаем, что

$$P_3(l) \leqslant C_{47}(\gamma l)^{-(2\tau+1)}S^2\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-2}^{(r)} < l - 2\gamma l\} \leqslant C_{48}S\gamma^{\tau-1}/l^{\tau+1} = o(S/l^{\tau+1}).$$

Таким образом, из (52), (58) и (67) следует (50), а утверждение леммы 3 легко вытекает из (50), если положить $S = N - k$ и учесть вид u_r.

Доказательства теорем

Используя (11), (12), (15) и полагая $r = n - \zeta(\tau)N - zN^{1/\tau}$, находим, что $(1-P_r)^N \to 1$. Отсюда, из первого утверждения леммы 1 и из леммы 2 очевидным образом приходим к утверждению теоремы 1.

Чтобы получить теорему 2, достаточно применить второе утверждение леммы 1, первую часть леммы 2, лемму 3 и нормальное приближение биномиальной вероятности.

Из этих же лемм следует и теорема 3, если использовать пуассоновское приближение биномиальной вероятности.

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития».

Литература

1. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

2. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения при нарушении условия Крамера // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1969. № 6. С. 17–22.

3. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 14–23.

4. *Павлов Ю. Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, № 3. С. 20–33.

5. *Павлов Ю. Л.* О типичной структуре конфигурационного Интернет-графа с известным числом числом связей // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. 2011. № 5. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. Вып. 2. С. 86–96.

6. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18.

7. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2011. 136 с.

8. *Cheplyukova I., Pavlov Yu.* Limit distributions of vertex degree in condihional power-law random

graphs. Transactions of the XXVI International Seminar on Stability Problems for Stohastic Models. Ort Braude Colledge, Karniel, Israel, 2007. P. 52–59.

9. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. N. Y.: Cambridge University Press, 2007. 221 p.

10. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology // Computer Communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262.

11. *Hofstad R.* Random Graph and Complex Networks. Eindhoven University of Thechnology. 2011. 363 p.

12. *Pavlov Yu.* On the typical structure of the conditional scale-free random graphs // European researder. 2011. N 5. P. 511–513.

13. *Reittu H., Norros I.* On the power-low random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, N 1. P. 3–23.

14. *Wood D. C.* Technical report 15–92 // Canterbury: University of Kent, 1992. 19 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
зав. лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 761218

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 761218

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 89–93

УДК 519.2

СГОРИТ ЛИ ДЕРЕВО ПРИ ПОЖАРЕ В СЛУЧАЙНОМ ЛЕСЕ?

Ю. Л. Павлов, Е. В. Хворостянская

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассматривается множество $F_{n,N}$ всех возможных лесов, состоящих из $N \geqslant 2$ упорядоченных некорневых деревьев и n помеченных вершин, на котором задано равномерное распределение вероятностей. При $n/N \to \infty$ получены предельные теоремы для числа несгораемых вершин одного дерева в модели распространения огня в случайном лесе из $F_{n,N}$.

Ключевые слова: случайный лес, случайное дерево, модель лесного пожара, плотность несгораемых вершин.

Yu. L. Pavlov, E. V. Khvorostyanskaya. WHETHER A TREE WILL BURN IN A FIRE IN RANDOM FOREST?

We consider the set $F_{n,N}$ of all possible forests, consisting of $N \geqslant 2$ ordered non-root trees and n labeled vertices. We specify the uniform distribution on $F_{N,n}$. When $n/N \to \infty$ limit theorems were obtained for the number of fireproof vertices of one tree in a forest fire model on a random forest taken from $F_{n,N}$.

Key words: random forest, random tree, forest fire model, density of fireproof vertices.

В последние годы в теории случайных графов появилось новое направление – разработка и исследование моделей лесных пожаров (в англоязычной литературе они получили название "forest fire models"). Такие модели используются не только в ландшафтной экологии с целью определения наиболее устойчивой к пожарам топологии лесных насаждений (см., например, [1, 7]), но также в статистической физике [5–7] и в экономике, где с их помощью пытаются понять природу кризисов банковских систем и найти способы минимизации их последствий [1].

В статье [4] предложена одна из возможных моделей такого типа. В ней рассматривается случайный процесс распространения огня по ребрам некорневого дерева с помеченными вершинами. Пусть T_n – множество всех таких деревьев, имеющих n вершин. Хорошо известно, что T_n содержит n^{n-2} различных деревьев. Это значит, что равномерное распределение вероятностей на T_n приписывает каждому дереву меру n^{2-n}. Ребра случайного дерева могут находиться в одном из трех состояний: воспламеняемое, огнеупорное или сгоревшее. Введем случайную величину τ, имеющую распределение Бернулли:

$$\mathsf{P}\{\tau = 1\} = 1/\left(1 + n^{-\alpha}\right), \qquad (1)$$

$$\mathsf{P}\{\tau = 0\} = n^{-\alpha}/\left(1 + n^{-\alpha}\right),$$

где α – некоторое положительное число. Процесс распространения огня происходит следующим образом. До начала пожара все ребра являются воспламеняемыми. В первый момент времени одно из ребер дерева выбирается равновероятно, и считается, что именно на нем начинается возгорание (это можно интерпретировать как «удар молнии»). Новое состояние ребра определяется с помощью случайной величины τ. Если $\tau = 1$, то ребро навсегда становится огнеупорным и в дальнейшем процессе не участвует. Поэтому такое ребро можно считать удаленным, и, следовательно, исходное дерево распадается на два поддерева. Если же $\tau = 0$, выбранное ребро считается сгоревшим, и вместе с ним сгорает все дерево. Таким образом, продолжение процесса возможно, только если первое ребро стало огнеупорным. В этом случае второй шаг состоит в равновероятном выборе одного из воспламеняемых ребер, содержащихся в двух поддеревьях, и его дальнейшее состояние, как и в случае первого ребра, определяется с помощью τ по той же схеме. Следующие шаги процесса происходят аналогично, и он закончится, когда в исходном дереве не останется воспламеняемых ребер.

Вершина дерева называется *несгораемой*, если после окончания процесса все инцидентные ей ребра начального дерева огнеупорны. Обозначим через ξ случайную величину, равную числу несгораемых вершин случайного дерева из T_n, и пусть $g(x)$ – плотность распределения вероятностей, имеющая вид:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x(1-x)^3}} \exp\left\{-\frac{x}{2(1-x)}\right\}, \quad x \in (0,1).$$

В [4] изучалось предельное поведение ξ при $n \to \infty$, и была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *При $n \to \infty$ справедливы утверждения:*

1. *Если $\alpha < 1/2$, то $\mathsf{P}\{\xi/n = 0\} \to 1$.*
2. *Если $\alpha = 1/2$, то для всех k таких, что $u = k/n \in (0,1)$*
$$n\,\mathsf{P}\{\xi = k\} = g(u)(1+o(1)).$$
3. *Если $\alpha > 1/2$, то $\mathsf{P}\{\xi/n = 1\} \to 1$.*

В настоящей работе теорема 1 используется для исследования описанного выше процесса распространения огня на дереве в случайном лесе. Ниже, в соответствии с теоремой 1, рассматривается только нетривиальный случай $\alpha = 1/2$.

Пусть $F_{n,N}$ – множество всех возможных лесов, состоящих из N упорядоченных некорневых деревьев и n помеченных вершин. Зададим на этом множестве равномерное распределение вероятностей. Предположим, что на каждом дереве такого случайного леса пожар происходит независимо от других деревьев. Рассмотрим одно из деревьев, например, первое (это возможно, поскольку деревья упорядочены), и пусть ξ_1 – число несгораемых вершин этого дерева. Ниже изучается предельное поведение этой случайной величины в двух случаях: $n \to \infty$, N фиксировано и $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$. Обозначим

$$Q_N^{(1)} = \frac{2^{N-1}}{N} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{K_i} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{k_j^{k_j-2}}{k_j!} e^{-k_j},$$

$$Q_N^{(2)} = \left(2\,(2/3)^{2/3}\,N\right)^{-1},$$

где $K_i = \{k_1, \ldots, k_{N-1} \geqslant 1, \quad k_1 + \ldots + k_{N-1} = N - 1 + i\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть $n \to \infty$, $N \geqslant 2$ фиксировано. Тогда для всех k таких, что $k = uQ_N^{(1)}n$, $u \in \left(0, 1/Q_N^{(1)}\right)$,*

$$n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = g\left(uQ_N^{(1)}\right) Q_N^{(1)} (1+o(1)).$$

Теорема 3. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$. Тогда для всех k таких, что $k = uQ_N^{(2)}n$, $u \in \left(0, 1/Q_N^{(2)}\right)$,*

$$n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = g\left(uQ_N^{(2)}\right) Q_N^{(2)} (1+o(1)).$$

Доказательство теоремы 2. Обозначим через ν_1 объем выбранного дерева. По формуле полной вероятности

$$n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = \sum_{m=k}^{n-N+1} n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k | \nu_1 = m\}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} = C_n^m m^{m-2} b_{n-m,N-1}/b_{n,N}, \quad (3)$$

где $b_{n,N}$, $b_{n-m,N-1}$ – число всех возможных лесов соответственно в $F_{n,N}$ и $F_{n-m,N-1}$. В книге [3] доказано равенство

$$b_{n,N} = n! \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N \geqslant 1 \\ k_1+\ldots+k_N = n}} \prod_{j=1}^{N} \frac{k_j^{k_j-2}}{k_j!}. \quad (4)$$

Согласно результатам статьи [2] при фиксированном N и $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$b_{n,N} \sim N n^{n-2}/2^{N-1}. \quad (5)$$

Используя формулу Стирлинга, из (3), (5) и равенства (4) для $b_{n-m,N-1}$ находим, что при $m = n - N + 1 - i$, $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \sim \frac{2^{N-1}}{N} \sum_{K_i} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{k_j^{k_j-2}}{k_j!}. \qquad (6)$$

Представим сумму (2) в виде

$$n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = S_1 + S_2 + S_3, \qquad (7)$$

где

$$S_l = \sum_{L_l} n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k | \nu_1 = m\}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\}, \quad l = 1, 2, 3,$$

$$L_1 = \{n - N + 1 - A < m \leqslant n - N + 1\},$$
$$L_2 = \left\{n - An^{4/5} \leqslant m \leqslant n - N + 1 - A\right\},$$
$$L_3 = \left\{k \leqslant m < n - An^{4/5}\right\},$$

положительная постоянная A будет выбрана позднее.

Согласно теореме 1, при $m \in L_1 \bigcup L_2$

$$m\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k | \nu_1 = m\} = g\left(uQ_N^{(1)}\right)(1 + o(1)). \qquad (8)$$

Используя (6), (8), получаем равенство

$$S_1 = g\left(uQ_N^{(1)}\right) R_N, \qquad (9)$$

где величина R_N может быть сделана сколь угодно близкой к $Q_N^{(1)}$ выбором достаточно большого A.

Используя (3) и формулу Стирлинга, нетрудно найти, что при $m \in L_2 \bigcup L_3$

$$\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} < C_1(n - m)^{-5/2}, \qquad (10)$$

здесь и далее символом $C_1, C_2, \dots$ обозначены некоторые положительные постоянные (не всегда различные). Тогда если $m \in L_3$, то $\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} < C_1 A^{-5/2} n^{-2}$ и

$$S_3 < \sum_{L_3} n\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} < C_1 A^{-5/2},$$

а если $m \in L_2$, то, учитывая (8) и (10), находим, что

$$S_2 < C_2 \sum_{L_2} (n - m)^{-5/2} < C_2 \int_{An^{4/5}}^{A} x^{-5/2} dx.$$

Следовательно, S_2 и S_3 можно сделать сколь угодно близкими к нулю за счет выбора A. Отсюда и из (7), (9) получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Следуя доказательству теоремы 2, представим сумму (2) в виде

$$n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \qquad (11)$$

где

$$S_l = \sum_{L_l} n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k | \nu_1 = m\}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\}, \quad l = 1, 2, 3, 4,$$

$$L_1 = \left\{k \leqslant m < n - 2N - AN^{2/3}\right\},$$
$$L_2 = \left\{n - 2N - AN^{2/3} \leqslant m \leqslant n - 2N + AN^{2/3}\right\},$$
$$L_3 = \left\{n - 2N + AN^{2/3} < m \leqslant n - N - A\right\},$$
$$L_4 = \{n - N - A < m \leqslant n - N + 1\},$$

положительная постоянная A будет выбрана позднее.

Из (4) и теоремы 1 [2] находим, что если $n, N \to \infty$ и $n/N \to \infty$, то сохраняет силу (5) и при достаточно большом значении A выполнены соотношения:

при $m \in L_1$

$$b_{n-m,N-1} \sim \frac{(N-1)(n-m)^{n-m+1/2}}{2^{N-2}(n-m-2N+2)^{5/2}}, \qquad (12)$$

при $m \in L_2$

$$b_{n-m,N-1} \sim \frac{\sqrt{\pi}(n-m)^{n-m-2}}{N^{-11/6} 2^{N-3} d}\, p\left(\frac{y}{2d}; \frac{3}{2}, -1\right), \qquad (13)$$

при $m \in L_3$

$$b_{n-m,N-1} \sim \frac{N!(n-m)^{2T}}{N 2^T T!}\left(1 - \frac{2T}{n-m}\right)^{1/2}, \qquad (14)$$

при $m \in L_4$

$$b_{n-m,N-1} \sim C_{n-m}^T \left(\frac{N-1}{2}\right)^T, \qquad (15)$$

где

$$T = n - m - N + 1, \quad d = (2/3)^{2/3},$$

$$y = (N-1)^{1/3}\left(\frac{n-m}{N-1} - 2\right),$$

$p\,(y/(2d); 3/2, -1)$ – плотность устойчивого закона распределения вероятностей, имеющая вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{ity}{2d} - |t|^{3/2} \exp\left\{i\frac{\pi t}{4|t|}\right\}\right\} dt.$$

Пусть $m \in L_1$. Из (1) и теоремы 1 следует, что

$$m\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k|\nu_1 = m\} \leqslant C_3.$$

С помощью формулы Стирлинга из (3), (5), (12) получаем оценку

$$\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \leqslant C_4(n - m - 2N + 2)^{-5/2}.$$

Учитывая эти неравенства, легко показать, что $S_1 \leqslant C_5 A^{-3/2} N^{-1}$ и при выборе достаточно большого A выполнено соотношение

$$S_1 = o(Q_N^{(2)}). \tag{16}$$

Пусть $m \in L_2$. Согласно теореме 1

$$m\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k|\nu_1 = m\} = g\left(uQ_N^{(2)}\right)(1 + o(1)). \tag{17}$$

Из (3), (5), (13) находим, что

$$\frac{n}{m}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \sim \frac{Q_N^{(2)}}{N^{2/3}} p\left(\frac{y}{2d}; \frac{3}{2}, -1\right).$$

Отсюда и из (17) следует равенство

$$S_2 = \frac{Q_N^{(2)} g\left(uQ_N^{(2)}\right)}{N^{2/3}}(1 + o(1)) \times \sum_{-A \leqslant y \leqslant A} p\left(\frac{y}{2d}; \frac{3}{2}, -1\right),$$

где суммирование по y проводится с шагом $(N-1)^{-2/3}$. Поэтому

$$S_2 = Q_N^{(2)} g\left(uQ_N^{(2)}\right)(1 + o(1)) \times \left(\int_{-A}^{A} p\left(\frac{y}{2d}; \frac{3}{2}, -1\right) dy + \delta\right),$$

величина δ сколь угодно мала при достаточно большом значении A. Учитывая, что $p\,(y/(2d); 3/2, -1)$ – плотность распределения вероятностей, получаем, что

$$S_2 = Q_N^{(2)} g\left(uQ_N^{(2)}\right)(1 + o(1)). \tag{18}$$

Пусть $m \in L_3$. Из теоремы 1 следует, что выполнено (17). Представим m в виде

$$m = n - 2N + Nf_N,$$

где f_N меняется с шагом $1/N$, $A/N^{1/3} \leqslant f_N \leqslant 1 - A/N$. Из (3), (5), (14) получаем оценку

$$\frac{n}{m}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \leqslant C_6 \frac{f_N^{1/2}\,(e(1 - f_N/2))^{-Nf_N+1}}{N^{3/2}\,(1 - f_N + 1/N)^{N - Nf_N + 3/2}}.$$

Используя это неравенство, несложно показать, что если $1 - \varepsilon \leqslant f_N \leqslant 1 - A/N$, где положительное число ε сколь угодно мало, то

$$\frac{n}{m}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \leqslant \frac{C_7}{N^{3/2}} \exp\left\{-Nf_N - Nf_N \ln\left(1 - \frac{f_N}{2}\right) - N\left(1 - f_N + \frac{3}{2N}\right)\ln\left(1 - f_N + \frac{1}{N}\right)\right\} \leqslant \frac{C_7}{N^{3/2}} e^{-C_8 N},$$

а если $A/N^{1/3} \leqslant f_N \leqslant 1 - \varepsilon$, то

$$\frac{n}{m}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \leqslant \frac{C_9 f_N^{1/2}}{N^{3/2}} \exp\{-Nf_N - Nf_N \ln(1 - f_N/2) - N(1 - f_N)\ln(1 - f_N)\} \leqslant \frac{C_9 f_N^{1/2} e^{-Nf_N^3/24}}{N^{3/2}}.$$

С помощью этих соотношений и (17) получаем, что если $v = N^{1/3} f_N$, то

$$S_3 \leqslant \frac{C_{10}}{N^{3/2}} \sum_{m=n-2N+AN^{2/3}}^{n-2N+N(1-\varepsilon)} f_N^{1/2} e^{-v^3/24} + \frac{C_{11}}{N^{3/2}} \sum_{m=n-2N+N(1-\varepsilon)}^{n-2N+N(1-A/N)} e^{-C_8 N} \leqslant \frac{C_{12}}{N}\left(\sum_{v \geqslant A} v^{1/2} e^{-v^3/24} + \sqrt{N} e^{-C_8 N}\right).$$

Поскольку величина v меняется с шагом $N^{-2/3}$, заменяя в последнем выражении суммирование интергированием, находим, что

$$S_3 \leqslant \frac{C_{13}}{N}\left(A^{-3/2} e^{-A^3/24} + \sqrt{N} e^{-C_8 N}\right),$$

где A может быть выбрано сколь угодно большим. Поэтому

$$S_3 = o(Q_N^{(2)}). \tag{19}$$

Пусть $m \in L_4$. Из теоремы 1 следует (17), а с помощью (3), (5), (15) можно показать, что

$$\frac{n}{m} \mathsf{P} \{\nu_1 = m\} \leqslant \frac{C_{14}}{T! N} \left(\frac{N-1}{2e} \right)^T \left(\frac{2}{e} \right)^{N-1}.$$

Тогда

$$S_4 \leqslant \frac{C_{15}}{N} \left(\frac{2}{e} \right)^{N-1} \sum_{T=0}^{A+1} \frac{1}{T!} \left(\frac{N-1}{2e} \right)^T \leqslant \frac{C_{15}}{N} e^{-C_{16} N}.$$

Отсюда и из (11), (16), (18), (19) следует утверждение теоремы 3.

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития».

Литература

1. *Аннаков Б. Б.* Банковский кризис и пожары в лесу. 2008. *URL : http//www.empatika.com/blog/agent_modeling_forest_fire* (дата обращения 24.04.2012).

2. *Бритиков В. Е.* Асимптотика числа лесов из некорневых деревьев // Матем. заметки. 1988. Т. 43, № 5. С. 672–684.

3. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

4. *Bertoin J.* Fires on trees // Ann Inst. Henri Poincare. 2011. ArXiV1011.2308v2 (to appear).

5. *Drossel B., Schwabl F.* Self-organized critical forest-fire model // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. P. 1629–1632.

6. *Henley C. L.* Static of self-organized percolation model // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 2741–2744.

7. *Zink R., Grimm V.* Unifying wildfire models from ecology and statistical physics // The American Naturalist. 2009. Vol. 174. E170–E185.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Павлов Юрий Леонидович
зав. лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

Хворостянская Елена Владимировна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: cher@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Khvorostyanskaya, Elena
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: cher@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 94–105

УДК 541.64:539.199

ОРИЕНТАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВЯЗЕЙ МОЛЕКУЛ ЛИПИДОВ В БИСЛОЯХ: МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

А. Л. Рабинович[1], А. П. Любарцев[2]

[1] *Институт биологии Карельского научного центра РАН*
[2] *Факультет материалов и химии окружающей среды Стокгольмского университета*

Методом молекулярной динамики проведено моделирование гомогенных гидратированных бислоев, образованных липидными молекулами фосфатидилхолинов разного строения. Изучены ориентационные свойства связей. Рассчитаны профили параметров порядка связей относительно нормали к поверхности бислоев и соответствующие плотности вероятности распределения по ориентациям связей. Показано, что изучение степени анизотропии кривых распределения по ориентациям связей дает возможность выделить в мембране, образованной молекулами липидов с ненасыщенными цепями, протяженные участки с различными типами угловых флуктуаций связей.

К л ю ч е в ы е с л о в а: метод молекулярной динамики, молекулы липидов, гидратированные бислои.

A. L. Rabinovich, A. P. Lyubartsev. BOND ORIENTATION PROPERTIES OF LIPID MOLECULES IN BILAYERS: MOLECULAR DYNAMICS SIMULATIONS

Molecular dynamics simulations of homogeneous hydrated phosphatidylcholine bilayers of different structures were carried out. Bond orientation properties were studied. Profiles of bond order parameters with respect to the bilayer normal and corresponding probability density distributions of bond orientations were calculated. We demonstrate that the study of the anisotropy degree of probability density distributions of bond orientations allows to distinguish extended regions with different types of angular fluctuations of bonds in a membrane formed by lipid molecules with unsaturated chains.

K e y w o r d s: Molecular Dynamics simulation, lipid molecules, hydrated bilayers.

Введение

Исследования различных самоорганизующихся систем в последние годы становятся все более актуальными. Интерес к ним обусловлен не только стремлением расширить и углубить знания о фундаментальных законах природы, но и использовать принцип самоорганизации, как таковой: последний положен в основу современных подходов в нанотехнологиях. Значительный прогресс отмечен в теоретических методах исследования подобных систем, – в частности, в компьютерном моделировании [1]. Важнейшим направлением работ является изучение биологических мембран, липидных бислоев и их отдельных компонентов [2]. Для понимания молекулярных основ функционирования биомембран требуется знание особенностей структуры, организации и взаимодействия множества молекул, например, липидов, белков, углеводов. Среди молекул природных липидов значительную долю составляют ненасыщенные молекулы, т. е. молекулы, углеводородные цепи которых содержат двойные связи cis.

В настоящей работе методом молекулярной динамики (МД) при температуре T = 303 К проведено моделирование совокупности гомогенных бислойных систем, образованных липидными молекулами фосфатидилхолинов, ФХ. Одна из двух углеводородных цепей молекул липидов была насыщенной (в положении sn-1), 16:0 или 18:0, вторая – ненасыщенной (в положении sn-2), 18:1(n-9)cis, 18:2(n-6)cis, 18:3(n-3)cis, 18:4(n-3)cis, 18:5(n-3)cis, 20:4(n-6)cis, 20:5(n-3)cis или 22:6(n-3)cis. В этих обозначениях число перед двоеточием означает количество атомов углерода в цепи, число после двоеточия – количество двойных связей, число в скобках – местоположение первой двойной связи, начиная от атома углерода концевой группы CH_3 (на это указывает буква n в скобках), cis – конфигурация всех двойных связей; во всех цепях они являются метиленпрерывающимися, т. е. между каждой парой расположена одна метиленовая группа.

Таким образом, липиды в бислоях различались количеством двойных связей в sn-2 цепи, длиной цепей sn-1 и sn-2. Рассмотрены все 16 возможных комбинаций цепей в липидных молекулах:

16:0/18:1(n-9)cis ФХ, 16:0/18:2(n-6)cis ФХ,
16:0/18:3(n-3)cis ФХ, 16:0/18:4(n-3)cis ФХ,
16:0/18:5(n-3)cis ФХ, 16:0/20:4(n-6)cis ФХ,
16:0/20:5(n-3)cis ФХ, 16:0/22:6(n-3)cis ФХ,
18:0/18:1(n-9)cis ФХ, 18:0/18:2(n-6)cis ФХ,
18:0/18:3(n-3)cis ФХ, 18:0/18:4(n-3)cis ФХ,
18:0/18:5(n-3)cis ФХ, 18:0/20:4(n-6)cis ФХ,
18:0/20:5(n-3)cis ФХ, 18:0/22:6(n-3)cis ФХ.

Избранная для моделирования температура (T = 303 К), согласно имеющимся экспериментальным данным [3], отвечает жидкокристаллическому состоянию бислоев. Данные, полученные для такой совокупности, позволяют изучить характер изменения свойств молекул при постепенном изменении их строения.

В настоящей работе изучены характеристики упорядочения связей $C-C$ и $C-H$ в обеих углеводородных цепях молекул липидов, рассчитаны профили параметров порядка связей относительно нормали к поверхности бислоев и соответствующие плотности вероятности распределения по ориентациям связей.

Показано, что в отличие от параметра порядка, кривая распределения, изображающая плотность распределения по ориентациям связи, позволяет описать физическую картину упорядочения данной связи. Физическая картина упорядочения связей всей цепи в липидной молекуле описывается совокупностью кривых распределения по ориентациям векторов-связей этой цепи. Оказалось, что изучение степени анизотропии кривых распределения по ориентациям связей дает возможность выделить в мембране, образованной молекулами липидов с ненасыщенными цепями, протяженные участки с различными типами угловых флуктуаций связей.

Модель и метод расчета

Для каждого из бислоев ФХ была задана расчетная ячейка в виде прямоугольного параллелепипеда с периодическими по X, Y и Z граничными условиями. Ячейка содержала 128 молекул ФХ (по 64 на монослой) и 3840 молекул воды (по 30 на молекулу ФХ). Исходными конфигурациями для бислоев ФХ являлись кристаллоподобные структуры. Все атомы системы заданы строго в соответствии с реальным химическим строением молекул, в том числе атомы водорода, и рассматривались как взаимодействующие материальные частицы. Длина МД-траекторий каждого из бислоев составляла 100 нс. Начальные 20 нс считали релаксационными участками, расчет средних характеристик осуществляли по траекториям 80 нс. Запись конфигураций осуществляли с интервалом 1 пс, количество точек усреднения для каждого бислоя было равно 80000.

При расчете энергии в МД-ячейке учтены энергия валентных связей и валентных углов, торсионная энергия, энергия неплоских отклонений атомов, примыкающих к двойным связям $C = C$ и $C = O$, энергия Юри-Брэдли, энергия невалентных взаимодействий, электростатическая энергия в рамках метода суммирования по Эвальду. Вид потенциальных функций и параметризация отвечали силовому полю CHARMM27, в которое были введены поправки согласно [4]. МД-моделирование осуществлено на основе пакета программ MdynaMix v.5.2 с использованием техники параллельных вычислений на многопроцессорных системах. В настоящей работе приведены результаты только для бислоя 18:0/22:6(n-3)cis ФХ.

Результаты и обсуждение

Параметры порядка

Параметр порядка S связи ($C-C$ или $C-H$) – это характеристика, традиционно изучаемая для молекул и/или их фрагментов в различных жидкокристаллических системах. Параметр порядка вычисляется по формуле $S = (1/2) \cdot (3 \cdot < cos^2\beta > -1)$. Здесь скобки $<,>$ означают усреднение по связям ($C-C$ или $C-H$) с данным номером во всех молекулах ФХ расчетной МД ячейки и по всем конфигурациям МД траектории, β – угол между вектором данной связи и нормалью (осью Z). Очевидно, что максимальное значение параметра порядка $S_{max} = 1$, минимальное S_{min} = -1/2.

На рис. 1, 2 представлены совокупности (профили) параметра порядка S_{CC} и $-S_{CH}$ для цепей 18:0 и 22:6(n-3)cis бислоя 18:0/22:6(n-3)cis ФХ. Номера атомов углерода в каждой цепи отсчитаны от атома C группы $C = O$ (атом C №1) последовательно вдоль по цепи до концевой группы CH_3, а номера $C-H$-связей отвечают номерам соответствующих атомов C. Связи $C-C$ пронумерованы вдоль по цепи, № 1 отвечает $C-C$ связи между атомом C группы $C = O$ и атомом C группы CH_2.

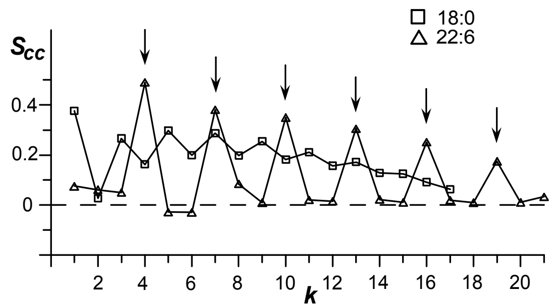

Рис. 1. Профили параметров порядка S_{CC} цепей в гидратированном бислое 18:0/22:6 ФХ относительно нормали к поверхности бислоя. Связь $k = 1$ – это связь $C-C$ между атомами углерода группы $C = O$ и CH_2 углеводородной цепи. Стрелки – положения двойных связей cis

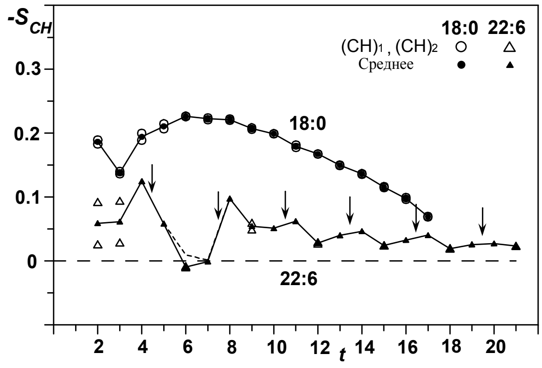

Рис. 2. Профили параметров порядка $-S_{CH}$ цепей в гидратированном бислое 18:0/22:6 ФХ относительно нормали к поверхности бислоя. Номер $t = 1$ отвечает атому углерода в группе $C = O$. Стрелки указывают местоположения двойных связей cis

На основании данных рис. 1 можно сделать вывод о том, что основной эффект, который вызывает замена в насыщенной углеводородной цепи нескольких простых связей $C-C$ на метиленпрерывающиеся двойные $C = C$ связи cis, состоит в резком уменьшении значений параметров порядка тех простых связей $C-C$, которые являются непосредственными соседями двойных, и в возрастании величины параметров порядка двойных связей по сравнению с таковыми для связей соответствующей насыщенной цепи. Профили параметров порядка S_{CC} связей $C-C$ полиненасыщенной цепи имеют характерный «пилообразный» вид, в отличие от «зигзагообразных» профилей параметров порядка S_{CC} насыщенной цепи. Значения S_{CC} максимумов этого пилооубразного профиля, т. е. значения S_{CC} всех двойных связей, монотонно уменьшаются по мере перемещения по связям $C-C$ цепи от группы $C = O$ к свободному концу цепи (к середине бислоя). Эти результаты расчетов параметров S_{CC}, полученные по данным полноатомного компьютерного моделирования, представляют значительный интерес, поскольку экспериментальными методами величины S_{CC} измерить не удается. Хотя значения S_{CC} можно вычислить из экспериментально измеренных значений величин $|S_{CH}|$ связей $C-H$ (точнее, $|S_{CD}|$ дейтерированных цепей), но, как правило, для этого приходится допустить, что взаимные направления связей $C-H$ и $C-C$ образуют между собой определенные фиксированные углы, что является лишь приближением.

Согласно данным рис. 2, замена нескольких простых связей $C-C$ в насыщенной цепи на cis двойные связи $C = C$ приводит также к уменьшению абсолютных значений параметров $|S_{CH}|$ связей $C-H$ на всем участке, содержащем двойные связи, т. е. к возникновению «провалов» на профиле $-S_{CH}$ во фрагментах $HC=CH$. Провалы появляются из-за того, что параметры S_{CH} двух связей $C-H$ во фрагментах $HC=CH$ неодинаковы.

Как оказалось, выводы, аналогичные вышеприведенным, следуют из анализа профилей параметра порядка S_{CC} и $-S_{CH}$ насыщенных и ненасыщенных цепей и во всех остальных бислоях, исследованных в настоящей работе.

Несмотря на то, что параметры порядка S традиционно вычисляют в подавляющем большинстве работ по исследованию липидных мембран, эти характеристики, как можно видеть по рис. 1 и 2, не дают, к сожалению, полной информации об упорядочении связей, поскольку являются характеристиками интегральными. Другими словами, по величине S в общем случае (т. е. если $S\neq 1$, $S\neq -1/2$) невозможно установить физическую картину упорядочения данной связи ($C-C$ или $C-H$), – нельзя получить информацию о том, какова вероятность образования разных углов между связью и нормалью Z к поверхности бислоя, существует ли преимущественная ориентация связи относительно Z; по данным рис. 1, 2 можно лишь выдвигать некоторые предположения.

Плотности распределения по ориентациям

Усреднение параметра порядка связи и других характеристик, связанных с ориентациями данной связи во всех молекулах липидов данного монослоя, производится по ее углам β, образуемым с осью Z, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, и по углам φ поворота в плоскости, перпендикулярной оси Z, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, поскольку молекулы липидов совершают вокруг этого направления флуктуации (поворотные колебания) и/или вращения. Физическая картина упорядочения вектора любой связи наиболее полно описывается плотностью вероятности его ориентаций (кривой распределения), а физическая картина упорядочения связей всей цепи, – совокупностью кривых распределения по ориентациям векторов-связей этой цепи.

Для корректного расчета кривых распределения по ориентациям следует задать направление нормали Z, которое считается положительным, и соответствующие направления векторов-связей. Положительным направлением Z для каждого монослоя принято направление от его поверхности (от границы вода – головные группы молекул липидов) внутрь бислоя. Направления векторов связей $C-H$: от атома C к атому H; векторов связей $C-C$: от атома C № 1 (группы $C=O$) к атому C № 2 (группы CH_2) и далее вдоль по цепи.

Плотность распределения $\rho(\beta)$ вектора связи по ориентации относительно Z, – это плотность вероятности обнаружить конец вектора в окрестности $d\beta$ вокруг угла β при любых φ. Поэтому $\rho(\beta)\cdot d\beta$ – вероятность реализации области $d\beta$ – это отношение количества тех случаев, когда вектор ориентирован под углами в интервале от β до $\beta+d\beta$, к общему количеству возможных ориентаций.

Предположим, что ориентации данного вектора в пространстве распределены равномерно (изотропно), т. е. в любой участок шара единичной площади конец вектора попадает одинаковое количество раз; плотность такого распределения обозначим $\rho_{iso}(\beta)$. Тогда вероятность $\rho_{iso}(\beta)\cdot d\beta$ равна отношению площади шарового пояса при угле β шириной $d\beta$ к площади шара. Элемент площади в сферических координатах есть $sin\beta\cdot d\beta\cdot d\varphi$, и

$$\rho_{iso}(\beta)\cdot d\beta=\frac{sin\beta\cdot d\beta\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi}sin\beta\cdot d\beta\cdot\int\limits_0^{\pi}d\varphi}$$

$$=(1/2)\cdot sin\beta\cdot d\beta \qquad (1)$$

Итак, если ориентации вектора распределены изотропно, то $\rho_{iso}(\beta)/sin\beta=Const.$

Поскольку среднее значение $<A>$ любой величины $A(\beta)$ есть $<A>=\int\limits_0^{\pi}A(\beta)\cdot\rho(\beta)\cdot d\beta$, то для параметра порядка связи имеем

$$<S>=(1/2)\cdot\int\limits_0^{\pi}(3\cdot cos^2\beta-1)\cdot\rho(\beta)\cdot d\beta.$$

Отметим, что для любого a в диапазоне -1/2 $<a<1$ среднее значение параметра порядка $<S>=a$ может быть получено при разных плотностях распределения вектора $\rho(\beta)$. В частности, это справедливо и для $a=0$. Например, если распределение вектора связи по ориентациям в пространстве изотропно, т. е. полностью разупорядочено, то параметр порядка вектора оказывается равным нулю:

$$<S>=(1/4)\cdot\int\limits_0^{\pi}(3\cdot cos^2\beta-1)\cdot sin\beta\cdot d\beta=0.$$

Если, наоборот, вектор связи строго упорядочен, но вдоль такого направления β_0 («магический» угол), что $(1/2)\cdot(3\cdot cos^2\beta_0-1)=0$, то и в этом случае параметр порядка $<S>=0$.

Это направление отвечает углу $\beta_0 = 54,75°$ или 180° - $54,75° = 125,25°$.

Но если для данного вектора $< S >= 0$, это не означает, что либо распределение по его ориентациям изотропно, либо он ориентирован под магическим углом к оси: возможны и другие распределения. Кривая $\rho(\beta)$ и величина <S> связаны взаимно-однозначно только в двух случаях: если <S> = -1/2, то вектор строго перпендикулярен оси Z, а если <S> = 1, то вектор строго параллелен оси Z, и наоборот.

Пусть распределение данного вектора по ориентации в пространстве не является изотропным, а энергия $U(\beta,\varphi)$ определяет для данного вектора вероятность реализации области углов $d\beta$ вокруг угла β и $d\varphi$ вокруг угла φ. Тогда в каноническом ансамбле

$$\rho(\beta)\cdot d\beta = \frac{sin\beta \cdot d\beta \cdot \int\limits_0^{2\pi} exp[-U(\beta,\varphi)/k_BT]d\varphi}{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} exp[-U(\beta,\varphi)/k_BT]\cdot sin\beta\cdot d\beta\cdot d\varphi}. \quad (2)$$

Здесь T – температура, k_B – постоянная Больцмана.

В настоящей работе энергию молекулярной системы вычисляли на каждом шаге в процессе МД-моделирования. Усреднение всех искомых величин проводили по 80000 записанных конфигураций. Для каждого вектора-связи липидной молекулы во всех бислоях было изучено отношение $\rho(\beta)/sin\beta$, т. е. мера отклонения плотности распределения $\rho(\beta)$ по ориентациям вектора от таковой в том случае, если бы распределение было изотропным. При моделировании бислоев методом МД вычисление $\rho(\beta)$ производили численно. Иными словами, вычисляли гистограмму: функцию, приближающую плотность вероятности распределения по ориентациям, на основе некоторой выборки из него.

Для этого диапазон $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ изменения угла β каждой связи был разделен на 60 равных интервалов i. Проводили расчет величин n_i/n_{total} (i = 1, 2, ..., 60), где n_i — количество попаданий угла β в интервал i (для данной связи в 128 молекулах расчетной ячейки, в 80000 записей МД-траектории); n_{total} — общее количество значений угла β, по которым проводится усреднение ($128 \cdot 80000 = 10240000$). В итоге вычисляли совокупности $(n_i/n_{total})/sin\beta_i$, образующие гистограммы искомых плотностей вероятности распределения по ориентациям $\rho(\beta)/sin\beta$.

На рис. 3 и 4 представлены рассчитанные гистограммы $\rho_{CC}(\beta_{CC})/sin\beta_{CC}$ для связей $C-C$, а на рис. 5 и 6 – гистограммы $\rho_{CH}(\beta_{CH})/sin\beta_{CH}$ для связей $C-H$, соответственно, цепей 18:0 и 22:6(n-3)cis бислоя 18:0/22:6(n-3)cis ФХ. Проведено масштабирование итоговых гистограмм умножением на коэффициент 100 для всех связей и всех бислоев.

Степень анизотропии

Совокупности рассчитанных гистограмм (рис. 3–6) показывают, что упорядочение векторов-связей в бислоях имеет свои особенности для связей разного типа ($C-C$, $C-H$, $C=C$), оно зависит также от местоположения данной связи в цепи. Иными словами, гистограммы различаются по форме. Это могут быть кривые с максимумом, имеющие только нисходящую ветвь; кривые с участками плато разной протяженности; кривые с восходящей и нисходящей ветвями, – как несимметричные, так и близкие к симметричным относительно угла, отвечающего положению максимума гистограммы. Такая «вариабельность» затрудняет анализ физического смысла упорядочения векторов разного типа. В настоящей работе предложен единый критерий для их сравнения, несмотря на имеющуюся разницу между ними. Все детали формы разных кривых учесть сложно, но физический смысл критерия состоит в оценке степени анизотропии ориентационного упорядочения вектора-связи. На языке кривых $\rho(\beta)/sin\beta$ – это оценка относительной разницы между максимальным и минимальным значениями плотностей вероятности ориентаций в полном диапазоне изменения угла β от 0 до 180°. Дальнейший анализ всех кривых распределения $\rho(\beta)/sin\beta$ проведен именно по степени их анизотропии. Итак, коэффициентом анизотропии D_A данной связи будем называть величину:

$$D_A = \frac{[\rho(\beta)/sin\beta]_{max} - [\rho(\beta)/sin\beta]_{min}}{[\rho(\beta)/sin\beta]_m}. \quad (3)$$

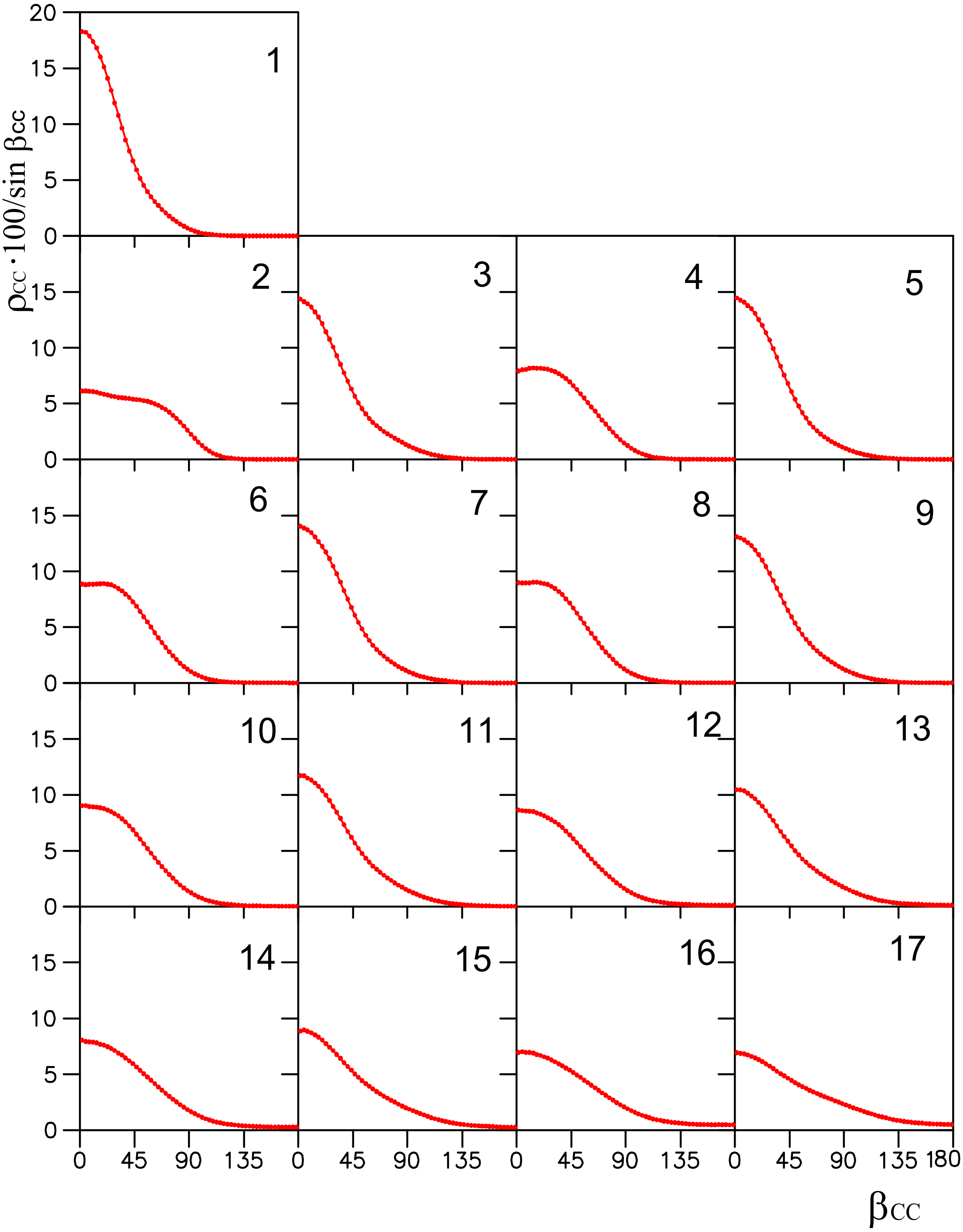

Рис. 3. Гистограммы плотностей вероятности распределения $\rho_{CC}(\beta_{CC})/sin\beta_{CC}$ по углам β_{CC}, образуемым векторами связей $C-C$ цепи 18:0 с нормалью к поверхности гидратированного бислоя 18:0/22:6(n-3)cis ФХ. Цифры 1, 2, 3, ..., 17 означают номера связей $C-C$ (номера отвечают рис. 1)

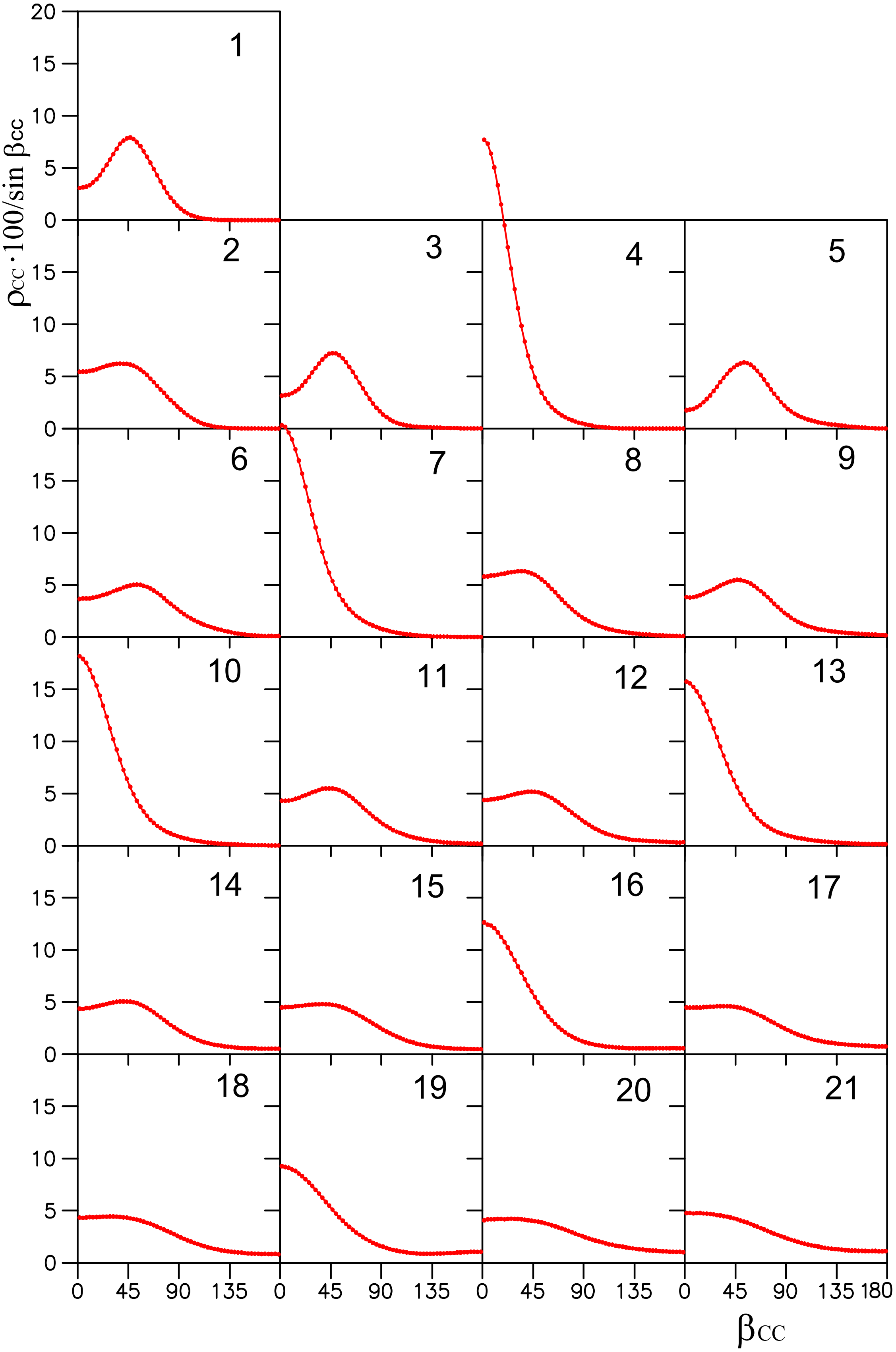

Рис. 4. Гистограммы плотностей вероятности распределения $\rho_{CC}(\beta_{CC})/sin\beta_{CC}$ по углам β_{CC}, образуемым векторами связей $C - C$ цепи 22:6(n-3)cis с нормалью к поверхности гидратированного бислоя 18:0/22:6(n-3)cis ФХ. Цифры 1, 2, 3, ..., 21 означают номера связей $C - C$ (номера отвечают рис. 1)

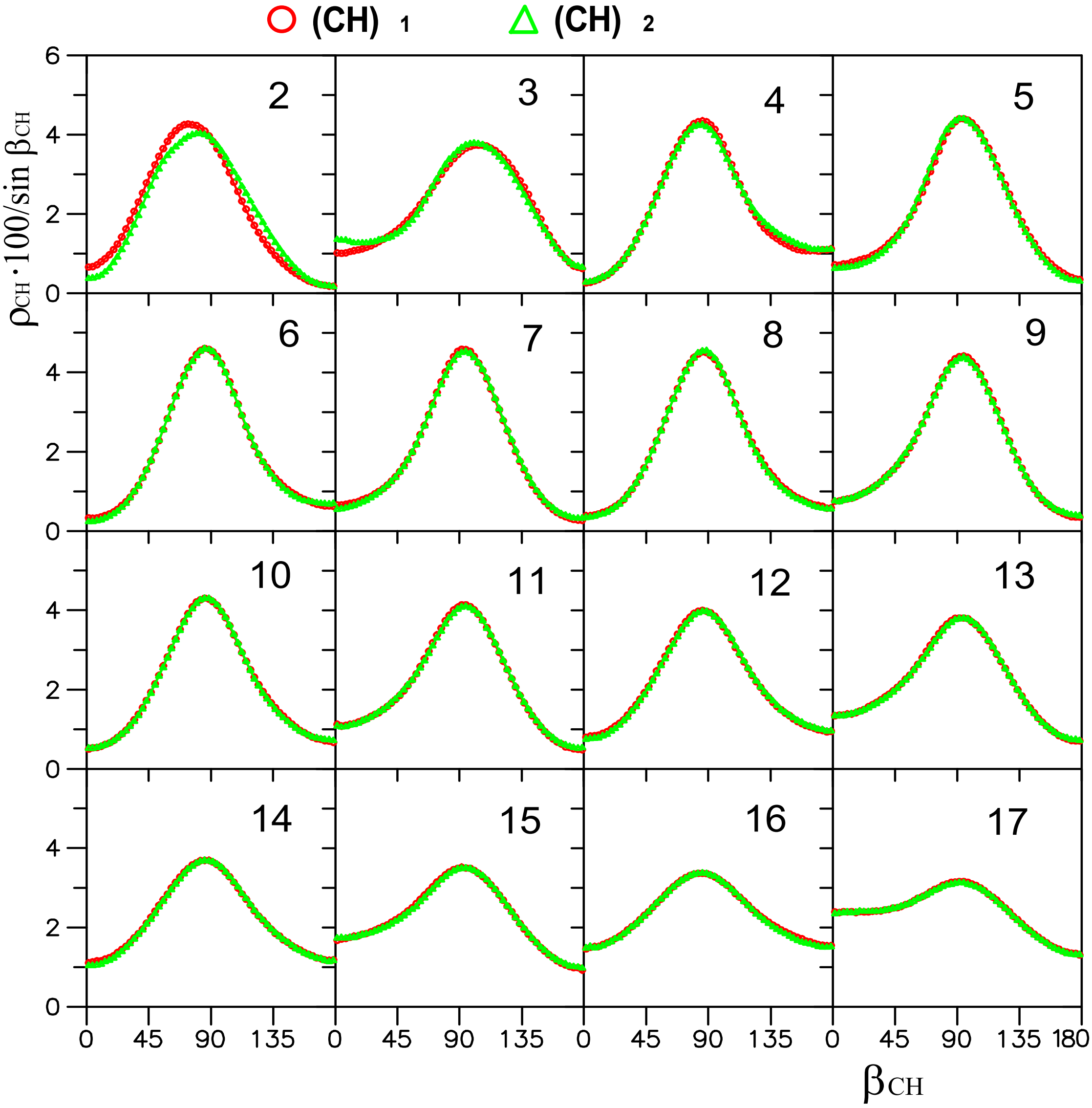

Рис. 5. Гистограммы плотностей вероятности распределения $\rho_{CH}(\beta_{CH})/sin\beta_{CH}$ по углам β_{CH}, образуемым векторами связей $C-H$ цепи 18:0 с нормалью к поверхности гидратированного бислоя 18:0/22:6(n-3)cis ФХ. Цифры 2, 3, ..., 17 означают номера атомов C (номера отвечают рис. 2). Гистограммы представлены отдельно для каждой из двух связей $C-H$ групп CH_2

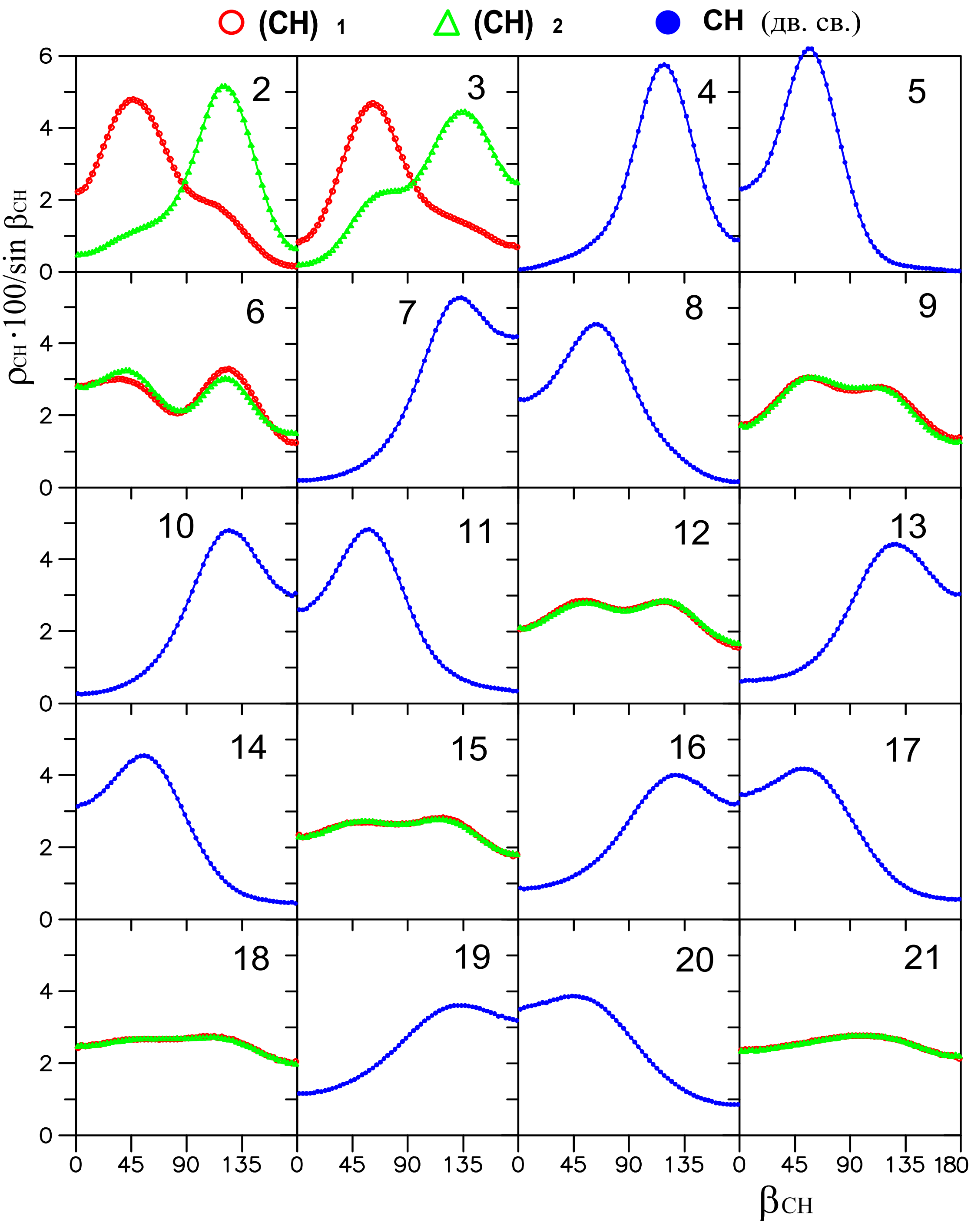

Рис. 6. Гистограммы плотностей вероятности распределения $\rho_{CH}(\beta_{CH})/sin\beta_{CH}$ по углам β_{CH}, образуемым векторами связей $C-H$ цепи 22:6(n-3)cis с нормалью к поверхности гидратированного бислоя 18:0/22:6(n-3)cis ФХ. Цифры 2, 3, ..., 21 означают номера атомов C (номера отвечают рис. 2). Для групп CH_2 гистограммы представлены отдельно для каждой из двух связей $C-H$

Здесь $[\rho(\beta)/sin\beta]_{max}$ – максимальное значение кривой $\rho(\beta)/sin\beta$ данной связи, достигнутое в диапазоне $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$; $[\rho(\beta)/sin\beta]_{min}$– минимальное значение кривой $\rho(\beta)/sin\beta$ в том же диапазоне; $[\rho(\beta)/sin\beta]_m$ – наибольшее значение из величин $[\rho(\beta)/sin\beta]_{max}$ всех связей данного типа (например, только связей $C-H$ или только $C-C$), достигнутое в обеих цепях молекул липидов бислоя.

Очевидно, что $0 \leqslant D_A \leqslant 1$. Если $D_A = 0$, то распределение по ориентациям связи является изотропным (обозначим его символом I). Далее, назовем распределение по ориентациям связи квази-изотропным (qI), если $0 < D_A \leqslant 0,25$; квази-анизотропным (qA), если $0,25 < D_A \leqslant 0,368$; анизотропным ($A$), если $0,368 < D_A \leqslant 1$. Число 0,368, фигурирующее в приведенных соотношениях, – это приближенное значение числа 1/e. Итак, кривую предлагается считать отвечающей группе квази-анизотропных распределений, если величина коэффициента D_A в e раз меньше максимально возможной величины ($D_A = 1$) в системе векторов данного типа. В тех же случаях, когда она составляет одну четверть ($D_A =$ 0,25) и менее, кривую предлагается считать отвечающей группе квази-изотропных распределений. Для анизотропных и квази-анизотропных распределений, т. е. в тех случаях, когда есть явные области предпочтительной ориентации, помимо букв (A или qA), в виде индекса будем указывать значение угла в градусах, отвечающего максимальному значению кривой (например, A_{93}).

Предложенный в настоящей работе подход позволяет проанализировать форму всех кривых, – плотностей распределения по ориентациям, пользуясь их оценкой по степени анизотропии упорядочения векторов-связей. Соотнесение этих данных со значениями параметров порядка S соответствующих связей выявляет принципиальные преимущества перехода от параметров порядка связей к плотностям распределения по их ориентациям. А именно, классификация кривых распределения по ориентациям векторов-связей позволяет представить результаты изучения упорядочения связей в липидных молекулах бислоев не в виде чисел S, а в терминах физических картин, в которых фигурируют основные особенности упорядочения этих связей; эти особенности не проявляются при использовании параметров S.

Например, на профиле S_{CC} насыщенной цепи 18:0 параметр порядка S_{CC} связи № 1 имеет большое значение (см. рис. 1). Рис. 3 свидетельствует о том, что причиной является высокая степень упорядочения связи № 1 вдоль нормали к поверхности бислоя, т. е. аксиальное упорядочение (см. рис. 3). Действительно, расчет D_A показал, что степень анизотропии этой связи A_0. Параметр порядка S_{CC} связи № 2 в этой цепи, напротив, очень мал (см. рис. 1). Как оказалось (см. рис. 3), кривая распределения № 2 имеет участок плато в диапазоне от 0 до 70°, что свидетельствует о том, что упорядочение связи в этой области близко к изотропному. Расчет D_A показал, что распределение относится к группе квази-изотропных qI. В полиненасыщенной цепи 22:6(n-3)cis двойные связи $C = C$, как показал расчет D_A, характеризуются степенью анизотропии A_0 (кривые № 4, 7, 10, 13, 16 на рис. 4, т. е. кривые для двойных связей, свидетельствуют об аксиальном упорядочении); последняя двойная связь (кривая № 19) характеризуется степенью анизотропии qA_0. Двойные связи в этой цепи чередуются с двумя простыми связями $C - C$, а степень анизотропии последних, как оказалось, относится к типу qI. Это и является физической причиной того, что на профиле S_{CC} одно большое значение чередуется с двумя маленькими, в совокупности образующие «пилообразный» профиль параметра порядка S_{CC} (см. рис. 1). Важно подчеркнуть, что информация о причине наблюдающегося «пилообразного» профиля параметра порядка S_{CC} стала доступной только при анализе кривых рис. 4.

Можно привести и другие примеры недостаточной информативности параметров порядка для описания характера упорядочения связей в цепях липидов, хотя это утверждение и было приведено в начале статьи. Даже если параметры порядка S двух связей одинаковы, физическая картина упорядочения одной связи может сильно отличаться от другой (т. е. кривые $\rho(\beta)/sin\beta$ могут быть разными по форме). Так, параметры порядка $-S_{CH}$ связей $C - H$ для атомов углерода № 6 и № 7 цепи 22:6(n-3)cis почти совпадают друг с другом (см. рис. 2), но кривые $\rho_{CH}(\beta_{CH})/sin\beta_{CH}$ связей $C - H$ углеродных атомов 6 и 7 резко различаются (см. рис. 6). А именно, кривые $\rho_{CH}(\beta_{CH})/sin\beta_{CH}$ для связей при 6-м атоме углерода свидетельствуют о том, что углы, образуемые обеими связями $C-H$ данной CH_2 группы с нормалью к поверхности бислоя, могут с соизмеримыми вероятностями принимать любые значения в диапазоне от 0 до 180°: кривые плотности распределения – это «волнообразные» функции (с двумя преимущественными областями углов). Степень анизотропии упорядочения, как показал

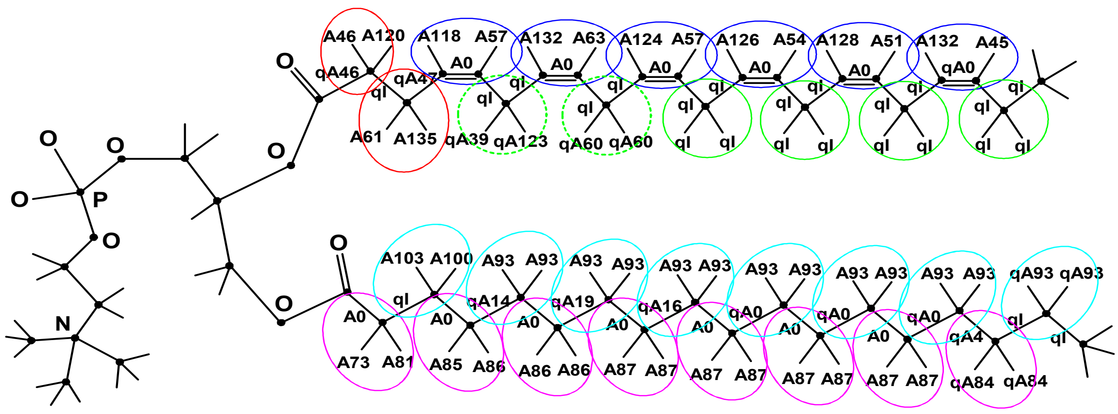

Рис. 7. Схема молекулы 18:0/22:6(n-3)cis ФХ. Символы у связей – это степени анизотропии кривых распределения по ориентациям данной связи. Линиями обведены группы связей, характеризующиеся одинаковыми или сходными степенями анизотропии

расчет коэффициента D_A, отвечает типу qA. Напротив, кривая $\rho_{CH}(\beta_{CH})/sin\beta_{CH}$ для связи $C-H$ при 7-м атоме углерода свидетельствует о разрешенных ориентациях вектора-связи $C-H$ лишь под большими углами к нормали. Эта кривая, как показывает расчет D_A, соответствует иной степени анизотропии упорядочения, A_{132}.

Аналогично, параметр порядка $-S_{CH}$ связей $C-H$ в CH_2-группе атома углерода № 15 цепи 22:6(n-3)cis равен параметру порядка $-S_{CH}$ одной из $C-H$-связей при атоме углерода № 2 (см. рис. 2). Однако кривые $\rho_{CH}(\beta_{CH})/sin\beta_{CH}$ для атомов 2 и 15 принципиально различны (см. рис. 6), и расчет D_A показал, что степени анизотропии отвечают, соответственно, группам A и qI.

Противоположный пример: даже если разница в значениях параметра порядка S двух связей велика, физическая картина упорядочения связей может оказаться одинаковой (т. е. кривые $\rho(\beta)/sin\beta$ – однотипными). Так, если судить по форме, то кривые $\rho_{CH}(\beta_{CH})/sin\beta_{CH}$ для связей $C-H$ атомов углерода № 7 и № 10 цепи 22:6(n-3)cis почти одинаковы, рис. 6 (положения максимумов кривых отличаются на несколько градусов). И расчет D_A показывает, что обе кривые свидетельствуют об одной и той же степени анизотропии упорядочения связей: A. Однако разница в значениях параметров порядка $-S_{CH}$ связей $C-H$ для атомов № 7 и № 10 в масштабе шкалы параметров порядка цепи 22:6(n-3)cis очень велика (см. рис. 2).

Результаты анализа рассчитанных кривых (см. рис. 3–6) можно в итоге представить более компактно: в виде совокупностей символов, характеризующих степень анизотропии упорядочения связей в каждой цепи. Хотя такой способ по информативности несколько уступает явному воспроизведению всех кривых, он в сжатой форме позволяет передать основные особенности упорядочения.

Так, расчеты коэффициента D_A, проведенные для всех связей $C-C$, показали, что анизотропия упорядочения связей $C-C$ в цепи 22:6(n-3)cis может быть охарактеризована следующей последовательностью:

$qA_{46}-qI-(qA_{47}-A_0-qI)-(qI-A_0-qI)-(qI-A_0-qI)-(qI-A_0-qI)-(qI-A_0-qI)-(qI-qA_0-qI)-qI$.

Скобки в этой последовательности проставлены для наглядности, – таким образом, чтобы они содержали символы для двойной связи и двух простых связей, которые примыкают к двойной с обеих сторон. Видно, что все двойные связи $C=C$, кроме последней в этой цепи, имеют анизотропное аксиальное упорядочение A_0; последняя двойная связь – квази-анизотропное аксиальное упорядочение qA_0. Между первой двойной связью $C=C$ и головной группой молекулы липида есть одна простая связь $C-C$, примыкающая к двойной, – она имеет квази-анизотропное упорядочение qA_{47}. Все остальные простые связи, являющиеся соседними с двойными связями, имеют только квази-изотропное упорядочение qI.

Расчеты коэффициента D_A для всех связей $C-H$ также позволяют указать последовательность символов для описания степени анизотропии упорядочения связей. Для связей $C-H$ цепи 22:6(n-3)cis последовательность выглядит следующим образом:

$A_{46,120}-A_{61,135}-(A_{118}=A_{57}-qA_{39,123})-(A_{132}=A_{63}-qA_{60,60})-(A_{124}=A_{57}-qIqI)-$

$(A_{126} = A_{54} - qIqI) - (A_{128} = A_{51} - qIqI) - (A_{132} = A_{45} - qIqI)$.

Скобки проставлены так, чтобы они содержали символы для степеней анизотропии двух $C - H$ связей при двойной связи и символы для двух $C - H$-связей последующей группы CH_2; символами "=" обозначены местоположения двойных связей.

Сравнение двух этих последовательностей для одной и той же цепи позволяет выявить сходства и различия в степенях анизотропии упорядочения связей $C - C$ и $C - H$, расположенных в непосредственной близости друг от друга в цепи; эта информация не могла быть выявлена при анализе лишь профилей параметра порядка. Для большей наглядности поместим совокупности степеней анизотропии ориентационного упорядочения всех связей в цепях, как $C - C$, так и $C - H$, на единой схеме, – например, на изображении структурной формулы молекулы ФХ. Для обеих цепей молекулы 18:0/22:6(n-3)cis ФХ это сделано на рис. 7. В результате оказалось, что существует сходство в характере ориентационного упорядочения связей $C - C$ и $C - H$, входящих во фрагменты одинакового химического строения, несмотря на то, что расположение фрагментов в цепи различно. На рис. 7 обведены группы связей, ориентационное упорядочение которых относится к типу qI (при приближении к полярной головной группе липида к этому типу упорядочения «подмешивается» тип qA); обведены также группы связей с типом ориентационного упорядочения A. Характер ориентационного упорядочения в указанных совокупностях групп различается. В итоге оказалось возможным выделить в каждой цепи определенного строения своеобразные «зоны» с разным характером ориентационного упорядочения. В цепи 22:6(n-3)cis связи вблизи групп CH_2, расположенных между двумя двойными связями, характеризуются квази-изотропным упорядочением qI, а связи во фрагментах с двойными связями – анизотропным A. На протяженном участке цепи сосуществуют две зоны: с анизотропным и квази-изотропным характером ориентационного упорядочения всех связей в зонах. Это свойство полиненасыщенных цепей должно играть определенную роль в биомембранах, – ее еще предстоит выявить в дальнейших исследованиях, хотя отдельные гипотезы о значении полиненасыщенных цепей ранее уже обсуждались [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-03-00201а), программы Президента РФ – Ведущие научные школы (НШ-1642.2012.4) и Swedish Institute Visby programme 00675/2009.

Литература

1. *Методы* компьютерного моделирования для исследования полимеров и биополимеров / Отв. ред. В. А. Иванов, А. Л. Рабинович, А. Р. Хохлов. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009. 696 с.

2. *Lyubartsev A. P., Rabinovich A. L.* Recent Development in Computer Simulations of Lipid Bilayers // Soft Matter. 2011. Vol. 7. P. 25–39.

3. *Koynova R., Caffrey M.* Phases and phase transitions of the phosphatidylcholines // Biochim. Biophys. Acta. 1998. Vol. 1376. P. 91–145.

4. *Högberg C.-J., Nikitin A. M., Lyubartsev A. P.* Modification of the CHARMM Force Field for DMPC Lipid Bilayer // J. Comput. Chem. 2008. Vol. 29. P. 2359–2369.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Рабинович Александр Львович
главный научный сотрудник, д. ф-м. н.
Институт биологии Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: rabinov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 571879

Rabinovich, Alexandr
Institute of Biology, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: rabinov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 571879

Любарцев Александр Павлович
профессор
Институт физической химии, факультет материалов и химии окружающей среды, Стокгольмский университет ул. Сванте Аррениуса 16C, S 106 91, Стокгольм, Швеция
эл. почта: alexander.lyubartsev@mmk.su.se
тел.: (+468) 161193

Lyubartsev, Alexandr
Division of Physical Chemistry, Department of Material and Environmental Chemistry, Stockholm University
Svante Arrhenius väg 16C, S 106 91, Stockholm, Sweden
e-mail: alexander.lyubartsev@mmk.su.se
tel.: (+468) 161193

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 106–109

УДК 519.2

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ В ОДНОЙ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПОДСТАНОВОК

М. В. Солдаткина

Московский институт электроники и математики НИУ ВШЭ

Рассматривается d-мерная параметрическая модель случайных n-подстановок, для которой при $n \to \infty$ устанавлена совместная асимптотическая нормальность чисел конгруэнтных циклов в случайной подстановке. Изучаются вопросы оценивания параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ модели по наблюдению над вектором цикловой структуры.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайные подстановки, конгруэнтные циклы, параметрическая модель, асимптотическое оценивание параметров.

M. V. Soldatkina. PARAMETER ESTIMATION FOR A RANDOM PERMUTATIONS MODEL

In the context of a d-dimensional parametric model of random n-permutations, as $n \to \infty$, we established the joint asymptotic normality of the numbers of congruent cycles in a random permutation. We study the issues of estimating the parameters $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ of the model for observation of the cycle structure vector.

K e y w o r d s: random permutations, congruent cycles, parametric model, asymptotic parameter estimation.

Введение

Тематика случайных подстановок, берущая начало с работы В. Л. Гончарова [1], весьма многопланова и продолжает постоянно расширяться. Для последнего времени характерен переход от рассмотрения равновероятных подстановок к построению более общих моделей случайных подстановок с различного рода отклонениями от равновероятности. Весьма общая параметрическая модель такого рода была введена в работах Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведева [2, 3], согласно которой произвольная подстановка s из симметрической группы S_n подстановок n-й степени наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\prod_i \theta_j^{c_i}$, где c_i – число циклов длины i в подстановке s ($i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_i ic_i = n$) и $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_n)$, $\theta. \geqslant 0$, – параметр соответствующей меры $\mathbf{P}_\theta$ на S_n .

Для практических применений представляется естественным более детально исследовать различные конкретизации этой общей модели при тех или иных ограничениях на число степеней свободы меры $\mathbf{P}_\theta$. Таким задачам были посвящены работы [5, 6], в которых предложены новые параметрические меры, подходящие для изучения цикловой структуры A-подстановок и их обобщений.

Напомним, что для заданного подмножества $A \subset X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ A-циклами подстановки $s \in S_n$ называются те ее циклы, длины которых являются элементами A. Если задано некоторое разбиение

$$X_n = \bigcup_{j=1}^{d} A_j, A_j \bigcap A_k = \varnothing, j \neq k, d \geqslant 2, \quad (1)$$

и $C_{A_j}(n) = \sum\limits_{i \in A_j} c_i$ есть число A_j-циклов подстановки s, $j = 1, \ldots, d$, то для исследования обобщенной цикловой структуры (будем говорить об $A = (A_1, ..., A_d)$-структуре) подстановки s, т. е. вектора

$$\mathbf{C}_A(n) = (C_{A_1}(n), C_{A_2}(n), \ldots C_{A_d}(n)), \quad (2)$$

на S_n вводится вероятностная мера вида

$$\mathbf{P}_{A\theta}(s) = \mathbf{I}\left(\sum_{i=1}^{n} ic_i = n\right) \prod_{j=1}^{d} \theta_j^{C_{A_j}(n)} \Big/ H_{An}(\theta), \theta = (\theta_1, \ldots \theta_d), \quad (3)$$

где $\mathbf{I}(\cdot)$ – индикатор и $H_{An}(\theta)$ – необходимый нормирующий множитель, имеющий вид:

$$H_{An}(\theta) = n![z^n] \exp\left\{\sum_{j=1}^{d} \theta_j \sum_{i \in A_j} \frac{z^i}{i}\right\}, \quad (4)$$

(здесь и далее $[z^n]f(z) = coef_{z^n} f(z)$). Как показано в работе [5], производящая функция вектора $\mathbf{C}_A(n)$ в модели (3)–(4) имеет вид:

$$\mathbf{E}_\theta \prod_{j=1}^{d} t_i^{C_{A_j}(n)}$$

$$= H_n(t \times \theta) / H_n(\theta), t \times \theta$$
$$= (t_1\theta_1, \ldots, t_d\theta_d).$$

Далее в работе [6] эта конструкция была применена для исследования чисел конгруэнтных циклов в подстановке, т. е. когда подмножества A_j имеют вид:

$$A_j = \{k : k = ld + j, l \geqslant 0\} \quad (5)$$

для некоторых целых $d \geqslant 2$ и $1 \leqslant j \leqslant d$, и был установлен следующий результат.

Теорема 1. *Если $n \to \infty$, а параметры θ_1, $\ldots$, θ_d фиксированы, то компоненты вектора (2) асимптотически независимы и асимптотически нормальны с параметрами соответственно $\left(\frac{\theta_j}{d} \ln n, \frac{\theta_j}{d} \ln n\right)$, $j = 1, \ldots, d$, при этом параметры нормальных распределений являются асимптотическими значениями соответствующих средних и дисперсий компонент A-структуры, и эта асимптотика равномерна по $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_d)$ в любой конечной области изменения параметра.*

Этот результат позволяет решать и естественные статистические задачи оценивания параметров, и проверки гипотез в рамках рассматриваемой модели – тематика, мало исследованная для случайных подстановок. Частично эти вопросы затронуты в работе [6], где предложен новый статистический критерий для проверки гипотезы о равновероятности подстановок $H_0 : \theta_1 = \ldots = \theta_d = 1$ с вычислением его мощности для близких альтернатив.

Настоящая работа является продолжением этих исследований: она посвящена вопросам оценивания параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ модели (3)–(4) по наблюдению над вектором A-структуры (2).

Асимптотическое оценивание

Возможности точного анализа в задачах оценивания для рассматриваемой модели довольно ограничены, как это констатируется в работе [4], где рассматривался случай однопараметрической модели. Именно в [4] обсуждаются вопросы оценивания и проверки гипотез о параметре θ модели Эванса, когда произвольная подстановка $s \in S_n$ наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\theta^{c_s(n)}$, где $c_s(n)$ – общее число циклов подстановки s и $\theta > 0$ – неизвестный параметр. Это частный случай нашей модели при $d = 1$ и $A_1 = X_n$. Для него в [4] показано, что несмещённые оценки существуют лишь для параметрических функций вида $\tau(\theta) = a(\theta)/\theta_{(n)}$, где $\theta_{(n)} = \theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)$ и $a(\theta)$ – многочлен степени не выше n, причём $a(0) = 0$. В частности, для самого параметра θ несмещённой оценки не существует. В [4] построены также оптимальные (несмещённые с минимальной дисперсией) оценки для таких параметрических функций, при этом базой для этого является известное точное распределение достаточной статистики $c_s(n)$. Также констатируется, что более широкие возможности в обсуждаемой проблематике предоставляет асимптотический подход, когда порядок подстановок $n \to \infty$, и для этого случая развивается соответствующая асимптотическая теория, в рамках которой конструируются асимптотически несмещенные и асимптотически эффективные оценки не только для параметра θ, но и для широкого класса функций от него, а также рассчитываются соответствующие асимптотические доверительные интервалы.

В свете сказанного, при анализе нашей модели (3)–(4) мы будем использовать асимптотический подход ($n \to \infty$), поскольку точное распределение достаточной статистики $\mathbf{C}_A(n)$ в удобной для использования форме получить весьма проблематично, в то время как её асимптотическое распределение, указанное в теореме, достаточно просто устроено.

Из приведённой теоремы следует, что если ввести нормированные статистики

$$\tilde{C}_{A_j}(n) = \frac{dC_{A_j}(n)}{\ln n}, j = 1, \ldots, d, \qquad (6)$$

то они будут асимптотически независимы и нормальны:

$$\mathcal{L}(\tilde{C}_{A_j}(n)) \sim \mathcal{N}\left(\theta_j, \frac{d\theta_j}{\ln n}\right), j = 1, \ldots, d. \qquad (7)$$

Более того, на основании теорем сходимости для функций от случайных величин [7, с. 335] можно заключить, что для любых дифференцируемых функций $\tau_j(\theta)$ имеет место аналогичное утверждение для статистики $\tau_j(\tilde{C}_{A_j}(n))$:

$$\mathcal{L}(\tau_j(\tilde{C}_{A_j}(n))) \qquad (8)$$
$$\sim \mathcal{N}\left(\tau_j(\theta_j), (\tau_j^{'}(\theta_j))^2 \frac{d\theta_j}{\ln n}\right), j = 1, \ldots, d.$$

На основании соотношений (7) и (8) можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если $n \to \infty$, то статистика $\tilde{C}_{A_j}(n)$(статистика $\tau_j(\tilde{C}_{A_j}(n))$) является асимптотически несмещенной и асимптотически эффективной оценкой для параметра θ_j(для дифференцируемой параметрической функции $\tau_j(\theta_j)$), и параметры $\theta_1, \ldots, \theta_d$ оцениваются независимо друг от друга.*

Соотношение (7) позволяет также рассчитать и асимтотический доверительный интервал для параметра θ_j. Для этого прежде всего заметим, что (на основании теорем сходимости [7]) соотношение (7) останется справедливым, если в его правой части заменить параметр θ_j, входящий в выражение дисперсии, оценкой $\tilde{C}_{A_j}(n)$. Таким образом, при $n \to \infty$ справедливо также соотношение:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\tilde{C}_{A_j}(n) - \theta_j}{\sqrt{d\tilde{C}_{A_j}(n)}}\sqrt{\ln n}\right) \sim \mathcal{N}(0, 1). \qquad (9)$$

Пусть теперь задан доверительный уровень γ, $0 < \gamma < 1$. Определим число z_γ уравнением $\Phi(z_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}$, где $\Phi(z)$ – стандартная нормальная функция распределения. Тогда из (9) следует, что

$$\mathbf{P}\left\{-z_\gamma < \frac{\tilde{C}_{A_j}(n) - \theta_j}{\sqrt{d\tilde{C}_{A_j}(n)}}\sqrt{\ln n} < z_\gamma\right\}$$
$$= \mathbf{P}\left\{\tilde{C}_{A_j}(n) - z_\gamma\sqrt{\frac{d\tilde{C}_{A_j}(n)}{\ln n}} < \theta_j\right.$$
$$\left. < \tilde{C}_{A_j}(n) + z_\gamma\sqrt{\frac{d\tilde{C}_{A_j}(n)}{\ln n}}\right\}$$
$$\sim \Phi(z_\gamma) - \Phi(-z_\gamma) = 2\Phi(z_\gamma) - 1 = \gamma.$$

Это означает, что справедливо

Утверждение 2. *Асимптотический $\gamma-$доверительный интервал для параметра θ_j имеет вид:*

$$\left(\tilde{C}_{A_j}(n) \mp z_\gamma\sqrt{d\tilde{C}_{A_j}/\ln n}\right).$$

Аналогично, на основании соотношения (8) строится асимптотический доверительный интервал для функции $\tau_j(\theta_j)$. Однако, чтобы получить в этом случае аналог соотношения (9) (с подстановкой в выражение диспресии статистики $\tilde{C}_{A_j}(n)$ вместо неизвестного параметра θ_j), необходимо дополнительно потребовать, чтобы производная $\tau_j^{'}(\theta_j)$ была непрерывна [7]. При выполнении этого условия искомый γ-доверительный интервал асимтотически имеет вид:

$$\left(\tau_j(\tilde{C}_{A_j}(n)) \mp z_\gamma \acute{\tau}_j(\tilde{C}_{A_j}(n))\sqrt{d\tilde{C}_{A_j}(n)/\ln n}\right).$$

В частности, для функции $\tau_j(\theta_j) = \sqrt{\theta_j}$ соответствующий интервал особенно прост:

$$\left(\sqrt{\tilde{C}_{A_j}(n)} \mp \frac{z_\gamma}{2}\sqrt{\frac{d}{\ln n}}\right).$$

Многовыборочный случай

Пусть в модели (3)–(4) наблюдается $N \geqslant 2$ независимых подстановок при одном и том же (но неизвестном) значении параметра $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_d)$, и $\mathbf{C}_A^{(i)}(n) = (C_{A_1}^{(i)}(n), C_{A_2}^{(i)}(n), \ldots C_{A_d}^{(i)}(n))$ есть реализация

A-структуры (2) для i-й подстановки, $i = 1, \ldots, N$.

Введём статистику:

$$\mathbf{T}(N,n) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{C}_A^{(i)}(n)$$

$$= (T_1(N,n), \ldots, T_d(N.n)).$$

В условиях теоремы компоненты этого вектора будут асимптотически независимы и асимптотически нормальны $\mathcal{N}\left(\frac{\theta_j}{d}\ln n, \frac{\theta_j}{dN}\ln n\right)$, $j = 1, \ldots, d$. Нормированные же статистики $\tilde{T}_j(N,n) = dT_j(N,n)/\ln n$ будут асимптотически нормальны $\mathcal{N}\left(\theta_j, \frac{d\theta_j}{N\ln n}\right)$.

Следовательно, $\tilde{T}_j(N,n)$ – асимптотически несмещенная оценка для θ_j с асимптотической дисперсией, в N раз меньшей, чем у оценки $\tilde{C}_{A_j}(n)$ в одновыборочном случае. Таким образом, при таком объединении информации точность оценивания возрастает.

Также более узкими оказываются и соответствующие доверительные интервалы (точность локализации для неизвестных параметров возрастает): асимптотический γ – доверительный интервал для θ_j, основанный на статистике $\tilde{T}_j(N,n)$, имеет вид:

$$(\tilde{T}_j(N,n) \mp z_\gamma\sqrt{d\tilde{T}_j(N,n)/(N\ln n)}).$$

Литература

1. *Гончаров В. Л.* Из области комбинаторики. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1944. Т. 8, № 1. С. 3–48.

2. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Случайные комбинаторные объекты // Доклады РАН. 2004. Т. 396, № 2. С. 151–154.

3. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Случайные подстановки: общая параметрическая модель // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 4. С. 105–112.

4. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Статистика параметрической модели случайных подстановок // Тр. по дискр. матем. 2004. Т. 8. С. 116−127.

5. *Ивченко Г. И., Соболева М. В.* Некоторые неравновероятные модели случайных подстановок // Дискрет. матем. 2011. Т. 23, № 3. С. 23−31.

6. *Соболева М. В.* Асимптотическая нормальность чисел конгруэнтных циклов в случайных подстановках // Дискрет. матем. 2012. Т. 24, № 1. С. 123−131.

7. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. С. 548.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Солдаткина Мария Васильевна
аспирантка
Московский институт электроники и математики
НИУ ВШЭ
Б. Трехсвятительский пер., д. 3, Москва, Россия, 109028
эл. почта: manyasha.soboleva@ya.ru
тел.: 8(495) 916 88 29

Soldatkina, Mariya
Moscow State Institute of Electronics and Mathematics
National research university 'Higher school of economics'
3 Bol. Trekhsvjatitel'skij per.,109028, Moscow, Russia
e-mail: manyasha.soboleva@ya.ru
tel.: 8(495) 916 88 29

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 110–121

УДК 519.2

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИНТЕРНЕТ-ГРАФОВ

И. А. Чеплюкова

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассматривается множество случайных графов, содержащих N вершин. Степени вершин независимы и одинаково распределены по дискретному степенному закону с положительным показателем τ. Получены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при условии, что сумма степеней вершин равна n, в случае когда $n, N \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty$ при $\tau > 2$ и $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty$ при $\tau = 2$, где $\zeta(\tau)$ – дзета-функция Римана.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайные графы, предельные распределения, обобщенная схема размещений, степень вершины.

I. A. Cheplyukova. ON LIMIT DISTRIBUTIONS OF SOME NUMBERED CHARACTERISTICS OF INTERNET GRAPHS

Random Internet graphs consisting of N vertices are considered. The degrees of the vertices are drawn independently from a discrete power—law distribution with exponent $\tau > 0$. We obtain the limit distributions of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree under the conditions that the sum of vertex degrees is equal to n as $n, N \to \infty$ such that $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty$, $\tau > 2$ and $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty$, $\tau = 2$ where $\zeta(\tau)$ is the Riemann's zeta-function.

K e y w o r d s: random graphs, limit theorems, generalized allocation scheme, vertex degrees.

В настоящее время существует много работ (см., например, [6, 13–15] и др.), в которых рассматривается известный вид случайного графа, предназначенный для моделирования сложных сетей телекоммуникаций. Предполагается, что граф содержит N вершин, занумерованных числами от 1 до N. Будем считать, что степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\eta_1, \ldots, \eta_N$, распределение которых имеет вид:

$$\mathbf{P}\{\eta_i \geqslant k\} = k^{-\tau}, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Для удобства описания структуры графа в [15] введено понятие полуребра, т. е. ребра, инцидентного конкретной вершине, но для которой смежная вершина еще не определена. Все полуребра графа являются различными (занумерованными) и при образовании ребер соединяются между собой равновероятно. Кроме того, необходимо, чтобы суммарное число полуребер было четным, поэтому вводится вспомогательная вершина 0, степень которой равна 0 или 1 в зависимости от того, является ли число полуребер основных вершин четным или нет.

Во многих работах (см., например, [6–15]) изучалось асимптотическое поведение различных характеристик случайных графов

Интернет-типа при $N \to \infty$. В частности, в [6] доказана локальная предельная теорема для суммы степеней вершин $\nu_N = \eta_1 + \ldots + \eta_N$ при $\tau \in (1, 2)$. Понятно, что от ν_N зависит поведение многих других характеристик графа, поэтому в такой ситуации представляется естественным предложить метод исследования, состоящий в предварительном получении предельных распределений для случайных графов с известным числом степеней вершин и последующим их усреднением по распределению ν_N. Для изучения случайных графов с известным числом степеней можно воспользоваться обобщенной схемой размещения частиц по ячейкам, введенной и исследованной в книгах В. Ф. Колчина [2, 3]. Впервые использование обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам с целью исследования асимптотического поведения Интернет-графов было предложено в [7, 11].

В настоящей работе рассматривается подмножество Интернет-графов, для которых сумма степеней вершин известна и равна n. Расположим степени вершин в виде вариационного ряда $\eta_{(1)} \leqslant \eta_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \eta_{(N)}$. Обозначим через $\eta_{(N)}$ и μ_r случайные величины, равные максимальной степени вершин и числу вершин степени r соответственно.

В [7] было найдено предельное распределение $\eta_{(N)}$ и μ_r при $N, n \to \infty$ и $\tau > 0$, так что $1 < n/N < \zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ – значение дзета-функции Римана в точке τ. Там же рассмотрены случаи $n/N \downarrow 1$ и $n/N \uparrow \zeta(\tau)$. В работе [8] получены предельные теоремы для рассматриваемых случайных величин в случае $n/N \to \zeta(\tau)$ при выполнении следующих условий:

1. $\tau > 2, n - \zeta(\tau)N = O(\sqrt{N})$;
2. $\tau = 2, n - \zeta(2)N = O(\sqrt{N \ln N})$;
3. $1 < \tau < 2, n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$.

В [9, 10] рассматриваются случаи, когда $n/(N \ln N) \geqslant C > 0$ при $\tau = 1$, $n/N^{1/\tau} \geqslant C > 0$ при $0 < \tau < 1$ и $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$ при $1 < \tau < 2$. Неисследованными остались случаи, когда $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty$ при $\tau > 2$ и когда $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty$ при $\tau = 2$. Целью настоящей работы является получение предельных распределений случайных величин $\eta_{(N)}$ и μ_r в этих случаях.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty, \tau > 2$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{n - \zeta(\tau)N - \eta_{(N)}}{\sqrt{N}} \leqslant z\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx.$$

Теорема 2. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty, \tau > 2$. Тогда для целых неотрицательных k справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $r \to \infty$, то*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!}(Np_r)^k \exp\{-Np_r\}(1 + o(1))$$

равномерно относительно $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом фиксированном конечном интервале;

2. *Если $r-$ фиксированно, то*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{e^{-u_r^2/2}(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi N p_r(1 - p_r)}}$$

равномерно относительно $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1 - p_r)}$ в любом фиксированном конечном интервале.

Теорема 3. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(2)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty, \tau = 2$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{n - \zeta(2)N - \eta_{(N)}}{\sqrt{N \ln N}} \leqslant z\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx.$$

Теорема 4. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(2)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty, \tau = 2$. Тогда справедливы утверждения теоремы 2.*

В основе доказательства теорем 1–4 лежит обобщенная схема размещения частиц по ячейкам. Ниже приводятся вспомогательные леммы (леммы 1–7), с помощью которых доказываются данные теоремы.

Из (1) ясно, что

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_1 = k\} = k^{-\tau} - (k + 1)^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, распределение которых имеет вид (2). Легко видеть, что для натуральных чисел $k_1, \ldots, k_N$ таких, что $k_1 + \ldots + k_N = n$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \tag{3}$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}.$$

Соотношение (3) означает, что для двух наборов случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ и $\xi_1, \ldots, \xi_N$ выполнены условия обобщенной схемы размещения.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_N^{(j)}, j = 1, 2$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(1)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leqslant r\}, \tag{4}$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(2)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \neq r\}.$$

Обозначим

$$\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}, \tag{5}$$
$$\zeta_N^{(j)} = \xi_1^{(j)} + \ldots + \xi_N^{(j)}, \quad j = 1, 2.$$

Доказательства теорем 1–4 опираются на следующую хорошо известную лемму (см., например, [3]), вытекающую из соотношения (3).

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(1)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} =$$
$$\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-r} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(2)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Рассмотрим предельное поведение суммы ζ_N.

Лемма 2. *При выполнении условий Теоремы 1 справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{N\tau(1 + o(1))}{(n - \zeta(\tau)N)^{\tau+1}}.$$

Доказательство. Утверждение этой леммы в случае, когда $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} \geqslant (\ln N)/2$, следует из теоремы 3 статьи [5]. Докажем справедливость леммы 2 в случае, когда

$$(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} < \ln\sqrt{N}.$$

Обозначим

$$\xi_i^{'} = \xi_i - \zeta(\tau), \qquad i = 1, \ldots, N \tag{6}$$
$$\zeta_N^{'} = \xi_1^{'} + \ldots + \xi_N^{'}.$$

Представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$ в виде следующей суммы

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \mathbf{P}\{\zeta_N^{'} = n - \zeta(\tau)N\} = \tag{7}$$
$$P_1 + NP_2 + P_3,$$

где

$$P_1 = \mathbf{P}\{\zeta_N^{'} = n - \zeta(\tau)N,$$
$$\xi_i^{'} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N), i = 1, \ldots, N\};$$
$$P_2 = \mathbf{P}\{\zeta_N^{'} = n - \zeta(\tau)N, \xi_N^{'} > \gamma(n - \zeta(\tau)N),$$
$$\xi_i^{'} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N), i = 1, \ldots, N-1\};$$
$$P_3 = \mathbf{P}\{\zeta_N^{'} = n - \zeta(\tau)N,$$
$$\bigcup_{i \neq j}\{\xi_i^{'} > \gamma(n - \zeta(\tau)N), \xi_j^{'} > \gamma(n - \zeta(\tau)N)\},$$

$$\gamma = \left(\frac{\sqrt{N}}{n - \zeta(\tau)N}\right)^{1/(\tau+1)}. \tag{8}$$

Покажем, что основной вклад в сумму (7) дает второе слагаемое. Рассмотрим вероятность P_2. Очевидно, что

$$P_2 = \sum_{M_1} \mathbf{P}\{\xi_N^{'} = n - \zeta(\tau) - k\} \times \tag{9}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{'} + \ldots + \xi_{N-1}^{'} = k - \zeta(\tau)(N-1),$$
$$\xi_i^{'} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N), i = 1, \ldots, N-1\},$$

где $M_1 = \{k : N - 1 \leqslant k < (n - \zeta(\tau)N) - \gamma(n - \zeta(\tau)N)\}$.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_i^{'}(u), i = 1, \ldots, N$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{'}(u) = k - \zeta(\tau)\} = \tag{10}$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1^{'} = k - \zeta(\tau) | \xi_1^{'} \leqslant u\}.$$

Кроме того, пусть $\zeta_N^{'}(u) = \xi_1^{'}(u) + \ldots + \xi_N^{'}(u)$.

Используя соотношение (2), легко показать, что при $l \to \infty$ справедливо

$$\sum_{k>l} p_k = l^{-\tau}(1 + o(1)). \tag{11}$$

Тогда отсюда и из (8)–(10) несложно видеть, что

$$P_2 = (1 + o(1)) \sum_{M_1} \mathbf{P}\{\xi_N^{'} = n - \zeta(\tau) - k\} \times \tag{12}$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(\tau)N)) = k - \zeta(\tau)(N-1)\}.$$

Обозначим через $\varphi_{\gamma(n-\zeta(\tau)N)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины

$\xi_1'(\gamma(n-\zeta(\tau)N))$. Тогда, используя (6) и (8), получаем, что при любом фиксированном t справедливо равенство

$$\varphi^N_{\gamma(n-\zeta(\tau)N)}\left(t/(\sigma\sqrt{N})\right) = \exp\left\{-\frac{i\zeta(\tau)Nt}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)(1+o(1)), \quad (13)$$

где $\varphi(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины ξ_1, а

$$\sigma^2 = 2\zeta(\tau-1) - \zeta(\tau) - \zeta^2(\tau).$$

Учитывая, что случайная величина ξ_1 имеет конечную дисперсию, согласно теоремам 2.6.2 и 2.2.2 [1], функция распределения случайной величины ξ_1 принадлежит области притяжения нормального закона и логарифм ее характеристической функции имеет вид:

$$i\zeta(\tau)t - \frac{t^2\sigma^2}{2}(1+o(1)).$$

Отсюда и из (13) получаем, что

$$\varphi^N_{\gamma(n-\zeta(\tau))}\left(t/(\sigma\sqrt{N})\right) = \exp\left\{-t^2/2\right\}(1+o(1)). \quad (14)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\zeta'_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) \leqslant y\sqrt{N}\sigma\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}dx. \quad (15)$$

Покажем, что при достаточно больших N и n

$$\mathbf{P}\{\gamma\zeta'_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \sqrt{N}\} \leqslant C_1\gamma^2. \quad (16)$$

Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ обозначают некоторые положительные постоянные.

Учитывая (8) и (10), и то, что $\gamma(n-\zeta(\tau)N)/\gamma^{-1}\sqrt{N} \to \infty$, получаем следующее неравенство:

$$\mathbf{P}\{\zeta'_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\} \leqslant (N-1)\mathbf{P}\{\xi_1'(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\} + \left(\frac{\mathbf{P}\{\xi_1' \leqslant \gamma^{-1}\sqrt{N}\}}{\mathbf{P}\{\xi_1' \leqslant (\gamma(n-\zeta(\tau)N))\}}\right)^{N-1} \times \mathbf{P}\{\zeta'_{N-1}(\gamma^{-1}\sqrt{N}) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\}. \quad (17)$$

Используя (11), несложно показать, что

$$(N-1)\mathbf{P}\{\xi_1'(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\} \leqslant C_2N^{1-\tau/2}\gamma^\tau, \quad (18)$$

и, применяя неравенство Чебышева, из соотношений (10) и (11), легко получить, что

$$\mathbf{P}\{\zeta'_{N-1}(\gamma^{-1}\sqrt{N}) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\} \leqslant C_3\gamma^2. \quad (19)$$

Тогда из (11), (17)–(19) следует справедливость (16).

Представим вероятность P_2 в виде суммы

$$P_2 = \sum_{i=1}^{4} R_i, \quad (20)$$

где

$$R_i = (1+o(1))\sum_{K_i}\mathbf{P}\{\xi_N' = n-\zeta(\tau)-k\}\times \mathbf{P}\{\zeta'_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) = k-\zeta(\tau)(N-1)\},$$

$$K_1 = \{k : (N-1) \leqslant k \leqslant -\sqrt{N}/\gamma+\zeta(\tau)(N-1)\},$$

$$K_2 = \{k : -\sqrt{N}/\gamma+\zeta(\tau)(N-1) < k \leqslant \sqrt{N}/\gamma+\zeta(\tau)(N-1)\},$$

$$K_3 = \{k : \sqrt{N}/\gamma+\zeta(\tau)(N-1) < k \leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/(\tau+1)}(n-\zeta(\tau)N)\},$$

$$K_4 = \{k : n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/(\tau+1)}(n-\zeta(\tau)N) < k \leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma(n-\zeta(\tau)N)\}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}\{\xi_N' = n-\zeta(\tau)-k\} = \mathbf{P}\{\xi_N = (n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau)N-k\}.$$

Отсюда и из (2) нетрудно получить, учитывая соотношение $\gamma^{-1}\sqrt{N}/(n-\zeta(\tau)N) \to 0$, что при $k \in K_2$ справедливо

$$\mathbf{P}\{\xi_N' = n-\zeta(\tau)-k\} = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}(1+o(1)). \quad (21)$$

Следовательно, из (15), (20) и (21) находим, что

$$R_2 = \frac{\tau(1+o(1))}{(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}}. \quad (22)$$

Покажем, что при всех остальных значениях $i = 1, 3, 4$ для R_i справедливы оценки вида:

$$R_i = o((n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}). \quad (23)$$

Из (2), (6) и (8) очевидно, что при $k \in K_1$

$$\mathbf{P}\{\xi_N' = n-\zeta(\tau)-k\} \leqslant C_4(n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}.$$

Отсюда и из (15), (16) и (20) следует, что при $i = 1$ соотношение (23) выполнено.

Из (2), (8), (16) и (20) находим, что $R_3 = o((n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1})$.

Пусть $k \in K_4$. Из (2) и (20) следует, что

$$R_4 \leqslant \mathbf{P}\{\zeta'_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))) > (n-\zeta(\tau)N)(1-\gamma^{1/(\tau+1)}\} \frac{C_5}{(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{\tau+1}}.$$

Отсюда и из (2), (8), (10), используя неравенство Чебышева, получаем, что при $i = 4$ соотношение (23) верно.

Следовательно, из (20), (22) и (23) справедливо

$$P_2 = \frac{\tau(1+o(1))}{(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}}. \qquad (24)$$

Учитывая, что

$$N\gamma^{-2\tau-1}/(n-\zeta(\tau)N)^{\tau} \to 0, \qquad (25)$$

из соотношений (2), (7), (8) и (11), нетрудно получить, что

$$P_3 \leqslant \frac{C_6 N^2 \gamma^{-2\tau-1}}{(n-\zeta(\tau)N)^{2\tau+1}} = o((n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}). \qquad (26)$$

Рассмотрим P_1. Легко видеть, что

$$P_1 \leqslant \mathbf{P}\{\zeta'_N = n-\zeta(\tau)N, \quad \xi'_i \leqslant \alpha(n-\zeta(\tau)N), i = 1,\ldots,N\}, \qquad (27)$$

где $0 < \alpha < 1-2/\tau$.

Положим

$$s = \tau\frac{\ln(n-\zeta(\tau)N)}{(n-\zeta(\tau)N)}, \qquad (28)$$

$$f(s) = \sum_{v<\alpha(n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau)} e^{s(v-\zeta(\tau))} \times \mathbf{P}\{\xi'_1 = n-\zeta(\tau)\}. \qquad (29)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1(s),\ldots,\eta_N(s)$, имеющие распределение вида

$$\mathbf{P}\{\eta_i(s) < u+\zeta(\tau)\} = \sum_{v<u+\zeta(\tau)} e^{s(v-\zeta(\tau))} \frac{\mathbf{P}\{\xi'_i = v-\zeta(\tau)\}}{f(s)}. \qquad (30)$$

Пусть $\varsigma_N(s) = \eta_1(s)+\ldots+\eta_N(s)$. Используя тождество (11) работы [4], получаем, что

$$P_1 \leqslant f^N(s)e^{s(n-\zeta(\tau)N)} \times \mathbf{P}\{\varsigma_N(s) \geqslant n-\zeta(\tau)N\}, \qquad (31)$$

Используя представление $f(s)$ в виде суммы:

$$f(s) = \sum_{D_1} e^{s(v-\zeta(\tau))}\mathbf{P}\{\xi'_1 = n-\zeta(\tau)\} + \sum_{D_2} e^{s(v-\zeta(\tau))}\mathbf{P}\{\xi'_1 = n-\zeta(\tau)\},$$

где

$$D_1 = \{v : s(v-\zeta(\tau)) \leqslant 1\},$$

$$D_2 = \{v : v < \alpha(n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau), \quad s(v-\zeta(\tau)) > 1\},$$

несложно показать, что

$$f(s) = 1 + O((n-\zeta(\tau)N)^{\tau(\alpha-1)}), \quad \mathbf{M}\eta_i(s) \leqslant C_7, \quad \mathbf{M}\eta_i^2(s) \leqslant C_8. \qquad (32)$$

Отсюда и из (28), (31), используя неравенство Чебышева, можно получить, что

$$P_1 = o\left(N(n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}\right). \qquad (33)$$

Из соотношений (7), (24), (26) и (33) следует справедливость утверждения леммы 2. $\square$

Рассмротим предельное поведение сумм $\zeta_N^{(j)}, j = 1,2$.

Лемма 3. *Пусть $N,n \to \infty, \tau > 2$ так, что $(n-\zeta(\tau)N)/\sqrt{N} \to \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $r = n-\zeta(\tau)N - z\sqrt{N}$, где z – фиксированное число, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(1)} = n\} = \frac{N\tau(1+o(1))}{\sqrt{2\pi}(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}} \int_z^\infty e^{-x^2/2}dx.$$

2. *Если $r \to \infty, S = N(1-p_r+o(p_r))$, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(2)} = n\} = \frac{N\tau(1+o(1))}{(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}}.$$

Доказательство. Будем доказывать оба утверждения этой леммы одновременно. Для этого обозначим рассматриваемые суммы через $\tilde{\zeta}_S^{(j)}$, где $S = N$ при $j = 1$, а при $j = 2$ значение S определено в утверждении леммы. Рассмотрим независимые одиниково распределенные случайные величины $\tilde{\xi}_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} - \zeta(\tau), \quad j = 1,2, \quad i = 1,\ldots,S$ и их суммы $\tilde{\zeta}_S^{(j)} = \tilde{\xi}_1^{(j)} + \ldots + \tilde{\xi}_S^{(j)}$. Тогда вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(j)} = n\}, j = 1, 2$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(j)} = n\} = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S\} = P_1^{(j)} + SP_2^{(j)} + P_3^{(j)}, \qquad (34)$$

где

$$P_1^{(j)} = \mathbf{P}\{\zeta_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S, \tilde{\xi}_i^{(j)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)S), i = 1, \ldots, S\};$$
$$P_2^{(j)} = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S, \tilde{\xi}_S^{(j)} > \gamma(n - \zeta(\tau)S), \tilde{\xi}_i^{(j)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)S), i = 1, \ldots, S-1\};$$
$$P_3^{(j)} = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S, \bigcup_{i \neq k}\{\tilde{\xi}_i^{(j)} > \gamma(n - \zeta(\tau)S), \tilde{\xi}_k^{(j)} > \gamma(n - \zeta(\tau)S)\},$$

а γ определено соотношением (8) с заменой N на S.

Основной вклад в сумму (34) дает второе слагаемое.

Очевидно, что

$$P_2^{(j)} = \sum_{M_j} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau) - k\} \times \qquad (35)$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(j)} + \ldots + \tilde{\xi}_{S-1}^{(j)} = k - \zeta(\tau)(S-1), \tilde{\xi}_i^{(j)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)S), i = 1, \ldots, S-1\},$$

где $M_j = \{k : (n - \zeta(\tau)) - a_j \leqslant k < (n - \zeta(\tau)) - \gamma(n - \zeta(\tau)S)\}, a_1 = r, a_2 = n - \zeta(\tau)$.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\tilde{\xi}_i^{(j)}(u), \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, S$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(j)}(u) = k - \zeta(\tau)\} = \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(j)} = k - \zeta(\tau) | \tilde{\xi}_i^{(j)} \leqslant u\}. \qquad (36)$$

Обозначим $\tilde{\zeta}_S^{(j)}(u) = \tilde{\xi}_1^{(j)}(u) + \ldots + \tilde{\xi}_S^{(j)}(u)$.

Учитывая, что $r = n - \zeta(\tau)N - z\sqrt{N}$, из (2) и (8) следует, что

$$(1 - P_r) = 1 + O(N^{-1}), \qquad (37)$$
$$1 - \frac{1}{(\gamma(n - \zeta(\tau)N))^\tau} = 1 + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Тогда из (4), (5), (11), (35) и (37) находим, что

$$P_2^{(j)} = (1 + o(1)) \sum_{M_j} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_N^{(j)} = n - \zeta(\tau) - k\} \times \qquad (38)$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S)) = k - \zeta(\tau)(S-1)\}.$$

Обозначим через $\tilde{\varphi}_{(j)}(t), j = 1, 2$, характеристические функции случайных величин $\tilde{\xi}_1^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S))$. Тогда для характеристических функций случайных величин $\tilde{\zeta}_S^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S))$ при $t \to 0$ из (8), (11), (36) и (37) следует, что

$$\varphi_{\tilde{\zeta}_S^{(j)}(\gamma(n-\zeta(\tau)S))} = \tilde{\varphi}_{(j)}^S(t) = \exp\{-i\zeta(\tau)St\}\,\varphi^S(t)(1 + o(1)).$$

Отсюда, аналогично тому как получено соотношение (14) при доказательстве леммы 2, несложно показать, что

$$\tilde{\varphi}_{(j)}^S\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{S}}\right) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}(1 + o(1)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S)) \leqslant y\sqrt{S}\sigma\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} dx. \qquad (39)$$

Следуя проверке справедливости соотношения (16), можно показать, что

$$\mathbf{P}\{\gamma\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S)) > \sqrt{S}\} \leqslant C_9\gamma^2. \qquad (40)$$

Представим вероятность P_2 в виде суммы

$$P_2^{(j)} = \sum_{i=0}^{3} R_i^{(j)}, \quad j = 1, 2, \qquad (41)$$

где

$$R_i^{(j)} = (1 + o(1)) \sum_{K_i^{(j)}} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau) - k\} \times \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S)) = k - \zeta(\tau)(S-1)\},$$

$$K_0^{(1)} = \oslash,$$
$$K_0^{(2)} = \{k : 0 \leqslant k \leqslant -\sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1)\},$$
$$K_1^{(1)} = \{k : n - r \leqslant k \leqslant \sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1)\},$$
$$K_1^{(2)} = \{k : -\sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1) \leqslant k \leqslant \sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1)\},$$
$$K_2^{(j)} = \{k : \sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1) < k \leqslant n - \zeta(\tau) - \gamma^{1/(\tau+1)}(n - \zeta(\tau)S)\},$$
$$K_3^{(j)} = \{k : n - \zeta(\tau) - \gamma^{1/(\tau+1)}(n - \zeta(\tau)S) < k \leqslant n - \zeta(\tau) - \gamma(n - \zeta(\tau)S)\}.$$

Используя соотношения (2), (4) и (37), несложно заметить, что при $k \in K_1^{(j)}$, $j = 1, 2$, справедливо

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau) - k\} = \tau(n - \zeta(\tau)S)^{-\tau-1}(1 + o(1)).$$

Тогда из (39) и (41) находим, что

$$R_1^{(1)} = \frac{\tau(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi}(n - \zeta(\tau)N)^{\tau+1}} \int\limits_z^\infty e^{-x^2/2} dx, \tag{42}$$

$$R_1^{(2)} = \frac{\tau(1 + o(1))}{(n - \zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Из соотношений (2), (4), (8), (37) и (40) несложно показать, что

$$R_2^{(j)} = o((n - \zeta(\tau)S)^{-\tau-1}), \quad j = 1, 2. \tag{43}$$

Пусть $k \in K_3^{(j)}$. Из (2), (4) и (37) нетрудно найти, что

$$R_3^{(j)} \leqslant \frac{C_{10}}{\gamma(n - \zeta(\tau)S)^{\tau+1}} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S)) > (n - \zeta(\tau)S)(1 - \gamma^{1/(\tau+1)})\}.$$

Используя неравенство Чебышева, отсюда и из (2), (4), (8), (36), (37) получаем, что

$$R_3^{(j)} = o((n - \zeta(\tau)S)^{-\tau-1}). \tag{44}$$

Следовательно, из (42)–(44) справедливо

$$P_2^{(1)} = \frac{\tau(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi}(n - \zeta(\tau)N)^{\tau+1}} \int\limits_z^\infty e^{-x^2/2} dx, \tag{45}$$

$$P_2^{(2)} = \frac{\tau(1 + o(1))}{(n - \zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Рассмотрим вероятность $P_3^{(j)}, j = 1, 2$. Из (2), (4), (11), (25), (34), (37) следует, что при $k < n - 2\zeta(\tau) - 2\gamma(n - \zeta(\tau)S)$

$$P_3^{(j)} \leqslant C_{11} S^2 \sum_k \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(j)} + \tilde{\xi}_{S-2}^{(j)} = k - \zeta(\tau)(S - 2)\}(\gamma(n - \zeta(\tau)S))^{-\tau-1} \times \tag{46}$$
$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} > \gamma(n - \zeta(\tau)S)\} = o\left(\frac{S}{(n - \zeta(\tau)S)^{\tau+1}}\right).$$

Рассмотрим $P_1^{(j)}$, $j = 1, 2$. Легко видеть, что

$$P_1^{(j)} \leqslant \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S, \xi_i^{(j)} \leqslant \alpha(n - \zeta(\tau)S), i = 1, \ldots, S\},$$

где $0 < \alpha < 1 - 2/\tau$.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(j)}(s), \ldots, \eta_N^{(j)}(s), j = 1, 2$, имеющие распределение вида:

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(j)}(s) < u + \zeta(\tau)\} = \sum_{v < u + \zeta(\tau)} e^{s(v - \zeta(\tau))} \frac{\mathbf{P}\{\xi_i^{(j)} = v - \zeta(\tau)\}}{f^{(j)}(s)}, \tag{47}$$

где

$$f^{(j)}(s) = \sum_{v < \alpha(n - \zeta(\tau)S) + \zeta(\tau)} e^{s(v - \zeta(\tau))} \times \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(j)} = n - \zeta(\tau)\}, \tag{48}$$

а величина s определена соотношением (28) при $N = S$. Пусть $\varsigma_S(s) = \eta_1^{(j)}(s) + \ldots + \eta_S^{(j)}(s)$. Используя тождество (11) работы [4], получаем, что

$$P_1^{(j)} \leqslant (f^{(j)}(s))^S e^{-s(n - \zeta(\tau)S)} \times \mathbf{P}\{\varsigma_S(s) \geqslant n - \zeta(\tau)S\}. \tag{49}$$

Используя (2), (29), (37), (48), нетрудно показать, что

$$f^{(j)}(s) = (1 + o(1))f(s),$$

тогда отсюда и из (4), (32) и (47) находим, что

$$f^{(j)}(s) \leqslant C_{12}, \quad \mathbf{M}\eta_i^{(j)}(s) \leqslant C_{13}, \quad \mathbf{M}(\eta_i^{(j)}(s))^2 \leqslant C_{14}. \tag{50}$$

Применяя неравенство Чебышева, из (28), (49) и (50) получаем, что

$$P_1^{(j)} = o\left(S(n - \zeta(\tau)S)^{-\tau-1}\right), j = 1, 2. \tag{51}$$

Утверждение леммы 3 следует из (34), (45), (46) и (51).

□

Рассмотрим предельное поведение суммы ζ_N при $\tau = 2$.

Лемма 4. *При выполнении условий Теоремы 3 справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{2N(1 + o(1))}{(n - \zeta(2)N)^3}.$$

Доказательство. Рассмотрим случайные величины $\xi_i^{'}, i = 1, \dots, N$, и сумму $\zeta_N^{'}$, определенные соотношениями (6) при $\tau = 2$.

Тогда вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$ можно представить в виде суммы (7), где $\tau = 2$ и

$$\gamma = \left(\sqrt{N \ln N}/(n - \zeta(2)N)\right)^{1/3}. \tag{52}$$

Следуя доказательству леммы 2, несложно показать, что выполено сооношение (12) при заданных τ и γ.

Кроме того, для характеристической функции случайной величины $\xi_1^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N))$, заданной соотношением (10) при $\tau = 2$, справедливо

$$\varphi^N_{\gamma(n-\zeta(2)N)}\left(\frac{t}{\sqrt{N \ln N}}\right) = \exp\left\{-\frac{i\zeta(2)Nt}{\sqrt{N \ln N}}\right\} \varphi^N\left(\frac{t}{\sqrt{N \ln N}}\right)(1 + o(1)), \tag{53}$$

где $\varphi(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины ξ_1.

Согласно теореме 2.6.2 и 2.2.1 [1], функция распределения случайной величины ξ_1 принадлежит области притяжения нормального закона, и логарифм ее характеристической функции имеет вид

$$i\zeta(2)t - (\ln N)t^2/2.$$

Отсюда и из (53) получаем, что

$$\varphi^N_{\gamma(n-\zeta(2)N)}\left(t/\sqrt{N \ln N}\right) = \exp\left\{-t^2/2\right\}(1 + o(1)). \tag{54}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) \leqslant y\sqrt{N \ln N}\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} dx. \tag{55}$$

Покажем, что при достаточно больших N и n справедливо

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \frac{\sqrt{N \ln N}}{\gamma}\right\} \leqslant C_{15}\gamma^2(C_{16} - \ln\gamma/\ln N). \tag{56}$$

Учитывая, что для рассматриваемой вероятности справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\} \leqslant (N-1)\mathbf{P}\{\xi_1^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\} + \left(\frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{'} \leqslant \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\}}{\mathbf{P}\{\xi_1^{'} \leqslant (\gamma(n - \zeta(2)N))\}}\right)^{N-1} \times \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\}, \tag{57}$$

аналогично тому, как получено соотношение (18), несложно показать, что

$$(N-1)\mathbf{P}\{\xi_1^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\} \leqslant C_{17}\gamma^2/\ln N. \tag{58}$$

Используя тот факт, что при $l \to \infty$

$$\sum_{k \leqslant l} p_k k^2 \leqslant 2 \ln l,$$

и, применяя неравенство Чебышева, получаем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\} \leqslant C_{18}\gamma^2(C_{19} - \ln\gamma/\ln N). \tag{59}$$

Тогда справедливость неравенства (56) следует из соотношений (57), (58) и (59).

Представим вероятность P_2 в виде суммы

$$P_2 = \sum_{i=1}^{4} R_i, \tag{60}$$

где

$$R_i = (1 + o(1)) \sum_{K_i} \mathbf{P}\{\xi_N^{'} = n - \zeta(2) - k\} \times \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) = k - \zeta(2)(N-1)\},$$

$$K_1 = \{k : (N-1) \leqslant k \leqslant -b + \zeta(2)(N-1)\},$$

b принимает два значения в зависимости от того, как ведет себя отношение n/N : если $n/N \to \infty$, то $b = N^{4/6}$; если $n/N \nrightarrow \infty$, то $b = \sqrt{N \ln N}/\gamma$;

$$K_2 = \{k : -b + \zeta(2)(N-1) < k \leqslant b + \zeta(2)(N-1)\};$$

$$K_3 = \{k : \sqrt{N}/\gamma + \zeta(\tau)(N-1) < k \leqslant$$

$$n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/(\tau+1)}(n-\zeta(\tau)N)\};$$

$$K_4=\{k:n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/(\tau+1)}(n-\zeta(\tau)N)<k\leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma(n-\zeta(\tau)N)\}.$$

Несложно заметить, что при $k\in K_2$ справедливо соотношение (21) при $\tau=2$. Тогда отсюда и из (55), (60) находим, что

$$R_2=\frac{2(1+o(1))}{(n-\zeta(2)N)^3}. \qquad (61)$$

Используя (56), (60), аналогично тому, как получено соотношение (23) при доказательстве леммы 2, можно показать, что

$$R_i=o((n-\zeta(2)N)^{-3}),\ i=1,3,4, \qquad (62)$$

следовательно, из (60)–(62) справедливо равенство

$$P_2=\frac{2(1+o(1))}{(n-\zeta(2)N)^3}. \qquad (63)$$

Аналогично оценки (26) несложно получить следующее соотношение:

$$P_3=o((n-\zeta(2)N)^{-3}). \qquad (64)$$

Рассмотрим P_1. Обозначим

$$x=(n-\zeta(2)N)/\sqrt{N\ln N}.$$

Пусть $x\geqslant(8\ln\ln N)^3$. Положим

$$R(w)=\sum_{k\leqslant\gamma(n-\zeta(2)N)+\zeta(2)}\exp\{(k-\zeta(2))w\}\times$$

$$\mathbf{P}\{\xi'=k-\zeta(2)\}. \qquad (65)$$

Используя (2), можно показать, что при достаточно больших l справедлива оценка

$$\sum_{k>l}(k-\zeta(2))p_r\leqslant C_{20}l^{-1}. \qquad (66)$$

Учитывая, что при $0<y\leqslant 1$ справедливо равенство $e^y=1+y+\delta(y)$, где $\delta(y)\leqslant y^2$, из (2), (65) и (66) получаем, что

$$R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}\right)=1+o\left(N^{-1}\right). \qquad (67)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1'(\gamma),\ldots,\xi_N'(\gamma)$, имеющие распределение вида:

$$\mathbf{P}\{\xi_1'(\gamma)=k-\zeta(2)\}=\frac{\mathbf{P}\{\xi_1'=k-\zeta(2)\}\exp\{\frac{k-\zeta(2)}{\gamma(n-\zeta(2)N)}\}}{R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}\right)},$$

где $k\leqslant\gamma(n-\zeta(2)N)+\zeta(2)$. Положим $\zeta_N'(\gamma)=\xi_1'(\gamma)+\ldots+\xi_N'(\gamma)$. Тогда P_1 имеет следующее представление:

$$P_1=e^{-1/\gamma}R^N\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}\right)\times \mathbf{P}\left\{\zeta_N'(\gamma)=n-\zeta(2)N\right\}. \qquad (68)$$

Обозначим через $\psi_\gamma(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_1'(\gamma)$. Тогда, используя (65), получаем, что

$$|\psi_\gamma(t)|=\left|\frac{R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}+it\right)}{R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}\right)}\right|. \qquad (69)$$

По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N'(\gamma)=n-\zeta(2)N\}=\frac{1}{2\pi\sqrt{N\ln N}}\times\int_{-\pi\sqrt{N\ln N}}^{\pi\sqrt{N\ln N}}\exp\left\{-\frac{it(n-\zeta(2)N)}{\sqrt{N\ln N}}\right\}\times\left[\psi_\gamma\left(\frac{t}{\sqrt{N\ln N}}\right)\right]^N dt. \qquad (70)$$

Из (65) и (66) нетрудно найти, что

$$\left|R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}+it\right)\right|=|\varphi(t)|+o(1/N).$$

Тогда из (67) и (69) следует, что

$$|\psi_\gamma(t)|^N\leqslant C_{21}\left|\varphi(t)\right|.$$

Разобьем интеграл из равенства (70) на два интеграла: по области $|t|\leqslant\varepsilon\sqrt{N\ln N}$ и по области $\varepsilon\sqrt{N\ln N}<|t|\leqslant\pi\sqrt{N\ln N}$, где ε достаточно мало. По свойству характеристических функций решетчатых распределений с максимальным шагом 1, при $\varepsilon<|t|\leqslant\pi$ выполнено неравенство $|\varphi(t)|\leqslant\exp\{-C_{22}\}$, а учитывая, что $\varphi(t)=1+(e^{it}+1)\Phi(e^{it},\tau,1)$, где $\Phi(z,s,a)$ – трансцендентная функция Лерча, находим, что при достаточно малом ε для $|t|\leqslant\varepsilon$ справедливо $|\varphi(t)|\leqslant\exp\{-C_{23}t^2\}$. Тогда из (70) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N'(\gamma)=n-\zeta(2)N\}\leqslant C_{24}(\sqrt{N\ln N})^{-1}.$$

Отсюда и из (67), (68), учитывая, что $x\geqslant(8\ln\ln N)^3$, находим оценку для P_1:

$$P_1=o(N(n-\zeta(2)N)^{-3}). \qquad (71)$$

Рассмотрим P_1 в случае, когда $x < (8\ln\ln N)^3$. Заметим, что

$$P_1 \leqslant \mathbf{P}\{\zeta_N \geqslant n, \xi_i \leqslant \gamma(n-\zeta(2)N)+ \zeta(2), i=1,\ldots,N\}. \quad (72)$$

Кроме того, используя (2), нетрудно показать, что справедлива следующая оценка:

$$\mathbf{M}(\xi_1^2, \xi_1 \leqslant \gamma(n-\zeta(2)N)+\zeta(2)) \leqslant C_{25}\ln(\gamma(n-\zeta(2)N)+\zeta(2)). \quad (73)$$

Используя неравенство Чебышева и то, что $x < (8\ln\ln N)^3$, из (72), (73) находим, что и в этом случае равенство (71) верно.

Тогда утверждение леммы 4 следует из (7), (63), (64), (71). □

Рассмотрим предельное поведение сумм $\zeta_N^{(j)}, j=1,2$.

Лемма 5. *Пусть $\tau=2, N, n\to\infty$ так, что $(n-\zeta(2)N)/\sqrt{N\ln N}\to\infty$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $r = n-\zeta(2)N - z\sqrt{N\ln N}$, где z – фиксированное число, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(1)}=n\} = \frac{\sqrt{2}N(1+o(1))}{\sqrt{\pi}(n-\zeta(2)N)^3}\int\limits_z^\infty e^{-x^2/2}dx.$$

2. *Если $r\to\infty, S=N(1-p_r+o(p_r))$, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(2)}=n\} = \frac{2N(1+o(1))}{(n-\zeta(2)N)^3}.$$

Доказательство. Аналогично предыдущему случаю будем доказывать оба утверждения этой леммы одновременно. Для этого обозначим рассматриваемые суммы через $\tilde\zeta_S^{(j)}$, где $S=N$ при $j=1$, а при $j=2$ значение S определено в утверждении леммы 5.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\tilde\xi_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} - \zeta(2), j=1,2, i=1,\ldots,S$, и их суммы $\tilde\zeta_S^{(j)} = \tilde\xi_1^{(j)}+\ldots+\tilde\xi_S^{(j)}$. Тогда вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(j)}=n\}, j=1,2$ можно представить в виде соотношения (34) при $\tau=2$, где γ определено соотношением (52).

Очевидно, что выполнено соотношение (35) при $\tau=2$.

Учитывая, что $r=n-\zeta(2)N-z\sqrt{N\ln N}$, из (2) и (52) следует справедливость соотношений (37). Тогда из (4), (5), (11) и (35) находим, что

$$P_2^{(j)} = (1+o(1))\sum_{M_j}\mathbf{P}\{\tilde\xi_N^{(j)} = n-\zeta(2)-k\}\times \quad (74)$$
$$\mathbf{P}\{\tilde\zeta_{S-1}^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S)) = k-\zeta(2)(S-1)\},$$

где $\tilde\zeta_S^{(j)}(u) = \tilde\xi_1^{(j)}(u)+\ldots+\tilde\xi_S^{(j)}(u)$, а случайные величины $\tilde\xi_i^{(j)}(u), j=1,2, i=1,\ldots,S$, заданы соотношениями (36) при $\tau=2$.

Обозначим через $\tilde\varphi_{(j)}(t), j=1,2$, характеристические функции случайных величин $\tilde\xi_1^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S))$ соответственно. Тогда для характеристических функций случайных величин $\tilde\zeta_S^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S))$ при $t\to0$ из (11), (36), (37) и (52) следует, что

$$\varphi_{\tilde\zeta_S^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S))} = \tilde\varphi_{(j)}^S(t) = \exp\{-i\zeta(2)St\}\,\varphi^S(t)(1+o(1)).$$

Отсюда, аналогично тому как получено соотношение (54) при доказательстве леммы 4, несложно показать, что

$$\tilde\varphi_{(j)}^S\left(\frac{t}{\sqrt{S\ln S}}\right) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}(1+o(1)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\tilde\zeta_{S-1}^{(j)}(\gamma(n-\zeta(\tau)S)) \leqslant y\sqrt{S\ln S}\} \to \quad (75)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}dx.$$

Следуя выводу неравенства (56) при доказательстве леммы 4, можно показать, что при достаточно больших N и n справедливо

$$\mathbf{P}\left\{\tilde\zeta_{S-1}^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S)) > \frac{\sqrt{S\ln S}}{\gamma}\right\} \leqslant C_{25}\gamma^2\left(C_{26}-\ln\gamma/\ln N\right). \quad (76)$$

Представим вероятность P_2 в виде суммы (41), где

$$R_i^{(j)} = (1+o(1))\sum_{K_i^{(j)}}\mathbf{P}\{\tilde\xi_S^{(j)} = n-\zeta(2)-k\}\times \quad (77)$$
$$\mathbf{P}\{\tilde\zeta_{S-1}^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S)) = k-\zeta(2)(S-1)\},$$

$K_0^{(1)} = \varnothing$,

$K_0^{(2)} = \{k : 0\leqslant k \leqslant -\frac{\sqrt{S\ln S}}{\gamma}+\zeta(2)(S-1)\}$,

$$K_1^{(1)} = \{k : n-r \leqslant k \leqslant \frac{\sqrt{S \ln S}}{\gamma} + \zeta(2)(S-1)\},$$

$$K_1^{(2)} = \{k : -\frac{\sqrt{S \ln S}}{\gamma} + \zeta(2)(S-1) \leqslant k \leqslant \sqrt{S \ln S}/\gamma + \zeta(2)(S-1)\},$$

$$K_2^{(j)} = \{k : \sqrt{S \ln S}/\gamma + \zeta(2)(S-1) < k \leqslant n - \zeta(2) - \gamma^{1/3}(n - \zeta(2)S)\},$$

$$K_3^{(j)} = \{k : n - \zeta(2) - \gamma^{1/3}(n - \zeta(2)S) < k \leqslant n - \zeta(2) - \gamma(n - \zeta(2)S)\}.$$

Используя соотношение (35), (41), (74)–(77) и действуя аналогично тому, как получены равенства (45) и (46) при доказательстве леммы 3, можно показать, что

$$P_2^{(1)} = \frac{2(1+o(1))}{\sqrt{2\pi}(n - \zeta(2)N)^3} \int\limits_z^{\infty} e^{-x^2/2} dx,$$

$$P_2^{(2)} = \frac{2(1+o(1))}{((n - \zeta(2)S)^3}. \tag{78}$$

$$P_3^{(j)} = o\left(S(n - \zeta(2)S)^{-3}\right), j = 1, 2.$$

Оценка $P_1^{(j)}, j = 1, 2$ проводится аналогично оценки P_1 при доказательстве леммы 4, согласно которой

$$P_1^{(j)} = o\left(S(n - \zeta(2)S)^{-3}\right).$$

Тогда утверждения леммы 5 следуют из (34) и (78). □

Лемма 6. *Пусть $N, n \to \infty, \tau > 2$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} \to \infty, S = N(1 - p_r + o(p_r))$. Тогда при фиксированных r справедливо*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(2)} = n\} = \frac{N\tau(1+o(1))}{(n - \zeta(\tau)N)^{\tau+1}}.$$

Доказательство. Утверждение этой леммы в случае, когда $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} \geqslant \ln \sqrt{N}$, следует из теоремы 3 статьи [5]. Доказательство леммы 6 в случае, когда $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} < \sqrt{N}$, аналогично доказательству второй части леммы 3. Поэтому вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(2)} = n\}$ можно представить в виде (34), где основной вклад в сумму дает второе слагаемое.

Несложно проверить, что для $P_2^{(2)}$ выполняется равенство (38). Используя теоремы 2.6.2 и 2.2.2 [1], и учитывая, что

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi(t) - e^{itr} p_r}{1 - p_r},$$

где $\varphi_2(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины $\xi_1^{(2)}$, несложно показать, что выполняется соотношение (39) для случайной величины $\tilde{\zeta}_{S-1}^{(2)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S))$.

Аналогично доказательству леммы 3 нетрудно видеть, что вероятность P_2 можно представить в виде суммы (41) при $j = 2$. Используя (2) и (4), несложно заметить, что при $k \in K_1^{(2)}$, справедливо равенство:

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(2)} = n - \zeta(\tau) - k\} = \frac{\tau(1+o(1))}{(1-p_r)(n - \zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Тогда из (39) и (41) находим, что

$$R_1^{(2)} = \frac{\tau(1+o(1))}{(1-p_r)(n - \zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Оценки для $R_i^{(2)}, i = 0, 2, 3$ проводятся аналогично оценкам $R_i^{(2)}, i = 0, 2, 3$ при доказательстве леммы 3. Отсюда получаем, что

$$P_2^{(2)} = \frac{\tau(1+o(1))}{(1-p_r)(n - \zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Оценки вероятностей $P_1^{(2)}$ и $P_3^{(2)}$ проводятся так же, как оценки $P_1^{(2)}$ и $P_3^{(2)}$ при доказательстве леммы 3, согласно которым для вероятностей $P_1^{(2)}$ и $P_3^{(2)}$ справедливы соотношения (46) и (51) при $j = 2$ соответственно.

□

Аналогично лемме 6, используя доказательства лемм 4 и 5, нетрудно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $\tau = 2, N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(2)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty, S = N(1 - p_r + o(p_r))$. Тогда при фиксированных r справедливо*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(2)} = n\} = \frac{2N(1+o(1))}{(n - \zeta(2)N)^3}.$$

Теперь можно доказать теоремы 1–4.

При выполнении условий теоремы 1, учитывая, что $r = n - \zeta(\tau)N - z\sqrt{N}$, из (2) находим, что $NP_r = o(1)$. Тогда справедливость утверждения теоремы 1 следует из лемм 1, 2 и первой части леммы 3.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Согласно пуассоновскому приближению биномиального распределения, равномерно относительно целых k, для которых $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$

лежит в любом конечном интервале,

$$\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \tag{79}$$
$$\frac{(Np_r)^k}{k!} \exp\{-Np_r\}(1+o(1)).$$

Используя лемму 2 и второй пункт леммы 3, получаем, что

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(2)} = n - kr\right\} / \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \to 1,$$

отсюда и из (79) следует первая часть утверждения теоремы 2. Для доказательства второй части теоремы 2 воспользуемся тем фактом, что при $Np_r(1-p_r) \to \infty$ равномерно относительно $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$

$$\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \tag{80}$$
$$\frac{(1+o(1))}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}} \exp\left\{-\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}\right\}.$$

Тогда справедливость второй части теоремы 2 следует из лемм 1, 2, 6 и соотношения (80).

Утверждение теоремы 3 вытекает из лемм 1, 4 и первого пункта леммы 5.

Справедливость теоремы 4 следует из лемм 1, 4, 7, второго пункта леммы 5 и соотношений (79) и (80).

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития».

Литература

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

2. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 208 с.

3. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2004. 256 с.

4. *Крамер Г.* Об одной новой предельной теореме теории вероятностей // Успехи матем. наук. 1944. № 10. С. 166–173.

5. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера // Труды академии наук УССР. 1969. Т. 13, № 6. С. 17–22.

6. *Павлов Ю. Л.* Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, № 3. С. 22–34.

7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18.

8. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 14–23.

9. *Павлов Ю. Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которого не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, № 3. С. 20–33.

10. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин условного графа // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, № 3. С. 455–456.

11. *Cheplyukova I., Pavlov Yu.* Limit distributions of vertex degree in conditionnal power-law random graphs // Transactions of the XXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. (Karniel, october 2007). Israel, 2007. P. 52–59.

12. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. N.Y.: Cambridge University Press, 2007. 221 p.

13. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationships of the Internet topology // Computer Communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 256–262.

14. *Newman M. E. J., Strogatz S. H., Watts D. J.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications their applications // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 026118.

15. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 122–126

УДК 519.7

ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ НА РЫНКЕ ТОВАРОВ ДВУХ ВИДОВ

А. В. Щипцова

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассматривается рынок двух товаров на плоскости. Спрос зависит от цены и квадратичных транспортных затрат потребителя. Исследуется конкурентное поведение игроков, продающих товар одного вида. На рынке также присутствует продавец второго товара. Приведены примеры для различных функций, задающих плотность распределения потребителей.

Ключевые слова: дуополия Хотеллинга на плоскости, равновесие по Нэшу, задача о размещении.

A. V. Shchiptsova. LOCATION-PRICE GAME IN THE MARKET OF TWO PRODUCTS

The paper examines the market of two products. Demand depends on the price and quadratic transportation costs. We analyze competitive behavior of players selling the same product. There is also a seller of the second product in the market. Examples with different buyers density function are presented.

Key words: Hotelling's duopoly on the plane, Nash equilibrium, location game.

Введение

Классическая модель Хотеллинга [3] исследует конкуренцию на рынке одного товара с пространственной дифференциацией продукции. В дуополии Хотеллинга рассматривается линейный рынок с равномерным распределением покупателей.

Работа Хотеллинга послужила началом для целого ряда исследований, посвященных анализу конкурентного поведения в условиях, когда на величину потребительского спроса влияет цена товара и транспортные издержки. Салоп [6] распространил дуополию Хотеллинга на модель «кругового» города. Задача о размещении игроков-продавцов с различными видами распределения потребителей на рынке была исследована в работе [4] для модели Хотеллинга на плоскости и в работе [5] при условии дискриминационного ценообразования.

В работах [1], [2] рассматривалась модель дуополии Хотеллинга на плоскости с равномерным распределением потребителей. Ценовое равновесие и решение задачи о размещении были построены для случая рыночной конкуренции между двумя и более участниками рынка.

Данная работа посвящена исследованию задачи о размещении на рынке товаров двух видов. Каждый покупатель заинтересован в приобретении двух различных товаров, конкуренция происходит между игроками-продавцами товара одного вида. Будет рассмотрена модель рынка на плоскости с произвольной функцией плотности распределения потребителей.

Постановка задачи

Представим рынок потребительских товаров в виде единичного круга S радиуса 1. Пусть плотность потребителей на рынке задана непрерывной функцией $f(x)$. Каждый из потребителей заинтересован в покупке двух различных товаров: товара вида A и товара вида B. На рынке присутствуют два продавца товара A, расположенные на диаметре в точках $(x_1,\,0)$ и $(x_2,\,0)$ соответственно, и один продавец товара вида B, расположенный в точке $(z,0)$ (рис. 1). Каждый из участников рынка назначает цену p_j $(j=1,\,2,\,3)$ и стремится получить наибольшую прибыль от продаж. Конкуренция осуществляется между игроками-продавцами товара вида A. Спрос является абсолютно неэластичным. Без потери общности будем считать, что себестоимость товара для продавцов равна нулю.

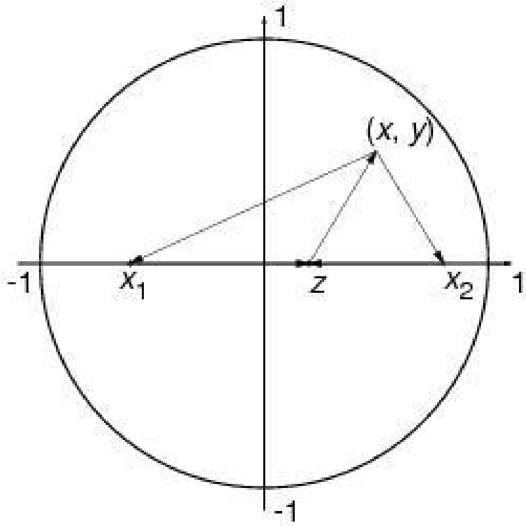

Рис. 1. Расположение игроков на рынке

Товары обоих видов одинаковы для потребителей по всем характеристикам кроме цены, назначенной за приобретение товара, и транспортных расходов. Будем считать, что транспортные расходы потребителя заданы квадратичной функцией. Таким образом, затраты потребителя на приобретение товара A у продавца j и приобретения товара B представимы в виде:

$$\begin{aligned} F_j(x,y) = p_j + \rho_j(x,y)^2 + \rho_z(x_j,0)^2 \\ + p_3 + \rho_z(x,y)^2, \quad j=1,\,2, \end{aligned}$$

где $\rho_j(x,y)=\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2}$ – расстояние от потребителя в точке $(x,\,y)$ до продавца товара A и $\rho_z(x,y)=\sqrt{(x-z)^2+y^2}$ – расстояние от потребителя в точке (x,y) до продавца товара B.

Без ограничения общности будем считать, что $p_1 \leqslant p_2$. Множество всех потребителей разобьется на два подмножества S_1 и S_2 с границей, определяемой уравнением $F_1(x,y) = F_2(x,y)$ или, после упрощений,

$$x = \frac{p_1-p_2}{2(x_1-x_2)} + x_1 + x_2 - z. \qquad (1)$$

Прибыль продавцов товара A, между которыми осуществляется конкуренция на рынке, имеет вид:

$$\begin{cases} H_1 = p_1(1-S_2), \\ H_2 = p_2 S_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Доля потребителей, выбирающих товар вида A у второго участника рынка, будет равна

$$S_2 = \int\limits_x^1 \int\limits_{-\arccos\frac{x}{r}}^{\arccos\frac{x}{r}} r f(\theta,r)\,d\theta dr. \qquad (3)$$

Продавцы товара A конкурируют на рынке за счет выбора своего местоположения и назначаемой цены на товар. Будем рассматривать бескоалиционную игру Γ двух лиц с полной информацией, которая проходит в три шага:

1. Игроки одновременно определяют свое местоположение на рынке $(x_1,\,x_2)$.
2. Игроки одновременно объявляют цену на товар $(p_1,\,p_2)$.
3. Игроки получают выигрыш, исходя из выбранного расположения и цены $(H_1,\,H_2)$.

Равновесие в задаче о размещении

Если расположение первого игрока x_1 фиксировано, тогда x_2 можно найти, максимизируя прибыль второго игрока, и наоборот. Таким образом, равновесие $(x_1,\,x_2)$ в игре Γ отвечает условиям

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dx_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1}(1-S_2) - p_1\Big(\frac{\partial S_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} \\ \qquad + \frac{\partial S_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_1}\Big) = 0, \\ \frac{dH_2}{dx_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_2}S_2 + p_2\Big(\frac{\partial S_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_2} \\ \qquad + \frac{\partial S_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2}\Big) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Предположим, что игроки выбрали свое местоположение на рынке, т. е. x_1 и x_2 фиксированы. Тогда ценовое равновесие $(p_1,\, p_2)$ будет удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial p_1} = 1 - S_2 + p_1 \frac{\partial S_2}{\partial p_2} = 0, \\ \frac{\partial H_2}{\partial p_2} = S_2 + p_2 \frac{\partial S_2}{\partial p_2} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Положим

$$g\,(r) = f\left(\arccos\frac{x}{r},\, r\right) + f\left(-\arccos\frac{x}{r},\, r\right).$$

Из (3) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial p_2} &= \frac{g\,(1, x)}{2\,(x_1 - x_2)}\sqrt{1 - x^2} \\ &- \frac{1}{2\,(x_1 - x_2)}\int\limits_x^1 \sqrt{r^2 - x^2}\,\frac{\partial g\,(r, x)}{\partial r}\,dr. \end{aligned} \tag{6}$$

Каждый из игроков после выбора своего местоположения будет назначать цену на товар, удовлетворяющую условиям (5) для ценового равновесия. Таким образом, из (4) x_1 и x_2 в равновесии определяются из системы

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dx_1} = -p_1\left(\frac{\partial S_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_1}\right) = 0, \\ \frac{dH_2}{dx_2} = p_2\left(-\frac{\partial S_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2}\right) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть

$$\alpha = -\frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} - 2\,(x_1 - x_2)$$

и

$$\beta = \frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} - 2\,(x_1 - x_2)\,.$$

Заметим, что $\frac{\partial S_2}{\partial p_1} = -\frac{\partial S_2}{\partial p_2}$, $\frac{\partial S_2}{\partial x_2} = \alpha\frac{\partial S_2}{\partial p_2}$ и $\frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \beta\frac{\partial S_2}{\partial p_2}$. $\frac{\partial p_1}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial p_2}{\partial x_1}$ найдем, продифференцировав по x_2 и x_1 систему (5). Получаем, что равновесие $(x_1,\, x_2)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} 2\beta\frac{\partial S_2}{\partial p_2} + 2p_2\beta\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} \\ \qquad - (2p_2 + p_1)\,\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2 \partial x_1} = 0 \\ 2\alpha\frac{\partial S_2}{\partial p_2} - 2p_1\alpha\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} \\ \qquad + (2p_1 + p_2)\,\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2 \partial x_2} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из (6) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} &= -\frac{x g\,(1, x)}{2\sqrt{1 - x^2}\,(x_1 - x_2)}\frac{\partial x_2}{\partial p_2} \\ &+ \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2\,(x_1 - x_2)}\frac{\partial g\,(1, x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_2} \\ &- \frac{\frac{\partial x}{\partial p_2}}{2\,(x_1 - x_2)}\int\limits_x^1\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\frac{\partial g\,(r, x)}{\partial r}\right. \\ &+ \left.\sqrt{r^2 - x^2}\,\frac{\partial^2 g\,(r, x)}{\partial r \partial x}\right) dr. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2 \partial x_1} = -\frac{1}{x_1 - x_2}\frac{\partial S_2}{\partial p_2} + \beta\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2}$ и $\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2 \partial x_2} = \frac{1}{x_1 - x_2}\frac{\partial S_2}{\partial p_2} + \alpha\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2}$. Таким образом, в равновесии $(x_1,\, x_2)$ выполняются условия:

$$\begin{cases} \left(2\alpha + \frac{2p_1 + p_2}{x_1 - x_2}\right)\frac{\partial S_2}{\partial p_2} + p_2\alpha\,\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} = 0, \\ \left(2\beta + \frac{2p_2 + p_1}{x_1 - x_2}\right)\frac{\partial S_2}{\partial p_2} - p_1\beta\,\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Примеры

Рассмотрим задачу о размещении игроков на рынке с заданным распределением потребителей.

1. $f(\theta,\, r) = \frac{1}{\pi}$. Пусть потребители распределены равномерно по всей области рынка. Из (9) равновесие $(x_1,\, x_2)$ является решением уравнений

$$\begin{aligned} \left(3p_2 - 4(x_1 - x_2)^2\right)\left(1 - x^2\right) + p_2\alpha x = 0, \\ \left(3p_1 - 4(x_1 - x_2)^2\right)\left(1 - x^2\right) - p_1\beta x = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Так как оба игрока являются равноправными, будем искать равновесие в предположении $p_1 = p_2$. Из (10) следует, что $p_1 = p_2 = \frac{4}{3}\,(x_1 - x_2)^2$, $x = 0$ и $S_2 = \frac{1}{2}$. Подставив в (5), получим, что в равновесии

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{z}{2} - \frac{3\pi}{16}, \quad x_2 = \frac{z}{2} + \frac{3\pi}{16}, \\ p_1 = p_2 = \frac{3\pi^2}{16}, \\ |z| \leqslant 2 - \frac{3\pi}{8}. \end{gathered}$$

2. $f(\theta,\, r) = \frac{3(1-r)}{\pi}$. Рассмотрим случай, когда плотность потребителей ближе к центру рынка возрастает. Тогда равновесие $(x_1,\, x_2)$

определяется из системы уравнений:

$$\begin{aligned}&\Big(3p_2-4(x_1-x_2)^2\Big)\Bigg(\sqrt{1-x^2}\\&\qquad-x^2\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\Bigg)\\&+p_2\alpha x\frac{3x}{2\pi(x_1-x_2)^2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=0,\\&\Big(3p_1-4(x_1-x_2)^2\Big)\Bigg(\sqrt{1-x^2}\\&\qquad-x^2\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\Bigg)\\&-p_1\beta x\frac{3x}{2\pi(x_1-x_2)^2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Как и в случае равномерного распределения потребителей по области рынка, будем предполагать, что $p_1 = p_2$. Таким образом, получаем, что $p_1 = p_2 = \frac{4}{3}(x_1 - x_2)^2$, $x = 0$ и $S_2 = \frac{1}{2}$. Из (5) в равновесии

$$x_1 = \frac{z}{2} - \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \frac{z}{2} + \frac{\pi}{8},$$
$$p_1 = p_2 = \frac{\pi^2}{12}.$$

3. $f(\theta, r) = \frac{3r^2}{2\pi}$. Предположим, что потребители сосредоточены на границе рынка. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_2}{\partial p_2} =&\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2\pi(x_1-x_2)}-\frac{3}{4\pi(x_1-x_2)}\\&\Bigg(\sqrt{1-x^2}-x^2\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\Bigg),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} =&\frac{3x}{4\pi(x_1-x_2)^2}\\&\Bigg(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\Bigg).\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть, как и прежде, $p_1 = p_2$. Подставив в (9) (12) – (13), получаем, что $p_1 = p_2 = \frac{4}{3}(x_1 - x_2)^2$, $x = 0$ и $S_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, из (5) находим равновесие

$$x_1 = \frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{z}{2} + \frac{\pi}{4},$$
$$p_1 = p_2 = \frac{\pi^2}{3},$$
$$|z| \leqslant 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Результаты для заданного распределения потребителей на рынке приведены в табл. 1.

Таблица 1. Равновесие в задаче о размещении при заданном распределении потребителей на рынке

$f(\theta, r) = \frac{1}{\pi}$	$z=0$	$z=0,1$	$z=0,3$	$z=0,7$
x_1	-0,58905	-0,53905	-0,43905	-0,23905
x_2	0,58905	0,63905	0,73905	0,93905
p_1	1,850551	1,850551	1,850551	1,850551
p_2	1,850551	1,850551	1,850551	1,850551
H_1	0,925275	0,925275	0,925275	0,925275
H_2	0,925275	0,925275	0,925275	0,925275
$f(\theta, r) = \frac{3(1-r)}{\pi}$	$z=0$	$z=0,1$	$z=0,3$	$z=0,7$
x_1	-0.3927	-0.3427	-0.2427	-0,0427
x_2	0,3927	0,4427	0,5427	0,7427
p_1	0,82247	0,82247	0,82247	0,82247
p_2	0,82247	0,82247	0,82247	0,82247
H_1	0,41123	0,41123	0,41123	0,41123
H_2	0,41123	0,41123	0,41123	0,41123
$f(\theta, r) = \frac{3r^2}{2\pi}$	$z=0$	$z=0,1$	$z=0,3$	$z=0,7$
x_1	-0,7854	-0,7354	-0,6354	
x_2	0,7854	0,8354	0,9354	
p_1	3,28987	3,28987	3,28987	
p_2	3,28987	3,28987	3,28987	
H_1	1,64493	1,64493	1,64493	
H_2	1,64493	1,64493	1,64493	

Заключение

В работе рассмотрено конкурентное поведение игроков на рынке потребительских товаров двух видов, характеристиками которых для покупателя являются цена и квадратичные транспортные расходы. Найдены условия, которым удовлетворяет равновесие по Нэшу в задаче о размещении при плотности потребителей, заданной произвольной функцией. При различных заданных видах функции плотности найдены равновесные местоположения и цены, приведены значения для выигрышей игроков.

Литература

1. *Мазалов В. В., Щипцова А. В., Токарева Ю. С.* Дуополия Хотеллинга и задача о размещении на плоскости // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46, вып. 4. С. 91–100.

2. *Щипцова А. В.* Мультиномиальный логит-анализ и конкурентное поведение на рынке // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. Вып. 2. 2011. № 5. С. 120–124.

3. *Hotelling H.* Stability In Competition // The Economic Journal. 1929. Vol. 39. Issue 153. P. 41–57.

4. *Mazalov V. V., Sakaguchi M.* Location Game On The Plane // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5, N 1. P. 1–13.

5. *Sakaguchi M.* Pure Strategy Equilibrium In a Location Game With Discriminatory Pricing // Game Theory and Applications. 2001. Vol. 6. P. 132–140.

6. *Salop S.* Monopolistic competition with outside goods // Bell journal of Economics. 1979. Vol. 10. P. 141–156.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Щипцова Анна Владимировна
аспирантка
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: ann_sh@inbox.ru
тел.: (8142) 766312

Shchiptsova, Anna
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: ann_sh@inbox.ru
tel.: (8142) 766312

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 127–129

ХРОНИКА

ВОСЬМАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ ПЕТРОЗАВОДСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ» И XIII ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ (ЛЕТНЯЯ СЕССИЯ)

(ПЕТРОЗАВОДСК, 2–9 ИЮНЯ 2012 г.)

2–9 июня 2012 г. в Карельском научном центре состоялись сразу три крупных математических мероприятия. Это Восьмая Международная Петрозаводская конференция «Вероятностные методы в дискретной математике», XIII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике и Третья Всероссийская школа молодых ученых «Вероятность и комбинаторика». Организаторами этих мероприятий были Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводский государственный университет, Академия криптографии Российской Федерации, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН и редакции журналов «Математическая теория игр и применения», «Труды Карельского научного центра РАН», «Обозрение прикладной и промышленной математики», «Теория вероятностей и ее применения». Конференция была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований РАН, а школа молодых ученых – Президиумом РАН в рамках программы поддержки молодых ученых. Оргкомитеты этих мероприятий состояли из ведущих математиков: академик Ю. В. Прохоров, академик А. Б. Жижченко, академик В. А. Бабешко, академик А. А. Боровков, академик С. С. Григорян, академик И. А. Ибрагимов, академик, депутат Государственной Думы Российской Федерации Б. С. Кашин, академик В. И. Колесников, академик А. Б. Куржанский, академик В. П. Маслов, академик И. А. Соколов, академик А. Н. Ширяев, академик В. П. Шорин, член-корр. А. Ф. Титов, член-корр. Д. А. Губайдуллин, член-корр. С. В. Кисляков, член-корр. В. В. Русанов, член-корр. Б. А. Севастьянов, член-корр. В. А. Сойфер, В. В. Мазалов, В. Ф. Колчин, А. В. Воронин, В. А. Ватутин, А. М. Зубков, Г. И. Ивченко, А. П. Коваленко, Ю. И. Медведев, В. Г. Михайлов, Ю. Л. Павлов, Л. А. Петросян, А. А. Рогов, В. Н. Сачков, А. Д. Сорокин, В. И. Хохлов, Л. Ф. Вьюненко, А. Р. Симонян.

Эти мероприятия собрали более 130 участников из России и ближнего зарубежья. Из них 30 представляли Карелию, а 28 молодых ученых, включая студентов и аспирантов, были слушателями школы «Вероятность и комбинаторика». Всего было сделано 95 пленарных и секционных докладов.

Участники были размещены в разных гостиницах города, но основная часть проживала в отеле «Онего Палас». Культурная программа включала небольшой концерт известного карельского фолк-квартета «Sattuma» и экскурсию на о. Кижи.

Конференция «Вероятностные методы в дискретной математике» является традиционной. Первая Петрозаводская конференция состоялась в 1983 г., а вторая в 1988 г. Проведение этих совещаний стало возможным прежде всего благодаря члену-корр. В. Я. Козлову, который в те годы был членом Президиума Карельского филиала АН СССР. Главным результатом этих двух конференций было создание одного из ведущих отечественных математических журналов «Дискретная математика». Было также принято решение проводить эти конференции регулярно, один раз в 4 года, и в 2012 г. состоялась уже восьмая.

Тематика этой конференции также является традиционной, отражена в названиях трех секций: вероятностные и статистические задачи дискретной математики, математические вопросы защиты информации, теория игр и задачи оптимизации.

Первый Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике также был проведен в Петрозаводске летом 2000 г. С тех пор этот симпозиум является ежегодным, при этом в разных городах России каждый год проходят две сессии – летняя (или весенняя) и осенняя. Этот симпозиум объединяет большое число исследователей, специализирующихся на применении методов математического моделирования в разных сферах науки и практики. Достаточно сказать, что проведенная в Петрозаводске летняя сессия 2012 г. включала 39 секций, в том числе по информационным технологиям, квантовым вычислениям, нанотехнологиям, применениям математики в медицинских, биологических и общественных науках и, конечно, на производстве.

М. М. Лери, Ю. Л. Павлов

МЕЖДУНАРОДНОЕ РАБОЧЕЕ СОВЕЩАНИЕ «СЕТЕВЫЕ ИГРЫ И МЕНЕДЖМЕНТ»

(ПЕТРОЗАВОДСК, 30 ИЮНЯ – 2 ИЮЛЯ 2012 г.)

30 июня – 2 июля 2012 г. ИПМИ КарНЦ РАН совместно с ПетрГУ проводил международное рабочее совещание «Networking games and management-2012» в отеле «Калевала». Это уже третье рабочее совещание на данную тему, проводимое в Петрозаводске. До этого институт проводил аналогичные совещания в 2002 г. («Сетевые игры и распределение ресурсов» – «Networking games and resource allocation») и в 2009 г. («Сетевые игры и менеджмент-2009» – «Networking games and management-2009»).

В рабочем совещании 2012 г. приняли участие 33 специалиста, из них 7 иностранцев: из Финляндии, Испании, Турции и Нидерландов. Программный комитет состоял как из российских, так и зарубежных профессоров. В него вошли: председатель: В. В. Мазалов (ИПМИ КарНЦ РАН), К. Авраченков (INRIA, Франция), А. Гуртов (Университет Аалто, Финляндия), Х. Камеда (Университет Тсукуба, Ибараки, Япония), С. П. Кущ (СПбГУ, Санкт-Петербург), Д. А. Новиков (ИПУ РАН им. В. А. Трапезникова, Москва), Л. А. Петросян (СПбГУ, Санкт-Петербург), К. Шайовски (Вроцлавский университет технологий, Польша), Н. А. Зенкевич (СПбГУ, Санкт-Петербург).

Тематика данного рабочего совещания посвящена обсуждению новых результатов в области сетевых игр, в частности, таких направлений, как переговоры в сетях, оптимальная маршрутизация, распределение ресурсов, многоагентные системы, возможности обучения агентов, системы поддержки принятия решений в телекоммуникационных сетях. Работа проводилась по двум секциям: Сетевые игры (Networking games) и Менеджмент и приложения (Management and applications). Все представленные на совещании доклады вызвали большой интерес у участников. Особенно следует отметить пленарный доклад проф. Д. А. Новикова (ИПУ РАН) «Теория игр и мультиагентные системы», в котором обсуждались современные тенденции развития мультиагентных систем с применением аппарата теории игр. Также большой интерес вызвал доклад В. В. Мазалова (ИПМИ КарНЦ РАН) на тему «Игры с затором». В представленных на совещании докладах обсуждались различные аспекты теоретико-игрового моделирования в информационных сетях и приложениях. Среди важных направлений — теоретико-игровые задачи оптимальной маршрутизации и распределения полосы пропускания в компьютерных сетях с различной топологией, задачи управления в социальных сетях. Для таких систем характерно эгоистичное поведение и несогласованность пользователей, а доступная информация о состоянии системы может быть неполной, зашумленной и вообще отсутствовать. При этом каждый пользователь сети или узел, входящий в сеть, трактуется как некоторый игрок, а задача распределения ресурсов сети рассматривается как игра, в которой игроки, действуя оптимально, могут достигать равновесия — ситуации, в которой никому из игроков не выгодно отклоняться от своей стратегии. Доклады студентов и аспирантов были посвящены важным вопросам управления ресурсами сетей с помощью методов динамических игр, защите информации в компьютерных сетях, вероятностным методам анализа функционирования сетей с большим числом узлов, оптимизации расписания работы узлов кластера.

На рабочем совещании были приняты следующие решения: продолжить серию рабочих совещаний на тему «Сетевые игры и менеджмент»; провести совместное рабочее совещание с университетом Аалто (Aalto University, г. Хельсинки, Финляндия); опубликовать избранные результаты, представленные на совещании, в будущих выпусках научного журнала «Математическая теория игр и ее приложения».

Расширенные тезисы представленных докладов доступны на веб-странице рабочего совещания http://mathem.krc.karelia.ru/event.php?id =170&plang=r.

Ю. В. Чиркова

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 130–131

ЮБИЛЕИ И ДАТЫ

АНДРЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ ПЕЧНИКОВ

(к 60-летию со дня рождения)

Печников Андрей Анатольевич родился 10 сентября 1952 г. в г. Петрозаводске. После окончания средней школы № 10 в 1969 г. он поступил на физико-математический факультет Петрозаводского госуниверситета (ПетрГУ), а в 1972 г. был переведен на 4 курс в Ленинградский госуниверситет (ЛГУ) на факультет прикладной математики – процессов управления. После окончания учебы в 1974 г. был призван рядовым в Советскую Армию, где отслужил один год. В 1975–1976 гг. проходил стажировку на факультете прикладной математики – процессов управления ЛГУ, затем в 1976–1979 гг. учился там же в очной аспирантуре. После окончания аспирантуры вернулся в ПетрГУ, где начал работать в должности преподавателя на кафедре математического анализа. В 1981 г. защитил кандидатскую диссертацию, в 1982 г. переведен на должность доцента кафедры прикладной математики и кибернетики, в 1985 г. ему было присвоено звание доцента. С 1987 по 1991 гг. – декан математического факультета ПетрГУ, с 1991 по 1996 гг. работал первым проректором ПетрГУ. Был одним из организаторов Университетского лицея в Петрозаводске и Кольского филиала ПетрГУ (Апатиты).

С 1996 по 2000 г. работал доцентом кафедры информатики и математического обеспечения и директором Центра дистанционного образования по Европейскому Северу. В 2000–2002 гг. работал начальником информационно-аналитического управления Администрации местного самоуправления Петрозаводска. С июля 2002 по декабрь 2005 г. – исполнительный директор Карельского регионального общественного фонда развития общественного самоуправления «Инициатива». В январе 2006 г. избран по конкурсу на должность старшего научного сотрудника в лабораторию телекоммуникационных систем Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН. После защиты диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук в 2011 г., в 2012 г. по конкурсу был переведен на должность ведущего научного сотрудника.

Сфера научных интересов А. А. Печникова – базы данных, дискретная математика, теория графов, сложные системы, системы автоматизации производства, исследования Глобальной сети Интернет.

Работая в ПетрГУ, участвовал в разработке первой концепции информатизации Республики Карелия, руководил проектом «Организация учебно-научного центра дистанционного образования ПетрГУ и Кольского филиала ПетрГУ» по Федеральной программе «Интеграция». Работая в Администрации г. Петрозаводска, участвовал в создании официального сайта Администрации Петрозаводска и виртуальной приемной. В 2003–2004 гг. был руководителем проекта «Создание информационно-коммуникационной среды поддержки общественного участия и межмуниципальной кооперации» (грант Фонда

Евразия, соисполнитель – ИПМИ КарНЦ РАН), являлся ответственным исполнителем проекта «Повышение уровня общественного участия в разработке приоритетов развития экологического туризма в Лахденпохском районе Республики Карелия» (грант Посольства Королевства Нидерланды).

Начиная с 2006 г. научные исследования А. А. Печникова сконцентрированы в области разработки методических подходов и математических методов, обеспечивающих доступность и удобство использования информационных научных ресурсов. В 2008–2010 гг. руководил проектом по гранту РФФИ «Вебометрические исследования научных интернет-ресурсов Российского Интернета». В 2011 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук по теме «Разработка математических моделей, методов и программных средств для исследования взаимосвязей регламентируемых веб-сайтов».

В течение 2006–2007 гг. руководил проектом Яндекса «Интернет-математика 2007» (математические модели согласованного поведения малых Интернет-сообществ), а также Госконтрактом с Минэкономразвития РК «Модернизация и пополнение Интернет-коллекции минерально-сырьевой базы Республики Карелия для инвестора», являлся исполнителем по Госконтракту с Минобрнауки РФ «Разработка комплекса математических моделей, методов и программного обеспечения для управления сложными производственными процессами» в ПетрГУ (2008 г.).

А. А. Печников является автором более 120 научных трудов, в том числе книги по центральным процессорам ЭВМ. В настоящее время ведет педагогическую работу в ПетрГУ и Санкт-Петербургском университете.

А. А. Печников общительный и контактный человек, заядлый рыбак, заботливый муж, отец и дедушка.

Коллектив сотрудников ИПМИ КарНЦ РАН сердечно поздравляет юбиляра и желает ему отличного здоровья, творческого долголетия и успехов в личной жизни.

А. Д. Сорокин

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

А. А. Печникова

1978. Формирование ответа на запрос в универсальной ИПС // Проблемы системотехники и АСУ. СЗПИ. Вып. 1. С. 149–154 (соавт. А. А. Пекки.)

1983. Конечный автомат как функциональная модель информационной системы // Программирование. № 2. С. 61–68.

1984. Оптимальное размещение динамического информационного массива // Кибернетика. № 2. С. 115–117.

Finite automaton as a functional model of an information system // Programming and Computer Software. Vol. 9, N. 2. P. 95–101.

2005. Создание информационно-коммуникационной среды поддержки развития общественного участия и межмуниципальной кооперации. Петрозаводск: ЗАО «Копистар Оптима». 33 с. (соавт. В. В. Мазалов, И. В. Раковский.)

2006. Серия «Информатика: Основы и приложения». Т. 1. Центральные процессоры персональных ЭВМ. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 188 с. (соавт. Ю. А. Богоявленский, М. В. Дьяконов.)

2007. Математические модели размещения ссылок в локализованной системе Интернет-ресурсов // Системы управления и информационные технологии. № 2(28). С. 92–96.

2008. Рейтинг официальных web-сайтов университетов России и Финляндии: сравнительный анализ // Информационные ресурсы России. № 3 (103). С. 25–28. (соавт. О. Г. Илюкевич.)

О некоторых подходах к моделированию клик-сообществ // Системы управления и информационные технологии. № 3(33). С. 15–18.

Вебометрические исследования Web-сайтов университетов России // Информационные технологии. № 11. С. 74–78.

Многофункциональная программная система разработки приложений для задач раскроя материалов и комплектования изделий // Автоматизация и современные технологии. № 11. С. 10–14. (соавт. В. А. Кузнецов, А. И. Шабаев.)

2009. Разработка инструментов для вебометрических исследований гиперссылок научных сайтов // Вычислительные технологии. Т. 14, № 5. С. 66–78. (соавт. Н. Б. Луговая, Ю. В. Чуйко, И. Э. Косинец.)

2010. Методы исследования регламентируемых тематических фрагментов Web // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Серия: Прикладные проблемы управления макросистемами. Т. 59. С. 134–145.

2011. Исследование взаимосвязей между веб-сайтами научных библиотек университетов России // Дистанционное и виртуальное обучение. № 7. С. 13–24.

2012. Адаптивный краулер для поиска и сбора внешних гиперссылок // Управление большими системами. Вып. 36. М.: ИПУ РАН. С. 301–315. (соавт. Д. И. Чернобровкин.)

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 132–133

АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ СОКОЛОВ

(к 60-летию со дня рождения)

Соколов Андрей Владимирович родился 29 мая 1952 г. в г. Петрозаводске. После окончания средней школы № 30 в 1969 г. поступил в Петрозаводский госуниверситет на физико-математический факультет, а в 1972 г. был направлен для продолжения обучения на факультет прикладной математики – процессов управления Ленинградского госуниверситета, который закончил в 1974 г. В 1974–1975 гг. проходил службу в рядах Советской Армии. После окончания военной службы в 1975 г. стажировался в Ленинградском госуниверситете, затем учился там же в аспирантуре в 1976–1979 гг. С 1979 г. преподает в Петрозаводском государственном университете.

В 1982 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 2006 г. – докторскую диссертацию в диссертационном совете математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета по теме: «Математические модели и алгоритмы оптимального управления динамическими структурами данных». В 2000 г. А. В. Соколов был избран по конкурсу старшим научным сотрудником института прикладных математических исследований (ИПМИ) КарНЦ РАН, а с 2007 г. – ведущим научным сотрудником.

А. В. Соколов является высококвалифицированным специалистом в области теоретической информатики. Сфера его научных интересов – математические модели и алгоритмы оптимального управления динамическими структурами данных. А. В. Соколов – автор и соавтор более 90 научных работ.

В научных работах А. В. Соколова содержатся результаты, представляющие теоретический и практический интерес для разработки программных и аппаратных комплексов, требующих динамического распределения памяти.

А. В. Соколов является членом Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН, членом редакционной коллегии научного периодического издания «Стохастическая оптимизация в информатике», издающегося в Санкт-Петербургском университете, членом редакционной коллегии журнала «Математическое моделирование и информационные технологии», издающегося в ИПМИ КарНЦ РАН, экспертом РФФИ по направлению «Математика, механика, информатика». Был членом специализированного совета по защите кандидатских диссертаций при ИПМИ КарНЦ РАН. Выступал в качестве рецензента ряда научных работ, был оппонентом на защите кандидатских и докторских диссертаций. Руководил рядом госбюджетных тем ИПМИ КарНЦ РАН и 5 грантами РФФИ.

В настоящее время руководит грантом РФФИ № 12-01-00253-а «Математические модели и параллельные алгоритмы оптимального управления динамическими структурами данных». Доцент по кафедре информатики и математического обеспечения ПетрГУ с 1992 г., доцент по специальности «Дискретная математика и математическая кибернетика» с 2005 г., профессор по кафедре информатики и математического обеспечения ПетрГУ с 2009 г.

В настоящее время А. В. Соколов работает по совместительству профессором кафедры информатики и математического обеспечения ПетрГУ. Стаж педагогической работы в Петрозаводском университете составляет 33 года. Читает лекционные курсы по дисциплинам: «Информатика. Структуры данных»; «Языки и методы программирования (С++)»; «Введение в параллельные вычисления»; «Методы и алгоритмы параллельных вычислений». Являлся инициатором введения в учебный процесс ПетрГУ курсов по языкам программирования Паскаль, С++, Java и по технологиям параллельного программирования. Руководит курсовыми, дипломными работами и магистерскими диссертациями студентов математического факультета ПетрГУ.

А. В. Соколов также работает по совместительству профессором кафедры прикладной информатики Петрозаводского филиала Московского Института международного права и экономики им. А. С. Грибоедова.

Избирался членом профкома ПетрГУ и членом ОКП КарНЦ.

В разные годы А. В. Соколов работал председателем ГЭК в Карельском педагогическом институте и в Петрозаводском университете. В 1991 г. председатель жюри городской и республиканской школьных олимпиад по программированию и председатель предметной комиссии по математике и информатике на вступительных экзаменах в ПетрГУ. Прошел научные стажировки в Ленинградском, Московском и Люблинском (Польша) университетах.

А. В. Соколов – высококвалифицированный специалист в области теоретической информатики, опытный педагог, ведущий ученый. Под его руководством защищено 2 кандидатские диссертации.

А. В. Соколов руководит научным семинаром «Теоретическая информатика» для студентов, аспирантов и научных работников. Возглавляемый им коллектив научных работников успешно работает по его научной тематике.

Коллектив сотрудников ИПМИ КарНЦ РАН сердечно поздравляет юбиляра и желает ему крепкого здоровья и творческих успехов в научной деятельности.

В. Т. Вдовицын

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

А. В. Соколова

1986. Оценка эффективности методов динамического распределения нестраничной памяти // Программирование. № 5. С. 65–71.

2001. Mathematical Models and Optimal Algorithms of Dynamic Data Structure Control. Fundamental of Computation Theory // 13th International Symposium. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 2138. Springer-Verlag. P. 416–419. On the problem of optimal stack control. Probabalistic methods in discrete mathematics: Proceedings of the Fifth International Conference. Utrecht, Netherlands: VSP. P. 351–366. (соавт. A. A. Lemetti.)

2002. Математические модели и алгоритмы оптимального управления динамическими структурами данных (монография). Петрозаводск: Изд-во ПГУ. 215 с.

Optimization strategies of stack control. Chapter 22 // Recent Advances in Java Technology. Theory, Application, Implementation. Intermediate Reprezentation Engineering. Computer Science Press, Trinity College, Dublin. P. 151–156.

2004. Исследование немарковской модели управления стеком в двухуровневой памяти. Программирование. № 1. С. 1–10. (соавт. Е. А. Аксенова, А. А. Лазутина.)

2007. Оптимальное управление двумя параллельными стеками в двухуровневой памяти // Дискретная математика. № 1. С. 67–75. (соавт. Е. А. Аксенова.)

2009. Оптимальное управление n FIFO-очередями на бесконечном времени // Информационно-управляющие системы. № 6. С. 46–54. (соавт. Е. А. Аксенова, А. В. Драц.)

Анализ некоторых методов размещения в памяти очереди с n приоритетами // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 5. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета. С. 115–121. (соавт. А. В. Драц.)

Математические модели оптимального управления динамическими структурами данных // Математические машины и системы. № 1. С. 144–149. (соавт. Е. А. Аксенова.)

2012. Оптимальное разбиение общей памяти для двух последовательных циклических FIFO-очередей // Прикладная информатика. № 4 (40). С. 113–125. (соавт. Н. В. Каблукова.)

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 134–135

ВЛАДИМИР ТРОФИМОВИЧ ВДОВИЦЫН
(к 60-летию со дня рождения)

Вдовицын Владимир Трофимович родился 13 мая 1952 г. в г. Петрозаводске. После окончания средней школы № 9 в 1969 г. поступил в Петрозаводский госуниверситет на физико-математический факультет, а в 1972 г. был переведен на 4 курс факультета прикладной математики – процессов управления Ленинградского госуниверситета. После окончания учебы в 1974 г. стажировался в Ленинградском госуниверситете, а затем учился там же в аспирантуре в 1975–1978 гг. После окончания аспирантуры вернулся в ПетрГУ, где трудился с 1978 по 1981 гг. в должности преподавателя на кафедре математического анализа. В 1981 г. В. Т. Вдовицын по конкурсу был принят в Отдел математических методов автоматизации научных исследований и проектирования на должность младшего научного сотрудника. В 1986 г. был избран на должность заведующего лабораторией программных средств автоматизации (с 1998 г. переименована в лабораторию информационных компьютерных технологий), которой он руководит по настоящее время. В 1987 г. защитил диссертацию, ему присвоена степень кандидата физико-математических наук, а в 1998 г. присвоено звание доцента по кафедре информатики и математического обеспечения математического факультета ПетрГУ. В 2007 г. В. Т. Вдовицын перешел на работу в аппарат Президиума КарНЦ РАН, сначала на должность и.о. Главного ученого секретаря, а с марта 2009 г. и по настоящее время работает в должности заместителя председателя КарНЦ РАН по научной работе.

В. Т. Вдовицын является высококвалифицированным специалистом в области информационных технологий и вычислительных систем. Его научные интересы связаны с исследованием и разработкой распределенных информационных систем для поддержки научных исследований. Является автором более 100 научных работ.

Под его руководством создан ряд информационных систем, в том числе банк данных (БД) «Наследие» (совместно с государственным музеем-заповедником «Кижи»), Web-сервер КарНЦ РАН (в дальнейшем портал), БД по топонимии Европейского Севера России (совместно с ИЯЛИ КарНЦ РАН), БД по водно-экологическим ресурсам Республики Карелия (совместно с ИВПС КарНЦ РАН) и др.

В период с 2001–2011 гг. помимо бюджетных тем НИР являлся руководителем и исполнителем ряда проектов, поддержанных грантами РФФИ, РГНФ, Отделения математических наук РАН и др., руководил и принимал участие (совместно с сотрудниками институтов КарНЦ РАН) в разработке информационных систем, включая: информационную систему в области топонимии; электронный архив фольклорной фонотеки ИЯЛИ КарНЦ РАН; электронную библиотеку научных информационных ресурсов КарНЦ РАН; информационно-аналитическую систему «Природные ресурсы Карелии» и др. Практические результаты работ В. Т. Вдовицына использовались для информационной поддержки исследований ряда институтов КарНЦ РАН, а также Министерства экономического развития Республики Карелия. Он принимал участие в разработке республиканской целевой программы «Информатизация Республики Карелия».

В настоящее время В. Т. Вдовицын ведет большую научно-организационную работу. Как заместитель председателя КарНЦ РАН по научной работе курирует работу ряда отделов и служб аппарата Президиума и подразделений при Президиуме КарНЦ РАН, руководит работой Научно-технического совета по телекоммуникациям, является членом Комиссии по Уставу КарНЦ РАН. Помимо этого он является членом Комиссии по развитию информационного общества и формированию электронного Правительства в РК; членом Президиума КарНЦ РАН, Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН; входит в состав Редакционного совета «Трудов КарНЦ РАН» и редколлегии серии «Математическое моделирование и информационные технологии»; экспертом РФФИ по направлению «Инфокоммуникационные технологии и вычислительные системы».

В. Т. Вдовицын уделяет внимание подготовке кадров, с 1981 г. работает по совместительству на математическом факультете ПетрГУ в должности доцента. С 2005 г. руководит филиалом кафедры информатики и математического обеспечения математического факультета ПетрГУ в ИПМИ КарНЦ РАН, в разные годы читал ряд общих и специальных курсов в области программирования, создания информационных систем с базами данных и знаний студентам математического факультета ПетрГУ, осуществлял руководство курсовыми и дипломными работами, магистерскими диссертациями.

За успехи в научной и научно-организационной деятельности В. Т. Вдовицын награжден Почетной грамотой Республики Карелия, Почетной грамотой Президиума РАН и профсоюза работников РАН.

Владимира Трофимовича отличают большая трудоспособность, инициативность и высокая ответственность, бескорыстие и дружелюбие, готовность оказать посильную помощь и поддержку коллегам по работе и хорошим знакомым. Он до сих пор сохраняет дружеские чувства к студенческим однокашникам. Пользуется уважением коллег, любит природу, заядлый рыбак и грибник. Коллектив сотрудников ИПМИ КарНЦ РАН сердечно поздравляет юбиляра и желает ему крепкого здоровья, творческих успехов в научной деятельности и не терять интереса к своим увлечениям.

А. Д. Сорокин

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

В. Т. Вдовицына

2010. Информационно-аналитическая система поддержки и сопровождения исследований природных ресурсов региона // Труды XII Всерос. науч. конф. «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции». RCDL-2010. Казань. 13–16 октября 2010 г. С. 529–534. (соавт. А. Ф. Титов, В. А. Лебедев и др.)

Онтологическое моделирование контента электронной библиотеки КарНЦ РАН // Труды КарНЦ РАН. Вып. 1. Серия Математическое моделирование и информационные технологии. С. 11–19. (соавт. В. А. Лебедев.)

Проблематика технологий электронных библиотек на XI Всероссийской научной конференции RCDL'2009 // Вестник РФФИ. № 1. (соавт. Л. А. Калиниченко, М. Р. Когаловский и др.)

Технологии систематизации и поиска электронной научной информации с применением онтологий // Информационные ресурсы России. № 5. С. 6–10. (соавт. В. А. Лебедев.)

2011. Оценка эффективности технологий систематизации и поиска электронной научной информации в ИАС «Природные ресурсы Карелии» // Труды 13 Всерос. науч. конф. «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции» – RCDL'2011. Воронеж, Россия, 19–22 октября 2011 г. С. 309–316. (соавт. В. А. Лебедев.)

2012. Технологии информационного обеспечения научных исследований в ИАС «Природные ресурсы Карелии» // Информационные ресурсы России. № 1. С. 7–12. (соавт. В. А. Лебедев.)

Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 136–137

ВАЛЕРИЙ ДМИТРИЕВИЧ КУКИН

(к 70-летию со дня рождения)

Кукин Валерий Дмитриевич родился 26 февраля 1942 г. в г. Вязники Владимирской области в семье лётчика и учительницы. Закончив среднюю школу с золотой медалью, поступил в Горьковский университет им. Н. И. Лобачевского на механико-математический факультет. Вузовская специализация – теория функций комплексного переменного. После окончания университета с 1966 г. работает по специальности (математик), стаж научной работы 46 лет, из них 6 лет в Карельском институте лесной промышленности, остальные (и самые плодотворные) 40 лет в Карельском филиале АН СССР.

За время работы на научном поприще В. Д. Кукин разработал ряд математических моделей и их программных реализаций, среди них: имитационная модель производственного процесса лесозаготовительного предприятия; модель оптимальной расстановки опор для раскряжевки хлыстов; модель дискретной сортировки твердых пород по размерам фракций и методика ее оптимизации; имитационная модель динамики взаимодействия тяговых механизмов с грунтом для обоснования параметров проектируемых машин. В течение ряда лет участвовал в полевых исследованиях на лесных дорогах Карелии с целью определения нормативных данных для автоматизации проектирования сетей дорог низких категорий. Принимал участие в постановке и решении на ЭВМ задач прикладного содержания для Института биологии КарНЦ РАН. В частности, была построена регрессионная имитационная модель свето- и газообмена для парниковых культур. Под руководством Г. А. Борисова принимал участие в разработке систем автоматизированного проектирования осушительных каналов и сетей лесовозных дорог. Позднее совместно с В. И. Кузиной разработаны: модель очередности освоения больших лесосырьевых баз для новых экономических условий в России; модель транспортной сети, метод ее оптимизации и программное обеспечение на основе решения потоковой задачи Штейнера.

Основные направления научных исследований В. Д. Кукина лежат в области моделирования поисковых процессов, дискретной оптимизации. Получены важные результаты в алгоритмическом решении потоковой задачи Штейнера. Разработанные методы применялись для оптимизации коммуникационных сетей (дорог и линий электропередачи) на стадии проектирования. В последние годы созданы: эволюционный метод решения потоковой задачи Штейнера; способ кодирования топологии дерева; генетические операторы; композитный алгоритм. В этой разработке применяется не имеющий аналогов алгоритм исчерпывающего и неизбыточного перебора полных топологий.

В. Д. Кукин читал лекции по теории массового обслуживания студентам ПетрГУ, неоднократно был руководителем производственной практики и дипломных работ. Совместно с В. И. Кузиной подготовил серию справочно-методических пособий для пользователей ПК (текстовый процессор «Лексикон», MS-DOS версий 3.30, 5.0, 6.2–6.22) и проводил соответствующие практические занятия с сотрудниками филиала АН СССР. На протяжении всех лет учебы и работы В. Д. Кукин активно участвовал в общественной жизни. Со школьных лет руководил выпуском стенгазет и фотомонтажей, готовил тематические выпуски, посвященные великим композиторам, проводил музыкальные лекции и литературные викторины. Юбиляр был организатором соревнований отдела / института по настольному теннису, выступал в командных соревнованиях различного уровня (до всесоюзных Академиад), а также в личных — городских и республиканских.

Перечислим хобби юбиляра. Спорт: туризм, настольный теннис. Музыка: закончил музыкальную школу по классу фортепиано. Литературоведение: личная библиотека насчитывает свыше 3000 томов. Фотография. Филателия. Всю сознательную жизнь юбиляр ведет Дневник.

В. Д. Кукин награжден Почетной Грамотой Президиума РАН и профсоюза работников РАН. В списке трудов более 50 печатных работ, наиболее интересные приведены ниже.

Г. А. Борисов, Ю. В. Заика

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

В. Д. Кукина

1971. К вопросу исследования управления лесозаготовительным процессом // Применение мат. методов и вычислит. техники в лесной и деревообрабатывающей промышленности. Петрозаводск. (соавт. Г. А. Борисов.)

1979. Влияние ходовых органов машинно-тракторных агрегатов на почву // Вопросы теории машин и механизации с.-х. производства Северо-Запада РСФСР. Петрозаводск. (соавт. В. Н. Петров, Н. Н. Свиридов.)

1980. Конструирование полных топологий в задачах проектирования сетей // Материалы Всесоюзного симпозиума по оптимизации конструкторских и проектных решений. Йошкар-Ола. (соавт. Л. В. Тяглик.)

1984. Локальная оптимизация лесотранспортной сети с помощью аналога задачи Штейнера // Системы автоматизир. проектирования лесотранспорта и мелиорации. Петрозаводск.

1989. Задача Штейнера-Вебера на сети. Оптимизация фрагментов // Методы автоматизир. проектирования транспортных сетей. Петрозаводск. С. 19–24.

Команды MS-DOS. Справочное пособие. Петрозаводск. 310 с. (соавт. В. И. Кузина.)

1994. Задача Штейнера и методика проектирования лесотранспортных сетей // Отдел МАД. Сб. трудов. Вып. 1. Петрозаводск. С. 71–81. (соавт. В. И.Кузина.)

1999. Реализация концепции очерёдности освоения лесосырьевой базы в системе STEIN // Труды ИПМИ КарНЦ РАН. Вып. 1. Петрозаводск. С. 169–174. (соавт. В. И. Кузина.)

Оценка эффективности инвестиций в освоение лесосырьвой базы // Труды ИПМИ КарНЦ РАН. Вып. 1. Петрозаводск. С. 175–180. (соавт. В. И. Кузина.)

2000. Методика решения задачи Штейнера с потоками и весами // Труды ИПМИ КарНЦ РАН. Вып.2. Петрозаводск. С. 143–150. (соавт. В. И. Кузина.)

2001. Методы поиска наивыгоднейшего варианта сети лесовозных дорог // Лесной журнал. № 3. С. 63–70. (соавт. Г. А. Борисов, В. И. Кузина.)

2007. О приложении методов эволюционного моделирования к потоковой задаче Штейнера // Труды ИПМИ КарНЦ РАН. Вып. 8. Петрозаводск. С. 120–130.

2008. Эволюционная модель для задачи Штейнера с потоками и зависящими от них весами // Известия РАН. Теория и системы управления. № 3. С. 125–132.

2009. Об оптимизации параметров лесотранспортных сетей в современных условиях // Лесной журнал. № 1. С. 60–65. (соавт. Г. А. Борисов.)

2010. Генетические операторы эволюционной модели для потоковой задачи Штейнера // Известия РАН. Теория и системы управления. № 2. С. 74–80.

2012. Эволюционный алгоритм оптимизации распределительной электрической сети // Ученые записки ПетрГУ. Петрозаводск. С. 67–70 (соавт. Г. А. Борисов.)

Оптимизация конфигурации распределительных сетей // Электричество. № 4. С. 14–18. (соавт. Г. А. Борисов.)

ПРИЛОЖЕНИЕ
http://transactions.krc.karelia.ru

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации в
«Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершенных оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, потери науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учетом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редколлегии серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляют за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил ее оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы «Анкеты» и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылается электронная версия «Анкеты» и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее, чем через месяц после получения рецензии.

Почтовый адрес редакции: 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 780109.

Содержание номеров Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные варианты статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступна на сайте – http://transactions.krc.karelia.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Статьи должны быть подписаны всеми авторами.

Объем рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объем рисунков не должен превышать 1/4 объема статьи. Рукописи большего объема (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

Рукописи присылаются в электронном виде, а также в двух экземплярах, напечатанных на одной стороне листа формата А4. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в нижнем правом углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

ОБЩИЙ ПОРЯДОК РАСПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТЕЙ СТАТЬИ

Элементы статьи должны располагаться в следующем порядке: *УДК* курсивом на первой странице, в левом верхнем углу; заглавие статьи на русском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; инициалы, фамилии всех авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название организации – место работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, то следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов учреждениям, в которых они работают; если все авторы статьи работают в одном учреждении, можно не указывать место работы каждого автора отдельно); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; инициалы, фамилии всех авторов на английском языке полужирным шрифтом; название статьи на английском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; аннотация на английском языке; ключевые слова на английском языке; текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: ВВЕДЕНИЕ. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ. ВЫВОДЫ. ЛИТЕРАТУРА); благодарности; литература (с новой страницы).

Дополнительные сведения об авторах: фамилия, имя, отчество всех авторов полностью на русском и английском языке; полный почтовый адрес каждой организации (страна, город) на русском и английском языке; должности авторов; адрес электронной почты для каждого автора; телефон для контактов с авторами статьи (можно один на всех авторов).

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать содержание статьи и содержать не более 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, содержать только главную информацию статьи, не превышать объем – 15 строк.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ. Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце фразы ставится точка.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ должны содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

ИЗЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. Следует ссылаться на табличный и иллюстративный материал так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т. д.), фотографии, помещаемые на вклейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во Введении. С с ы л к и н а л и т е р а т у р у в т е к с т е даются номерами в квадратных скобках.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Д и а г р а м м ы и г р а ф и к и н е д о л ж н ы д у б л и р о в а т ь т а б л и ц ы. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, должны быть пояснены в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ должны содержать достаточно полную информацию, для того чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. В этой рубрике выражается признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и фондам, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи, а также указываются источники финансирования работы.

ЛИТЕРАТУРА. Пристатейные ссылки и/или списки пристатейной литературы следует оформлять по ГОСТ Р 7.0.5-2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления (http://www.bookchamber.ru/GOST_P_7.0.5.-2008). Список работ представляется в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами ставится пробел.

Электронные версии статей выпусков серии «Математическое моделирование и информационные технологии» принимаются в формате .tex (LaTex 2є) с использованием стилевого файла, который вместе с примером находится по адресу http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755.

TABLE OF CONTENTS

Научное издание

Труды Карельского научного центра
Российской академии наук

№ 5, 2012

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. Вып. 3

Печатается по решению
Президиума Карельского научного центра РАН

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-48848 от 02.03.2012 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций

Редактор М. А. Радостина
Оригинал-макет Е. Н. Спектор
Стилевой файл А. С. Румянцев

Подписано в печать 06.11.2012. Формат 60x84$^1/_8$.
Гарнитура CMR. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 16,8. Усл. печ. л. 16,27.
Тираж 500 экз. Изд. № 333. Заказ 92

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50