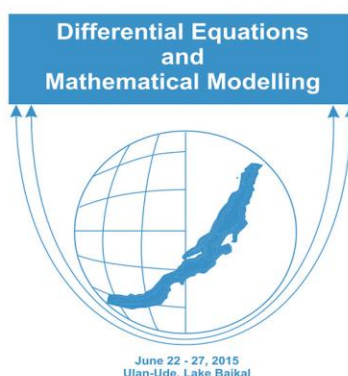


МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

22 - 27 июня, 2015
Улан-Удэ, Байкал, Россия

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ



INTERNATIONAL CONFERENCE DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL MODELING

June 22 - 27, 2015
Ulan-Ude, Baikal, Russia

ABSTRACTS



**Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Восточно-Сибирский государственный университет
технологий и управления
East Siberia State University of Technology and Management**

**Новосибирский государственный университет
Novosibirsk State University**

**Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Sobolev Institute of Mathematics**

**Северо-Восточный федеральный университет
North-Eastern Federal University**

**Бурятский государственный университет
Buryat State University**

**Национальный университет Республики Узбекистан
The National University of Uzbekistan**

**Югорский государственный университет
Yugra State University**

**МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**INTERNATIONAL CONFERENCE
DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL MODELING**

Тезисы докладов / Abstracts

Улан-Удэ, 2015 / Ulan-Ude, 2015

Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов / под ред. д. ф.-м.н. А.И. Кожанова, к. ф.-м. н. Б.Б.Ошорова. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2015. – 368 с.

ISBN 978-5-89230-609-6

Ответственный за выпуск : к.ф.-м.н. Е.Г. Васильева

В сборник включены тезисы докладов, представленных на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», проходившей 22-27 июня 2015 года , г. Улан-Удэ, оз. Байкал.

Все тезисы включены в сборник в авторской редакции.

Представляет интерес для научных работников, аспирантов, студентов.

Конференция организована при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 15-01-20380), Новосибирского государственного университета, Корпорации INTEL.

THE FRACTIONAL DISCRETE MODEL WITH ONE DIMENSION

B.Uuganbayar¹, D.Oyunbileg²

¹Mongolian University of Science and Technology

²Mongolian National University

Introduction

I studied about complete analysis, that is founded myself, of fractional discrete model illustrates the growth of animal family without any categorization with using Matlab program.

Fractional discrete model could be expressed

$$\bar{x}(t+1) = \frac{\mu \bar{x}(t)}{1 + (d \bar{x}(t))^\alpha} \quad (1)$$

Here, $d > 0$ is the ecological necessities of one member of biological family. In the other words, allotted field, grass and feed etc.

To simplify the model, substituting $x(t) = d \bar{x}(t)$. It becomes

$$x(t+1) = \frac{\mu x(t)}{1 + x^\alpha(t)} \quad (2)$$

Here $\mu > 0$, $\alpha > 0$

Equilibrium points of equation (2) could find following, $x_1 = 0$, $x_2 = (\mu - 1)^{\frac{1}{\alpha}}$. Bifurcation parameter, μ expresses coefficient of growth.

In the next case when $\alpha > 2$ and $0 < \mu < 1$, equilibrium point at $x_1 = 0$ will be stable.

Where $\left| \frac{\mu - \alpha\mu + \alpha}{\mu} \right| < 1$ and $1 < \mu < \frac{\alpha}{\alpha - 2}$, equilibrium point at $x_2 = (\mu - 1)^{\frac{1}{\alpha}}$ will be constantly stable.

Where $\alpha > 2$, the stabilization of equilibrium point is distort at the specific values of exogenous parameter of μ , gradually condition of bifurcation, stable cycle, chaos may happen.

Therefore, now we need to find the parameters value that starts bifurcation, stable cycle, chaos.

Choose $\alpha = 3$, analyze the function. Cause analyze will be have same results at any α in the condition of $\alpha > 2$.

Where $1 < \mu < 3$. Equilibrium point $x_2 = (\mu - 1)^{\frac{1}{\alpha}}$ will be stable. In the other words, equilibrium point's stabilization starts to distort at the value of $\mu_0 = 3$. Furthermore, bifurcation, stable cycles $2, 2^2, 2^3, \dots$ would start.

$\mu_0 = 3$ is the first value, that provides condition of $F(x_1(\mu)) = x_2(\mu)$, $F(x_2(\mu)) = x_1(\mu)$ which has 2 length and stable, of bifurcation parameters that generate $(x_1(\mu); x_2(\mu))$ cycle.

This cycle is stable between interval where $\mu_0 < \mu < \mu_1$, but stabilization would be distorted furthermore, the stable cycle which has 4 length would be generated when $\mu = \mu_1$. μ_n denotes bifurcation parameter that would distort cycle stabilization which has length of 2^n , would generate stable cycle which has length of 2^{n+1} .

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4.669162... \quad (3)$$

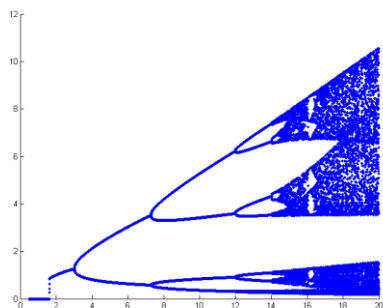
When we know this constant and μ_1 , we could find what is called feigenbaumis point.

$$\mu_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \quad (4)$$

This point is the end of bifurcation. In the other words, when parameter is $\mu > \mu_{\infty}$, the chaotic state would be generated, not bifurcation [1].

However, this method has approximation error there are more accuracy methodology [1]. When it is $\alpha = 3$, attractors figure shown as below. The figure has drown by Matlab program.

Figure 1.



From the figure 1, obviously, μ_{∞} would be existed between interval, (14;16). If we assume $\alpha > 2$, it will become

$$\mu_0(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha - 2}. \text{ From this fraction } \mu_0(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha - 2}, \text{ it will be}$$

provided $\lim_{\alpha \rightarrow 2} \mu_0(\alpha) = \infty$. Therefore when α is close to 2, we can see that the phase of this equation attractor,

$$x(t+1) = \frac{\mu \cdot x(t)}{1 + x^{\alpha}(t)}, \text{ would have unique stable point even}$$

the values of μ are infinite.

If $\mu_1(\alpha)$ is close to 1, approximately, $\mu_{\infty}(\alpha) \approx 1$. In this case, phase would be entirely chaos and consist of narrow windows of any length cycles.

References

1. Арнольд В.И., Шапиро А.П. *Бифуркации дискретных динамических систем*. Принт. Владивосток: ИАПУ ДВНЦ, 1977.
2. Хэссард и другие. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла*, пер. с англ., М.: Мир, 1985, с. 283.
3. David Assaf, IV, & Steve Gadbois, *Definition of Chaos*, American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 9, 1992, p.865.

UDC 53

ZETA FUNCTION, RIEMANN HYPOTHESIS, AND INVERSE PROBLEMS

Bukhgeim A.L.

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Wichita State University,
Russia / USA
bukhgeym@math.wichita.edu*

Let's consider the integral equation that arises in the inverse problem for the wave equation

$$A_{\lambda} u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{|y| < 1} \frac{u(y) dy}{|x - y| \cdot |\lambda x - y|} = f(x), \quad x, y \in R^3, \quad (1)$$

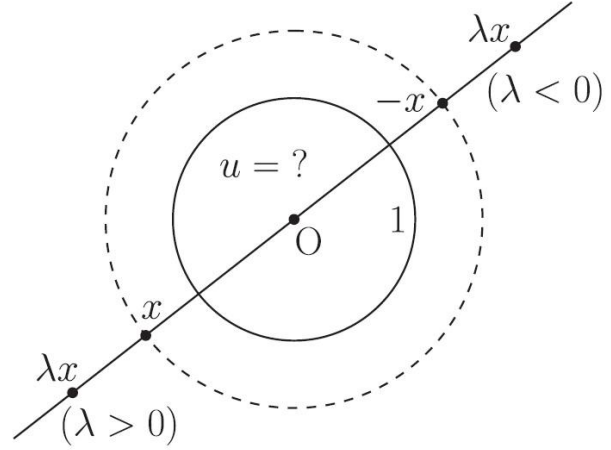
where $\lambda \in R, |\lambda| \geq 1$, and $f(x)$ is given for $|x| \in [a, b], a > 1$, see the Figure below.

If $\lambda = 1$, then (1) is Riesz integral equation and $\text{Ker}(A_1) = O$.

If $\lambda = -1$, then $\text{Ker}(A_{-1}) \neq O$ and consists of all odd functions $u(y)$.

So we can expect that the forward scattering ($\lambda < 0$) is a more difficult problem than the back scattering ($\lambda > 0$).

And this is really so!



Theorem. $\text{Ker}(A_\lambda) = O$ for $\lambda \neq -1, |\lambda| \geq 1$.

In order to prove it for the case $\lambda < 0$, we need to prove some kind of an analog of Riemann hypothesis for the Zeta function of an algebraic variety over a finite field. It is much easier than the proof of Weil conjectures, but still is a nontrivial problem.

For our case the corresponding "Zeta function" is given by the formula

$$\zeta_n(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{P_n(q^{-1/2})} \cdot \frac{1}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} \cdot P_n(q^{1/2-s}),$$

where $q > 1$ is a fixed parameter, $n \in N$, and $P_n(z)$ is a sequence of polynomials generated by operator A_λ .

Hypothesis. $\zeta_n(s)$ has trivial zeros: $\zeta_n(-2m) = 0, m \in N$, simple pole at $s = 1$ with $\text{RES}[\zeta_n, 1] = 1$. All other nontrivial zeros belong to the critical line $\text{Re } s = \frac{1}{2}$.

This is the "Riemann's hypothesis" that gives us the uniqueness theorem for the equation $A_\lambda u = f$ for $\lambda < 0$.

This result was announced in a plenary report on the 7-th international conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation" held on May 26-31, 2014, in Fethiye, Turkey.

In this paper we sketch the proof of this result and consider the new applications to 3D inverse problems.

ALMOST ORTHOGONAL QUASI-ISOMETRIC GRIDS

ПОЧТИ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КВАЗИ-ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ СЕТКИ

Gennadii A. Chumakov^{1,2}

¹*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, RUSSIA*

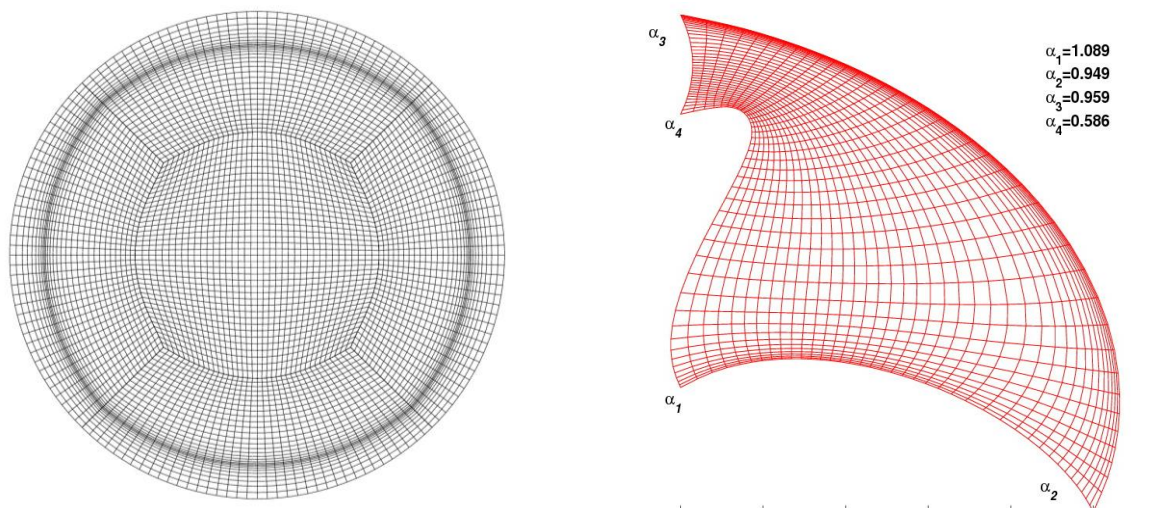
²*Novosibirsk State University, Novosibirsk, RUSSIA*

chumakov@math.nsc.ru

Generation of orthogonal regular grids of sufficiently high-quality remains a prominent challenge. An orthogonal grid offers significant advantages in the solution of systems of partial differential equations; many works have been devoted to generation of such grids. In particular, the quasi-conformal maps have been widely used for generation of orthogonal grids.

We discuss a special class of canonical domains for generation of quasi-isometric grids. The base computational strategy of our approach is that the physical domain is decomposed into five non-overlapping blocks which are automatically generated by solving a variational problem. Four of these blocks – those containing the corners – are conformally equivalent to the geodesic quadrangles on the surfaces of constant curvature, while the fifth block is a conformal image of a nonconvex polygon composed of five planar rectangles (or a large rectangle with four small rectangles cut out of its corners). To ensure that the angles of the physical and canonical domains coincide and the conformal modules are the same, the four corner blocks are taken to be some geodesic quadrangles on the surfaces of constant curvature; namely, on the spherical, planar, or Lobachevsky planes, which depends on the angles of the physical domain. Within each of these blocks some quasi-isometric grid is generated. The orthogonality of the coordinate lines holds in the fifth, central block.

We present an algorithm for automated construction of the one-parameter family of such canonical domains. The parameter δ is defined in such a way that, by the theorem that we have proved, for every physical domain there exists a unique value of δ for which the mapping from the canonical domain onto the physical region is conformal and its derivative is bounded. Application of this mapping results in a grid inside the physical region that is orthogonal far from the corners. This strategy ensures the existence of such canonical domain (that means the possibility of generating the desired grid) and the uniqueness of the mapping, i.e., our algorithm cannot converge to two different solutions. Note that the grid lines are the images of the geodesics in corresponding metrics.



Almost orthogonal multi-block quasi-isometric grid in a physical domain.
One-block almost orthogonal quasi-isometric grid in a physical domain

**NONLINEAR DYNAMICS OF MATHEMATICAL MODELS OF
CATALYTIC SYSTEMS**
**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
КАТАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Nataliya A. Chumakova^{1,2}, Alexander S. Noskov¹

¹*Boreskov Institute of Catalysis, pr. Aka. Lavrent'eva 5, Novosibirsk, 630090 RUSSIA*

²*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 2, Novosibirsk, 630090 RUSSIA*

chum@catalysis.ru

Mathematical models of processes in the catalytic systems are characterized by non-linearity at all levels [1]: chemical transformations on the catalyst surface, transfer processes on a single catalyst particle, heat and mass transfer in an elementary volume of a catalytic reactor, and processes in a technological scheme. A kinetic model describing the dynamics of chemical reactions on the surface of a catalyst is, as a rule, an autonomous system of ordinary differential equations. A model of heat and mass transfer processes in a catalyst particle is a boundary-value problem for some system of parabolic equations in the spherical or Euclidean coordinate system. And a mathematical description of transient processes in a catalytic reactor can be presented as an initial-boundary problem for a system of differential equations of different types in at most four spatial coordinates, and, moreover, there can be ordinary differential equations (in spatial coordinate or/and in time) and transport equations of the first order, together with some equations of the "diffusion plus reaction" type, supplemented by algebraic equations for the quasi-stationary variables. At each level of description complexity (details), there are many questions to mathematicians, i.e., the problems of qualitative and quantitative study of the properties of a certain model and its adequacy to the process in some real catalytic system.

We will present results of studying the complex dynamics of kinetic models of small dimension. In the case of a system of three nonlinear ordinary differential equations with fast, intermediate, and slow variables, we will focus on the problems of multiple steady states, bifurcation of periodic solutions, generation of aperiodic dynamics with change of a parameter (or parameters). Also some limit models will be discussed which describe the performance modes of the catalytic fixed-bed reactors with periodic operation (in the case of a periodic control function having high frequency, i.e., the so-called "sliding" mode), as well as the models in which an asymptotic solution of the form of a "heat and concentration front" is formed in the case of sufficiently long interval (an infinitely long catalyst layer). In particular, in the latter case we discuss the question of approximation the problem on the infinite interval over the space-coordinate by the problem on an interval of finite length.

We are also concerned about the problems of the qualitative theory as well as numerical analysis that naturally arise in the studying the mathematical models. Let us mention the problems of global bifurcation of codimension one, transition to non-periodic dynamics in result of a cascade of period doubling bifurcations, etc. (first of all, these are concerned the theory of ordinary differential equations). There is a number of issues of computational analysis that attracted our attention, we would pointed the numerical approximation of solutions over an infinite interval, the questions of parametric sensitivity, the study of system properties in a neighborhood of the bifurcation parameter values, etc.

References

1. *Mikhail Gavrilovich Slin'ko – a Soldier of Science and Motherland*, Ed. by V. N. Parmon (Izd. SO RAN, Novosibirsk, 2014).

A DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD TO SOLVE THE HELMHOLTZ EQUATION IN HETEROGENOUS MEDIA

**Hélène Barucq¹, Abderrahmane Bendali^{2,3}, Julien Diaz¹,
M'Barek Fares³, and Sébastien Tordeux¹**

¹*Projet Magique 3D, INRIA Bordeaux Sud-Ouest and LMA - UMR
CNRS₅₁₄₂, Université de Pau et des Pays de l'Adour*

²*INSA-Mathematical Institute of Toulouse (UMR-CNRS₅₂₁₉)*

³*Algo, CERFACS
sebastien.tordeux@gmail.com*

The Discontinuous Galerkin Finite Element Method (DG-FEM) and the Boundary Element Method (BEM) are nowadays classical numerical techniques.

On one hand, the DG-FEM is really appropriate to deal with highly heterogeneous media in time harmonic domain. In comparison with continuous Finite Elements Method (FEM), this method is well adapted to direct solver since its connectivity diagram is significantly smaller than the one of FEM. However, it suffers from numerical pollution (this pollution effect can be limited thanks to high order elements).

On the other hand, the BEM is one of the most efficient methods to deal with homogeneous media (especially when accelerated by a multipole method or thanks to the Adaptive Cross Approximation). Moreover, this method is less affected by numerical pollution. However, BEM is not adapted to heterogeneous media.

In this talk, we would like to present a DG-FEM whose elements are defined thanks to a BEM. This new numerical discretization will benefit from the advantages of BEM and DG-FEM, but is much harder to program.

УДК 517.9

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ОДУ С ПОМОЩЬЮ РЕЗУРГЕНТНОГО АНАЛИЗА

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR SINGULAR ODE'S IN THE LIGHT OF RESURGENT ANALYSIS.

Jean Ecalle

D.R. emeritus at CNRS and Orsay University, France

Унив. Орсе, Франция

jean.ecalle@math.psud.fr

1. Сингулярные ОДУ и резургентные функции: Речь идет здесь о локальных ОДУ (т.е. о ростках ОДУ) сингулярного типа, около $z = \infty$ для технического удобства. Формальные решения таких ОДУ в виде степенных рядов от z^{-1} чаще всего расходятся, но поддаются просуммированию по Борелю:

$$\varphi(z) = \sum a_n z^{-n} \mapsto \hat{\varphi}(\zeta) = \sum a_n \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} \mapsto \varphi_\theta(z) = \int_{\arg \zeta = \theta} \hat{\varphi}(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta, \quad (*)$$

причем преобразования Бореля $\hat{\varphi}(\zeta)$ суть ‘резургентные функции’: у них дискретная констелляция особых точек ω , и они отличаются свойством самовоспроизведения (‘resurgence’) в каждой из этих ω .

2. $\bar{\Delta}$ - операторы и $\mathbb{Z}$ - символы: Поскольку особые точки ω ответственны за расходимость изначального ряда $\varphi(z)$ и несут важнейшую информацию ('постоянные Стокса'), вводятся специальные операторы $\hat{\Delta}_\omega$ для точного описания поведения $\hat{\varphi}(\zeta)$ в ω .

Преобразы $\bar{\Delta}_\omega$ в z -плоскости формально действуют как дифференцирование: $\bar{\Delta}_\omega(\varphi_1\varphi_2) = \bar{\Delta}_\omega(\varphi_1)\varphi_2 + \varphi_1\bar{\Delta}_\omega(\varphi_2)$. К ним присоединяются, как двойственное понятие, символы $\mathbb{Z}^{\omega_1, \dots, \omega_r}$ с их особой таблицей умножения ('shuffle product').

3. Просуммирование расходящихся решений: по процедуре (*) выше.

4. Теоремы трансцендентности и независимости ('дифф. теория Галуа'):

Дисплей ('display') $\text{dpl}(\varphi)$ резургентной функции дан формулой

$$\text{dpl}(\varphi)(z) := \varphi(z) + \sum_{1 \leq r} \sum_{\omega_i} \mathbb{Z}^{\omega_1, \dots, \omega_r} \bar{\Delta}_{\omega_r} \dots \bar{\Delta}_{\omega_1} \varphi(z)$$

и полезен тем, что любое отношение $R(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \equiv 0$ влечет за собой куда более сильное отношение $R(\text{dpl}(\varphi_1), \text{dpl}(\varphi_2), \dots) \equiv 0$.

5. Вычисление постоянных Стокса ('прямая задача'): Резургентный анализ приводит к явным, замкнутым выражениям для постоянных Стокса и позволяет их вычислить (особенно доминантных) с большой точностью.

6. Построение сингулярных ОДУ, обладающих заранее заданным набором постоянных Стокса. Это так сказать обратная задача или 'синтез'. Решающую роль играют здесь так наз. 'резургентные одночлены':

$$U_c^{\omega_1, \dots, \omega_r}(z) := \text{SPA} \int_0^\infty \frac{\sum (\omega_i(z - y_i) + c^2 \bar{\omega}_i(z^{-1} - y_i^{-1})) dy_1 \dots dy_r}{(y_1 - z)(y_2 - y_1)(y_r - y_{r-1})},$$

которые относятся к $\bar{\Delta}$ -операторам ровно так, как обыкновенные одночлены к простым дифференциальным операторам, и тем самым легко приводят к формальному решению задачи о 'синтезе', причем сходимость этого формального решения автоматически обеспечена для достаточно больших значений параметра c .

7. Резургентные функции еще нашли применение в других областях математики (дифф. геометрия, дискретные динамические системы, сингулярные возмущения и т.д. и т.п.) и даже в физике (в так наз. квазиклассическом подходе к квантовой механике и еще в теории поля).

Литература

1. Six Lectures on Transseries, Analysable Functions etc // Proc. of the 1992 Montreal Seminar on Bifurcations, Kluwer Acad. Publ., pp. 75-184.
2. Recent Advances in the Analysis of Divergence and Singularities // Proc. of the 2002 Montreal Seminar on Normal Forms in ODEs, Kluwer Acad. Publ., pp. 87-187.
3. Ряд других работ, относящихся к теме, можно найти на сайте автора:
4. <http://www.math.u-psud.fr/ecalle/>

INVERSE PROBLEMS FOR THE NONLINEAR STATIONARY EQUATIONS

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Lyubanova A.Sh.*

* Siberian federal university, Russia, Krasnoyarsk

lyubanova@mail.ru

This work proceeds the investigation started in [1, 2] and is concerned with an inverse problem for the second order differential equation

$$- \operatorname{div}(\mathbf{k}(x, u) \nabla \psi(u)) + \gamma(x, u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

where $\mathbf{k}(x, u)$ is a matrix of functions, $\psi(u)$ and $\gamma(x, u)$ are scalar functions. We assume that Ω is a bounded domain in $\mathbf{R}^n$ with the boundary $\partial\Omega \subset C^2$.

Applications of this problem deal with the recovery of unknown parameters indicating physical properties of a medium (the heat conductivity, the permeability of a porous medium, etc.). Of special interest is the problem of finding the leading coefficients of (1) given the additional boundary data on $\partial\Omega$ or a part of $\partial\Omega$.

In this work we study the problem of the identification of the constant coefficient k in equation

$$k \{-\operatorname{div}(\mathbf{M}(x) \nabla \psi_1(u)) + m(x) \psi_1(u)\} + g(x) \psi_2(u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

with the Dirichlet boundary data

$$u|_{\partial\Omega} = \beta(x). \quad (3)$$

Here $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, are known functions of the argument $s \in \mathbf{R}^1$, $\mathbf{M}(x)$ is a matrix of functions $m_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. The functions $m(x)$, $g(x)$, $f(x)$, $\beta(x)$ are given and suppose to be nonnegative. The linear operator $M = -\operatorname{div}(\mathbf{M}(x) \nabla) + m(x)I$ (I – the identity operator) is assumed to be elliptic and selfadjoint. It is also supposed that the functions $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$ are continuous and nonnegative in $(-\infty, +\infty)$ and strictly increase.

Equation (1) arises in the models of the non-equilibrium effects in a simultaneous flow of immiscible fluids in porous media. Some kinds of equations (1) are involved in modeling the electric fields of semiconductors. In physical context the constant coefficient k is interpreted as the average conductivity of a medium.

As an additional data for the recovery of the coefficient k we take the condition of overdetermination

$$k \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi_1(u)}{\partial \bar{N}} \omega(x) ds = \varphi \quad (4)$$

where $\partial/\partial \bar{N} \equiv (\mathbf{M}(x) \nabla, \mathbf{n})_R$ is the conormal derivative $((\cdot, \cdot)_R$ – the inner product in $\mathbf{R}^n$), $\mathbf{n}$ is a unit outward normal to $\partial\Omega$, $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ is a part of $\partial\Omega$, $\omega(x)$ is a given function, φ is a given real number. Physically, the condition (3) describes, for instance, the total flux of the liquid through the surface of the rock.

Under some additional conditions the existence and uniqueness of the solution to the inverse problem (2) – (4) involving a function $u \in W = \{v \mid \psi_1(v) \in W_2^2(\Omega), v \in L^{2p}(\Omega), p > 1\}$ and a positive real number k is proved. The proof is based on the reduction of the inverse problem to an operator equation

$$k = A(k)$$

where A is a contraction operator on the set $0 < k_0 \leq k \leq K_0$. The stability of the solution to the problem (2) – (4) follows from the contractibility of the operator A .

References

1. Lyubanova A. Sh. Identification of a constant coefficient in an elliptic equation // *Applicable Analysis*. 2008. V. 87. P. 1121–1128.
2. Lyubanova A. Sh. Identification of a constant coefficient in a quasi-linear elliptic equation // *Journal of inverse and ill-posed problems*. 2014. V. 22. P. 341–356.

UDC 517.9

ON COMPACTIFICATION OF SOLUTIONS OF QUASILINEAR PARABOLIC INEQUALITIES*

A.B. Muravnik

*JSC Concern "Sozvezdie", Voronezh
amuravnik@mail.ru*

Phenomena like compactification, instant compactification, and finite-time extinction of solutions are known for various classical and nonclassical problems of mathematical physics (see, e.g., [1, 2] and references therein). We extend this theory to quasilinear parabolic inequalities containing nonlinearities of the so-called Burgers-Kardar-Parisi-Zhang type (and their generalizations) arising, e.g., in modelling of directed polymers and interface growth (see [3, 4]).

Consider the problem

$$\Delta u + \sum_{j=1}^n a_j(x, u) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \geq f(u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

assuming that there exists a function $g(s)$ continuous in $[0, +\infty)$ and such that $a_j(x, s) \leq g(s)$, $j = \overline{1, n}$, while u_0 is continuous, bounded, and nonnegative in $\mathbb{R}^n$.

Introduce the function

$$F(s) = \int_0^s e^{\int_0^x g(\tau) d\tau} dx.$$

This function is defined and invertible on $(-\infty, +\infty)$. Therefore, the function

* This research was supported by RFBR grant No. 14-01-00265 and by the president grant for government support of the leading scientific schools of the Russian Federation No. 4479.2014.1.

$$\beta(s) = e^{\int_0^{F^{-1}(s)} g(\tau) d\tau} f[F^{-1}(s)]$$

is defined on $(-\infty, +\infty)$.

Theorem 1. Suppose that $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) = 0$, $f(0) = 0$, and $f(s) > 0$ in $(0, +\infty)$ while

$\beta(s)$ does not decrease on $(0, +\infty)$ and is such that $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s\beta(s)}} < \infty$. Then any (classical)

nonnegative solution of problem (1)-(2) has the following properties:

- (i) $\sup u(x, t)$ is bounded for any positive t ;
- (ii) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ uniformly with respect to $t \in [0, +\infty)$;
- (iii) there exists a positive T such that $u(x, t) \equiv 0$ in the half-space $\mathbb{R}^n \times [T, +\infty)$.

Remark. In the framework of this theory, results obtained for inequalities are stronger than the ones obtained for equations: if a function satisfies an equation, then it satisfies the corresponding inequality a fortiori and, therefore, it possesses properties (i)-(iii) as well.

References

1. A.S. Kalashnikov. Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations // Russ. Math. Surv. 1987. Vol. 42, № 2. P.169-222.
2. A.S. Kalashnikov. Conditions for the instantaneous compactification of carriers of solutions of semilinear parabolic equations and systems // Math. Notes. 1990. Vol. 47, № 1-2. P. 49-53.
3. M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 889-892.
4. E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Burgers equation with correlated noise: Renormalization group analysis and applications to directed polymers and interface growth // Phys. Rev. 1989. Vol. A39. P. 3053-3075.

POHOZHAEV IDENTITIES AND APPLICATIONS FOR QUASI-LINEAR EQUATIONS OF MIXED ELLIPTIC-HYPERBOLIC TYPE

Nedyu Popivanov

Faculty of Mathematics and Informatics, University of Sofia, Bulgaria

nedyu@fmi.uni-sofia.bg

Starting from the ground-breaking paper of Pohozaev (1965), it is well known that the homogeneous Dirichlet problem for semilinear elliptic equations such as $\Delta u + u|u|^{p-2} = 0$ in Ω , a bounded subset of $\mathbb{R}^n$, with $n > 2$, permits only the trivial solution if the domain is star-shaped, the solution is sufficiently regular, and $p > 2^*(n) := 2n/(n-2)$, where the latter quantity is the critical exponent in the Sobolev embedding of $H_0^1(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$ for $p < 2^*(n)$. It has been shown in [1], [2] that the nonexistence principle in supercritical case also holds for certain two dimensional problems for the mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator L (instead of Δ), with some appropriate boundary conditions. It is also valid for a large class of such problems even in higher dimensions [3]. In dimension 2, such operators have a long-standing connection with transonic fluid flow. Of course, the critical Sobolev embedding in this case is from of a suitably weighted version of $H_0^1(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$. As usual, in BVP for such mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator L , the boundary data's are given only on the proper subset of the boundary. To compensate the lack of a boundary condition on a part of boundary, a sharp Hardy-Sobolev inequality is used, as was first done in [1], [2] and later in [3], [4].

References

- [1] Lupo D., K. Payne, Critical exponents for semi-linear equations of mixed elliptic-hyperbolic types, *Comm. Pure Appl. Math.*, v.56 (2003), 403-424.
- [2] Lupo D., K. Payne, Conservation laws for equations of mixed elliptic-hyperbolic type, *Duke Math. J.*, v. 127 (2005), 251-290.
- [3] Lupo D., K. Payne, N. Popivanov, Noneexistence of nontrivial solutions for supercritical equations of mixed elliptic-hyperbolic type, *Progress in Non-Linear Differential Equations and Their Applications*, Birkhäuser Verlag Basel, v. 66 (2005), 371 - 390.
- [4] D. Lupo, K. Payne, N. Popivanov, On the degenerate hyperbolic Goursat problem for linear and nonlinear equations of Tricomi type, *Nonlinear Analysis, Series A: Theory, Methods & Appl.*, v. 108 (2014) 29–56.

2010

Mathematics Subject Classification: 35M12

Keywords and phrases: Pohozaev identities, critical Sobolev embedding exponent, elliptic-hyperbolic operator

Topics: Partial Differential Equations and Applications

ON THE DIRICHLET TYPE PROBLEM TO DEGENERATE AT A LINE ELLIPTIC SYSTEMS

Rutkauskas S.

*Institute of Mathematics and Informatics of Vilnius University, Lithuania
stasys.rutkauskas@mii.vu.lt*

Let $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, $\Gamma = \partial D^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, be a domain of points $x = (x_0, x')$, $x' = (x_1, \dots, x_n)$, containing the cylinder $C_R = \{(x_0, x') : |x'| < R, 0 < x_0 < H\}$, both bases of which lie on Γ . Thus, the line $x' = 0$ cross the domain D and intersect with Γ by two points $O(0, 0)$ and $P(H, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

We consider in D the system of equations

$$\sum_{i,j=0}^n A_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=0}^n B_i(x) u_{x_i} + C(x) u = F(x) \quad (1)$$

assuming that matrixes $A_{ij} = \text{diag}(a_{ij}^{(1)}, \dots, a_{ij}^{(m)})$, $B_i = \text{diag}(b_i^{(1)}, \dots, b_i^{(m)})$, $C = (c_{kl})$, $(k, l = \overline{1, m})$ and right-hand side $F = \text{diag}(f_1, \dots, f_m)$ are smooth enough in $\overline{D}$.

Let Ω be the projection of D onto the plane $x_0 = 0$. We assume that there exist continuous in Ω and positive for $|x'| \neq 0$ functions a_1 and a_2 such that $a_2(0) = 0$ and

$$a_1(x') |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=0}^n a_{ij}^{(k)}(x) \xi_i \xi_j \leq a_2(x') |\xi|^2, \quad k = \overline{1, m},$$

in D for each $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Therefore, system (1) is elliptic in $D_0 = D \setminus \{x' = 0\}$ in the sense of Petrovskii and its order degenerates at the line $x' = 0$. Note, if $n = 1$, then the line $x' := x_1 = 0$ divides domain D into two separate subdomains having the common part of their boundaries lying on the line $x_1 = 0$. In this case system (1) degenerates at the boundaries of these subdomains which coincides with this line.

Let $D_\delta = D \setminus \{x : |x'| \leq \delta < R\}$. Introduce the class of vector-functions

$$C_{loc}^{2,\alpha}(D_0) = \left\{ u : u \in C^{2,\alpha}(\overline{D_\delta}) \quad \forall \delta > 0 \right\}.$$

The following two Dirichlet type problems to system (1) are studied:

$$u = g \quad \text{on} \quad \Gamma_0 = \Gamma \setminus \{O \cup P\}, \quad |u| < \infty \quad \text{in} \quad D_0, \quad (2)$$

$$u = g \quad \text{on} \quad \Gamma_0 = \Gamma \setminus \{O \cup P\}, \quad \lim_{x' \rightarrow 0} (u(x_0, x') - h(x_0, x' / |x'|)) = 0. \quad (3)$$

Here g, h are given smooth enough functions.

The sufficient conditions of existence and uniqueness of the solution $u \in C_{loc}^{2,\alpha}(D_0)$ problems (2) and (3) are given.

ON THE CONTINUATION OF THE SOLUTIONS OF A GENERALIZED CAUCHY-RIEMANN SYSTEM

Sattorov E.N.*, Ermamatova Fotima E.**

* Samarkand State University, Uzbekistan, Samarkand

Sattorov-e@rambler.ru

** Samarkand State University, Uzbekistan, Samarkand

Let $x = (x_1, \dots, x_n)$ and $y = (y_1, \dots, y_n)$ be points of the n – dimensional Euclidean space R^n , D a bounded simply connected domain in R^n , with piecewise-smooth boundary consisting of a piece T of the plane $y_n = 0$ and smooth surface S lying in the half-space $y_n > 0$.

Suppose that vector function $U = (u_1, \dots, u_n)$ satisfied in D the system equations [1]

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + a_k u_k \right) = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - b_k u_j + b_j u_k = 0 \quad (k, j = 1, \dots, n), \quad (1)$$

Statement of the problem. Find a regular solution U of system (1) in the domain D using its Cauchy data on the surface S :

$$U(y) = f(y), \quad y \in S \quad (2)$$

where $f(y)$ is a given continuous vector function on S .

Using results from [2], [3],[4] on solving the Cauchy problem, we construct the Carleman matrix for the Laplace and Helmholtz equations in explicit form and, on its basis, the regularized solution of the Cauchy problem for system (1). By using the continuation formula we found necessary and sufficient for the extendibility of functions given on a part of a boundary to the domain as a solution of the system (1). We prove the Fock-Kyni theorem for this one. This result was proved in [5]-[7] of the domain D three-dimensional Euclidean space.

References

1. Obolashvili E. // TRANSACTIONS of the Ins.Mathem. Sic. Acad. GSSR, т LVIII, 1978, p. 168-173.
2. Lavrent'ev M.M. Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics, Novosib., 1962, 92 pp.
3. Yarmukhamedov Sh. // Dokl. Akad.Nauk SSSR, 235(2), 281-283(1977).
4. Yarmukhamedov Sh. // Dokl. Ross. Akad.Nauk 357(3), 320-323 (1997)
5. Sattorov E.// Differentsial'nye Uravneniya 44(8), 1100-1110 (2008).
6. Sattorov E.// Mathematical Notes 85(5), 733-745 (2009).
7. Sattorov E.// Izv.Vyssh.Uchebn.Zaved.Mat., №1,32-45(2011)

BOUNDARY INTEGRAL CONDITIONS FOR THE KOHN LAPLACIAN ON THE HEISENBERG GROUP*

Suragan D.*, Baikonys A.**

**Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
suragan@list.ru

*** Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
baikonys@mail.ru

In this talk we construct an integral boundary condition for the Kohn Laplacian in a given domain on the Heisenberg group and state a correct nonlocal boundary value problem for the Kohn Laplacian, which is solvable explicitly. This also amounts to finding the trace on smooth surfaces of the Newton potential associated to the Kohn Laplacian. We also obtain similar results for higher powers of the Kohn Laplacian.

This talk is based on papers [1] and [2].

References

1. T.Sh. Kal'menov and D. Suragan. To spectral problems for the volume potential, Doklady Mathematics, 80 (2009), pp. 646-649.
2. M. Ruzhansky, D. Suragan. On Kac's principle of not feeling the boundary for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group, to appear in Proceedings of the American Mathematical Society. 2015

*The authors were supported in parts by the MES RK grant 5127/GF4

UDC:51

ASYMPTOTIC STABILITY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH DIAGONAL PERIODIC COEFFICIENTS

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДИАГОНАЛЬНО- ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

T.Batzul*, B.Chimedlodoi*, Sh.Uurthaikh**

**Mongolian University of Science and Technology, **Institute of Finance and Economic*
must1204@gmail.com

Abstract. In this work we defined following new criteria asymptotic stability of second order system linear homogeneous differential equations with diagonal periodic coefficients.

Let's consider the following second order system of linear differential equations.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 \end{cases}, \quad (1)$$

New criteria. /Criteria asymptotic stability of second order system linear homogeneous differential equations with diagonal periodic coefficients/. Let $a_{11}(x)$, $a_{12}(x)$, $a_{21}(x)$ and $a_{22}(x)$ be diagonal periodic real continuous functions with the period $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$. Then fundamental matrixes $\Phi(x)$ of system (1) will be following form: $Y = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{bmatrix} e^{Bx}$, where B -real constant quadratic matrix and all elements of matrix $P(x)$ will be the diagonal periodic functions with the period $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$. Then number λ named multi-applicator of system. Let λ_1 and λ_2 be eigenvalues of matrix B .

A). System (1) will be asymptotic stable system, if $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ and $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Moreover, $Y_2 = (f_{21}(x)e^{\lambda_2 x}, f_{22}(x)e^{\lambda_2 x})$ will be solution asymptotic stable system, if $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ and $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$.

B). Let $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ be. if $\operatorname{Re} \lambda < 0$, then system (1) will be asymptotic stable system and $Y_2 = (f_{21}(x)e^{\lambda_2 x}, f_{22}(x)e^{\lambda_2 x})$ will be solution asymptotic stable system.

References

1. Т.Батзул и др. Обобщение теоремы Флоке-Ляпунова. ВЕСТНИК БГУ. 9(2). 2014
2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва 1985 г. Изд. "Наука".
3. Ильин В.А. и др. Математический анализ. Том-2. Изд МГУ. 1987г

UDC 519.1

CLASSICAL SOLVABILITY OF THE RADIAL VISCOUS FINGERING PROBLEM IN A HELE-SHAW CELL

ЗАДАЧИ НЕЧЕТКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ПРИНЦИПА ЗАДЕ

Tani A.

Keio University, Japan, Yokohama
tani@math.keio.ac.jp

Classical Stefan problem is a nonlinear problem with a free boundary for heat equation.

Concerning a problem with analogous conditions on the free boundary for elliptic equations, one arrives at the (one-phase) Hele-Shaw problem, which is of hydrodynamic type: in this case the time dependency of the problem is preserved due to the variation of the free boundary with time.

In this communication, we are concerned with proving the classical solvability of the Hele-Shaw problem with radial geometry by applying the same method as in the Stefan problem and justifying the vanishing the coefficient of the derivative with respect to time in a parabolic equation.

(This is a joint work with H. Tani)

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ БИЦАДЗЕ-ЯНУШАУСКАСА BITSADZE-YANUSHAUSKAS SYSTEM'S BOUNDARY VALUE PROBLEM

Абдрахманов А.М.*

* Уфимский государственный авиационный технический университет,
Россия, Уфа
abdrai@mail.ru

Рассмотрим систему

$$-\Delta u_j + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Она сильно эллиптична при $\lambda < 1$. Пусть область D полупространство $x_n > 0$ или шар $\{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$.

В этих областях рассмотрим следующую краевую задачу: найти регулярное в области D решение $u_1, u_2, \dots, u_n$ системы (1), удовлетворяющее на границе Γ области условиям

$$u_j = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \bar{n}} = f_n, \quad (2)$$

где $\bar{n}$ - внутренняя нормаль Γ .

Доказана теорема: Для достаточно гладких функций $f_j, j = 1, 2, \dots, n$, фигурирующих в граничном условии (2), при $\lambda > 1$ краевая задача (2) для системы (1) в шаре или полупространстве всегда разрешима. Соответствующая однородная задача в полупространстве имеет одно линейно-независимое решение, а в шаре имеет бесконечно много линейно-независимых решений.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОСТОРОННЕГО НАГРЕВА СТЕКЛОПЛАСТИКОВОГО СТЕРЖНЯ С УПРУГОЙ ОПОРОЙ MODELING OF FIBERGLASS ROD WITH THE ELASTIC SUPPORT'S ONE-SIDED HEATING

Абдрахманова А.А., Павлов В.П.

Уфимский государственный авиационный технический университет,
Россия, Уфа
abdrahmanova-a@mail.ru

Рассматривается прямой стеклопластиковый стержень прямоугольной формы. Стержень нагревается таким образом, что температура изменяется во времени t и вдоль координатной оси X_3 , оставаясь одинаковой вдоль осей X_1, X_2 . В трех слоях стержня при $x_s^{(2)}, s = 1, 2, 3$ заданы экспериментальные [1] зависимости температуры от времени $T_s = T_s(t), s = 1, \dots, 3$. при одностороннем нагреве стержня из КТ-11-К-Ф, закрепленного

по концам в опорах заданной жесткости. Экспериментальные зависимости $T_s = T_s(t)$, $s = 1, 2, 3$ аппроксимированы сплайнами третьей степени дефекта один

На основе сплайнов рассчитаны зависимости температуры от времени $T_s = T_s(t)$ в рассматриваемых слоях материала.

Сплайны позволяют определить значения температуры $T_s^{(t)} = T(x_s^{(2)}, t)$, $s = 1, 2, 3$ для любого момента времени t из рассматриваемого временного интервала в трех точках с координатами $x_s^{(2)}$, $s = 1, 2, 3$.

На основе информации о температуре в указанных трех слоях построены для времени t зависимости температуры от координаты x_2 в форме алгебраического многочлена третьей степени.

При этом, в следствие того, что информации о температурах только в трех точках не достаточно для определения коэффициентов полинома третьей степени, принято, что поверхность стержня $x_2 = x_1^{(2)} = \text{const}$ является адиабатной, т.е. тепловой поток через нее равен нулю:

$$q = \lambda \frac{\partial T(x_1^{(2)})}{\partial x_2} = 0$$

Для многочлена $T(x_2)$ сформирована система из четырех алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 a_i (x_s^{(2)})^{i-1} = T_s, & s = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} = \sum_{i=2}^4 a_i (x_1^{(2)})^{i-2} = 0, \end{cases}$$

решением которой являются значения коэффициентов a_i , $i = 1, \dots, 4$.

На основе данной методики были рассчитаны для значений времени $t = 0, 50, 100, 150$ с зависимости температуры T от координаты x_2 .

Полученные зависимости позволяют рассчитывать температуру в любой точке стержня в любой момент времени при одностороннем нагреве.

Литература

1. Павлов В.П. Тепловая деформация, прочность и термовязкоупругость стеклопластиков при высокой переменной во времени температуре в условиях термодеструкции. - Уфа: Изд-во УГАТУ, 2004. 218с.
2. Павлов В.П., Абдрахманова А.А. Расчет изгиба балок методом сплайнов// Математические заметки ЯГУ. Т.13. Вып.1.- Якутск: Изд-во ЯГУ, 2006.- 98-104с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С КОНОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА.

ABOUT ONE PROBLEM WITH CONORMAL DERIVED FOR ELLIPTICAL TYPE EQUATION OF THE SECOND KIND.

Абдуллаев А.А.

Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека,
Узбекистан, Ташкент
akmal09.07.85@mail.ru

В работе исследуется краевая задача с конормальным производным для уравнения эллиптического типа второго рода.

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m < 0. \quad (1)$$

Пусть D - конечная однозначная область в плоскости (x, y) , ограничена кривой σ при $x > 0, y > 0$ с концами в точках $A(0,0), B(1,0)$ и отрезком AB оси Ox .

Введём обозначения

$$J = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, \quad \partial D = \bar{\sigma} \cup \overline{AB}, \quad 2\beta = \frac{m}{m+2},$$

причём $-\frac{1}{2} < \beta < 0$.

Задача. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cup C^1(D \cup \sigma \cup J)$ – причём u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше чем -2β в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$;

2) $u(x, y)$ - дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в области D ;

3) $u(x, y)$ - удовлетворяет краевым условиям

$$\left\{ \delta(s) A_s[u] + \rho(s) u \right\} \Big|_{\sigma} = \varphi(s), \quad 0 < s < l,$$

$$a_0(x) u_y(x, 0) + \sum_{j=1}^n a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} u(x, 0) + a_{n+1}(x) u(x, 0) = b(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $\delta(s), \rho(s), \varphi(s), a_j(x), b(x)$ заданные функции, причём

$$b(0) = 0, \quad a_0(1) \neq 0,$$

$$\begin{cases} a_j(x) = [x(1-x)]^{\alpha_1} \bar{a}_j(x), & (j = \overline{1, n}), \\ a_0(x) = [x(1-x)]^{\alpha_2} \bar{a}_0(x), \\ a_{n+1}(x) = [x(1-x)]^{\alpha_3} \bar{a}_{n+1}(x), \\ \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 > 1, \end{cases}$$

$$\delta^2(s) + \rho^2(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0, l],$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j^2(x) \neq 0, \quad \forall (x, 0) \in \bar{J}, \quad \delta(s), \rho(s), \varphi(s) \in C[0, l],$$

$$\bar{a}_j(x), b(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J), \quad (j = \overline{0, n+1}),$$

и

$$A_s[u] = y^m \frac{dy}{ds} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$\frac{dx}{ds} = -\cos(n, y)$, $\frac{dy}{ds} = \cos(n, x)$, n – внешняя нормаль к кривой σ , l – длина всей кривой σ , s – длина дуги кривой σ , отсчитываемая от точки $B(1,0)$, а $D_{0x}^{\alpha_j}[*]$ – оператор (в смысле Римана - Лиувилля) интегрирования дробного порядка $\alpha_j \in (-1,0)$ задаваемый формулой [1]:

$$D_{0x}^{\alpha_j} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_j)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha_j+1}}, \quad -1 < \alpha_j < 0.$$

Единственность решения данной задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование с помощью интегральных уравнений.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М. 1985г. - 304 с.

УДК.517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ NON-LOCAL PROBLEM FOR THE LOADED MIXED TYPE EQUATION WITH THE INTEGRATED OPERATORS.

Абдуллаев О.Х

Национальный университет Узбекистана.

Узбекистан. Ташкент.

obidjon.mth@gmail.com

В работе, рассматривается нелокальная задача для нагруженного уравнения эллиптического-гиперболического типа:

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} + \frac{1 - \operatorname{sgn} y}{2} \sum_{k=1}^n R_k(x, u(x, 0)) = 0 \quad (1)$$

с интегральным оператором [2]:

$$R_k(x, u(x, 0)) = \begin{cases} p_k(x) D_{x1}^{\alpha_k} u(x, 0), & \text{при } q \leq x \leq 1 \\ r_k(x) D_{-1x}^{\alpha_k} u(x, 0), & \text{при } -1 \leq x \leq -q \end{cases}$$

$$D_{ax}^{\alpha_k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_k)} \int_a^x (x-t)^{-1-\alpha_k} f(t) dt, \quad D_{xa}^{\alpha_k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_k)} \int_x^a (t-x)^{-1-\alpha_k} f(t) dt \quad \text{при } \alpha_k < 0$$

в конечной двусвязной области Ω , ограниченной линиями:

$$\sigma_1: x^2 + y^2 = 1; \quad \sigma_2: x^2 + y^2 = q^2, \quad y > 0;$$

и характеристиками:

$$A_j C_1: x + (-1)^j y = (-1)^{j+1}; \quad B_j C_2: x + (-1)^j y = (-1)^{j+1} \cdot q; \quad (0 < q < 1), (j=1, 2)$$

уравнения (1) при $y < 0$, где $A_1(1;0)$, $A_2(-1;0)$, $B_1(q;0)$, $B_2(-q;0)$, $C_1(0;-1)$, $C_2(0;-q)$

$$\text{Введем обозначения: } \theta_1(x) = \frac{x+1}{2} + i \cdot \frac{x-1}{2}, \quad \theta_2(x) = \frac{x-1}{2} - i \cdot \frac{x+1}{2}, \quad (i^2 = -1);$$

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \Omega \cap (y > 0), \quad \Delta_1 = \Omega \cap (x + y > q) \cap (y < 0); \\ \Delta_2 &= \Omega \cap (y - x > q) \cap (y < 0), \quad D_1 = \Omega \cap (-q < x + y < q) \cap (x > 0), \\ D_2 &= \Omega \cap (-q < y - x < q) \cap (x < 0), \quad D_3 = \Omega \cap (-1 < x + y < -q) \cap (-1 < y - x < -q) \\ D_0 &= \Omega_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad I_{2+j} = \left\{ x : 0 < (-1)^{j-1} x < q \right\}, \quad I_j = \left\{ x : \frac{q+1}{2} < (-1)^{j-1} x < 1 \right\}, (j=1, 2).\end{aligned}$$

Задача I. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$; 2) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$, кроме того, $u_y \in C(A_1 B_1 \cup A_2 B_2)$ причем $u_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $x \rightarrow \pm q$, а при $x \rightarrow \pm 1$ ограничена;
- 3) на линиях изменения типа выполняются условия склеивания

$$u_y(x, -0) = u_y(x, +0), \quad (x, 0) \in A_1 B_1 \cup A_2 B_2,$$

- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y) \Big|_{\sigma_j} = \varphi_j(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\sigma_j}; \quad u(x, y) \Big|_{B_j C_2} = g_j(x), \quad x \in \overline{I_{2+j}};$$

$$\frac{d}{dx} u(\theta_1(x)) = a_1(x) u_y(x, 0) + b_1(x) u_x(x, 0) + c_1(x), \quad x \in (q, 1);$$

$$\frac{d}{dx} u(\theta_2(x)) = a_2(x) u_y(x, 0) + b_2(x) u_x(x, 0) + c_2(x), \quad x \in (-1, -q);$$

где $\varphi_j(x, y)$, $g_j(x)$, $a_j(x)$, $b_j(x)$, $c_j(x)$, ($j=1, 2$) – заданные функции, причем:

$$g_1(0) = g_2(0), \quad g_2(-q) = \varphi_2(-q, 0), \quad g_1(q) = \varphi_2(q, 0),$$

Лемма. Общее решение уравнения (1) при $y < 0$ представимо в виде [1]:

$$u(x, y) = f_1(x + y) + f_2(x - y) + \omega_j(x)$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, а $\omega_j(x)$ – решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega_j''(x) + \sum_{k=1}^n R_k(x, u(x, 0)) = 0, \quad \omega_j(x) = \begin{cases} \omega_1(x) & \text{при } x \geq 0; \\ \omega_2(x) & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

удовлетворяющего условиям

$$\omega_2(-1) = \omega_2'(-1) = \omega_1(1) = \omega_1'(1) = 0.$$

Теорема. Если выполнены условия $\varphi_j(x, y) = (xy)^r \bar{\varphi}_j(x, y)$; $\bar{\varphi}_j(x, y) \in C(\overline{\sigma_j})$,

$g_j(x) \in C(\overline{I_{2+j}}) \cap C^2(I_{2+j})$, $a_j(x), b_j(x), c_j(x) \in C(\overline{A_j B_j}) \cap C^2(A_j B_j)$, $2a_j(x) > 1$, $2b_j(x) \neq 1$, $p_k(x) \in C(\overline{A_1 B_1}) \cap C^2(A_1 B_1)$, $q_k(x) \in C(\overline{A_2 B_2}) \cap C^2(A_2 B_2)$ и $p_k(x), r_k(x) > 0$ ($k=1, n$), $2a_j(x) > 1$, $2b_j(x) \neq 1$ то решение поставленной задачи существует и единственно.

Единственность решения задачи доказывается аналогично, как и в работе [1], а существование методом интегральных уравнений.

Литература

1. Абдуллаев О.Х. О единственности решения краевой задачи для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в двусвязной области // Доклады АНРУз. 2011. №3. С.3-7.

2. Islomov B., Baltayeva U. Boundary value problem For the Classical and mixed integrodifferential equations with Rieman-Liouville operators. International JPDE. V-2013. ID157947, 7 pages.

УДК 728.11:681.1

МЕТОДЫ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ, ПЛАНИРОВАНИЯ И ОРГАНИЗАЦИИ ЗДРАВООХРАНЕНИЯ MATHEMATICAL METHODS FOR THE MANAGEMENT, PLANNING AND ORGANIZATION OF HEALTH CARE

Абдуллаев Х.Т.

*Актюбинский университет им. С. Баишева, Казахстан, Актюбе.
hamit_66@mail.ru*

За последние два десятилетия отечественные [2] и зарубежные исследователи все чаще используют математические методы для управления, планирования и организации здравоохранения, для поиска научно - обоснованных решений. Наиболее широко стали внедряться математические модели, разработанные на базе методов исследования операций. Перспективными в настоящее время считаются следующие разделы:

- линейное программирование;
- динамическое программирование;
- методы сетевого планирования;
- математические методы управления запасами;
- математическая теория игр;
- теория массового обслуживания и др.

Указанные методы позволяют построить математические модели различных процессов, имеющих место в здравоохранении. Целесообразность и актуальность применения математических моделей в АСУ учреждениями здравоохранения особенно возрастает сейчас, когда здравоохранение страны переходит на новые организационные формы работы [1,3]. При разработке и внедрении моделей предпочтительнее иметь систему моделей, охватывающих весь цикл управления, когда выход одной модели является входом для другой. Все многообразие моделей, приемлемых для здравоохранения, представлено шестью группами [1]:

1. Модели прогнозирования ситуации. Основное назначение - дать руководителям информацию о будущей ситуации для правильного принятия решения.

2. Имитационные модели деятельности учреждений здравоохранения позволяют изучать нагрузку отдельных подразделений в зависимости от общей нагрузки учреждения, оптимизировать его структуру и состав.

3. Многокритериальные модели оптимального распределения ресурсов в условиях ограничений на них. Позволяют получать оптимальные планы распределения и нагрузки различных ресурсов, которые необходимы для организации медицинской помощи (количественный фонд, финансы, ставки, бригады и т.п.).

4. Модели оптимальных расписаний. Позволяют проводить различные оптимизации во времени (оптимальные планы-графики, маршруты расписаний и т.п.). Данные модели широко использовались для управления разработкой и внедрением АСУ «Горздрав» (сетевые графики) и в этом качестве являются неотъемлемой частью системы.

5. Логико-лингвистические модели и модели искусственного интеллекта. Этот класс моделей позволяет проводить оптимизацию в условиях «плохой» формализуемости объекта, в условиях, когда знания об объекте в основном экспертные.

6. Модели анализа на основе информации о состоянии здоровья населения на данной территории или обслуживаемого континента (смертность, инвалидность, заболеваемость, обращаемость в ССМП, обращаемость в поликлинику, детская смертность и т.п.), информации о состоянии внешней среды (загрязнение воздуха, воды, санитарно-гигиеническая обстановка), а также информации о ресурсах здравоохранения. Выделяются три вида наиболее важных факторов, влияющих на состояние здоровья:

- природные (не управляемые);
- факторы, зависящие от деятельности здравоохранения (управляемые);
- факторы, зависящие от деятельности человека в регионе.

С учетом этих факторов проводится комплексная оценка, принимаются решения, направленные на улучшение состояния здоровья на территории республики.

Литература

1. Чечин Г.И., Максаков В.В., Максакова О.С. Некоторые методические подходы к созданию моделей управления учреждений здравоохранения города. //Материалы всерос. конф. «Системный анализ и моделирование в здравоохранении». – Новокузнецк, 1992. С. 69-77.
2. Кант В.И. и др. Применение некоторых методов статистического анализа и моделирования в исследованиях проблем сельского здравоохранения. //Здравоохранение. – Кисинев, 1986, №1. С. 6-12.
3. Акрамов К.Т. Моделирование развития регионального комплекса «Здоровье»: Автореф. канд. диссер. – Ташкент, 1993. – 18 с.

УДК 532:536

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ ПРИТОКА К БОКОВЫМ СТВОЛАМ МНОГОСТВОЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ*

INVERSE PROBLEM OF QUANTITATIVE EVALUATION INFLOW TO SIDEHOLE OF MULTILATERAL WELL

Абдуллин А.И., Морозов П.Е.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт механики и машиностроения Казанского научного
центра Российской академии наук, Россия, Казань
abdullin@imm.knc.ru*

Технология бурения многоствольных горизонтальных скважин (МГС) используется для разработки низкопроницаемых и слоистых пластов, а также пластов, содержащих высоковязкую нефть. Основное преимущество МГС заключается в создании максимальной площади контакта с продуктивным пластом, приводящего к увеличению области дренирования и снижению депрессии в пласте. Результаты термогидродинамических исследований используются для мониторинга и оптимизации режима работы МГС, а также для оценки дебитов боковых стволов скважины.

Из законов сохранения массы, импульса и энергии [1, 2] с учётом присоединённой массы получим систему дифференциальных уравнений, описывающую процесс тепломассопереноса в стволе горизонтальной скважины:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = -\frac{2\mathbf{w}}{r_c} + \sum_i \delta(x_i) \frac{q_i}{\omega}, \quad -\frac{dp_1}{dx} = \rho \frac{d(\mathbf{v}^2)}{dx} + \frac{\pi}{4r_c} \psi \rho \mathbf{v} |\mathbf{v}|, \quad 0 < x \leq L, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + v \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} + \varepsilon \frac{dp_1}{dx} \right) = \frac{2(\alpha_{mp} - \omega \rho C_p)}{\rho C_p r_c} (T_2|_{S_c} - T_1) - \sum_i \delta(x_i) q_i C_p (T_1^{(i)} - T_1), \quad 0 < t \leq t_{\text{exp}} \quad (2)$$

где p_1 , T_1 – давление и температура в скважине, ω – скорость фильтрации, v – скорость флюида в стволе ГС, q_i – приток из бокового ствола, ω – площадь сечения ствола, ψ – коэффициент гидравлического сопротивления, r_c – радиус скважины, L – длина ГС, α – коэффициент теплопередачи, C_p – коэффициент удельной теплоемкости флюида, ρ – плотность, t_{exp} – время работы скважины.

Для описания нестационарной неизотермической фильтрации жидкости к МГС в пласте используется следующая система уравнений в частных производных [2]:

$$\beta^* \frac{\partial p_2}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\mathbf{k}}{\mu} \nabla p_2 \right), \quad (3)$$

$$C_n \frac{\partial T_2}{\partial t} = \rho C_p \frac{\mathbf{k}}{\mu} \nabla p_2 (\nabla T_2 + \varepsilon \nabla p_2) + \nabla (\lambda \nabla T_2) + m \rho C_p \eta \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad (x, y, z) \in V, \quad 0 < t \leq t_{\text{exp}}, \quad (4)$$

с начальными

$$p_2(x, y, z, t_0) = p_k, \quad T_2(x, y, z, t_0) = T_k \quad (5)$$

и граничными условиями

$$p_2|_{\partial V_2} = P_k, \quad (\mathbf{w}, \mathbf{n})|_{\partial V_1} = 0, \quad \int_{S_c} (\mathbf{w}, \mathbf{n}) d\sigma = Q(t), \quad (6)$$

$$T_2|_{\partial V_2} = T_k, \quad -\lambda (\nabla T_2, \mathbf{n}) = 2(\alpha_{mp} - \omega \rho C_p) (T_2 - T_1), \quad (x, y, z) \in S_c, \quad (7)$$

где $Q(t) = Q_0 + C \frac{\partial p_2}{\partial t}$, Q_0 – дебит скважины на поверхности, $C = \sigma/\gamma$ – коэффициент влияния объема ствола скважины, σ – площадь затрубного пространства, γ – удельный вес флюида, p_2 , T_2 – давление и температура в пласте, $\mathbf{k}$ – тензор проницаемости, μ – динамическая вязкость, β^* – упругость пласта, m – пористость, C_n – коэффициент объемной теплоемкости пласта, ε – коэффициента Джоуля-Томсона, λ – теплопроводность пласта, η – коэффициент адиабатического охлаждения, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали, $\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \nabla p_2$ – скорость фильтрации в пласте, α_{mp} – коэффициент теплопередачи.

Метод решения краевой задачи (1)-(7) основан на сопряжении внешней (в пласте) и внутренней (в стволе скважины) задач. Система (1)-(7) решается численно с помощью метода конечных разностей.

Обратная задача определения коэффициентов проницаемости k_j , дебитов боковых стволов q_j сводится к минимизации функционала-невязки:

$$\inf_{\xi} J, \quad J(\xi) = \sum_{i=1}^N \int_0^{t_{\text{exp}}} [T_{1,i}(t) - \varphi_i(t)]^2 dt, \quad (8)$$

где $\varphi_i(t)$ – измеренные значения температуры, $T_{1,i}(t)$ – решение системы уравнений (1) - (7) $\xi = (k_j, q_j)$, $0 < a_j \leq b_j$, $(a_j, b_j = \text{const})$, $i = \overline{1, M}$, N – количество приборов, M – количество боковых стволов, $M \leq N$.

Итерационная последовательность для минимизации функционала-невязки (8) строится на основе метода Левенберга-Марквардта. Вычислительный алгоритм тестировался на модельных и реальных данных. Анализ результатов расчетов на модельных данных показал, что разработанный алгоритм сходится, устойчив относительно возмущения входной информации и позволяет оценить коэффициенты проницаемости пласта и вклад боковых стволов в общий дебит по данным термогидродинамических исследований скважин.

Литература

1. Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965. - 238 с.
2. Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н., Бадертдинова Е.Р., Абдуллин А.И. Термогидродинамические исследования горизонтальных нефтяных скважин // Теплофизика высоких температур, 2012. Т. 50. № 6. С. 830 - 834.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект № МК-7380.2015.1) и РФФИ (проект №14-05-00861).

УДК. 517.956.3

КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ РЕАКТОРА

CRITERIA FOR UNIQUENESS OF THE SOLUTION BOUNDARY- VALUE PROBLEM OF STATIONARY MODES OF OPERATION OF THE REACTOR

Абдурахимов Абдунаби

Ташкентский архитектурно строительный институт (ТАСИ)
abduraximov1943@mail.ru

При исследовании влияния продольного и поперечного перемешивания на стационарный режим работы химического реактора с неоднородным псевдоожигенным слоем, поперечные градиенты, как правило, не рассматриваются и роль поперечного перемешивания сводится к увеличению эффективных коэффициентов перемешивания в продольном направлении. Такое приближение справедливо только для реакторов небольшого диаметра, однако и они при таком упрощенном описании обладают столь высокой параметрической чувствительностью к изменению параметров, связанных с теплопередачей (например, температура оживающего агента), это свидетельствует о необходимости анализа распространения тепла в поперечном направлении.

Постановка задач. Ниже рассматриваются указанные выше проблемы в рамках двухфазной теории псевдоожигения системой из двух параллельных реакторов (для плотной и пузырьковой фаз) с различными коэффициентами поперечной и продольной дисперсии при наличии массообмена между фазами, изменении температуры в плотной фазе для одностадийной химической реакции в реакторе. Этот процесс описывается (в безразмерном виде) следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{1}{r} \frac{r}{dr} \left(r \frac{dT_1}{dr} \right) = P_e \left\{ ET_1 - U_1 \left(1 + \frac{A}{U_2} \right) - ET_0'' - \phi(T_1) \right\}. \quad (1)$$

Граничные условия для задачи можно записать:

$$\left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{dT_1}{dr} + B_i (T_1 - T') \right) \Big|_{r=1} = 0 \quad (3)$$

здесь

$$E = \frac{U_2}{\omega} \left[\exp \frac{-\beta}{U_2} - 1 \right] + U_1$$
$$\phi(T_1) = \left(\frac{AU_2}{U_1 f(T_1) - U_1} \right) \exp \left(-\frac{f(T_1)}{U_1} \right) - \frac{A}{U_2} \left(\frac{U_1^2}{f(T_1)} + \frac{f(T_1)}{2} \right), \quad f(T_1) = g \exp \left(-\frac{\beta}{T_1} \right)$$

Количество стационарных режимов работы реактора определяется числом решений двухточечной краевой задачи (1)-(3). В силу нелинейности функции $\phi(T_1)$ их может быть несколько. Поэтому представляет практический интерес достаточное условие, при котором стационарный режим становится заведомо единственным, исключаяющим такие нежелательные для технологии явления, как воспламенение и потухание реакции.

Для предлагаемой модели получены достаточные условия, накладываемые на параметры химического реактора с неоднородным псевдооживленным слоем, при которых всегда существует стационарный режим [2] и он, заведомо, единственный.

Литература

1. Абдурахимов А. Влияние продольной дисперсии на степень превращения реагента в реакторе с псевдооживленным слоем. // Научной конф. Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения. -Ташкент, 2013. С.126-127
2. Абдурахимов А. Влияние параметров неоднородности потока на систему процесса// Узбекский журнал. Проблемы информатики и энергетики, №3. 1999. С. 44-47.

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

INVERSE PROBLEMS FOR PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS

Б.С. Аблабеков

*Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова,
Бишкек Кыргызстан,
ablabekov_63@mail.ru*

Обратные задачи математической физики формулируются [2,3] на основе соответствующей прямой задачи, которая, как правило, классически корректна, т.е. решение существует, единственно и устойчиво по отношению к малым изменениям исходных данных. Для постановки прямой задачи для псевдо параболических уравнений требуется задать уравнение (коэффициенты), начальные и граничные условия.

В работе проведен обзор ряда обратных задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка (см.[1]). К таковым задачам можно отнести задачи определения граничных условий, правых частей и коэффициентов в псевдопараболическом уравнении по различным дополнительным информациям. Часть таких задач сводятся к прямым задачам для линейного и нелинейного нагруженного псевдопараболического уравнения, а некоторые из них используются в качестве регуляризирующего уравнения соответствующих некорректных задач для параболических уравнений.

Литература

- 1.Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек.-Илим, 2001.-183с.

2. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сиб. науч. Изд.-во, 2009. – 457с.
 3. Романов, В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. – 254с.

УДК 517.95

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ON AN MIXED PROBLEM FOR AN EQUATION OF THE THIRD ORDER

Абулов М.О., Амиров Ж.Р.

Каришинский Государственный университет, Кариши, Узбекистан
 e-mail: mumin.abulov@mail.ru

В области $Q = \{(x, y, t) \in R^3 : x > 0, -\infty < y < \infty, t > 0\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка

$$u_{xtt} - u_{xxx} - u_{xyy} = f(x, y, t) \quad (1)$$

Смешанная задача. Найти решение уравнения (1) в области Q , удовлетворяющее следующим начальным и граничным условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x, y), \quad (2)$$

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y|_{x=0} = 0, \\ u_{tt} + a_1u_{xx} + b_1u_{yy}|_{x=0} = 0, \\ u_{ttt} + a_2u_{xxx} + b_2u_{yyy}|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим

через

$$\tilde{A} = \{(x, y) \in R^2 : x > 0, -\infty < y < \infty\}, \quad \tilde{A}_1 = \{(t, y) \in R^2 : t > 0, -\infty < y < \infty\}$$

Отметим, что близкие задачи изучены в работах [1, 2].

Теорема. Пусть $u_0(x, y) \in W_2^4(\tilde{A})$, $u_1(x, y) \in W_2^3(\tilde{A})$, $f(x, y, t) \in W_2^1(\tilde{A})$, $a \neq 0$,

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a \neq a_2, \quad a(a - a_2)z^3 + a_2bz^2 + a_2z + (b_2a + ba_2) = 0$$

уравнение имеет три действительных корня и выполнены условия согласования

$$u_1(0, y) + au_{0x}(0, y) + bu_{0y}(0, y) = 0,$$

$$-a_1u_{0xx}(0, y) - b_1u_{0yy}(0, y) + au_{1x}(0, y) + bu_{1y}(0, y) = 0, \quad (4)$$

$$(a_2 - a)u_{0xxx}(0, y) + (b_2 + bb_1)u_{0yyy}(0, y) + a_1bu_{0xxy}(0, y) - au_{0xyy} - af(0, 0, y) = 0.$$

Тогда задача (1)-(3) однозначно разрешима в пространства $W_2^3(Q)$ и ее решение допускает оценку

$$\|u\|_{3,Q} \leq C(\|f\|_{1,Q} + \|u_0\|_{4,\tilde{A}} + \|u_1\|_{3,\tilde{A}}).$$

Доказательство. Из граничные условия (3) следует, что при $x = 0$, т.е. в области $\tilde{A}_1$

$$u_{xtt} = -\frac{1}{a}(u_{ttt} + bu_{tty}),$$

$$u_{xyy} = -\frac{1}{a}(u_{tyy} + bu_{yyy}),$$

$$u_{xxx} = -\frac{1}{a_2}(u_{ttt} + b_2u_{yyy}).$$

Эти равенства подставляем в уравнения (1) и в области $\tilde{A}_1 = \{(t, y) \in R^2 : t > 0, -\infty < y < \infty\}$ получим уравнение

$$(a - a_2)U_{ttt} + a_2 b U_{ty} + a_2 U_{yy} + (a_2 b + a b_2)U_{yyy} = a a_2 f(0, t, y) \quad (5)$$

В области $\tilde{A}_1$ рассмотрим задачу Коши: Найти решение уравнения (5), удовлетворяющее следующим условиям

$$U|_{t=0} = u_0(0, y), \quad U_t|_{t=0} = u_1(0, y), \quad U_{tt}|_{t=0} = -a_1 u_{0xx}(0, y) - b_1 u_{0yy}(0, y) \quad (6)$$

Известно что, в силу условий теоремы задача (5),(6) однозначно разрешима и верна оценка

$$\|U\|_{3, \tilde{A}_1} \leq C_1 (\|f\|_{1, Q} + \|u_0\|_{4, \tilde{A}} + \|u_1\|_{3, \tilde{A}}).$$

Далее рассмотрим в области Q следующую задачу

Смешанная задача. Найти решение уравнения

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} = f(x, y, t) \quad (7)$$

в области Q , удовлетворяющее следующим начальным и граничным условиям

$$\begin{aligned} v|_{t=0} &= u_{0x}(x, y), \quad v_t|_{t=0} = u_{1x}(x, y), \\ v|_{x=0} &= -\frac{1}{a}(U_t + bU_y). \end{aligned} \quad (8)$$

Известно[3], что если выполнены условия согласования (4), то задача (7),(8) однозначно разрешима в пространстве $W_2^3(Q)$ и ее решение допускает оценку

$$\|v\|_{3, Q} \leq C (\|f\|_{1, Q} + \|u_0\|_{4, \tilde{A}} + \|u_1\|_{3, \tilde{A}}). \quad (9)$$

Так как мы нашли $u_x = v(x, y, t)$ в области Q , то рассмотрим в области задачу Коши

$$\begin{cases} u_x = v(x, y, t), \\ u|_{x=0} = U(t, y). \end{cases}$$

Известно, что это задача поставлена корректна в области Q и ее решение допускает оценку

$$\|u\|_{3, Q} \leq C_2 (\|v\|_{3, Q} + \|U\|_{3, \tilde{A}_1}).$$

Отсюда, в силу (9) получим оценку

$$\|u\|_{3, Q} \leq C (\|f\|_{1, Q} + \|u_0\|_{4, \tilde{A}} + \|u_1\|_{3, \tilde{A}}).$$

Теорема доказана.

Литература.

1. Врагов В.Н. О смешанной задаче для системы гиперболических уравнений. Применение методов функционального анализа в уравнениях математической физике. Новосибирск, 1987. –С.59-66.
2. Абулов М.А. О смешанных задачах для одного уравнения третьего порядка. Препринт №22. Новосибирск, 1989. 32 с.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва, 1973. -408 с.

**ПРОГРАММНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ INTEL ДЛЯ РЕШЕНИЯ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ**
**INTEL SOFTWARE FOR SOLVING RESEARCH, SCIENTIFIC AND
EDUCATION PROBLEMS**

А.В.Авдеев, Г.М.Санжарлинская

Intel Corporation, Software & Services Group

В докладе рассказывается о современных тенденциях разработки высокопроизводительных приложений, дается обзор новейших программных инструментов Intel® Parallel Studio XE 2015 <https://software.intel.com/en-us/intel-parallel-studio-xe>, которые включают оптимизированные компиляторы, математические библиотеки и средства оптимизации и распараллеливания программ. Эти инструменты позволяют разработчикам оптимизировать скорость работы приложений в системах на базе процессоров текущего и будущих поколений, включая новейшие сопроцессоры Intel® Xeon Phi™. В зависимости от решаемых задач, разработчики могут использовать один из трех вариантов программного пакета (Composer, Professional и ClusterEdition), получая возможность с наименьшими усилиями повышать производительность приложений, запускаемых на серверах, вычислительных кластерах, рабочих станциях и настольных ПК. В докладе приводятся примеры эффективного использования программных инструментов Intel для эффективных параллельных вычислений при решении научно-исследовательских задач

Корпорация Intel предоставляет возможность бесплатного тестирования программных инструментов на Ознакомительном центре <https://software.intel.com/en-us/articles/try-buy-tools>, реализует программу обучающих вебинаров для разработчиков <https://software.intel.com/en-us/articles/intel-software-tools-technical-webinar-series> и поддерживает использование программных инструментов в исследовательских и учебных проектах в рамках Академической программы <https://software.intel.com/en-us/academic>

© 2014 г. Корпорация Intel, Intel и логотип Intel являются товарными знаками корпорации Intel в США и других странах. *Другие наименования и товарные знаки являются собственностью своих законных владельцев. Любая информация может быть изменена без уведомления. [Посетите наш сайт, чтобы ознакомиться с нашей политикой конфиденциальности http://www.intel.ru/content/www/ru/ru/homepage.html](http://www.intel.ru/content/www/ru/ru/homepage.html).

ИЕРАРХИЯ МОДЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ПОРИСТОСТИ*

POROSITY MEDIUM EFFECTIVE MODELS HIERARCHY

Агафонцев А.А.*, Иткина Н.Б.*, Шурина Э.П. *

* Новосибирский государственный технический университет,
Россия, Новосибирск
itkina.nat@yandex.ru

Решение проблем разработки материалов с заданными теплофизическими свойствами определяет возросший интерес к процедурам численной гомогенизации для областей с микровключениями. Первые работы по данному направлению принадлежат О.А.Олейник, В.В.Жикову, Р.Л.Федоренко. Существующие аналитические модели эффективной среды, такие как модель Бруггемана, Максвелла и другие не учитывают хаотическое расположение микровключений, разнообразии их форм и контрастность физических свойств. Именно поэтому особенный интерес вызывает современное направление численных методов решения многомасштабных задач в областях сложной структуры, таких как многомасштабный метод конечных элементов (multiscale method, MMFEM). Данная работа посвящена применению MMFEM к решению задачи определения эффективного коэффициента теплопроводности пористой среды с микровключениями. Идея MMFEM подробно излагается в работах Efendiev Y.R., Hou T.Y., Engquist B. и других.

Для определения эффективного коэффициента теплопроводности среды с микровключениями рассматривается стационарный тепловой процесс, описываемый уравнениями (1)-(2), в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 – скелет, а Ω_2 – включения, имеющие контрастные теплофизические характеристики. Граница области $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 – верхняя и нижняя, а Γ_2 – боковые грани области моделирования.

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0, \quad (1)$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

$$T|_{\Gamma_1^1} = T_g^1, T|_{\Gamma_1^2} = T_g^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

Эффективный коэффициент теплопроводности вычисляется как отношение L^2 -норм теплового потока и градиента теплового поля..

Рассматривается задача определения эффективного коэффициента теплопроводности компактированного под давлением гетерогенного материала «матрица С – ультрадисперсные включения MgO» стехиометрического состава (массовые доли: MgO – 0.77, С – 0.23). Задача определения эффективного коэффициента теплопроводности включает целый ряд особенностей: высокая концентрация включений (MgO – 37.6%, С – 62.4%), давление прессования (2-10 тонн), пористость (41-45%). Для выделения степени влияния данных факторов и типа их учета на величину эффективного коэффициента теплопроводности рассматривается иерархия моделей, представленная на рисунке 1.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН №98



Рисунок 1. Иерархия моделей эффективной среды.

Результаты вычислительных экспериментов позволяют сделать ряд выводов: 1) наблюдается слабое влияние мелкозернистых пор; 2) при рассмотрении сред с пористостью менее 10% и допустимой погрешностью вычислений в пределах 5%, целесообразно рассматривать среду как не имеющую пор; 3) в случае эллипсоидных пор имеет место сильное влияние ориентации эллипсоидов относительно потока тепла; 4) Высокую степень влияния на эффективный коэффициент теплопроводности имеют щели, заполненные воздухом, не пересекающие область целиком.

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

NUMERICAL METHOD FOR SOLUTION AN INVERSE PROBLEM FOR THE GENERALIZED BURGERS EQUATION

Айда-заде К.Р. *, Гамзаев Х.М.

**Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия, Азербайджан, Баку
kamil_aydazade@rambler.ru*

*** Институт Систем Управления НАНА, Азербайджан, Баку
xan.h@rambler.ru*

Уравнение Бюргерса, являющейся одним из важных нелинейных уравнений математической физики, первоначально было предложено для описания турбулентности [1]. В дальнейшем это уравнение было использовано для описания широкого класса процессов в гидродинамике, нелинейной акустике, физике плазмы и т.д.[2].

В данной работе рассматривается обратная задача для обобщенного уравнения Бюргера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d(t)u + g(t)f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

со следующими условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0,t) = \theta(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(l,t) = v(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Функции $\mu(t)$, $d(t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\theta(t)$ считаются заданными. Задача заключается в определении функций $u(x,t)$, $g(t)$ и $v(t)$, удовлетворяющих уравнению (1), условиям (2)–(4) и дополнительно заданным условиям

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = q(t), \quad (5)$$

$$\int_0^l u(x,t) dx = r(t). \quad (6)$$

Вопросы разрешимости обратной задачи по определению функции $g(t)$ в уравнении типа Бюргера исследованы в [3]. В работе [4] численно исследована обратная задача для одномерного линейного параболического уравнения по восстановлению функции источника от одной координаты.

В работе обратная задача (1)–(6) путем интегрирования уравнения (1) на отрезке $[0,x]$ по x и заменой

$$\int_0^x u(\xi,t) d\xi = w(x,t)$$

преобразуется к следующей задаче с локальными условиями

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\theta^2(t)}{2} = \mu(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu(t)q(t) + d(t)w + g(t)\tilde{f}(x,t),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$w(x,0) = \tilde{\varphi}(x),$$

$$w(0,t) = 0,$$

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = \theta(t),$$

$$w(l,t) = r(t),$$

$$\frac{\partial w(l,t)}{\partial x} = v(t).$$

Для численного решения полученной задачи построен разностный аналог ее и предложен безытерационный вычислительный алгоритм решения системы разностных уравнений.

Литература

1 Burgers I.M.. A mathematical model illustrating the theory of turbulence//Advances of mechanics, 1948, № 1, p.171–199.

2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

3. Белов Ю.Я., Коршун К.В. О задаче идентификации источника для уравнения Бюргера// Журнал Сибирского федерального университета, 2012, т.5, № 4, с.497–506.

4. Aida-zade K.R., Rahimov A.B. An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations// Inverse problems in Science and Engineering, v.22, 1-2, 2014, p.96–111.

УДК 117.9; 123.5

ПРИМЕНЕНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩИХ ХИМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ (ОБЗОР)

THE APPLICATION OF THE QUALITATIVE METHODS FOR ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS MODELLING CHEMICAL PROCESSES (REVIEW)

Акрамов Т. А.

*Уфимский институт (филиал) Российского экономического университета им. Г.В.
Плеханова, 450080, г.Уфа, ул. Менделеева 177\3
talgataa@hotmail.ru*

Конструирование, отбор и упрощение математических моделей физико-химических процессов моделей обусловлены целым набором требований, которые к этим моделям приходится предъявлять [1-2]. Решения соответствующих уравнений должны иметь физический смысл: они обязаны существовать «в целом» по времени, причем в закрытых системах процессы должны стабилизироваться к устойчивому состоянию равновесия.

В параболическом случае исчерпывающие результаты о классической разрешимости краевых задач получены при помощи специальной техники, связанной с использованием весовых Гёльдеровских пространств [3-4]. В гиперболическом случае также получены интересные результаты - указан класс начально-краевых задач, для которых с течением времени имеет место неограниченное повышение гладкости решений, характерное обычно для параболических уравнений [5-6].

Используя метод обобщенных функционалов Ляпунова в [7-8] удалось доказать теорему о безусловной стабилизации ограниченных решений. Были исследована структура множества стационарных решений; получены эффективные критерии их устойчивости, описаны области притяжения устойчивых стационарных решений.

Классическим способом исследования устойчивости стационарных решений является метод линеаризации, которым часто пользуются на практике без всякого обоснования. Этот метод был обоснован для широкого класса параболических и гиперболических систем общего вида [3-10]. Оказалось, что справедливость принципа линеаризации зависит от выбора норм, в которых измеряются отклонения возмущенных решений от стационарных решений.

Перечисленные результаты сделали возможным переход к моделированию химических процессов на качественно новом уровне. Построена математическая модель для многокомпонентных химических реакций совместно с процессами диффузионного и конвективного тепло-массопереноса [9,10]. Доказано, что эта модель обладает всеми свойствами, обусловленными физико-химической постановкой задачи. Методом функционалов Ляпунова установлены теоремы о стабилизации ограниченных и строго положительных решений задачи, допускающей существование положительных точек детального и комплексного равновесия, а также теоремы об устойчивости по Ляпунову таких равновесных состояний. Перечисленные результаты составляют математическое обоснование метода локальных потенциалов И.Пригожина [11].

Для описания процесса массопереноса за счет только конвективной диффузии и химических реакций используют краевые задачи для системы гиперболических уравнений. Используя результаты из [5,6], в работе [12] обоснован метод бифуркации рождения цикла (аналог теоремы Андронова-Хопфа) для поиска периодических по времени решений гиперболической задачи в окрестности стационарного решения.

Эти результаты находят применение при качественном анализе гиперболических задач, описывающих прямо- и противоточные химические реактора и колонны [13-15]. В частности, на примере противоточных химических реакторов показано, что периодические по времени режимы могут оказаться более выгодными по сравнению со стационарными режимами в [16].

Литература

[1] Aris R. The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts. Oxford:Clarendon Press.1975.V.1,2.

[2] Krambek F, J. The mathematical structure of chemical kinetics in homogeneous single-phase systems // Arch. Rational Mech. Anal. 1970. V. 38, №5. P. 317-347.

[3] Белоносов В. С, Вишневский М. П. Об устойчивости стационарных решений нелинейных параболических систем // Мат. сб. 1977. Т. 104 (146), № 4 (12). С. 535-558.

[4] Белоносов В. С. Оценки решений нелинейных параболических систем в Гельдеровских классах с весом и некоторые их приложения // Мат. сб. 1979. Т. ПО, №2. С. 163-188.

[5] Елтышева Н. А. О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. Т. 135, №2. С. 186-209.

[6] Лаврентьев М. М. (мл.), Люлько Н.А. Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 109-124. 1

[7] Зеленьяк Т. И. Качественная теория краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка параболического типа. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1972.

[8] Зеленьяк Т. И. О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа // Мат. сб. 1977. Т. 104, № 3. С. 486-510.

[9] Акрамов Т. А., Вишневский М.П. Некоторые качественные свойства системы реакция-диффузия // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 3-19.

[10] Акрамов Т.А. Дифференциальные уравнения и их приложение в моделировании физико-химических процессов. Уфа, БашГУ, 2000.

[11] Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации. М.: Мир, 1973.

[12] Акрамов Т.А. О поведении решений одной гиперболической задачи. // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, №3. С. 3-19.

[13] Akramov T.A., Stavarek P., Jiricny V., Stanek V. The Hydrodynamics of Counter Current Packed Bed Exposed to Periodic Variations of Inlet Velocity Analysis . Ind.Eng.Chem.Res. 2008, 47, p. 7424-7432.

[14] Akramov T.A., Stavarek P., Jiricny V., Stanek V. Minimum Energy Dissipation under Cocurrent Flow in Packed Beds. Ind.Eng.Chem.Res. 2011, 50, p.10824-10832.

[15] Акрамов Т.А. Анализ модели прямоточной колонны с периодическими граничными условиями на входе. // Сиб. Журн. Инд. Мат. 2013,Т.16, №3(55), С.16-27.

[16] Акрамов Т.А. Применение качественных методов анализа дифференциальных уравнений, описывающих физико - химические процессы. // Химическая промышленность сегодня. 2014, №11, С.5-17.

ОБОСНОВАНИЕ ЗАКОНА ДЕЙСТВУЮЩИХ МАСС ДЛЯ МАЛЫХ КОНЦЕНТРАЦИЙ В УРАВНЕНИЯХ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

VERIFICATION OF MASS ACTION LAW FOR THE LOW CONCENTRATIONS IN THE CHEMICAL KINETICS EQUATIONS

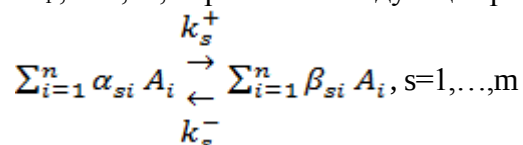
Акромов Т. А.

Уфимский институт (филиал) Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова, 450080, г.Уфа, ул. Менделеева 177\3

talgataa@hotmail.ru

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающая кинетику химических реакций, выписанная согласно закона действующих масс [1,2], адекватно описывает основные черты, свойства динамики концентраций многокомпонентной химически реагирующей смеси: компоненты решения остаются положительными во времени, если все начальные данные положительны; имеется общий линейный закон сохранения массы в случае существования положительного решения (вектора молекулярных весов) удовлетворяющего однородной системе линейных уравнений со стехиометрической матрицей реакций. Стационарные точки (ПТДР-положительные точки детального равновесия) являются условно асимптотически устойчивыми по Ляпунову, существует функция Ляпунова, гарантирующая стабилизацию строго положительного решения к ПТДР, однозначно определяемому по положительным начальным данным [3,4]. В данной работе исследуется вопрос об устойчивости и области притяжения других стационарных решений, не являющихся ПТДР.

Пусть между n веществами A_i , $i=1, \dots, n$ протекают следующие реакции:



Тогда ОДУ, описывающие кинетику этих реакций имеют вид:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{s=1}^m \gamma_{si} w_s(u(t)), \quad (1)$$

с положительными начальными данными

$$u_i(0) = u_i^0 > 0 \quad i=1, \dots, n \quad (2)$$

Здесь стехиометрическая матрица и скорость каждой стадии реакций заданы как

$$\Gamma = (\gamma_{si}) = (\beta_{si} - \alpha_{si}), \quad w_s(u) = w_s^+(u) - w_s^-(u) \quad s=1, \dots, m; \quad i=1, \dots, n, \quad (3)$$

где согласно закону действующих масс (ЗДМ) скорости прямой и обратных реакций определяются через положительные константы реакции $k_s^+ > 0$, $k_s^- > 0$ и концентрации $u_i(t)$ веществ A_i следующим образом [1-4]:

$$w_s^+(u) = k_s^+ \prod_{i=1}^n (u_i)^{\alpha_{si}}, \quad w_s^-(u) = k_s^- \prod_{i=1}^n (u_i)^{\beta_{si}} \quad (4)$$

Определим конус положительных векторов $u > 0$ как

$$R_+^n = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n : u_i > 0, i = 1, \dots, n\}$$

Для матрицы Γ из (3) будем предполагать существование такого положительного вектора $M \in R_+^n$, что $\Gamma M = 0$.

Это гарантирует наличие следующего линейного закона сохранения для реше-

ния задачи (1) – (2): $\sum_{i=1}^n m_i [u_i(t) - u_i(0)] > 0$. Решение задачи $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ будем называть строго положительным, если верны неравенства $u_i(t) \geq \delta > 0, i = 1, \dots, n$.

Определение. Положительная точка $a = (a_1, \dots, a_n) \in R_+^n$ называется положительной точкой детального равновесия (ПТДР), если прямые и обратные скорости всех стадий в этой точке равны, то есть $w_s^+(a) = w_s^-(a), s = 1, \dots, m$.

Доказана следующая теорема

Пусть система ОДУ (1) имеет хотя бы одну ПТДР. Тогда любое решение $u(t)$ задачи (1-2) является строго положительным и стабилизируется к некоторой ПТДР, единственным образом определяемой положительными начальными данными (2).

Следствие. Если в условиях теоремы система (1) имеет неотрицательные стационарные точки с нулевыми компонентами, то они неустойчивы для всех положительных начальных возмущений (2).

В отличие от результатов работ [4,5], где при доказательстве теоремы о стабилизации априори предполагалось существование строго положительных решений, здесь доказано, что решение задачи (1-2) по положительным начальным данным будет строго положительным.

Литература

1. Horn F., Jackson R. General mass action kinetics. Arch. Rational Mech. Anal. 1972, V.47, P. 81-116
2. Krambek F. J. The mathematical structure of chemical kinetics in homogeneous single-phase systems. Arch. Rational Mech. Anal. 1970, V. 38, №5, P. 317-347.
3. Васильев В.М., Вольперт А.И., Худяев С.И. О методе квазистационарных концентраций для уравнений химической кинетики. ЖВМ и МФ. 1973, Т.13, 3, С.683-697.
4. Акрамов Т. А., Вишневский М.П. Некоторые качественные свойства системы реакция-диффузия // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 3-19.
5. Акрамов Т.А. Дифференциальные уравнения и их приложение в моделировании физико-химических процессов. Уфа, БашГУ, 2000, 200 С.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

INVESTIGATION OF SOLVABILITY OF THREE- DIMENSIONAL HELMHOLTZ EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Алиев Н.А.*, Мустафаева Е.Ю.**

*Бакинский Государственный Университет,
Баку, Азербайджан
aliyev.nihan@mail.ru

**Бакинский Государственный Университет,
Баку, Азербайджан
helenmust@rambler.ru

Рассмотрим уравнение Гельмгольца [1] с линейно-независимыми однородными нелокальными граничными условиями:

$$\Delta u + a^2 u(x) = -f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in D \subset R^3 \quad (1)$$

$$l_i u = \sum_{j=1}^3 \left[\alpha_{ij}^{(1)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_1(x')} + \alpha_{ij}^{(2)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_3=\gamma_2(x')} \right] +$$

$$\sum_{k=1}^2 \alpha_i^{(k)}(x') u(x', \gamma_k(x')) = 0, \quad (2)$$

$i = 1, 2$; $x' \in S$, S - проекция области D на плоскость $Ox_1x_2 = Ox'$, $\gamma_k(x')$, $k = 1, 2$, - уравнения нижней и верхней полуповерхности границы Γ области D .

Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид $U(x - \xi) = -\frac{e^{ia|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}$.

Исходя из уравнения (1) и его фундаментального решения, подобно второй формуле Грина, имеем:

$$-\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} U(x - \xi) - u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial \nu_x} \right) dx - \int_D f(x) U(x - \xi) dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi \in \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

второе из соотношений (3) называется **1-ым необходимым условием**.

Теорема 1. Пусть $D \subset R^3$ ограничена, выпукла в направлении x_3 , граница Γ - поверхность Ляпунова, $f(x)$ из класса Гельдера. Тогда необходимое условие является регулярным.

Для получения остальных основных соотношений, подобно второй формуле Грина, умножая уравнение (1) скалярно на первую производную фундаментального решения $\frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_i}$, $i = 1, 3$, и интегрируя по частям, получаем основные соотношения для первых производных неизвестной функции как по области, так и на границе. Последние дают остальные необходимые условия.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 получены необходимые условия относительно производных искомой функции являются сингулярными.

Регуляризация этих сингулярностей проводится по своеобразной схеме, исходя из заданных граничных условий.

Регуляризованные необходимые условия вместе с граничными условиями приводят нас к достаточному условию Фредгольмовости поставленной граничной задачи.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Москва, Наука, 1971, 527 с.

УДК 517.9

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА* ON A CORRECT SOLVABILITY OF BOUNDARY PROBLEMS FOR THE SECOND ORDER EQUATIONS

Аликулов Т.Н. **, Мукимов А.Х. ***

** *Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан*
tolibaka@mail.ru

*** *Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан*
kriptograph92@mail.ru

В настоящей работе исследуются краевые задачи для уравнения

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = Hu(t), \quad 0 \leq t \leq T \leq \infty, \quad (1)$$

где $H(x, D)$ - эллиптический дифференциальный оператор второго порядка вида

$$H(x, D) = -\Delta + q(x). \quad (2)$$

Здесь функция $q(x)$ действительная функция действительных переменных допускает особенность вида

$$|D^\alpha q(x)| \leq \frac{C}{|x|^{1+|\alpha|+\tau}}, \quad 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq n, \quad 0 < \tau < 1. \quad (3)$$

Определение 1. Функция $u(t)$ называется ослабленным решением уравнения (1), если: 1) она непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0, T]$ и вторую производную на $(0, T)$; 2) ее значения принадлежат $D(H)$ при $0 < t < T$, а функция $H^{\frac{1}{2}}u(t)$ непрерывна на всем отрезке $0 \leq t \leq T$; 3) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) в интервале $(0, T)$.

Определение 2. Функция $u(t)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если: 1) она непрерывна на $[0, T]$, имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$, а функция $A^{-\frac{1}{2}}u(t)$ имеет непрерывную первую производную на $[0, T]$; 2) значения функции $u(t)$ ($0 < t < T$) принадлежат $D(H)$ и 3) она удовлетворяет уравнению (1) в интервале $(0, T)$.

Определение 3. Будем говорить, что оператор A , действующий в комплексном банаховом пространстве E , нормально позитивен, если его область определения $D(A)$ плотна

в E и если при всех $t \geq 0$ существуют определенные на всем E ограниченные операторы $(A + tI)^{-1}$, причем

$$\|(A + tI)^{-1}\|_{L_p(R^n)} \leq \frac{C}{1+t} \quad (t \geq 0). \quad (4)$$

Если оператор A позитивный, тогда дробная степень этого оператор определяется по формуле (см. [7])

$$A^\alpha x = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)} \int_0^\infty t^\alpha (tI + A)^{-n-1} A^n x dt, \quad (x \in D(A^n)). \quad (5)$$

Определение 4. Семейство ограниченных линейных операторов $V(t)$, зависящих от параметра t ($0 < t < \infty$) называется полугруппой, если

$$V(t_1 + t_2) = V(t_1)V(t_2) \quad (0 < t_1, t_2 < \infty).$$

Определение 5. Полугруппа $V(t)$ принадлежит классу C_0 , если она сильно непрерывна при $t > 0$ и удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow +0} V(t)x = x$ при любом $x \in E$.

В работе получены следующие основные результаты.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \frac{n}{2+\tau}$. Тогда

$$\|(H + tI)^{-1}\|_{L_p(R^n)} \leq \frac{C}{1+t} \quad (t \geq 0) \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть $1 < p < \frac{n}{2+\tau}$. Тогда операторы, H^α определенные формулами (5), образует сильно непрерывную полугруппу ограниченных операторов.

Отметим, что $A^{\frac{1}{2}}$ является производящим оператором аналитической полугруппу $V(t)$, удовлетворяющей C_0 -условию. Если $z_0, W_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$, то функция

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)W_T \quad (7)$$

является ослабленным решением уравнения (1).

Теорема 3. Всякое обобщенное решение уравнения (1) имеет вид (7), и наоборот, функция (7) является обобщенным решением уравнения (1) при любых $z_0, W_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Для того чтобы обобщенное решение (7) было ослабленным, необходимо и достаточно, чтобы $z_0, W_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Все обобщенные решения уравнения (1) являются аналитическими функциями от t при $0 < t < T$.

Литература

1. Ильин В. А. Ядра дробного порядка// Мат. сб. 1957. Т.41. № 4. С. 459-480.
2. Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Дифференциальные уравнения. -1972. Т. 8, № 9. -С. 1609-1626.
3. Красносельский М. А., Пустылник Е. И. Использование дробных степеней операторов при изучении рядов Фурье по собственным функциям дифференциальных операторов // ДАН. 1958. Т.122. № 6. С. 459-480.
4. Халмухамедов А.Р. Об отрицательных степенях сингулярного оператора Шредингера и сходимости спектральных разложений // Мат. заметки. - 1996. - №59(3). -С. 428-436 .
5. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка// ДАН. 2009. Т.428. № 1. С. 20-22.

6. Аликулов Т.Н., Пирматов Ш.Т., Тухтаева О.Н. Оценки для скорости сходимости спектральных разложений, связанных с возмущением полигармонического оператора // Вестник НУУЗ. 2014 № 2(1). С. 47-54.

7. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник П.Е., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.: Наука, 1966. - 500 с.

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THE BOUSSINESQ EQUATION

Алсыкова А.А.

*Бурятская государственная сельскохозяйственная академия,
Россия, Улан-Удэ
888552@mail.ru*

Изучается разрешимость некоторых задач с пространственно-интегральными условиями для уравнения Буссинеска

$$Lu(x, t) = u_{tt}(x, t) - \alpha u_{xx}(x, t) - \beta u_{xxtt}(x, t) = f(x, t). \quad (1)$$

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, α и β есть заданные положительные числа, $f(x, t)$, $K(x, t)$, $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$ - заданные функции, определенные при $(x, t) \in Q$.

Нелокальная задача I: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \text{ при } x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \int_0^1 K(x, t) u(x, t) dx = 0, \quad 0 < t < T.$$

Нелокальная задача II: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), а также условия

$$u_x(0, t) = 0, \quad \int_0^1 K(x, t) u(x, t) dx = 0, \quad 0 < t < T.$$

Нелокальная задача III: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), а также условия

$$\int_0^1 K_1(x, t) u(x, t) dx = 0, \quad \int_0^1 K_2(x, t) u(x, t) dx = 0, \quad 0 < t < T.$$

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Литература

[1] Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной // Новосибирск: Научная книга, 1998. 456с

[2] Уткина Е.А. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. - 2011. Т. 47. № 4. - С. 400-404

[3] Кожанов А. И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Доклады Академии наук. 2014. Т. 457, № 2, С. 152-156.

[4] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений/Л.С.Пулькина. - Самара: изд. "Самарский университет". 2012. - 194с.

[5] Кириченко С.В. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений гиперболического, псевдогиперболического и смешанного типов: Автореф. дис. канд. ф.-м.н. - Казань. 2015.-20с.

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

ON SOLVABILITY OF PARTICULAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF SECOND KIND WITH SPECTRAL PARAMETER

Амангалиева М.М.¹, Дженалиев М.Т.¹, Космакова М.Т.², Рамазанов М.И.³

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы;

²Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы;

³Карагандинский государственный университет, Караганда
email: muvasharkhan@gmail.com

При решении модельных задач для параболических уравнений в областях с подвижной границей возникают особые интегральные уравнения вида

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(t + \tau)^2}{4a^2(t - \tau)}\right) + \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{t - \tau}{4a^2}\right) \right\}. \quad (2)$$

Математическое описание тепловых процессов, сопровождающих мостиковую эрозию, приводит к решению краевых задач для уравнения теплопроводности в областях с подвижной границей, а именно, в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени [1]. Используя аппарат теории тепловых потенциалов [2], решение рассматриваемых задач сводится к исследованию особых интегральных уравнений Вольтерра второго рода, когда норма интегрального оператора равна единице.

Таким образом, особенность этих уравнений заключается в несжимаемости ядра (2) и выражается в том, что соответствующее неоднородное уравнение не может быть решено классическим методом последовательных приближений.

Показано, что соответствующее однородное уравнение при $|\lambda| > 1$ имеет сплошной спектр, причем кратность характеристических чисел растет с возрастанием $|\lambda|$. Методом Карлемана-Векуа [3] изучаемое интегральное уравнение сводится к уравнению Абеля второго рода. Это позволяет найти собственные функции интегрального оператора для уравнения (1) в явном виде. Отметим, что случай $\lambda = 1$ частично был изучен в работе [4]. Здесь рассматривается случай, когда $|\lambda| > 1$ [5].

Теорема (основной результат). Неоднородное интегральное уравнение (1) разрешимо в классе функций, удовлетворяющих условию $\sqrt{t} \cdot \varphi(t) \in L_\infty(0, \infty)$, для каждой правой части $\sqrt{t} \cdot f(t) \in L_\infty(0, \infty)$, и для каждого $|\lambda| > 1$. Соответствующее однородное уравнение имеет $(N_1 + N_2 + 1)$ -собственных функций

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{p_k}{t} - \frac{t}{4a^2}\right) + \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(\frac{\lambda^2 - 1}{4a^2}t - \frac{\lambda\sqrt{-p_k}}{a}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{2a\sqrt{-p_k} - \lambda t}{2a\sqrt{t}}\right), \quad -N_1 \leq k \leq N_2,$$

и общее решение неоднородного интегрального уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(t) = F(t) + \frac{\lambda^2}{4a^2} \int_0^t \exp\left(\frac{\lambda^2(t-\tau)}{4a^2}\right) F(\tau) d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} C_k \varphi_k(t), \quad C_k - \text{const},$$

$$\text{где} \quad N_1 = \left\lceil \frac{\ln|\lambda| + \arg \lambda}{2\pi} \right\rceil, \quad N_2 = \left\lfloor \frac{\ln|\lambda| - \arg \lambda}{2\pi} \right\rfloor,$$

$$F(t) = \tilde{f}_2(t) - \frac{\lambda}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tilde{f}_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad \tilde{f}_2(t) = \tilde{f}(t) + \lambda \int_0^t r(t, \tau) \tilde{f}(\tau) d\tau,$$

$$\tilde{f}(\tau) = \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\} f(\tau), \quad r(t, \tau) = \frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\lambda^n} \exp\left\{-n^2 \frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}.$$

Уравнения типа (1) впервые были рассмотрены в работах С.Н. Харина (см. [1]). Им были построены приближенные решения таких уравнений, соответствующих некоторым прикладным задачам. И в дальнейшем, такого вида интегральные уравнения были объектом исследования многих авторов.

Подобные интегральные уравнения возникают также при исследовании спектрально-нагруженных уравнений теплопроводности [6, 7].

Литература

1. Ким Е.И., Омельченко В.Т., Харин С.Н. Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. Алма-Ата: Наука КазССР, 1977.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1966.
3. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
4. Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И. О граничной задаче теплопроводности со свободной границей // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ / Под ред. А.И. Кожанова. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2012. С.29-44.
5. Jenaliev M., Amangaliyeva M., Kosmakova M., Ramazanov M. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations. 2015. V. 2015:71. P.1-14.
6. Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сиб.мат.журнал. 2011. Т.52, № 1. С.3-14.
7. Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуле или на бесконечности // Дифференц. уравнения. 2011. Т.47, № 2. С. 231-243.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

ON AN INVERSE PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES EQUATIONS

Андреев В.К.*

**Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Россия, Красноярск
andr@icm.krasn.ru*

Рассматриваются решения уравнений двумерных движений вязкой жидкости, инвариантные относительно трёхмерной подалгебры Ли $\langle \partial_x, \partial_u + t\partial_x, \partial_p \rangle$. Все такие решения являются частично инвариантными ранга два и дефекта два. Их анализ сводится к изучению свойств решений нелинейного интегродифференциального уравнения

$$w_t - w_y \int_0^y w(z, t) dz + w^2 = \eta w_{yy} + f(t), \quad (1)$$

где η – кинематическая вязкость жидкости. По известной $w(y, t)$ компоненты скорости восстанавливаются в виде

$$u(x, y, t) = w(y, t)x, \quad v(y, t) = -\int_0^y w(z, t) dz,$$

а давление –

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, t) = -f(t) \frac{x^2}{2} - gy + \eta v_y - \frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^y v(z, t) dz,$$

где $\rho = \text{const} > 0$ – плотность жидкости, $g = \text{const}$ – ускорение силы тяжести.

Для указанного решения (точнее для уравнения (1)) ставятся три задачи:

1) движение жидкости в плоском слое с твёрдыми стенками $y = 0$, $y = h$. При этом граничные условия таковы:

$$w(0, t) = w(h, t) = 0, \quad \int_0^h w(z, t) dz = 0. \quad (2)$$

К ним следует добавить начальные данные $w(y, 0) = w_0(y)$;

2) движение в плоском слое с твёрдой стенкой $y = 0$ и свободной границей $y = h$. Здесь изменится лишь второе граничное условие в (2): $w_y(h, t) = 0$;

3) движение двух несмешивающихся жидкостей с общей поверхностью $y = h_1 < h$ в слое с твёрдыми стенками $y = 0$ и $y = h$. Граничные условия на твёрдых стенках (индекс «1» фиксирует первую жидкость, «2» – вторую)

$$w_1(0, t) = 0, \quad w_2(h, t) = 0, \quad \int_{h_1}^h w_2(z, t) dz = 0;$$

$$w_1(h_1, t) = w_2(h, t), \quad \mu_2 w_{1y}(h_1, t) - \mu_2 w_{2y}(h_1, t) = 0, \quad \int_0^{h_1} w_1(z, t) dz = 0,$$

$\mu_j = \rho_j \eta_j$ – суть динамические вязкости. Начальные данные таковы: $w_j(y, 0) = w_{j0}(y)$.

Все поставленные задачи являются обратными, поскольку функция $f(t)$ (в задаче 2 – функции $f_j(t)$) определяются вместе с решением $w(y,t)$ ($w_j(y,t)$).

Для ползущих движений (малые числа Рейнольдса) задачи становятся линейными, причём в случае 1 и 2 их решения находятся в виде рядов Фурье по специальным базисам. Для задачи 3 таких решений нет. Доказываются априорные оценки типа

$$|w_j(y,t)|, |f_j(t)| \leq c_j \exp(-\delta t/2)$$

с положительными постоянными c_j и δ_j ($j = 1,2$). Решение построено с помощью преобразования Лапласа, и приведены расчёты для конкретных жидкостей. Обсуждаются также и некоторые свойства решений нелинейных задач, когда в формуле (1) присутствуют второй и третий члены слева.

УДК 532.517

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ СОВМЕСТНОЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТРЕХ ЖИДКОСТЕЙ*

A PRIORI ESTIMATES OF THE ONE CONJUGATE PROBLEM DESCRIBING JOINT THERMOCAPILLARY MOTION OF THE THREE LIQUIDS

Андреев В.К.*, Черемных Е.Н.**

* *Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Россия, Красноярск
andr@icm.krasn.ru*

** *Институт вычислительного моделирования СО РАН
elena_cher@icm.krasn.ru*

Работа посвящена исследованию одного частично инвариантного решения ранга два и дефекта три уравнения вязкой теплопроводной жидкости, построенного на четырёхмерной подалгебре Ли $\langle \partial_x, t\partial_u + \partial_x, \partial_p, \partial_\theta \rangle$, допускаемой системой уравнений двумерных движений вязкой теплопроводной жидкости. Оно интерпретируется как двумерное движение трёх несмешивающихся жидкостей в плоском канале, ограниченном твёрдыми неподвижными стенками, на которых известно распределение температур.

Решение представимо формулами

$$u_j = xw_j(y,t), \quad v_j = v_j(y,t), \quad \frac{1}{\rho_j} p_j = d_j(y,t) - \frac{f_j(t)}{2} x^2, \quad (1)$$

$$\theta_j = a_j(y,t)x^2 + b_j(y,t), \quad d_{jy} = v_j v_{jyy} - v_{jt} - v v_{jy}$$

с неизвестными функциями $w_j(y,t), f_j(t), a_j(y,t)$. Функции $v_j(y,t), d_j(y,t), b_j(y,t)$ определяются по известным $w_j(y,t), f_j(t), a_j(y,t)$: $d_j(y,t)$ восстанавливаются квадратурой из последнего уравнения (1) с точностью до функций времени, а $b_j(y,t)$ определяются из решения задачи аналогичной задаче для функций $a_j(y,t)$. Начально-краевая задача для

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 14-01-00067

функций $w_j(y, t), f_j(t), a_j(y, t)$ является неклассической (часть граничных условий содержит интегралы по областям), нелинейной и обратной, т. к. функции $f_j(t)$ являются искомыми. Кроме того, искомыми являются и поверхности раздела: $y = l_n(x, t), n = 1, 2$. Переходя к безразмерным переменным и предполагая, что температурные коэффициенты поверхностного натяжения сравнимы по величине $\alpha_1 \sim \alpha_2$ и число Марангони $M \ll 1$ (это выполнено в тонких слоях, либо при очень больших вязкостях), а также число Вебера $We \gg 1$ задача заменяется линейной, а поверхности раздела являются плоскими.

Получены априорные оценки решений $w_j(y, t), a_j(y, t)$ поставленных задач и доказано, что решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим $a_j^0(y), w_j^0(y)$ и $f_j^0 = const$, который определяется явными формулами.

УДК 519.676

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИТЕРАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ РЕСУРСНЫХ СИСТЕМ

STOCHASTIC STABILITY OF ITERATIVE MODELS OF RESOURCE SYSTEMS

Анисова М.А.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Кемеровский институт (филиал) Российского экономического университета
им. Г.В.Плеханова; Россия, Новосибирск, пр. Академика М.А.Лаврентьева, 6
anisovam@mail.ru*

Данная работа продолжает и углубляет исследования из доклада [1], в котором представлена концепция меры управляемости μ численных математических моделей, представляющих собой итерационные алгоритмы. Эта мера равна величине, обратной длине периода L множества предельных (равновесных) состояний соответствующего итерационного процесса. В [1] показано, что равновесные состояния образуют циклическую группу, причем число L является порядком этой группы. В данной работе подробно изучены линейные итерационные модели ресурсных систем из [2-4] с мерой управляемости $\mu = 1$ и $\mu = 1/2$.

Пусть имеется ресурсная система, включающая M взаимодействующих участников. Система развивается дискретными шагами по времени. Для данного номера временного шага t через $p_i(t) = \sum_{k=1, \dots, M; k \neq i} x_{ki}(t)$ обозначим суммарный ресурс, направленный на i -го участника; при этом $x_{ki}(t)$ – количество ресурса k -го участника, направленного на i -го участника. Аналогично $q_i(t) = \sum_{k=1, \dots, M; k \neq i} x_{ik}(t)$ – суммарный ресурс i -го участника. Полагаем $x_{ii}(t) = 0$ для любого i и t .

Предполагаем, что интересы i -го участника при взаимоотношении с j -ым участником определяются линейной функцией от соответствующих ресурсов:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) \\ &= ax_{ij} + bx_{ji} \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициенты a и b определяют как степень, так и полезность отношений. Например, случай $a = b = 1$ соответствует ситуации «сотрудничества» участников, а при $a = 1, b = -1$ моделируется «противостояние».

На следующем $(t + 1)$ -ом временном шаге i -й участник меняет свои ресурсы таким образом, чтобы попытаться сделать значения функций (1) одинаковыми по всем направлениям взаимодействия (в частности, в задаче «противостояния» такая «равновесная» стратегия обеспечивает минимальность максимального ущерба по всем направлениям взаимодействия); при этом этот i -й участник имеет данные по ресурсам только с t -го временного шага; в результате получаем следующий итерационный процесс

$$\begin{aligned} x_{ij}(t+1) &= -\frac{b}{a}x_{ji}(t) + f_i(t); & f_i(t) \\ &= \frac{1}{M-1} \left(q_i(t) + \frac{b}{a}p_i(t) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При условии $|b/a| < 1$ для произвольного начального распределения $\mathbf{X}(0)$ процесс (2) стремится при $t \rightarrow \infty$ к единственному предельному состоянию

$$\mathbf{X}_{lim}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t); \quad x_{ij}^* = \frac{1}{(M-1)a + b} \left(aq_i - bq_j + \frac{bQ}{M-1} \right);$$

здесь $\mathbf{X}(t) = \{x_{ij}(t)\}$; $Q = \sum_{i=1}^M q_i$.

Для важного (с прикладной точки зрения) случая $a = 1, b = -1$ (модель «противостояния») процесс (2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \hat{x}_{ij}(t+1) &= \hat{x}_{ji}(t) + \hat{f}_i(t); & \hat{f}_i(t) \\ &= \frac{q_i(t) - p_i(t)}{M-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Последовательность матриц $\hat{\mathbf{X}}(0), \hat{\mathbf{X}}(1), \dots, \hat{\mathbf{X}}(t) = \{\hat{x}_{ij}(t)\}, \dots$, определяемая формулами (3), имеет два предельных (устойчивых) состояния $\mathbf{X}_{lim}^{(1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{X}}(2m)$ и $\mathbf{X}_{lim}^{(2)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{X}}(2m+1) = \left(\mathbf{X}_{lim}^{(1)}\right)^T$ (здесь T – знак транспонирования матрицы), причем $\mathbf{X}_{lim}^{(1)} = \{x_{ij}^{(1)}\}$; $x_{ij}^{(1)} = \hat{x}_{ij}(0) + \frac{\hat{f}_j(0)(M-1)^2}{M(M-2)} + \frac{\hat{f}_i(0)(M-1)}{M(M-2)}$.

В данной работе уточнены и упрощены (по сравнению с работами [2-4]) доказательства утверждений 1 и 2, а также рассмотрен практически важный случай, когда начальные данные заданы со случайной погрешностью:

$$\tilde{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{X}(0) + \Theta = \{x_{ij}(0) + \theta_{ij}; \quad i, j = 1, \dots, M; i \neq j\}, \quad (4)$$

где θ_{ij} – некоторые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Итерационные процессы (2) и (3) с начальными состояниями вида (4) определяют стохастические модели ресурсных систем. Эти модели позволяют исследовать стохастическую устойчивость «невозмущенных» ресурсных моделей (2) и (3) с начальным состоянием $\mathbf{X}(0)$. Нами была исследована стохастическая устойчивость предельных состояний $\mathbf{X}_{lim}^*, \mathbf{X}_{lim}^{(1)}, \mathbf{X}_{lim}^{(2)}$. То обстоятельство, что эти величины выражены в терминах начальных данных (см. утверждения 1 и 2), позволяет определить вероятностные характеристики предельных состояний стохастических моделей при заданных вероятностных свойствах матрицы Θ из (4). Правильность полученных характеристик проверена численно с помощью метода Монте-Карло.

Литература

1. Войтишек А.В. Мера управляемости стохастических моделей, описываемых итерационными алгоритмами с периодическими множествами устойчивых состояний // Материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (22 – 27 июня 2015 года, Улан-Удэ – Байкал, Россия).

2. Астраков С.Н., Анисова М.А. Математическое моделирование экономических взаимодействий на графах // Вестник Российского государственного торгово-экономического университета. 2009, № 6. С. 39-43.

3. Астраков С.Н. Методы поиска эффективных решений в распределенных системах // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике). Иркутск, 2014.

4. Тахонов И.И. Анализ сходимости итерационных процессов для некоторых задач построения равновесных систем // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика. Новосибирск, 2009.

УДК 517.983.53

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ Л.Н. СЛОБОДЕЦКОГО

ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS OF HIGHER ORDER IN THE SPACES OF L. N. SLOBODETSKII

Аносов В. П.

Россия, Новосибирск, НГПУ
averi@ngs.ru

Рассматривается уравнение

$$L(t, D, A(t))u(t) \equiv \sum_{k+\gamma=2m} a_{k\gamma}(t) A^\gamma(t) D^k u(t) = f(t), t \in [0, 1], \quad (1)$$

В этом уравнении u - искомая, f - заданные функции со значениями в некотором банаховом пространстве E , $a_{k\gamma}(t)$ - некоторые комплексные коэффициенты, а $D^k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k}$. $A(t)$ при каждом $t \in [0, 1]$ является производящим оператором аналитической полугруппы (см. [1]-[2]) со спектром $\sigma(A(t))$, где $\sigma(A(t)) \subset Q_{\theta(t)} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - \delta(t))| \leq \frac{\pi}{2} - \theta(t), \theta(t) > 0, \delta(t) > 0\}$ — некоторые числа. На оператор $L(t, D, A(t))$ накладывается условие

1. $L(t, \xi, q) = \sum_{k+\gamma=2m} a_{k\gamma}(t) q^\gamma \xi^k \neq 0$ для любого вещественного ξ , любого $q \in Q_{\theta(t)}$ и $t \in [0, 1]$.

Так же предполагается, что выполнено условие:

2. уравнение $L(t, \lambda, q) = 0$ при $q \in \sigma(A(t)), t \in [0, 1]$ имеет m корней в верхней полуплоскости и столько же в нижней.

На границе отрезка $[0, 1]$, т. е. при $t = 0$ и $t = 1$, задаются следующие условия

$$B_j(t, D, A(t))u(t) = g_j(t), (j = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

где $B_j(t, \xi, q)$ — многочлены относительно ξ и q степени $m_j^{(t)} (m_j^{(t)} < 2m)$. При этом

предполагается, что граничные условия (2) связаны с уравнением (1) условием типа Шапиро-Лопатинского.

Задача (1)-(2) рассматривалась нами в [3] в пространствах Гёльдера с весом. Здесь мы продолжили исследования этой задачи и установили коэрцитивную разрешимость задачи (1)-(2) для отрезка в пространствах Л. Н. Слободецкого при выполнении выше перечисленных и некоторых дополнительных условий на коэффициенты операторов $L(t, D, A(t)), B_j(t, D, A(t))$. Определение таких пространств приведено в [4], [5], [6].

Литература

1. М. А. Красносельский и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, — М.: Наука, 1966.
2. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, — М.: Наука, 1967.
3. В. П. Аносов, Разрешимость краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений высокого порядка в пространстве Гёльдера с весом // Неклассические уравнения математической физики: сб. научных работ, — Новосибирск: Издательство Института Математики, 2012. С. 43-53.
4. В. П. Аносов, О следах функций из абстрактных пространств Л. Н. Слободецкого // СМЖ, — Новосибирск: Издательство Института Математики, 1994. Т. 35, №5 С. 974-989.
5. В. П. Аносов, П. Е. Соболевский, О коэрцитивной разрешимости параболических уравнений // Математические заметки, — М.: РАН, 1972. Т 11. №4. С. 409-415.
6. В. П. Аносов, О коэрцитивной разрешимости абстрактных параболических уравнений // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений: сб. научных трудов, — Новосибирск: Издательство Института Математики, 1990. С. 123-136.

УДК 517.956.2

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА*

SMOOTH SOLUTIONS OF BOUNDARY PROBLEMS FOR THE OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MIXED TYPE

Антипин В.И.

*Северо-Восточный федеральный университет, Якутск
ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова", г. Якутск, Россия;
antvasiv@mail.ru*

Работа посвящена исследованию операторно-дифференциального уравнения

$$Au \equiv Bu_t - Lu = f(x, t), \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014-2016 гг. (проект \No 3047).

где линейные операторы B, L определены в данном гильбертовом пространстве E , причем оператор B самосопряжен. Краевые условия имеют вид

$$P^+u(0) = u_0, \quad P^-u(T) = u_T, \quad (2)$$

где P^+, P^- – спектральные проекторы оператора B , которые отвечают положительной и отрицательной частям спектра. Здесь не предполагается, что оператор B обратим, и что спектр оператора $L - \lambda B$ включен в одну из полуплоскостей $\operatorname{Re} \lambda < a$ или $\operatorname{Re} \lambda > a$ ($a \in \mathbb{R}$). При определенных условиях на вышеупомянутые операторы изучается вопрос о гладкости решений в весовых пространствах Соболева.

Таким образом, рассматривается уравнение (1), которое не является уравнением типа Соболева. Известно, что подобные уравнения возникают в физике, в особенности, в задачах нейтронного переноса, радиационного переноса, разреженной газовой динамики, в геометрии, демографической динамике, гидродинамике и в некоторых других областях [1,2].

В случае, если оператор L самосопряжен, уравнение (1) рассматривалось в [1]. В частности, в [2] можно найти ряд примеров, возникающих в приложениях.

Литература

1. Van der Mee C.V.M. Semigroups and factorization methods in transport theory // Amsterdam: Math. Centre Tract. 1981. №146.

2. Karabash I.M. Abstract kinetic equations with positive collision operators // Operator Theory: Advances and Applications. 2008. № 188, P. 175-195.

УДК 517.956.4

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EQUATIONS OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Антипин В. И.¹, Попов С.В.²

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова", г. Якутск, Россия;*

¹ antvasiv@mail.ru

² guspopov@mail.ru

В области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$ рассматривается уравнение

$$u_{xxx} - \operatorname{sgn} x \cdot u_t = 0. \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014-2016 гг. (проект № 3047).

Впервые разрешимость краевых задач для уравнения (1) в ограниченной области Q рассматривались в работах Т.Д. Джураева [1]. Краевые задачи для уравнений вида (1), а также для общих операторно-дифференциальных уравнений вида (1) рассматривались в работах [2,3].

В краевых задачах для неклассических уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения гильбертовским пространствам. В настоящей работе решение уравнения (1) ищется из пространства Гельдера $H_{x,t}^{p,p/3}(Q)$, $p = 3l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x > 0, \quad u(x, T) = \varphi_2(x), \quad x < 0, \quad (2)$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0, t) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0, t) \quad (k = 0, 1, 2). \quad (3)$$

Теорема. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$. Тогда при выполнении $3l + 1$ условий

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 3l + 1,$$

существует единственное решение уравнения (1) в Q из пространства $H_{x,t}^{p,p/3}(Q^\pm)$, удовлетворяющее условиям (2), (3).

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979.
2. Антипин В.И., Попов С.В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с меняющимся направлением времени // Вестник Южно-Уральского государственного университета. 2012. Т. 14, № 40. С. 19-28.
3. Антипин В.И. Разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 2. С. 245-257.

УДК 517.953.5

О НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ON A NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Апаков Ю.П.

Наманганский инженерно-педагогический институт.
Наманган. Узбекистан. E-mail: apakov.1956@mail.ru

В области $D = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < l\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(u), \quad (1)$$

где $p > 0$, $l > 0$ постоянные число.

Задача A_1 . Найти непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, y)$ в $\bar{D}$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$u_{xx}(0, y) = g_1(u), \quad u_x(p, y) = \psi(y), \quad u_{xx}(p, y) = g_2(u), \quad 0 \leq y \leq l, \quad (3)$$

где $\varphi_i(x) \in C^1[0, p]$, $\psi(y) \in C^1[0, l]$, а также удовлетворяет естественным условиям согласования.

Отметим, что аналогичные линейные задачи исследованы в [1, 2].

Теорема. Если функции $g_i(u) \in C^1(D)$, $f(u) \in C^1(D)$ и $g'_1(u) \geq 0$, $g'_2(u) \leq 0$, $f'(u) < 0$, то задача A_1 не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим задача A_1 имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, тогда $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет $L[u] = f(u)$.

Рассмотрим $uL[u] = uf(u)$, то есть

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) + u_y^2 = uf(u). \quad (4)$$

Интегрируя это тождество по области D имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^l u(p, y) u_{xx}(p, y) dy - \int_0^l u(0, y) u_{xx}(0, y) dy - \frac{1}{2} \int_0^l u_x^2(p, y) dy + \frac{1}{2} \int_0^l u_x^2(0, y) dy - \\ & - \int_0^p u(x, l) u_y(x, l) dx + \int_0^p u(x, 0) u_y(x, 0) dx + \iint_D u_y^2(x, y) dx dy = \iint_D uf(u) dx dy. \end{aligned}$$

Учитывая краевые условия получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l u(p, y) g_2(u) dy - \int_0^l u(0, y) g_1(u) dy + \frac{1}{2} \int_0^l u_x^2(0, y) dy + \\ & + \iint_D u_y^2(x, y) dx dy = \iint_D uf(u) dx dy, \end{aligned}$$

или, если учесть, что $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$, то имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u_1(p, y) - u_2(p, y)] [g_2(u_1) - g_2(u_2)] dy - \\ & - \int_0^l [u_1(0, y) - u_2(0, y)] [g_1(u_1) - g_1(u_2)] dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l u_x^2(0, y) dy + \iint_D u_y^2(x, y) dx dy = \iint_D [u_1 - u_2] [f(u_1) - f(u_2)] dx dy, \\ & \int_0^l (u_1 - u_2)^2 g'_2(\bar{u}) dy - \int_0^l (u_1 - u_2)^2 g'_1(\bar{u}) dy + \frac{1}{2} \int_0^l u_x^2(0, y) dy + \\ & + \iint_D u_y^2(x, y) dx dy = \iint_D (u_1 - u_2)^2 f'(\bar{u}). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условия теоремы, получим

$$(u_1 - u_2)^2 = 0, \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2, \text{ в } D \quad u \equiv 0.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Иргашев Ю., Апаков Ю.П. Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа. // Узб.Мат.журн. 2006, -№ 2, С. 44-51.
2. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. -Киев, 2012.-Т.64. -№ 1.- С. 1-11.

УДК 517.957

КРИТИЧЕСКИЕ ЭКСПОНЕНТЫ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

CRITICAL EXPONENTS FOR A DEGENERATE PARABOLIC EQUATION WITH A DOUBLE NONLINEARITY AND NONLOCAL BOUNDARY CONDITION.

Арипов М.М*, Рахмонов З.Р.**

* Национальный Университет Узбекистана,
Узбекистан, Ташкент
mirsaidaripov@mail.ru

** Национальный Университет Узбекистана,
Узбекистан, Ташкент
zraxmonov@inbox.ru

В данной работе исследуются качественные свойства решений следующего квазилинейного параболического уравнения

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial u^m}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u^m}{\partial x} \right) + \rho(x) u^\beta, \quad (x, t) \in R_+^N \times (0, +\infty) \quad (1)$$

с нелинейным граничным

$$-\left| \frac{\partial u^m}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u^m}{\partial x} (0, t) = u^q(0, t), \quad t > 0 \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R_+ \quad (3)$$

где $p > 2$, $m, \beta, q > 0$, $\rho(x) = (1+x)^n$, $n > -p$ и будем предполагать, что $u_0(x)$ финитна: $\text{mes supp } u_0 < \infty$ и $u_0 \in C(R^N)$.

Задача (1)-(3) возникает при математическом моделировании процессов диффузии в нелинейных средах, при исследовании проблем течения жидкостей через пористые пласты, в задачах динамики биологических популяций и в ряде других областях [5, 6].

Вследствие вырождения задачи (1)-(3) при $u = 0$ может, не имеет классического решения. Поэтому ее решение естественно понимать в обобщенном смысле из класса

$0 \leq u, \left| \frac{\partial u^m}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u^m}{\partial x} \in C(R_+^N \times (0, +\infty))$ и удовлетворяет уравнению (1) в смысле распределения.

Исследованию различных качественных свойств решений задачи (1)-(3) для частных значений числовых параметров посвящено большое количество работ (см. [1-3, 7] и приведенные ссылки там). Так условия существования или несуществования глобального по времени решения задачи (1)-(3) при $m=1$ в случае однородной плотности ($n=0$) были изучены в работах [2] и показаны, что решение задачи (1)-(3) неограниченным, если выполняется одно из следующих условий

- 1) $1 < \beta \leq 2(p-1)+1$, $2(p-1)/p < q < 2(p-1)$;
- 2) $\beta > 1$, $q > 2(p-1)/p$;
- 3) $\beta > 2(p-1)+1$, $q > 2(p-1)$;

Свойства конечной скорости распространения возмущения, локализация решений, глобальная разрешимость задачи Коши, условия разрушения решения, асимптотика автомодельных решений и др. получены в [2, 3, 7] (см. ссылки на другие работы).

Данная работа посвящена исследованию условий разрешимости или неразрешимости в целом по времени решений задачи (1)-(3) на основе автомодельного анализа и метода эталонных уравнений [4]. Установлены значения критической экспоненты для исследуемой задачи:

$$\beta_0 = (p(mn+1)-mn)/(p+n), \quad \beta_c = (m+1)(p-1)+1;$$

$$q_0 = ((m+1)(p-1)+n)/(p+n), \quad q_c = (m+1)(p-1)+n.$$

Получено асимптотическое представление решения с компактным носителем задачи (1)-(3), позволившее провести численный эксперимент. Решена проблема выбора подходящего начального приближения важного для построения итерационного процесса при численном изучении задачи (1)-(3).

Литература

1. Galaktionov V. A., Levine H. A. On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux boundary condition on the boundary. Israel J. Math. 94, 1996, 125-146.
2. Zhongping Li, Chunlai Mu, Li Xie. Critical curves for a degenerate parabolic equation with multiple nonlinearities. J. Math. Anal. Appl. 359, 2009, 39-47.
3. Wanjuan Du and Zhongping Li. Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear Boundary condition. Int. Jour. of Math. Anal. vol. 7, 11, 2013, 517-524.
4. Арунов М.М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. - Ташкент, Фан, 1988, 137 с.
5. Mancebo F.J., Vega J.M. A model of porous catalyst accounting for incipiently non-isothermal effects, J. Differential Equations 151, 1999, 79-110.
6. Калашиников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. УМН, т.42, Вып. 2 (254), 1987, 135-176.
7. Mersaid Aripov, Shakhlo A. Sadullaeva. To properties of solutions to reaction-diffusion equation with double nonlinearity with distributed parameters. Jour. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. V. 6, № 2, 2013, 157-167.

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РЕШЕНИЕ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

VARIATIONAL INEQUALITIES FOR ABSTRACT HYPERBOLIC EQUATIONS WITH A CONSTRAINT ON THE SOLUTION

Артюшин А.Н.

Россия, Новосибирск
aartushin@dataeast.ru

Пусть X, H – сепарабельные гильбертовы пространства, A – положительный самосопряженный оператор в X такой, что $(Au, u)_X = \|u\|_H^2$, $K \subset H$ – выпуклое замкнутое множество. В докладе рассматриваются вариационные неравенства для абстрактных уравнений

$$u''(t) + Au(t) = f(t)$$

с ограничением вида $u(t) \in K$. Задача такого рода возникает, например, при описании колебаний струны или мембраны под стенкой. В этом случае $A = -\Delta$ и ограничение имеет вид $u(x, t) \leq M(x)$. Такая задача (и родственные ей) для одномерного волнового уравнения рассматривалась в ряде работ Америо, Шацман и других авторов. В работе [3] рассмотрено многомерное волновое уравнение в полупространстве с ограничением решения на границе. Вариационное неравенство для одномерного волнового уравнения было рассмотрено в [4]. Абстрактные задачи такого рода, по-видимому, ранее не рассматривались.

Развивая идеи работы [4] удалось доказать следующий результат. Пусть множество K имеет непустую внутренность, а его граница секвенциально слабо замкнута. Тогда соответствующее вариационное неравенство имеет решение. В качестве одного из следствий получаем существование решения вариационного неравенства для уравнения

$$u''(t) + \Delta^2 u(t) = f(t)$$

с ограничением $u(x, t) \leq M(x)$ в размерностях $n = 2, 3$.

Единственности решения для таких задач, скорее всего, нет. Можно привести простые примеры уже для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. M. Schatzman. A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints: The vibrating string with a concave obstacle. Journal of math. analysis and appl. 1980, vol. 73, № 1, pp. 138-192.
2. A. Bamberger and M. Schatzman. New results on the vibrating string with a continuous obstacle. SIAM Journal of Math. Analysis, 1983, vol. 14, № 3, pp.560–595.
3. G. Lebeau, M. Schatzman. A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary. Journal of diff. equations, 1984, vol. 53, pp. 309-361.
4. Артюшин А.Н. Вариационные неравенства для волнового уравнения с ограничением на решение. ДАН, 1990, т. 311, № 5.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕФТЯНОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ В МОРЕ ПОСЛЕ
АВАРИЙНОГО РАЗЛИВА С УЧЕТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ
ИСТОЧНИКОВ/СТОКОВ***

**MATHEMATICAL MODEL OF OIL SPILL PROPAGATION IN A SEA
AFTER ACCIDENT TAKING INTO ACCOUNT ADDITIONAL SOURCES
OF POLLUTION***

Асеев Н.А.*

** Московский физико-технический институт,
Россия, Москва
nikita.aseev@phystech.edu*

С каждым годом растет объем морских транспортировок газа и нефти [1]. Как следствие, повышается уровень опасности загрязнения окружающей среды вредными веществами. В связи с этим становятся актуальными задачи оценки ущерба от возможного загрязнения, а также задачи оценки и управления риском нефтяного загрязнения. Для решения таких задач необходимо использовать адекватную модель, описывающую распространение нефти в морской среде. Настоящий доклад посвящен одной из таких моделей, разработанной на базе мирового опыта в областях теоретических и экспериментальных исследований процессов, присущих распространению нефти в море [2-4], и некоторым результатам, полученным при ее использовании.

Созданная модель описывает основные процессы, происходящие в течение одной-двух недель после разлива: перенос нефти морскими течениями по поверхности моря, дрейф под действием ветра, гравитационное растекание, движение под действием турбулентной диффузии, испарение с поверхности моря, диспергирование и образование эмульсии типа «вода-в-нефти». При этом не учитываются процессы, происходящие на более поздних стадиях: биodeградация и фотоокисление. Модель позволяет проводить расчет таких параметров, характеризующих нефтяное пятно, как локализация, объем, масса, толщина и плотность нефти, а также вязкость, плотность и водосодержание эмульсии.

Модель является существенно двумерной и описывает движение нефти и изменение ее основных параметров. Модель применима к разливам, происходящим на морской поверхности (например, аварии танкеров). Предполагается, что нефть поступает в море мгновенно. В качестве первоначальной формы пятна может быть выбрана любая фигура.

Система уравнений модели сводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, в котором неизвестной функцией является зависимость массы нефти от времени, прошедшего с момента разлива. Процессы, характерные для нефтяного загрязнения в море, неявно включены в соответствующие переменные коэффициенты, входящие в уравнение. Такое представление модели позволяет в простом виде вводить дополнительные источники/стоки загрязнения. В роли одного из стоков выступает масса нефти, проникающей в морскую толщу с поверхности в результате действия процесса диспергирования.

Разработанная модель может использоваться как для прямого моделирования последствий от аварийного разлива нефти, так и в качестве основы для решения задач об оценке и управлении ущербом или риском нефтяного загрязнения [5].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-11-00609) и РФФИ (проект 13-01-00753 А)

Литература

1. Asariotis R. et al. Review of maritime transport 2013. – UNCTAD/RMT/2013. – http://unctad.org/en/publicationslibrary/rmt2013_en.pdf
2. Lehr W.J. Review of modeling procedures for oil spill weathering behavior. // Oil Spill Modeling and Processes, WIT Press, Southampton, UK, 2001, pp. 51-90.
3. Reed M., Johandsen O., Brandvik P.J., Daling P., Lewis A., Fiocco R., Mackay D., Prentki R. Oil Spill Modeling towards the Close of the 20th Century: Overview of the State of the Art. // Spill Science & Technology Bulletin, 1999. 5(1), pp. 3-16.
4. Spaulding M. A state-of-the-art review of oil spill trajectory and fate modeling. // Oil and Chemical Pollution, 1988. 4(1), pp. 39-55.
5. Aseev N.A., Agoshkov V.I., Zalesny V.B., Aps R., Kujala P., and Ryttonen J. The problem of control of oil pollution risk in the Baltic Sea // Russ. J. Numer. Analysis and Math. Modelling, 2014, V 29, No. 2, 93-105.

УДК 517.968

О СУЩЕСТВОВАНИИ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ*

ON EXISTENCE, UNIQUENESS AND ESTIMATES SOLUTIONS OF CONVOLUTION TYPE EQUATIONS WITH MONOTONE NONLINEARITY

Асхабов С.Н.

Чеченский государственный университет
364907, Грозный, ул. Шерипова, 32
askhabov@yandex.ru

В работе найдены условия, при которых обобщенный оператор типа потенциала действует непрерывно из пространства $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(0,1)$, $p' = p/(p-1)$, и является положительным. Используя эти условия, установлены теоремы о существовании, единственности и оценках решений для различных классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки, содержащих обобщенный оператор типа потенциала. Приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты.

Пусть функция $F(x, u)$, определяющая нелинейность рассматриваемых уравнений, определена при $x \in [0,1]$, $u \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном u и непрерывна по u почти для всех x . Обозначим через $L_p^+(0,1)$ множество всех неотрицательных функций из пространства $L_p(0,1)$. Скажем, что $\varphi(x) \in \Omega(0,1]$, если $\varphi(x)$ непрерывная невозрастающая выпуклая вниз в промежутке

$(0,1]$ функция такая, что $\int_0^1 \varphi(x) dx \geq 0$.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\begin{cases} \varphi(x) \in L_{p'/2}(0,1) \cap \Omega(0,1], & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ \varphi(x) \in L_1(0,1) \cap \Omega(0,1], & \text{если } 2 < p < \infty. \end{cases}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект номер 13-01-00422-а.

Если функция $F(x, u)$ для почти всех $x \in [0, 1]$ и всех $u \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условиям

- 1) $|F(x, u)| \leq c(x) + d_1 |u|^{p-1}$, где $c(x) \in L_{p'}^+(0, 1)$, $d_1 > 0$;
- 2) $F(x, u)$ не убывает по u почти при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$;
- 3) $F(x, u) \cdot u \geq d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+(0, 1)$, $d_2 > 0$;

то при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_{p'}(0, 1)$ уравнение

$$\lambda \cdot F[x, u(x)] + \int_0^1 \varphi(|x-t|) u(t) dt = f(x)$$

имеет решение $u^*(x) \in L_p(0, 1)$. Это решение единственно, если в условии 2) функция $F(x, u)$ строго возрастает по u . Кроме того, если условие 3) выполнено при $D(x) = 0$, то справедлива оценка $\|u^*\|_p \leq \left(\lambda^{-1} d_2^{-1} \|f\|_{p'} \right)^{1/(p-1)}$.

Следствие 1. Пусть ядро $\varphi(x) \in L_2(0, 1) \cap \Omega(0, 1]$. Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_4(0, 1)$ уравнение $\lambda \cdot u^{1/3}(x) + \int_0^1 \varphi(|x-t|) u(t) dt = f(x)$ имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{4/3}(0, 1)$, причем $\|u^*\|_{4/3} \leq \left(\lambda^{-1} \|f\|_4 \right)^3$.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\begin{cases} \varphi(x) \in L_1(0, 1) \cap \Omega(0, 1], & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ \varphi(x) \in L_{p/2}(0, 1) \cap \Omega(0, 1], & \text{если } 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Если функция $F(x, u)$ для почти всех $x \in [0, 1]$ и всех $u \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1, то при любых $\lambda \geq 0$ и $f(x) \in L_p(0, 1)$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot \int_0^1 \varphi(|x-t|) F[t, u(t)] dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(0, 1)$. Кроме того, если выполнены условия 1) и 3) теоремы 1 при $c(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка $\|u^*\|_p \leq d_1 d_2^{-1} \|f\|_p$.

Следствие 2. Пусть ядро $\varphi(x) \in L_2(0, 1) \cap \Omega(0, 1]$. Тогда при любых $\lambda \geq 0$ и $f(x) \in L_4(0, 1)$ уравнение $u(x) + \lambda \cdot \int_0^1 \varphi(|x-t|) u^3(t) dt = f(x)$ имеет единственное решение $u^*(x) \in L_4(0, 1)$, причем $\|u^*\|_4 \leq \|f\|_4$.

Доказательство теорем 1 и 2 проводится по той же схеме, что и в работе [1]. Частными случаями обобщенного оператора типа потенциала $(P_{01}^\varphi u)(x) = \int_0^1 \varphi(|x-t|) u(t) dt$, введенного и изученного в [2], являются риссов потенциал и логарифмический потенциал.

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ СПЕКТРАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR LOADED WAVE EQUATION WITH TWO SPECTRAL PARAMETERS

Аттаев А.Х.

ИПМА (Россия, Нальчик)
attaev.anatoly@yandex.ru

В данном сообщении рассматриваются колебания одномерной упругой струны длины l , которые описываются уравнением вида

$$u_{xx} - u_{tt} = (\lambda x + \mu)u_{tt}(x_0, t) \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$, где λ, μ, x_0 - произвольные действительные числа, причем $0 < x_0 < l$.

При заданных начальных и финальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(x, T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, T) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3)$$

исследуется задача поиска таких управлений $\mu(t) = u(0, t)$ и $v(t) = u(l, t)$, которые переводили бы струну из произвольного начального состояния (2) в произвольное финальное состояние (3). При этом будет показано, что существование таких управлений зависит от взаимного расположения прямой $\lambda x + \mu$ и области Ω , где рассматривается уравнение (1).

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $u_t = \Delta \ln u$ *

EXACT SOLUTIONS OF $u_t = \Delta \ln u$ EQUATION *

Базарова В.Б.***, Пухначёв В.В.**

*** Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
 ** Новосибирский государственный университет, Россия, Новосибирск
vicbazarova@gmail.com

Рассматривается уравнение $u_t = \Delta \ln u$ (*), где Δ – оператор Лапласа по переменным x, y . Это уравнение является предельным случаем уравнения медленной диффузии [1]. Оно обладает рядом замечательных свойств. Так, уравнение (*) допускает бесконечную группу Ли [2], содержащую группу конформных преобразований плоскости x, y с подходящим преобразованием функции u . В отличие от уравнения пористой среды, $u_t = \Delta \ln(u^m)$, где $m = \text{const} > 0$, уравнение (*) не имеет аналогов решения Баренблатта с начальными данными в виде меры.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект [13-01-00526](#))

Уравнение (*) описывает нестационарные течения прекурсионных пленок по твердой поверхности под действием сил Ван-дер-Ваальса [3]. Оно также используется для описания потоков Риччи на двумерных римановых многообразиях [4]. В работе [3] отмечена важность построения решений данного уравнения, обращающихся в $+\infty$ на движущейся линии в плоскости x, y .

В докладе проводится систематический анализ точных решений уравнения (*) методами группового анализа [5] и инвариантных многообразий [6]. На основе допускаемых групп найдены его редукции к уравнению Лиувилля, $\Delta v = -\exp v$, и к уравнению $w_s = \Delta \ln w$ (Δ – лапласиан по инвариантным независимым переменным s, z).

Изучены одномерные автомодельные решения, в том числе удовлетворяющие условию медленного растекания капли. Получено счетное семейство двумерных автомодельных решений. Особый интерес представляет решение, в котором для растекающейся пленки особенности на движущемся фронте "сглаживаются" при $t \rightarrow \infty$.

Литература

1. Meirmanov A.M., Pukhnachev V.V., Shmarev S.I.. Evolution Equations and Lagrangian Coordinates. Walter de Gruyter. De Gruyter Expositions in Mathematics, 24. Berlin – New York (1997).
2. Nariboli G.A. Self-similar solutions of some nonlinear equations. Applied Scientific Res., 22, № 1, 449-461 (1969).
3. Воинов О.В. Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса. ПМТФ, 35, №6, 69-85 (1994).
4. Wu L.-F. A new result for the porous medium equation derived from the Ricci flow. Bull. American Math. Soc. 28, 90-94 (1993)
5. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М: Наука (1978).
6. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall / CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. London (2007).

УДК 517.958

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА*

DEFINING SURFACES OF DISCONTINUITY OF THE COEFFICIENTS OF NONSTATIONARY TRANSPORT EQUATION*

Балакина Е.Ю.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Россия, Новосибирск
balakina@math.nsc.ru

Рассматривается нестационарное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial f(t, r, \omega, E)}{\partial t} + \nabla_r f(t, r, \omega, E) + \mu(t, r, E)f(t, r, \omega, E) = J(t, r, \omega, E),$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00275 а, № 14-01-31165 мол_а)

где t – временная переменная, $t \in [0, T]$, r – пространственная переменная, $r \in G \subset \mathbb{R}^3$, G – выпуклая ограниченная область, $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$, $E \in [E_1, E_2]$.

Среда G , в которой протекает процесс, неоднородна, коэффициенты уравнения μ и J могут претерпевать разрыв по пространственным переменным. Задача заключается в нахождении только лишь этого множества разрывов или, иначе говоря, в определении структуры среды G . Известными данными является усреднённая плотность выходящего потока H :

$$\int_{E_1}^{E_2} f(t, \eta, \omega, E) dE = H(t, \eta, \omega), \quad \eta = r + d(r, \omega)\omega.$$

Такая постановка является продолжением цикла исследований Аниконова Д.С. [1,2].

Для решения задачи сначала исследуется прямая задача о нахождении плотности потока f при заданных начальном условии и плотности падающего потока. Похожая постановка, но в случае непрерывных коэффициентов, была рассмотрена Прилепко А.И. [3,4].

Далее рассматривается функция $\text{Ind}(r)$, зависящая от известной функции H ,

$$\text{Ind}(r) = \left| \nabla \int_{\Omega} \int_0^T H(t, r + d(r, \omega)\omega, \omega) d\omega dt \right|$$

и показывается, что она принимает неограниченные значения только вблизи искомым множеств. Эта функция, аналогично [1], называется индикатором неоднородности.

Литература

1. Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров Н.В. Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
2. Аниконов Д.С., Балакина Е.Ю. Полихроматический индикатор неоднородности неизвестной среды для задачи рентгеновской томографии // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 4. С. 721–740.
3. Прилепко А.И., Иванков А.Л. Обратные задачи определения коэффициента, индикатрисы рассеяния и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 22, №. 1. С. 870-885.
4. Прилепко А.И., Иванков А.Л. Обратные задачи определения коэффициента и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса по переопределению в точке // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 22, №. 5. С. 109-119.

УДК 51-77

О ВЛИЯНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ НА СТАБИЛЬНОСТЬ ОБЩЕСТВА

THE INFLUENCE OF NONLINEAR EFFECTS ON THE STABILITY OF SOCIETY

Басаева Е.К., Каменецкий Е.С, Хосаева З.Х.

ЮМИ ВНЦ РАН и PCO-A, ВНЦ РАН и PCO-A, ВНЦ РАН и PCO-A
362027, PCO-Алания, г.Владикавказ, ул.Маркуса 22,
hzaia83@mail.ru

В настоящее время общепризнан нелинейный характер изменения состояния социальных систем. С нелинейными эффектами связывают возникновение социальных кризисов и революционных ситуаций. Один из примеров применения нелинейной модели взаимодей-

ствия между правящей группой и враждебной ей социальной группой претендентов на власть приведен в работе [1].

Аналогичные уравнения для оценки изменения уровня напряженности отдельных социальных групп можно получить, используя математическую модель коллективных действий, учитывающую влияние эмоций и стереотипов на действия людей в толпе [2]. В модели учитываются возможные значения управляющего параметра и коэффициентов в уравнениях. Уравнение, описывающее напряженность каждой социальной группы:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma [1 - \eta(1 - \beta)] P_* + \gamma \{\eta[P_* + \beta(1 - 2P_*)] - 1\}P$$

$P \in [0, 1]$. Ноль соответствует полному отсутствию напряженности, а единица – максимально возможной напряженности. P_* – значение напряженности, к которому стремится система под воздействием различных факторов, $P_* \in [0, 1]$. Влияющими факторами являются изменение экономической ситуации, взаимодействие между социальными группами и т.д. γ – интенсивность восприятия воздействия; η – внутренняя тенденция к ослаблению или усилению воздействия, $\eta \in [0, 1]$; β – склонность к восприятию воздействия, $\beta \in [-1, 1]$. Если внутренняя тенденция к усилению воздействия отсутствует ($\eta = 0$), то:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma(P_* - P).$$

Такое восприятие отражает воздействия изменения экономической ситуации или мало-влияющей социальной группы.

Если межгрупповое влияние очень значительно ($\eta = 1, \beta = 1$) то:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma P_*(1 - P),$$

Считая, что $\gamma = cP_*/(1 - P_*)$ имеем: $\frac{dP}{dt} = c \frac{P_*^2}{1 - P_*} (1 - P)$.

Константа $c \in [0, 4]$, определяет ощущаемую степень опасности для данной социальной группы от конфронтации с другой группой. Считаем, что влияние изменения экономической ситуации и межгруппового взаимодействия аддитивны.

Рассмотрим изменение напряженности в обществе, состоящем из правящей элиты и трудящихся. При определенных предположениях уравнение, описывающее изменение напряженности элиты (P_1) будет иметь вид ($\gamma_{3i} \in [0, 1, 0, 15]$; $c_2 \in [0, 4]$):

$$\frac{dP_1}{dt} = -\gamma_{31}P_1 + \gamma_{12}(P_2 - P_1).$$

Аналогичное уравнение для определения напряженности трудящихся (P_2):

$$\frac{dP_2}{dt} = \gamma_{32}(P_{32} - P_2) + c_2 \frac{P_1}{1 - P_1} [(P_1 - P_2) + \eta_2 P_2(1 - P_1)].$$

Найдем стационарные точки полученной системы уравнений.

$$P_1^* = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{31} + \gamma_{12}} P_2^*,$$

$$\eta_2 c_2 \left(\frac{\gamma_{31} + \gamma_{12}}{\gamma_{12}} \right)^2 (P_2^*)^3 + \left(\gamma_{32} + \frac{\gamma_{12} \gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{12}} P_{32} \right) P_2^* - \gamma_{32} P_{32} - \left[\frac{\gamma_{12} \gamma_{32}}{\gamma_{31} + \gamma_{12}} + c_2 \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{31} + \gamma_{12}} \left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{31} + \gamma_{12}} - 1 \right) + \eta_2 c_2 \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{31} + \gamma_{12}} \right] * (P_2^*)^2 = 0.$$

где P_1^*, P_2^* – значения напряженности элиты и трудящихся в стационарных точках.

Полученное кубическое уравнение для P_2^* , при $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 0,15$, $\gamma_{12} = 2$, $c_2 = 0,03$, $\eta = 0,5$, в зависимости от P_{32} может иметь как одно, так и три действительных решения (Рис.1). Полученный результат означает, что при переходе от трех стационарных точек к одной возможно резкое увеличение напряженности трудящихся.

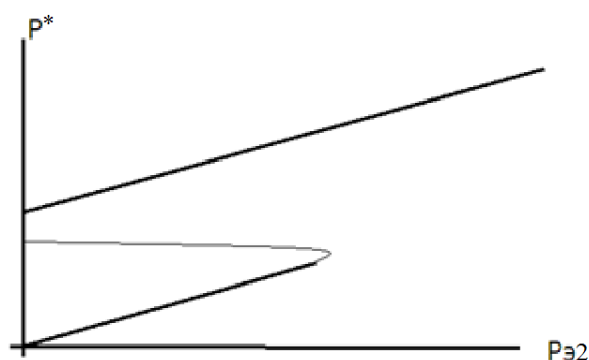


Рисунок 1.Схема изменения напряженности трудящихся при изменении экономической ситуации.

Литература

1. Karmeshu Mr., Jain V.P., Mahajan A.K. A dynamic model of domestic political conflict process // Journal of Conflict Resolution, 1990, v.34, №2, 252-269.
2. Bosse E., Hoogendoorn M., Klein M.C.A., Treur J., van der Wal C.N., van Wissen A. Modeling collective decision making in groups and crowds: Integrating social contagion and interacting emotions, beliefs and intentions // Auton. Agent Multi-Agent Syst., 2013, v.27, 52-74.

УДК 532.59

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРОТКИХ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН В АОРТЕ SIMULATION OF SHORT SPIRAL WAVES IN THE AORTA

Батищев В.А.* , Гетман В.А.*

* Южный федеральный университет, Россия, Ростов-на-Дону
batishev-v@mail.ru

В конце прошлого века активизировались исследования спиральных течений крови в артериальной системе человека и животных. Отметим, что еще в семнадцатом веке Harvey W. наблюдал закрученные потоки крови в сердце. Анализ экспериментальных данных показал, что вращающийся поток крови возникает в левом желудочке сердца в диастолу и переносится в восходящую аорту в систолу. Систола – одна из фаз сердечного цикла – сокращение сердца. Во время систолы кровь нагнетается в артериальную систему. Диастола – вторая часть сердечного цикла – расслабление сердца. Среди причин возникновения спиральных течений крови может быть закрученная структура стенок левого желудочка сердца, спиральная неустойчивость, механические свойства стенок аорты и др.

Исследования показали, что в аорте распространяется средний стационарный поток. В докладе этот поток моделируется течением Пуазейля. На фоне стационарного потока движутся длинные продольные пульсовые волны, свойства которых сильно зависят от вязкости жидкости и упругих свойств стенок сосудов. Отметим, что эти волны были предметом интенсивных исследований в конце девятнадцатого века [1-2]. Длинные спиральные волны с учетом анизотропии стенок исследованы в [3]. В докладе показано, что в отличие от длинных продольных волн, которые заполняют все поперечное сечение аорты, длинные спиральные волны локализованы только в пограничном слое вблизи стенки аорты. В конце систолы в пограничном слое возникает противоток.

На основе нелинейной системы Навье-Стокса и динамических уравнений оболочки построена математическая модель коротких спиральных волн в восходящей аорте. Предполагается, что спиральные волны в аорте вызваны закрученным потоком жидкости, посту-

пающим на вход в аорту из левого желудочка сердца. Аорта моделируется круговым цилиндром, ограниченным тонкой упругой изотропной оболочкой. Решения модели построены асимптотическими и численными методами. Показано, что короткие спиральные волны, в отличие от длинных спиральных волн, заполняют все поперечное сечение сосуда.

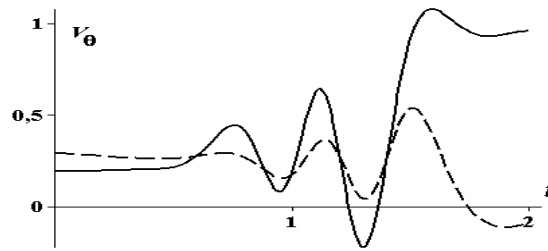


Рис. 1. Амплитуды спиральных волн в зависимости от времени в систолу

Короткие и длинные спиральные волны в аорте изменяют направление вращения жидкости в течение систолы. В докладе построены квазистационарные спиральные моды, которые не изменяют направление вращения жидкости ни со временем, ни по сечению сосуда.

Численные расчеты коротких спиральных волн показывают, что возможны различные варианты закручивания потока жидкости в аорте. Возможен режим, полученный экспериментально, а именно: в период систолы жидкость вращается в одну сторону, за исключением небольшого промежутка времени, когда жидкость вращается в обратном направлении (рис. 1). Этот промежуток может находиться вблизи любой временной точки систолы. На рисунке сплошная и пунктирная линии изображают окружную компоненту скорости соответственно на входе в аорту и на расстоянии от входа, равном трем диаметрам сосуда d . Амплитуды рассчитаны на расстоянии $0.25d$ от центральной оси сосуда. Расчеты различных мод показывают, что в начале систолы существует небольшой временной отрезок, в течение которого окружная компонента скорости изменяется незначительно. Длина этого отрезка увеличивается при удалении от входа в цилиндр. С ростом расстояния от входа в цилиндр короткие спиральные волны затухают по экспоненциальному закону. Механизмом переноса этих волн является как стационарный поток, так и длинные продольные волны. Короткие спиральные волны слабо зависят от упругих свойств стенок аорты

Литература

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М. Мир, 1983. 400 с.
2. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкости в упругих трубках // Собрание сочинений. М: Изд-во АН СССР, 1952. С. 172-183.
3. Устинов Ю.А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // Доклады РАН. 2004. Т.398, №3. С.71-76.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

ON INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH A PARAMETER

Белов Ю.Я., Коршун К.В.

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

email: YBelov@sfu-kras.ru, KKorshun@sfu-kras.ru

Обратные задачи математической физики в настоящий момент играют большую роль в естественных науках и их приложениях [1], [2], [3]. Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений - это задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения неизвестным является и один (или несколько) из его коэффициентов.

В работе рассмотрена обратная задача для параболического уравнения с параметром [4], [5], в которой размерность параметра совпадает с размерностью пространства. Данная задача является задачей управления. Её решение позволяет найти функцию источника таким образом, чтобы искомая физическая величина (температура, концентрация, и т.д.) принимала заданные значения в некоторой фиксированной ограниченной области.

В настоящей работе рассматривается задача с параметром u

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} &= \lambda \Delta_x u(t, x, y) + \mu(t, y) f(t, x, y), \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y), \\ u(t, x, y)|_{x \in \partial \Omega} &= 0, \\ u(t, x, y)|_{x=y} &= \phi(t, y), \quad (t, x, y) \in Q_T,\end{aligned}$$

где $Q_T = \{(t, x, y) | t \in [0, T], x \in \Omega, y \in D\}$, $T > 0$, Ω – параллелепипед $[0, l_1] \times [0, l_2] \times \dots \times [0, l_n]$ в $\mathbb{R}^n$, D – компактное подмножество Ω с достаточно гладкой границей ∂D , $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа. Неизвестными функциями являются $u(t, x, y)$, $\mu(t, y)$, функции $f(t, x, y)$, $u_0(x, y)$, $\phi(t, y)$ заданы.

В работе получены достаточные условия на входные данные, гарантирующие существование и единственность решения задачи (1)-(4) в классе гладких ограниченных функций. Доказаны существование и единственность решения задачи Коши (1), (2), (4) в области

$$E = \{(t, x, y) | t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n, y \in D\}.$$

Литература

1. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука. 1984. 262 с.
2. Belov Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht etc.: VSP. 2002. 211 p.
3. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694-716.

4. Anikonov Yu. E. Inverse problems for evolution and differential-difference equations with a parameter // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2003, V.11, № 5, P. 439-473.
5. Аниконов Ю. Е. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром // Сибирские электронные математические известия. 2012. Т. 9. С. 45-63.

УДК 517.929.7

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ **THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE DELAYED ARGUMENT**

Бжеумихова О.И., Лесев В.Н.

Кабардино-Балкарский государственный университет, Россия, г.Нальчик
email: diff@kbsu.ru

Уравнения с отклоняющимся аргументом в последние годы привлекают все больше внимания. Это относится как к уравнениям с распределенным запаздыванием [1]-[3], так и к уравнениям с дискретным отклонением [4]-[7]. Подобный интерес можно объяснить с одной стороны теоретической новизной данных исследований, с другой же – их важностью для приложений.

Настоящая работа посвящена краевой задаче для уравнения в частных производных с запаздывающим аргументом в прямоугольной области.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \alpha u_{xx}(x, t) + \beta u_{tt}(x, t) + \gamma u(x, \tau - t) = 0, \quad (1)$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < x_0, 0 < t < \tau\}$, где $\alpha, \beta, \gamma, x_0, \tau - \text{const}$, причем

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \tau \neq 0.$$

Для уравнения (1) в области Ω исследована следующая

Задача 1. Найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2,4}(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \varphi_1(t), & u(x_0, t) &= \varphi_2(t), \\ u(x, 0) &= \varphi_3(x), & u(x, \tau) &= \varphi_4(x), \end{aligned}$$

где $\varphi_i (i = \overline{1, 4})$ – заданные, достаточно гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \varphi_3(0)$, $\varphi_1(\tau) = \varphi_4(0)$, $\varphi_2(0) = \varphi_3(x_0)$, $\varphi_1(0) = \varphi_3(0)$, $\varphi_2(\tau) = \varphi_4(x_0)$.

Методом разделения переменных установлены критерии однозначной разрешимости задачи 1. Приближенное аналитическое решение было получено в виде соответствующих тригонометрических рядов.

Литература

1. Zh. Wang, X. Li and J. Lei. Moment Boundedness of Linear Stochastic Delay Differential Equation with Distributed Delay // Preprint submitted to Stochastic Processes and their Applications, 1-38 (2012).
2. H. Zhao, Y. Liu and J. Yan. Existence for Eventually Positive Solutions of High-Order Nonlinear Neutral Differential Equations with Distributed Delay // Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012, 1-13 (2012).
3. T.L. Sabatulina and V.V. Malygina. Several stability tests for linear autonomous differential equations with distributed delay // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 6, 55-63 (2007).
4. E. Athanassiadou. On the Distribution of Characteristic Roots of Delay Differential Equations // Progress in Applied Mathematics, 2(2), 8-11 (2011).
5. Ch. Guo, D. O'Regan and R.P. Agarwal // Existence of multiple periodic solutions for a class of first-order neutral differential equations, Appl. Anal. Discrete Math., 5, 147-158 (2011).
6. C. Tunç. Existence of Periodic Solutions to Nonlinear Differential Equations of Third Order with Multiple Deviating Arguments // International Journal of Differential Equations, 2012, 1-13 (2012).
7. O.I. Bzheumikhova and V.N. Lesev. On the issue of the relationships of differential equations with distributed deviating arguments and equations with fractional integrals // Modern scientific research and their practical application, J31209, 16-19 (2012).

УДК 517.958:539.3(6), 517.968.72, 517.956.3

ЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ. СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПЛОСКОГО КАНАЛА

LINEAR INSTABILITY OF SOLUTIONS OF MATHEMATICAL MODEL DESCRIBING THE FLOW OF VISCOELASTIC POLYMERIC FLUID. CASE OF INFINITE PLANE CANAL

Блохин А.М.^{1,2}, Егитов А.В.², Ткачев Д.Л.^{1,2}

¹ *Институт математики имени С.Л. Соболева,
Россия, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет,
Россия, Новосибирск
blokhin@math.nsc.ru
eav15@mail.ru
tkachev@math.nsc.ru*

В настоящей работе изучается новая реологическая модель, которая с приемлемой точностью учитывает нелинейные эффекты, возникающие при рассмотрении движения полимерной среды как суспензии невзаимодействующих упругих гантелей [1]. Каждая из гантелей представляет собой две броуновские частицы, связанные упругой силой и движущиеся в анизотропной жидкости, образованной растворителем и другими гантелями.

Для течения полимерной среды в бесконечном плоском канале линеаризованная относительно аналога течения Пуазейля для системы Навье - Стокса проблема формулируется следующим образом: в области

$$G = \{(t, x, y) \mid t > 0, (x, y) \in \Pi = \{(x, y) \mid |x| < \infty, 0 < y < 1\}\}$$

требуется найти решение системы

$$U_t + \hat{B}U_x + \hat{C}U_y + \hat{R}U + F = 0, \quad (1.1)$$

$$\Delta\Omega = \frac{1}{Re} \{ \sigma_{xx} + 2(a_{12})_{xy} \} - 2\hat{\omega}v_x, \quad (1.2)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=1} = 0, \quad (1.3)$$

$$\Omega_y = \frac{1}{Re} (a_{12})_x \quad \text{при } y = 0, 1; \quad (1.4)$$

$$\|U\| \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 0, \quad p_x \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

и начальным данным

$$U|_{t=0} = U_0(x, y), \quad p|_{t=0} = p_0(x, y). \quad (1.6)$$

Здесь $U = (u, v, a_{11}, a_{12}, a_{22})^T$, u, v - компоненты вектора скорости, a_{ij} - компоненты симметрического тензора анизотропии, $\sigma = a_{11} - a_{22}$, $\Omega = p - \frac{1}{Re} a_{22}$,

p - гидростатическое давление, $\hat{\omega} = \hat{u}_y$, Re - число Рейнольдса, матрицы $\hat{B}, \hat{C}, \hat{R}$ зависят от основного решения и физических параметров модели, $F = (p_x, p_y, 0, 0, 0)^T$.

Доказывается, что нулевое решение смешанной проблемы (1.1)-(1.6) не является устойчивым по Ляпунову [2].

Литература

[1] Алтухов Ю.А., Головичева И.Э., Пышнограй Г.В. *Молекулярный подход в динамике линейных полимеров: теория и численный эксперимент* // Известия РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 3-13.

[2] Блохин А.М., Ткачев Д.Л., Егитов А.В. *Линейная неустойчивость решений математической модели, описывающей течения полимеров в бесконечном канале* // Журнал вычислительной математики и математической физики // 2015. Т. 55. № 5. С. 122-147.

УДК 517.976

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ P_n ПРИБЛИЖЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

FINITE DIFFERENCE SOLUTION METHODS FOR THE INVERSE PROBLEM FOR PN-APPROXIMATION KINETIC TRANSPORT EQUATION.

К.С. Бобоев

НГАСУ(Сибстрин) г. Новосибирск

Рассмотрим кинетическое уравнение переноса нейтронов для анизотропного рассеяния в случае плоскопараллельной геометрии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x)u = Su + \delta(x, t)\delta(\mu' - \mu^2 *); \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0 \quad (2)$$

Здесь

$$\mu^*, \mu \in (-1, 1), \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}: t > 0\}$$

R – множество вещественных чисел, δ – дельта – функция Дирака,

$$Su = \frac{\partial_s(x)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(x, \mu_0) u(x, t, \mu') d\mu' d\varphi,$$

$$\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu'^2} \sqrt{1-\mu^2} \cos\varphi,$$

$u(x, t, \mu)$ – плотность потока нейтронов, $\sigma(x), \sigma_s(x)$ – полное сечение и сечение рассеяния, $g(x, \mu_0)$ – индикатриса рассеяния.

В соответствии с методом сферических гармоник [1] предположим, что процесс распространения нейтронов достаточно точно описывается конечным рядом

$$u(x, t, \mu) \approx \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} u_k(x, t) P_k(\mu) \quad (3)$$

где

$$u_k(x, t) = \int_{-1}^1 u(x, t, \mu) P_k(\mu) d\mu, \quad P_k(\mu) \text{ – полиномы Лежандра.}$$

Подставляя (3) в (1) и (2), получаем симметрическую гиперболическую систему дифференциальных уравнений первого порядка по Фридрихсу. Приводя полученную систему к каноническому виду, имеем

$$-\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial z} + A v = \Phi \delta(z, t) \quad (4)$$

$$v|_{t < 0} \equiv 0 \quad (5)$$

$$\Phi_j = \frac{1}{2\mu_{j+1}|\mu_*|} \sum_{n=1}^4 \omega_n P_{i-1}(\mu_n) (2n-1) [P_{n-1}(\mu_*) (P_{n-1}(-\mu_*))], \quad j=1..n$$

$$V_{(i)}(z, t) = \sum_{i=1}^4 \omega_j P_{j-1}(\mu_i) u_i(x, t); \quad i=1..n$$

Обратная задача заключается в определении функций $v_i(z, t)$ и $\sigma_i(z)$, $i = 1..n$ из (4) – (5) по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$v_j|_{z=0} I_j(t), \quad t \in R_+. \quad (6)$$

Будем говорить, что решение обратной задачи (4)-(6) принадлежит классу, если выполнены следующие условия:

$$v_{(j)} \in C^4(\overline{\Delta_3(T) \setminus \Delta_4(T)}),$$

$$v_j \in C^4(\overline{\Delta_4(T)}),$$

$$\sigma_j \in C^4([-T(\alpha), T(\alpha)]), \quad j=\overline{1..n} \quad T(\alpha) = \frac{2\alpha T}{1+\alpha},$$

и существует положительная постоянная C такая, что имеет место оценка

$$-c \leq \sigma_j(z) \leq c, \quad j = \overline{1..n}, \quad z \in [-T(\alpha), T(\alpha)].$$

Построен, конечно-разностный алгоритм решения обратной задачи (4) – (6) в случае произвольно $T \in B$ в предположении, что решение обратной задачи (4) – (6) существует и принадлежит классу $\Omega(T)$

Лемма. Существует положительная постоянная c_2 такая, что при всех $N > 0$

$$\max_{j=\overline{1..n}} \max_{i=\overline{1..n}} \|v_{(j)}\|_i \leq c_2. \quad (7)$$

Используя дискретный аналог неравенства Беллмана, получаем

$$\Theta \leq e^{c_4 T} O(h),$$

где c_4 зависит от N .

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ
СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ПРИЛОЖЕНИЕМ В ИММУНОЛОГИИ**

**OPTIMAL CONTROL OF PIECEWISE-SMOOTH SYSTEM
OF DIFFERENTIAL DELAY EQUATIONS WITH APPLICATION
IN IMMUNOLOGY**

Болодурина И.П., Иванова Ю.П.

Оренбургский государственный университет, Россия, Оренбург
prmat@mail.osu.ru

Основная цель проведенного исследования заключается в том, чтобы дать общий обзор важных идей анализа и поиска оптимального управления негладкой системой дифференциальных уравнений с запаздыванием, представленной в виде

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(t, x(t-\tau), x(t), u(t)), & S(t, x) < 0, \\ f_2(t, x(t-\tau), x(t), u(t)), & S(t, x) \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$ - векторы состояния и управления соответственно, τ - постоянное запаздывание, $S(t, x)$ - непрерывно дифференцируемая по совокупности аргументов скалярная функция, определяющая нарушение гладкости правой части системы (1). Основное внимание в проделанной работе сконцентрировано на проблеме необходимых условий оптимальности и их применении для построения численных методов поиска решения практических задач в области иммунологии, описываемых системой дифференциальных уравнений вида (1).

В рамках проведенного исследования рассмотрены различные иммунологические задачи оптимального управления, моделирующие процесс размножения и нейтрализации антигенов, пролиферации и дифференцировки плазматических клеток и антител. Рассмотренные задачи отличаются друг от друга различными особенностями, такими как размерность фазового пространства состояний, типы нелинейностей, структура ограничений, многоэкстремальность, вид разрывов в системе, а также наличием запаздываний в фазовых переменных и т.д. Для рассматриваемых задач разработаны специализированные методы поиска оптимального управления, ориентированные на учет их особенностей, получены различные необходимые условия оптимальности, разработано алгоритмическое и программное обеспечение, позволяющее находить оптимальное управление и придавать ему содержательную интерпретацию.

ОБ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

ON THE ERROR ESTIMATES OF THE PROJECTION REGULARIZATION METHOD

Бредихина А.Б.

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная орденов Ленина и Октябрьской Революции дважды Краснознаменная ордена Кутузова академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (филиал, г. Челябинск),

Россия, Челябинск

bredikhina-ann@yandex.ru

В настоящее время, при использовании вычислительных методов большое внимание уделяется оценкам погрешности применяемых алгоритмов, их точности и оптимальности. Особую роль эти характеристики играют при исследовании некорректно поставленных задач с использованием различных регуляризующих семейств.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f,$$

где H - гильбертово пространство, A - инъективный линейный ограниченный оператор, отображающий пространство H в H , а $f, u \in H$. Требуется определить приближенное решение $u_\delta^\alpha = P_\alpha f_\delta$ уравнения, оценить его отклонение от точного решения в предположении, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 данного уравнения, принадлежащее классу корректности M_r . Но f_0 нам не известно, вместо него даны f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$.

В докладе будут рассмотрены методы регуляризации, построенные на основе проекционного регуляризующего семейства:

$$P_\alpha f = \int_{\alpha}^{\|A\|} \frac{1}{\sigma} dE_\sigma f, \quad \alpha \in (0, \|A\|],$$

(E_σ - спектральное разложение единицы), отличающиеся способом выбора параметра регуляризации α :

1) по методу М.М. Лаврентьева, а именно из уравнения $rG(\alpha)\alpha = \delta$ (где $G(\sigma) = \sigma^p$);

2) по схеме В.Н. Страхова, т.е. из условия $\min_{\alpha \in (0, \|A\|]} \left[r^2 G^2(\alpha) + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right];$

3) из принципа невязки, т.е. из уравнения $\|Au_\delta^\alpha - f_\delta\|^2 = 9\delta^2$.

Для первого метода доказана его оптимальность по порядку и найдена точная константа, равная $\sqrt{2}$.

Для второго метода, в случае, когда класс корректности определяется положительной степенью исходного оператора, также была доказана оптимальность по порядку метода [1]. При этом полученные точные константы в обоих случаях, позволили провести сравнительный анализ этих методов.

Третий метод, когда параметр регуляризации выбирается из уравнения невязки, является нелинейным в отличие от первых двух методов. Особенностью этого метода является то, что в качестве исходной информации он использует лишь f_δ и уровень погрешности

δ , кроме того, параметр регуляризации в нем зависит не только от δ , но и от f_δ . В работе [2] была также доказана его оптимальность по порядку и найдена точная по порядку оценка его погрешности.

Литература

1. Бредихина А.Б. Исследование оптимальности метода проекционной регуляризации// Системы управления и информационные технологии. 2010. № 3(41). с.70-72.
2. Танана В.П., Бредихина А.Б., Камалтдинова Т.П. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций// Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1. с. 281-288.

УДК 517.518.87

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УЗЛОВ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ С ВЕСОМ

OPTIMAL DISTRIBUTION OF NODES OF THE QUADRATURE FORMULA WITH WEIGHT

Булгатова Е.Н.*, Павлова Е.Б.**

* ***Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Россия, Улан-Удэ*

* belena77@mail.ru, ** pavlova2607@mail.ru

В работе рассматривается распределение узлов весовой квадратурной формулы в зависимости от свойств конкретной весовой функции и от поведения подынтегральной функции, принадлежащей к определенному функциональному пространству.

Пусть вес $p(x) \in L_p, 1 < p \leq \infty$, $f \in W_p^m$ и вычисляется интеграл $If = \int_0^1 p(x) f(x) dx$.

Используя интерполяционную формулу Лагранжа, искомый интеграл представим в виде суммы

$$\int_0^1 p(x) f(x) dx = \sum_{\beta=1}^N \int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} p(x) f(x) dx \approx \sum_{\beta=1}^N \int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} p(x) L_m(x - x_{\beta-1}) dx = \sum_{\beta=1}^N h^* \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) f(x_{\beta-1+\gamma})$$

где коэффициенты определяются по формулам $C_\gamma(\beta) = \int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} \frac{\omega_m(x - x_{\beta-1}) p(x)}{\omega'(x_{\beta-1+\gamma})(x - x_{\beta-1+\gamma})} dx$.

Рассмотрим две возрастающие последовательности чисел $\{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\gamma < \dots < x_N = 1\}$ и $\{0 < h < 2h < \dots < h\gamma < \dots < hN = 1\}$.

С помощью этих последовательностей можно построить дифференцируемую функцию $x = \varphi(t)$ по значениям $x_\gamma = \varphi(h\gamma)$, $\gamma = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющую условиям $x(0) = 0$ и $x(1) = 1$.

Теорема. Пусть $f \in W_\infty^m$, $\max_{x \in [0,1]} |f^{(m+1)}(x)| \leq M$, $p(x) \in L_1(0,1)$ и

$\int_0^1 p(x) f(x) dx \approx \sum_{\beta=1}^N \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) f(x_{\beta-1+\gamma})$ - весовая формула. Тогда асимптотически опти-

мальное распределение узлов $x_\beta, \beta=1,2,\dots,N$, определяется функцией $x=\varphi(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\left[p(\varphi(t))\varphi'(t)^{m+1}\right]=0,$$

начальным условиям $\varphi(0)=0, \varphi(1)=1$ и в неявной форме выражается интегралом

$$\int_0^x p(x)^{\frac{1}{m+1}} dx = \int_0^x p(x)^{\frac{1}{m+1}} dx \cdot t.$$

УДК 517.977

МЕТОД НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ*

METHOD OF THE FIXED POINTS IN OPTIMIZATION PROBLEMS OF CONTROLLED SYSTEMS*

Булдаев А.С.*

* Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ
buldaev@mail.ru

Предлагается новый подход, который является развитием и обобщением предыдущих результатов, полученных в классах нелинейных задач оптимального управления [1, 2]. Метод иллюстрируется в рамках следующего класса задач оптимального управления:

$$\Phi(\sigma) = \varphi(x(t_1), \omega) + \int_T F(x(t), u(t), \omega, t) dt \rightarrow \inf_{\sigma \in \Omega},$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \omega, t), \quad x(t_0) = a, \quad u(t) \in U, \quad \omega \in W, \quad a \in A, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

в котором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ – вектор управляющей функции, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_l)$ и $a = (a_1, \dots, a_n)$ – векторные управляющие параметры. Множества $U \subseteq R^m$, $W \subseteq R^l$, $A \subseteq R^n$ замкнуты и выпуклы. Интервал T фиксирован. В качестве допустимых управляющих функций рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в множестве U . $\sigma = (u, \omega, a)$ – допустимое управление со значениями в множестве $\Omega = V \times W \times A$.

Одним из основных подходов к оптимизации управления является последовательное решение задач улучшения управления, в которых для заданного управления $\sigma^I \in \Omega$ требуется найти управление $\sigma^{II} \in \Omega$ с условием $\Phi(\sigma^{II}) - \Phi(\sigma^I) \leq 0$.

В данной работе для решения задачи улучшения предлагается решить специальную задачу о неподвижной точке конструируемого оператора в пространстве управлений. Решение предлагаемой задачи о неподвижной точке позволяет улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие принципу максимума, и получать новые необходимые условия оптимальности в рассматриваемом классе задач.

Предлагаемый подход последовательного решения задач улучшения на основе поиска неподвижных точек характеризуется отсутствием процедуры игольчатого или выпуклого варьирования управлений и состоит в последовательном решении чередующихся задач Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Указанные свойства являются важными факторами повышения вычислительной и ка-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-03680_a)

чественной эффективности решения задач оптимального управления.

Литература

1. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятск. гос. ун-та, 2008. – 260 с.
2. Булдаев А.С. Новый подход к оптимизации управляемых систем на основе краевых задач / А.С. Булдаев // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №6. – С. 87-94.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ С УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА* INVERSE PROBLEM FOR A CONVOLUTION INTEGRO- DIFFERENTIAL OPERATOR WITH CONDITIONS OF THE THIRD KIND

Бутерин С.А.

*Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, Саратов
buterinsa@info.sgu.ru*

Пусть $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ – спектр краевой задачи $L = L(M, h, H)$ вида

$$-y''(x) + \int_0^x M(x-t)y'(t)dt = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2)$$

где λ – спектральный параметр, h, H – комплексные числа, $M(x)$ – комплекснозначная функция, и $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$. Тогда собственные значения имеют вид

$$\lambda_n = (n + \kappa_n)^2, \quad \{\kappa_n\} \in l_2. \quad (3)$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. По спектру $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ найти функцию $M(x)$ и коэффициент H в предположении, что коэффициент h известен априори.

Обратные спектральные задачи для интегро-дифференциальных операторов с краевыми условиями Дирихле исследовались в [1]–[3] и других работах. В [2],[3] обратная задача сведена к так называемому основному нелинейному интегральному уравнению, которое решено глобально, что позволило получить глобальную разрешимость обратной задачи. Краевые условия (2) вносят существенные дополнительные трудности в исследование обратной задачи. Следующая теорема вместе с (3) дает единственность и необходимые и достаточные условия разрешимости задачи 1 в случае $h = 0$. Отметим, что при $h \neq 0$ вопрос о разрешимости задачи 1 остается открытым.

Теорема 1. Для произвольных комплексных чисел $\lambda_n, n \geq 0$, вида (3) существует единственная (с точностью до значений на множестве нулевой меры) комплекснозначная функция $M(x)$ из класса $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$ и единственное комплексное число H , такие что $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ является спектром краевой задачи $L(M, 0, H)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-04864, 13-01-00134) и Минобрнауки РФ (проект 1.1436.2014К).

Решение обратной задачи может быть построено по следующему алгоритму.

Алгоритм 1. Пусть задан спектр $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ краевой задачи $L(M, 0, H)$. Тогда:

1) Находим коэффициент H по формуле

$$H = \pi \lambda_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2}.$$

2) Строим функцию $w(x)$ по формуле

$$w(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(n)}{n} \sin nx - H \frac{\pi - x}{\pi}, \quad \text{где} \quad \Delta(\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}.$$

3) Находим функцию $N(x)$, решая основное уравнение обратной задачи

$$-w(\pi - x) - H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\pi - x)^{\nu}}{\nu!} \left(N^{*\nu}(x) + H \int_0^x N^{*\nu}(t) dt \right),$$

где

$$N^{*1}(x) = N(x), \quad N^{*(\nu+1)}(x) = \int_0^x N(x-t) N^{*\nu}(t) dt, \quad \nu \geq 1.$$

4) Строим функцию $M(x)$ по формуле

$$M(x) = 2N(x) - \int_0^x dt \int_0^t N(t-\tau) N(\tau) d\tau, \quad 0 < x < \pi.$$

Литература

[1] Юрко В.А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Математические заметки. 1991. Т.50. Вып.5. С.134–144.

[2] Buterin S.A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results in Mathematics 2007. V.50. №3-4. P.173–181.

[3] Бутерин С.А. О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма-Лиувилля по спектру // Дифференциальные уравнения. 2010. Т.46. №1. С.146–149.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И ПОЛИНОМЫ ЦЕРНИКЕ INVERSE PROBLEMS AND ZERNIKE POLYNOMIALS

Бухгейм А.А.

*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
Россия, Новосибирск
alexander@buchheim.ru*

Полиномы Цернике естественно появляются в прямых и обратных задачах математической физики рассматриваемых в единичном круге, так как они образуют в нём ортогональный базис. В настоящем докладе мы используем полиномы Цернике для численного решения следующих обратных задач.

1. Двумерная обратная задача теории потенциала: восстановление правой части уравнения Коши-Римана по следу решения на границе.
2. Одновременное восстановление коэффициента поглощения и источника в задаче томографии с поглощением.
3. Восстановление коэффициентов эллиптических систем по данным измерений на границе.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PSEUDO DIFFERENTIAL EQUATIONS IN DOMAINS WITH A COMPLICATED FORM

Васильев В.Б.

*Липецкий государственный технический университет,
Россия, Липецк
ybv57@inbox.ru*

Рассматривается псевдодифференциальное уравнение

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in D, \quad (1)$$

где A – эллиптический псевдодифференциальный оператор в области D m -мерного пространства $\mathbf{R}^m$ с символом $A(x, \xi)$, $x \in \bar{D}$, $\xi \in \mathbf{R}^m$. Граница области предполагается кусочно-гладкой, причем особенности границы могут быть различной природы, например, типа конуса или ребра. Ранее автор получил подробную картину разрешимости (фредгольмовости) уравнения (1) в плоском случае, исходя из концепции волновой факторизации эллиптического символа [1]. Несколько позже удалось описать и некоторые многомерные ситуации [2-5]. Здесь же рассматривается ситуация сложных особенностей типа букета упомянутых конусов с общей вершиной. Устанавливается связь с рассмотренными ранее случаями и предлагаются различные постановки корректных краевых задач в пространствах Соболева – Слободецкого H^s .

Литература

1. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2-е изд., 2010.
2. Vasilyev V.B. Elliptic equations and boundary value problems in non-smooth domains. Pseudo Differential Operators: Analysis, Applications and Computations. Operator Theory: Advances and Applications, 2011, V.213. Birkhäuser, Basel. P.105-121.
3. Vasilyev V.B. Asymptotical analysis of singularities for pseudo differential equations in canonical non-smooth domains. *Integral Methods in Science and Engineering. Computational and Analytic Aspects*. Birkhäuser, Boston, 2011. P.379-390.
4. Vasilyev V.B. Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries. Differential and Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. & Stat. 2013. V.47. P.625-637.
5. Vasilyev V.B. Potentials for elliptic boundary value problems in cones. arXiv:1409.4492.

УДК 517.518.87

ОЦЕНКА СВЕРХУ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С СИММЕТРИЧНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

AN UPPER ESTIMATE OF ERROR FUNCTIONAL OF THE QUADRATURE FORMULAS WITH A SYMMETRIC BOUNDARY LAYER

*Васильева Е.Г., **Цыренжапов Н.Б.

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия,
Улан-Удэ

vasil_eg@mail.ru

**Восточно-Сибирская Академия культуры и искусств, Россия, Улан-Удэ
nimac@mail.ru

В книге С.Л.Соболева [1] изучались кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем, полученные суммированием различных малых локальных функционалов.

В данной работе из множества функционалов квадратурных формул с регулярным пограничным слоем для данного интервала выделяется простой функционал погрешности с симметричным пограничным слоем, т.е функционал погрешности квадратурной формулы с симметричными коэффициентами на концах интервала интегрирования.

$$\begin{aligned} l_{(0,1)}^h(x) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{\beta=0}^{N-m-1} l_{(0,1)} \left(\frac{x}{h} - \beta \right) + l_{(0,m)} \left(\frac{x}{h} - (N-m) \right) + \sum_{\beta=0}^{N-m-1} l_{(1,0)} \left(\frac{x}{h} - N + \beta \right) + l_{(0,m)} \left(\frac{x}{h} \right) \right] = \\ &= \frac{l_{(0,1)_1}^h(x) + l_{(0,1)_2}^h(x)}{2}. \end{aligned}$$

В явном виде оценивается остаточный член, входящий в оценку сверху нормы этого функционала погрешности.

$$\|l_{(0,1)}^h\|_{L_p^{m*}} \leq h^m J_m + O(h^{m+1})$$

где

$$O(h^{m+1}) \leq h^{m+\frac{p-1}{p}} C_{mp}.$$

$$C_{mp} = m^{\frac{p-1}{p}} \left[\frac{m^{m-1}}{2(m-1)!} \left(m + \sum_{\gamma=0}^m |F_{\gamma}| \right) + \frac{(m-1)^m}{(m-1)!} \left(1 + \sum_{\gamma=0}^m |C_{\gamma}| \right) \right].$$

Константа, входящая в оценку $O(h^{m+1})$ не зависит от $f \in L_p^m$.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М: Наука, 1974. – 808 с.

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛАХ *

ON SOME PROBLEMS OF IDENTIFICATION OF INHOMOGENEOUS RESIDUAL STRESS STATE ON THERMOELASTIC BODIES

Ватульян А.О.*, Нестеров С.А.*

* Южный федеральный университет, Россия, Ростов-на-Дону
vatulyan@math.rsu.ru

Большое внимание ученых в настоящее время привлекает задача определения предварительных напряжений в твердых телах. Это связано с тем, что наличие предварительных напряжений существенно влияет на прочность конструкций. Предварительное напряженное состояние чаще всего возникает в процессе технологической обработки (прокатки, закалки, сварки). В реальных конструкциях предварительно напряженное состояние неоднородно, особенно в окрестности различных дефектов. Однако разрушающие методы нахождения предварительных напряжений имеют много недостатков. Поэтому актуальной является совершенствование технологии неразрушающего контроля предварительного напряженного состояния на основе данных, снимаемых на поверхности тела. В этом случае, разработка теоретических основ реконструкции неоднородного предварительного напряженного состояния термоупругих тел возможна только на основе аппарата коэффициентов обратных задач (КОЗ).

Обратные задачи термоупругости исследованы весьма слабо, что объясняется нелинейностью этих задач. Однако для решения нелинейных обратных задач механики в ряде работ [1-4] был построен итерационный процесс, на каждом этапе которого решались интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода. В данной работе рассмотрены обратные задачи об идентификации неоднородного предварительного напряженного состояния термоупругих тел – стержня и цилиндра. С этой целью, сначала на основе подхода, предло-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект номер 13-01-00196-а) и Министерства образования и науки РФ (проект номер 9.665.2014/К).

женного ранее Треффтцем Э. и развитого Гузем А.Н. [4,5], были получены уравнения термоупругости для предварительно напряженных тел. Неустановившиеся колебания тел возбуждаются двумя способами – тепловым и механическим. Получены решения прямых задач для неоднородных тел в безразмерном виде. Решение для стержня после применения преобразования Лапласа сведено к решению интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода на основе метода коллокаций и обращении полученных решений в трансформантах на основе теории вычетов, как в [2]. Прямая задача для цилиндра решалась на основе метода пристрелки в трансформантах и обращения трансформант решений на основе метода Дурбина, как в [3]. Для решения обратной задачи на основе обобщенного соотношения взаимности для предварительно напряженных термоупругих тел [4] были получены операторные соотношения, устанавливающие взаимосвязь между искомыми и измеряемыми характеристиками. Функции, характеризующие предварительные напряжения и преднагрев, восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций методом минимизации функционала невязки. На втором этапе определялись поправки реконструируемых функций путем решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. После нахождения поправок строилось новое приближение, и осуществлялся итерационный процесс уточнения восстанавливаемых характеристик. Критерий выхода из итерационного процесса – достижение некоторого порогового значения функционала невязки. Выяснено, что неоднородные характеристики восстанавливаются с хорошей точностью: погрешность реконструкции монотонных функций не превосходит 4%, а немонотонных 10%. Для достижения порогового значения в функционале невязки, как правило, требуется не более 10 итераций.

Литература

1. Ватульян А.О. О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Доклады РАН. 2008. Т. 422. №2. С. 182–184.
2. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51(3). Pp. 767–773.
3. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для функционально-градиентных материалов // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76. №4. С. 335–342.
4. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородных характеристик предварительно напряженных термоупругих тел // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. №1. С.18–24.
5. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses // International Applied Mechanics. 2005. №38. Pp. 23–59.

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА*

ON SOME INVERSE CONVECTIVE HEAT TRANSFER PROBLEMS*

Вержбицкий М.А.

*Югорский государственный университет, Россия, Ханты-Мансийск
grandapachi@gmail.com*

Мы рассматриваем модельную обратную задачу конвективного теплообмена (см. [1]). Ищется решение параболического уравнения

$$Lu = u_t - L_0 u = f, \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, t \in (0, T) \quad , \quad (1)$$

где L_0 – эллиптический оператор второго порядка вида

$$L_0 u = \sum a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum a_i(x, t) u_{x_i} + a_0(x, t) u$$

и G – ограниченная область с гладкой границей ($\partial G \in C^2$). Пусть $Q = G \times (0, T)$, $S = \partial G \times (0, T)$. Уравнение (1) дополняется начальными и краевыми условиями вида

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} n_i \Big|_S = q(t) \Phi(x, t), \quad (3)$$

где n_i – соответствующая координата внешней единичной нормали к S . Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) и неизвестную функцию $q(t)$, входящую в (3), используя условие переопределения вида

$$u(x_0, t) = \Psi(t), \quad t \in (0, T), x_0 \in G \quad (4)$$

При выполнении условий гладкости на коэффициенты уравнения и данные задачи и стандартных условий согласования, мы показываем, что данная задача корректна. Все рассмотрения проводятся в пространствах С.Л. Соболева.

Литература

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988.

* Работа поддержана грантом РФФИ № 15-41-0063

* Работа поддержана грантом РФФИ № 15-41-0063

УДК 517.946

**О НОВЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**
**ON NEW NON-LOCAL PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

Викентьева Н.А.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск
nadika93@list.ru*

В работе рассматриваются новые нелокальные задачи для эллиптических уравнений.

Постановка задачи. Пусть Q - единичный круг. Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(z)$, удовлетворяющую внутри Q уравнению Пуассона

$$\Delta u(z) = f(z),$$

а на его границе - краевым условиям

$$u(1, \varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, \pi),$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(1, \varphi + \pi) = \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu}(1, \varphi), \quad \varphi \in (0, \pi).$$

Для рассматриваемой задачи доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Также в работе рассматриваются другие нелокальные задачи - в частности, задачи с интегральными условиями; для этих задач также доказываются теоремы о существовании и единственности регулярных решений.

УДК 517.948

**ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО
АЛГОРИТМА, ОСНОВАННОГО НА ОБОБЩЕННОМ ПРИНЦИПЕ
НЕВЯЗКИ, ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**
**ON ERROR ESTIMATES FOR REGULARIZING ALGORITHM BASED
ON GENERALIZED RESIDUAL METHOD WHEN SOLVING INTEGRAL
EQUATIONS**

Вишняков Е.Ю.*

** Южно-Уральский государственный университет,
Россия, Челябинск
evgvish@ya.ru*

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода:

$$Au(x, y) = \int_a^b \int_c^d Q(x, y, z)u(x, y)dx dy = f(z), p \leq z \leq q, \quad (1)$$

где $Q(x, y, z) \in C([a, b] \times [c, d] \times [p, q])$, $u(x, y) \in L_2([a, b] \times [c, d])$, $f(z) \in L_2[p, q]$.

Предположим, что при $f(z) = f_0(z)$ существует точное решение $u_0(x, y)$ уравнения (1), которое принадлежит множеству M , где

$$M = \{u(x, y) : u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y) \in L_2([a, b] \times [c, d]), u(a, y) = 0, u(x, c) = 0\}. \quad (2)$$

Пусть точное значение $f_0(z)$ нам не известно, а вместо него даны $f_\delta(z) \in L_2[p, q]$ и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta(z) - f_0(z)\|_{L_2} < \delta$.

Требуется по $f_\delta(z)$, δ и M определить приближенное решение $u_\delta(x, y)$ и оценить его отклонение от точного решения $u_0(x, y)$ в метрике пространства $L_2([a, b] \times [c, d])$.

Введем оператор B , отображающий пространство $L_2([a, b] \times [c, d])$ в $L_2([a, b] \times [c, d])$, формулой

$$u(x, y) = Bv(x, y) = \int_a^y \int_c^x v(\xi, \eta) d\xi d\eta, v(x, y), Bv(x, y) \in L_2([a, b] \times [c, d]) \quad (3)$$

и оператор C

$$Cv(x, y) = ABv(x, y), v(x, y), Cv(x, y) \in L_2([a, b] \times [c, d]). \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что $Cv(x, y) = \int_a^b \int_c^d K(x, y, z)v(x, y)dx dy$ и

$$K(x, y, z) = \int_a^x \int_c^y Q(\xi, \eta, z) d\xi d\eta.$$

Предположим, что для численного решения уравнения (1) оператор C неудобен и требует замены его конечномерным оператором C_{nm} , для которого известна h_{nm} , такая что $\|C_{nm} - C\| \leq h_{nm}$.

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом регуляризации А.Н. Тихонова первого порядка

$$\inf \left\{ \int_p^q \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sqrt{\frac{d-c}{m}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} K_{ij}(z) v_{ij} - f_\delta(z) \right]^2 dz + \alpha \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{m} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} v_{ij}^2 : v_{ij} \in R \right\} \quad (5)$$

Значение параметра регуляризации α в (5) выберем из обобщенного принципа невязки

$$\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sqrt{\frac{d-c}{m}} \left\{ \int_p^q \left[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} K_{ij}(z) v_{ij}^\alpha - \sqrt{\frac{n}{b-a}} \sqrt{\frac{m}{d-c}} f_{\delta nm}(z) \right]^2 dz \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \sqrt{\frac{d-c}{m}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (v_{ij}^\alpha)^2 \right]^{1/2} h_{nm} + \delta. \quad (6)$$

Окончательно, решение задачи (5), (6) имеет вид

$$v_{\delta h_{nm}}(x, y) = \{v_{ij}^\alpha : x_i \leq x < x_{i+1}, y_j \leq y < y_{j+1}\}; i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m-1}. \quad (7)$$

Из (3) и (7) следует, что приближенное решение $u_{\delta h_{nm}}(x, y)$ уравнения (1) определяется формулой

$$u_{\delta h_{nm}}(x, y) = Bv_{\delta h_{nm}}(x, y). \quad (8)$$

Получена оценка погрешности приближенного решения $u_{\delta_{nm}}(x, y)$.

Литература

1. Танана В.П., Сидикова А.И., Вишняков Е.Ю. Об оценке погрешности регуляризующего алгоритма, основанного на обобщенном методе невязки, при решении интегральных уравнений // Вестник ЮУрГУ, 2014, том 14, № 4, стр. 59 – 64.

УДК 519.676

МЕРА УПРАВЛЯЕМОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИТЕРАЦИОННЫМИ АЛГОРИТМАМИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МНОЖЕСТВАМИ УСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ

HANDLING MEASURE FOR STOCHASTIC MODELS WHICH CAN BE DESCRIBED BY ITERATIVE ALGORITHMS WITH PERIODIC SETS OF STABLE STATES

Войтишек А.В.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
Россия, Новосибирск, пр. Академика М.А.Лаврентьева, 6
vav@osmf.sccc.ru*

В данной работе рассматриваются математические модели систем, представимых в виде набора из M взаимодействующих элементов. Каждый элемент в фиксированный дискретный момент времени t (здесь $t = 0, 1, 2, \dots$) описывается набором векторов $x_i(t)$; $i = 1, 2, \dots, M$; причем допускается, чтобы $x_i(t)$ являлись случайными векторами.

В следующий момент времени $t + 1$ происходят взаимодействия между элементами, в результате чего характеристики системы меняются:

$$\begin{aligned} X(t+1) &= \Phi(X(t)); \quad X(t) \\ &= (x_1(t), \dots, x_M(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Phi(X)$ - соответствующая многозначная функция векторного аргумента (функция управления). Исследуемую систему и соответствующий ей итерационный процесс (1) назовем *управляемым*, если существует одновременно непустое и конечное (с вероятностью единица) множество предельных (устойчивых) состояний

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(1)}, \dots, \tilde{X}^{(L)}; \quad \tilde{X}^{(i)} \\ = \lim_{t \in \tilde{t}^{(i)}} X(t) \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $\tilde{t}^{(i)}$ - подпоследовательности множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, причем $\bigcup \tilde{t}^{(i)} = \mathbb{N}$.

Мерой управляемости итерационного процесса (1) назовем величину $\mu = 1/L$, где L - количество элементов множества предельных (равновесных) состояний (2). Чем меньше значение L , тем ближе мера μ к единице и тем более управляемым является процесс (1). В данной работе, в частности, будут приведены примеры последовательностей (1) с малым значением меры управляемости μ , которые широко используются для моделирования «неуправляемости» (хаоса, случайности). Несложно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Равновесные состояния (2) итерационного процесса (1) образуют циклическую группу.*

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(l+1)} &= \Phi(\tilde{X}^{(l)}) \text{ при } l = 1, \dots, L-1; \quad \Phi(\tilde{X}^{(L)}) \\ &= \tilde{X}^{(1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Это означает, что введенная нами мера управляемости процесса (1) обратно пропорциональна порядку циклической группы равновесных состояний (3).

В данной работе представлены примеры итерационных процессов, для которых введенное понятие управляемости является вполне естественным.

В частности, кратко рассмотрен итерационный численный алгоритм для моделирования ресурсных систем из работы [1]. Приведены условия, при которых мера управляемости этого алгоритма равна единице. Рассмотрена практически «естественная» ситуация, в которой допускается наличие случайных погрешностей в начальных данных. Получены выражения для элементов матрицы соответствующего предельного состояния, выведены формулы для математических ожиданий и дисперсий этих элементов. Аналогичные исследования проведены для специального (но практически важного) случая моделирования ресурсных систем («конкурентная модель»); здесь мера управляемости равна 1/2. Отметим, что более подробное описание линейных итерационных ресурсных моделей (включающее результаты показательных тестовых экспериментов) содержится в докладе [2] данной конференции.

В данной работе рассмотрен также мультипликативный метод вычетов по модулю $K = 2^m$ с множителем вида $Q = 5^{2p+1}$ для натуральных m и p :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \{x(t) \times 5^{2p+1}\}; \quad x(0) \\ &= 2^{-m}; \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $\{A\}$ обозначает дробную часть числа A и $M = 1$.

Особо отметим, что последовательности вида (4) являются характерными примерами циклических групп вида (3). Конкретные значения для параметров K и Q обусловлены широким применением алгоритма (4) с достаточно большими значениями степеней m и $2p+1$ для реализации датчиков псевдослучайных чисел, используемых в алгоритмах метода Монте-Карло (см., например, [3, 4]). В данной работе показано, что мультипликативный метод вычетов по модулю $K = 2^m$ для выбранного множителя $Q = 5^{2p+1}$ обладает минимальной (для различных Q) мерой управляемости, равной $\mu = 1/2^{m-2}$, что обуславливает целесообразность использования этого алгоритма в качестве численной модели случайной величины α , равномерно распределенной в интервале $(0,1)$.

Литература

1. Астраков С.Н., Анисова М.А. Математическое моделирование экономических взаимодействий на графах // Вестник Российского государственного торгово-экономического университета. 2009, № 6. С. 39-43.
2. Анисова М.А. Стохастическая устойчивость итерационных моделей ресурсных систем // Материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (22 – 27 июня 2015 года, Улан-Удэ – Байкал, Россия).
3. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
4. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОГО ВРЕМЕНИ ВЫПУЧИВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

VARIATIONAL PRINCIPLE IN THE PROBLEM OF DETERMINING THE CRITICAL TIME BUCKLING OF SHELLS AT STEADY CREEP

Волчков Ю.М.

Институт гидродинамики СО РАН им. М.А. Лаврентьева,

Россия, Новосибирск

volk@hydro.nsc.ru

Применение вариационных принципов в задачах математической физики позволяет построить эффективные численные алгоритмы решения соответствующих задач. В докладе излагается алгоритм вычисления критического времени выпучивания оболочек в условиях установившейся ползучести, построенный на основе смешанного вариационного принципа установившейся ползучести. Показано, что из смешанного вариационного принципа трехмерной теории ползучести при наложении некоторых ограничений следует вариационный принцип в модели Ю.Н. Работнова двухслойной оболочки. Использование вариационного принципа в модели двухслойной оболочки позволило разработать эффективный метод решения задач о напряженно-деформированном состоянии оболочек в условиях ползучести. Под ползучестью материала в механике деформируемого твердого тела понимается его свойство, заключающееся в том, что в таком материале деформации могут увеличиваться со временем даже при постоянных напряжениях. Под критическим временем выпучивания оболочки понимается момент времени, при достижении которого прогиб оболочки стремится к бесконечности. Получены аналитические выражения для критического времени выпучивания как гладких, так и подкрепленных оболочек. Проведено сравнение полученных результатов с известными в литературе решениями и с экспериментальными данными.

УДК 517.968:517.944.8

ОБ УСИЛЕНИИ АЛЬТЕРНАТИВЫ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ*

ON STRENGTHENING THE FREDHOLM ALTERNATIVE FOR INTEGRAL EQUATIONS OF CONVOLUTION

Воронин А.Ф.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, Новосибирск

voronin@math.nsc.ru

Рассмотрим следующее интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода в свертках:

$$u(t) - \int_0^b k(t-s)u(s) ds = f(t), t \in (0, b), \quad (1)$$

где

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00275)

$$k \in L_q(-b, b), f \in L_q(0, b), q > 1 \text{ (или } q=1).$$

Для интегральных уравнений Фредгольма (более общего вида, чем (1)) хорошо известна альтернатива Фредгольма. Последняя имеет большое значение для различных исследований в интегральных уравнениях.

В рассматриваемом здесь случае, когда ядро интегрального уравнения зависит только от разности аргументов, будет доказана следующая усиленная альтернатива Фредгольма.

Теорема. Усиленная альтернатива Фредгольма. Пусть $k \in L_q(-b, b)$, $q \geq 1$. Тогда,

(i) либо уравнение (1) разрешимо в $L_q(0, b)$ при $f(t)=k(t)$ и при $f(t)=k(t-b)$, $t \in (0, b)$, и тогда оно разрешимо для любой правой части $f \in L_q(0, b)$, решение в этом случае единственно, устойчиво по правой части f и ядру k ,

(ii) либо однородное уравнение (1) (при $f=0$) имеет нетривиальное решение в $L_q(0, b)$.

Данная теорема получена с помощью достаточно «тонкого» метода теории функций---метода краевой задачи Римана. В работе [1] ([2]) уравнение (система уравнений) (1) сводится, эквивалентным образом, к векторной краевой задаче Римана на прямой (с матричным коэффициентом). Анализ полученной краевой задачи Римана и приводит к усиленной альтернативе Фредгольма.

Литература

1. Воронин А.Ф. Полное обобщение метода Винера-Хопфа для интегральных уравнений в свертках на отрезке с интегрируемым ядром. // Дифф. уравн. 2004. Т. 40, № 9, с. 1190-1197.
2. Воронин А.Ф. Системы уравнений в свертках 1-го и 2-го рода на конечном интервале и факторизация матриц-функций // СМЖ, 2012. Т. 53, №5, с. 978-990.

УДК 517.95

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

NEUMANN PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH TWO LINES OF CHANGE OF TYPE IN RECTANGULAR AREA

Гималтдинова А.А.*

* Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Россия, Стерлитамак
g_alfira@mail.ru

Для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + (\operatorname{sgn} x)u_{yy} = f(x, y)$$

изучена задача с граничными условиями второго рода на границе прямоугольной области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$. Получено необходимое условие ее разрешимости. В случае однородного уравнения ($f(x, y) \equiv 0$) спектральным методом [1]-[3] доказаны теоремы единственности и существования решения.

При разделении переменных возникла спектральная задача на сопряжение для обыкновенного дифференциального оператора с разрывным коэффициентом при старшей производной. Построены система собственных и присоединенных функций и соответствующая биортогональная система. Установлена полнота биортогональной системы, и на осно-

ве этого доказана единственность решения исходной задачи Неймана. Ее решение построено в виде суммы биортогонального ряда, при обосновании сходимости которого возникла проблема малых знаменателей. При определенных ограничениях на параметры α, β получены леммы об отделённости малых знаменателей от нуля с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать сходимость ряда в искомом классе функций.

Литература

1. Ильин В.А. Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения // Мат. заметки. 1975. Т. 17. Вып.1. С. 91-101.
2. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23-26.
3. Гималтдинова А.А. Задач Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Доклады Академии наук. 2015. Т. 460. № 3. С. 260-265.

УДК 536.758; 550.8.05; 553.98

ИНТРОПРОДОЛЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ И КОНЦЕНТРАЦИЯ МАСС*

INTROCONTINUATION OF POTENTIAL FIELDS AND CONCENTRATION OF MASS

Гласко Ю.В.*, Скачков С.А.**

*Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Россия, Москва
glaskoyv@mail.ru

** Российский Государственный Геологоразведочный Университет, Россия, Москва

Относительно нефтяных месторождений используются два основных этапа: разведка и разработка. Первый этап включает комплекс взаимодополняющий методов. В их число входят как экономичные, так и весьма дорогостоящие, но необходимые методы. Математическое моделирование позволяет перенести исследование месторождения в рамки серии экономичных вычислительных экспериментов. В работе мы рассмотрим метод интерпретации гравитационного либо магнитного полей и метод интерпретации масс на границе области $V \supset \Omega$, где Ω - залеж УВ (углеводородов). В качестве границ $\Gamma \equiv \partial V$ мы выберем плоскость и куб. Комплекс предлагаемых алгоритмов состоит из 2.5D и 3D расширения методики полного нормированного градиента В.М. Березкина (ПНГ) [1] и 3.5D расширения алгоритма концентрации [2]. В отличие от алгоритмов ПНГ метод интропродолжения применяется к системе источников, то есть $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega^i$. Помимо самостоятельного значения, ПНГ и интропродолжение могут быть использованы в качестве первого приближения при конкретизации морфолого-плотностных характеристик залежи.

Гравитационное (либо магнитное) поле $U(X)$ нижнего полупространства $z \leq 0$, имеющее измеренное на дневной поверхности значение $U_0(x, y)$ описывается следующей линейной моделью.

* Работа выполнена в рамках НИР N14 (ЦИТИС 01201253080), ПНР: Математическое моделирование, методы вычислительной и прикладной математики и их применение к фундаментальным исследованиям в различных областях знаний и в нанотехнологиях.

$$\Delta U(X) = 0, \quad X \notin \Omega, \quad U(x, y, 0) = U_0(x, y)$$

Решение задачи ищется в виде ряда Фурье. Количество членов ряда определяет глубину изучаемого поля- то есть является характеристикой настройки нелинейного фильтра. В качестве фильтра выступает полный нормированный градиент (ПНГ) [1]

$$G_N = \sqrt{U_x^2(X) + U_y^2(X) + U_z^2(X)} / \left(1 / S \int_S \sqrt{U_x^2(X) + U_y^2(X) + U_z^2(X)} \right), \text{ где } S - \text{обрабатываемая площадь.}$$

ПНГ позволяет по максимальным его значениям определить источник Ω измеренного на дневной поверхности поля. Нами предложен новый конечно-разностный вариант ПНГ (КПНГ) использующий перекрестный анализ по осям абсцисс и ординат.

Модель концентрации уточняется и расширяется нами относительно моделей В.Н. Страхова [3] и В.Г. Филатова [4] на 3.5D случай касательно плотности $u(X, t)$ зависящей и от времени t .

$$D\Delta u(X, t) = u_t(X, t), \quad X \equiv (x, y, z) \in V, \quad 0 < t < T$$

$$D \int_0^T \frac{\partial u}{\partial n}(X, t) \Big|_{\Gamma} dt = \delta(X, T) \Big|_{\Gamma}$$

$$u(X, T) = \begin{cases} 0, & \forall X \in V \setminus \partial V \\ \delta_{\Gamma}(s^*) \equiv \delta(X, T), & s^*, X \in \partial V \end{cases}$$

Здесь $D > 0$ коэффициент диффузии, $\delta(X, T)$ - плотность в конечный момент T процесса выметания от источника, сконцентрированная на границе $\Gamma \equiv \partial V$. Данная задача решается нами посредством 2-ух шагового алгоритма статистической регуляризации на основе метода численного выметания Д. Зидарова [5]. Оптимальные характеристики алгоритма выявляются в процессе вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент проводится для серии объектов (аппроксимируемых посредством кубов). Точность концентрации находится на уровне 5%, а результат, при использовании минимальной априорной информации, устойчив к погрешностям во входных данных.

Литература.

1. Никитин А.А., Петров А.В., Мегеря В.М., Старостенко В.И., Филатов В.Г., Лобанов А.М.. Оптимальная фильтрация и интропродолжение геополей с учетом вторичного магнитоминералообразования в нефтегазоразведке. М.: Издательство "НТ Пресс", 2011. 143 с.
2. Гласко Ю.В. Задача концентрации масс// Физика Земли. 2015. Т.51. №2. С.37-43.
3. Страхов В.Н. О выметании масс по Пуанкаре и его использовании при решении прямых и обратных задач гравиметрии// ДАН СССР. 1977. Т.36. №1. С.54-56.
4. Филатов В.Г. Автореферат на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Устойчивые способы обработки и интерпретации потенциальных полей на основе регуляризации и концентрации источников. Киев: ИГ АН УССР, 1988. 49 с.
5. Зидаров Д.П. О решении некоторых обратных задач потенциальных полей и их применение к вопросам геофизики. София: Издательство Болгарской АН, 1968. 143 с.

**3D МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ
В СРЕДАХ ХАРАКТЕРНЫХ ДЛЯ ВУЛКАНИЧЕСКИХ СТРУКТУР***
**3D MODELING OF SEISMIC WAVE FIELDS IN A MEDIUM SPECIFIC
TO VOLCANIC STRUCTURES**

Глинский Б.М.*, Мартынов В.Н., Сапетина А.Ф*****

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия,
Новосибирск*

** gbm@opg.sccc.ru*

*** vnmsf@nmsf.sccc.ru*

**** afsapetina@gmail.com*

Необходимость предсказания катастрофических явлений, которые могут быть вызваны готовящейся вспышкой вулканической деятельности, является актуальной задачей. Для решения этой задачи необходимо проведение комплексных и объективных исследований процессов происходящих на поверхности и внутри вулканической структуры, в том числе математическое моделирование с целью создания системы вибросейсмического мониторинга.

Разработаны параллельные 2D и 3D алгоритмы и созданы программы для моделирования распространения упругих волн в сложно построенной 3D упругой среде (2D модель есть сечение исходной 3D модели различными плоскостями и под разными углами). Используется конечно-разностный метод, явные разностные схемы на сдвинутых сетках и метод поглощающих границ CFS-PML.

Предложенный численный метод и его параллельная программная реализация, эффективно используют архитектуру современного суперкомпьютера на основе графических ускорителей.

Проведена серия 3D расчетов с целью изучения структуры волнового поля, обусловленного геометрией внутренних границ, для уточнения кинематических и динамических характеристик волнового поля с целью возможного создания системы вибросейсмического мониторинга стратовулкана Эльбрус.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ №13-07-00589

**ДИССИПАТИВНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЭНЕРГИИ В СМЕШАННОЙ
ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ***

**DISSIPATIVE ENERGY INTEGRALS IN A MIXED PROBLEM
FOR THE WAVE EQUATION**

Гордиенко В.М.

*Институт математики им. С.Л. Соболева,
Россия, Новосибирск
gordienk@math.nsc.ru*

Рассматривается смешанная задача для n -мерного волнового уравнения в четверти пространства. Граничное условие задано в виде линейной комбинации первых производных. Предполагается выполненным равномерное условие Лопатинского. В этом случае построены все возможные диссипативные интегралы энергии. Эти интегралы энергии параметризованы точками верхней полы $(n+1)$ -мерного телесного конуса второго порядка. Расположение конуса и его геометрические параметры охарактеризованы через коэффициенты граничного условия исходной задачи.

Литература

1. Гордиенко В. М. Диссипативность граничного условия в смешанной задаче для трехмерного волнового уравнения// Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 311-323. \ \ <http://semr.math.nsc.ru>.
2. Гордиенко В.М. Диссипативные интегралы энергии в смешанной задаче для волнового уравнения// Математические заметки СВФУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 26-36.

* Работа поддержана СОРАН (междисциплинарный интеграционный проект № 80)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНЫ ТОКА
И НАПРЯЖЕНИЯ В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ**
**MATHEMATICAL MODELING OF CURRENT AND VOLTAGE
WAVES ON A TRANSMISSION LINE**

Григорьев Ю.М., Борисова М.Н.*, Иванова А.А.

*Северо-Восточный федеральный университет,
Россия, Якутск
[* omarfa@mail.ru](mailto:omarfa@mail.ru)*

В районах Крайнего Севера действуют протяженные магистральные линии электропередач (ЛЭП) от ГЭС, АЭС и ТЭЦ. В практике их эксплуатации нередки случаи тяжелых аварий, приводящих к выходу из строя ЛЭП. В условиях многолетней мерзлоты особенно много аварийных отключения ЛЭП вызывает грозовая деятельность. Об этом свидетельствуют ежегодные отчетные материалы ОАО «Якутскэнерго», в ведении которой находятся ЛЭП на территории Республики Саха (Якутия). Можно сделать вывод, что применяемые методы грозозащиты, не учитывающие в полной мере слоистость земли и наличие многолетней мерзлоты, оказываются малоэффективными. Для выработки мер по повышению эффективности грозозащиты ЛЭП необходимо оценить величины наведенных токов и напряжений, возникающих при разряде молнии вблизи ЛЭП в условиях многолетней мерзлоты. Известно, что индуцированные грозовые перенапряжения в линиях передач состоят из электромагнитной и электростатической компонент. Существующие методы расчета таких перенапряжений в основном учитывают только электромагнитную компоненту и основаны на интегрировании уравнений Максвелла при различных предположениях. По нашему мнению, в регионах с высоким удельным электрическим сопротивлением грунта, к которым относятся и регионы с многолетней мерзлотой, необходимо учитывать электростатическую компоненту. Эта компонента возникает при «разбегании» по линии зарядов, индуцированных электростатическим зарядом грозового облака, после разряда молнии и называется волна тока и напряжения (ВТН). В данной работе разработаны математические модели ВТН в линиях передач в условиях многолетней мерзлоты. Математически модели сводятся к решению начально-краевых задач для однородной или неоднородной системы телеграфных уравнений, описывающих токи напряжения в многопроводных линиях передач. Наличие многолетней мерзлоты учитывается специальным видом начальных потенциалов или правых частей, где используется явный вид электростатического потенциала точечного заряда в многослойной среде с различными электрофизическими свойствами. Численные расчеты реализуются на пакете Comsol Multiphysics. Проведены модельные расчеты для воздушной линии длиной 1 км, заземленной на обоих концах через согласованную активную нагрузку при разряде вблизи него молнии с определенными параметрами. Для модели, где предполагается мгновенный характер разряда молнии, расчеты показали большую зависимость величин ВТН от толщины слоя мерзлоты. При отсутствии мерзлоты пиковое значения напряжения на конце линии передачи составило 25 кВ. При наличии слоя многолетней мерзлоты толщиной 250 м это пиковое напряжение увеличивается примерно в два раза, достигая 45 кВ.

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛ КОЛОСОВА-МУСХЕЛИШВИЛИ*

THREE-DIMENSIONAL ANALOGUE OF THE KOLOSOV-MUSKHELISHVILI FORMULAE

Григорьев Ю.М.

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Россия, Якутск
grigyum@yandex.ru

В двумерных задачах теории упругости эффективно применяются различные классы функций комплексной переменной – аналитические, обобщенные, p - и (p,q) - аналитические (Н.И. Мусхелишвили, Ю.И. Соловьев, Г.Н. Положий). Основой этого являются соответствующие представления общего решения уравнений упругого равновесия. В качестве многомерного аналога комплексного анализа развиваются различные теории гиперкомплексных функций – кватернионных, клиффордовозначных и др. (F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen, Григорьев Ю.М., Наумов В.В., K. Gurlbeck and W. Sproßig). Применительно к трехмерной статической теории упругости таким аналитическим аппаратом является теория системы Моисила-Теодореску, которая рассматривается как условие регулярности кватернионных функций неполной кватернионной переменной. Введем обозначения: i, j, k – базисные кватернионные единицы с правилами умножения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Кватернионная функция $f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r})$ неполной кватернионной переменной $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ называется регулярной, если она удовлетворяет условию: $\nabla f = 0$, здесь $\nabla = i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z$ – кватернионный оператор. Условие регулярности в обычных векторных обозначениях имеет вид:

$$\nabla f_0 + \nabla \times \mathbf{f} = 0, \nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \quad (1)$$

соотношения (1) называются системой Моисила –Теодореску. Компоненты регулярной функции являются гармоническими функциями. Если в уравнении Ламе упругого равновесия

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

ввести функции $f_0 = (\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{f} = -\mu\nabla \times \mathbf{u}$, то она принимает вид (1), т.е. кватернионная функция $f = f_0 + \mathbf{f}$ будет регулярной. Дифференцируемую функцию F такую, что $\nabla F = f$, будем называть первообразной функцией для f . Кватернионное сопряжение обозначим $\bar{f} = f_0 - \mathbf{f}$.

Теорема 1. Общее решение уравнения Ламе (2) выражается через две регулярные кватернионные функции φ, ψ в виде

$$2\mu\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \kappa\Phi(\mathbf{r}) - \overline{\mathbf{r}\varphi(\mathbf{r})} + \overline{\psi(\mathbf{r})}, \quad \kappa = -\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu}, \quad (3)$$

где в качестве Φ можно взять любую первообразную функции φ , подчинив ее условию $\kappa\Phi_0 = \mathbf{r} \cdot \varphi + \psi_0$.

Теорема 2. В случае плоской деформации $u_x = u(x, y)$, $u_y = v(x, y)$, $u_z = 0$ кватернионное представление (3) переходит в комплексное представление Колосова-Мусхелишвили общего решения уравнения Ламе:

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 15-41-05081

$2\mu(u + iv) = (3 - 4\nu)\Phi(\zeta) - \zeta\overline{\Phi'(\zeta)} - \overline{\Psi(\zeta)}$, выраженное через две аналитические функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ комплексной переменной $\zeta = x + iy$.

Теорема 3. В случае осесимметричной деформации $u_r = u(z, r)$, $u_z = w(z, r)$, $u_\varphi = 0$ кватернионное представление (3) переходит в комплексное представление Ю.И. Соловьева общего решения уравнения Ламе: $2\mu(w + iu) = (3 - 4\nu)\Phi(\zeta) - 2\zeta\overline{\Phi'(\zeta)} - \overline{\Psi(\zeta)}$, выраженное через две обобщенные аналитические по Векуа функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ комплексной переменной $\zeta = z + ir$.

Кватернионное представление (3) можно назвать трехмерным аналогом формул Колосова-Мусхелишвили. Первое кватернионное представление решения уравнения Ламе было получено М.Мишику (1956). Позже были получены различные варианты обобщений формул Колосова-Мусхелишвили (Д.Д. Пенрод, О.Г. Гоман, Ф.А. Богашов и А.Г. Угодчиков и др.). Полученный в работе [1] результат наиболее близок к нашему. Но в этой работе используются аппарат клиффордовозначных функций, используется другое понятие первообразной. Мы вводим понятие первообразной как решение неоднородной системы Моисила-Теодореску, т.е. его можно трактовать как результат преобразования Теодореску. Кватернионное представление (3) эквивалентно представлению В.В. Наумова:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{\mu} \times I^1 \mathbf{f} + \nabla \left\{ r^2 \left[\frac{3\lambda + 7\mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)} I^{1/2} - \frac{1}{\mu} I^1 \right] f_0 \right\} + \nabla g_0, \quad I^\alpha f(\mathbf{r}) = \int_0^1 t^\alpha f(\mathbf{r}t) dt, \quad (4)$$

здесь f , ∇g_0 - регулярные кватернионные функции, причем $\nabla \cdot \mathbf{u} = (\lambda + 2\mu) f_0$. Можно показать, что из формулы (4) следует представление общего решения уравнения Ламе, выраженное через три гармонические функции, которое эффективно применяется при решении трехмерных задач теории упругости [2]. С помощью представления (3) решение первой основной задачи теории упругости (заданы перемещения на границе) сводится к решению кватернионного интегрального уравнения, являющегося трехмерным кватернионным аналогом интегрального уравнения Мусхелишвили.

Литература

1. S. Bock and K. Gurlebeck, 2009 // Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 32, Issue 2 (2009), 223–240. DOI: 10.1002/mma.1033.
2. Yuri Grigoriev // Hypercomplex Analysis: New perspectives and applications, Trends in Mathematics, Birkhauser, Basel (2014).- Pp. 145-166. DOI 10.1007/978-3-319-08771-9_10

**НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**

**NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR
PSEUDOPARABOLIC AND PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS WITH
TIME-ADVANCE COEFFICIENT**

Григорьева А.И.*

* *Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,
Якутск, Россия*
shadrina_ai@mail.ru

Краевые задачи для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений с интегральными условиями изучались многими авторами. Можно отметить работы Кожанова А.И., Попова Н.С. В этих работах для уравнений такого типа рассматриваются случаи с непрерывными коэффициентами. Краевые задачи для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений с интегральными условиями и с разрывными коэффициентами ранее не изучались.

В данной работе методом продолжения по параметру доказывается разрешимость нелокальных краевых задач для уравнений

$$\begin{aligned} u_t - h(x)u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u &= f(x,t), \\ u_{tt} - h(x)u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u &= f(x,t), \end{aligned}$$

где

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), -1 < x < 0, \\ h_2(x), 0 < x < 1, \end{cases}$$

и $h_1(x) \in C([-1,0)), h_1(x) \geq \bar{h}_0 > 0$ при $x \in [-1,0)$, $h_2(x) \in C((0,1]), h_2(x) \geq \bar{h}_1 > 0$ при $x \in (0,1]$, Ω интервал $(-1,1)$ оси Ox , $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $a, h(x), a(x,t), c(x,t), f(x,t)$ - заданные функции.

Литература

1. Кожанов А.И., Попов Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10. № 3. С. 46-62.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

MATHEMATICAL MODELLING OF LAMINAR-TURBULENT TRANSITION IN SHEAR FLOWS

Дармаев Т.Г.

Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ
dtg@bsu.ru

Исследованию развития гидродинамических возмущений посвящено множество работ, проведено множество экспериментов, существует довольно много различных подходов, но до сих пор механизм перехода от ламинарного течения к турбулентному полностью не исследован и вызывает интерес множества исследователей. Линейная теория гидродинамической устойчивости достаточно хорошо развита, и сводится к задаче на собственные значения для линеаризованных относительно малых возмущений уравнений Навье-Стокса. Главными целями численного решения при этом являются: поиск кривой нейтральной устойчивости, кривой постоянной скорости роста, вычисление собственных значений и функций для данной пары положительных значений волнового числа и числа Рейнольдса.

Первая попытка оценить влияние нелинейности на судьбу возмущений была предпринята Ландау Л.Д. Он показал, что нелинейность может как стабилизировать нарастающие возмущения, создавая новый устойчивый режим течения, так и вызвать рост возмущений, устойчивых в линейном приближении. В настоящее время развиваются следующие направления исследования нелинейных возмущений – слабонелинейная теория, параболизированные уравнения, прямое численное моделирование, возмущения в профиле основного течения, взаимодействие возмущений. В данной работе метод инвариантной конечномерной проекции уравнений Навье-Стокса разработанный Б.Ю.Скобелевым применяется для плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости над плоской полубесконечной пластиной. При этом начально-краевая задача для возмущений основного течения сводится к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых находятся из рекуррентной системы линейных краевых задач. Существенным достоинством метода инвариантной проекции является то, что он гарантирует правильное описание асимптотического поведения решений и учитывает дискретный и непрерывные спектры возмущений. Предложенный универсальный алгоритм позволяет численно находить амплитудные поверхности устойчивых и неустойчивых режимов и точки тангенциальных бифуркаций периодических режимов для произвольных частот и чисел Рейнольдса. Проведено сравнение численных результатов с экспериментами.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ THE CAUCHY PROBLEM FOR PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS

Демиденко Г.В.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
demidenk@math.nsc.ru

В монографии [1] изучались краевые задачи для некоторых классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной

$$L_0(D_x)D_t^m u + \sum_{k=0}^{m-1} L_{m-k}(D_x)D_t^k u = f(t, x), \quad (1)$$

где $L_0(D_x)$ – квазиэллиптический оператор. Одним из таких классов был класс псевдогиперболических уравнений. Этот класс был введен в [1], как обобщение гиперболических уравнений и одного класса уравнений, рассмотренного в [2].

При исследовании задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений (1) с постоянными коэффициентами в работах [1, 3, 4] были впервые получены энергетические оценки и доказаны теоремы о разрешимости в весовых соболевских пространствах $W_{2,\gamma,\sigma}^{m,r}$. Аналогичные результаты с использованием техники псевдо дифференциальных операторов были получены в [5].

В настоящем докладе будут представлены результаты о разрешимости задачи Коши для слабо псевдогиперболических уравнений вида (1) в пространствах $W_{2,\gamma,\sigma}^{m,r}$. В частности, будут обсуждаться аналоги энергетических оценок, условия разрешимости типа условий ортогональности $f(t, x)$ некоторым полиномам и потеря гладкости.

Литература

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Гальперн С.А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 2. С. 239-249.
3. Demidenko G.V. The Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // Selcuk J. Appl. Math. 2000. V. 1, No. 1. P. 47-62.
4. Demidenko G.V. On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // Sib. Adv. Math. 2001. V. 11, No. 4. P. 25-40.
5. Fedotov I., Volevich L.R. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russ. J. Math. Phys. 2006. V. 13, No. 3. P. 278-292.

**О ВОССТАНОВЛЕНИИ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ
ПО ТОМОГРАФИЧЕСКИМ ДАННЫМ***
**ABOUT RECOVERING OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS BY
TOMOGRAPHY DATA***

Деревцов Е.Ю.*, Касымбеков А.С.*, Мальцева С.В.*,
Светов И.Е.*, Султанов М.А.****

** Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН; Новосибирский
государственный университет; Новосибирск, Россия*

*** Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясави,
Туркестан, Казахстан
svetovie@math.nsc.ru*

В компьютерной томографии разработано значительное число методов, алгоритмов и программных средств, направленных на восстановление свойств объекта по томографическим данным. Чаще всего используются подходы, основанные на формулах обращения, вариационных и алгебраических методах, которые показывают надежные результаты при восстановлении функций класса C^1 и выше, которые становятся существенно хуже при восстановлении разрывных функций. Этот факт хорошо известен исследователям в области томографии, как и понимание необходимости в разработке специальных алгоритмов, направленных исключительно на реконструкцию таких функций.

Один из подходов к численному решению задачи восстановления объектов такого рода, дающих надежду на существенное улучшение точности их восстановления, состоит в последовательном решении следующих самостоятельных задач [1]. Первая заключается в визуализации множества точек разрыва. Обычно именно эта задача подразумевается под термином “восстановление разрывов”, и способы ее различных приближенных решений предлагаются в подавляющем большинстве работ по этой тематике. Вторая задача состоит в идентификации множества точек разрывов, т.е. в точном математическом описании этого множества. Следующая задача - определение величины скачка функции в каждой точке множества ее точек разрыва. Четвертая задача (“устранение разрывов”) заключается в восстановлении некоторой вспомогательной функции, не обладающей разрывами и построенной с учетом результатов, полученных при решении второй и третьей задач. Наконец, на последнем этапе предлагаемого подхода осуществляется переход от реконструированной вспомогательной, более гладкой функции к требуемой разрывной.

Цель работы состоит в изложении некоторых подходов и алгоритмов численных решений сформулированной выше последовательности задач. В частности, задач визуализации множества точек разрыва; восстановления как разрывных, так и более гладких функций; идентификации множества точек разрыва; устранения разрывов в предположении, что величины скачка функции известны. В качестве исходных данных используются значения преобразования Радона. Приводятся результаты ряда тестовых расчетов.

* Работа осуществлена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31491-мол_а), Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 3630/ГФ4-2015)

Литература

1. Деревцов Е.Ю., Некоторые подходы к задаче визуализации сингулярного носителя скалярных, векторных и тензорных полей по томографическим данным. // Сибирские электронные математические известия. 2008. Т. 5. С. 632-646.

УДК 517.946

О КОРРЕКТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ПЕРВОГО РОДА, ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

ABOUT CORRECTNESS OF SOME DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR THE MIXED TYPE EQUATION OF THE FIRST KIND IN THE SPACE

С.З.Джамалов

Институт математики при НУУЗ

Ташкент, Узбекистан

siroj63@mail.ru

Как известно задача Дирихле для уравнения смешанного типа первого рода некорректна. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые, такие полу периодические условия были предложены и изучены в работе [3]. В данной работе для уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка в пространстве изучаются корректность некоторые нелокальные краевые задачи с постоянными коэффициентами.

Пусть $\Omega = \prod_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i) \in R^n$. n - мерный параллелепипед. Обозначим через

$$Q = \Omega \times (0, T) \times (0, \ell) = Q_1 \times (0, \ell) = \{(x, t, y); x \in \Omega, 0 < t < T < +\infty, 0 < y < \ell < +\infty\}$$

-область с кусочно-гладкой границей ∂Q .

В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка.

$$Lu = K(x)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x)u_{x_j}) - a(x)u_{yy} + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t,y), \quad (1)$$

где $x_1 \cdot K(x) > 0$ при $x_1 \neq 0$, где $x_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$, где $\alpha_1 < 0 < \beta_1$

Пусть выполнено следующее условие: $a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, где

$$a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x); a_0 - const > 0, \quad \xi \in R^n; |\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2; \quad a(x) \geq a_1 > 0.$$

Нелокальная краевая задача. Найти обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее нелокальным краевым условиям.

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$\eta D_{x_i}^p u|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u|_{x_i=\beta_i}, \quad (3) \quad \text{при } p=0,1; \quad \gamma \text{ и } \eta - const \neq 0.$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0, \quad (4)$$

В данной работе при определенных условиях на коэффициенты уравнения и правую часть уравнения (1) была доказана корректность решения задачи (2)-(4) из пространства Соболева $W_2^l(Q)$ при $2 \leq l$ - целое число.

Следующим объектом, исследований которым будет идти речь в докладе, является линейные и нелинейные обратные задачи для уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка. Для таких задач доказаны методами « ε -регуляризации», Галеркина и последовательностью приближений теоремы существования и единственности решение в определенных классах [1,2,4].

Пусть $f(x, t, y) = g(x, t, y) + h(x, t) \cdot \psi(x, t, y)$, где $g(x, t, y)$ и $\psi(x, t, y)$ заданные функции.

Линейная обратная задача. Найти функции $u(x, t, y), h(x, t)$ входящие в уравнение (1) в области, Q удовлетворяющие краевым условиям (2-4):

и дополнительному условию

$$u(x, t, \ell_0) = \phi_0(x, t), \quad \text{где } 0 < \ell_0 < \ell < +\infty \quad (5)$$

и принадлежит классу

$$U = \{(u, h) \mid u \in W_2^2(Q); h \in W_2^2(Q_1); D_y^3 \{u_{xx}, \nabla u_t, u_{tt}\} \in L_2(Q); D_y^4 u \in L_2(Q)\}.$$

Нелинейная обратная задача. Найти функции $u(x, t, y), h(x, t), c(x, t)$ входящие в уравнение (1) в области Q , удовлетворяющие краевым условиям (2-4) с дополнительными условиями

$$u(x, t, \ell_i) = \phi_i(x, t), \quad \text{где } i = 0, 1; 0 < \ell_0 < \ell_1 < \ell < +\infty \quad (5,6)$$

и принадлежит классу

$$V = \{(u, h) \mid u \in W_2^2(Q); c, h \in W_2^2(Q_1); D_y^3 \{u_{xx}, \nabla u_t, u_{tt}\} \in L_2(Q); D_y^4 u \in L_2(Q)\}.$$

Литература

1. Бубнов Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических уравнений. Новосибирск. 1987. Препринт №714, ВЦ.СО АН СССР. с.44
2. Кожанов А.И. О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений. Нелинейные граничные задачи. 2010. №20. с.54-76.
3. Кальменов Т.Ш. О полу периодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа. Дифференциальные уравнения. 1978. т.14, №3, с546-548.
4. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа.// Изв.вузов.Математика.2011.№2.с.71-85.

О КОРРЕКТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА, ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

ABOUT CORRECTNESS OF SOME DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR THE MIXED TYPE EQUATION OF THE SECOND KIND IN THE SPACE

С.З.Джамалов

Институт математики при НУУЗ

Ташкент, Узбекистан

siroj63@mail.ru

В докладе излагаются некоторые результаты об однозначной разрешимости нелокальной и интегральной краевой задачи с переменными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка. Пусть Ω -ограниченная односвязная область в пространстве R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, Обозначим через $Q = \Omega \times (0, T) \times (0, \ell) = Q_1 \times (0, \ell) = \{(x, t, y); x \in \Omega, 0 < t < T < +\infty, 0 < y < \ell < +\infty\}$ -область с кусочно-гладкой границей ∂Q .

В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка.

$$Lu = K(x, t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x)u_{x_j}) - a(x)u_{yy} + \alpha(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t, y). \quad (1)$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода второго порядка, так как на знак функции $K(x, t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений, т.е. $K(x, 0) \leq 0 \leq K(x, T)$. [1].

Пусть выполнено следующее условие: $a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, где $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x); a_0 - \text{const} > 0$, $\xi \in R^n; |\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$; $a(x) \geq a_1 > 0$.

Краевая задача. Найти обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям.

$$u(x, 0, y) = \gamma(x)u(x, T, y) + \int_0^T A(x, t)u(x, t, y)dt \quad (2)$$

$$u|_{\partial Q} = 0 \quad (3)$$

В данной работе, в случае, когда $\gamma(x)$ и $A(x, t) \neq 0$ при выполнении некоторых условиях на коэффициенты уравнение (1) и задачи (2),(3) доказывается методами « ε -регуляризации», Галеркина и продолжением по параметру однозначное разрешимость задачи (1)-(3) из пространства Соболева $S.L.W_2^3(Q)$. Отметим, что задача (2,3) для параболических уравнений изучено в [3]. Следующим объектом, исследований которым будет идти речь в докладе, является линейные и нелинейные обратные задачи для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка. Для таких задач доказаны методами « ε -регуляризации», Галеркина и последовательностью приближений теоремы существования и единственности решение в определенных классах [2,3,4].

Пусть $f(x, t, y) = g(x, t, y) + h(x, t) \cdot \psi(x, t, y)$, где $g(x, t, y)$ и $\psi(x, t, y)$ заданные функции.

Линейная обратная задача. Найти функции $u(x, t, y), h(x, t)$ входящие в уравнение (1) в области, Q удовлетворяющие краевым условиям:

$$u(x, 0, y) = \gamma \cdot u(x, T, y) \quad (4)$$

$$u|_{\partial Q} = 0 \quad (5)$$

где $\gamma - \text{const} \neq 0$, и дополнительному условию

$$u(x, t, \ell_0) = \phi_0(x, t), \quad \text{где } 0 < \ell_0 < \ell < +\infty \quad (6)$$

и принадлежит классу

$$U = \{(u, h) | u \in W_2^{-2}(Q); h \in W_2^{-2}(Q_1); D_y^3 \{u_{xx}, \nabla u_t, u_{tt}\} \in L_2(Q); D_y^4 u \in L_2(Q)\}.$$

Нелинейная обратная задача. Найти функции $u(x, t, y), h(x, t), c(x, t)$ входящие в уравнение (1) в области Q , удовлетворяющие краевым условиям (4), (5) с дополнительными условиями

$$u(x, t, \ell_i) = \phi_i(x, t), \quad \text{где } i = 0, 1; 0 < \ell_0 < \ell_1 < \ell < +\infty \quad (7, 8)$$

и принадлежит классу

$$V = \{(u, h) | u \in W_2^{-2}(Q); c, h \in W_2^{-2}(Q_1); D_y^3 \{u_{xx}, \nabla u_t, u_{tt}\} \in L_2(Q); D_y^4 u \in L_2(Q)\}.$$

Литература

1. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. НГУ. 1983. с.84.
2. Бубнов. Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических уравнений. Новосибирск. 1987. Препринт №714, ВЦ.СО АН СССР. с.44
3. Кожанов А.И. О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений. Нелинейные граничные задачи. 2010. №20. с.54-76.
4. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. // Изв. вузов. Математика. 2011. №2. с.71-85.

УДК 621.865.8

ПРИМЕНЕНИЕ МИКРОКОНТРОЛЛЕРА ДЛЯ МОНИТОРИНГА СПОРТИВНОГО ОБОРУДОВАНИЯ СИЛОВОЙ СКАМЬИ ДЛЯ ЖИМА ЛЕЖА ШТАНГИ

MICROPROCESSOR CONTROL SYSTEM BASED ON MICROCONTROLLER FOR SPORTS EQUIPMENT WEIGHT BENCH FOR BENCH PRESS

Джолдасбаев С.К., Исламгожаев Т.У., Ловазов Т.З.

Институт Информационных и Вычислительных Технологий
serykjoldasbaev@mail.ru

На сегодняшний день становится актуальным вопрос о сохранении здоровья человека, нации и всего человечества. Здоровье является одной из главнейших параметров оценки качества человека, также меняются взгляды на здравоохранения человека в целом и рассматриваются разные варианты привлечения человека для занятия спортом. Одним из таких актуальных методов является популярные в наши дни тренажерные залы. По своей

площади уступающие спортивным залам и площадкам, эти помещения могут дать гораздо полезный результат по восстановлению и укреплению здоровья.

Основная задача данной работы – оснастить силовую скамью специальными датчиками и сенсорами для координации тренировки на данном спортивном тренажере. Под координацией, имеется ввиду расписание посещаемости тренировок на тренажере, контроль веса штанги для определенного пользователя, правильное положение во время выполнения упражнения. Данная задача осуществляется при помощи аппаратно-программных средств Arduino, к которому будут подключены датчики и сенсоры для контакта с тренажером и пользователем.

Литература

1. Владимир Гончаров «Логика тренинга» практическое пособие [http:// smolpower.ru](http://smolpower.ru)
2. Проектирование цифровых устройств на однокристальных микроконтроллерах/ В.В. Сташин, А.В. Урусов, О.Ф. Мологонцева. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 224 с.

УДК 519.63

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ SBP СХЕМ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

INCREASING THE ACCURACY OF FINITE DIFFERENCE SCHEMES SBP NEAR THE BORDER

Довгилевич Л.Е.*, Максюттов Р.Г.** , Софронов И.Л.***

* *Московский НИЦ «Шлюмберже», Московский физико-технический институт (ГУ)
Россия, Москва
LDovgilovich@slb.com*

***Московский физико-технический институт (ГУ)
Россия, Москва
rustmaks@mail.ru*

*** *Московский НИЦ «Шлюмберже», Московский физико-технический институт (ГУ)
Россия, Москва
Isofronov@slb.com*

Для экономного решения волновых задач разностными методами, например при сейсморазведке, необходимо применять схемы высокого порядка точности по пространству. В [1], [2] предложен ряд таких схем на основе метода суммирования по частям (SBP) [3, 4].

Однако ограничения, налагаемые SBP, вызывают падение порядка точности схем вблизи границы: со значений $P=4,6,8$ внутри области до значений $P/2=2,3,4$ в приграничных узлах, соответственно. Мы исследуем модификацию предложенных SBP схем путем сдвига некоторого числа приграничных узлов (вплоть до $P/2-1$) для увеличения точности. Величины сдвигов и коэффициенты этих разностных схем находятся путем минимизации целевого функционала, который определяется через норму невязки схемы на полиномах Чебышева до порядка P включительно.

В итоге предложен и реализован алгоритм получения разностных SBP схем на неравномерной сетке вблизи границы при различных сценариях выбора свободных параметров и целевой функции. Например, при $P=8$ и сдвиге всех трех точек норма невязки на новой схеме с шагами $h_1 = 0.44h$, $h_2 = 0.94h$, $h_3 = 1.06h$ (далее идет равномерная сетка с шагом h внутри области) упала примерно в 10^6 раз по сравнению с исходной схемой на равномерной сетке $h_1 = h_2 = h_3 = h$. Кроме того, введение сдвигов позволило построить SBP схемы с порядком $P=10, 12$, что было невозможно на равномерной сетке.

В докладе представлена теория предложенного подхода, дается описание алгоритма и приводятся результаты численных экспериментов по исследованию точности полученных разностных схем.

Литература

1. Довгилевич Л.Е, Софронов И.Л. Конечно-разностный метод высокого порядка точности расчета волновых полей в анизотропных средах // Технологии Сейсморазведки. — 2013. — № 2. — С. 24–30
2. L. Dovgilovich, I. Sofronov, High-accuracy finite-difference schemes for solving elastodynamic problems in curvilinear coordinates within multiblock approach. Applied Numerical Mathematics, Available online 5 July 2014
3. Strand Bo. Summation b Parts for Finite Difference Approximations for d/dx // Journal of Computational Physics. – 1994. – Vol. 110, no.1 –P. 47-67
4. Mattsson Ken. Summation by parts operators for finite difference approximations of second derivatives with variable coefficients // Journal of Scientific Computing. – 2012. – Vol.51, no. 3. – P. 650-682.

УДК 517.958

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

INVERSE PROBLEMS FOR EQUATION OF MIXED PARABOLIC – HYPERBOLIC TYPE

Дурдиев Д. К^{*}, Меражова Ш. Б^{**}

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

^{*}durdiev65@mail.ru

^{**}shsharipova@mail.ru

В данной работе изучаются обратные задачи для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в двумерном случае.

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из центральных разделов теории уравнений в частных производных и встречается при решении многих важных вопросов прикладного характера.

Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа изучены относительно меньше, чем задачи для уравнений конкретного типа.

К настоящему времени наиболее полные результаты получены по исследованию прямых задач для уравнений смешанного типа [1] – [4], но работы связанные с поиском решения обратных задач для уравнения смешанного типа практически мало.

В параллелоипеде $\Pi := \{ (x, y, t); 0 < x < 1, 0 < y < 1, -\alpha < t < \beta \}$, здесь α и β – заданные положительные числа, рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа:

$$Lu = \begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, y), & t > 0, \\ u_{tt} - \Delta u = f(x, y), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа. Для этого уравнения можно поставить следующие обратные задачи:

Задача 1. Найти в области Π функции $u(x, y, t)$ и $f(x, y)$ удовлетворяющие условиям:

$$u(x, y, t) \in C(\overline{\Pi}) \cap C^1(\Pi) \cap C_{x,t}^{2,1}(\Pi_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(\Pi_- \cup \{t = -\alpha\}), \quad (2)$$

$$f(x, y) \in C([0; 1] \times [0; 1]),$$

(3)

$$Lu(x, y, t) = f(x, y), (x, y, t) \in \Pi_+ \cup \Pi_-, \quad (4)$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (5)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (6)$$

$$u(x, y, -\alpha) = \varphi(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad (7)$$

$$u(x, y, \beta) = \psi(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad (8)$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции,

$\varphi(0, y) = \varphi(1, y) = 0, x \in [0, 1], \psi(x, 0) = \psi(x, 1) = 0, x \in [0, 1], \Pi_+ = \Pi \cap \{t > 0\}, \Pi_- = \Pi \cap \{t < 0\}.$

Задача 2. Найти в области Π функции $u(x, y, t)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяющие условиям (2)-(8), где $f(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача 3. Найти в области Π функции $u(x, y, t)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяющие условиям (2)-(8), где $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

В работе получены теоремы единственности поставленных обратных задач.

Литература

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. 264с.
2. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнение математической физики. - М.: Наука, 1972. 724с.
3. Джуроев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного составного типов. Ташкент: Изд-во "Фан", 1979 - 238 с.
4. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного парабола -гиперболического типа со спектральным параметром //Дифференциальные уравнения. -1989.-Т.25 -№1 - С.117-126.

**О ЗАДАЧЕ ВРАГОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА
ВТОРОГО ПОРЯДКА *****AN THE VRAGOV PROBLEM FOR THE SECOND ORDER
EQUATION OF MIXED TYPE****И.Е. Егоров, И.М. Тихонова**

*Научно-исследовательский институт математики
Северо-Восточного федерального университета, Россия, Якутск.
IvanEgorov51@mail.ru, IrinaMikh3007@mail.ru.*

В цилиндрической области Q в пространстве R^{n+1} рассматривается известная краевая задача В.Н. Врагова [1]. Для решения данной краевой задачи применяются метод регуляризации и нестационарный метод Галеркина [2,4]. В работе [3] был применен стационарный метод Галеркина для решения краевой задачи В.Н. Врагова, когда уравнение смешанного типа принадлежит гиперболическому типу вблизи нижнего основания и гиперболо-параболическому типу на верхнем основании цилиндрической области. Данная работа является продолжением статьи авторов [4]: здесь исследованы все четыре случая, в зависимости от поведения коэффициента при второй производной по времени вблизи оснований цилиндрической области.

Сначала устанавливаются априорные оценки для Галеркинских приближений, в частности, в норме пространства Соболева $W_2^2(Q)$. Полученные априорные оценки позволяют доказать однозначную регулярную разрешимость краевой задачи В.Н. Врагова. При этом получена оценка погрешности нестационарного метода Галеркина через параметр регуляризации и собственные числа оператора Лапласа по пространственным переменным. Также будет рассмотрена фредгольмова разрешимость краевой задачи В.Н. Врагова.

Литература

1. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 6, С. 1098-1105.
2. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.
3. Егоров И.Е., Тихонова И.М. Применение стационарного метода Галеркина к уравнению смешанного типа // Математические заметки ЯГУ. 2012, Т. 19, вып. 2, С. 20-28.
4. Егоров И.Е., Тихонова И.М. Применение модифицированного метода Галеркина к уравнению смешанного типа // Математические заметки СВФУ. 2014, № 4.

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047)

О БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

ON THE BASIS PROPERTY OF EIGENFUNCTIONS POSED BOUNDARY PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON AN INTERVAL

Елеуов А.А.

*Казахский национальный университет имени Аль-Фараби,
Казахстан, Алматы*
Eleuov@mail.ru

В настоящей работе изложены некоторые результаты теории обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что более трудными являются обратные задачи для дифференциальных уравнений высших порядков с нераспадающимися граничными условиями. В данной работе исследуется единственность решения обратной задачи спектрального анализа для дифференциальных уравнений высших порядков с нелокальными граничными условиями. Частный случай указанных граничных условий представляют двухточечные нераспадающиеся граничные условия. Таким образом, результаты настоящей статьи охватывают как распадающиеся, так и нераспадающиеся граничные условия. Именно, в этом смысле основной результат настоящей статьи обобщает результаты монографии [1], где приведены подобные теоремы единственности для распадающихся граничных условий.

Вначале приведем известные результаты по прямой задаче спектрального анализа дифференциальных операторов высших порядков на отрезке. В работе [2], изложена возможность разложения функции из некоторого функционального пространства по собственным и присоединенным функциям дифференциального оператора L , порожденного в функциональном пространстве $L_2[0, b]$ при $b < \infty$ линейным дифференциальным выражением с переменными коэффициентами

$$Ly = \ell(y) \equiv y^{(n)}(x) + p_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) \quad (1)$$

с единственным ограничением

(1) резольвентное множество оператора L – непустое множество.

Литература

1. Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе – Самарского // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 4. С. 815-819.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528с.
3. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех., 1982. №6. С. 12-21.
4. Дезин А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Труды МИАН имени В.А.Стеклова. 2000. Т. 299. 175 с.
5. Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. Шымкент. Галым. 1996. 270 с.

6. Кангужин Б.Е. Формулы преобразования и спектральные свойства дифференциальных операторов высших порядков на отрезке // Автореферат дисс. док. физ.-мат. н. 2005. Алматы. КазНУ имени аль-Фараби. 45 с

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ВНЕ МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ОТ- РЕЗКА*

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION OUTSIDE A SMALL NEIGHBORHOOD OF THE SEGMENT*

Ершов А.А.

*Челябинский государственный университет,
Россия, Челябинск
ale10919@yandex.ru*

Рассмотрена вторая краевая задача для уравнения Лапласа вне малой окрестности отрезка, которая физически интерпретируется как модель обтекания тонкого тела ламинарным потоком идеальной жидкости. Заметим, что ранее в [1, гл. III, § 2] была рассмотрена первая двумерная задача, моделирующая обтекание тонкого тела ламинарным потоком жидкости. В данной работе процесс обтекания происходит перпендикулярно к направлению, которое рассматривалось в [1, гл. III, § 2]. Построение этой асимптотики дает возможность вычислить асимптотику поля скоростей жидкости, описывающего процесс обтекания в любом направлении.

Потенциал скоростей $u(x_1, x_2, \varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \sigma_\varepsilon)$ идеальной жидкости моделируется с помощью решения следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \sigma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial \sigma_\varepsilon, \\ u = x_2 + o(1), & r \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, σ_ε — некоторая окрестность отрезка $\bar{\sigma} = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$, ширина которой характеризуется малым параметром $0 < \varepsilon \ll 1$, и с границей $\partial \sigma_\varepsilon \in C^\infty$.

Методом согласования асимптотических разложений построено двухмасштабное асимптотическое разложение функции $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ по малому параметру ε с точностью до решения краевых задач.

Внешнее асимптотическое разложение найдено в виде ряда

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00259-а) и Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мебиуса».

* This work was financially supported by RFBR (project 12-01-00259-a) and the Foundation for the support of young scientists "Möbius contest."

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x),$$

где $u_k(x)$ – решения некоторых краевых задач, $u_0(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sqrt{(2x_1 - 1 + 2ix_2)^2 - 1}$ – решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0, & x \in \mathfrak{R}^2 \setminus \sigma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = 0, & x_1 \in (0, 1), \\ u_0 = x_2 + o(1), & r \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Однако, функции внешнего разложения имеют особенности порядка $u_k \sim r^{(-k+1)/2}$ при $r \rightarrow 0$ и аналогичные особенности на другом конце отрезка $(1, 0)$. Поэтому при $r < M\varepsilon^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, рассмотрено внутреннее асимптотическое разложение в виде ряда

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi),$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}$, $\xi_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$, функции $v_i(\xi) \in C^\infty(\bar{D})$, $D = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 < \xi_2^2\}$,

$v_1(\xi) = \frac{\operatorname{sign}(\xi_2)\sqrt{2}}{2} \sqrt{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} + u_1(0, 0)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0, & \xi \in D, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \xi \in \partial D, \\ v_1 = \rho^{1/2} \cos \frac{\Theta}{2} + u_1(0, 0) + o(1), & \rho \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

где ρ , Θ – полярные координаты, так что $\xi_1 = \rho \cos \Theta$, $\xi_2 = \rho \sin \Theta$.

Аналогичное асимптотическое разложение W рассмотрено в окрестности точки $(1, 0)$.

Литература

1. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЩЕЙ СХЕМЫ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА НЕВЯЗКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОНОННОГО СПЕКТРА КРИСТАЛЛОВ

ANNEX GENERAL SCHEME OF GENERALIZED RESIDUAL METHOD FOR PROBLEM OF RECOVERING THE PHONON SPECTRA OF CRYSTALS

Ершова А.А.*, Танана В.П.**

*Южно – уральский государственный университет (НИУ),
Россия, Челябинск

anya.erygina@yandex.ru

**Южно-уральский государственный университет (НИУ)
Россия, Челябинск

tvpa@susu.ac.ru

Связь энергетического спектра бозе - системы с ее теплоемкостью, зависящей от температуры, описывается интегральным уравнением первого рода

$$Sn(s) = \int_a^b K(s,t)n(s)ds = \frac{f(t)}{t}; \quad 0 < t \leq \infty. \quad (1)$$

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $n_0(s)$ уравнения (1), которое принадлежит множеству M , где

$$M = \left\{ n(s) : n(s), n'(s) \in L_2[a,b], n(a) = 0 \right\}.$$

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны

$$f_\delta(t) \in L_2(0, \infty), \quad \delta > 0 \text{ такие, что } \left\| \frac{f_\delta(t)}{t} - \frac{f_0(t)}{t} \right\|_{L_2} < \delta.$$

Требуется по $f_\delta(t), \delta$ и M определить приближенное решение $n_\delta(t)$ и оценить его отклонение от точного решения $n_0(t)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Введем оператор B , отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$ формулой

$$n(s) = Bu(s) = \int_a^s u(\xi)d\xi; \quad u(s) \in L_2[a,b], \quad Bu(s) \in L_2[a,b]$$

и оператор C , для которого

$$Cu(s) = ABu(s); \quad u(s) \in L_2[a,b], \quad Cu(s) \in L_2(0, \infty).$$

$$Cu(s) = \int_a^b P(s,t)u(s)ds, \quad \text{где } P(s,t) = \int_b^s K(\xi,t)d\xi.$$

Определим функцию $N(t)$ формулой

$$N(t) = \max_{a \leq s \leq b} \left| \frac{s^2}{2t^3 sh^2\left(\frac{s}{2t}\right)} \right| \leq \frac{b^2}{2t^3 sh^2\left(\frac{a}{2t}\right)}.$$

Из непрерывности $K(s,t)$ следует непрерывность $N(t)$.

При $t \rightarrow \infty$, $N^2(t) \sim \left(\frac{\sqrt{2b}}{a}\right)^4 \frac{1}{t^2}$, а при $t \rightarrow 0$, $N(t) \rightarrow 0$. Таким образом $N(t) \in L_2(0, \infty)$.

Для решения (1) воспользуемся методом регуляризации А.Н. Тихонова первого порядка

$$\inf \left\{ \left\| C_n u(s) - \frac{f_\delta(t)}{t} \right\|^2 + \alpha \int_a^b [u(s)]^2 ds : u(s) \in L_2[a, b] \right\}, \alpha > 0. \quad (2)$$

Обозначим через $\bar{f}_{\delta,n}(t)$ функцию, принадлежащую пространства $L_2(0, \infty)$, определяемую формулой

$$\bar{f}_{\delta,n}(t) = pr \left[\frac{f_\delta(t)}{t}; R(C_n) \right],$$

то есть является метрической проекцией в пространстве $L_2(0, \infty)$ функции $\frac{f_\delta(t)}{t}$ на множестве значений оператора C_n .

Значение параметра регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(C_n, f_\delta(t), h_n, \delta)$ в задаче (2) выберем из

$$\|C_n u_{\delta h_n}^\alpha(s) - \bar{f}_{\delta,n}(t)\| = \|u_{\delta h_n}^\alpha(s)\| h_n + \delta, \quad (3)$$

где $u_{\delta h_n}^\alpha(s)$ - решение вариационной задачи (2).

Известно, что при условии $\|\bar{f}_{\delta,n}(t)\| > \delta + \|n_0'(s)\| h_n$ существует единственное решение $\bar{\alpha}(C_n, f_\delta(t), h_n, \delta)$ уравнения (3).

Если решение $u_{\delta h_n}^{\bar{\alpha}(C_n, f_\delta(t), h_n, \delta)}(s)$ обозначить через $u_{\delta h_n}(s)$, то приближенное решение $n_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1) будет иметь вид $n_{\delta h_n}(s) = B u_{\delta h_n}(s)$.

Уравнение (3) в R^n примет вид

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{P}_i(t) \bar{u}_i^\alpha - \frac{C_{\delta,n}(t)}{t} \right] dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\bar{u}_i^\alpha)^2 \right]^{\frac{1}{2}} h_n + \delta.$$

Перейдем к оценке погрешности приближенного решения в метрике пространства $L_2[a, b]$.

Введем функцию

$$\omega(\sigma, r) = \sup_n \left\{ \|n(s)\|_{L_2} : n(s) \in M_r, \|Sn(s)\| \leq \sigma \right\},$$

где $M_r = B\bar{S}_r$, $\sigma > 0$, $r > 0$, а S определен (1). Получим неравенство

$$\|n_{\delta h_n}(s) - n_0(s)\|_{L_2[a, b]} \leq 2\omega(\delta + 2rh_n, r).$$

Было получено, что $\omega(\sigma, r) \leq r \left(1 + \frac{1}{\pi} \ln^2 \left(\frac{r}{4(\delta + 2rh_n)} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Для приближенного решения $u_{\delta h_n}(s)$ имеет место оценка

$$\|n_{\delta h_n}(s) - n_0(s)\|_{L_2[a, b]} \leq 2r \left(1 + \frac{1}{\pi} \ln^2 \left(\frac{r}{4(\delta + 2rh_n)} \right) \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $n_{\delta h_n}(s)$ - приближенное решение уравнения (1).

О НЕЧЁТКИХ МОДЕЛЯХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ON FUZZY MODELS OF COMPLEX SYSTEMS

Ефремова Н.А.

Университет машиностроения, Россия, Москва
efremnat@bk.ru

В настоящее время всё большую и большую популярность при моделировании сложных систем завоевывают нечёткие множества. Математическому моделированию с использованием нечётких множеств посвящены работы в различных областях. В экологическом моделировании явлений и понятий, которые имеют многозначный и нечёткий характер много как ни в одной предметной области. Адекватнее реальным условиям рассматривать не только экологические составляющие, но и в общем случае рассматривать большие био-социо-экономические системы

Пусть варианты системы описываются набором параметров $x_0 \in E^{N_0}$ (N_0 - размерность), принимающим значения из множества $\tilde{O}_0$. Сравнение результатов функционирования системы и её подсистемы определяет на множестве $\tilde{O}_0$ нечёткое бинарное отношение $\hat{O}_0$, задаваемое функцией принадлежности $\mu_{\hat{O}_0} : \tilde{O}_0 \times X_0 \rightarrow [0,1]$ и определяющее сравнительную оценку эффективности: $\mu_{\hat{O}_0}(x^0, y^0)$ означает степень достоверности утверждения: « $\tilde{o}^0$ эффективнее y^0 ». В частности, информация о подсистеме может быть точной (чёткой), и в этом случае $\hat{O}_0$ является чётким бинарным отношением. Задача состоит в том, что должны быть приняты «чёткие» решения на основе нечёткой информации. В подобной ситуации известны результаты для технических систем [1].

Пусть $\alpha_0 \in [0,1]$ - параметр, характеризующий «достаточность» степени достоверности информации о системе, являющейся подсистемой сложной иерархической структуры.

Опишем подсистему j -го уровня ($j = 0,1,\dots,k$) вектором $\tilde{o}_j, x_j \in X_j, x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$. $e_j = (e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{jm_j})$ - вектор состояния подсистемы j -го уровня, определяющий некоторый допустимый уровень рассматриваемых характеристик.

Положим $G_{0i}^\alpha[e_0] = \{x_0 \in X_0 \mid x_0 G_{0i}^\alpha e_0\}$, $G_{0i}^\alpha[E_{0i}] = \bigcap_{e_0 \in E_{0i}} G_{0i}^\alpha[e_0]$,

$$E_0 = \bigcup_{i \in [1, m_0]} E_{0i} \quad G_0^\alpha[E_0] = \bigcap_{i \in [1, m_0]} G_{0i}^\alpha[E_{0i}]$$

Включение $x_0 \in G_0^\alpha[E_0]$ означает, что все характеристики сложной системы не превышают допустимый уровень со степенью достоверности α , множество $X_0^E = X_0 \cap G_0^\alpha[E_0]$ будем считать множеством допустимых состояний.

Аналогично определяются ограничения, бинарные отношения, а также связанные с ними множества для j -го уровня иерархической структуры.

Задача принятия решений здесь формализуется как задача выделения из $\tilde{O}_0$ ядра $\text{MAX}(\tilde{O}_0, \hat{O}_0(\alpha))$.

Для решения этой задачи рассматривается следующая схема последовательного анализа вариантов:

$$Y_{j+1} \rightarrow Y_j = \text{MAX} \left(Z_{j,j+1}^A, \Phi_j(\alpha_j) \right), \quad j = \overline{k-1, 0}$$

$$Z_{j,j+1}^A = g_{j,j+1}^{-1}(Y_{j+1}) \cap G_j^\alpha[E_j]$$

$$Y_k = \text{MAX} \left(X_k^E, \Phi_k(\alpha_k) \right)$$

Доказывается теорема о сходимости этой схемы, аналогичная теоремам, приведённым, например в [2,3].

Литература

1. Краснощёков П.С., Морозов В.В., Фёдоров В.В. Внутреннее проектирование технических систем в условиях неопределённости. – Изв. АН СССР, Сер. Тех. кибернетика, 1982, № 2, с. 56-62.
2. Березнёв В.А., Ефремова Н.А. Иерархические структуры бинарных отношений в оценке сложных объектов. В сб. Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа, М. Из-во ВЦ РАН, 2007, с. 157-164.
3. Вязгин В.А., Гончарова Н.А. Обобщённая задача математического программирования в проектировании систем. – В сб.: Системное программирование и модели исследования операций. – М.: Из-во Моск. ун-та, 1992, с. 183-194.

УДК 51-77

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

FORECASTING IN THE SOCIAL AND ECONOMIC SYSTEMS BASED ON MATHEMATICAL MODELS

Ешеева И.Р.

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, Улан-Удэ
rubinovna@mail.ru*

В качестве социально-экономической системы рассмотрим учебный процесс в вузе. Предлагаемый подход возможно применить и к другим системам, в которых элементы делятся на несколько категорий и могут переходить из категории в категорию, количество элементов постоянно.

Актуальной в вопросах организации учебного процесса в вузе является проблема разработки аппарата и технологии, которые позволили бы автоматизировать процесс сбора, обработки и анализа данных результатов экзаменационной сессии, а также получить какой-либо прогноз и оценить трудоемкость коррекции прогнозных данных.

В частности, решение обозначенных вопросов может существенно повысить эффективность работы управленческих структур. В настоящем исследовании предлагается методический подход к созданию программного модуля анализа итогов сессии, ориентированного на прогнозирование и оптимизацию затрат.

Оперируя оценкой входного контроля, баллом на вступительном экзамене и соответствующей этому баллу оценкой определяем индивидуальный коэффициент студента

$$K_{\text{студента}} = \frac{V_{\text{балл}} * V_{\text{оценка}} * VK_{\text{оценка}}}{100}$$
. Считается, что чем выше коэффициент студента, тем он более подготовлен.

Процесс изменения контингента студентов по категориям отражен в следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = -(a_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14})x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 + \alpha_{41}x_4$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha_{12}x_1 - (\alpha_{21} + \alpha_{23} + \alpha_{24})x_2 + \alpha_{32}x_3 + \alpha_{42}x_4$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 - (\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{34})x_3 + \alpha_{43}x_4$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \alpha_{14}x_1 + \alpha_{24}x_2 + \alpha_{34}x_3 - (\alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43})x_4$$

где x_1 - количество студентов категории «5», x_2 - категории «4», x_3 - категории «3», x_4 - категории «2», α – коэффициенты перехода, отражающие вероятность перехода студента из одной категории в другую (Таблица 2). Начальные условия – это количество студентов по категориям, определенное по рассчитанным коэффициентам.

Введем функционал $\int_t x_4 dx \rightarrow \min$ (количество студентов категории «2»). Тогда данную задачу можно рассматривать как задачу оптимального управления: после составления прогноза сессии произвести расчет оптимизации, например, проведения дополнительных занятий. Таким образом, мы получим прогноз результатов студентов по данному предмету в период сессии при условии проведения дополнительных занятий, а также оптимальный период проведения этих занятий. Расчет можно проводить по академическим группам, специальностям, факультетам.

УДК 517.956

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГУРСА В КВАДРАТУРАХ

ON THE CONDITIONS OF SOLVABILITY FOUR GOURSAT PROBLEM IN QUADRATURES

Жегалов В.И.*, Миронов А.Н.**

* Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,

Россия, Казань
vzhegalov@yandex.ru

** Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт,

Россия, Елабуга
miro73@mail.ru

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1, 0 < z < z_1, 0 < t < t_1\}$, а X, Y, Z, T — части границы этой области при $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$ соответственно.

Задача Гурса. Найти функцию $u \in C^{(1,1,1,1)}(D) \cap C(\bar{D})$, являющуюся в D решением уравнения

$$u_{xyzt} + au_{xyz} + bu_{xyt} + cu_{xzt} + du_{yzt} + eu_{xy} + fu_{xz} + gu_{xt} + hu_{yz} + ku_{yt} + su_{zt} + mu_x + nu_y + pu_z + qu_t + ru = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющим условиям

$$u|_{\bar{X}} = \varphi_1(y, z, t), \quad u|_{\bar{Y}} = \varphi_2(x, z, t), \quad u|_{\bar{Z}} = \varphi_3(x, y, t), \quad u|_{\bar{T}} = \varphi_4(x, y, z),$$

где каждая из φ_k в области своего определения принадлежит классу $C^{(1,1,1)}$.

В силу включения $u \in C(\overline{D})$ должны иметь место условия согласования

$$\begin{aligned}\varphi_1(0, z, t) &= \varphi_2(0, z, t), \quad \varphi_1(y, 0, t) = \varphi_3(0, y, t), \\ \varphi_1(y, z, 0) &= \varphi_4(0, y, z), \quad \varphi_2(x, 0, t) = \varphi_3(x, 0, t), \\ \varphi_3(x, z, 0) &= \varphi_4(x, 0, z), \quad \varphi_3(x, y, 0) = \varphi_4(x, y, 0).\end{aligned}$$

При определенной гладкости коэффициентов уравнения (1) существует единственное решение данной задачи, представленное в терминах функции Римана R , причем о функции Римана известно лишь, что она существует и единственна [1], [2, с. 46–51]. В [2, с. 61–74] получены также дополнительные условия на коэффициенты уравнения (1), позволяющие записать R через обобщенную гипергеометрическую функцию. В [3, с. 170–174] этот результат получил дальнейшее развитие.

В настоящей работе изучаются возможности выделения случаев разрешимости задачи Гурса в квадратурах на основе факторизации уравнения (1), в которой участвуют операторы второго порядка.

А именно, получены условия представимости левой части уравнения (1) в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma_1 u \right).$$

Опираясь на результаты из [2]–[5], получены новые варианты условий, обеспечивающих разрешимость сформулированной задачи в квадратурах.

Литература

1. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 10. — С. 1429–1430.
2. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. — Казань: Казанское матем. общество, 2001. — 226 с.
3. Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной. — Казань: Казанский ун-т, 2014. — 385 с.
4. Жегалов В.И. К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций // Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. — С. 73–79.
5. Жегалов В.И., Сарварова И.М. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // Изв. вузов. Математика. — 2013. — № 3. — С. 68–73.

**ЭФФЕКТИВНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ
ТРЕХМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*****EFFICIENT PARALLEL ALGORITHMS FOR SOLVING THREE-
DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATIONS****В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова**

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Россия, Москва
Zhukov@kiam.ru*

Исследованы две численные схемы решения начально-краевых задач для трехмерных параболических дифференциальных уравнений. Необходимость в эффективном решении таких задач вызвана их широким распространением в математических моделях. Повышение интереса к указанной проблеме связано развитием параллельных вычислений: требуются коды для суперкомпьютеров с большим числом процессоров. Такие коды должны обеспечивать масштабируемое моделирование на расчетных сетках с миллиардами узлов.

Используя один из методов пространственной дискретизации, например, конечно-объемный метод, можно исходную нестационарную задачу свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы рассмотрим две схемы интегрирования такой системы. Первая схема – неявная двухслойная схема, разрешаемая многосеточным алгоритмом. Ее обозначение ниже – схема ММ (схема на основе многосеточного метода). Детальное изложение многосеточного алгоритма, являющегося разновидностью метода Р.П. Федоренко, дано в [1]. В основе второй явно-итерационной схемы ЛИ-М [2] лежит теория, разработанная О.В. Локуциевским. Схема ЛИ-М предназначена для решения параболических уравнений и опирается на многочлены Чебышева специальной конструкции. В явно-итерационной схеме выбор числа итераций и итерационных параметров диктуется условиями аппроксимации и устойчивости, а не оптимизацией сходимости итераций к решению неявной схемы. Особенности многосеточной схемы являются реализация операторов межсеточных переходов для случая разрывных коэффициентов уравнения и адаптация сглаживающей процедуры к спектру сеточных операторов.

Для этих схем приведены результаты расчетов. Показано, что схемы ММ и ЛИ-М обеспечивают высокую работоспособность для эволюционных задач с анизотропными и разрывными коэффициентами. Схемы хорошо масштабируются и позволяют преодолеть трудности, связанные с развитием ультрапараллельных вычислений и достижением в перспективе эксафлопсных скоростей. Анализ схем и результатов показывает, что при больших значениях параболического числа Куранта следует использовать схему ММ, обладающую к тому же асимптотической оптимальностью по шагу сетки. При относительно скромных числах Куранта конкурентоспособной становится схема ЛИ-М.

Литература

1. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Параллельный многосеточный метод для разностных эллиптических уравнений // Матем. моделирование. 2014. Т.26, №1. С. 55–68.
2. Жуков В. Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование. 2010. Т.22, №10. С. 127–158.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ*

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC SYSTEM ON THE PLANE

Жура Н.А.¹, Солдатов А.П.²

¹ *Физический институт РАН им. П.Н.Лебедева, Россия, Москва*

nikzhura@gmail.com

² *Белгородский государственный национальный
исследовательский университет, Россия, Белгород*

soldatov48@gmail.com

Рассмотрим на плоскости гиперболическую систему первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} - A \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad (1)$$

относительно вектора $u = (u_1, u_2, u_3)$, где вещественная постоянная 3×3 -матрица A имеет вещественные собственные значения $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$. В докладе обсуждается новая постановка краевой задачи для этой системы с данными на всей границе.

Пусть область D ограничена контуром Γ , который составлен из гладких нехарактеристических дуг Γ_i , $1 \leq i \leq 6$, взятых в порядке его обхода против часовой стрелки. Предполагается, что множество из 6 точек, образованное концами этих дуг, состоит из вершин двух характеристических треугольников, объединение сторон которых обозначим L . В частности, проекция вдоль каждой из трех характеристик $x + \nu_i y = 0$ переводит кривую $\Gamma_{(1)} = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5$ на $\Gamma_{(2)} = \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_6$.

Смешанная задача состоит в отыскании обобщенного решения $u \in C(\bar{D} \setminus L)$ системы (1) по краевому условию

$$\sum_{i=1}^3 a_{ki} u_i|_{\Gamma_{(1)}} = f_k, \quad k=1,2; \quad \sum_{i=1}^3 b_i u_i|_{\Gamma_{(2)}} = g. \quad (2)$$

Показано, что при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты $a_{kj} \in C(\Gamma_{(1)})$, $b_i \in C(\Gamma_{(2)})$, границу Γ области и характер поведения решения вблизи L задача (1), (2) однозначно разрешима.

* Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113PK01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ НЕУСТОЙЧИВОГО ТИПА

NUMERICAL EXPERIMENTS ON ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF LINEAR DELAY-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF INSTABLE TYPE

Жээнтаева Ж.К.*

* Кыргызско-Узбекский университет,
Кыргызстан, Ош
jjk_kuu@mail.ru

В теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см. например [1], чьей терминологией мы пользуемся) большое значение имеет построение асимптотики решений при больших временах, поскольку отдельные различия в начальных функциях быстро сглаживаются и вид решения определяется некоторыми интегральными характеристиками начальных функций.

Для автономных уравнений существует практически исчерпывающая теория (Флоке), основанная на характеристическом уравнении. Условия существования первых членов (и в одном случае уравнения устойчивого типа – вторых членов – Э.Козакевич) асимптотического разложения решений неавтономных уравнений были найдены также Ю.А. Рябовым, П.С. Панковым. Пример [2] показывает, что такие асимптотические разложения существуют не всегда. Поэтому, прежде чем доказывать существование некоторого асимптотического разложения, необходимо определить условия, при которых оно имеет место, и уточнить его вид.

Для этой цели можно применять численные эксперименты: если приближенное асимптотическое разложение (на некотором большом временном промежутке) имеет место при различных исходных данных, то в силу вполне непрерывности оператора сдвига по траекториям решений можно надеяться, что соответствующее асимптотическое разложение существует.

Рассматривается уравнение

$$x'(t) = A(t)x(t-h), t \in R_+ \equiv [0, \infty), \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0], \quad (2)$$

где $A(t) \in C(R_+)$, $0 < A(t) \leq a_0 < \infty$, $\varphi(t) \in C[-h, 0]$.

Известно, что решение начальной задачи (1)-(2) представляется в виде

$$x(t) = c_1 x_1(t) + o(x_1(t)), t \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $x_1(t)$ - любое положительное (и возрастающее) решение (1)-(2).

Мы выдвинули гипотезу, что такое решение представляется более точно:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) + o(|x_2(t)| + |x_3(t)|), t \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $x_2(t), x_3(t)$ - некоторые линейно независимые медленно колеблющиеся решения. Расчеты на компьютере подтвердили эту гипотезу.

Литература

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 351 с.

2. Панков П.С. Пример линейного однородного дифференциального уравнения с запаздыванием, не имеющего конечномерного экспоненциально устойчивого при $t \rightarrow \infty$ пространства решений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1977. - С.117-125.

УДК 519.6:539.2

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ ВОДОРОДА*

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF HYDROGEN THERMAL DESORPTION MODEL

Заика Ю.В.*, Костикова Е.К.**

** Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра Российской академии наук, Россия, Петрозаводск
zaika@krc.karelia.ru*

*** Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра Российской академии наук, Россия, Петрозаводск
fedorova@krc.karelia.ru*

Для повышения эффективности экспериментальных исследований, решения прикладных задач и обобщений необходимы математические модели взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами и методы их параметрической идентификации.

Экспериментальный опыт показывает, что лимитирующими являются не только диффузионные процессы внутри металла, но и физико-химические явления на поверхности (см. Водород в металлах, в 2 т., под ред. Г. Алефельда и И. Фёльки и Взаимодействие водорода с металлами, под ред. А.П. Захарова).

Параметры переноса зависят и от технологических особенностей получения партии материала, поэтому вряд ли следует ориентироваться на получение «табличных данных» – нужны эффективные алгоритмы обработки экспериментальных кривых. Адсорбция, растворение, диффузия, ... являются предметом теоретических и экспериментальных исследований. Но каждый дополнительный коэффициент приводит к скачку уровня сложности обратной задачи параметрической идентификации.

Метод термодесорбции (ТДС) позволяет в динамическом режиме сканировать материал в широком диапазоне температур, что является преимуществом по сравнению с экспериментами по водородопроницаемости при постоянных температурах.

В докладе остановимся на методе термодесорбции, учитывая лишь лимитирующие факторы и информационные возможности ТДС-эксперимента.

Предложен метод оценки параметров десорбции (обобщенного коэффициента эффективной рекомбинации) и диффузии в нестационарных температурных условиях, когда поверхностные и объемные процессы существенно влияют друг на друга. На начальном этапе используется упрощенная модель в классе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволяет на современной вычислительной технике относительно быстро провести большой предварительный объем вычислений с целью поиска начального приближения. Далее используются точные (в рамках модели) уравнения, полученные с помощью техники сопряженных уравнений, предложенной в работах Марчука Г.И. Это представляется более эффективным, чем обычно применяемые методы градиентного типа минимизации.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант номер 15-01-00744)

ции невязки, когда на каждой итерации необходимо численно решать краевую задачу при текущих приближениях параметров.

УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH BESSEL OPERATOR

Зайцева Н.В.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Россия, Казань
n.v.zaiceva@yandex.ru*

Современные задачи естествознания привели к необходимости обобщения классических задач математической физики и к постановке качественно новых задач. Одним из классов таких задач являются задачи с нелокальными условиями. При разработке методов исследования, которых, было установлено, что наибольшую трудность представляет случай, когда нелокальные условия не содержат значений функции в точках границы. К этому случаю относятся нелокальные условия, заданные в виде интегралов.

Задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений начали исследоваться с 90-х годов двадцатого века. Выделяют два класса задач: задачи, в которых интегральное условие задается вдоль характеристик, и задачи с классическими начальными и нелокальными граничными условиями. Данная работа посвящена исследованию задач второго типа, когда одно из граничных условий представляет собой интегральное условие первого или второго рода. Если нелокальное условие содержит только интегральный оператор, то такое условие принято называть интегральным условием первого рода. Если нелокальное условие помимо интегрального оператора содержит значение искомого решения или его производных на границе области исследования, то условие такого вида называется интегральным условием второго рода.

Рассмотрим в области $D = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ гиперболическое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - B_x U = 0, \quad (1)$$

где $B_x = x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial}{\partial x}$ - оператор Бесселя, $k > 0$ - заданное действительное число.

1. Смешанная задача с интегральным условием первого рода.

Требуется найти функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \\ U|_{t=0} &= \varphi(x), \quad U_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \\ \int_0^1 U(x, t) x^k dx &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

2. Смешанная задача с интегральным условием второго рода.

Требуется найти функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad 0 < t < T, \\ U|_{t=0} &= \varphi(x), \quad U_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \\ \frac{\partial U(1, t)}{\partial x} + \int_0^1 U(x, t) x^k dx &= 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Решение задач получено методом разделения переменных в виде ряда

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x) (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t),$$

коэффициенты которого определяются по известным формулам [1], λ_n - положительные, вещественные [2] корни уравнения $J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda) = 0$, расположенные в порядке возрастания. В ходе исследования получены ограничительные условия на функции, входящие в начальные условия обеих задач.

Результаты данной работы являются продолжением исследований краевых задач с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений.

Литература

1. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. Ч. 1. Москва, 1949. – 799с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Москва: Высшая школа. 1970. – 712с.

УДК 519.6

ВЕРИФИКАЦИЯ ОПЕРАТИВНЫХ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ О ТЕМПЕРАТУРЕ ПОВЕРХНОСТИ БАЛТИЙСКОГО МОРЯ* VERIFICATION OF AN OPERATIONAL OBSERVATION DATA OF SURFACE TEMPERATURE OF THE BALTIC SEA

Захарова Н.Б.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики Российской академии наук, Россия, Москва
zakharova_nb@inm.ras.ru

Опыт решения задач математического моделирования показывает, что успех их решения зависит от подготовки данных, ассимилируемых в численных моделях. Источниками информации об основных океанографических параметрах являются как базы контактных измерений, так и базы данных дистанционного зондирования. При этом следует отметить, что получаемая информация проходит предварительную обработку. Но, к сожалению, даже после калибровки и валидации данных в центрах, предоставляющих информацию, могут оставаться ошибки. Некоторые ошибки удастся заметить только при детальном рассмотрении получаемых данных и их анализе, основанном на физических свойствах иссле-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №13-01-00753, №14-01-31195) и РНФ (проект №14-11-00609)

дуемой среды, поэтому появляется необходимость проводить дополнительную верификацию получаемой информации, прежде чем ассимилировать ее в численных моделях.

В настоящей работе использовались данные, доступные на портале MyOcean (<http://www.myocean.eu>). Это проект, поддерживаемый Европейским комитетом в рамках программы Глобального мониторинга окружающей среды и безопасности (GMES), цель которого состоит в том, чтобы создать (определить, спроектировать, разработать и протестировать) интегрированный общеевропейский инструментарий для мониторинга и моделирования океана с использованием национальных наработок и ресурсов. Проект представляет собой консорциум из 60 партнеров в 28 странах. На данный момент каждое государство, участвующее в проекте, наработало свой собственный опыт в сфере разработок в области океанографии, в глобальном или региональном масштабе, но уровни и направления разработок различных государств сильно разнятся. Поэтому объединение существующих и разрабатываемых инструментариев на одном ресурсе для сравнения, тестирования, обмена опытом и мониторинга общего уровня разработок в этой области - важный и интересный проект мирового масштаба. На портале проекта представлены данные наблюдений о состоянии основных океанографических параметров океанов и морей, в том числе данные наблюдений о температуре, солености, течениях и прочих параметрах Балтийского моря. Представленные данные обладают высокой точностью, сравнительно высоким пространственным разрешением и частотой измерений по времени. Указанные данные могут быть использованы для ассимиляции данных наблюдений в численных моделях динамики океанов и морей с целью корректировки моделей, проведения прогностических расчетов, экспериментов по восстановлению отдельных параметров модели и для решения других задач гидрометеорологии, и поэтому представляют высокую ценность.

В настоящей работе кратко описаны данные наблюдений океанографических параметров Балтийского моря, в том числе данные о температуре поверхности, которые доступны в проекте MyOcean. Проведен анализ данных на основе физических свойств исследуемой среды, с выявлением ошибок. Описаны процедуры, реализованные для дополнительной верификации получаемых данных, и представлены результаты их работы на данных по температуре поверхности Балтийского моря.

УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ON THE NONLOCAL PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

Зикиров О.С.

*Национальный университет Узбекистана имени М. Улугбека,
г. Ташкент, Узбекистан;
zikirov@yandex.ru*

В работе для уравнения третьего порядка

$$Mu \equiv \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) u_{xy} + Lu = g(x, y), \quad (1)$$

где L – линейный оператор второго порядка вида

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + \\ + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u,$$

α, β – заданные действительные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, изучается следующая нелокальная задача: требуется найти в области $D = \{(x, y): 0 < x < l, 0 < y < h\}$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и нелокальным граничным условиям

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(y)u(x_k, y) + \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u_x(0, y) = \sum_{k=1}^n \beta_k(y)u_x(x_k, y) + \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4)$$

где x_k – произвольные фиксированные точки, причем $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq l$, $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$ ($i=1, 2$), $\alpha_k(y)$, $\beta_k(y)$ – заданные функции, такие, что

$$\psi_1(0) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(0)\psi_1(x_k) + \varphi_1(0), \quad \psi_1'(0) = \sum_{k=1}^n \beta_k(0)\psi_1(x_k) + \varphi_2(0).$$

Под классом $C^{(k, \lambda)}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ , $0 < \lambda < 1$. Решение класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\bar{D})$ называется регулярным, и в этом случае будем требовать выполнения следующих условий:

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$a(x, y) \in C^{1,0}(\bar{D}) \cap C^{2,0}(D); \quad b(x, y) \in C^{1,0}(\bar{D}) \cap C^{0,1}(\bar{D}) \cap C^{1,1}(D); \\ c(x, y) \in C^{0,1}(\bar{D}) \cap C^{0,2}(D); \quad d(x, y) \in C^{0,0}(\bar{D}) \cap C^{1,0}(D); \\ e(x, y) \in C^{0,0}(\bar{D}) \cap C^{0,1}(D); \quad f(x, y) \in C^{0,0}(D),$$

кроме того, $d(x, y) < 0$, $e(x, y) < 0$ для любых $(x, y) \in D$.

Условие 2. Заданные функции удовлетворяют условиям

$$\psi_i(x) \in C^2[0, l], \quad \varphi_i(y) \in C^2[0, h], \quad (i=1, 2); \\ g(x, y) \in C^{(1, \lambda)}(\bar{D}), \quad \text{кроме того, } g(x, 0) = g(0, y) = 0, \\ \alpha_k(y), \beta_k(y) \in C^2[0, h], \quad i=1, 2, \quad k=\overline{1, n}.$$

Методом Римана доказана следующая теорема разрешимости задачи (1)-(4).

Теорема. Пусть выполнены условие 1 и условие 2. Тогда нелокальная задача (1)-(4) разрешима и притом единственным образом.

О ПОТЕНЦИАЛАХ ДЛЯ В-ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

ABOUT POTENTIALS FOR B-ELLIPTIC SYSTEMS OF THE EQUATIONS

Ибрагимова Н.А.

Казанский государственный энергетический университет,
Россия, Казань

NAI.liya@yandex.ru

Пусть E_p^+ - полупространство $x_p > 0$ p - мерного евклидова пространства точек $x = (x', x_p)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$, D - конечная область в E_p^+ , ограниченная открытой частью $\tilde{A}_0$ гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью $\tilde{A}$.

Рассматривается В-эллиптическая система уравнений вида

$$L_B[u] = \Delta_B u + Au = 0, \quad (1)$$

где $\Delta_B = \Delta_{x'} + B_{x_p}$, $\Delta_{x'} = \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ - лапласиан, $B_{x_p} = \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{k}{x_p} \frac{\partial}{\partial x_p}$ - оператор Бесселя,

$k > 0$ - заданная постоянная, $A = (a_{ij})$ - симметрическая положительно определенная мат-

рица порядка m , $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}$ - неизвестная вектор-функция.

В работе построена фундаментальная матрица решений системы (1) с особенностью в произвольной точке x_0 :

$$\Psi(x, x_0) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x, x_0) & \psi_{12}(x, x_0) & \dots & \psi_{1m}(x, x_0) \\ \psi_{21}(x, x_0) & \psi_{22}(x, x_0) & \dots & \psi_{2m}(x, x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{m1}(x, x_0) & \psi_{m2}(x, x_0) & \dots & \psi_{mm}(x, x_0) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\psi_{sj}(x, x_0) = C_k \sigma_{sj} \int_0^\pi \rho_\varphi^{-\nu} H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda_j} \rho_\varphi) \sin^{k-1} \varphi d\varphi$, $C_k = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(k/2)}$, $\nu = \frac{p+k-2}{2}$,

$\rho_\varphi = \left(|x' - x'_0|^2 + x_p^2 + x_{p_0}^2 - 2x_p x_{p_0} \cos \varphi \right)^{1/2}$, $\sigma_{sj} = \frac{\lambda_j^{\nu/2}}{i 2^{\nu+1} \pi^{(p-3)/2} \Gamma((k+1)/2)}$, $\lambda_j > 0$, $s, j = \overline{1, m}$.

С помощью фундаментальной матрицы решений (2) построены потенциалы простого и двойного слоя

$$V(x) = \int_{\tilde{A}} \Psi(\xi, x) \mu(\xi) \xi_p^k d\tilde{A}, \quad W(x) = \int_{\tilde{A}} \frac{\partial \Psi(\xi, x)}{\partial n} \nu(\xi) \xi_p^k d\tilde{A}$$

для системы (1) и доказаны следующие граничные соотношения для этих потенциалов: Если $\tilde{A}$ - поверхность Ляпунова и в точках пересечения поверхности $\tilde{A}$ с $\tilde{A}_0$ углы между

касательными плоскостями с плоскостью $\tilde{A}_0$, таковы, что $\theta_j = \pi$, $j = \overline{1, p-2}$, $\theta_{p-1} = \frac{\pi}{2}$ и $\nu(\xi)$ – непрерывная функция, то

$$\begin{aligned} W_i(x_0) &= \frac{1}{2} \tilde{E} \nu_0 + \overline{W(x_0)}, & W_e(x_0) &= -\frac{1}{2} \tilde{E} \nu_0 + \overline{W(x_0)}, \\ \left[\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}} \right]_i &= -\frac{1}{2} \tilde{E} \mu_0 + \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}, & \left[\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}} \right]_e &= \frac{1}{2} \tilde{E} \mu_0 + \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}, \\ V_i(x_0) &= \overline{V(x_0)} = V_e(x_0), \end{aligned}$$

где точка $x_0 \in \tilde{A}$ – фиксированная точка, $W_i(x_0)$, $W_e(x_0)$ означают предельные значения для потенциала двойного слоя, $\left[\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}} \right]_i$, $\left[\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}} \right]_e$ – предельные значения для нормальной производной потенциала простого слоя, когда точка x стремится к точке $x_0 \in \tilde{A}$ соответственно изнутри и извне границы $\tilde{A}$, а $\overline{V(x_0)}$, $\overline{W(x_0)}$ – прямые значения потенциалов простого и двойного слоя, $\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}$ – прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в точке $x_0 \in \tilde{A}$, $\nu_0 = \nu(x_0)$, $\mu_0 = \mu(x_0)$ – вектор-столбцы, $\tilde{E}$ – матрица m -го порядка состоящая из единиц. Индекс у нормали означает, что она проведена в точке x_0 .

В настоящей работе также получены интегральные уравнения для внутренних и внешних граничных задач Дирихле и Неймана. Установлена фредгольмовость этих интегральных уравнений. В частности, с использованием условий излучения доказана единственность решения внешних граничных задач и соответствующих интегральных уравнений.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЙ МАГНИЕВЫХ СПЛАВОВ С НИЗКОЙ СИММЕТРИЕЙ ОБРАЗЦА*

OPTIMIZATION OF THE ORIENTATION DISTRIBUTION FUNCTION FOR MAGNESIUM ALLOYS WITH LOW SAMPLE SYMMETRY

Иванова Т.М.*, Серебряный В.Н.***, Харьковская М.А.**

* *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Россия, Москва
ivatatiana@gmail.com*

*** *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт металлургии
и материаловедения им. А. А. Байкова Российской академии наук,
Москва, Россия
vns@imet.ac.ru*

В металловедении при изучении материалов представляет интерес текстура – преимущественная ориентация зерен в поликристалле, которая оказывает существенное влияние на свойства материалов. В текстурном анализе существует несколько подходов к изучению текстуры. Традиционным экспериментальным методом получения данных о преимущественных ориентациях кристаллических плоскостей является построение так называемых полюсных фигур (ПФ). Наиболее полную информацию о текстуре дает функция распределения ориентаций кристаллитов (ФРО). В последние несколько десятилетий были развиты количественные методы восстановления ФРО по имеющемуся набору экспериментальных ПФ. Задача восстановления ФРО является некорректно поставленной вследствие неединственности решения и неустойчивости его к погрешностям экспериментальных данных [1]. Возможным методом преодоления некорректности является поиск решения в определенном классе и оптимизация параметров модели текстуры с использованием регуляризации [1].

В данной работе рассмотрены два метода восстановления ФРО – метод текстурных компонент с использованием круговых нормальных распределений [1,2] и метод суперпозиции большого числа стандартных текстурных функций с одинаковым рассеянием [1,3]. Эти методы наиболее целесообразно применять для исследования текстуры материалов с низкой симметрией решетки и образца. С такими текстурами часто встречаются при изучении магниевых сплавов, легированных добавками редкоземельных металлов и подвергнутых различным методам интенсивной деформации, в частности равноканальному угловому прессованию.

Метод текстурных компонент относится к методам нелинейной оптимизации с ограничениями. Параметры модели – веса текстурных компонент, их положение в ориентационном пространстве и ширина рассеяния (аналог дисперсии) оптимизируются с использованием регуляризованного метода Левенберга-Марквардта [2,4].

В методе суперпозиции большого числа стандартных текстурных функций оптимизируются линейные параметры – веса текстурных функций. Эти параметры положительны и нормированы. С учетом этих ограничений оптимизация параметров осуществляется с применением регуляризованного метода проекций [3,5]. С помощью обоих методов исследовали текстуру полос магниевого сплава Mg-4,5%Nd, полученных прямым горячим

* * Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-03-02829_a)

прессованием. Экспериментальные неполные ПФ исследуемого материала измеряли на рентгеновском текстурном дифрактометре ДРОН-7 в $Co_{K\alpha}$ -излучении. ФРО полосы сплава, построенные из ПФ обоими методами совпадают с точностью расчетных погрешностей.

Оба метода демонстрируют сходимость и устойчивость параметров, их можно рекомендовать для решения задачи оптимизации ФРО для материалов с низкой симметрией образца.

Литература

1. Савелова Т.И., Иванова Т.М., Сыпченко М.В. / Методы решения некорректных задач текстурного анализа и их приложения. М.: НИЯУ МИФИ. 2012. 268 с.
2. Иванова Т.М., Савелова Т.И. / Робастный метод аппроксимации функции распределения ориентаций каноническими нормальными распределениями. ФММ. 2006. Т. 101. №2. с. 1-5.
3. Куртасов С. Ф. Методика количественного анализа текстур прокатки материалов с кубической симметрией кристаллической решетки. Заводская лаборатория. 2007, т.73, No 7, с. 41-44.
4. Brandt S. / Data Analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers. NY: Springer-Verlag. 1999. 652 p.
5. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. — М: Советское радио, 1979, 271 с.

УДК 62-506.1

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ NON-PARAMETRICAL MODELS OF LINEAR DYNAMIC PROCESSES OF HIGH ORDERS

Иконников О.А.

*Сибирский государственный аэрокосмический университет, Россия, Красноярск,
ik_ol@mail.ru*

В работе рассматривается задача идентификации в широком смысле при условиях, когда дифференциальное уравнение, описывающее объект в системе, имеет довольно высокий порядок, что является задачей, недостаточно хорошо изученной на сегодняшний день.

Расчетная модель имеет вид [1]:

$$x_s(t) = k(0) \cdot u(t) + \frac{1}{s \cdot c_s} \cdot \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} k_i \cdot H' \left(\frac{t - \tau_i - t_i}{c_s} \right) \cdot u(\tau_i) \Delta\tau \quad (1)$$

где $H(\cdot)$ - функция из класса колоколообразных, Cs - параметр размытости, изменением величины которого регулируется точность работы модели, ki - переходная характеристика объекта, s - объем выборки, $\Delta\tau$ - шаг численного интегрирования, от величины которого зависит точность взятия интеграла в модели, τ - переменная интегрирования, u - входное воздействие.

Непараметрическая теория, как известно, призвана работать с дифференциальными уравнениями любых порядков, однако в научной литературе, а также в различного рода исследованиях мы, как правило, сталкиваемся с изучением объектов, порядок дифференциальных уравнений которых относительно невысок. Это связано, прежде всего, с существенным возрастанием сложности вычислений. Поэтому было интересно узнать, а действительно ли непараметрическая теория настолько универсальна в том смысле, что качест-

во работы моделей не зависит от величины порядка уравнений? Были проведены исследования линейных процессов десятого, пятнадцатого и двадцатого порядков. Оказалось, что, действительно, непараметрические модели и в этих условиях показывают весьма удовлетворительное качество работы.

При исследовании подобных систем существенно возрастает необходимость определения, так называемых, областей устойчивости и соответствующих им коэффициентов дифференциального уравнения, при которых переходный процесс в системе будет носить устойчивый характер. Необходимым и достаточным условием устойчивости любой линейной системы является отрицательность вещественных частей всех корней ее *характеристического уравнения*.

Отсюда, запишем характеристическое уравнение системы степени n в следующем виде:

$$X(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (2)$$

Попытки анализа устойчивости линейных систем путем прямого отыскания корней характеристического уравнения (2) наталкиваются на практические трудности, связанные с отсутствием аналитических выражений для корней уравнений степени выше четвертой. Однако нет необходимости находить значения корней, поскольку для суждения об устойчивости системы нужно знать лишь, что все они расположены левее мнимой оси на плоскости комплексного переменного p .

Введем следующее описание:

$$a_1 \frac{d^n x}{dt^n} + a_2 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + x_t = a_{n+1} u_t$$

На рис.1 показаны реакции системы 10 порядка и модели (1) на синусоидальное воздействие. Как видно из графика модель показывает достаточно высокое качество работы (кривые процессов практически сливаются).

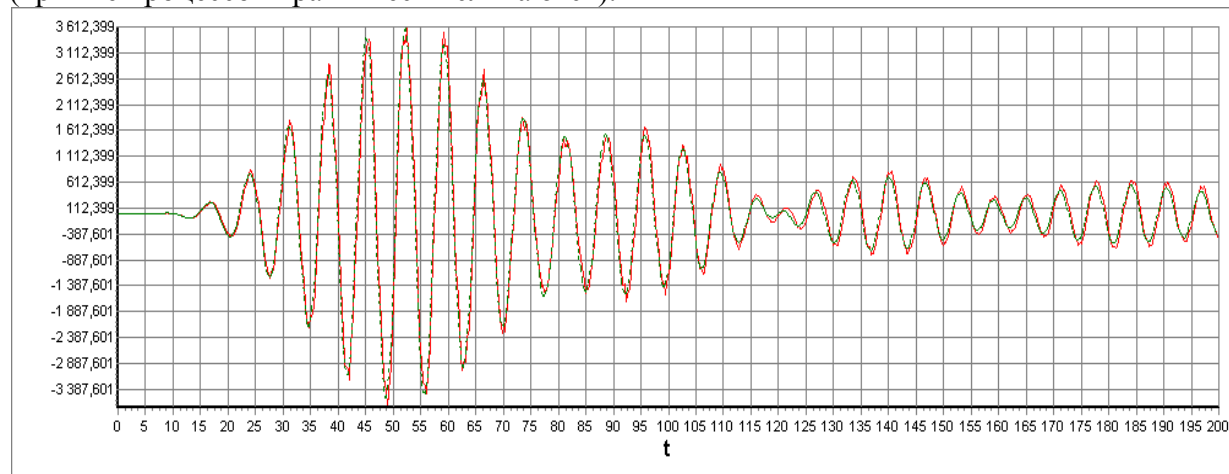


Рис.1. Реакции объекта и модели на $U(t) = \sin(t)$

($n = 10, s = 800, \Delta t = 0.25c., H(z)$ – кус., $W \approx 120$ (15.4%), $T_c \approx 48$ мин., $\varepsilon^x(t) = 10\%$)

Исходя из полученных результатов исследования, можно сделать вывод о том, что, хотя непараметрическая теория и работает с вполне удовлетворительным качеством с процессами высоких порядков, при этом не удалось избежать определенных трудностей возникших при работе с такими процессами. Так, например, требует более подробного отдельного рассмотрения задача определения областей устойчивости по причине того, что с ростом порядка дифференциальных уравнений существенно растет чувствительность процессов к различного рода погрешностям при расчетах. Так же, из рисунков можно видеть, что с ростом порядка дифференциальных уравнений существенно возрастают время идентификации и объемы обучающих выборок, что неминуемо приводит к не менее существенному росту машинного времени, затрачиваемого на реализацию математических

расчетов. Эти и другие вопросы были решены, в результате чего были разработаны модификации описанных здесь алгоритмов. В силу ограниченности объема статьи, разработку этих модификаций и их роль в непараметрическом моделировании автор надеется осветить на ближайших научных конференциях.

Литература

1. Иконников О.А. О непараметрическом моделировании линейных динамических процессов высоких порядков: Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. ак. М.Ф. Решетнева. Вып. 2(54). Красноярск, 2014. С. 30-32.

УДК 517.957

НЕРАВЕНСТВО ГОРДИНГА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

GARDING'S INEQUALITY FOR A CLASS OF DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS AND ITS APPLICATION

Исхоков С.А.*, Гадоев М.Г.**, Якушев И.А.***

**Политехнический институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова" в г. Мирном*

Sulaimon@mail.ru

*** Политехнический институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова" в г. Мирном*

Gadoev@rambler.ru

**** Политехнический институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова" в г. Мирном*

Yakushevilya@mail.ru

В докладе речь идет о доказательстве весового аналога неравенства Гординга для эллиптических уравнений высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области с разными характерами вырождения по разным независимым переменным.

С помощью неравенства Гординга исследуется однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптических уравнений высшего порядка.

Исследована также разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических уравнений высшего порядка в полупространстве. Отметим, что коэффициенты исследуемого уравнения имеют степенное вырождение и принадлежат некоторым весовым L_p -пространствам.

Рассматривается разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка в $R_n \setminus M$, где M – неограниченное многообразие размерности $m \in [1, n-1]$ в n -мерном евклидовом пространстве R_n , удовлетворяющее условию конуса.

Некоторые результаты доклада опубликованы в [1-4].

Литература

1. Гадоев М.Г., Якушев И.А. Вариационная задача Дирихле для одного класса эллиптических уравнений с вырождением // Математические заметки ЯГУ. 2011. Т. 18. № 1. с. 25-35.
2. Исмоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А., Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443. № 3. с. 286-289.
3. Якушев И.А. О вариационной задаче Дирихле для эллиптических операторов, вырождающихся на неограниченном многообразии // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2012. Т. 55. № 7. с. 526-532.
4. Якушев И.А. Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для одного класса вырождающихся эллиптических операторов в полупространстве // Вестник Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова, 2013. Т. 10, № 1. с. 9-13.

УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДАРСИ НА БАЗЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА*

DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR DARCY'S PROBLEM SOLVING

Иткина Н.Б.*, Марков С.И.*, Шурина Э.П. *

** Новосибирский государственный технический университет,
Россия, Новосибирск
itkina.nat@yandex.ru*

Математические модели фильтрационных процессов, таких как: движение нефти и природного газа в подземных пластах, миграция влаги в плодородных почвах, работа технологических устройств химических предприятий, вне зависимости от вызывающих фильтрацию причин, которые могут быть совершенно различными – например, перепад давлений на границе среды, действие внешних массовых сил (сила тяжести, силы инерции, электромагнитные силы) или капиллярных сил на межфазных границах, деформация пористой среды и др., - всегда учитывают движение жидкости по сложной системе разветвленных каналов, сообщающихся между собой. Одна из наиболее часто используемых эффективных моделей, описывающих движение жидкости в пористой среде – это модель Дарси.

Геометрическая и физическая неоднородность области моделирования определяет ряд требований, предъявляемых к методу дискретизации: 1)учет контрастности значений параметров модели; 2)учет геометрической разномасштабности подобластей исследуемого объекта. Разрывный метод Галеркина (DG-метод) - один из современных неконформных конечноэлементных методов наиболее полно удовлетворяющий данным требованиям.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ ОФИ-М 13-05-12031

Пусть $\Omega \subset R^3$ - область, представленная в виде объединения подобластей $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ с межинтерфейсными границами Γ_{ij} . Скорость фильтрации в $\Omega \subset R^3$ области выражается законом Дарси и описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \bar{u} = -K(x) \cdot \nabla p, \\ \nabla \cdot \bar{u} = f, \end{cases}$$

$$p|_{\Gamma_D} = g,$$

где $\bar{u}$ - вектор скорости, p - давление, K - положительно-определённый, ограниченный, симметричный тензор проницаемости.

Разработанная вычислительная схема со специальными лифтинг-операторами была верифицирована на классе модельных задач и задач, близких к реальным. Исследования проводились с использованием линейного и квадратичного разрывного базиса на тетраэдральных разбиениях. Вычислительные эксперименты по определению значения эффективного тензорного коэффициента проницаемости слоистой среды позволили продемонстрировать высокую точность (погрешность определения эффективного коэффициента менее 2%) для сред с контрастностью коэффициента проницаемости в пределах одного порядка.

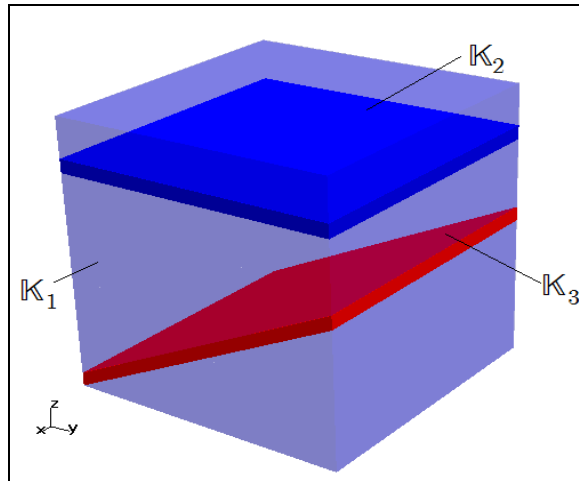


Рисунок 1. Структура образца

Погрешность вычисления поля скорости и поля давления на классе модельных задач с полиномиальным аналитическим решением, соответствует теоретическим оценкам для диагонального тензорного коэффициента проницаемости с контрастностью диагональных элементов до 10^4 .

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ ФАРМАКОКИНЕТИКИ***

**NUMERICAL SOLUTION OF INVERSE PROBLEM FOR SYSTEMS OF
ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE EXAMPLE OF
PHARMACOKINETICS**

Кабанихин С.И.* **, Воронов Д.А.* **, Криворотько О.И.* **, А.Ю. Белоног*

** Новосибирский государственный университет, Россия, Новосибирск*

*** Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
dmitriy.voronov.89@gmail.com*

Фармакокинетика - раздел медицины, изучающий кинетические закономерности химических и биологических процессов, происходящих с лекарственным средством в организме млекопитающего. Используя закон сохранения массы, математические модели фармакокинетики представляются в виде систем (нелинейных) дифференциальных уравнений.

В докладе освещаются вопросы идентифицируемости математических моделей, ключевые при практическом решении биологических задач. В докладе представлен обзор методов определения идентифицируемости для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих физиологические процессы.

Прямая задача фармакокинетики заключается в построении профилей концентрации препарата в органах (группе органов, тканях, крови и т.д.) по начальным данным концентрации препарата. Численное решение прямой задачи получено с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации.

Обратная задача состоит в определении констант скоростей перехода препарата внутри организма по дополнительной информации о решении прямой задачи. Чаще всего в качестве такой информации выступают данные измерений концентрации в крови и/или моче. В докладе представлены методы решения обратной задачи: градиентный метод (получена аналитическая формула градиента для целевого функционала), итерационный метод с использованием сингулярного разложения. Представлены результаты вычислительных экспериментов. Исследован вопрос о выборе начального приближения для итерационных методов.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект номер 15-01-09230).

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ЭПИДЕМИОЛОГИИ И ИММУНОЛОГИИ***
**NUMERICAL METHOD FOR SOLVING INVERSE PROBLEMS IN
EPIDEMIOLOGY AND IMMUNOLOGY***

**Кабанихин С.И.* **, Криворотко О.И.* **, Воронов Д.А.* **, Ермоленко Д.В. **,
Каштанова В.Н.****

** Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Россия, Новосибирск*

kabanikhin@sscc.ru, krivorotko.olya@mail.ru, dmitriy.voronov.89@gmail.com

*** Новосибирский государственный университет, Россия, Новосибирск
ermolenko.dasha@mail.ru, VikaKashtanova@yandex.ru*

Тенденции и уровень решения проблем эпидемии инфекционных заболеваний, своевременного иммунного ответа и т.п. предполагают использование различного рода математических моделей для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Системы ОДУ характеризуются своими параметрами q_i , которые описывают в задачах эпидемиологии особенности популяции и развитие болезни, а в задачах иммунологии – патоген, особенности иммунитета заболевшего и т.п. С целью получения информации о конкретной популяции, характере заболевания, иммунном ответе, восприимчивости организма к конкретному виду лекарств и т.п. необходима качественная оценка параметров модели (или их комбинаций) по информации f_k о развитии заболевания в фиксированные моменты времени t_k , $k = 1, \dots, K$ (статистические данные, данные анализа крови, урины и т.п.).

Методы идентификации параметров систем ОДУ (обратные задачи) применительно к задачам эпидемиологии и иммунологии значительное развитие получили в работах Марчука Г.И., Романюхи А.А., Авилова К.К., Бочарова Г.А., Демиденко Г.В., Козлова К.Н., Banks Н.Т., Engl Н.В. и других.

В данной работе численно исследованы обратные задачи эпидемии туберкулеза на примере сельской местности и простейшего инфекционного заболевания для модели «антиген-антитело». Задача определения вектора параметров q по данным f из соотношения $A(q) = f$ в общем случае некорректна (система может иметь много решений или быть несовместна). Регуляризация состоит в сведении обратной задачи $A(q) = f$ к задаче определения минимума целевого функционала $J(q) = \|A(q) - f\|^2$. Построен численный алгоритм решения обратных задач на основе итерационного метода Нелдера-Мида для точных и зашумленных данных со случайной ошибкой. Проведен качественный анализ выбора оптимального количества измерений K относительно точности восстановления параметров модели и времени вычислений. Приведены результаты численных расчетов, демонстрирующие работу алгоритма. Решение обратной задачи за приемлемое время определяется с заданной точностью, что позволяет составить план мероприятий по выявлению и лечению больных в случае эпидемии и разработать план индивидуального лечения в случае конкретного больного.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект номер 15-01-09230).

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

STABILITY OF SOLUTIONS OF THE SYSTEMS LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO VARIABLES IN UNLIMITED AREAS

З.А.Каденова

Kadenova71@mail.ru

В настоящей статье доказана теорема о оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

In the present article the theorem about an assessment of stability of solutions of systems of the linear integral equations of the first t with two independent variables in unlimited areas is proved.

Рассмотрим систему уравнений

$$Ku \equiv \int_a^b K(t, x, y)u(t, y)dy + \int_{t_0}^t H(t, x, s)u(s, x)dx + \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(t, x, s, y)u(s, y)dy = f(t, x), (t, x) \in G, \quad G = \{(t, x) \in R^2, \quad t_0 \leq t < \infty, \quad a \leq x \leq b\}, \quad (1)$$

где

$$K(t, x, y) = \begin{cases} A(t, x, y), & t_0 \leq t < \infty, \quad a \leq y \leq x \leq b; \\ B(t, x, y), & t_0 \leq t < \infty, \quad a \leq x \leq y \leq b, \end{cases} \quad (2)$$

$A(t, x, y), B(t, x, y), H(t, x, s), C(t, x, s, y)$ - известные $n \times n$ -мерные матричные функции, определенные соответственно в области

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(t, x, y): t_0 \leq t < \infty, \quad a \leq y \leq x \leq b\}, \\ G_2 &= \{(t, x, y): t_0 \leq t < \infty, \quad a \leq x \leq y \leq b\}, \\ G_3 &= \{(t, x, s): t_0 \leq s \leq t < \infty, \quad a \leq x \leq b\}, \quad G^2 = G \times G, \end{aligned}$$

$f(t, x)$ -известная, $u(t, x)$ -неизвестная n -мерные вектор-функции.

Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1,2], где для решения построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. Рассмотрена единственность и устойчивость решений для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода с двумя независимыми переменными рассмотрена в [3]. В данной работе получены оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях в классе $L_2(G)$.

Литература

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ШАГАЮЩИХ РОБОТОВ*

MULTICRITERIA OPTIMIZATION OF THE MOTION LAWS OF WALKING ROBOTS OPTIMIZATION

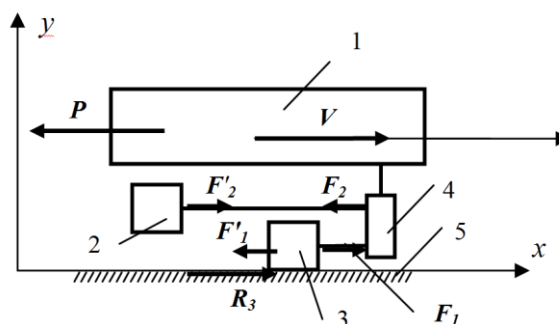
Калинин Я.В., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г.

*Волгоградский государственный технический университет,
Россия, Волгоград
jkv83@mail.ru*

Ставится задача определения оптимальных режимов поступательного движения шагающего робота, например шагающим роботом "Ортоног" (рис. 1 а), центр масс которого движется прямолинейно, и поступательного, вдоль горизонтальной оси, перемещения опоры переносимого механизма шагания, рассматриваемых как твёрдые тела в установившемся режиме движения.



а)



б)

Рис. 1

Под оптимальным в данном случае понимается режим движения, обеспечивающий минимум функционала, учитывающего как комфортабельность движения, так и тепловые потери в приводных двигателях, а также длину шага, характеризующую габариты механизма шагания и тягово-сцепные свойства движителя [1]. Длина шага в этом случае выступает как конструктивный показатель и учёт этого показателя служит примером совмещения эксплуатационных и конструктивных показателей в одной экстремальной задаче.

Полученные в исследовании результаты могут применяться при управлении движением мобильных роботов как на этапе построения программных движений, в частности использовались при супервизорном управлении шагающим роботом "Ортоног", так и на этапе проектирования новых роботов на этапе выбора наиболее разумного сочетания их конструктивных и эксплуатационных показателей.

Расчётная схема рассматриваемой механической системы, соответствующей, например, шагающему роботу "Ортоног" приведена на рис. 1 б, где 1 — корпус; 2 — эквивалентный механизм шагания в фазе переноса; 3 — эквивалентный механизм шагания в фазе опоры; 4 — привод курсового движения; 5 — грунт [2]. Рассматривается походка, при которой всегда обеспечивается статическая устойчивость движения, например, при применении двоянных движителей [3].

Имеют место граничные условия, накладываемые на дифференциальные уравнения движения системы с двумя степенями свободы, описывающие движение корпуса робота и переносимого механизма шагания:

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00655-А)

Подынтегральная функция качества Φ формируется на основе аддитивного учёта частных показателей качества (например, в конкретной задаче виброн нагруженности корпуса робота и переносимого механизма шагания, энергетики движения и длины шага механизма шагания) с различными весовыми коэффициентами для каждого из них: соответственно k_1, k_2 - весовые коэффициенты среднеквадратичных ускорений центра масс корпуса и переносимой опоры механизма шагания, k_3 - весовой коэффициент тепловых потерь энергии в двигателе, k_4 - весовой коэффициент длины шага; с учётом изопериметрического условия и записывается в форме, обеспечивающей возможность суммирования показателей качества, что удобно в связи с различной физической размерностью частных показателей качества:

$$\Phi = k_1 \frac{\dot{V}_1^2}{g^2 \tau} + k_2 \frac{\dot{V}_2^2}{g^2 \tau} + k_3 \frac{(F_1^2 + F_2^2)}{M^2 g^2 \tau} + k_4 \frac{V_1}{L} + \frac{\mu(V_2 - 2V_1)}{L},$$

где g - ускорение свободного падения, M - масса корпуса шагающего робота, L - базовый характерный размер, μ - неопределённый множитель Лагранжа.

Таким образом, проведённый анализ показывает, что возможен совместный учёт конструктивных и эксплуатационных показателей шагающего робота. Сформирован функционал качества, на основе которого производится определение оптимальных программных движений и частных показателей качества.

Литература

1. Чернышев В.В. Полевые исследования шагающих машин. / Чернышев В.В. // Тракторы и сельхозмашины. — 2004. — №4. — С.20.
2. Брискин, Е.С. Об энергетически эффективных алгоритмах движения шагающих машин с цикловыми движителями / Е.С. Брискин, Я.В. Калинин // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 2. — С. 170-176.
3. Концепция проектирования, динамика и управление движением шагающих машин. Ч.1. Концепция проектирования / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г., Фролова Н.Е. // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2005. — №5. — С. 22-27.

УДК 519.248

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ APPLYING SERVICE SOFTWARE FOR MODELLING COMPLEX SOCIO-ECONOMIC SYSTEMS

Калинин Я.В.

*Волгоградский государственный технический университет,
Россия, Волгоград
jkv83@mail.ru*

Рассматривается транспортная инфраструктура как система. Обсуждаются пути повышения эффективности функционирования транспортной инфраструктуры.

Модернизация российской экономики - крайне важная задача, которая озвучивается уже на всех уровнях: от муниципалитетов до руководства страны. При этом стратегии модернизации могут осуществляться на разных уровнях глубины - от региона до федеральных округов и страны в целом. Также и на каждом уровне глубины могут решаться различные задачи, что достигается различными подходами, в первую очередь системным.

Применение системного подхода позволяет выявлять комплексы проблем, препятствующих развитию системы, находить эффективные решения, и оптимальные по какому-либо критерию пути претворения решений в жизнь.

Одной из таких насущных проблем модернизации является целенаправленное совершенствование инфраструктуры, которая является базисом, средством и, в какой-то мере, целью модернизации. Без модернизации инфраструктуры модернизация экономики в целом в принципе невозможна. Одной из главных инфраструктурных проблем современной российской экономики является несоответствие транспортной инфраструктуры потребностям экономики, в особенности при осуществлении модернизационных проектов, так как они всегда связаны со значительными транспортными перевозками: как пассажирскими, так и грузовыми и специальными. Это можно наблюдать при реализации всех глобальных проектов: строительства магистралей, олимпийской стройки в Сочи, начинающейся подготовке городов, в которых будут происходить матчи Чемпионата мира по футболу 2018 года.

Сама по себе проблема транспортной инфраструктуры является сложной и многогранной, так как транспортная система страны и даже конкретного региона состоит из многих разнородных элементов, интегрированных в единое целое. Поэтому и решение проблем транспортных систем и обеспечивающих их инфраструктур могут решаться по-разному, в зависимости от конкретики каждой конкретной системы, региона и набора проблем.

Среди множества проблем инфраструктуры системы автомобильного транспорта (как основополагающей для модернизации регионов) в первую очередь могут быть выделены проблемы: строительства магистралей, повышения связности региона, проблема автомобильных пробок в крупных городах, неорганизованные парковки, рост количества ДТП, растущие проблемы с обслуживанием, ремонтом и утилизацией непрерывно увеличивающейся массы автомобилей. Все эти проблемы задают очень широкий спектр возможных исследований, однако наиболее важными и перспективными представляются проблемы строительства магистралей и повышения связности транспортной системы, а также решения проблемы автомобильных пробок и организации рационального паркования автомобильного транспорта в крупных городах. Исследованию этих проблем посвящено достаточно много работ, например [1].

Практически все эти задачи могут быть эффективно решены с помощью методов и подходов системного анализа [2]. Также рационально применение ЭВМ и различных видов моделирования для решения данных задач. В настоящее время моделирование составляет неотъемлемую часть современной фундаментальной и прикладной науки. Поэтому при решении данных проблем представляется целесообразным использовать пакеты прикладных программ для математических и научных расчетов, ориентированных на широкие круги пользователей, например, среду AnyLogic [3].

Применение таких высокоэффективных методов и средств позволяет решать многовариантные оптимизационные задачи и выбирать из всех возможных решений оптимальные (по крайней мере локально) по каким-либо наперед заданным критериям. В среде AnyLogic 6, а также модуле 1С: Логистика успешно решаются задачи повышения ёмкости дорожной сети города, рациональной организации движения на перекрёстках и расчёт возможных вариантов развязок, среди которых можно выбрать наилучший вариант, в том числе и устойчивый на воздействие различных видов дорожных ситуаций как связанных с увеличением транспортных потоков, так и экстремальных происшествий и состояний транспортной системы. Так же могут быть эффективно решены задачи организации парковок в центре города и на его окраинах, что позволяет формулировать выводы для целенаправленного формирования политики в плане организации паркингов, гаражных кооперативов, перехватывающих парковок и т.п.

Литература

1. Артемова С.Г. Разработка полицентрической системы организации паркингов автомобилей в городах / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук, Волгоград, 2014, 17 с.
2. Алесинская Т.В. Основы логистики. Общие вопросы логистического управления Учебное пособие. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005, 121 с.
3. AnyLogic 6. Лабораторный практикум/ А.Е.Осоргин. – Самара: ПГК, 2011, 100 с.

УДК 517.958

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

AN INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION WITH THE POTENTIAL BOUNDARY CONDITION

Кальменов Т.Ш.*, Артепова Г.Д.**

* *Институт математики и математического моделирования,
Казахстан, Алматы*
kalmenov.t@mail.ru

** *Институт математики и математического моделирования,
Казахстан, Алматы*
arepovag@mail.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^1$. Пусть $u(x)$ – ньютонов (объемный) потенциал

$$u(x) = \varepsilon_n * f = \int_{\Omega} \varepsilon_n(x-y) * f(y) dy, \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_2(x-y) = \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|, \quad \varepsilon_n(x-y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x-y|^{2-n}, \quad n \geq 3. \quad (2)$$

фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$-\Delta \varepsilon_n(x-y) = \delta(x-y) \quad (3)$$

В работе [1] доказана.

Теорема 1. Для любой $f \in L_2(\Omega)$ ньютонов потенциал (объемный потенциал) удовлетворяет граничному условию

$$\frac{1}{2} u(x) = - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y, \quad x \in \partial\Omega \quad (4)$$

Обратно, если $u \in W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$-\Delta u = f, \quad n \geq 2,$$

и граничному условию (4), то он задается Ньютоновым потенциалом.

Следует отметить, что в работе [1] в шаре найдены система ортонормированных собственных функций и собственных значений объемного потенциала.

В цилиндрической области $D = \Omega \times [0, T]$ рассмотрим смешанную задачу N-K: Найти в D решение уравнения теплопроводности

$$\diamond u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) u = f, \quad (5)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

и боковому потенциальному условию, т.е. при каждом фиксированном $T \in [0, T]$ условию

$$\frac{1}{2}u(x, t) = - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y) \frac{\partial u(y, t)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y} u(y, t) dS_y, \quad x \in \partial\Omega \quad (7)$$

Имеет место

Теорема 2. Для любой $f \in L_2(D)$ существует единственное решение задачи N-K (5)-(7) $u \in W_2^{1,2}(D)$ представимо в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \exp^{-\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau e_k(x). \quad (8)$$

Здесь $f_k(\tau) = \int_{\Omega} f(x, \tau) e_k(x) dx$ и $\{e_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система функций Ньютонового потенциала, т.е. спектральной задачи Ньютонового потенциала

$$-\Delta e_k = \lambda_k e_k, \quad n \geq 2, \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} e_k(x) = - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y) \frac{\partial e_k(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y} e_k(y) dS_y, \quad x \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Литература

1. Kalmenov T. Sh., Suragan D. A boundary condition and Spectral Problems for the Newton Potentials // Operator Theory: Advances and Applications, 2011, Vol. 216, P. 187-210.
2. Kalmenov T.Sh., Tokmagambetov N.E. On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain // Siberian Mathematical Journal. - 2013. - Vol. 54, No 6. - P. 1024-1029.

УДК 519.87:66.096.5

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВИБРОКИПАЮЩЕГО СЛОЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА OPENFOAM*

INVESTIGATION OF VIBROFLUIDIZED BED MATHEMATICAL MODEL USING OPENFOAM*

Каменецкий Е.С.*, Орлова Н.С.**

* Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
Россия, Владикавказ
esk@smath.ru

** Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
Россия, Владикавказ
norlova.umi.vnc@gmail.com

В данной работе представлены результаты моделирования динамики виброкипящего слоя с использованием свободно распространяемого пакета для численного моделирования задач механики сплошных сред OpenFOAM (англ. Open Source Field Operation And Manipulation CFD ToolBox) при поддержке программы "Университетский кластер" с удаленным доступом к консоли на управляющем узле вычислительного кластера BL2×220

* Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (проект «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур»)

web-лаборатории UniHUB [1]. Для описания процесса виброкипения был доработан решатель twoPhaseEulerFoam, который использовался для моделирования динамики кипящего гранулированного слоя [2]. В решателе twoPhaseEulerFoam реализована двухжидкостная модель кипящего (ожиженного) слоя на основе континуального подхода (подхода Эйлера). В решателе twoPhaseEulerFoam обе фазы считаются несжимаемыми. Более подробное описание модели, а также условий вычислений представлено в работе [2].

Решатель twoPhaseEulerFoam изначально использовался для моделирования динамики кипящего слоя (когда через слой гранулированных частиц пропускают газовый поток), поэтому для газовой фазы реализована полуэмпирическая двухпараметрическая модель турбулентности $k - \epsilon$ [2]. Так как решатель используется для описания динамики виброкипящего слоя (когда слой частиц под воздействием внешних вибраций переходит в состояние виброкипения), целесообразно исследовать влияние динамической вязкости газовой фазы на поведение виброкипящего слоя. Рассматривается два случая: I - динамическая вязкость рассчитывается с использованием модели турбулентности $k - \epsilon$ на каждом временном слое; II - динамическая вязкость постоянна и равна значению $1,5 \times 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

На рис. 1 представлены результаты сравнения экспериментальных данных и численных расчетов степени расширения виброкипящего слоя (отношения максимальной высоты виброкипящего слоя к высоте засыпки $H_{\max}/H$) с толщиной засыпки $H = 30 \text{ мм}$ в зависимости от частоты колебаний полки. Приведены экспериментальные значения максимальной высоты виброкипящего слоя на гребне волн (кривые 2) и у подошвы волн (кривые 1), которые сравниваются с соответствующими расчетными кривыми (3-5). Кривая 3 - численные расчеты степени расширения у подошвы волн для двух случаев I и II, кривая 4 - численные расчеты степени расширения на гребне волн для случая I, кривая 5 - численные расчеты степени расширения на гребне волн для случая II.

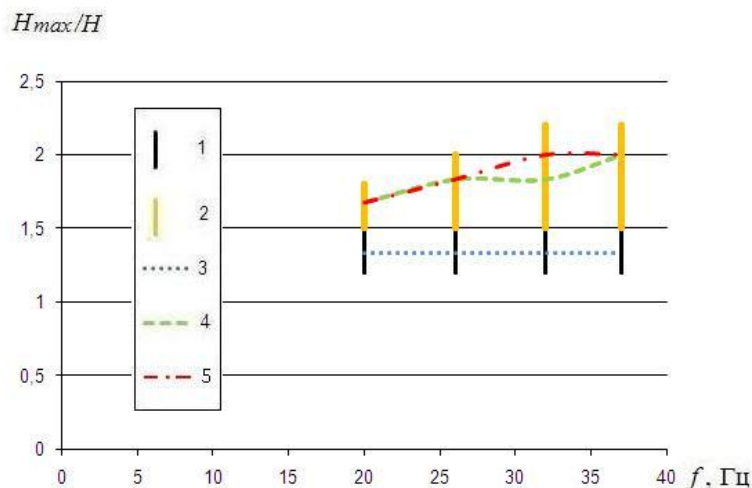


Рис. 1. Зависимость отношения максимальной высоты виброкипящего слоя к высоте засыпки от частоты колебаний полки.

Из рис. 1 видно, что численные расчеты, полученные в обоих случаях, не значительно отличаются друг от друга. В обоих случаях расчетные кривые удовлетворительно описывают экспериментальные данные. Из проведенного исследования можно сделать вывод о том, что использование модели турбулентности незначительно влияет на полученные расчеты степени расширения виброкипящего слоя. Для моделирования процесса виброкипения можно не использовать модель турбулентности. В результате этого время, затрачиваемое на вычисления, сократится.

Литература

1. Консоль на управляющий узел кластера (2012), "BL2x220 Cluster Console". URL: <https://unihub.ru/resources/bl2x220cc> (дата обращения: 10.06.2014).

2. Орлова Н.С., Качалкина Я.Н. Исследование режимов виброкипящего гранулированного слоя с использованием пакета OpenFOAM // Труды ИСП РАН. Москва: Институт системного программирования РАН, 2014. - №6. – с. 143-154.

УДК 517.956.227

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ DIRICHLET'S PROBLEM FOR THE THREE-DIMENSIONAL ELLIPTICAL EQUATION WITH TWO SINGULAR COEFFICIENTS

Каримов К.Т.*

* Ферганский государственный университет, Узбекистан, Фергана
karimovk80@mail.ru

В трехмерной области Ω , ограниченной цилиндрической поверхностью

$$S_0 = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0, 0 < z < \pi\},$$

прямоугольниками

$$S_1 = \{(x, y, z): 0 < x < 1, y = 0, 0 < z < \pi\}, S_2 = \{(x, y, z): x = 0, 0 < y < 1, 0 < z < \pi\},$$

и двумя четвертями круга

$$S_3 = \{(x, y, z): z = 0, x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}, S_4 = \{(x, y, z): z = \pi, x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$$

рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$H_{\alpha, \beta} W \equiv W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} + \frac{2\alpha}{x} W_x + \frac{2\beta}{y} W_y = 0, \quad (1)$$

где $W = W(x, y, z)$ - неизвестная функция, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причем $0 < \alpha, \beta < 1/2$.

В работе [1], [2] для трехмерного уравнения смешанного типа (без сингулярных коэффициентов) в цилиндрической области методом спектрального анализа исследованы задачи Трикоми и Трикоми-Неймана соответственно. В работах [3], [4] и [5] для трехмерных уравнений эллиптического типа с разными сингулярными коэффициентами рассмотрены задачи на собственные значения в области, состоящей из различных частей шара. В работе [6], [7] для уравнения (1) методом функции Грина исследованы задачи Дирихле и Дирихле-Неймана в четверти шара. Спектральные свойства решений многих эллиптических задач для уравнения (1) в цилиндрической и шаровой областях еще не исследованы. Поэтому в данной работе для уравнения (1) в цилиндрической области поставлена задача Дирихле и исследованы спектральные свойства решений поставленной задачи.

Задача D. Найти функцию $W(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$H_{\alpha, \beta} W(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega;$$

$$W(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{S}_0; \quad (2)$$

$$W(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{S}_j, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (3)$$

где f – заданная достаточно гладкая функция, причем $f|_{\partial S_0} = 0$.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема. Если функция $\tilde{f}(\varphi, z) = f(\sin \varphi, \cos \varphi, z)$ по переменной φ принадлежит классу $C^1[0; \pi/2]$, а по переменной z принадлежит классу $C^\delta[0; \pi]$, $\delta \in (0; 1]$ и выполняются

условия $\tilde{f}(\varphi, 0) = \tilde{f}(\varphi, \pi) = 0$, $\tilde{f}(0, z) = \tilde{f}(\pi/2, z) = 0$, то существует решение задачи Дирихле, которое в области Ω определяется формулой

$$W(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk} \sin(nz) \frac{I_{\omega_k}(nr)}{I_{\omega_k}(n)} r^{-\alpha-\beta} \times \\ \times (\sin \varphi)^{1-2\beta} F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega_k}{2}, \frac{1+\alpha-\beta-\omega_k}{2}; \frac{3}{2}-\beta; \sin^2 \varphi\right),$$

где $I_\nu(t)$ – модифицированные функции Бесселя порядка ν первого рода, $F(\cdot)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, $\omega_k = 2k - (\alpha + \beta)$, $k \in N$,

$$f_{nk} = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi^2 l_1} \int_0^\pi h_k^c(\theta) w(\theta) d\theta, \quad \{h_k(\theta)\} - \text{биортогонально сопряженная система к системе}$$

косинусов $\{\cos[(k-\beta)\arccos y]\}$, $w(\theta) = \sin \theta \int_0^\theta \Psi'_n(t/2) (\cos t - \cos \theta)^{\beta-1} dt$,

$$\Psi_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}(\varphi, z) \sin(nz) dz, \quad C_l^n = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}.$$

Литература

1. Сабитов К.Б., Карамова А.А.// Известия РАН. Серия матем. -2001. №4. –С.133-150.
2. Сабитов К.Б., Хасанова С.Л.// Известия ВУЗов. 2003. №6(493). –С. 64-76.
3. Уринов А.К., Каримов К.Т.// Научный вестник ФерГУ. Фергана. 2014. №1. –С. 10-14.
4. Уринов А.К., Каримов К.Т.// Матер. конф. Ташкент. 23-25 октября 2014 г. –С165-166.
5. Каримов К.Т.// Матер. симпозиума. Нальчик, 3-7 декабря 2014 г. –С. 87-89.
6. Nieto J. J., Karimov E. T.// Computers and Mathem. with Applications 62 (2011) 214–224.
7. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T.// AMC 219 (2012) 3469–3476.

УДК 517.954

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА-ЛЯВА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ANALOG OF GOURSAT PROBLEM FOR BOUSSINESQ - LOVE EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Каримов Ш.Т.*

* Ферганский государственный университет, Узбекистан, Фергана,
shkarimov09@rambler.ru

В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики неоднородных, и в частности, стратифицированных жидкостей, которые приводят к начально-краевым и краевым задачам для неклассических уравнений математической физики. Термин «неклассические уравнения математической физики» в своих работах применил В.Н. Врагов [1] и в настоящее время такие уравнения в различных аспектах активно изучаются его последователями. К таким неклассическим уравнениям относится уравнение Соболевского типа.

Уравнения Соболевского типа, иначе называемые уравнениями, неразрешенными относительно старшей производной, после известной работы Соболева [2] является объектом исследования для многих авторов. Обзор этих работ можно найти в монографиях [3]-[5].

Важным классом уравнений Соболевского типа является уравнение Буссинеска-Лява четвертого порядка:

$$\Delta_x u_{tt}(x, t) - u_{tt}(x, t) + \Delta_x u(x, t) = 0, \quad (1)$$

которое описывает процесс нестационарного движения вязкой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска, где Δ_x - многомерный оператор Лапласа.

Исследованию задачи Коши, смешанных и обратных задач для уравнений Буссинеска-Лява посвящены работы С.А.Габова, А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова, А.Б.Альшина, Ю.Д. Плетнера, А.И.Кожанова и других.

Данная работа посвящена изучению вопросов разрешимости в классическом смысле аналога краевой задачи Гурса для уравнения

$$L_{\alpha}^{\lambda, \mu}(u) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \mu u = f(x, t), \quad (2)$$

где $\alpha, \lambda, \mu \in R$, а $f(x, t)$ - заданная функция.

Параметр α , входящее в уравнение (2), определяет порядок сингулярности уравнения и задач с ним связанных. При $\alpha = 0$, $\mu = 0$ уравнение (2) переходит в одномерное уравнение Буссинеска-Лява (1), а при $\alpha = (n-1)/2$, $\mu = 0$ мы получим сферически симметричный случай уравнения (1), причем в последнем случае переменная x выполняет роль переменной $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ в сферической системе координат.

Известно, что вырождающиеся и сингулярные уравнения второго порядка обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность классических задач. На постановку задачи существенно влияют младшие коэффициенты. Такие вопросы для уравнений высокого порядка с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

Уравнение (2) по классификации работы [6], принадлежит гиперболическому типу. Прямые $x = const$, $t = const$ являются действительными двукратными характеристиками.

Задача Г. В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < h\}$ требуется найти функцию $u(x, t) \in C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2) при $0 < \alpha < 1/2$ и краевым условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \psi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l; \\ u(0, t) &= \varphi_1(t), \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} u_x(x, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq h, \end{aligned}$$

где $\psi_k(x)$, $\varphi_k(t)$, ($k=1, 2$) - заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\psi_2(0) = \varphi_1'(0)$, $\varphi_2(0) = 0$.

Данная задача ранее не исследована.

Исследованием различных задач для одномерного общего линейного уравнения типа (2) со старшей производной u_{xxtt} и с гладкими коэффициентами занимались А.П. Солдатов, М.Х.Шхануков, В.И.Жегалов, А.Н.Миронов, Е.А.Уткина, А.Магер и другие.

Используя обобщенный дробный оператор Эрдейи-Кобера [7] и метод Римана [8], нами получена явная формула решения поставленной задачи. В работе построена функция Римана оператора $L_{\alpha}^{\lambda, \mu}(u)$, которая выражается через гипергеометрическую функцию Кампе де Ферье. При $\alpha = 0$, $\mu = 0$ из этой функции получим функцию Римана одномерного уравнения Буссинеска-Лява (1).

Пользуясь полученным решением задачи Гурса и функцией Римана, можно исследовать и другие начальные, краевые и нелокальные задачи для уравнения (2).

Литература.

1. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: НГУ, 1983.
2. Соболев С.Л. Об одной краевой задаче математической физики. Изв. АН СССР, Сер. Матем. – 1954. – т. 18, №2, – с. 3-50.
3. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. – Utrecht: VSP 1999.
4. Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. – Новосибирск: Наука, 2000.
5. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.Ю., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. – М.: Физматлит, 2007.
6. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: ФАН, 2000, – 144 с.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. 702с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 1981. – 512 с.

УДК 517.984.5

О СРЕДНИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ИЗ КЛАССА ЛИУВИЛЛЯ ON MEANS OF SPECTRAL EXPANSIONS OF DISTRIBUTIONS IN LIOUVILLE'S CLASSES

Касимов Ш.Г.

*Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
shokiraka@mail.ru*

Пусть $A \in OPS^m(\Omega)$ – эллиптический положительный самосопряженный оператор со скалярным однородным символом степени $m \geq 1$ и с постоянными коэффициентами, где Ω – произвольная N -мерная ограниченная область с гладкой границей класса C^∞ , либо $\Omega = R^N$.

Определим оператор средних спектральных разложений

$$p(tA) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(z) \exp(iztA) f(x) dz, \quad (1)$$

где $\hat{p}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) \exp(-i\lambda z) d\lambda$, причем оператор $\exp(iztA)$ понимается как в спектральной теореме Дж. Фон Неймана, т.е.

$$\exp(iztA) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izt\lambda) dE_\lambda,$$

E_λ – разложение единицы, порожаемое оператором A . В частности, если положить

$$p(z) = (1 - |z|)_+^s = \begin{cases} (1 - |z|)^s & \text{при } |z| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |z| > 1, \end{cases}$$

$t = \frac{1}{\lambda}$, то получим среднее Рисса $E_\lambda^s f(x) = p(\frac{1}{\lambda} A) f(x)$ спектрального разложения $E_\lambda f(x)$ порядка $s \geq 0$.

Средних спектральных разложений распределений $f \in E'(\Omega)$ назовем распределение $p(tA) f \in D'(\Omega)$, действующее по правилу

$$\langle p(tA) f, \varphi \rangle = \langle f, p(tA) \varphi \rangle$$

для любой функции $\varphi \in D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.

Обозначим через $\overset{0}{L}_p^\alpha(\Omega)$ класс функций, принадлежащих пространству $L_p^\alpha(\Omega)$ и имеющих компактный в Ω носитель. Если α – вещественное число, $1 < p < \infty$, то

$$L_p^\alpha(R^N) = \left\{ f : f \in J'(R^N), \|f\|_{L_p^\alpha(R^N)} = \left\| F^{-1} (1 + |\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}} Ff \right\|_{L_p(R^N)} < \infty \right\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть функция $p(\lambda)$, определенная в $\bar{R}_+ = [0, \infty)$, удовлетворяет условиям

- 1) $\int_0^{+\infty} |p(\lambda)| \lambda^{\frac{N-\alpha}{p}-1} d\lambda < \infty$ и $p(0) = 1$;
- 2) $p(\lambda) \in C^l(\bar{R}_+)$ и $|p^{(j)}(\lambda)| \leq C_j (1 + \lambda)^{-j}$, $0, 1, 2, \dots, l$ где l – неотрицательное число;
- 3) $l > \frac{N}{2} + \alpha$, $\alpha = \frac{N}{p}$, $p \geq 2$;

Тогда для любого распределения $f \in E'(\Omega)$ из класса $L_q^{-\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ равномерно выполняется равенство $\lim_{t \rightarrow +0} p(tA)u(x) = u(x)$ при любом компакте $M \subset\subset \Omega$.

Теорема 2. Пусть функция $p(\lambda)$, определенная в $\bar{R}_+ = [0, \infty)$, удовлетворяет условиям $p(0) = 1$ и $p(\lambda) \in L_\infty(\bar{R}_+) \cap C([0, \tau))$, $\tau > 0$. Предположим, что $\alpha > \frac{N}{p}$, $1 \leq p \leq 2$. Тогда для любого распределения $f \in E'(\Omega)$ из класса $L_q^{-\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ равномерно выполняется равенство $\lim_{t \rightarrow +0} p(tA)u(x) = u(x)$ при любом компакте $M \subset\subset \Omega$.

Литература

1. Алимов Ш.А., О спектральных разложениях распределений // Доклады Академии Наук РАН. 1993г. Т331, №6. С. 661-662.
2. Касимов Ш.Г. Спектральная теория псевдодифференциальных операторов. Германия. Lap Lambert Academic Publishing, 2014г. с.188.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФЕКТОВ GEOMETRIC THEORY OF DEFECTS

Катанаев М.О.

*Математический институт им. В.А. Стеклова,
Россия, Москва
katanaev@mi.ras.ru*

Дано описание дефектов -- дислокаций и дисклинаций -- в рамках геометрии Римана--Картана. Тензоры кривизны и кручения интерпретируются соответственно как поверхностные плотности векторов Франка и Бюргерса. Предложено новое выражение для свободной энергии, описывающее статическое распределение дефектов [1]. Уравнения нелинейной теории упругости использованы для фиксирования системы координат. Лоренцева калибровка приводит к уравнениям главного кирального $SO(3)$ -поля [2]. При отсутствии дефектов геометрическая модель сводится к теории упругости для вектора смещений и модели главного кирального $SO(3)$ -поля для спиновой структуры. На примере клиновой дислокации показано, что теория упругости воспроизводит только линейное приближение геометрической теории дефектов.

Литература.

- [1] М.О. Катанаев, И.В. Волович. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity, *Ann. Phys.*, 1992, 216, 1-28.
[2] М.О. Катанаев. Геометрическая теория дефектов, *УФН*, 2005, 175, 705-733.

ОБ ОДНОМ ИЗ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ONE OF THE METHODS OF INVESTIGATION THE OBLIQUE DERIVATIVE PROBLEM

Кибирев В. В.

*Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ
kafedra_pm@bsu.ru*

Один из подходов к исследованию задачи о наклонной производной [3], который будет здесь рассмотрен, еще более тесно связан с методом, предложенным в [1]. Пусть в граничном условии

$$b_0 u_x + b_1 u_y + b_2 u_z = f, \quad (1)$$

коэффициенты b_0, b_1, b_2 являются следами на единичной сфере полиномов $p_0(x, y, z), p_1(x, y, z), p_2(x, y, z)$ степеней не выше N , тогда легко проверяется, что функция

$$\omega = p_0 u_x + p_1 u_y + p_2 u_z$$

удовлетворяет уравнению $\Delta^{N+1} \omega = 0$, если u - гармоническая функция. Легко также проверяется, что

$$L_k(u) = \Delta^{k-1}(p_0 u_x + p_1 u_y + p_2 u_z), \quad k = 1, \dots, N,$$

линейный дифференциальный оператор от u порядка k , если u гармонична.

Задача о наклонной производной с граничным условием (1) для регулярных в области D гармонических функций теперь эквивалентна следующей задаче:

требуется найти все регулярные в области D гармонические функции u и гармоническую функцию ω , регулярные в D и удовлетворяющие на границе Γ области D условию $\omega|_{\Gamma} = f$ такие, что выполнены равенства

$$L_k(u) = \Delta^{k-1}\omega, \quad k = 1, \dots, N+1 \quad (2)$$

Если область D является единичным шаром, то для ω имеет место следующее представление [1]:

$$\omega = g_0 + (1-x^2-y^2-z^2)g_1 + \dots + (1-x^2-y^2-z^2)g_N, \quad (3)$$

где $g_0, g_1, \dots, g_N$ — регулярные в единичном шаре гармонические функции, причем $g_{0/S} = f$, где S — единичная сфера.

Таким образом, задача о наклонной производной для регулярных в единичном шаре гармонических функций сводится к исследованию разрешимости дифференциального уравнения (3), т. е. задача о наклонной производной с полиномиальными коэффициентами редуцируется эквивалентным образом к некоторой задаче аналитической теории уравнений с частными производными.

Заметим, что если граничное условие задачи о наклонной производной для регулярных в единичном шаре гармонических функций имеет вид

$$p(z)(xu_x + yu_y + zu_z) + q(z)u_z = f,$$

где p и q — заданные полиномы, то задача о наклонной производной для регулярных в единичном шаре гармонических функций в данном случае сводится к задаче аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений [2].

Литература

1. Бицадзе А. В. Задача наклонной производной с полиномиальными коэффициентами, — «Докл. АН СССР», 1964, т. 157, № 6, с. 1273-1276.
2. Кибирев В. В. Об одном из методов исследования задачи о наклонной производной // Вестник БГУ. - серия 13: математика и информатика – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2005, с. 72-74.
3. Янушаускас А. Применение вырождающихся уравнений к изучению задачи о наклонной производной. — «Дифференц. уравнения», 1969, т. 5, № 1, с. 81—90.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

ON A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MODEL EQUATION OF MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE

Киржинов Р.А.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Институт прикладной математики и автоматизации», Россия, Нальчик
kirzhinov.r@mail.ru

Пусть $A = (0, \beta)$, $B = (2r, \beta)$, $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (r, 0)$, $A_3 = (2r, 0)$, $A_4 = (0, -r)$, $A_5 = (r, -r)$, $A_6 = (2r, -r)$, $C_1 = (r/2, -r/2)$, $C_2 = (3r/2, -r/2)$, где $\beta > 0$, $r > 0$ и пусть

$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 2r, -r < y < \beta\}$ прямоугольная область евклидовой плоскости точек (x, y) с вершинами в точках A, B, A_6, A_4 . Обозначим через $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$.

В заданной области Ω рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^{1+H(-y)} u}{\partial y^{1+H(-y)}} = 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, y)$ - неизвестная функция, $H(y)$ - функция Хевисайда.

Положим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2r, y = 0\}, \quad \sigma_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2r, y = -r\}, \\ \sigma_3 &= \{(x, y) : x = 0, -r \leq y \leq 0\}, \quad \sigma_4 = \{(x, y) : x = r, -r \leq y \leq 0\}, \\ \sigma_5 &= \{(x, y) : x = 2r, -r \leq y \leq 0\}. \end{aligned}$$

Характеристики $A_1 A_5 : x + y = 0$, $A_4 A_2 : x - y = r$ и $A_2 A_6 : x + y = r$, $A_5 A_3 : x - y = 2r$ разбивают область Ω^- на восемь частей: $\Omega_{11}^- = A_1 A_2 C_1$, $\Omega_{12}^- = A_2 A_5 C_1$, $\Omega_{13}^- = A_5 A_4 C_1$, $\Omega_{14}^- = A_4 A_1 C_1$ и $\Omega_{21}^- = A_2 A_3 C_2$, $\Omega_{22}^- = A_3 A_6 C_2$, $\Omega_{23}^- = A_6 A_5 C_2$ и $\Omega_{24}^- = A_5 A_2 C_2$, которые являются характеристическими треугольниками.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовём функцию $u(x, y)$ из класса $u_{xx} \in C(\Omega^+)$, $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega^+ \cup \sigma_1 \cup \Omega_{11}^- \cup \Omega_{21}^-) \cap C^1(\sigma_2 \cup \Omega_{13}^- \cup \Omega_{23}^-) \cap C^1(\sigma_3 \cup \Omega_{14}^-) \cap C^1(\sigma_4 \cup \Omega_{12}^- \cup \Omega_{24}^-) \cap C^1(\sigma_5 \cup \Omega_{22}^-)$, $u_{xx}, u_{yy} \in C(\Omega^- \setminus (A_1 A_5 \cup A_4 A_2) \cap (A_2 A_6 \cup A_5 A_3))$.

Задача. Найти регулярное всюду в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(0, y) = u(2r, y), \quad u_x(0, y) = u_x(2r, y), \quad -r \leq y \leq \beta, \quad (2)$$

$$u_y(x, -r) = \lambda u(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 2r, \quad (3)$$

где $\lambda = \text{const} \neq 0$.

Задача А.А. Дезина [1] для уравнения Лаврентьева-Бицадзе ранее исследовалась в работах [2], [3]. Исследуемая в данной работе задача в случае уравнения (1) является аналогом задачи А.А. Дезина [3, с. 174-175], [4].

В работе найдены условия единственности и существования решения задачи (2), (3) для уравнения (1) в области Ω .

Литература

1. Dezin A.A. On the solvable extensions of partial differential operators// Outlines of Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations. 1963. Novosibirsk. P. 65-66.
2. Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1199-1203.
3. Нахушева З.А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. – Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2011. – 196 с.
4. Киржинов Р.А. Аналог задачи А.А. Дезина для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа// Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2014. Т. 16. № 2. С. 41.-46.

КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КАК НОВЫЙ ОБЪЕКТ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

QUASIHYPربولIC EQUATIONS - THE NEW OBJECT OF EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

А.И. Кожанов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, Новосибирск
kozhanov@math.nsc.ru

Квазигиперболическими уравнениями будем называть дифференциальные уравнения вида

$$(-1)^p D_t^{2p} u + \sum_{k=1}^{2p-1} \alpha^k(x, t) D_t^k u + Au = f(x, t),$$

в которых $p \geq 2$, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, A – эллиптический оператор, действующий по пространственным переменным (при $p=1$ данные уравнения являются гиперболическими уравнениями, для случая же $p > 1$ они теряют свойства гиперболичности). Некоторые подходы к изучению разрешимости краевых задач для подобных уравнений предложил В.Н. Врагов [1, 2] (см. также [3]), однако систематические исследования именно квазигиперболических уравнений ранее не проводились. Частично восполнить этот пробел и предполагается в настоящем докладе.

Более точно, в докладе излагаются результаты

- о разрешимости новых краевых задач для квазигиперболических уравнений;
- о разрешимости задач сопряжения (краевых задач для уравнений с разрывными коэффициентами);
- о разрешимости задач на собственные значения;
- о разрешимости новых краевых задач для уравнений составного типа со свойствами квазигиперболичности.

Литература

1. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравн. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098-1105.
2. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // В кн. Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5-13.
3. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка // Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН, 1995.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕСТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ *

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS WITH NON- DEGREE OF NONLINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS *

Кожевникова Л. М.*, Хаджи А. А.**

* Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Россия, Стерлитамак,
kosul@mail.ru

** Салаватский филиал Уфимского государственного нефтяного технического
университета, Россия, Салават,
anna_5955@mail.ru

В произвольной неограниченной области $\Omega \subset R_n$, $n \geq 2$ для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_{\alpha}(x, u, \nabla u))_{x_{\alpha}} - a_0(x, u, \nabla u) = \sum_{\alpha=1}^n (f_{\alpha}(x))_{x_{\alpha}} - f_0(x), \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функции $a_{\alpha}(x, s_0, s)$, $\alpha = 0, \dots, n$, $x \in \Omega$, $s = (s_0, s) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in R_{n+1}$ каратеодориевы и подчиняются следующим условиям. Пусть существуют измеримые неотрицательные $\psi(x), \psi_1(x) \in L_{1,loc}(\overline{\Omega})$ и положительные $\varphi(x), \varphi_1(x) \in L_{\infty,loc}(\overline{\Omega})$ функции такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и $s = (s_0, s)$, $t = (t_0, t) \in R_{n+1}$, $s \neq t$, справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha}(x, s_0, s) s_{\alpha} &\geq \varphi(x) \sum_{\alpha=0}^n B_{\alpha}(s_{\alpha}) - \psi(x); \\ \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_{\alpha}(a_{\alpha}(x, s_0, s)) &\leq \varphi_1(x) \sum_{\alpha=0}^n B_{\alpha}(s_{\alpha}) + \psi_1(x); \\ \sum_{\alpha=0}^n (a_{\alpha}(x, s_0, s) - a_{\alpha}(x, t_0, t)) (s_{\alpha} - t_{\alpha}) &> 0. \end{aligned}$$

Здесь $B_0(z), \dots, B_n(z)$ - элементы специального класса выпуклых функций (N -функции, удовлетворяющие условию Δ_2), а $\bar{B}_0(z), \dots, \bar{B}_n(z)$ - дополнительные к ним, $f_{\alpha} \in L_{\bar{B}_{\alpha},loc}(\overline{\Omega})$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$ (см. [1]).

В работе изучаются условия существования решений задачи (1), (2) в неограниченных областях Ω . Доказана теорема существования в локальных пространствах Соболева-Орлича без дополнительных ограничений на поведение решений и рост входных данных при $|x| \rightarrow \infty$. Существование решений во всем пространстве R_n для изотропных эллиптических уравнений со степенными нелинейностями установлено в [2].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13-01-00081-а)

Литература

1. Рутцкий Я. Б., Красносельский М. А. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Гос. издательство физ.-мат. лит.-ры, 1958.
2. Лаптев Г. Г. Существование решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений в $\mathbf{R}_n$ без условий на бесконечности. Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 4. С. 133–147.

УДК 532.5-1/9; 532.72; 517.955

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗДЕЛЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИФфуЗИОННОЙ КОЛОННЕ*

THE STUDY OF MULTICOMPONENT MIXTURE SEPARATION IN A CYLINDRICAL THERMOGRAVITATIONAL COLUMN*

Козлова С. В.¹, Рыжков И. И.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

[¹sonique@icm.krasn.ru](mailto:sonique@icm.krasn.ru)

В многокомпонентных системах, таких как жидкости и газы, имеют место сложные процессы переноса тепла и массы: конвекция, теплопроводность, основная и перекрестная диффузия, термодиффузия. Явление термодиффузии (эффекта Соре) связано с возникновением потока массы под действием градиента температуры. Этот эффект играет важную роль в ряде природных и технологических процессов [1,2].

Одним из экспериментальных методов [3] измерения коэффициентов термодиффузии является термодиффузионная колонна (вертикальный слой между двумя стенками, поддерживаемыми при различных температурах). Вертикальный конвективный поток и термодиффузионное разделение смеси по горизонтали приводят к вертикальному разделению смеси. Измерение вертикальных градиентов концентраций при обязательно устойчивом стационарном конвективном течении позволяет определить коэффициенты термодиффузии. Теория плоской колонны была разработана в [4]. В работах [5,6] был обнаружен эффект устойчивого вертикального разделения бинарной смеси в цилиндрической колонне для аномального эффекта Соре (тяжелый компонент накапливается сверху, конвекция потенциально неустойчива) при больших разностях температур между стенками.

В данной работе проведено теоретическое исследование процесса разделения многокомпонентной смеси в цилиндрической термодиффузионной колонне (вертикальный слой между коаксиальными цилиндрами с радиусами r_1 и r_2 , $r_2 > r_1$ и высотой $2H$). Смесь движется в вертикальном направлении (за исключением торцов колонны). Предполагается, что плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации компонентов. Полный поток массы компонентов смеси определяется суммой конвективного и диффузионного потоков и представляется выражением

$$\mathbf{J} = \rho_0(C_1\mathbf{u}, \dots, C_{n-1}\mathbf{u})^T - \rho_0(D\nabla C + \mathbf{D}_T\nabla T).$$

Уравнения движения смеси с учетом силы тяжести ($\mathbf{g} = (0, 0, -g)$) имеют вид

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-03293-а).

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_T (T - T_0) + \mathbf{I} \cdot B(\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)), \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \chi \nabla^2 T, \quad \partial_t \mathbf{C} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} = D \nabla^2 \mathbf{C} + \mathbf{D}_T \nabla^2 T, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n-1})^T$ – вектор массовых долей компонентов смеси, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, ∂ – частная производная, D – матрица коэффициентов диффузии размерности $(n-1) \times (n-1)$, $\mathbf{D}_T$ – вектор коэффициентов термодиффузии размерности $n-1$, ν и χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, β_T – коэффициент теплового расширения, B – диагональная матрица коэффициентов концентрационного расширения, $p = P - \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ – отклонение полного давления P от гидростатического, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ – вектор координат, индекс «0» соответствует средним значениям.

Исследование выполнено в цилиндрических координатах с целью учета влияния кривизны и отношения r_1 / r_2 на процесс разделения [4]. На стенках цилиндров ставятся условие прилипания и отсутствия потока массы компонентов, а также задаются различные постоянные температуры. Для замкнутой колонны в стационарном состоянии расход смеси и полный поток массы компонентов через поперечное сечение $z = \text{const}$ равны нулю.

В работе построено точное решение задачи, которое имеет различный вид при различных значениях управляющих параметров. Стационарное решение найдено в виде:

$$\mathbf{u} = (0, 0, w(r)), \quad T = T_0 + T(r), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}(r) + \mathbf{A}z,$$

где $\mathbf{A}$ – вектор постоянных вертикальных градиентов концентраций. На основе полученного решения проанализирован характер разделения смеси в зависимости от отношения радиусов цилиндров. Показано, что при стремлении отношения радиусов к единице результаты сводятся к случаю плоской колонны.

Литература

1. Firoozabadi A. Thermodynamics of hydrocarbon reservoirs. McGraw–Hill Professional, 1999.
2. Рабинович Г.Д. Разделение изотопов и других смесей термодиффузией. М.: Атомиздат, 1981. 144 с.
3. Platten J.K. The Soret effect: A review of recent experimental results. Journal of Applied Mechanics, 2006. V. 73, p. 5–15.
4. Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2013. 200 с.
5. Bou–Ali M.M., Ecnarro O., Madariaga J.A., C.M. Santamaria. Stability of convection in a vertical binary fluid layer with an adverse density gradient. Phys. Rev. E, 1999. V. 59, № 1. P. 1250–1252.
6. Bou–Ali M.M., Ecnarro O., Madariaga J.A., C.M. Santamaria. Measurement of negative Soret coefficients in a vertical fluid layer with an adverse density gradient. Phys. Rev. E, 2000. V. 62, № 1. P. 1420–1423.
7. Ryzhkov I.I. On double diffusive convection with Soret effect in vertical layer between co-axial cylinders, Physica D, V. 215 (2006), P. 191–200

РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

A RADIALLY SYMMETRIC SOLUTION TO AN INVERSE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION

Колтуновский О.А.

*Южно-Сахалинский институт экономики, права и информатики,
Южно-Сахалинск, Россия
koltoleg@rambler.ru*

В полосе $D = \{(\rho, t): 0 < \rho < \infty, 0 < t < T\}$ рассматривается редуцированная задача (после замены переменных)

$$u_{tt} - \psi(\rho)u_{\rho\rho} + q(\rho)u = f(\rho, t), \quad (1)$$

где $\psi(\rho) = 4e^\rho$ при $n = 2$ и $\psi(\rho) = 4 \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \rho \right]^{\frac{2n-2}{n-2}}$ при $n \geq 3$. Неизвестную функцию $u(\rho, t)$ будем искать в виде

$$u(\rho, t) = \tilde{u}(\rho, t) + A\rho,$$

где A – фиксированная постоянная.

Изучается обратная задача: найти функции $u(\rho, t)$ и $q(\rho)$, связанные в области D уравнением (1) и такие, что выполняются условия

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0, t) &= \mu(t), & \tilde{u}_\rho(\infty, t) &= 0, & \text{если} & & 0 < t < T, \\ \tilde{u}(\rho, 0) &= u_0(\rho), & \tilde{u}_t(\rho, 0) &= u_1(\rho), & \tilde{u}(\rho, T) &= \bar{u}_0(\rho), & \text{если} \\ & & & & & & 0 < \rho < \infty. \end{aligned}$$

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ДВУМЕРНОЙ ПОЛУЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

ON SOME IDENTIFICATION PROBLEM FOR SOURCE FUNCTION TO TWO-DIMENSIONAL SEMIEVOLUTIONARY SYSTEM OF EQUATIONS

Копылова В. Г.

*Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск
kopylova.vera@mail.ru*

Изучены задачи идентификации функции источника полуэволюционной системы. Заданная система состоит из двух уравнений, одного из которых является параболическим, а второе – эллиптическим. При исследовании исходной задачи эллиптическое уравнение заменяется параболическим, содержащим малый параметр $\varepsilon > 0$ при производной по времени. Для аппроксимируемой системы исследованы задача Коши и первая краевая задача.

Изучению подобной задачи в одномерном случае посвящена работа [1]. Обратные задачи для эволюционных систем составного типа изучены в работах [2-4].

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_2\}$ рассматривается задача определения функций $(u^\varepsilon(t, x), v^\varepsilon(t, x), g^\varepsilon(t))$ удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon(t, x) + a_{11}(t)u^\varepsilon(t, x) + a_{12}(t)v^\varepsilon(t, x) = \mu_{11}u_{x_1x_1}^\varepsilon(t, x) + \mu_{12}u_{x_2x_2}^\varepsilon(t, x) + g^\varepsilon(t)f(t, x) \\ \varepsilon v_t^\varepsilon(t, x) + a_{21}(t)u^\varepsilon(t, x) + a_{22}(t)v^\varepsilon(t, x) = \mu_{21}v_{x_1x_1}^\varepsilon(t, x) + \mu_{22}v_{x_2x_2}^\varepsilon(t, x) + F(t, x) \end{cases} \quad (1)$$

$\varepsilon - \text{const}, \varepsilon \in (0, 1]$

начальным условиям

$$u^\varepsilon(0, x) = u_0(x), v^\varepsilon(0, x) = v_0(x) \quad (2)$$

и условию переопределения

$$u^\varepsilon(t, x^0) = \varphi(t), \quad x^0 = (x_1^0, x_2^0), \quad \varphi \in C^2[0, T]. \quad (3)$$

Коэффициенты $a_{ij}(t)$ - непрерывные действительнзначные функции, заданные на отрезке $[0, T]$, $\mu_{ij} = \text{const} > 0, i = 1, 2, j = 1, 2$, $\varphi(t)$ - заданная функция на $[0, T]$, функции $f(t, x), F(t, x)$ заданы в $G_{[0,T]}$.

Доказаны: разрешимость «в целом» обратной задачи при $\varepsilon > 0$; единственность классического решения обратной задачи; периодичность по пространственной переменной решений аппроксимирующих задач при $\varepsilon > 0$; априорные (равномерные по $\varepsilon > 0$) оценки решений аппроксимирующих задач; сходимость, на основании полученных априорных оценок, решений аппроксимирующих обратных задач к решениям исходных при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Литература

1. Белов Ю.Я. О задаче идентификации функции источника для одной полуэволюционной системы // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика, 2010, Т.3, С. 487-499.
2. Belov Yu.Ya., Kopylova V.G. On some identification problem for source function to one semievolutionary system // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 20(2012), no.5-6, p. 723-743.
3. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics // New York, Marcel Dekkar, Inc., 1999.
4. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений // Новосибирск: НГУ, 1978.
5. Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации // Красноярск: КрасГУ, 1990.
6. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики // Новосибирск: Наука, 1967.

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕЧНОЙ ПОЛНОТЫ И ТОЧЕЧНОЙ ВЫРОЖДЕННОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

ON EFFICIENT ALGORITHMS FOR DETERMINATION OF POINTWISE COMPLETENESS AND POINTWISE DEGENERACY OF LINEAR DELAY-DIFFERENTIAL SYSTEMS

Коробов А.А.

Институт математики СО РАН, Россия, Новосибирск

korobov@math.nsc.ru

В статье [1] при $n = 3$ даётся полное описание точечно полных и точечно вырожденных систем

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где A, B – постоянные матрицы порядка n , $h > 0$.

В статье [2] исследуется система (1) при следующем предположении: матрицы A и B можно разбить на m^2 квадратных блоков одинакового размера так, что совокупность блоков может быть вложена в конечномерную вещественную алгебру с делением, т.е. либо в точное двумерное вещественное представление поля комплексных чисел, либо в точное четырёхмерное вещественное представление алгебры кватернионов. В статье [3] и статье [2] показано, что можно ограничиться рассмотрением канонического представления для алгебры кватернионов. К настоящему моменту при сделанных выше предположениях на матрицы A и B найдено большое количество просто проверяемых достаточных условий, обеспечивающих точечную полноту системы (1) при любом $h > 0$.

В статье [3] для системы (1) при $m = 3$ был предложен алгоритм преобразования пары матриц (A, B) к новой канонической форме. В случае вырожденной матрицы A был предложен опирающийся на эту каноническую форму алгоритм, в результате которого получается самое большее четыре вещественные матрицы порядка 12. Они названы разрешающими. Эти матрицы обладают тем свойством, что система (1) точечно вырождена тогда и только тогда, когда матрица e^{-hA} совпадает с одной из разрешающих матриц. Там же показано, что описанный алгоритм можно считать эффективным. В докладе будут представлены результаты исследования, начатого в [2], которые существенно дополняют предыдущие.

Для системы, алгебра которой размерности ≤ 2 , при $m = 4$ получены следующие новые эффективные условия точечной полноты на языке комплексных ассоциированных матриц с матрицами системы.

Теорема 1. *Если при описанных выше предположениях у матрицы $\hat{B}$, ассоциированной с матрицей B , два ненулевых собственных значения или одно ненулевое собственное значение, а геометрическая кратность нулевого собственного значения равна 2, то система (1) точечно полна для любого $h > 0$.*

Литература

1. Коробов А.А. Эффективные условия точечной полноты для линейных систем с запаздыванием // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 10, № 1. С. 96-114.

2. Коробов А.А. О точно полных парах линейных преобразований // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 58-67.

3. Коробов А.А. Обоснование эффективного алгоритма для определения точечных полноты и вырожденности линейных систем порядка 12 с запаздыванием // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 2. С. 59-73.

УДК 519

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ СМЕЩЕНИЙ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

DISPLACEMENT DISCONTINUITY METHOD OF HIGH ORDER APPROXIMATION

О.А. Коробов

Новосибирский государственный университет

oleg0101@ngs.ru

Во многих прикладных задачах геомеханики требуется определить напряженное состояние упругой породы с трещинами. В общем случае напряженное состояние упругой среды может быть определено лишь численно. При этом численное решение таких задач упругости сопряжено с рядом трудностей. Одной из таких трудностей является сингулярность напряжений в концах трещины.

Для решения таких задач упругости С. Краучем предложен метод разрывных смещений [1]. Однако он обладает следующим недостатком – у него низкий порядок аппроксимации. Для устранения этого недостатка разработана модификация метода разрывных смещений, основывающаяся на идеях К.Шу [2]. В ней разрыв смещения каждого граничного элемента, на которые разбивается трещина, предлагается аппроксимировать при помощи квадратичных функций. Затем рассматриваются взаимные влияния граничных элементов друг на друга. Это даёт СЛАУ, решая которую, отыскиваются величины разрывов смещений на каждом элементе.

Разработанный метод был верифицирован на решениях задач о плоской трещине и о трещине в форме дуги окружности под внутренним давлением. Порядок сходимости разработанного метода составил 2. Отметим, что исходный метод, предложенный С. Краучем, на этих задачах имеет порядок сходимости равный 1/2. Модифицированный метод позволит эффективно моделировать распространение трещин.

Литература

1. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела - Москва: Мир, 1987. - 328 с.

2. Shou K.J., Crouch S.L. A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. – 1995. - Т.32(1). - С.49-55.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Д.В. Есипов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ SIMULATE OPTIMUM SPACESHIP TRAJECTORY

Королев В. С.

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Россия
vokorol@bk.ru

Теория оптимизации космических маневров [1-4, 9] дополняется учетом воздействия многих физических факторов и ограничений [5, 8], которые приводят к усложнению в постановках задач [6-8] и полученных уравнениях. Во многих реальных задачах в качестве начальных приближений эффективно применяются решения задач в упрощенных постановках, когда действие возмущений считают пренебрежимо малым, а активные участки полета при работе двигателя аппроксимируют мгновенным изменением вектора скорости космического аппарата, а затем используют методы последовательного уточнения. Критерии оптимальности могут быть разными, когда требуется обеспечить минимальный расход топлива или реализовать переход за наименьшее или заданное время;

Энергетически оптимальные траектории маневрирования космических аппаратов для обслуживания или инспектирования [6, 7] могут потребовать больших промежутков времени ожидания наступления моментов, благоприятных для старта и встречи с другими объектами. Оптимальные траектории с учетом ограничений времени движения дают локально оптимальные относительно времени старта решения. Чем больше возможная отсрочка момента старта, тем лучше решение можно получить. При свободном выборе времени может быть реализовано абсолютно оптимальное решение задачи. Ограничения в задачах оптимизации часто играют решающую роль, а значения параметров находятся на границе допустимой области.

Время движения между двумя граничными орбитами можно определить из уравнения Кеплера после нахождения переходной траектории, а параметры траектории перехода двумя фиксированными точками при заданном времени движения можно определить по методу Ламберта. Аппроксимация возмущений кусочно-постоянными функциями приводит задачу к последовательному сопряжению участков траекторий, полученных при выбранной параметризации промежутков движения и действующих импульсов. Вид уравнений при выбранной совокупности обобщенных координат может способствовать увеличению точности или сокращению времени вычислений.

При необходимости обслуживания большого числа естественных или искусственных небесных тел траектория перехода состыковывается из кусочков орбит пассивного движения в гравитационном поле и активных участков маневрирования при работе реактивных двигателей. При использовании в качестве начального приближения импульсного мгновенного изменения вектора скорости для траектории получаем, что в точках сопряжения конечные данные переходят в начальные параметры для нового участка орбиты. Значения на соседних участках отличаются импульсным изменением вектора скорости, величину и направление которого считаем управлением. Сумма модулей импульсного изменения скорости определяет затраты по энергетике, которые нужно минимизировать или ограничивать. Сумма всех промежутков времени ожидания и движения по орбитам перехода должна удовлетворять заданным ограничениям.

На следующем шаге проводится уточнение параметров переходной траектории с учетом действующих возмущений и длительности активных участков работающего двигателя

Литература

1. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. – М.: изд. «Наука», 1976. 744 с.
2. Коваленко А.Н., Королев В.С. Задача оптимизации траекторий для перехвата и отклонения опасных для Земли астероидов с учетом ограничений на время или импульс // Вопросы механики и процессов управления. СПб.: изд-во СПбГУ, 2003. С. 242-247.
3. Королев В.С. Оптимизация и вычисление траекторий методом возмущенных конических сечений. // Вопросы механики и процессов управления. Л.: изд-во ЛГУ, 1988. С. 67-72.
4. Королев В.С., Новоселов В.С. Аналитическая механика управляемой системы. – СПб.: изд. СПбГУ, 2005. – 298 с.
5. Королев В.С., Олехова Е.Ф. О построении оптимальной траектории встречи на компланарной круговой орбите при наличии сильных ограничений на время движения // Математические методы решения инженерных задач. М.: изд. МО, 2005. С. 98-104.
6. Королев В.С. Задачи оптимального инспектирования астероидов космическим аппаратом // Избранные труды международной научной конференции по механике «Шестые Поляховские чтения». М. 2012. С. 123-126.
7. Королев В.С. Оптимальные траектории перехода космических аппаратов между заданными орбитами различного типа // Технические науки – от теории к практике. № 3 (28), Новосибирск: Изд. «СибАК», 2014. С. 62-70.
8. Королев В.С. Моделирование оптимальных траекторий космических аппаратов при наличии ограничений // Материалы конференции «Управление в морских и аэрокосмических системах». – СПб: ОАО «Концерн ЦНИИ Электроприбор», 2014. С. 446-450.
9. Новоселов В.С. Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. Л.: изд-во ЛГУ, 1972. 317 с.

УДК 531

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

PECULIARITYS OF SOLUTIONS OF THE EQUATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Королев В.С.

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Россия

vokorol@bk.ru

Рассматриваются математические модели динамических систем классической механики [1,3,8] и биофизики [7,9] на основе нелинейных дифференциальных уравнений. Исследованы особенности интегрирования этих уравнений, свойства их решений, устойчивость и поведение решений в окрестности положений равновесия. При исследовании учтено изменение устойчивости решений в зависимости от постановки задачи, выбора обобщенных координат и уравнений, которые описывают процесс, а также при замене переменных.

Сложные процессы классической механики и биофизики моделируются системами нелинейных дифференциальных уравнений [3,6]. Наличие даже малых возмущений периодического или случайного характера может изменить характер решений таких систем. Поэтому поведение и свойства решений систем, моделирующих управляемые процессы, определяются выбранными управляющими воздействиями. При этом анализируется вид полученной устойчивости. Орбитальная устойчивость или устойчивость по части перемен-

ных [2,5,10] показывает, что фазовая траектория или её проекция на соответствующее подпространство остается в достаточной близости от опорной траектории, хотя изображающие точки для траектории сравнения могут сколь угодно удаляться со временем.

Изменения свойств и условий устойчивости решений возможны и в случае перехода к новой системе при замене переменных [4,7]. В случае контактных преобразований канонических уравнений при выборе нужной производящей функции получаем в новых переменных уравнения, где правые части равны нулю, а новые переменные определяют набор произвольных постоянных для решений первоначальной системы уравнений. Следовательно, при любых допустимых начальных условиях они остаются постоянными, сохраняя малые начальные отклонения.

Наличие возмущений и управляющих воздействий может также влиять на свойства положений равновесия и возможные стационарные состояния. Для исследования этого влияния в известных математических моделях [8-10] предлагаются модификации и дополнения, упрощающие оценку устойчивости выделенных решений.

В качестве примера рассматривается устойчивость решений системы уравнений статистической модели возбуждения мышцы [6,7]. Такие уравнения можно представить в виде, где возмущения зависят от управляющих параметров или функций. Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений исследуется для стационарного режима, а также численными методами для оценки поведения решений в окрестности положений стационарного равновесия.

В зависимости от начальных условий и значений коэффициентов системы уравнений могут проявляться устойчивые и неустойчивые колебательные режимы по соответствующим группам переменных. Каждое из положений равновесия определяет 5-мерное подпространство, заполненное асимптотически устойчивыми движениями системы [10].

Особенностью такой системы уравнений является существование линейных по фазовым переменным интегралов, которые позволяют понизить порядок системы и проводить дальнейшее исследование устойчивости по упрощенным уравнениям для оставшихся фазовых переменных. Это позволяет получить критерии условной устойчивости для начальной системы, а также критерии устойчивости для упрощенной системы.

Литература

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1979, 432 с.
2. Воронников В.И. К теории устойчивости по отношению к части переменных // Прикладная математика и механика. Т. 59(4), 1995. С. 553-561.
3. Зубов И.В. Методы анализа динамики управляемых систем. М.: Физматлит, 2003. 224 с.
4. Королев В.С. Преобразование уравнений движения управляемых систем. // Тезисы докладов. Четвертые Поляховские чтения. – СПб.: изд. ВВМ, 2006, с. 103-104.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, Собр. соч., т. 2, М. – Л., 1956.
6. Новоселов В.С. Статистическая динамика. – СПб: СПбГУ, 2009. – 393 с.
7. Новоселов В.С., Королев В.С. Модель возбуждения мышцы // Труды междунар. конференции «Идентификация систем и задачи управления». М.: ИПУ РАН, 2005, с. 367-374.
8. Новоселов В.С., Королев В.С. Аналитическая механика управляемой системы. – СПб.: изд. СПбГУ, 2005. – 298 с.
9. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 472 с.
10. Korolev V.S., Pototskaya I.Yu. Integration of dynamical systems and stability of solution on a part of the variables // Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 15, P. 721-728.

ФРЕЙМОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ 8-PSK И 16-QAM МОДУЛИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕКОГЕРЕНТНОМ ПРИЕМЕ*

FRAME SYNCHRONIZATION FOR 8-PSK AND 16-QAM MODULATED SIGNALS

Королёва К.А.*

* Омский государственный университет путей сообщения,
Россия, Омск
jokie-ksu@mail.ru

В данной работе мы исследуем случай передачи информации при некогерентном приеме сообщений, когда сигнал в канале подвергается фазовому сдвигу. В случае когда фаза принятого сигнала не известна, необходимо синхронизировать приемник и передатчик для нахождения начала передаваемого фрейма. Синхронизация осуществляется по нахождению синхрослова. В общем виде фрейм состоит из $N_f = N_D + N_{sw}$ символов, где N_{sw} - длина синхрослова [1].

Для определения передачи синхрослова, детектор проверяет принятую последовательность данных в окне, длиной N_{sw} , на соответствие гипотезам: H_0 - когда не зафиксировано синхрослова, и H_1 - когда рассмотренная последовательность является синхрословом.

На основании критерия Неймана-Пирсона (1), выведены формулы оптимальных тестов.

$$\Lambda(r) = \frac{f_{R|H_1}(r | H_1)}{f_{R|H_0}(r | H_0)}, \quad (1)$$

Для возможности симуляции в среде MatLAB, тесты упрощены путем аппроксимации численного интеграла с применением квадратурного правила. Для 8-PSK тест имеет вид:

$$\Lambda^{(2)}(r) = \left| \sum_{i=0}^{N_{sw}-1} r_i c_i \right| - \max \left[\sum_{i=0}^{N_{sw}-1} \ln \left(\cosh r_i^I + \cosh r_i^Q + 2 \cosh \frac{r_i^I + r_i^Q}{\sqrt{2}} \right), \sum_{i=0}^{N_{sw}-1} \ln \left(\cosh r_i^I + \cosh r_i^Q + 2 \cosh \frac{r_i^I - r_i^Q}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (2)$$

Учитывая, что для больших соотношений сигнал-шум при $E_s / N_0 \gg 1$ значение гиперболического косинуса значительно превышает 1, мы можем аппроксимировать тест:

$$\Lambda^{(3)}(r) = \left| \sum_{i=0}^{N_{sw}-1} r_i c_i \right| - \sum_{i=0}^{N_{sw}-1} |r_i| \quad (3)$$

Так же для сравнения мы рассматриваем применяемый на практике тест некогерентного коррелятора:

* Работа выполнена при финансовой поддержке ЕС (Erasmus Mundus Aurora I Programme)

$$A^{(corr)}(r) = \left| \sum_{i=0}^{N_{SW}-1} r_i c_i \right| \quad (4)$$

В качестве исходных данных для моделирования приемные сигналы, состоящие из 8-PSK и 16-QAM символов с комплексным гауссовским шумом. Результаты моделирования представлены на рисунке 1 (а,б). Мы сравниваем предложенные тест (2) с некогерентной корреляцией (4), тестами из [2] для 8-PSK сигналов, и (4) и тесты из [2] для 16-QAM. Следует отметить, что тесты из [2] являются очень сложными и требуют большого количества вычислений и дают наименьшую вероятность корректной синхронизации. В сравнении с распространенным некогерентным корреляционным тестом (4) для низких значений сигнал-шум тесты (2) и (3) приблизительно равны, однако для значений отношения сигнал-шум выше -2 дБ предлагаемые нами тесты дают лучшие результаты. Однако, беря во внимание сложность реализации предлагаемых тестов, можно легко заметить, что вероятность ошибки синхронизации для предложенных тестов практически одинакова и отличается незначительно, меньше, чем 1 дБ, поэтому мы считаем (3) тест наиболее предпочтительным.

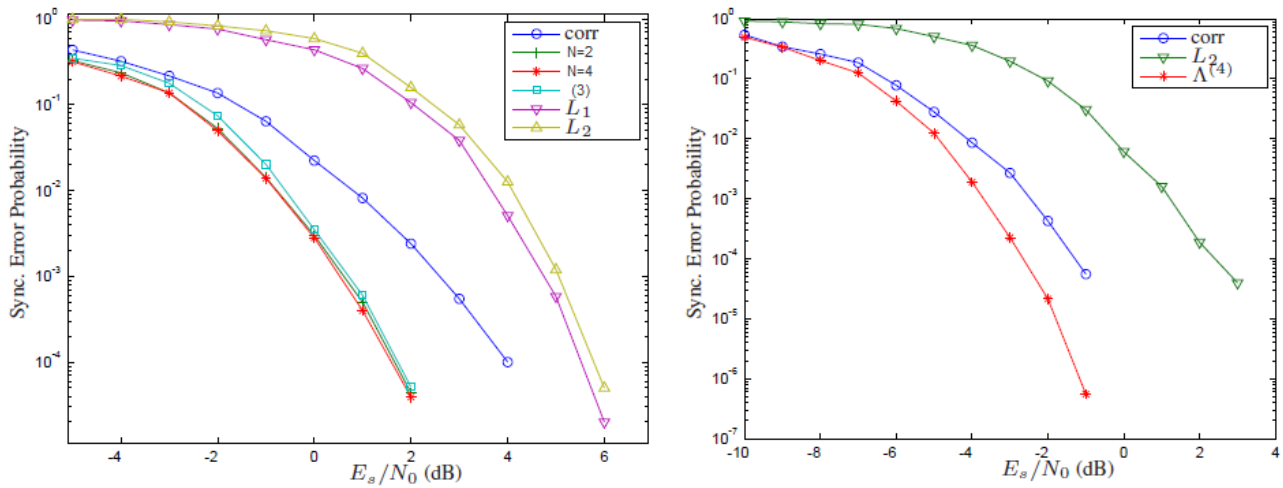


Рисунок 1 — Вероятность ошибки синхронизации при фазовом сдвиге, $N_f = 240$, $N_{SW} = 24$ для а) 8-PSK модуляции, б) 16-QAM модуляции

Литература

1. M. Chiani, «Noncoherent frame synchronization», IEEE Trans. Commun., vol.58, no.5, pp.1536-1545, May 2010
2. Z.Y.Choi and Y.H.Lee, «Frame synchronization in the presence of frequency offset», IEEE Trans. Commun., vol.50, no.7, pp.1062-1065, July 2002.

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ*

ON SOME INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC SYSTEMS OF EQUATIONS

Короткова Е.М.

email: kem@uriit.ru

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск
АУ "Югорский НИИ информационных технологий", Ханты-Мансийск

Рассматривается параболическая система уравнений:

$$u_t + A(t, x, D)u = \sum_{i=1}^r b_i(t, x) q_i(t, x') + f, \quad (t, x) \in Q, \quad x = (x', x''), \quad (1)$$

где $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$, $b_i, i = 1, 2, \dots, r$, и f – заданные вектор-функции, причем компоненты векторов b_i начиная с номера $r_0 + 1$ ($r_0 < h$) равны 0. A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t, x, D) = \sum_{i=r+1}^{sr_0} q_i(t, x') A_i(t, x, D_x) + A_{sr_0+1}(t, x, D_x),$$

$$A_i = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{i\alpha}(t, x) D^\alpha, \quad i = r+1, \dots, sr_0+1, \quad D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}).$$

Неизвестными в (1) являются решение u и функции $q_i(t, x')$ ($i = 1, 2, \dots, sr_0, sr_0 \geq r$), входящие как в правую часть (1), так и в оператор A как коэффициенты. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x) D^\beta u|_S = g_j(t, x), \quad (2)$$

где $m_j < 2m$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $S = (0, T) \times \Gamma$.

Обозначим через $P_0 a$ – вектор длины $r_0 < h$, координаты которого совпадают с первыми r_0 координатами исходного вектора a длины h . Условия переопределения для нахождения функций q_i имеют вид

$$P_0 u|_{S_i} = \psi_i(t, x'), \quad (S_i = (0, T) \times \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

где $\{\Gamma_i\}$ – множество гладких k -мерных поверхностей, лежащих в G , и $\psi_i, i = 1, 2, \dots, s$ – заданные вектор функции.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 15-01-06582)

Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, описании диффузионных процессов, процессов фильтрации и многих других. При выполнении условия параболичности приводятся оценки устойчивости решений задачи (1) - (3) в пространстве Соболева. При дополнительных условиях получаем также и локальную корректность, т.е. существование, единственность и непрерывную зависимость решений от данных задачи.

В скалярном случае, когда $A(t, x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, x) D^\alpha$, указываются условия на данные, при выполнении которых показывается существование и единственность решений задачи (1)-(3) в пространстве Соболева и устанавливается непрерывная зависимость решений от данных задачи.

Литература

1. Belov Ya.Ya. Inverse problems for parabolic equations // Utrecht: VSP, 2002.
2. Pyatkov S.G., Samkov M.L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations. // Sib. Adv. in Math. 2012. V. 22, № 4. P. 287-302.
3. Pyatkov S.G. On some classes of inverse problems for parabolic equations. // J. Inv. Ill-Posed problems. 2011. v.18, № 8, P. 917-934.

517.946

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

SOLVABILITY OF THE EQUATIONS OF MOTION OF MAGNETIC GAS DYNAMICS WITH CYLINDRICAL AND SPHERICAL SYMMETRY

Б.Д. Кошанов

ИМММ КН МОН РК, Алматы, Казахстан

koshanov@list.ru

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений магнитной газовой динамики с цилиндрической ($m=1$) и сферической симметрией ($m=2$) [1], записанных в лагранжевых переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu_e \frac{H^2}{x\rho} = \mu x^m \frac{\partial}{\partial q} \left(\rho \frac{\partial(x^m u)}{\partial q} \right) - x^m \frac{\partial P}{\partial q} - \mu_e x^m H \frac{\partial H}{\partial q}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial(x^m u)}{\partial q} = 0, \quad P = R\rho\theta, \quad (1.2)$$

$$c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\kappa x^{2m} \rho \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) + \mu \rho \left[\frac{\partial(x^m u)}{\partial q} \right]^2 - P \frac{\partial(x^m u)}{\partial q} + \mu_e \mu_H \rho x^{2(m-1)} \left[\frac{\partial(xH)}{\partial q} \right]^2 - \frac{3m}{2} \mu \frac{\partial(x^{m-1} u^2)}{\partial q}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + x\rho H \frac{\partial(x^{m-1} u)}{\partial q} = x\rho \frac{\partial}{\partial q} \left(\mu_H x^{2(m-1)} \rho \frac{\partial(xH)}{\partial q} \right). \quad (1.4)$$

Здесь $x(q, t) \in [0, 1]$, $q \in [0, b]$ – массовая лагранжева координата, $t \in [0, T]$, $0 < T < \infty$ – время. Учитывается связь между эйлеровой переменной $x(q, t)$ и скоростью $u(q, t)$:

$$\frac{\partial x}{\partial t}(q, t) = u(q, t). \quad (1.5)$$

Исследуется следующая начально-краевая задача

$$(u, \rho, \theta, H)(q, 0) = (u_0(q), \rho_0(q), \theta_0(q), H_0(q)), \quad q \in [0, b], \quad (1.6)$$

$$\left(u, \frac{\partial \theta}{\partial q}, H\right)(0, t) = \left(u, \frac{\partial \theta}{\partial q}, H\right)(b, t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.7)$$

Корректность модели одномерного движения вязкого теплопроводного газа без учета влияния магнитного поля подробно изучена в работе [2]. Однозначная разрешимость с учетом магнитного поля в случае плоской симметрии установлена в работе [3]. В данной работе исследована корректность начально-краевой задачи (1.1)-(1.7).

Теорема. Пусть начальные данные удовлетворяют включениям

$$u_0(q) \in W_2^1(\Omega), \quad (\rho_0(q), \theta_0(q), H_0(q)) \in W_2^1(\Omega), \quad 0 < m_0 \leq (\rho_0(q), \theta_0(q)) \leq M_0 < \infty.$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (1.1)-(1.7) и для него имеют место оценки

$$\|u\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega))} + \|u_t\|_{L_2(Q)} + \|H\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\theta\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\rho\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))} \leq C < \infty;$$

$$0 < m \leq (\rho, \theta) \leq M < \infty,$$

где $Q = \Omega \times [0, T]$, $\Omega = (0, b)$.

Литература

1. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы \ М.: Мир, 1964. 301 с.
2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей \ Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
3. Кажихов А.В., Смагулов Ш.С. Корректность и аппроксимация моделей магнитной газовой динамики \ Известия АН КазССР, серия физико-математическая, 1986, № 6. С. 17-19.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

SOLVABILITY OF THE INVERSE NONLINEAR PROBLEMS FOR ULTRAPARABOLIC EQUATIONS

Кошелева Ю.А.

Сахалинский государственный университет, Россия, Южно-Сахалинск
ynuta@mail.ru

В настоящее время теория неклассических краевых задач для уравнений математической физики представляет собой бурно развивающуюся область математики, содержащую огромное число нерешенных проблем. На сегодняшний день актуально получение новых результатов о разрешимости нелокальных краевых задач, а также обратных.

Нелокальными задачами принято называть задачи, в которых вместо задания решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех или иных функций на других внутренних или граничных многообразиях. Теория нелокальных краевых задач важна сама по себе как раздел общей теории краевых задач для уравнений с частными производными и как раздел математики, имеющий многочисленные приложения, возникающие в таких областях как: теория плазмы, биофизика, теория диффузионных процессов, теория многослойных пластин и оболочек и др.

Обратные задачи, которые представлены в данной работе связаны с математическим моделированием динамики популяций с учетом астрономического времени t , биологического времени a и дополнительного учета диффузии (перемешивание в процессе взаимодействия). Такие задачи сводятся к исследованию нелокальной краевой задачи для ультрапараболических уравнений.

В частности, работа посвящена исследованию разрешимости нелинейных обратных задач нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента при решении в самом уравнении.

Пусть x есть точка ограниченной области Ω пространства R^n , t и a есть точки интервалов $(0, T)$ и $(0, A)$ соответственно.

Рассматриваются задачи нахождения решения $u(x, t, a)$ и функции $q(t)$ в уравнении

$$u_t + u_a - \Delta u + q(t)u = f(x, t, a),$$

при задании естественных начально-краевых условий, а также некоторых условий перепределения точечного или интегрального вида.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (для простоты - бесконечнодифференцируемой) границей Γ , t есть число из интервала $(0, T)$, $0 < T < +\infty$, a есть число из интервала $(0, A)$, $0 < A < +\infty$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T) \times (0, A)$. Далее, пусть $f(x, t, a)$, $N(x, t, a)$, $u_0(x, a)$, $v_0(x, t)$, $\psi(x, t, a)$ суть заданные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $a \in [0, A]$ функции.

Обратная задача I: Найти функции $u(x, t, a)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$Lu \equiv u_t + u_a - \Delta u + q(t)u = f(x, t, a) \quad (1)$$

(Δ - оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$),

при выполнении для функции $u(x, t, a)$ условий

$$u(x, 0, a) = u_0(x, a), \quad x \in \Omega, \quad a \in (0, A), \quad (2)$$

$$u(x, t, 0) = v_0(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$u(x, t, a) \Big|_{x \in \partial\Omega, t \in (0, T), a \in (0, A)} = \psi(x, t, a), \quad (4)$$

а также условия

$$\int_0^A \int_{\Omega} N(x, t, a) u(x, t, a) dx da = \mu(t), \quad x \in \Omega, a \in (0, A) \quad (5)$$

Обратная задача II: Найти функции $u(x, t, a)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1) при выполнении для функции $u(x, t, a)$ условий (2), (3) и (5), а также условия

$$\frac{\partial u(x, t, a)}{\partial \nu} \Big|_{x \in \partial\Omega, t \in (0, T), a \in (0, A)} = \psi(x, t, a),$$

$\left(\frac{\partial u(x, t, a)}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, t, a) \nu_i, \nu_i - \text{компоненты вектора внутренней нормали к } \Gamma \text{ в текущей точке } x \right).$

В обратных задачах I и II условия (2)–(4) есть условия обычной первой или соответственно второй начально-краевых задач для ультрапараболических уравнений, условие же (5) есть условие интегрального переопределения. Следует отметить, что подобные обратные задачи хорошо изучены для параболических уравнений. В то же время нелинейные обратные задачи для ультрапараболических уравнений ранее не изучались (линейные обратные задачи для данного типа уравнений ранее изучались автором).

Для решения обратных задач вводятся все необходимые обозначения, проводятся некоторые построения, касающиеся данных задач. Далее осуществляется переход к краевым задачам.

Для изучаемых задач формулируются и доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Методы исследования основываются на сведении исходной обратной задачи к прямой задаче для «нагруженного» ультрапараболического уравнения, использовании метода регуляризации и метода априорных оценок.

УДК 004.89

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АППАРАТОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ГРАММАТИК MODELING OF TECHNICAL PROBLEMS SOLVING USING FUNCTIONAL GRAMMARS

Кравченко В.А.

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, Улан-Удэ
krawyach@mail.ru*

При создании компьютерных решателей задач возникает вопрос выбора модели представления знаний и модели решения. Классическими способами моделирования решения задач являются формальные логические модели, продукционные модели, семантические сети и фреймы. Однако данные модели не предназначены для получения активного решения в виде программы для ЭВМ. Поэтому для моделирования знаний и моделирования решения технических задач предлагается использовать аппарат функциональных грамматик профессора В.А.Тузова [1].

Функциональные грамматики представляют собой контекстно-свободные грамматики, каждой продукции которой сопоставлена функция. Это позволяет записывать решение в виде суперпозиции функций, где каждая функция определяет применение одной продукции, причем аргументы функции являются правой частью продукции, а результат – левой.

Функциональная грамматика является упорядоченной совокупностью:

$$G = (V_T, V_N, F, P, S),$$

где V_T – конечный алфавит терминальных символов (терминалов);

V_N – конечный алфавит нетерминальных символов (нетерминалов), не пересекающийся с V_T ;

F – конечное множество функций вывода f ;

P – конечное множество правил вывода (продукций) вида: $A \rightarrow \varphi \{f\}$, где A (левая часть) – один символ из множества V_N , φ (правая часть продукции) – цепочка символов из объединенного алфавита V_T и V_N , а f – функция из множества F .

S – начальный нетерминальный символ (аксиома) из множества V_N .

Моделирование знаний заключается в представлении теории в виде неполной функциональной грамматики:

$$G = (V, P, F),$$

где V – объединенный алфавит терминальных и нетерминальных символов.

Для моделирования базы знаний требуется пройти следующие этапы:

- 1) Определить границы рассматриваемой теории;
- 2) Выявить все термины и понятия теории в рамках выбранных границ и составить алфавит символов V ;
- 3) Выявить все законы, связывающие выбранные объекты предметной области, и составить набор правил P ;
- 4) Расписать на функциональном языке программирования все функциональные зависимости, между объектами теории, согласно правилам P , т.е. определить множество функций F .

Моделирование решения задачи состоит из двух этапов.

Первый этап – это переход от неполной функциональной грамматики базы знаний к функциональной грамматике решения задачи:

$$G = (V, P, F) \rightarrow G = (V_T, V_N, F, P, S).$$

Исходные данные задачи в функциональной грамматике определяются алфавитом терминальных символов V_T . Все остальные термины и понятия теории относятся к алфавиту нетерминальных символов V_N . Один из этих символов должен являться целью решения, т.е. начальным нетерминальным символом (аксиомой) S рассматриваемой функциональной грамматики [2].

Таким образом, на этапе постановки задачи, необходимо разграничить терминальные и нетерминальные символы из общего алфавита V и выбрать начальный нетерминальный символ, доведя тем самым функциональную грамматику к полному виду.

Второй этап моделирования решения задачи заключается в построении дерева синтаксического разбора в рамках полученной функциональной грамматики. Данное дерево отражает все возможные пути решения задачи. Так как каждому узлу дерева сопоставлена функция, то результат поиска решения можно представить в виде суперпозиции функций.

Результат моделирования поиска решения в виде суперпозиции функций является главным преимуществом метода функциональных грамматик по сравнению с классическими методами. Суперпозиция функций является готовой программой для функционального языка программирования, поэтому при поступлении на её вход фактических параметров, она выдаст соответствующие результаты. Таким образом, моделирование аппаратом функциональных грамматик позволяет генерировать программы на функциональном языке программирования. Использование соответствующего транслятора может позволить выдавать решение в виде программы на необходимом языке программирования.

Литература

1. Тузов В.А. Математическая модель языка. – Л.: Изд-во Ленингр. университета, 1984. – 176 с.
2. Кравченко В.А., Могнонов П.Б., Чимитов Д.Н. Представление знаний в функциональных грамматиках // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. Академика М.Ф.Решетнева. 2011. №5 (38). с. 55-61.

УДК 517.95

ПОСТРОЕНИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ THE CONSTRUCTION OF ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF SOME SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Кулагина М.Ф. *, Микишанина Е.А. **

* Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова,
Россия, Чебоксары
kulagina_mf@mail.ru

** Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова,
Россия, Чебоксары
evaeva_84@mail.ru

При решении задач теории упругости, гидродинамики, электродинамики, теплопроводности для многофазных сред с прямолинейными границами раздела фаз возникают краевые задачи для систем линейных уравнений в частных производных в полуплоскостях и полосах, склеенных друг с другом. При решении подобных задач удобно использовать ряды Фурье с функциональными коэффициентами (такие ряды представляют собой почти-периодические по Бору функции на каждой прямой, параллельной границе).

Нахождение коэффициентов сводится к решению конечных систем линейных алгебраических уравнений, а решения самих задач получаются в виде рядов Фурье, сходящихся абсолютно и равномерно в рассматриваемых областях, например, [1].

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для полос и полуплоскостей, которые возникают при решении некоторых задач теории фильтрации. Так, например, для полуплоскости $y \geq 0$, $-\infty < x < +\infty$ краевая задача выглядит следующим образом: решить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - k \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - k \frac{\partial H}{\partial y} - k_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

при граничных условиях

$$\sigma_y(x, 0) = F_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = F_2(x), \quad H(x, 0) = F_3(x),$$

где функции F_j , $j=1,2,3$, являются почти-периодическими с абсолютно сходящимися рядами Фурье (принадлежат классу Π_W), т.е. имеют структуру $F_j(x) = \sum_{\lambda \neq 0} f_j(\lambda) e^{i\lambda x}$. $\{\lambda\}$

- счетное множество действительных чисел, которое отделено от нуля.

Решение ищем в виде рядов

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= \sum_{\lambda} A_{\lambda}(y) e^{i\lambda x}, & \sigma_y(x, y) &= \sum_{\lambda} B_{\lambda}(y) e^{i\lambda x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{\lambda} C_{\lambda}(y) e^{i\lambda x}, & H(x, y) &= \sum_{\lambda} D_{\lambda}(y) e^{i\lambda x}\end{aligned}$$

с неизвестными коэффициентами.

Применяя к системе обобщенное дискретное преобразование Фурье, [2], сведем ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов, решая которую получим следующие структуры коэффициентов

$$\begin{cases} A_{\lambda}(y) = -b_1(\lambda) e^{-|\lambda|y} + \frac{2}{\lambda} b_2(\lambda) e^{-|\lambda|y} - b_2(\lambda) y e^{-|\lambda|y} + 2kd(\lambda) e^{-|\lambda|y}, \\ B_{\lambda}(y) = b_1(\lambda) e^{-|\lambda|y} + b_2(\lambda) y e^{-|\lambda|y}, \\ C_{\lambda}(y) = -\frac{ik_0}{\lambda} + i(-b_1(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_2(\lambda) + kd(\lambda)) e^{-|\lambda|y} - i b_2(\lambda) y e^{-|\lambda|y}, \\ D_{\lambda}(y) = d(\lambda) e^{-|\lambda|y}. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$, $d(\lambda)$ из граничных условий получаем систему линейных алгебраических уравнений.

Литература

1. Кулагина М.Ф. Построение почти-периодических решений второй основной задачи теории упругости для двухслойной полосы // Известия Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, 1996. № 6. С. 48-55.
2. Кулагина М.Ф. Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций // Изв. ВУЗов. Математика, 1993. № 8. С. 19-29.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАРЯДА
ОБЛАЧНЫХ КАПЕЛЬ В ФРАКТАЛЬНОЙ ОБЛАЧНОЙ СРЕДЕ**
**THE MATHEMATICAL MODELING OF THE CHANGES OF THE
CHARGE CLOUD DROPLETS IN FRACTAL CLOUD ENVIRONMENT**

Т.С. Кумыков

*Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Институт прикладной математики и автоматизации»
360004, Россия, КБР, г. Нальчик
macist20@mail.ru*

Изучению закономерностей разделения электрических зарядов в облаках посвящены многочисленные исследования, основные результаты которых обобщены в классических работах по физике облаков, где предложено большое количество объяснений без учета фрактальности среды. Известно, что облака с мощными конвективными токами имеют фрактальную структуру и облако является фрактальной средой [1]. Поэтому можно утверждать, что процессы, протекающие в такой среде, хорошо описываются с помощью аппарата дробного исчисления.

В данной работе, исходя из теории Френкеля [2, 3] для облачных капель, находящихся в слабо ионизированной воздушной среде, получен закон изменения заряда с учетом фрактальности среды и с применением аппарата дробного исчисления [4-7].

Рассматривая облака, которые имеют разную классификацию по происхождению и морфологическим признакам, к которым можно добавить данные об их фрактальной структуре, в дальнейшем возможно формирование более общей картины физики облаков.

Литература

1. Аджиев А.Х. Куповых Г.В. Атмосферно-электрические явления на Северном Кавказе, Таганрог 2004, с. 122.
2. Френкель Я.И. Теория основных явлений атмосферного электричества // Сборник избранных трудов. – М. : Наука. – 1958. – Т.2. – С.538-567.
3. Кумыков Т.С. Жекамухов М.К., Каров Б.Г. Электризация и пространственное разделение зарядов при выделении пузырьков воздуха в процессе коагуляционного роста градин в облаке II. Генерирование грозового электричества за счет выделения заряженных пузырьков при намерзании переохлажденных облачных капель на поверхности градин // метеорология и гидрология. – 2008. – №12. – с. 15-24.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение // М: Физматлит, 2003. 272 с.
5. В.Х. Шогенов, Шхануков-Лафишев М.Х., Х.М. Бештоев Дробные производные: интерпретация и некоторые применения в физике. Сообщения объединенного института ядерных исследований, Дубна, 1997. 20 с., с. 6
6. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии // М: Высшая школа, 1995. 301 с.
7. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка, Нальчик 2005, Издательство КБНЦ РАН, с.185, С.22

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LINEAR AND NONLINEAR OF LOADING PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS

А.С.Курманбаева

*Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова,
Бишкек Кыргызстан,
ainura1971@mail.ru*

В работе рассматриваются краевые задачи для линейного и нелинейного нагруженного псевдопараболического уравнения.

В области $\Pi_T = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу

$$u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + q(x_0, t)u(x_0, t) = 0, (x, t) \in \Pi_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где x_0 - фиксированная точка промежутка $[0, l]$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Если $\varphi(x) \in C^1([0, l])$, $\varphi''(x) \in L_1(0, l)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$,

$$f(x, t) \in C^{(1,0)}(\Pi_T), f_{xx} \in L_1(0, l, C[0, T]), q(x_0, t) \in C([0, T]),$$

и $f(0, t) = f(l, t) = 0$, то существует единственное решение задачи (1)-(3).

Задача 2. В области Π_T требуется найти функцию $u(x, t)$ удовлетворяющую условиям

$$u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + q(x_0, t)u(x_0, t)u(x, t) = 0, (x, t) \in \Pi_T, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q(x_0, t) \in C([0, T])$, $\varphi(x) \in C^1([0, l])$, $\varphi''(x) \in L_1(0, l)$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда для достаточно малых $T > 0$ решение задачи (4)-(6) существует, единственно.

Аналогичные задачи были исследованы в работе [1]. В данной работе методом Фурье доказывается однозначная разрешимость этих задач.

Литература

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек.- Илим, 2001.-183с.

О РАЗМЕРНОСТЯХ ЯДРА И КОЯДРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

ON DIMKER AND DIMCOKER OF AN ELLIPTIC OPERATOR WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS IN PLANE DOMAINS WITH ANGULAR POINTS

Лагерр Р.

Российский университет дружбы народов, Россия, Москва
laquerreka@mail.ru

Для ограниченных и неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с компактными и некомпактными кусочно- C^1 границами $\partial\Omega$, имеющими конечное число конечных и бесконечных угловых точек, исследуются вопросы существования и единственности слабых решений краевой задачи Неймана для эллиптического уравнения в дивергентной форме: $\operatorname{div}(a\nabla u) = \operatorname{div} f$ с разрывными кусочно-постоянными коэффициентами a . Под конечной или бесконечной угловой точкой $\partial\Omega$, как обычно, подразумевается «вершина» отличного от π угла между парой C^1 -гладких кривых, имеющих в «вершине» предельные нормали, тогда как «вершина» угла, равного π , считается точкой гладкости $\partial\Omega$. Предполагается, что коэффициенты a имеют конечное число кусочно-гладких компактных и некомпактных линий разрыва коэффициентов, состоящих из замкнутых кусков гладких кривых $\{\Gamma_k\}$, на которых заданы естественные условия сопряжения, т.е. непрерывности решения и его производной по конормали $v_a = av$ к соответствующей кривой Γ_k с нормалью v . Угловые точки $\partial\Omega$ могут оказаться точками разрыва коэффициентов – для бесконечной угловой точки это означает, что хотя бы одна кривая Γ_k уходит на бесконечность, имея там предельную нормаль. Краевая задача с однородными условиями Неймана на $\partial\Omega$ и условиями сопряжения на $\{\Gamma_k\}$ решается в обобщенной постановке в смысле стандартного интегрального тождества для класса слабых решений $\nabla u \in L_p(\Omega)$ с заданной вектор-функцией $f \in L_p(\Omega)$. Такую постановку удобно рассматривать как обобщенную постановку краевой задачи для системы первого порядка, эллиптической по Дуглису-Ниренбергу. Вычисление размерностей ядра и коядра соответствующего матричного дифференциального оператора и является целью настоящей работы, продолжающей исследования, начатые в [1,2], где рассматривались случаи $\Omega = \mathbb{R}^2$ и однородные краевые условия Дирихле в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^2$. Краткое изложение истории вопроса можно найти в [1], а подробное – в [2].

К особым точкам замыкания $\bar{\Omega}$ относятся все точки, характер которых влияет на замкнутость или незамкнутость области значений рассматриваемого эллиптического оператора, а также на размерности его ядра и коядра относительно всей шкалы возможных значений показателя $p \in (1, \infty)$. Помимо конечных и бесконечных угловых точек $\partial\Omega$, особыми точками становятся все точки гладкости $\partial\Omega$, из которых выходят хотя бы две кривые $\{\Gamma_k\}$, тогда как в случае только одной кривой Γ_k точка гладкости $\partial\Omega$ будет особой, если только Γ_k выходит из нее под углом к $\partial\Omega$, отличным от прямого. Особыми будут также и все внутренние точки Ω , из которых выходят хотя бы две кривые $\{\Gamma_k\}$. При этом в случае только двух кривых, угол между ними обязательно отличен от π , а особая точка называется точкой излома линии разрыва коэффициентов. В случае неограниченной области Ω с компактной границей $\partial\Omega$ бесконечность рассматривается как «внутренняя точка», которая может оказаться точкой излома линии разрыва коэффициентов. Характер особенности

угловой особой точки границы $\partial\Omega$ может «усилиться» в смысле увеличения размерностей ядра и коядра по шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$ в случае, когда из этой точки выходит хотя бы одна кривая Γ_k .

В [1,2] был обоснован метод локального разделения переменных в полярных координатах с центром во внутренней особой точке, а также в граничной особой точке с краевыми условиями Дирихле для модельных задач, соответствующих частному случаю, когда Γ_k являются отрезками прямых. В настоящей работе обоснование метода разделения переменных перенесено на случай краевых условий Неймана. Как и в [1,2], интерес представляют лишь те ненулевые собственные числа модельных задач Штурма-Лиувилля, которые по модулю не превосходят единицы – именно они влияют на размерности ядра и коядра рассматриваемого эллиптического оператора по шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$. В настоящей работе доказано, что во всех рассматриваемых модельных задачах Штурма-Лиувилля с разрывными кусочно-постоянными коэффициентами a и краевыми условиями Неймана значения всех собственных чисел $\lambda = -\mu^2$ с $\mu \in (0,1)$ инвариантны при одновременной замене коэффициентов a на $1/a$ и условий Неймана – на условия Дирихле, что легко проверить в любом частном случае, используя, например, вычислительную систему «Maple». Такая инвариантность собственных чисел модельных задач Штурма-Лиувилля позволяет перенести на случай краевых условий Неймана все ранее установленные в [2] результаты по вычислению размерностей ядра и коядра рассматриваемого эллиптического оператора с краевыми условиями Дирихле, что можно считать главным результатом настоящей работы.

Литература

1. Дудкина А.А. К L_p -теории эллиптических операторов с разрывными коэффициентами // ДАН. – 2010. – Т. 430, № 3. – С. 304-307.
2. Дудкина А.А. К L_p -теории эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами. – Канд. дисс. – М.: РУДН. – 2010. – 176 С.

УДК 519.626

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УМФ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ ДАННЫМИ И ИХ АППРОКСИМАЦИЯ*

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH CONTROLS IN COEFFICIENTS OF SEMILINEAR PDEs OF ELLIPTIC TYPE WITH DISCONTINUOUS DATA AND THEIR APPROXIMATION

Лубышев Ф.В.*, Манапова А.Р.*

* Башкирский государственный университет,
Россия, Республика Башкортостан, Уфа
aygulrm@mail.ru

Задачи оптимального управления для систем, описываемых уравнениями математической физики (УМФ) – очень сложный класс задач в оптимизации, особенно для нелинейных задач оптимального управления. Под «нелинейными задачами оптимального управления» для УМФ мы понимаем такие, в которых отображение $g \rightarrow u(g)$ из множества до-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук (МК-4147.2015.1)

пустимых управлений U в пространство состояний W является нелинейным. В настоящее время наиболее полно исследованы линейные системы управления с достаточно гладкими входными данными и функциями состояния процессов управления. Особый интерес с теоретической и практической точек зрения представляет физико-математическая постановка задач оптимального управления, в которых, в силу характера исследуемого физического процесса, состояния описываются нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и, кроме того, изначально по своей физико-математической постановке сами решения УМФ допускают разрывы.

Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы – «конечномерными задачами». Правильно построенная аппроксимация позволяет получить результаты качественного и численного характера об изучаемом процессе. Центральными здесь являются вопросы «конструирования» аппроксимаций, сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций [1]–[5]. Для систем с распределенными параметрами построение и исследование аппроксимаций проводилось в основном также для линейных задач оптимального управления, причем с достаточно гладкими коэффициентами УМФ и состояниями. Актуальными являются вопросы «конструирования» конечномерных аппроксимаций и исследования их сходимости для задач оптимального управления, описываемых нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями). Заметим, что разностные схемы для уравнений с разрывными коэффициентами, но непрерывными потоком и решением (с условиями сопряжения типа идеального контакта) построены и исследованы в [6], [7] для УМФ с классическими решениями некоторой степени гладкости. Исследованию сходимости разностных схем для параболических уравнений с разрывными коэффициентами и решением в классической постановке задач с достаточно гладкими решениями посвящены работы [8], [9]. Отметим также, что оптимизационные аспекты в этих работах не рассматривались.

В работе рассматриваются нелинейные задачи оптимального управления, описываемые полулинейными уравнениями математической физики эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями), с граничными условиями сопряжения типа неидеального контакта. В качестве управления выступают коэффициент в граничном условии сопряжения и коэффициент в правой части уравнения состояния. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, доказана слабая сходимость аппроксимаций по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций по Тихонову.

В теплофизических терминах поставленные задачи можно трактовать как задачи оптимального управления коэффициентом граничного условия сопряжения разнородных теплопроводящих сред $\theta(x)$ и коэффициентом $f_1(x)$, характеризующим наличие в среде Ω_1 внутренних источников энергии, за счет которых внутри среды может возникать или поглощаться тепло. При этом коэффициент граничного условия сопряжения характеризует термическое сопротивление неидеального контакта разнородных сред.

Литература

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002.
2. Ишмухаметов А.З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления. М.: ВЦ РАН. 1999.
3. Ишмухаметов А.З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: ВЦ РАН. 2001.
4. Потапов М.М. Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболические уравнения). М.: Изд-во МГУ. 1985.
5. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БГУ. 1999.

6. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука. 1976.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
8. Цурко В.А. О точности разностных схем для параболических уравнений с разрывным решением // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. №7. С.986–992.
9. Цурко В.А. Разностные методы для задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и решениями // Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. №2. С.274–280.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

SOLVABILITY OF SPACE NONLOCAL PROBLEMS WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Лукина Г.А.

Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова» в г. Мирном, Россия, Мирный
lukina-g@mail.ru

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $K(x)$, $N(x)$, $f(x,t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$ и $(x,t) \in \overline{Q}$ соответственно. Далее, пусть L , l есть операторы, действие которых на функциях $v(x,t)$ и $w(x)$ определяется равенствами

$$Lv = v_{ttt} + v_{xx} + \mu v,$$

$$lw(x) = \alpha_1 w(0) + \alpha_2 w(1) + \alpha_3 w'(0) + \alpha_4 w'(1)$$

(α_i , $i = \overline{1,4}$ - заданные действительные числа).

Нелокальная задача I: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$lu(x,t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$\int_{\Omega} K(x)u(x,t)dx = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Нелокальная задача II: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), а также условие

$$\int_{\Omega} N(x)u(x,t)dx = 0, \quad x \in \Omega.$$

Задачи с интегральными по пространственным переменным условиями в целом активно изучаются в последнее время. В тоже время задачи с интегральными по пространственным переменным условиями для уравнений нечетного порядка

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial t^{2m+1}} + u_{xx} + \mu u = f(x,t),$$

называемых иногда «эллипτικο-параболическими» или же « $2m+1$ -параболическими» уравнениями, изучены сравнительно мало – можно отметить лишь работы [1-3].

Для рассматриваемых нелокальных задач доказаны теоремы разрешимости в классе регулярных решений с помощью метода, предложенного в работе [4].

Литература

[1] Абдрахманов А.М., Кожанов А.И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка. Изв. вузов. Математика, 2007. Т.51, №5. С.3-12.

[2] Абдрахманов А.М. О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнения нечетного порядка. Математические заметки, 2010. -- Т.88, вып. 2. С.163-172.

[3] Лукина Г.А. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для уравнения третьего порядка. Мат. заметки ЯГУ. Якутск, 2010. Т.17, вып.1. С.35-46.

[4] Кожанов А.И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений. Доклады Академии Наук. 2014. - Т.457, №2. - С. 152-156.

УДК 533.6

ЗАДАЧА 3D ОБТЕКАНИЯ МОДЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ АКТИВНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ПОТОК*

3D PROBLEM OF THE FLOW AROUND AIRCRAFT MODEL WITH ACTIVE INFLUENCE ON THE FLOW

Луцкий А.Е.¹, Ханхасаева Я.В.²

¹*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия;*
allutsky@yandex.ru

²*Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;*
hanhyana@mail.ru

Одним из способов улучшения аэродинамических характеристик перспективных летательных аппаратов (ЛА) является управляемое воздействие на набегающий поток, которое может быть осуществлено различными способами, в частности, при помощи локализованного в небольшом замкнутом объеме подвода энергии. Возможность дистанционного подвода энергии к сверхзвуковому потоку подтверждена во многих экспериментах. За энергоисточником формируется высокотемпературный след с пониженными значениями чисел Маха, полного давления и скоростного напора, что позволяет изменять режим обтекания. Подвод энергии в сравнительно небольшой области пространства может привести к перестройке головных ударно-волновых структур перед телом.

К настоящему времени учеными выполнен большой объем теоретических и экспериментальных работ по снижению волнового сопротивления тел, главным образом, в осесимметричной постановке. Показано, что вложение энергии в поток перед носовой частью ЛА позволяет снизить сопротивление в десятки раз и более за счет формирования конусообразной отрывной области перед носовой частью. Такой способ снижения сопротивления является весьма эффективным. Затраты мощности на энергетическое воздействие существенно меньше той экономии мощности двигателя, которая обеспечивается

* Работа выполнена при поддержке РФФИ – гранты 13-01-12043, 14-08-00624.

снижением сопротивления. Трехмерные же эффекты вложения энергии, в частности влияние угла атаки, исследованы в значительно меньшей степени.

Модель летательного аппарата представляет собой цилиндрическое тело со сферической головной частью и крыльями со стреловидной передней (76 градусов), и прямой задней кромками. Относительная толщина профиля – 12 % (в месте сочленения с фюзеляжем профиль крыла соответствует профилю NASA0012).

Численное исследование влияния вложения энергии в поток при обтекании под углом атаки модели летательного аппарата проводилось в рамках математической модели осредненных 3D уравнений Навье-Стокса для вязкого сжимаемого газа (URANS) с моделью турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA).

Проведенные исследования показывают, что в трехмерном случае существенно возрастает разнообразие возможных способов управления обтеканием ЛА на основе энергетического воздействия. При соответствующем выборе области энерговложения наряду со снижением сопротивления достигается увеличение подъемной силы. Вложение энергии в поток перед крыльями или оперением может быть использовано для создания управляющих воздействий.

УДК 517.956.2

ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВОСЬМОГО ПОРЯДКА POTENTIAL FOR EIGHTH ORDER EQUATION

Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б.*

* Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Россия, Казань
mavly72@mail.ru, ilnur_garipov@mail.ru

Пусть D - конечная область трехмерного пространства, ограниченная достаточно гладкой кривой Γ . Обозначим через $M(x, y, z)$ - внутреннюю точку области, P - точку границы, n - внешнюю нормаль, проведенную к границе в точке P , θ - угол между этой нормалью и радиус вектором $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ точки M относительно начала координат, Δ - оператор Лапласа.

Для m -гармонического уравнения

$$\Delta^m u = 0 \quad (1)$$

в n -мерном пространстве, Н.Н. Мейманом [1], были найдены ядра потенциалов

$$K_{m,p}(P, M) = \frac{\cos^{2m-p} \theta}{r^{n-p}}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим квадрогоармоническое уравнение

$$\Delta^4 u = 0 \quad (2)$$

в трехмерном пространстве. Тогда ядра потенциалом приобретут вид

$$K_{4,p}(P, M) = \frac{\cos^{8-p} \theta}{r^{3-p}}, \quad p = \overline{1, 4}.$$

Фундаментальными решениями уравнения (2) с точностью до постоянного множителя являются функции

$$\varphi_i = r^{2i-3}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (3)$$

С помощью формулы

$$\frac{\cos^{8-p} \theta}{r^{3-p}} = \sum_{i=\left[\frac{p+1}{2}\right]}^{i=m} a_{mpi} \frac{\partial^{2i-p} \varphi_i}{\partial n^{2i-p}}, \quad p = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Можно записать ядра потенциалов в виде линейной комбинации нормальных производных фундаментальных решений. В нашем случае формула (4) выглядит следующим образом

$$\frac{\cos^{8-p} \theta}{r^{3-p}} = \sum_{i=\left[\frac{p+1}{2}\right]}^{i=4} a_{4pi} \frac{\partial^{2i-p} \varphi_i}{\partial n^{2i-p}}, \quad p = \overline{1,4}.$$

Найдем коэффициенты a_{4pi} этого разложения в явном виде. Для этого вычислим производные по нормали от фундаментальных решений (3) по формуле [2]

$$\frac{\partial^q r^l}{\partial n^q} = r^{l-q} \sum_{j=0}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{q! \prod_{t=0}^{t=q-j-1} (l-2t)}{2^j j! (q-2j)!} \cos^{q-2j} \theta.$$

Из полученных равенств находим четыре системы линейных алгебраических уравнений, решениями которых являются следующие числа

$$a_{411} = -1, a_{412} = -1, a_{413} = -\frac{1}{15}, a_{414} = \frac{1}{1575};$$

$$a_{421} = 1, a_{422} = -3, a_{423} = \frac{1}{3}, a_{424} = -\frac{1}{225};$$

$$a_{432} = 5, a_{433} = -\frac{10}{9}, a_{434} = \frac{1}{45};$$

$$a_{442} = -3, a_{443} = 2, a_{444} = -\frac{1}{15}.$$

В перспективе представляет интерес более общая задача. А именно, найти коэффициенты a_{mpi} разложения (4) для произвольного полигармонического уравнения (1).

Литература

1. Мейман Н.Н. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений, ДАН СССР. – 1941 – Т. 33 - № 4. С. 275-278.
2. Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б., Нураниева С.М., Хусаинова Э.Д. Рекуррентная формула для нормальных производных фундаментальных решений эллиптического уравнения высшего порядка с младшими членами // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2012 – Вып. 3. – С. 29-40.

ОСЕССИММЕТРИЧЕСКОЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ЦИЛИНДРЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ*

AXISYMMETRIC THERMOCAPILLARY MOTION OF WITHIN A CYLINDER THE MARANGONI NUMBER OF SMALL

Магденко Е.П.*

* *Институт вычислительного моделирования СО РАН,*
Россия, Красноярск
magdenko_evgeniy@icm.krasn.ru

Рассматривается частично инвариантное решение уравнений осесимметрического двухслойного термокапиллярного движения вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе с фиксированной поверхностью раздела при малых числах Марангони. При этом возникает сопряжённо начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
 w_{1t} &= v_1 \left(w_{1rr} + \frac{1}{r} w_{1r} \right) + h_1(t), & 0 < r < a; \\
 w_{2t} &= v_2 \left(w_{2rr} + \frac{1}{r} w_{2r} \right) + h_2(t), & a < r < b; \\
 w_1(r, 0) &= w_{10}(r), & w_2(r, 0) &= w_{20}(r); \\
 w_1(a, t) &= w_2(a, t), & \mu_2 w_{2r}(a, t) - \mu_1 w_{1r}(a, t) &= 2\kappa \psi_1(a, t); \\
 w_2(b, t) &= 0, & \int_0^a r w_1(r, t) dt &= 0, & \int_a^b r w_2(r, t) dt &= 0 \\
 \psi_{1t} &= \chi_1 \left(\psi_{1rr} + \frac{1}{r} \psi_{1r} \right), & 0 < r < a; \\
 \psi_{2t} &= \chi_2 \left(\psi_{2rr} + \frac{1}{r} \psi_{2r} \right), & a < r < b; \\
 \psi_j(r, 0) &= \psi_{j0}(r); \\
 \psi_1(a, t) &= \psi_2(a, t), & k_1 \frac{\partial \psi_1(a, t)}{\partial r} &= k_2 \frac{\partial \psi_2(a, t)}{\partial r}; \\
 \psi_2(b, t) &= \alpha(t).
 \end{aligned}$$

Здесь v_j , μ_j , k_j , χ_j , κ - заданные физические постоянные, а $\alpha(t)$ заданная функция.

Отметим, что задача является обратной, так как $h_j(t)$ - неизвестные.

Найдено стационарное решение w_j^s , ψ_j^s , h_j^s . Нестационарная задача решена методом преобразования Лапласа. Доказано, что с ростом времени решение выходит на стационарное решение, если $\alpha(t)$ стремятся к постоянным значениям:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_j(r, t) = w_j^s(r), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_j(r, t) = \psi_j^s(r), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h_j(r, t) = h_j^s.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-00067

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-ЯКОБИ ДЛЯ АБСОЛЮТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

ESTIMATION OF COEFFICIENTS OF THE FOURIER – JACOBI DOUBLE-SERIES FOR ABSOLUTELY – CONTINUOUS FUNCTION

Магомедов И.И., Магомедов А.И.

*Дагестанский государственный университет,
Россия, Махачкала
magomedova.e.s@mail.ru*

Предположим, что функция от двух переменных $f(x, y)$, заданная в области $D = \{x | x \leq 1; y | y \leq 1\}$, принадлежит классу абсолютно-непрерывных функций $A(x, y)$ и имеет непрерывные частные производные $f_x^{(r_1)}(x, y)$ и $f_y^{(r_2)}(x, y)$ в этой области D . Тогда эта функция разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m e_{ij} F_{ij}(x, y), \quad (1)$$

где $F_{ij}(x, y)$ – ортонормированный многочлен в области D по весу $h(x, y) = p(x)q(y)$ (см. [1], с.19), где

$$c_{ij} = \iint_D h(x, y) f(x, y) F_{ij}(x, y) dx dy \quad (2)$$

коэффициенты двойных рядов Фурье.

Если весовая функция имеет вид

$$h(x, y) = p(x)q(y) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-y)^{\alpha_1} (1+y)^{\beta_1},$$

где $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 > -1$ на промежутке D , то ряд (1) становится двойным рядом Фурье-Якоби с коэффициентами (2).

Тогда, если $f(x, y) \in A$, то

$$c_{n,m} = O \left\{ (nm)^{-\frac{3}{2}} \right\}.$$

А если и $f_x^{(r_1)}, f_y^{(r_2)} \in A$, то

$$c_{n,m} = O \left\{ (nm)^{-\frac{3}{2} - r_1 - r_2} \right\}$$

В случае, когда $f(x, y) \in H_p$, $p \geq 1$ – класс функций, ограниченной p - вариации оценки коэффициентов Фурье – Якоби, получены в работе [3].

Литература

1. Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным – М.: Наука, Главная редакция физ.- мат. лит. 1988.
2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Физ.- мат.- лит 2007.
3. Магомедов А.И., Магомедов И.И., Скорость убывания коэффициентов двойных рядов Фурье-Якоби для функций класса H_p , Вестник ДГУ, естественные науки, 2014, выпуск 1, с.104-108.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ

USAGE OF FRACTIONAL DERIVATIVE IN MODELING OF POPULATION NUMBER

Магомедова Е.С., Магомедов Р.И.

*Дагестанский государственный университет,
Россия, Махачкала
magomedova.e.s@mail.ru*

В работе [1] приведено уравнение Ферхольста –Пирла, которое в теории популяции называют логистическим уравнением и имеет вид

$$u' = \mu u - \left(\frac{\mu}{k}\right) u^2, \quad (1)$$

где $u = u(t)$ - непрерывная функция, выражающая численность популяции в некоторой ограниченной области в момент времени t , $t_0 < t < \infty$. Будем считать $t \in [t_0, T]$, T – расчетное время. Предположим, что популяция изолирована, $\mu = r - S$, r – коэффициент рождаемости, S – коэффициент смертности.

Если $r > S$, то популяция по численности, растет, если $r < S$, то популяция уменьшается.

k – емкость среды, определяемая наличием ресурсов.

$u' = u'(t)$ – скорость изменения численности популяции к моменту времени t .

Пусть популяция к моменту времени $t_0 = 0$ имеет численность или плотность популяции, т.е. число особей на единицу пространства, равное

$$u(t)|_{t=0} = u_0 \quad (2)$$

Рассмотрим эту задачу Коши (1) - (2) в виде:

$$\partial_{0t}^\alpha u(t) = \mu u - \frac{\mu}{k} u^2 \quad (3)$$

с начальным условием

$$u(0) = u_0. \quad (4)$$

Для численного решения задачи (3)–(4) введем равномерную сетку с шагом $t > 0$. Обозначим через $u(t)$ точное решение задачи (3)–(4), а через $y_n = y(t_n)$ – приближенное решение.

Уравнение (3) заменим разностным уравнением

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^n (y_{k-1} - y_k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) - u(t_n, y_n) = 0,$$

$$y_0 = u_0 \text{ при } n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение этого уравнения сводится к решению по явным рекуррентным формулам

$$y_0 = u_0,$$

$$y_1 = u_0 + \Gamma(2, \alpha) u(f_{1n} y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha u(t_n, y_n).$$

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии: М., «Высшая школа», 1995, 302 с.
2. Магомедов И.И., Магомедов Р.И. Использование дробной производной при моделировании мощности фирмы. Материалы 3-го международного Российско- Казахского симпозиума. «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик, 2014, 125-127 с.

УДК 517.98

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 1-ГО И 2-ГО ПОРЯДКА ПО СИНУСОИДАЛЬНОМУ СИГНАЛУ* IDENTIFICATION THE LINEAR DYNAMIC SYSTEMS OF THE 1ST AND THE 2ND ORDER FOR SINUSOIDAL SIGNAL *

Мадаева Е.А.*

** Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, Улан-Удэ
elenamadaeva@gmail.com*

Одним из основных этапов, реализующих технологии математического моделирования, является создание и идентификация математической модели, исследуемого объекта. При этом различают идентификацию в широком смысле - структурная идентификация и в узком смысле - параметрическая идентификация. Формирование теории идентификации систем в значительной мере было стимулировано основополагающими работами Гропа Д., Дейча А.М., Райбмана Р.С., Цыпкина Я.З., Эйкхоффа П. и других.

Первоначально методология построения динамических моделей развивалась в рамках пассивного подхода, при котором идентификация проводится в режиме нормальной эксплуатации исследуемой системы. Современная теория включает в себя также методы активной идентификации, предполагающие подачу на вход исследуемой системы определенным образом синтезированных управляющих сигналов.

В работе предлагается метод идентификации линейных стационарных динамических систем по входному синусоидальному сигналу, т.е. по результатам измерений фазовых координат на некотором промежутке времени, полученным при наложении на вход системы синусоидального воздействия.

Предполагая, что выходные переменные системы $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ являются решением стационарной динамической линейной неоднородной задачи Коши:

$$\dot{x} = Ax + B\sin(\omega t), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

идентификация матрицы A системы (1) сводится к построению и решению матричного линейного алгебраического уравнения, построение которого основано на сопоставлении представления решений задачи Коши в виде экспоненциального матричного ряда, и результатов измерений фазовых координат системы при входном синусоидальном сигнале.

Проведено обобщение подхода на случай линейных динамических систем 2го порядка:

$$\ddot{x} = A_1\dot{x} + A_0x + B\sin(\omega t), \quad \dot{x}(0) = x^1, \quad x(0) = x^0.$$

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-41-04020 р_сибирь_a

* The reported study was supported by RFBR, research project No. 15-41-04020 р_сибирь_a

Результаты численных экспериментов показали, что идентификация системы используемым подходом позволяет по точным решениям Задачи Коши восстановить систему полностью.

УДК 517.95

ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА THE GOURSAR PROBLEM FOR HALLAIRE EQUATION

Макаова Р.Х.

*Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Институт прикладной математики и автоматизации»,
Россия, Нальчик
Makaova.Ruzanna@mail.ru*

В прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек (x, y) рассматривается уравнение Аллера

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \quad (1)$$

где a, b – заданные положительные числа; $u = u(x, y)$.

Уравнение (1) является уравнением псевдопараболического типа [1].

Функцию $u = u(x, y)$ назовем регулярным решением уравнения (1), если $u \in C(\overline{\Omega})$, $u_{xxy} \in C(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению (1).

Исследуется следующая

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r,$$

$$u(0, y) = \tau(y), \quad 0 \leq y \leq T,$$

$$u(h, y) = \tau(y) + hv(y), \quad 0 \leq y \leq T,$$

где $\varphi(x) \in C^2[0, r]$, $\tau(y), v(y) \in C^1[0, T]$, $h \in]0, r[$.

Доказана теорема единственности и существования решения этой задачи.

Литература

- [1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. - 301 с.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ABOUT ONE METHOD OF THE DECISION OF THE MULTIVARIATE INVERSE PROBLEMS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

Максудов Р.З.

Ташкентский Государственный Технический Университет, Узбекистан, Ташкент
rusmaks-85@mail.ru

К обратным задачам относят задачи определения некоторых физических свойств объектов, таких, как плотность, коэффициент теплопроводности, упругие модули в зависимости от координат или в виде функций, других параметров. Характерной особенностью обратных задач является их некорректность по Адамару. При теоретическом исследовании таких задач, целесообразно является доказательство теоремы существования, устойчивости и единственности обратных задач.

В области $Q = (0, t) \times (0, 1) \times (0, a) = \{(t, x, y) | 0 < t < T, 0 < x < 1, 0 < y < a\}$, $f(x, t)$ – заданная функция, рассмотрим уравнение:

$$u_{tt} - qx(u_{xx} + u_{yy}) - qu_x = h(y, t)f(x, t). \quad (1)$$

$$q = \text{const} \geq 1.$$

Начально-краевая задача. Найти решение $u(x, y, t)$ в области Q уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=a} = 0. \quad (2)$$

В настоящей работе рассмотрим теоремы существования, устойчивости и единственности обратных задач.

Обратная задача. Найти в области Q функции $u(x, y, t)$, $h(t, y)$, удовлетворяющее (1)–(2), и такие что

$$u|_{x=0} = \tau(y, t), \quad (3)$$

$$h(t, y) \in W_2^2(Q_1), \quad \tau(y, 0) = \tau_t(y, 0) = \tau(a, t), \quad \tau(0, t) = \tau(a, t), \quad p > 7, \quad Q_1 = (0, T) \times (0, a).$$

$$\{u, D_y^{\frac{p+x}{2}}\{u, u_x, u_{xt}, u_{tt}\}, D_y^{\frac{p}{2}}\{u_{tt}, u_{xx}\}, D_y^{\frac{p-2}{2}}\{u_{xx}\}\} \in L_2(Q).$$

В работе методом, основанном на сведении обратной задачи к нелинейным неклассическим бесконечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, доказываются теоремы существования и единственности решений обратной задачи (1) – (3).

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО - ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

PROBLEM GELLERSTEDT FOR THE ELLIPTIC - HYPERBOLIC OF THE SECOND TYPE EQUATION

Мамадалиев Н.К.*, Абдуллаев А.А.**

* *Ташкентский институт ирригации и мелиорации,
Узбекистан, Ташкент*

** *Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека,
Узбекистан, Ташкент
akmal09.07.85@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + u u_{yy} + \alpha u_y = 0 \quad (1)$$

в области D - конечная односвязная область, ограниченная при $y > 0$ гладкой кривой σ с концами в точках $A(-1;0)$, $B(1;0)$ и при $y < 0$ характеристиками уравнения (1).

Обозначим через D_1 и D_2 части области D в которых соответственно $y > 0$ и $y < 0$. Пусть $A_0(0;0)$, а $A_0C_1: x + 2\sqrt{-y} = 0$, $A_0C_2: x - 2\sqrt{-y} = 0$ характеристики уравнения (1), пересекающейся с характеристиками AC и BC соответственно в точках

$$C_1\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{16}\right], C_2\left[\frac{1}{2}; -\frac{1}{16}\right].$$

Через D^* обозначим область, ограниченную контуром $A_0C_2BCAC_1A_0$, а через D_{21}^* и D_{22}^* - части области D_2 соответственно с границами AC_1A_0A и $A_0C_2BA_0$. Здесь D^* - подобласть D в котором σ является нормальной кривой имеющее уравнение $x^2 + 4y = 1$. Пусть

$$\alpha = -n + \alpha_0; \quad -\frac{1}{2} < \alpha_0 < 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Задача. Требуется определить в области D^* функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

а) $u(x, y) \in C(\overline{D^*})$;

б) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $y > 0$ и обобщенным решением класса $R_2[1]$ в области $D_{21}^* \cup D_{22}^*$;

в) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$(-1)^n \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha [u - A_n^-(\tau)]'_y = \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha [u_y + A_n^+(u)] = \nu(x)$$

г) $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u|_\sigma = f(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$

$$u|_{A_0C_1} = \varphi_1(x), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0,$$

$$u|_{A_0C_2} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

где $u(x, 0) = \tau(x)$, $-1 \leq x \leq 1$ и l – длина кривой, $A_n^-(\tau), A_n^+(u)$ – определяемые операторы от заданных функций [1], $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – заданные функции, причем

$f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ непрерывны и $\varphi_j(0) = \varphi_j^{(k)}(0) = 0$, $k = \overline{1, n}$, $j = 1, 2$;

$\varphi_j^{(n+1)}(x) = x^{2-2\alpha-n} \bar{\varphi}_j(x)$, $j = 1, 2$; – известная непрерывная функция и $\bar{\varphi}(0) \neq 0$.

При определенных ограничениях на заданные функции, доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Литература

1. Мамадалиев Н.К. О представлении решения видоизмененной задачи Коши // Сиб. матем. журн., 2000г. Т.41, №5. С.1087-1097.

УДК 517.9

ДИСКРЕТНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

DISCRETE PURSUIT GAME, DESCRIBES A SECOND ORDER EQUATION WITH THE INITIAL CONDITION

Маматов М.Ш., Алимов Х.Н.

Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека, Ташкент 100174, Узбекистан, E-mail: mamatovmsh@mail.ru

Джизакский Политехнический институт, Джизак 130100, Узбекистан, E-mail: nematalimov@yandex.ru

Модельным примером изучаемого класса дискретных игр является дискретный аналог следующего процесса преследования описываемый уравнениями колебания струны (см. [1]- [4])

$$\begin{aligned} z_{tt} - a^2 z_{xx} &= -u + v, \\ (x, t) \in D &= \{0 < x < l, 0 < t < T\}, \\ z(x, 0) &= \varphi_0(x), \quad z_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ z(0, t) &= z(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u &= u(x, t), \quad |u(x, t)| \leq \rho, \quad v = v(x, t), \quad |v(x, y)| \leq \sigma, \sigma < \rho. \end{aligned} \quad (*)$$

Игра считается законченной, если $z_0(x, t) \in \overline{M}_1 + \varepsilon S$, $\overline{M}_1 \subset R^1$, $\varepsilon > 0$, $S = [-1, 1]$, для некоторых $t = t' \leq T$ для всех $0 < l_0 \leq x \leq l_1 < l$. $\varphi_0(x) \in H^1[0, l]$, $\varphi_1(x) \in L_2[0, l]$, $u(x, t), v(x, y) \in L_2(D)$.

Аппроксимируем задачу (*) следующими дискретными системами

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau^2} (z_{n,m+1} - 2z_{n,m} + z_{n,m-1}) - \\ & - \frac{a^2}{h^2} (z_{n+1,m} - 2z_{n,m} + z_{n-1,m}) = -u_{n,m} + v_{n,m}, \end{aligned} \quad (**)$$

$1 \leq n \leq r-1$, $1 \leq m \leq \theta-1$. Начальное условие (*) заменяем разностными соотношениями

$$z_{0,m} = \phi_0(x_n), \quad 0 \leq n \leq r,$$

$$z_{1,m} = \phi_0(x_n) + \tau \phi_1(x_n) + \frac{\tau^2}{2} \left(-u_{0,m} + v_{0,m} + \frac{\phi_0(x_{n+1}) - 2\phi_0(x_n) + \phi_0(x_{n-1}))}{h^2} \right)$$

Краевые условия заменяем условиями в узлах $z_{n,0} = 0, \quad z_{m,r} = 0, \quad 0 \leq m \leq \theta$.

Вместо игры (**) будем рассматривать более общую дискретную игру, в которой движение точки z евклидова пространства R^{r-1} описывается уравнениями

$$z_{m-1} - Cz_m + z_{m+1} = -u_m + v_m, \quad 1 \leq m \leq \theta - 1, \quad (1)$$

$$z_0 = \phi_0, \quad z_1 = \phi_1 \quad (2)$$

где m - номер шага, $C = (r-1) \times (r-1)$ - постоянная квадратная матрица, u, v - управляющие параметры, u - параметр преследования, v - параметр убегания, $u_j \in P \subset R^{r-1}, v_j \in Q \subset R^{r-1}$,

P и Q - непустые множества. Кроме того, в R^{r-1} выделено терминальное множество M . Цель преследующего игрока вывести z_j на множество M , убегающий игрок стремится этому помешать.

В этой заметке изучены игровые задачи с дискретными уравнениями второго порядка вида (1),(2). Получены достаточные условия для возможности завершения преследования в игре (1).

Литература

1. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1977, 440с.
2. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. - М.: Наука, 1983, 487 с.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978, 570 с.
4. Маматов М.Ш., Тухтасинов М. О задаче преследования в распределенных управляемых системах // Кибернетика и системный анализ. - Киев. 2009. - Т. 45. - № 2. - С. 153-158.

УДК 517.9

ДИСКРЕТНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

DISCRETE PURSUIT GAME DESCRIBED BY SECOND-ORDER EQUATIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS

Маматов М.Ш. *, Ташманов Е.Б. **

*Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека, Ташкент 100174, Узбекистан, :

mamatovmsh@mail.ru

**Ташкентский Университет Информационных технологий, Ташкент 100084, Узбекистан,

tashmanoveb@mail.ru

Модельным примером изучаемого класса дискретных игр является следующий процесс преследования, описываемый уравнениями [1]

$$\begin{aligned} -4z_{i,j} + z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} &= -u_{i,j} + v_{i,j}, \left| u_{i,j} \right| \leq \rho, \left| v_{i,j} \right| \leq \sigma, \sigma < \rho, \\ z_{0,j} &= 0, \quad z_{m+1,j} = 0, \quad z_{i,0} = 0, \quad z_{i,\theta} = 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, \theta - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где левая часть уравнения дискретный аналог лапласиана $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции яркости изображения $z = z(x, y)$, а $z_{i,j}$ – яркости изображения в точке (x_i, y_j) , которое измеряется в пикселях, $u_{i,j}, v_{i,j}$ – управляющие параметры. Преследование считается завершенным, если $z_{i,j}$ удовлетворяют условие: $\delta \leq z_{i,j} \leq \delta + \varepsilon, i_0 \leq i \leq i_1, j_0 \leq j \leq j_1$ где $1 \leq i_0, i_1 \leq m, 1 \leq j_0, j_1 \leq \theta - 1$ для некоторых заранее заданных $\delta > 0, \varepsilon > 0$.

Используя граничные условия, при $i = 1, 2, \dots, m$ из (1) получим систему

$$\begin{aligned} -4z_{1,j} + z_{0,j} + z_{2,j} + z_{1,j-1} + z_{1,j+1} &= -u_{1,j} + v_{1,j}, \\ -4z_{2,j} + z_{1,j} + z_{3,j} + z_{2,j-1} + z_{2,j+1} &= -u_{2,j} + v_{2,j}, \\ &\dots \\ -4z_{i,j} + z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} &= -u_{i,j} + v_{i,j}, \\ &\dots \\ -4z_{m-1,j} + z_{m-2,j} + z_{m,j} + z_{m-1,j-1} + z_{m-1,j+1} &= -u_{m-1,j} + v_{m-1,j}, \\ -4z_{m,i} + z_{m-1,i} + z_{m+1,i} + z_{m,i-1} + z_{m,i+1} &= -u_{m,i} + v_{m,i}. \end{aligned}$$

Обозначая, $z_j = (z_{1,j}, z_{2,j}, \dots, z_{m,j})^T, u_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{m,j})^T, v_j = (v_{1,j}, v_{2,j}, \dots, v_{m,j})^T$ имеем

$$\begin{aligned} -z_{j-1} + Cz_j - z_{j+1} &= u_j - v_j, 1 \leq j \leq \theta - 1, \\ z_0 &= 0, \quad z_\theta = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $z_j \in R^m$ и u_j – управляющий параметр преследователя; v_j – управляющий параметр убегающего игрока: $u_j \in R^m, v_j \in R^m$ компоненты, которые удовлетворяют условию, $|u_{i,j}| \leq \rho, |v_{i,j}| \leq \sigma, \sigma < \rho$, а C – квадратная матрица. $M \subset R^m$ терминальное множество, в котором игра заканчивается.

В этой заметке изучены игровые задачи с дискретными уравнениями второго порядка вида (2). Получены достаточные условия для возможности завершения преследования, когда положение объекта задано в граничных моментах. Для решения этой задачи применяются полиномы Чебышева второго рода [2], [3].

Литература

1. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1977, 440с.
2. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983, 487 с.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978, 570 с.

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ФРАКТАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION WITH FRACTAL LAPLACE OPERATOR IN THE MAIN PART

Масаева О.Х.

Институт прикладной математики и автоматизации,

Россия, Нальчик

olesya.masaeva@yandex.ru

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, y): 0 < x < y, 0 < y < b\}$ уравнение

$$D_{0x}^{\alpha-1}u_x(\xi, y) + D_{0y}^{\beta-1}u_y(x, \eta) + cu = f(x, y), \quad (1)$$

где $1 < \alpha, \beta < 2$, $c = c(x, y)$, $u = u(x, y)$, $D_{0\tau}^\nu$ - оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка ν с началом в точке 0 и с концом в точке t [1, с. 9].

В работах [2], [3] исследована задача Дирихле для фрактальных уравнений Лапласа.

В данной работе доказана единственность решения следующей смешанной краевой задачи.

Задача. Найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = 0, \quad [D_{0x}^{\alpha-2}u_x(\xi, y)]_{x=a} = 0,$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0.$$

Литература.

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Наука, 2003.
2. Масаева О.Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто. Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, №3. С. 442-446.
3. Масаева О.Х. Априорная оценка для уравнения с фрактальным оператором
4. Лапласа в главной части. Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. академии наук. 2009. Т. 11, №1. С. 36-37.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МНОГОСТАДИЙНОГО СИНТЕЗА ВЕЩЕСТВА*

ON PROPERTIES OF SOLUTIONS TO ONE NONLINEAR SYSTEM ARISING UNDER MODELING MULTISTAGE SYNTHESIS OF A SUBSTANCE

Матвеева И.И.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
matveeva@math.nsc.ru

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g(t, x_n) - \frac{n-1}{\tau} \frac{x_1}{1 + \rho x_1^\gamma}, \\ \frac{dx_j}{dt} &= \frac{n-1}{\tau} \frac{x_{j-1}}{1 + \rho x_{j-1}^\gamma} - \frac{n-1}{\tau} \frac{x_j}{1 + \rho x_j^\gamma}, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{n-1}{\tau} \frac{x_{n-1}}{1 + \rho x_{n-1}^\gamma} - \theta x_n,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\tau, \gamma > 0$, $\rho, \theta \geq 0$, $g(t, u)$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по u . Системы такого вида возникают при моделировании многостадийного синтеза вещества (см., например, [1]), при этом количество n уравнений в системе определяется числом стадий. Если количество стадий очень велико ($n \gg 1$), то для эффективного исследования можно использовать методы, предложенные Г.В. Демиденко для разнообразных систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности (см., например, [2-4]).

В настоящей работе исследуются свойства компонент $x_j(t, \tau)$ решения системы (1) в зависимости от малого параметра τ при фиксированном n . В частности, устанавливается, что последняя компонента $x_n(t, \tau)$ решения системы (1) при $\tau \ll 1$ аппроксимируется решением $y(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -\theta y + g(t, y).$$

Поскольку параметр τ отвечает за время протекания процесса синтеза, то полученные результаты дают эффективный способ для вычисления концентрации конечного продукта $x_n(t, \tau)$, когда переход от одной стадии синтеза к другой происходит очень быстро. Исследования при $\rho = 0$ проведены в работе [5].

Литература

1. Демиденко Г.В., Колчанов Н.А., Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. выч. матем. матем. физ. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276-2295.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00329).

2. Демиденко Г.В., Лихошвай В.А., Котова Т.В., Хропова Ю.Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58-68.

3. Демиденко Г.В. О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Математический форум. 2011. Т. 5. С. 45-56.

4. Демиденко Г.В. Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1274-1282.

5. Matveeva I.I. On properties of solutions to a system of differential equations with a parameter // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, No. 2. P. 75-84.

УДК 917.956

ОД ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ-ГУРСА ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ON ONE CAUCHY-GOURSAT PROBLEM FOR THE SYSTEM OF FOURTH ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS

Мередов М.*, Мередова М.М.**

* Международный Туркмено-турецкий университет,
Туркменистан, Ашхабад

** Образовательный центр,
Туркменистан, Ашхабад
mmuham@gmail.com

В однозначной области D , ограниченной сверху плоскостью $t = 0$, снизу – характеристическим конусом заданного гиперболического оператора, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} L(u) = K^2(u) + L_1(u, v) = F_1(u, t) \\ L(v) = K^2(v) + L_2(u, v) = F_2(v, t) \end{cases} \quad (1)$$

где оператор K задан следующим образом

$$K = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varphi_i(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (\varphi_i(x, t) > 0)$$

$L_1(u, v)$, $L_2(u, v)$ – линейные дифференциальные операторы не выше четвертого порядка с достаточно гладкими коэффициентами.

Для системы (1) изучается

Задача Коши-Гурса. Требуется найти решение системы уравнений (2) $u(x, t)$, $v(x, t)$ в области D , удовлетворяющее следующим условиям

- 1) $u(x, t), v(x, t) \in C^2(\bar{D}) \cap C^4(D)$,
- 2) $u(x, t)|_S = 0$, $v(x, t)|_S = 0$,
- 3) $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, $v(x, 0) = 0$, $v_t(x, 0) = 0$,

где S – поверхность характеристического конуса оператора K .

При некоторых условиях на коэффициенты системы доказана однозначная обобщенная разрешимость задачи Коши-Гурса.

ГИБРИДНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

HYBRID SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS*

Мижидон А.Д.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, Улан-Удэ
miarsdu@mail.ru

Применение для построения уравнений динамики механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами вариационного общего для них принципа Гамильтона приводит к рассмотрению гибридных систем дифференциальных уравнений [1,2], исследованию которых в настоящее время не уделено должное внимание. Под гибридными системами дифференциальных уравнений понимаются системы дифференциальных уравнений, состоящие из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Рассмотрим гибридную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + A_1(C_1 y(t) + C_2 \bar{u}(t)), \\ a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda u(x, t) + b \frac{\partial}{\partial t} \Lambda u(x, t) + c \Lambda u(x, t) = \\ = \sum_{i=1}^m q_i (C_1^{iT} z(t) - C_1^{iT} u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (1)$$

где A, A_1, C_1, C_2 - матрицы; a, b, c, q_i, a_i - постоянные; C_1^i, C_2^i - строки матриц C_1, C_2 ; $\delta(x - a_i)$ - функция Дирака;

$$y(t) \in R^n; \quad u(x, t) \in R^1; \quad \bar{u}(t) \in R^m: \bar{u}(t) = (u(a_1, t), u(a_2, t), \dots, u(a_m, t))^T;$$

$$\Lambda = a_0 p + a_1 p^2 + \dots + a_s p^{2s}, \quad p = \frac{\partial}{\partial x} \left(p = \frac{d}{dx} \right).$$

На функцию $u(x, t)$ наложены граничные условия

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^i u(0, t)}{\partial x^i} = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^i u(l, t)}{\partial x^i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2)$$

Заменой

$$y(t) = Ye^{\lambda t}, \quad u(x, t) = U(x)e^{\lambda t},$$

систему (1) можно свести к алгеброическо-дифференциальной системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda Y = AY + A_1(C_1 Y + C_2 \bar{U}), \\ (a\lambda^2 + b\lambda + c)\Lambda U(x) = \sum_{i=1}^m q_i (C_1^{iT} Y - C_1^{iT} U(x)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (3)$$

при этом граничным условиям (2) соответствуют условия

$$U(0) = 0, \quad \frac{\partial^i U(0)}{\partial x^i} = 0, \quad U(l) = 0, \quad \frac{\partial^i U(l)}{\partial x^i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (4)$$

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-08-00973а

* The reported study was partially supported by RFBR, research project No. 15-08-00973 a

Действительные или комплексные значения λ , при котором существует обобщенное решение краевой задачи (3)-(4), назовем собственным значением, а соответствующие собственным значениям решения краевой задачи собственными решениями краевой задачи.

В докладе обсуждаются теоретические основы исследования гибридных систем дифференциальных уравнений вида (1), предлагается аналитико-численный метод поиска собственных значений и собственных решений вспомогательной краевой задачи (3)-(4). При этом приводятся все необходимые теоретические исследования, связанные с разработкой аналитико-численного метода.

В качестве примера, рассматривается задача исследования собственных частот механической системы [3] - твердое тело с двумя степенями свободы, прикрепленное двумя пружинами к упругому стержню.

В заключении рассмотрены перспективы и возможности дальнейшего развития исследований гибридных дифференциальных уравнений вида (1), основанные на полученных результатах.

Литература

1. Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. Краевая задача для одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. № 9. Математика и информатика, 2013. – С. 130-137.
2. Мижидон А.Д., Дабеева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.) Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Вестник ВСГУТУ. 2013. № 6. С. 5-12
3. Philip D. Cha Free vibrations of a uniform beam with multiple elastically mounted two-degree-of-freedom systems, Journal of Sound and Vibration 307 (2007) 386-392

УДК 517.977.58

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ОДНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ*

ESTIMATION OF THE LIMIT POSSIBILITIES FOR ONE CONTROL SYSTEM*

Мижидон К.А.

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, Улан-Удэ
migka@mail.ru*

Пусть задана управляемая система линейных дифференциальных уравнений при $t \geq t_0$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1)$$

где $x(t)$ - n -мерная вектор-функция фазовых переменных; $u(t)$ - r -мерная вектор-функция управляющих воздействий; A и B - постоянные матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(n \times r)$ соответственно, и $f(t)$ - n -мерная непрерывная вектор-функция возмущений. Допустимыми управлениями являются кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие условию:

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-41-04020 р_сибирь_а

Исследование выполнено в рамках гранта «Молодые ученые ВСГУТУ», 2015г.

* The reported study was supported by RFBR, research project No. 15-41-04020 р_сибирь_а
The reported study was supported by ESSTU, Grant "Young scientists ESSTU", 2015.

$$u'(t)R_j u(t) \leq 1, \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad t \in [t_0, \infty).$$

Пусть $u^*(t)$ - допустимое управление, при котором на траекториях системы (1) достигается минимум функционала

$$J(u(\cdot)) = \max_{t \geq t_0} \|x(t)\|^2. \quad (2)$$

Требуется оценить снизу оптимальное значение функционала (2). Другими словами, требуется найти $\bar{J}$, такое что

$$\bar{J} \leq J(u^*(\cdot)).$$

В качестве оценки предельного значения функционала (2) $\bar{J}$ можно взять оптимальное значение функционала задачи (3):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(t), & x(t_0) = x^0, \\ u'(t)R_j u(t) \leq 1, & (j=1, 2, \dots, p), \quad t \in [t_0, t_1], \\ \|x(t)\|^2 \leq \|x(t_1)\|^2 & \forall t \leq t_1, \\ J_2(u(\cdot)) = \|x(t_1)\|^2 \rightarrow \min. \end{cases} \quad (3)$$

В докладе предлагается аналитико-численный метод решения задачи (3), основанный на идеях сведения задачи оптимального управления к задаче математического программирования. При этом приводятся все необходимые теоретические исследования, связанные с разработкой аналитико-численного метода. Рассмотрен численный пример.

УДК 517.956.6.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕДОСТАЮЩИМ УСЛОВИЕМ ТРИКОМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ, ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH MISSING CONDITION TRICOMI ON CHARACTERISTICS FOR EQUATIONS OF MIXED TYPE OF THE SECOND KIND

Мирсабуров М.*, Бобомуродов У.Э.*

*Термезский государственный университет
Узбекистан, Термез
mirsaburov@mail.ru

Пусть Ω -конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$ ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$ лежащей в полуплоскости $y > 0$, и двумя характеристиками $AC : \xi = x - (2 \setminus (2-m))(-y)^{(2-m)/2} = 0$, $BC : \eta = x + (2 \setminus (2-m))(-y)^{(2-m)/2} = 1$ уравнения

$$u_{xx} + (\text{sign } y)|y|^m u_{yy} + \alpha |y|^{m-1} u_y = 0, \quad (1)$$

где постоянные $m \in (0, 2)$, $\alpha \in (m-1, 1)$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 , точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками выходящих из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (0,1)$ – интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x) = 1 - kx$ – линейный диффеоморфизм из множества точек отрезка $[0, c]$ в множество точек отрезка $[c, 1]$, со свойствами $p(0) = 1, p(c) = c$ где $k = (1 - c)/c$.

Настоящая работа посвящена исследованию корректности задачи с условием Трикоми на характеристике AC_0 и аналогом условия Франкля на отрезке вырождения AB , которое заменяет недостающее условие Трикоми на C_0C

Задача TF_α Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$; обладающую следующими свойствами:

1. $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1) в области Ω^+ ;
2. $u(x, y)$ – обобщенное решение уравнения (1) класса R_2 в области Ω^- ;
3. На линии параболического вырождения выполняются условия склеивания

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad x \in \bar{I}, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} = - \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} = v(x), \quad x \in I \setminus \{c\}; \quad (3)$$

4. $u(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$u|_\Gamma = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$u|_{\xi=0} = \psi(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq c, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \mu u(p(x), 0) + f(x), \quad 0 \leq x \leq c \quad (6)$$

где μ – некоторая постоянная, $\varphi(x), \psi(\eta), f(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции в замыкании множества их определения, причем $\varphi(0) = \psi(0)$.

Доказательство единственности и существование решения задачи TF_α проводится методами работ [1, с.228] и [2].

Литература

1. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа М.: Высшая школа. 1985. -304с.
2. Мирсабуров М. Задача с недостающим условием Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа //Дифференциальные уравнения. 2014. том.50, №1, с.79-87.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ
И АКУСТО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ
МОДЕЛИ "ЗЕМЛЯ–АТМОСФЕРА" ПРИ НАЛИЧИИ СТРАТИФИКАЦИИ
ВЕТРА В АТМОСФЕРЕ***

**NUMERICAL MODELING OF SEISMIC AND ACOUSTIC-GRAVITY
WAVES PROPAGATION FOR A HETEROGENEOUS EARTH-
ATMOSPHERE MODEL IN A WIND-STRATIFIED ATMOSPHERE**

Михайлов А.А.*, Мартынов В.Н.**

** Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Россия, Новосибирск
alex_mikh@omzg.sccc.ru*

*** Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Россия, Новосибирск
vnm@nmsf.sccc.ru*

При математическом моделировании сейсмических волновых полей внутри упругой среды обычно полагают, что поверхность среды граничит с вакуумом и задают граничные условия на свободной поверхности. Тем самым полагают, что на границе сейсмические волны абсолютно отражаются, при этом пренебрегают эффектом генерации упругими волнами акусто-гравитационных волн в атмосфере и их взаимодействием при распространении вдоль границы. В последнее десятилетие появились теоретические и экспериментальные исследования, в которых показана высокая степень взаимосвязи между волнами в литосфере и атмосфере. В работе [1] описан эффект акусто-сейсмической индукции, при которой акустическая волна от вибратора благодаря явлению рефракции в атмосфере возбуждает интенсивные поверхностные сейсмические волны на расстоянии десятков километров. В свою очередь литосферные сейсмические волны от землетрясений и взрывов генерируют атмосферные акусто-гравитационные волны, которые особенно интенсивны в верхних слоях атмосферы с малой плотностью и ионосфере. Теоретическим исследованиям волновых процессов на границе упругого полупространства с изотермической однородной атмосферой посвящены работы [2, 3]. В них установлены и исследуются свойства поверхностной волны Стоунли-Шолтэ и модифицированной волны Лэмба.

В данной работе исследуются результаты численных расчётов моделирования распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для смещённой модели "Атмосфера-Земля". В рассматриваемой постановке задачи исходная система записывается в виде гиперболической системы первого порядка для трёхмерной Декартовой системы координат. При распространении акусто-гравитационных волн в изотермической атмосфере учитывается зависимость плотности воздуха и скорости ветра от высоты. Параметры упругой среды (плотность и скорости продольных и поперечных волн) имеют зависимость по двум пространственным координатам, а по третьей координате среда считается однородной. Используемый алгоритм для решения поставленной задачи построен на комбинировании интегральных преобразований с конечно-разностным методом. Алгоритм основан на применении интегрального преобразования Лагерра по временной координате. Этот метод можно рассматривать как аналог известного спектрального метода на основе Фурье преобразования. Однако, в отличие от Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы урав-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-05-00867)

нений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [4, 5], а затем развит для задач вязкоупругости [6, 7] и теории пористых сред [8]. В указанных работах рассмотрены отличительные особенности данного метода от принятых подходов и обсуждаются преимущества применения интегрального преобразования Лагерра в отличие от разностного метода и Фурье преобразования по времени.

Литература

1. Алексеев А. С., Глинский Б. М., Дряхлов С. И. и др. Эффект акустосейсмической индукции при вибросейсмическом зондировании // Доклады РАН – 1996. – Т. 346. – № 5. – С. 664-667
2. Гасилова Л. А., Петухов Ю. В. К теории поверхностных волн, распространяющихся вдоль разных границ раздела в атмосфере // Известия РАН. Физика Атмосферы и Океана – 1999. – Т. 35. – № 1. – С. 14-23
3. Разин А. В. Распространение сферического акустического дельта-импульса вдоль границы газ—твёрдое тело // Известия РАН. Физика Земли – 1993. – № 2. – С. 73-77
4. Mikhailenko B.G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters – 1999. – № 12. – P. 105–110
5. Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // Journal of Computational Acoustics – 2001. – Vol. 9. – № 4. – P. 1523-1541
6. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Journal Pure and Applied Geophysics – 2003. – № 160. – P. 1207-1224
7. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting – 2003. – № 51. – P. 37-48
8. Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А. Использование спектрального метода Лагерра для решения линейной двумерной динамической задачи для пористых сред // Сибирский журнал индустриальной математики – 2008. – Т. 11. – № 2(35). – С. 86-95

УДК 517.2

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

NUMERICAL-ANALYTICAL DETERMINATION OF THE OWN VALUES OF A BOUNDARY TASK

Молчанова Е. А.

*Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова,
Россия, Абакан
tevgen2001@mail.ru*

В задачах устойчивости и колебаний тонких оболочек в результате применения асимптотического метода возникает уравнение четвертого порядка [1]

$$H_0 w_0 \equiv P_1^2 (x^3 w_0'')'' + P_1 [(P_1 x^2 w_0')'' + P_2 x^2 w_0''] + [x^{-3} + (P_2^2 - \Lambda)x] w_0 = 0, \kappa \leq x \leq 1, \quad (1)$$

которое вместе с граничными условиями $w_0(\kappa) = w_0'(\kappa) = 0$, $w_0(1) = w_0'(1) = 0$ далее предлагается решать численно для определения собственных значений Λ при тех комбинациях параметров P_1 , P_2 , κ , которым соответствуют меньшие и соседние с ними собственные значения. В уравнении (1) параметр P_1 и его квадрат P_1^2 оказываются малыми па-

раметрами при производных и возникает возможность продолжения асимптотической процедуры теперь уже применительно к уравнению (1).

Введем малый параметр по формуле $\mu^2 = P_1$ и будем искать решение (1) в виде

$$w_0(x, \mu) = [a_0(x) + \mu a_1(x) + \dots] e^{\frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} b(x) dx}, a_0 \neq 0. \quad (2)$$

Для определения неизвестных функций a_0, b_0 подставляем (2) в (1) и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях малого параметра μ . В результате получаем последовательность уравнений, из которых рассмотрим первые два.

В нулевом приближении имеем уравнение

$$Q_0(x, b) a_0(x) \equiv x^3 b^4 a_0 + 2P_2 x^2 b^2 a_0 + \left[\frac{1}{x^3} + (P_2^2 - \Lambda) x \right] a_0 = 0. \quad (3)$$

Рассматривая (3) как биквадратное, определяем его корни

$$b_{1,2,3,4} = \pm \left(\frac{-P_2 \pm (\Lambda - \frac{1}{x^4})^{1/2}}{x} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

В первом приближении имеет место уравнение

$$Q_0(x, b) a_1(x) + 4bx^2(b^2x + P_2) a_0' + 2x(3b^2b'x^2 + 3b^3x + P_2b'x + 2P_2b) a_0 \equiv 0, \quad (5)$$

служащее для определения функций $a_0^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, каждая из которых соответствует определенному корню (4) характеристического уравнения (3). Первое слагаемое (5) тождественно равно нулю в силу (4), (3). Тогда, считая $P_2 = \text{const}$, вместо (5) получим уравнение $a_0' a_0^{-1} + b'(2b)^{-1} + x^{-1} + (2b_x b' + b^2)(2(b^2x + P_2))^{-1} = 0$, решение которого сводится к квадратурам и дает

$$a_0^{(k)} = x |\Lambda(b_k(1 - \Lambda x^4))^{-1}|^{1/2}. \quad (6)$$

При некоторых значениях $x = x_0$ корни (4) характеристического уравнения (4) оказываются кратными и, как следует из (6), экспоненциальное представление решения уравнения (1) теряет смысл. Точки $x = x_0$ называются точками поворота. В окрестности этих точек решения имеют асимптотику, отличную от используемой здесь ВКБ - асимптотики. Построение интегралов уравнения (1) в окрестности точек поворота может быть произведено по методу эталонных функций. Один из таких случаев рассмотрен в [2], а здесь, продолжая решение краевой задачи, считаем корни b_k простыми.

В результате произведенных построений мы определили первый коэффициент ряда (3). С точностью до членов, имеющих порядок μ , общее решение уравнения (1) представим в виде линейной комбинации

$$w_0 = \sum_{k=1}^4 C_k a_0^{(k)} e^{\frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} b_k(x) dx}. \quad (7)$$

Подчиняя (7) граничным условиям $w_0 = w_0' = 0$ при $x = 1, x = \infty$, получим систему четырех алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования C_k . Условие существования нетривиального решения этой системы служит для определения параметра частоты Λ .

Значения P_2 , соответствующие минимуму Λ , определяем из условия $\int_1^{\infty} w_0 \frac{\partial H_0}{\partial P_2} w_0 dx = 0$. Зададимся функцией

$$w_0(x, \mu) = x^{1/4} (1 - \cos 2(d\sqrt{x} - c)), \quad (8)$$

с точностью до членов порядка d^{-1} , где $d = 2(P_2 P_1^{-1})^{1/2}$, удовлетворяет граничным условиям, и из уравнения $\int_1^{\infty} w_0 (P_1 w_0'' + 2P_2/x w_0) dx = 0$ с той же точностью определим

интересующие нас значения

$$\widetilde{P}_2^0 = P_2^0 / P_1 = - \frac{\int_{\chi}^1 d^2 \cdot \cos 2(d\sqrt{x}-c)(1-\cos(d\sqrt{x}-c)) dx}{\int_{\chi}^1 (1-\cos(d\sqrt{x}-c))^2 dx}. \quad (9)$$

Подставим (8), (9) в исходное уравнение (1), оставим в нем только старшие члены, и из условия $\int_{\chi}^1 w_0 \left[P_1^2 x^2 w_0^{IV} + P_1 P_2 x w_0'' + \left(\frac{1}{x^4} - \Lambda \right) w_0 \right] dx = 0$ определим значения $\widetilde{\Lambda}$, соответствующие $P_2 = P_2^0$:

$$\widetilde{\Lambda}^0 = \frac{\Lambda^0}{P_1} = \frac{P_1 d^2 \left(\frac{P_2}{P_1} - d^2 \right) \int_{\chi}^1 x (1 - \cos 2(d\sqrt{x}-c)) \cos 2(d\sqrt{x}-c) dx}{\int_{\chi}^1 x (1 - \cos 2(d\sqrt{x}-c))^2 dx} + \frac{\int_{\chi}^1 \frac{(1 - \cos 2(d\sqrt{x}-c))^2}{x^5} dx}{\int_{\chi}^1 x (1 - \cos 2(d\sqrt{x}-c))^2 dx}. \quad (10)$$

Сравнение вычислений по полученной формуле (10) с результатами применения численного метода показывает высокую точность их совпадения при больших χ (менее 0.1% при $\chi = 0.9$ и 0.8) и ее снижение вместе с уменьшением χ .

Литература

1. А.Л. Гольденвейзер, Б.В. Лидский, П.Е. Товстик Свободные колебания тонких упругих оболочек.-М.: 1979.-382 с
2. Е.А. Молчанова Применение эталонных функций в задаче на собственные значения.- XXV - Международная научная конференция Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-25, Волгоград, 2012.-183 с

УДК 517.977.57:517.95

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ХИМИЧЕСКИМ РЕАКТОРОМ

NECESSARY CONDITION OF OPTIMALITY IN CHEMICAL REACTOR CONTROL PROBLEM

Мусабеков К.С.

Академия "Кокше" Республика Казахстан, г.Кокшетау, ул. Абая 9,
E-mail: it.kgu@mail.ru.

В работе рассматривается задача оптимального управления одной математической моделью не адиабатического трубчатого реактора заданного в виде следующей системы дифференциальных уравнений [5]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} &= a \cdot \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - c \cdot v_1 f(v_2), \\ \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} &= b \cdot \frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + \kappa \cdot v_1 f(v_2) + g \cdot (v_3(t) - v_2(x,t)), \\ \frac{dv_3(t)}{dt} &= d \cdot \left(\int_0^1 v_2(x,t) dx - v_3(t) \right) + u(t) \cdot (E - v_3(t)) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

с граничными

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \frac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) &= -1, \quad \frac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0, \\ b \cdot \frac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) &= -1, \quad \frac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и начальными условиями

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), v_2(x,0) = v_{20}(x), v_3(0) = v_{30} \quad (3)$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma/v_2(x,t))$; $a, b, c, \Gamma, k, g, d, E, v_{30}$ – константы, положительные параметры системы; $u(t)$ – управляющая функция (управление); $v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(t)$ – функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно, $(x,t) \in \overline{Q_T}$, $Q_T = (0;1) \times (0,T)$, T – фиксированное число.

Здесь будут использованы обозначения функциональных пространств, принятые в работах [1, 2].

Для задачи (1)–(3) была доказана [3] теорема существования и единственности решения $v_1(x,t), v_2(x,t) \in C_{x,t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $v_3(t) \in C[0,T]$ при произвольной измеримой и ограниченной функции

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(1,t) dt \quad (4)$$

т. е. суммарного за время T количества, не прореагировавшего вещества на выходе реактора, при условиях (1) – (3), измеримом и ограниченном почти всюду на $[0,T]$ управлении $u(t)$, и следующем ограничении на функцию $v_2(x,t)$:

$$v_2(x,t) \leq v_2^* = \text{const}. \quad (5)$$

Для задачи (1)–(5) получено необходимое условие оптимальности [4] в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина, предлагается алгоритм поиска оптимального управления в рассматриваемой задаче.

Литература

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. Белоносов В.С., Зеленьяк Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск: НГУ, 1975.
3. Мусабеков К.С. Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением // Вестник Новосибирского гос ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т.10. Вып. 2, с. 71-84.
4. Мусабеков К.С. Необходимое условие оптимальности в одной задаче с фазовым ограничением. // Целочисленная оптимизация и ее приложения (Управляемые системы). – Новосибирск, 1990. – Вып. 30. с. 46 – 56.
5. Georgakis C., Aris R., Amundson N.R. Studies in the control of Tubular Reactors // Chemical Engineering Science. 1977, v.32. No 11, p.1359-1387.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТВЕРДЕНИЯ ЗАКЛАДОЧНОГО МАССИВА

MODELING OF THE HARDENING PROCESS FOR FILLING

Мустафин С.А., Зейнуллина А.А., Мусина Ж.Ф.

*Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК,
Казахстан, Алматы
mustafinsal@mail.ru*

Предлагается методика прогнозирования процесса твердения закладочного массива по данным наблюдений за показателями состояний закладочного материала, выполненных в более ранние моменты времени. Цель методики позволяет повысить достоверность прогнозов и получить модель, которая более точно выражает прогнозируемую траекторию изменения закладочного материала по наборам признаков его состояния на горнорудных предприятиях. Методика основана на работах по распознаванию образов и прогнозированию. Применение разработанной модели к решению конкретных задач позволит исследовать состояние закладочного массива по мере развития его твердения и устанавливать момент эксплуатационной готовности, важным этапом в процессе ведения добычных работ.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

LINEAR INVERSE PROBLEMS FOR SOME ANALOGUES BOUSSINESQ EQUATIONS

Г.В. Намсараева

*Восточно-Сибирский государственный университет
технологий и управления, Россия, Улан-Удэ
gerel@inbox.ru*

Исследована разрешимость некоторых обратных задач для уравнения Буссинеска.

Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной t , ранее изучались в работах [1-6], но постановка задач и техника доказательства, применяемые в настоящей работе, отличаются от постановки и техники указанных работ.

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox , Q - прямоугольник $\{(x,t): x \in \Omega, t \in (0,T), 0 < T < \infty\}$. Далее пусть $f(x,t), N(x,t), h(x,t)$ - функции, определенные в $\bar{Q}$.

Обратная задача I. Необходимо найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxt} = f(x,t) + q(x)h(x,t), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Обратная задача II. Необходимо найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1), при выполнении для $u(x,t)$ условий (2) и (3), а также условий

$$\int_0^T N(x,t)u(x,t)dt, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Обратные задачи I-II относятся к классу обратных задач пространственного типа. Подобные задачи для уравнения (1) изучались в некотором специальном случае, и подход к доказательству разрешимости отличается от настоящего. В данной работе использовался прием, основанный на сведении к интегродифференциальному уравнению, в котором нет неизвестного коэффициента.

Литература

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Basel: Marcell Dekker Inc., 2000.
2. Anikonov Yu.E. Inverse and Ill-Posed Problems. Utrecht: VSP, 1997.
3. Ivanchov M. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. Mathematical Studies. Monograph Series, vol.10. V NTL Publishers, 2003.
4. Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Utrecht: VSP, 2002, 211p.
5. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.
6. Demidenko G.V., Uspensky S.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative. Novosibirsk: Nauchn.kniga, 1998.
7. Мегралиев Я.Т., Ализаде Ф.Х. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска с интегральным условием. Чебышевский сборник, Том 14, Выпуск 4, 2013.
8. Мегралиев Я.Т. Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска-Лява с дополнительным интегральным условием. Сиб. журн. индустр. мат. Том 16, №1, 2013.
9. Касымалиева А.А. Обратные задачи для уравнения Буссинеска-Лява: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук (01.01.02). – Бишкек, 2014. – 15 с.
10. Kozhanov A.I. On the solvability of inverse problems of recovering the coefficients in the equations of composite type. Vestnik of the NSU. Series Mathematics, mechanics, computer science. T.8. Issue 2. 2008. p. 81-99.
11. Kozhanov A.I. On the solvability of the coefficient inverse problem for some equations of Sobolev type. Scientific statements Belgorod State Univ. Mathematics. Physics. Number 5. Issue 18. 2010. p. 88-98.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА
СМЕШАННОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМ ПО ВРЕМЕНИ
КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИФФУЗИИ**

**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE BOUSSINESQ EQUATION
OF MIXED TYPE WITH TIME DISCONTINUOUS DIFFUSION
COEFFICIENT**

В.А. Нахушева

*Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
Институт прикладной математики и автоматизации, г. Нальчик
ipma@niipma.ru*

Рассмотрим уравнение Буссинеска

$$2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < r = \text{const}, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

где: σ_0 – водоотдача или недостаток насыщения грунта; $u = u(x, t)$ – уровень грунтовой воды в точке $x \in [0, r]$ в момент времени t ; k – коэффициент фильтрации.

При определенной идеализации уравнение (1) аппроксимируется следующим линейным уравнением гиперболического типа:

$$k\Theta(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \Theta(t) \geq 0. \quad (2)$$

В случае фильтрации из оросительного канала в сухой грунт можно предположить, что

$k\Theta(t) = \sigma_0 t^m$, $m = \text{const} \geq 0$, уравнение (2) при этом записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad y \equiv t, \quad 0 < x < r. \quad (3)$$

Пусть $\xi = x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$, $\eta = x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$; $\beta = \frac{m}{2m+4}$; $\Omega_m = \{(x, y) : 0 < \xi < \eta < r\}$ – область, ограниченная характеристиками $AC_m : \xi = 0$, $BC_m : \eta = r$ уравнения (3) и отрезком

$\bar{J}_r = AB : O \text{ на } x \text{ оси } y = 0$, $A = (0, 0)$, $B = (r, 0)$; $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера;

$\gamma = \Gamma(\beta) / [\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)]$; $B(x, y)$ – бета-функция.

Любое регулярное в области Ω_m решение $u = u(x, y)$ уравнения (3) из класса $C(\bar{\Omega}_m)$, обращающееся в нуль на AC_m будет решением нагруженного уравнения

$$u(x, y) = \frac{(\eta - \xi)^{1-2\beta}}{B(\beta, 1-2\beta)} \int_0^\xi [(\eta - t)(\xi - t)]^{\beta-1} u(t, 0) dt. \quad (4)$$

Из (4) следует, что, если $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$, то $\gamma_m \tau(x) = -D_{0x}^{2\beta-1} \nu(t)$,

где $D_{0x}^{2\beta-1}$ – оператор дробного интегрирования порядка $1-2\beta$, $\gamma_m = \text{const} > 0$

Учет предыстории процесса фильтрации, предполагающий наличие при $y < 0$ насыщенной почвогрунтовой зоны, инициирует задачу сопряжения уравнения (3) с уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -T_0 < y < 0, \quad k_0 = \text{const} > 0. \quad (5)$$

Краевая задача сопряжения ставится следующим образом.

Пусть $D = \Omega_m \cup J_r \cup D^-$, где $D^- = \{(x, y) : 0 < x < r, -T_0 < y < 0\}$. Найти функцию $u = u(x, y)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(\Omega_m \cup J_r) \cap C^1(D^- \cup J_r)$, удовлетворяющую в области Ω_m уравнению (4), в области D^- – уравнению (5), на J_r – условию сопряжения и краевому условию

$$a \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial y} = b \lim_{y \rightarrow -0} \frac{\partial u}{\partial y} + c(x), \quad 0 < x < r,$$

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(r, y) = \varphi_r(y), \quad -T_0 \leq y \leq 0,$$

где $a = \text{const} > 0$, $b = \text{const}$ – заданные величины, $c(x)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_r(y)$ и $\psi(y)$ – заданные функции из $C[0, r]$ и $C[-T_0, 0]$ соответственно.

В работе найдены необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи сопряжения. Эти условия приводят к проблеме о вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера [1].

Литература

1. Нахушева В.А. О двух краевых задачах для линеаризованного уравнения Буссинеска смешанного типа с разрывным по времени коэффициентом диффузии // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 3. С. 33-40.

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THE LAPLACE EQUATION

Нахушева З.А.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Институт прикладной математики и автоматизации»
Россия, Нальчик
zarema_n@mail.ru

Для модельного эллиптического уравнения второго порядка

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

в области $D = \{z : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ исследована следующая

Задача. Найти регулярное в области D решение $u = u(z) = u(x, y)$, где $z = x + iy$ уравнения (1) непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x+ib) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (2)$$

$$u(a+iy) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad (3)$$

$$\int_0^{\alpha} u(x, y) dx = \psi_{\alpha}(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad (4)$$

$$\delta u(x) + \int_0^{\beta} u(x, y) dy = \varphi_{\beta}(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (5)$$

где $u(x) = u(x, 0) = \delta \tau_0(x)$, $\delta = \begin{cases} 1, & \beta=0 \\ 0, & \beta \neq 0 \end{cases}$, $\tau_0(x)$, $\tau_1(x)$, $\psi(y)$, $\psi_{\alpha}(y)$ и $\varphi_{\beta}(y)$ – заданные функции, такие, что

$$\tau_1(x) \in C^1[0, a], \quad \psi(y) \in C[0, b], \quad \varphi_{\beta}(x) \in C^2[0, a], \quad \psi_{\alpha}(y) \in C^2[0, b] \quad (6),$$

Условия вида (4) - (5) называются нелокальными условиями с интегральным смещением.

Методом редукции нелокальных краевых задач для уравнений второго порядка к локальным краевым задачам для уравнений более высокого порядка доказана теорема существования и единственности поставленной задачи, найдено решение задачи (1)-(5) в явном виде [1].

Литература

[1] Об одном методе решения краевых задач с интегральным смещением для уравнения Лапласа//Доклады АМАН, 2014. Т.16, №4, С.36-41

УДК 519.711.3

МОДЕЛЬ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТРАКТА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *

MODEL HYDRAULIC PATH OF THE POWER PLANT BASED ON THE THEORY OF DEGENERATE SYSTEMS OF INTEGRO- DIFFERENTIAL EQUATIONS

Нгуен Дык Банг *, Чистякова Е. В. **

**Иркутский национальный исследовательский технический университет*

Россия, Иркутск

ducbang@mail.ru

***Институт динамики систем и теории управления СО РАН*

Россия, Иркутск

elena.chistyakova@icc.ru

Гидравлическая цепь (ГЦ) – это модель гидравлической системы, в которой места соединения и деления потоков среды (газа, смеси газа и жидкости, жидкости) заменены узловыми точками, а участки ее течения - ветвями, т.е. отрезками, соединяющими узловые точки. С точки зрения теории графов схема ГЦ - плоский ориентированный граф, дополненный специальными поясняющими знаками, если это требуется. Число ветвей n и узлов m называются параметрами ГЦ. Графу ГЦ соответствует полная $(n \times m)$ – матрица A

* Исследования были поддержаны грантом РФФИ № 15-01-03228-а

соединений узлов и ветвей, которая однозначно описывает структуру схемы цепи и ориентацию ее ветвей. В монографии [1] детально исследованы уравнения, описывающие стационарные гидравлические цепи

$$\begin{pmatrix} S_0 & -A_1 \\ A_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 |x| x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(t) + A_2 p^* \\ Q(t) \end{pmatrix},$$

где $x(t)$ – вектор-функция расходов, $|x| x = \text{diag}\{|x_1| x_1, |x_2| x_2, \dots, |x_n| x_n\}$, $p(t)$ – вектор-функция давлений в узлах; $p^*(t)$ – вектор-функция известных давлений;

$S_0 = \text{diag}\{s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0n}\}$, $S_1 = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $s_{0i} > 0$ и $s_i > 0$ – коэффициенты гидравлических сопротивлений ветвей; матрицы $(A_1 \ A_2) = A$, ^{T} – символ транспонирования; $H(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))^T$ и $Q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t))^T$ – вектор-функции притоков в узлах и вектор напоров на ветвях соответственно;

При интегрировании по пространственной переменной общих уравнений движения в [2] получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих нестационарные гидравлические цепи. Если учесть наличие регуляторов, то получим систему вырожденных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_0 & -A_1 \\ A_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{S} |x| x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(t) + A_2 p^* \\ Q(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \infty) \quad (1)$$

где $R = \text{diag}\{r_1, r_{21}, \dots, r_n\}$, $r_i > 0$ – параметры инерции; $\tilde{S} = \text{diag}\{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n\}$,

$\tilde{s}_i = \tilde{s}_i + k_i \int_0^t (f_i(x_i(\tau)) - \theta_i) d\tau$ – коэффициенты гидравлических сопротивлений ветвей при

наличии регуляторов. Здесь θ_i – задание регулятора на i – ветви, $f_i(x_i(\tau))$ – функция регулятора, k_i – коэффициенты регуляторов.

В докладе обсуждаются проблемы разрешимости системы (1) и методы численного решения. Рассматриваются модели ГЦ связи «Прямоточный котел-турбина».

Литература

1. Меренков А. П. Теория гидравлических цепей / А. П. Меренков, В. Я. Хасилев. - М.: Наука, 1985, 273 с.
2. Балышев О.А. Анализ переходных и стационарных процессов в трубопроводных системах (теоретические и экспериментальные аспекты) / О.А. Балышев, Э. А. Таиров. - Новосибирск: Наука, 1998, 163 с.

О ПОНЯТИИ ИНДЕКСА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ*

ON THE CONCEPT OF THE INDEX FOR LINEAR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS OF PARTIAL DERIVATIVE

Нгуен Хак Диеп *, Чистяков В. Ф.**

**Иркутский национальный исследовательский технический университет
Россия, Иркутск
diep62@mail.ru*

***Институт динамики систем и теории управления СО РАН
Россия, Иркутск
chist@icc.ru*

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений

$$\Lambda(D_t, D_x)u := A(x, t)D_t u + B(x, t)D_x u + C(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

где $A(x, t)$, $B(x, t)$, $C(x, t) - (n \times n)$ – матрицы, $D_t = \partial / \partial t$, $D_x = \partial / \partial x$, $f(x, t)$, $u \equiv u(x, t)$ – соответственно заданная и искомая вектор-функции, причем предполагается, что входные данные обладают достаточной гладкостью и допускаются следующие виды вырождения

$$\det A(x, t) = 0, \quad \det B(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in U = X \times T \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \text{где } X = [x_0, x_1], \quad T = [t_0, t_1].$$

Пусть задан оператор $\Lambda_m := \sum_{j=0}^m A_j(x, t)D_x^j$, для которого определен оператор

$$\tilde{\Lambda}_l(D_x) := \sum_{j=0}^l L_j(x, t)D_x^j \text{ со свойством } \tilde{\Lambda}_l(D_x) \circ \Lambda_m(D_x)u := D_x^m u(x, t) + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{A}_j(x, t)D_x^j u$$

$\forall u \in C^\infty(U)$, где $A_j(x, t)$, $\tilde{A}_j(x, t)$, $L_j(x, t) - (n \times n)$ -матрицы. Минимально возможное l называется индексом оператора Λ_m , оператор $\tilde{\Lambda}_l$ называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО). При определенной гладкости входных данных для оператора Λ_m существует левый обратный оператор.

В докладе обсуждаются вопросы построения оператора $\Omega(D_t, D_x)$ такого, что в соотношении

$$\Omega(D_t, D_x) \circ \Lambda(D_t, D_x) = \tilde{\Omega}(D_x)D_t u + \sum_{j=0}^p C_j(x, t)D_x^j u \quad \forall u \in C^\infty(U),$$

где $C_j(x, t) - (n \times n)$ -матрицы, для оператора $\tilde{\Omega}(D_x)$ определен ЛРО. В этом случае оператор $\Lambda(D_t, D_x)$ можно разрешить относительно D_t . В силу равноправного вхождения производных D_t и D_x в уравнении (1) подобную процедуру можно обсуждать для производной D_x . Обсуждаются также вопросы разрешимости систем вида (1) при возможности построении оператора $\Omega(D_t)$.

* Исследования были поддержаны грантом РФФИ № 15-01-03228-а

ЗАДАЧА РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ НАКЛОННУЮ ТРЕЩИНУ НА ГРАНИЦЕ ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

AN EQUILIBRIUM PROBLEM FOR AN ELASTIC PLATE WITH INCLINED CRACK ON THE BOUNDARY OF A RIGID INCLUSION

Неустроева Н.В.

*Северо-Восточный федеральный университет,
Россия, Якутия
nnataliav@mail.ru*

Краевые задачи для моделей упругих тел, содержащих жесткие включения и трещины, с нелинейными краевыми условиями на берегах стали активно изучаться в последние пять лет. Особенностью таких задач является нелинейные краевые условия в виде системы равенств и неравенств, выполняющихся на берегах трещины, и краевое условие нелокальной структуры на границе жесткого включения, описывающее воздействие внешних сил на жесткую часть пластины. Важно также отметить, что в области жесткого включения не выполняются уравнения равновесия и состояния. При этом внешние силы приложены ко всем точкам пластины.

В [1] рассмотрена модель пластины Кирхгофа-Лява с объемным жестким включением и трещиной на границе жесткого включения. При этом объемное жесткое включение задается с помощью цилиндрической поверхности, образующая которой перпендикулярна срединной плоскости. Доказана теорема существования, выведена полная система краевых условий, доказана эквивалентность дифференциальной и вариационной задач, изучен предельный переход по параметру жесткости пластины.

В данной работе исследуется более общий случай, когда жесткое включение задается с помощью поверхности, образующая которой расположена под некоторым углом срединной плоскости. Выводится полный набор краевых условий, выполняющихся на негладкой границе области, а также на части границы жесткого включения. Исследуется предельный переход от упругого включения к жесткому при стремлении параметра жесткости пластины к бесконечности. Предельная задача будет соответствовать задаче о равновесии упругой пластины с наклонной трещиной [2].

Литература

1. Хлуднев А.М. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. №5. С.98-110.
2. Ковтуненко В.А., Леонтьев А.Н., Хлуднев А.М. Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом // Прикл. механика и техническая физика. 1998. Т. 39, № 2. С.164--174.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF THE ONE YOU ARE BORN ELLIPTIC EQUATION OF THE RST KIND WITH NEGATIVE PARAMETERS

Нигмедзянова А.М.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия, Казань
aigmani@rambler.ru

Математическое моделирование физических процессов часто приводит к краевым задачам для вырождающихся эллиптических уравнений. Имеется значительное число работ, посвященных исследованию таких задач (например, обзор в книге [1]). Необходимость изучения таких уравнений обусловлена многочисленными их приложениями в газовой динамике, теории оболочек, теории упругости, механике сплошной среды и др. В частности, вырождающиеся эллиптические уравнения изучались автором ранее [2-5].

Пусть E_p^+ — полупространство $x_p > 0$ p -мерного евклидова пространства точек $x = (x', x_p)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$, D — конечная область в E_p^+ , ограниченная открытой частью Γ_0 гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью Γ .

В работе рассматривается многомерное вырождающееся эллиптическое уравнение первого рода вида

$$T[U(x)] = x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + 2a_j \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} - b^2 x_p^m U = 0, \quad (1)$$

где $m > 0$, $p \geq 3$, $a_j, b \in \mathbb{R}^+$.

Ранее автором [5] было найдено фундаментальное решение изучаемого уравнения

$$E(x, x_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{4(p-2)\pi^2 \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} (x_p x_{p_0})^{-\frac{m}{4}} e^{-\sum_{j=1}^{p-1} a_j x_j} (\rho_{xx_0}^2)^{-\frac{p-2}{2}} + E^*(x, x_0),$$

где $\rho_{xx_0}^2 = \sum_{j=1}^{p-1} (x_j - x_{j0})^2 + \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 \left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2$, $E^*(x, x_0)$ — регулярная функция.

Несложно показать справедливость первой и второй формул Грина уравнения (1):

$$\begin{aligned} \int_D VT[U] e^{2\sum_{j=1}^{p-1} a_j x_j} dx + \int_D \left(x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_p} \frac{\partial U}{\partial x_p} \right) e^{2\sum_{j=1}^{p-1} a_j x_j} dx = \\ = \int_{\Gamma} VA[U] e^{2\sum_{j=1}^{p-1} a_j x_j} d\Gamma - \lambda^2 \int_D x_p^m U V e^{2\sum_{j=1}^{p-1} a_j x_j} dx, \\ \int_D [VT[U] - UT[V]] e^{2\sum_{j=1}^{p-1} a_j x_j} dx = \int_{\Gamma} [VA[U] - UA[V]] e^{2\sum_{j=1}^{p-1} a_j x_j} d\Gamma, \end{aligned}$$

где $A[U(x)] = x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \cos(n, x_j) \frac{\partial U}{\partial x_j} + \cos(n, x_p) \frac{\partial U}{\partial x_p}$ – конормальная производная.

Для всякой функции $U(x)$, удовлетворяющей условиям:

$$a) U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}),$$

$$b) T[U(x)] = 0, \quad x \in D,$$

и для любой точки $x_0 \in D$ справедливо следующее интегральное представление

$$U(x_0) = \int_{\Gamma} [E(x, x_0)A[U(x)] - U(x)A[E(x, x_0)]] e^{2 \sum_{j=1}^{p-1} a_j x_j} d\Gamma.$$

Литература

1. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.— М.: Наука, 1966. – 292 с.
2. Нигмедзянова А.М. Решение основных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений методом потенциалов: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань, 2007. – 152 с.
3. Нигмедзянова А.М. Интегральное представление решения одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода с отрицательным параметром. // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013г. – Вып.1. – 28-42 с.
4. Нигмедзянова А.М. Решение основных краевых задач одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода с отрицательным параметром методом потенциалов.// Известия Тульского государственного Университета. Естественные науки. - 2013 - вып.2 - с.40-49.
5. Нигмедзянова А.М. Фундаментальное решение одного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода с отрицательными параметрами. //Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 49/ Материалы Международной научной конференции «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций – 2014». – Казань: 29 сентября – 1 октября 2014. – Т. 49. – с. 252-256

УДК 517.55

ОБ УРАВНЕНИИ МОНЖА–АМПЕРА НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ

ON THE MONGE – AMPERE EQUATION ON A POSITIVE CURRENT

Никитина Т.Н.

Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск

AANick@yandex.ru

Пусть M - комплексное многообразие и T – положительный поток на M . Если u и f - гладкие дифференциальные формы на M , говорят, что $(\bar{\partial}\partial u)^k = f$ на T , если $(\bar{\partial}\partial u)^k \wedge T = f \wedge T$.

В этой работе изучается вопрос: можно ли разрешить уравнение Монжа-Ампера на T , и если это так, какого рода оценки можно найти для решения.

Разрешимость уравнений Монжа-Ампера в случае $k = 1$ является классической [1-2].

Решающую часть в доказательствах играло предложение, которое говорит, что квадратичная форма определенная $[\gamma, \hat{\gamma}] \sigma_T = c_{q+p} \gamma \wedge \hat{\gamma} \wedge T \wedge \omega_{n-q-p}$ является определенной на пространстве (q, p) -форм на T , удовлетворяющих $\gamma \wedge \omega_{n-p-q+1} \wedge T = 0$ (т.е. "примитивных" форм).

Это больше неверно для (s, s) -потоков, $s \geq 2$ (в случае $s = 2$ см. [3]), если $T = \sum_{j=0}^1 dV_{sj+1, sj+2, \dots, s(j+1)}$ в C^{2s} (где $dV_{jk} = dV_j \wedge dV_k$, $dV_j = idz_j \wedge d\bar{z}_j$).

Однако, пусть T — (s, s) -форма $\sum_{j_1 < \dots < j_s} dV_{j_1 < \dots < j_s}$ в C^{2s} . Возьмем, в частности, $\gamma = \sum_{j=1}^{2s} \gamma_j dV_j$, поэтому равенство $\gamma \wedge \omega^{s-1} \wedge T = 0$ точно означает, что $\binom{2s-1}{s-1} \sum_{j=1}^{2s} \gamma_j = 0$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega^{s-2} \wedge T &= (s-2)! \binom{2s-2}{s-2} 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{2s-1} \gamma_j (\bar{\gamma}_{j+1} + \dots + \bar{\gamma}_{2s}) \right] dV_{1\dots 2s} = \\ &= (s-2)! \binom{2s-2}{s-2} 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{2s-1} -|\gamma_j|^2 - \gamma_j (\bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{\gamma}_{j-1}) \right] dV_{1\dots 2s} \leq 0. \end{aligned}$$

Легко заметить, что локальная разрешимость для $\bar{\partial}\partial u$ на $(s, s-1)$ -формах имеет место для этого выбора T . Возьмем $f = \sum_j \sum_{k_1 < \dots < k_{s-1}} f_j^{k_1 \dots k_{s-1}} dz_j \wedge dV_{k_1, \dots, k_{s-1}}$, так что $f \wedge T = \sum f_j dz_j \wedge d\hat{V}_j$, где $f_j = \sum_{k_1 < \dots < k_{s-1}} f_j^{k_1 \dots k_{s-1}}$. Тогда $\bar{\partial}f \wedge T = 0$ означает $\sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} = 0$. Если $f \wedge T = \bar{\partial}\partial u \wedge T$, для $(s-1, s-2)$ -формы u можно записать

$u = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} u_j^{k_1 \dots k_{s-2}} dz_j \wedge dV_{k_1, \dots, k_{s-2}}$. Тогда

$$u \wedge T = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} dz_j \wedge u_j^{k_1 \dots k_{s-2}} dV_{k_1, \dots, k_{s-2} k_s \dots k_{2s-1}}$$

и можно показать, что

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\partial u \wedge T &= \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1} k_s < \dots < k_{2s-1}} \sum i \times \\ &\times \left(\frac{\partial^2 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{2s-1}}, \end{aligned}$$

поэтому уравнение $\bar{\partial}\partial u \wedge T = f \wedge T$ разлагается на систему

$$\sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1} k_s < \dots < k_{2s-1}} i \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) = f_j, \quad 1 \leq j \leq 2s.$$

Она разрешима только, если $\sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} = \sum_j \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} i \times$

$$\times \left(\frac{\partial^3 u_j}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}} \partial \bar{z}_j} - \frac{\partial^3 u_{k_{s-1}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) = 0, \text{ что предполагается } \sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} = 0.$$

Литература

1. Никитина Т. Н. Устранимые особенности на границе и $\bar{\partial}$ - замкнутое продолжение CR-форм с особенностями на порождающем многообразии // Новосибирск: Наука. 2008. С. 1-370.
2. Никитина Т. Н. Уравнение Монжа-Ампера на положительном потоке // Тез. докл. международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", Новосибирск: Институт математики им. С.Л.Соболева. 2013. С. 402.
3. Berndtsson B., Sibony N. The $\bar{\partial}$ -equation on a positive current // Invent. math. 2002. T.147. С. 371-428.

УДК 517.946

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

SOLVABILITY OF INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS OF HIGH ORDER WITH AN UNKNOWN COEFFICIENT OF THE HIGHEST DERIVATIVE

Николаев О.Ю.

Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ

Nikolaev.oleg1@yandex.ru

Исследуется задача нахождения вместе с решением $u(x, t)$ параболического уравнения высокого порядка

$$u_t + q(x)u_{xxxx} + c(x, t)u = f(x, t)$$

также коэффициента $q(x)$. При выполнении естественных граничных условий, некоторых условий переопределения, условий принадлежности входных данных определенным функциональным пространствам доказываются теоремы существования и единственности решений. Ранее подобные задачи изучались в работах Кожанова А.И., Кирилловой Г.А., Телешевой Л.А. при менее общих условиях, при этом вопроса устойчивости не обсуждались.

Литература

1. Кириллова Г.А. Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка: автореф. дис...канд. физ.-мат. наук./Г.А.Кириллова.-Рубцовск, 2004.-102с.
2. Кожанов А.И., Кириллова Г.А. О некоторых обратных задачах для параболического уравнения четвертого порядка // Мат.заметки ЯГУ.2000. Т.7, вып.1.с.35-48.
3. Кириллова Г.А. Обратная задача для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при решении в случае интегрального переопределения. Матем.заметки ЯГУ.2003.т.10.№1.с.34-35.
4. Телешева Л.А.О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени. Матем.заметки ЯГУ.2011.т.18.вып.2,с.180-201.

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ
ЭКОНОМИЧЕСКОГО УЩЕРБА ОТ ЗАГРЯЗНЕНИЯ В РЕГИОНЕ
С УЧЕТОМ РЕСУРСОВ НА УСТРАНЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ
ИСТОЧНИКОВ ***

**AN ALGORITHM FOR SOLVING THE OPTIMIZATION PROBLEM
OF ECONOMIC DAMAGE FROM POLLUTION IN REGION TAKING
INTO ACCOUNT RESOURCES AVAILABLE FOR REMOVING THE
LOCAL SOURCES ***

Новиков И.С.*

** ФГБУН Институт вычислительной математики РАН,
Россия, Москва
nissonsv@mail.ru*

Задача оценки и оптимизации экономического ущерба от загрязнений окружающей среды локальными источниками является актуальной проблемой в современном мире [1-3]. Локальными источниками могут быть трубы промышленных предприятий, а также лесные и торфяные пожары, которые вносят ощутимый вклад в загрязнение атмосферы (примером служит лето 2010 года). От эффективности и своевременности решения этой задачи зависит объем государственных средств (ресурсов), необходимых на ликвидацию загрязнений и их последствий, а также состояние здоровья людей, находящихся в регионе возможных загрязнений.

В [4] исследована задача минимизации экономического ущерба в Московском регионе от локальных источников, предложен и обсужден алгоритм ее решения (на основе развития идей, приведенных в [5-7]). Следует отметить, что в цитируемой работе не учитывалась возможная ограниченность количества ресурсов, которое выделено на устранение локальных источников. Предполагалось, что всегда имеется достаточно средств на устранение источников загрязнений. Кроме того, «управления» (закономерности, по которым необходимо уменьшать интенсивности локальных источников) всегда вычислялись за один шаг и не зависели от количества ресурсов на устранение источников загрязнений, что могло привести к неполному использованию средств, имеющихся в наличии.

В настоящей работе приводится алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды с учетом определенного количества ресурсов, выделенного на решение проблемы. Этот алгоритм представляет собой модификацию метода, приведенного в [4], он основан на многократном вычислении и уточнении «управлений». Кроме того, величины «управлений» здесь зависят от количества ресурсов, имеющихся в наличии. При численном решении задачи используется монотонная схема первого порядка точности, построенная на основе результатов из монографий [8, 9]. Также в работе приведены результаты численных экспериментов по решению поставленной проблемы, которые иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (№14-11-00609) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3

Литература

- [1] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
- [2] Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985.
- [3] Алоян А.Е. Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей. М.: Наука, 2008.
- [4] Новиков И.С., Агошков В.И. Исследование и численное решение задачи минимизации экономического ущерба от локальных источников. // Сборник тезисов конференции «Ломоносовские чтения 2014», Москва, 2014. С. 45.
- [5] Агошков В.И., Асеев Н.А., Новиков И.С. Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях. М.: ИВМ РАН, 2012.
- [6] Агошков В.И., Новиков И.С. Задача минимизации концентрации загрязнений от пожаров в регионе. // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа: Сб. научн. тр. Вып. 26, том 2 / НАН Украины, МГИ, ИГН, ОФ ИнБЮМ. - Севастополь, 2012. С. 321-338.
- [7] I.S. Novikov. Problem of minimization of pollution concentration related to fires in Moscow region. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling., Vol. 28, No. 1, pp. 13-35 (2013).
- [8] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
- [9] Самарский А.А. Теория разностных схем. 3-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

УДК 519.6

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, ЗАДАНЫХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ, И МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В СРЕДАХ С ТРЕЩИНАМИ*

A FINITE ELEMENT METHOD FOR PDES POSED ON SURFACES AND MODELING OF FLOWS IN FRACTURED MEDIA*

Ольшанский М.А.*, Чернышенко А.Ю.**

** Университет Хьюстона, США, Хьюстон
molshan@math.uh.edu*

*** Институт вычислительной математики РАН, Россия, Москва
chernyshenko.a@gmail.com*

Уравнения в частных производных, заданных на поверхностях, возникают в математических моделях различных природных явлений: перенос поверхностно активных веществ на интерфейсах многофазных течений, липидные взаимодействия в биомембранах, течения в средах с трещинами и др., а также во многих инженерных и биомедицинских приложениях. Таким образом, в настоящее время большой интерес представляет развитие методов численного решения уравнений на поверхностях.

Предлагается метод конечных элементов на адаптивных сетках типа восьмеричное дерево, который основывается на методе следов. Метод использует расширение уравнения в объемную область, содержащую поверхность, и приводит к невырожденному эллиптиче-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 14-01-00830

скому уравнению в объемной области. Это позволяет использовать стандартные методы дискретизации, в том числе метод конечных элементов высокого порядка. Декартова структура и вложенная иерархия сеток типа восьмеричное дерево позволяют быстро и легко делать адаптацию, перестроение сетки и получать доступ к данным. Таким образом, использование таких сеток для численного решения уравнений на поверхностях позволяет получить преимущества в случае мелких поверхностных структур. Кроме этого, предложенный алгоритм решения уравнений на поверхностях может быть объединен с различными методами численного решения объемных задач, использующих сетки типа восьмеричное дерево.

Для описания метода рассматриваются уравнения Лапласа-Бельтрами и конвекции-диффузии, заданные на поверхностях. Для задач с преобладающей конвекцией рассматривается вариант со стабилизацией. Проведенный численный анализ показывает достаточные условия для оптимальной сходимости метода.

Предложенный метод численного решения уравнений на поверхностях объединяется с нелинейным трехмерным методом конечных элементов [1] для моделирования течений в средах с трещинами. Подобные течения описываются системами нестационарных уравнений конвекции-диффузии, заданных в объемных областях и на поверхности трещины. В данной задаче используются многогранные сетки типа восьмеричное дерево со сколотыми ячейками [2].

Литература

1. Danilov A., Vassilevski Y. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. Vol. 24, no. 3. Pp. 207–227.

2. Чернышенко А.Ю. Построение сеток типа восьмеричное дерево со сколотыми ячейками в неоднородных областях. // Выч. методы и программ. Т. 14. 2013 с. 229–245.

УДК 517.956; 519.632

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

ABOUT ONE MATHEMATICAL MODEL FOR MECHANICS OF CONTINUOUS MEDIUMS

Бато Б. Ошоров*, Батор Б. Ошоров**

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
г. Улан-Удэ

* scalderfree@yandex.ru, ** bboshorov@yandex.ru

На тело, находящееся в гравитационном поле некоторого другого тела, действуют приливные силы, которые приводят к растяжению тела в направлении возмущающей массы и к его сжатию в ортогональных направлениях. Если при этом происходит поворот относительно указанных направлений, то по телу бежит приливная волна. Движение приливной волны может привести к направленному переносу внутренних масс тела.

Если ограничиться только изучением этого явления, то при некоторых предположениях, позволяющих упростить математическую модель процесса, задача сводится к решению уравнений Стокса [1].

Пусть $D = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3\}$ – тело, на которое воздействует гравитационное поле, Γ – его граница, $p(x)$ – давление, $\vec{v}(x) = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скорости,

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ – градиент, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа, $\mu = \text{const}$ – динамический коэффициент вязкости. Тогда система Стокса имеет вид

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad \nabla p - \mu \Delta \bar{v} = 0.$$

В работе [1] показано, уравнения Стокса сводится к системе Моисила-Теодореску. В наших обозначениях это выглядит следующим образом.

Пусть

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathring{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathring{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathring{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} –$$

базис в пространстве в пространстве кватернионов, которые имеют вид

$$X = \sum_{i=0}^3 x_i E_i, \quad x_0 = \text{Re } X, \quad x = (x_1, x_2, x_3) = \text{Im } X.$$

Если $x_0 = 0$, то кватернион называется неполным.

Рассмотрим кватернион-функцию $U(X) = \sum_{i=0}^3 u_i(X)$ от неполной кватернионной переменной $X = \sum_{i=1}^3 x_i E_i$. Если положить $u_0 = p$, $\text{Im } U = \mu \nabla \times \bar{v}$, и заменить кватернион вектор-функцией $U^T(x) = (u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, то получаем систему Моисила-Теодореску

$$\sum_{k=1}^3 E_k U_{x_k} = 0.$$

В работе [2] доказана однозначная разрешимость некоторых краевых задач для этой системы и обобщенной системы Моисила-Теодореску с младшими членами и правой частью. Следовательно результаты этой работы можно использовать приведенной выше математической модели.

В дополнение к результатам работы [2] в некоторых частных случаях проведен численный анализ предложенных краевых задач.

Литература

1. Григорьев Ю.М., Ревуженко А.Ф. Пространственная задача о переносе масс приливными волнами//Вычислительные технологии. – 2000. – Т.5, №4. – С. 40 – 54.
8. Ошоров Бато Б., Ошоров Батор Б. Краевые задачи для одной модельной системы уравнений первого порядка в трехмерном пространстве. //Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т.51, №5. – С. 635 – 641.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

NONCLASSICAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SOME SYSTEMS OF EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATIVES

Б.Б. Ошоров*, Е.Н. Сордохонова**

***Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, г. Улан-Удэ

*bboshorov@yandex.ru

Рассматриваются краевые задачи для систем уравнений с частными производными вида

$$LU \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x) D^{\alpha} U(x) = F(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $A_{\alpha}(x)$ – квадратные матрицы k – го порядка, $U(x)$ – неизвестная, $F(x)$ – заданная вектор-функция размерности k .

Если в некоторой области $D \subseteq R^n$ выполнено условие

$$\det \sum_{|\alpha|=m} A_{\alpha}(x) \lambda^{\alpha} \neq 0, \quad \forall \lambda \in R^n, \quad \lambda \neq 0, \quad (2)$$

то система (1) называется эллиптической по Петровскому в этой области.

При $m=1$ системы (1) имеют вид

$$LU \equiv \sum_{i=1}^n A_i(x) U_{x_i}(x) + A(x) U(x) = F(x), \quad (3)$$

Если все коэффициенты системы (3) $A_i(x), i = \overline{1, n}$, симметрические матрицы, а одна из них положительно определена, то такие системы названы гиперболическими или системами Фридрихса.

Будем называть задачу неклассической, если рассматриваемая система уравнений не является ни эллиптической, ни системой Фридрихса, или постановка задачи отличается от классических постановок.

Сначала в некоторой области $D \subseteq R^n$ рассмотрим систему уравнений (3) с произвольными коэффициентами. Поскольку известно, что любая квадратная матрица представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц, то можно изучать системы (3), в которых коэффициенты не являются совершенно произвольными матрицами. Например, можно рассматривать:

а) симметрические системы, в которых все матрицы в главной части дифференциального оператора не являются знакоопределенными;

б) системы, где одна матрица в главной части симметрическая, а другие – кососимметрические;

в) системы, где все матрицы в главной части кососимметрические.

В качестве примера в области $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ рассматривается система уравнений.

$$LU \equiv AU_x + BU_y + CU = F(x, y), \quad (4)$$

с коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При таких коэффициентах характеристическая форма (2) этой системы $Q(\lambda_1, \lambda_2) = \det(A\lambda_1 + B\lambda_2)$ будет формой третьего порядка, поэтому она не может быть знакоопределенной.

Задача 1. В прямоугольнике D найти решение системы (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_1|_{y=0} = u_3|_{y=0} = u_1|_{x=0} = u_3|_{x=0} = u_2|_{y=b} = u_2|_{x=a} = 0. \quad (5)$$

Задача 2. В прямоугольнике D найти решение системы уравнений

$$LU \equiv \left(A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 U + TU = F(x, y), \quad (6)$$

где TU – оператор не более чем первого порядка, при краевых условиях (5) и

$$u_1|_{x=a} = u_3|_{x=a} = u_2|_{x=0} = u_{1y}|_{y=b} = u_{3y}|_{y=b} = u_{2y}|_{y=0} = 0. \quad (7)$$

Утверждается, что обе задачи имеют единственные обобщенные решения в пространстве $L_2(D)$.

Примеры неклассических краевых задач в трехмерном пространстве можно найти в работе «Бато Б. Ошоров, Батор Б. Ошоров. Краевые задачи для одной модельной системы уравнений первого порядка в трехмерном пространстве//Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т.51, №5. – С. 635 – 641.»

УДК 517.956

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

BOUNDARY PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS FOR SOME CLASSES OF MODEL SYSTEMS OF THE EQUATIONS

Б.Б. Ошоров

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,

г. Улан-Удэ

bboshorov@yandex.ru

Исследования в данном направлении начались с изучения эллиптической по Петровскому системы уравнений второго порядка

$$\begin{cases} u_{1xx} - 2u_{2xy} - u_{1yy} = 0 \\ u_{2xx} + 2u_{1xy} - u_{2yy} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

для которой некорректна задача Дирихле в круге произвольного радиуса [1].

В дальнейшем А.П.Солдатовым было доказано более общее утверждение, что для любой локальной краевой задачи всегда найдется система вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

где матрицы $a_0, a_1 \in R^{l \times l}$, для которой задача не будет нетеровой [2].

Система (1) относится к указанному виду, где

$$a_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a_1 = 2I = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Была поставлена цель найти корректные постановки краевых задач для системы (1), которая названа системой Бицадзе, а также для системы (1) с младшими членами, которую будем называть обобщенной системой Бицадзе. В матричной форме эта система имеет вид

$$LU \equiv EU_{xx} + 2IU_{xy} - EU_{yy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = F(x, y), \quad (2)$$

$$U(x, y) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, a, b, c - (2 \times 2) - \text{матрицы}.$$

Оператор второго порядка в системе (2) является второй степенью оператора Коши-Римана

$$K \equiv E \frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y},$$

поэтому для достижения поставленной цели необходимо было найти корректные постановки краевых задач для системы Коши-Римана. Несмотря на многочисленные исследования [3, 4], посвященные системе Коши-Римана, были нужны конкретные постановки задач, удобные для продолжения на системы (1,2) [5, 6].

Затем естественно возник вопрос о многомерных аналогах систем Коши-Римана и Бицадзе с точки зрения постановок краевых задач [7, 8].

И наконец, появился интерес к системам более высоких порядков [9].

Литература

1. Бицадзе А.В. Об единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // УМН. – 1948. – Т.2, №6. – С. 211 – 212.
2. Солдатов, А.П. О задаче типа Карлемана для эллиптических систем // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т.28, №1. – С. 143 – 151.
3. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – 2 изд., перераб. – М.: Наука: гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 512 с.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Государств. изд-во физ.-мат. Лит., 1958. – 543 с.
5. Ошоров Б.Б. О некоторых краевых задачах для систем уравнений Коши-Римана и Бицадзе // Доклады Академии Наук. – 2006. – Т.407, №4. – С. 446 – 449.
6. Ошоров Б.Б. Задачи Римана–Гильберта и Пуанкаре с разрывными краевыми условиями для некоторых модельных систем уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т.47, №5. – С. 696 – 704.
7. Ошоров Б.Б. Трехмерные аналоги систем уравнений Коши-Римана и Бицадзе // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2005. – т.V, вып.1. – С. 64 – 68.
8. Ошоров Бато Б., Ошоров Батор Б. Краевые задачи для одной модельной системы уравнений первого порядка в трехмерном пространстве. // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т.51, №5. – С. 635 – 641.
9. Ошоров Б.Б. О корректности краевых задач для метааналитических функций // Математические заметки ЯГУ. Т. 17, вып.1, январь – июнь 2010. – С. 63 – 82.

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR QUASIHYPربولIC HIGHER-ORDER EQUATIONS WITH INTEGRAL OVERDETERMINATION

Павлов С.С.

ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова", г. Якутск, Россия;
ststepmath@mail.ru

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ , $S = \Gamma \times (0, T)$, Q – цилиндр $\Omega \times (0, T)$.

Обратная задача. Найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, связанные уравнением

$$(-1)^m D_t^{2m} u - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t) \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$D_t^i u(x, 0) = 0, \quad i = \overline{0, m}, \quad (2)$$

$$D_t^j u(x, T) = 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad x \in \Omega,$$

$$u|_S = 0, \quad (3)$$

а также условия переопределения

$$\int_{\Omega} K(x, t) u(x, t) dx = 0, \quad (4)$$

где $f(x, t)$, $c(x, t)$, $h(x, t)$, $K(x, t)$ – заданные функции, m – положительное целое число.

Введем обозначения

$$h_0(t) = \int_{\Omega} K(x, t) h(x, t) dx, \quad \alpha_0(t) = \frac{1}{h_0(t)} \int_{\Omega} K(x, t) f(x, t) dx,$$

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \alpha_0(t)h(x, t).$$

При $m = 1$ обратные задачи (1)-(4) были исследованы в работах [1,2]. Прямые задачи для квазигиперболических уравнений высокого порядка изучались в работе [3].

Теорема. Пусть выполнены условия

$$h(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad c(x, t), \quad K(x, t) \in C^4(\bar{Q}),$$

$$f(x, t), \quad f_{x_i}(x, t) \in L_2(Q), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$h_0(t) \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad c(x, T) \geq 0, \quad f(x, t)|_S = h(x, t)|_S = 0,$$

и существует λ_0 такое, что $\lambda_0 > T$, $[(\lambda_0 - t)c(x, t)]_t \leq 0$ при $(x, t) \in \bar{Q}$.

Тогда существует функция $u(x, t)$ такая, что $u(x, t) \in W_2^{2,4}(Q)$ и функция $q(t) \in L_2[0, T]$, являющиеся решением обратной задачи (1)-(4).

Доказательство теоремы существования регулярных решений обратной задачи (1)-(4) проводится методами регуляризации, продолжения по параметру с получением априорных

Литература

1. Кожанов А.И. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, The Netherlands, 1999. 171 p.
2. Павлов С.С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // Математические заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, Вып.1. С. 81-93.
3. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: изд-во ВЦ СО РАН, 1995. 131 с.

УДК 517.958

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ EXACT SOLUTIONS OF EQUATIONS OF DYNAMICS TWO-PHASE MEDIUM

Панов А.В.

*Челябинский государственный университет,
Россия, Челябинск
gjd@bk.ru*

Рассматриваются системы уравнений, описывающая динамику двухфазной среды в изотермическом случае. Впервые данная модель была предложена Х.А. Рахматулиным [1].

Найдена алгебра Ли симметрий системы [2]. Используя оптимальную систему подалгебр данной алгебры [3], найдены различные точные решения системы. Перечислены все инвариантные решения ранга 0, дефекта 0. Найдены частично инвариантные решения ранга 1, дефекта 1 относительно некоторых четырехмерных подалгебр.

Литература

1. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184-195.
2. Панов А.В. Инвариантные подмодели системы уравнений динамики газовзвеси в случае трех пространственных переменных // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2014. Вып. 35, № 12 (183). С.188-199.
3. Хабиров С.В. Симметричный анализ модели несжимаемой жидкости с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры. Уфа: Гилем, 2004.

ВАРИАЦИОННОЕ УСВОЕНИЕ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИКИ БАЛТИЙСКОГО МОРЯ*

VARIATIONAL DATA ASSIMILATION PROBLEM FOR THE BALTIC SEA THERMODYNAMICS MODEL

Пармузин Е.И., Агошков В.И., Захарова Н.Б.

*Институт вычислительной математики Российской академии наук,
Россия, Москва
parm@inm.ras.ru*

Четырехмерное вариационное усвоения данных наблюдений является одной из перспективных технологий для решения задач мониторинга и анализа состояния окружающей среды. Важную роль при исследовании здесь играет разработка и обоснование алгоритмов для численного решения вариационных задач ассимиляции данных [1-3].

В данной работе формулируется и исследуется задача вариационной ассимиляции данных наблюдений температуры поверхности моря в акватории Балтийского моря.

Рассматривается система уравнения для u, v, ξ, T, S и "дополнительной неизвестной" ("управление") Q вида [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g \text{grad} \xi + A_u \vec{u} + (A_k)^2 \vec{u} &= \vec{f} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} P_a - \frac{g}{\rho_0} \text{grad} \int_0^z \rho_1(T, S) dz', \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^H \Theta(z) u dz \right) - m \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^H \Theta(z) \frac{n}{m} v dz \right) &= f_3, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \quad T = T_{obs} &\text{ в } D \times (0, \bar{t}). \end{aligned}$$

Для перехода к задаче вариационного усвоения данных для нахождения решения обратной задачи о потоке тепла с поверхности моря, введем следующий функционал

$$J_\alpha \equiv J_\alpha(Q, T) = \frac{1}{2} \int_\Omega [\alpha m_0 (Q - Q^{(0)})^2 + m_0 (T - T_{obs})^2] d\Omega,$$

где $Q^{(0)} \equiv Q^{(0)}(\lambda, \theta)$ - заданные функции и α - параметр регуляризации, неотрицательная ограниченная функция.

В работе представлены результаты численных экспериментов по восстановлению потока тепла с поверхности моря и получению решения системы (температура, соленость, скорость на поверхности моря и высота уровня) для модели гидродинамики в акватории Балтийского моря с использованием процедуры усвоения данных. В численных расчетах использовали среднесуточные данные наблюдений температуры поверхности моря Датского метеорологического института, подготовленные на основе измерений радиометра (AVHRR, AATSR и AMSRE) и спектрометрира (SEVIRI и MODIS). Пространственное разрешение модели составляет $1/16^\circ \times 1/32^\circ \times 25$ по долготе, широте и вертикали. Сеточная область в горизонтальной плоскости содержит 336×394 узлов, уровни неравномерно распределены по глубине. Шаг по времени равен 5 мин.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№13-01-00753, №14-01-31195) и РНФ (№14-11-00609)

Литература

1. Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. - М., Наука, 1993, 224 с.
2. E.I. Parmuzin, V.I. Agoshkov, Numerical solution of the variational assimilation problem for sea surface temperature in the model of the Black Sea dynamics. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling (2012) 27, No.1, 69-94
3. Zakharova N.B., Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., The new method of ARGO buoys system observation data interpolation. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, (2013), 28, No. 1.
4. Zalesny V.B., Gusev A.V., Chernobay S.Yu., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytönen J. The Baltic Sea circulation modelling and assessment of marine pollution, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, (2014), 29, No. 2, pp. 129–138.

УДК 517.955

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ТРЕНИЕМ* NUMERICAL MODELING OF FRACTAL OSCILLATOR WITH DAMPING

Паровик Р.И.

*Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
Россия, Камчатский край, с. Паратунка
Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга,
Россия, г. Петропавловск-Камчатский
romano84@mail.ru*

Построение математических моделей, учитывающих фрактальные свойства различных сред, имеет очень важное теоретическое и практическое значение. Например, в пористой геологической среде (геосреде) в силу неоднородности и сложной топологии пор интерес представляет фрактальная размерность геосреды, которая влияет на интенсивность процессов. Эти процессы принято называть нелокальными или процессами с памятью [1].

Описание нелокальных процессов осуществляется с помощью математического моделирования – дифференциальных уравнений дробных порядков [2]. В работе рассмотрен класс осцилляционных уравнений дробных порядков. Исследовалась следующая задача: найти функцию смещения $u(t)$, удовлетворяющую следующему уравнению дробного порядка и начальным условиям:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(\eta) + \partial_{0t}^{\beta} u(\eta) + A(t)u(t) = 0, u(0) = u_0, u'(0) = 0, 0 < t < T, \quad (1)$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{u''(\eta) d\eta}{(t-\eta)^{\alpha-1}}$ и $\partial_{0t}^{\beta} u(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{u'(\eta) d\eta}{(t-\eta)^{\beta}}$ - производные Гerasима-Капуто дробных порядков $1 < \alpha < 2, 0 < \beta < 1$, $A(t)$ - некоторая функция, u_0 - известная величина.

* Работа выполнена в рамках проекта №12-И-ОФН-16 «Фундаментальные проблемы воздействия мощными радиоволнами на атмосферу и плазму Земли» и при поддержке Министерства образования и науки РФ по программе стратегического развития ФГБОУ ВПО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга» на 2012-2016 гг.

Решение задачи (1) можно получить, например, с помощью явной конечно-разностной схемы по аналогии с работой [3]:

$$u_{j+1} = \left[2M + P - A_j/B \right] u_j - Gu_{j-1} - G \sum_{k=1}^{j-1} a_k (u_{j-k+1} - 2u_{j-k} + u_{j-k-1}) - H \sum_{k=1}^{j-1} b_k (u_{j-k+1} - u_{j-k}), \quad (2)$$

где $M = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}$, $P = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$, $B = M + P$, $G = M/B$, $H = P/B$, $a_k = (k+1)^{2-\alpha} - k^{2-\alpha}$,

$$b_k = (k+1)^{1-\beta} - k^{1-\beta}.$$

В работе с помощью формулы (2), в зависимости от параметров α и β , а также функции A_j , проведена визуализация результатов моделирования и построены фазовые траектории некоторых фрактальных осцилляторов.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его приложение. М.: Физматлит, 2003. С. 272.
2. Шогенов В.Х., Ахкубеков А.А., Ахкубеков Р.А. Метод дробного дифференцирования в теории броуновского движения // Известие вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2004. №1. С.46-50.
3. Паровик Р.И. Численный анализ некоторых осцилляционных уравнений с производной дробного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. №2(9). С. 30-35.

УДК 681.5

НЕЙРОСЕТЕВАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И НЕТОЧНЫМИ ДАННЫМИ NEURAL NETWORK CONTROL SYSTEM OF THE OBJECT WITH DELAY AND INEXACT DATA

Пашенко Г.Н.

*Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК,
Казахстан, Алматы,
galina_pashenko@mail.ru*

Одним из самых перспективных направлений в научных исследованиях в последнее время принято считать интеллектуальные системы управления. Создание современных интеллектуальных технологий в приложении к задачам управления сложными динамическими объектами вызывают наибольший интерес. Как правило, большинство современных технологических линий и машин из различных областей промышленности относятся к сложным объектам. Многие ученые проводили исследования в области управления сложными динамическими объектами, которым, как правило, присущи такие качества, как запаздывание, нестационарность, нелинейность, неточность данных. Данные исследования не завершены и требуют дальнейшего развития.

Постановка задачи формулируется следующим образом: необходимо разработать систему управления объектом с неточными параметрами и запаздыванием на основе искусственных нейронных сетей.

Предложен алгоритм для построения нейросетевой системы управления объектом с неточными данными и запаздыванием. С использованием предложенного алгоритма построена интеллектуальная система управления объектом с запаздыванием на основе искусственных нейронных сетей, включающая в себя три нейросетевых модуля, соответ-

вующих трех различным состояниям системы. Разработка и создание интеллектуальных системы управления сложными объектами повышает эффективность управления техническими объектами, технологическими процессами и позволяет эффективно использовать сырьевые ресурсы. На языке Java создан пакет прикладных программ, включающий в себя блоки, описывающие классы, блоки формирования входных данных, блоки обучения нейронных сетей. От разработок в данной области созданный пакет программ отличается тем, что он легко может быть дополнен новыми блоками, необходимыми для дальнейших исследований. Программное обеспечение может применять довольно широкий круг пользователей, как в практических целях, так и при дальнейших научных исследованиях.

УДК 517.956

О ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СМЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА КЕЛДЫША

ON THE FIRST MIXED PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGING TIME DIRECTION WITH WEAK DEGENERACY OF KELDYSH TYPE

Петрушко И.М.

*Московский энергетический институт (технический университет)
petrushko@mail.ru*

Пусть Q - ограниченная область n -мерного пространства R_n , $n \geq 2$, расположенная в полупространстве $x_n > 0$, граница которой $\partial Q - (n-1)$ мерная замкнутая поверхность без края класса C^2 . Часть границы Γ_0 области Q расположена в гиперплоскости $x_n = 0$. Остальную часть границы обозначим через Γ_1 : $\Gamma_1 = \partial Q \cap \{x_n = 0\}$, $\overline{\Gamma_0} \cup \Gamma_1 = \partial Q$.

Обозначим через Q^T цилиндр $Q^T = Q \times (0, T)$.

Рассмотрим в цилиндрической области Q^T уравнение

$$Lu = k(x)u_t - \sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{i,j}u_{x_i})_{x_j} - x_n^m u_{x_n x_n} + \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}u_{x_i x_j} + au = f(x, t), \quad (1)$$

где $a_{i,j} \in C^1(\overline{Q^T})$, $i, j = 1, 2, \dots, n-1$; $a_i \in C^1(\overline{Q^T})$, $i = 1, 2, \dots, n$, $a \in C(\overline{Q^T})$,

m -постоянная, $0 < m < 1$, и для всех $(x, t) \in \overline{Q^T}$ существует такая постоянная γ_0 , что для всех $\xi \in R_{n-1}$

$$\gamma_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j} \xi_i \xi_j \leq \gamma_0^{-1} |\xi|^2.$$

Будем предполагать, что функция $k(x)$ меняет знак в области Q .

Положим $Q^+ = \{x \in Q, k(x) > 0\}$; $Q^- = \{x \in Q, k(x) < 0\}$. Для простоты изложения будем предполагать $k(x) = 1, x \in Q^+$ и $k(x) = -1, x \in Q^-$. Правую часть $f(x, t)$ уравнения (1) будем предполагать принадлежащей пространству $L_2(Q^T)$.

Теорема. *Существует такая постоянная $a_0 > 0$, что для всех $\varphi(x, t) \in L_2(\partial Q \times (0, T))$, $u_1(x) \in L_2(Q^+, \frac{r(x)}{x_n^m})$, $u_2(x) \in L_2(Q^-, \frac{r(x)}{x_n^m})$ и для всех $f(x, t) \in L_2(Q^T)$*

существует решение из $W_{2,loc}^{2,1}(Q^T)$ смешанной задачи при $a(x,t) > a_0$. Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\int_0^T \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} r \frac{r(x)}{x_n^m} dx dt + \sup_{\beta, \delta} \left(\int_{Q_\delta^+} u^2(x, T - \beta) \frac{\rho - \delta}{x_n^m} dx + \int_{Q_\delta^-} u^2(x, \beta) \frac{\rho - \delta}{x_n^m} dx \right) \leq \\ \leq C [\|f\|_{L_2(Q^T)}^2 + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q \times (0,T))}^2 + \|u_1\|_{L_2(Q_\delta^+, \frac{r(x)}{x_n^m})}^2 + \|u_2\|_{L_2(Q_\delta^-, \frac{r(x)}{x_n^m})}^2].$$

Литература

1. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск. Наука, 1985.
2. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Введение в теорию уравнений смешанного типа второго порядка. Якутск; ЯГУ, 1998.
3. Пятков С.Г. О разрешимости одной для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. ДАН СССР. 1985. Е.285. №6, С.1322-1327.
4. Пятков С.Г. Разрешимость начально-краевых задач для одного нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: НГУ. 1987.
5. Кислов Н.В. Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения смешанного типа и их приложения//Математический сборник.1984. Т.125 вып.1. С.19-37.
6. Петрушко И.М., Черных Е.В. О начально-краевой задаче для уравнений с меняющимся направлением времени. Вестник МЭИ. 2000. №6, С. 60-70.
7. Петрушко И.М. О граничных и начальных значениях решений параболических уравнений.1984.Т.125 (167). С. 489-521.

УДК 519.633.6

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ РАЗНОГО ТИПА

MATHEMATICAL MODEL RESEARCH OF DIFFERENT TYPES OF MICROELECTROMECHANICAL RESONATORS

Пиманов Д.О.*, Фадеев С.И.**, Косцов Э.Г.***

*Новосибирский государственный университет, Россия, Новосибирск
pimanov-daniil@yandex.ru

**Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, Новосибирск
fadeev@math.nsc.ru

***Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Россия, Новосибирск
kostsov@iae.nsk.su

Микроэлектромеханические системы (MEMS) относятся к современному, быстро развивающемуся направлению в электронной промышленности. К настоящему времени создана технология принципиально новых микроэлектронных устройств с широким спектром практического применения. В данной работе приводятся результаты математического моделирования электромеханических резонаторов микронных размеров.

Характерными элементами микрорезонатора являются подвижный и неподвижный электроды, разделённые микрозазором. Неподвижный электрод покрыт слоем диэлектрика. В качестве подвижного электрода с малой массой используются различные упругие элементы: упругая балка с жестко закреплёнными концами, балка консольного типа, натянутая плёнка, недеформируемая платформа, прикрепленная к упругому элементу. При запуске резонатора под воздействием электростатического притяжения возникают колебания подвижного электрода, которые затем продолжаются в виде высокочастотных собственных колебаний.

В соответствии с типом упругого элемента формулируются начально-краевые задачи для уравнений математической физики, описывающие цилиндрическую форму прогиба подвижного электрода. Численно определены условия возникновения колебаний и связь параметров запуска и параметров собственных колебаний. Из сопоставления с результатами численного анализа начально-краевых задач следует, что применение метода Фурье даёт достаточно хорошее приближение для наименьшей частоты собственных колебаний. Тем самым получена важная характеристика микрорезонатора в аналитическом виде.

Литература

1. Численное исследование математических моделей микроэлектромеханических резонаторов разного типа / С.И. Фадеев [и др.] // Сиб. журн. индустр. матем. 2014. Т. 17. №4. С.120–135

УДК 517.956

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A CLASSE OF EQUATIONS OF COMPOSITE TYPE

Пинигина Н.Р

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,
Якутск
n-pinig@mail.ru*

Работа посвящена исследованию корректности краевых задач для некоторых классов уравнений составного типа. Для дифференциального оператора Lu вида

$$Lu \equiv (-1)^p D_t^{2p} u + \Delta u - \lambda u$$

($p > 1$ – целое, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным) с действительным параметром λ постановку корректной краевой задачи впервые предложил

В.Н. Врагов [1,2]. Дальнейшие исследования дифференциальных уравнений с операторами, подобными оператору L , связаны с именами А.Н. Терехова [3], И.Е. Егорова и В.Е. Федорова [4], А.И. Кожанова [5]. Одним из условий корректности в названных работах было условие неотрицательности параметра λ . В данной работе анализируется случай отрицательных чисел λ . Помимо задачи В.Н. Врагова, для оператора L будет предложена и другая задача, для которой также будет анализироваться случай $\lambda < 0$. В частности, в работе показано, что уравнение

$$Lu = 0$$

при $\lambda < 0$, $p > 1$ и при выполнении однородных условий задачи В.Н.Врагова или же другой задачи обладает счетной системой нетривиальных решений – собственных функций, что не имеет места при $p = 1$ (при $p = 1$ оператор L есть обычный гиперболический оператор).

Доказаны теоремы единственности. Кроме того, доказаны теоремы разрешимости поставленных краевых задач в случае, когда параметр λ не равен собственному числу и в случае, когда совпадает с собственным числом. При доказательстве разрешимости выписываются также собственные значения и собственные функции сопряженных задач.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект № 3047)

Литература

1. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1976. Т.13, № 6. С. 1098-1105.
2. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Матем. анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука. 1978. С. 5-13.
3. Терехов А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к решению задач математической физики и вычислительной математики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ие, Ин-т математики. Новосибирск, 1979. С.128-137.
4. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: изд-во ВЦ СО РАН. 1995. 131с.
5. Кожанов А.И., Шарин Е.Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. вісник. 2014. Т.~11, \No 2. С.~181--202.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ *

NUMERICAL SOLUTION OF CONTROL PROBLEM FOR SYSTEM OF PHASE FIELD EQUATIONS *

Плеханова М.В.*, Байбулатова Г.Д.**

* Южно-Уральский государственный университет,
Россия, Челябинск
mariner79@mail.ru

** Челябинский государственный университет, Россия, Челябинск
baybulatova_g_d@mail.ru

В настоящее время является затруднительным поиск численного оптимального управления для систем с распределенными параметрами, т.к. по сути, требуется решение сразу нескольких связанных задач.

В данной работе строится алгоритм численного решения задачи управления линеаризованной квазистационарной системой уравнений фазового поля, в рамках мезоскопической теории описывающей фазовые переходы первого рода. В области $Q = \Omega \times [0, T]$ с гладкой границей рассматривается задача управления с терминальным функционалом

$$v_t(x, t) = \Delta v(x, t) - \Delta w(x, t) + u_1(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$0 = v(x, t) + (\beta + \Delta)w(x, t) + u_2, \quad (x, t) \in Q,$$

$$v(x, t) = w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega$$

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leq R^2,$$

$$J(v, w) = \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|w - \tilde{w}\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow \inf,$$

где R, β - константы v, w - неизвестные функции, u_1, u_2 - функции управления. Цель состоит в минимизации функционала стоимости на допустимых наборах v, w, u_1, u_2 , т.е. таких функциях v, w которые являются решением начально-краевой задачи при управлении из множества допустимых управлений, определенным условием $\|u\|_{L_2(Q)} \leq R^2$.

Проводится исследование линеаризованной системы, однако, ее особенность не теряется и состоит в том, что система уравнений не разрешима относительно производной по времени.

Исследование опирается на результаты о разрешимости начально-краевых задач для вырожденных задач, полученные в работах В.Е. Федорова, результаты о разрешимости задач оптимального управления, принадлежащих М.В. Плехановой, В.Е. Федорову и А.Ф. Исламовой, а также на результаты о разностных методах решения задачи фазового при разработке метода условного градиента для рассматриваемой задачи. Итогом работы стала программная реализация метода при некоторых значениях параметров задачи.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (14-01-31125)

**ЗАДАЧА ШОУОЛТЕРА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО
ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ ***
**SHOWALTER PROBLEM FOR A HIGH ORDER QUASILINEAR
DEGENERATE EQUATION***

Плеханова М.В.*

** Южно-Уральский государственный университет,
Россия, Челябинск
Челябинский государственный университет, Россия, Челябинск
mariner79@mail.ru*

Данная работа посвящена вопросам существования и единственности сильного решения начальной задачи Шоуолтера для квазилинейного уравнения, в котором при выделенной старшей производной по времени стоит оператор с нетривиальным ядром. Такие уравнения часто называются вырожденными эволюционными уравнениями.

К начальным задачам для них могут быть редуцированы многие уравнения и системы уравнений в частных производных, не разрешимые относительно старшей производной по времени, встречающиеся в естественных и технических науках.

Исследование проводится с использованием методов теории вырожденных полугрупп операторов, развитых в работах Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова при изучении линейных вырожденных эволюционных уравнений первого порядка. Используемое условие (L, p) -ограниченности оператора M позволяет редуцировать исходное уравнение к системе двух уравнений, одно из которых является разрешенным относительно старшей производной, второе имеет при этой производной нильпотентный оператор, что упрощает его исследование.

В данном случае рассмотрено полное квазилинейное уравнение с произвольным $p > 0$, что означает вырождение уравнения не только на ядре оператора при производной, но и на цепочках его M -присоединенных векторов высоты не больше p .

Сначала с помощью функции Миттаг-Леффлера найдены условия существования единственного сильного решения задачи Шоуолтера для квазилинейного эволюционного уравнения, разрешенного относительно старшей производной. Затем полученные результаты используются при изучении разрешимости в смысле сильного решения вырожденных квазилинейных эволюционных уравнений при условии выполнения некоторых специальных ограничений на нелинейный оператор N .

Полученные результаты проиллюстрированы на модельном примере начально-краевой задачи для квазилинейной системы уравнений в частных производных, не разрешимой относительно производной по времени. Для задачи подобраны функциональные пространства и операторы, в терминах которых она редуцирована к задаче Шоуолтера для вырожденного квазилинейного уравнения в банаховом пространстве. Показано, что в рассматриваемой ситуации оператор M $(L, 1)$ -ограничен. На данном примере продемонстрирован смысл специальных условий на нелинейный оператор в полученных абстрактных теоремах.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (14-01-31125) и частичной поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

ЗАДАЧА СТЕФАНА И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НЕМОНОТОННОЙ НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

STEFAN PROBLEM AND INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR EQUATIONS IN DOMAIN WITH NON-TUBE AND NON-MONOTONE BOUNDARY

Подгаев А.Г., Лисенков К.В.

Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск

Исследуется существование регулярных решений для квазилинейных параболических уравнений в нецилиндрической области с заданной границей класса W_2^1 в случае одной пространственной переменной [1] или с границей класса $C_{x,t}^{2,1}$ в многомерном случае [2]. При этом не предполагается монотонность границы. Допускается вырождение уравнения.

Представлены также результаты исследования задачи Стефана, когда часть границы неизвестна и находится вместе с решением. [3]

Для случая заданной границы приближенные решения строятся проекционным методом с использованием семейства проекторов зависящих от временного параметра. Доказывается, что некоторый предел этих решений будет решением задачи.

Для обоснования существования предела в одномерном случае используются методы компактности множества функций из шкалы банаховых пространств.

В случае n переменных развивается метод монотонности на случай нецилиндрических областей.

Одномерная задача для случая монотонной границы класса W_2^1 рассматривалась в [4]

В одномерном случае рассматривается уравнение
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \phi(u_x) + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t) u.$$

При допущении довольно произвольного вырождения ($\phi' \geq 0$) для заданной необязательно монотонной границы $x = s(t) \in W_2^1(0, T)$ установлены теоремы существования.

Предполагается, что отрезок $[0, T]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $s'(t) \geq 0$ п.в. либо $s'(t) \leq 0$ п.в. Случай $s(T)=0$ допустим.

В многомерном случае с границей класса $C_{x,t}^{2,1}$ изучено уравнение

$$u_t = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(u_{x_i}) + f$$

в нецилиндрической области $\bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_t = Q_T$. Обосновано существование и единственность

решения первой начально-краевой задачи. Показано, какие изменения можно внести в метод монотонности, чтобы он «работал» в нестационарном случае нецилиндрических областей (основное неравенство выводится существенно более долгим путем).

Литература

1. Подгаев А.Г., Лисенков К.В. Разрешимость квазилинейного параболического уравнения в области с кусочно-монотонной границей//Дальневосточный математический журнал. 2013. Т.13. №2.
2. Подгаев А.Г., Истомина Н.Е. О методах Фаздо - Галеркина и монотонности в нецилиндрической области для вырождающегося квазилинейного уравнения// Дальневосточный математический журнал. 2014. Т.14. №1.
3. Подгаев А.Г. Краевые задачи и задачи управления для вырождающихся параболических уравнений в областях с нецилиндрической или неизвестной границей //Научное обеспечение технического и социального развития Дальневосточного региона: сб. науч. ст. к 55-летию Тихоокеан. гос. ун-та. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013.
4. Лисенков К.В. Проекционный метод решения задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрической области с границей класса W_2^1 // Дальневосточный математический журнал. Т. 12, №1, 2012. С.48-59.

УДК 517.19

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ABOUT SPECTRAL PROPERTIES OF FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR WITH PERIODIC AND SEMIPERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

Поляков Д.М.

Воронежский государственный университет, Воронеж
DmitryPolyakow@mail.ru

Пусть $L_2[0,1]$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[0,1]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением $(x, y) = \int_0^1 x(\tau) \overline{y(\tau)} d\tau$, $x, y \in L_2[0,1]$. Через $W_2^4[0,1]$ обозначим пространство Соболева $\{y: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}: y, y', y'' \text{ непрерывные на } [0,1], y''' \text{ абсолютно непрерывна и } y^{IV} \in L_2[0,1]\}$.

Рассмотрим оператор $L_{bc}: D(L_{bc}) \subset L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$, определенный следующим дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - a(t)y'' - b(t)y, \quad a, b \in L_2[0,1].$$

Область определения $D(L_{bc})$ определяется одним из двух краевых условий:

- (a) периодические $bc = per: y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1), j = 0, 1, 2, 3;$
- (б) антипериодические $bc = ap: y^{(j)}(0) = -y^{(j)}(1), j = 0, 1, 2, 3.$

Оператор $L_{bc}^0: D(L_{bc}) = D(L_{bc}) \subset L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$, $L_{bc}^0 y = y^{IV}$, является самосопряженным оператором с компактной резольвентой.

Для функций $a, b \in L_2[0,1]$ справедливы следующие представления: $a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i2\pi kt}$,

$b(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{i2\pi kt}$, где $a_k, b_k, k \in \mathbb{Z}$ – коэффициенты Фурье функций a и b соответственно.

Спектры $\sigma(L_{bc})$ операторов L_{bc} , $bc \in \{per, ap\}$, представимы в виде:

(a): $\sigma(L_{per}) = \{(2\pi n)^4, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Собственное подпространство для $n \neq 0$ имеет вид $E_n^0 = \text{Span}\{e_n^1, e_n^2\}$, где $e_n^1(t) = e^{-i2\pi nt}$, $e_n^2(t) = e^{i2\pi nt}$, $t \in [0,1]$. Если $n = 0$, то $E_0^0 = \{\alpha e_0, \alpha \in \mathbb{C}\}$, где $e_0(t) = 1, t \in [0,1]$.

(b): $\sigma(L_{ap}) = \{\pi^4(2n+1)^4, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Соответствующее собственное подпространство имеет вид $E_n^0 = \text{Span}\{e_n^1, e_n^2\}$, где $e_n^1(t) = e^{-i\pi(2n+1)t}$, $e_n^2(t) = e^{i\pi(2n+1)t}$, $t \in [0,1]$.

Проекторы Рисса P_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, определяются следующим образом:

$$(a) \quad P_n x = (x, e_n^1) e_n^1 + (x, e_n^2) e_n^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad P_0 x = (x, e_0) e_0;$$

$$(b) \quad P_n x = (x, e_n^1) e_n^1 + (x, e_n^2) e_n^2, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

для всех $x \in L_2[0,1]$.

Для получения основных результатов применяется вариант метода подобных операторов, основные положения которого изложены в [1].

Теорема 1. Дифференциальный оператор L_{bc} является оператором с компактной резольвентой и его спектр представим в виде $\sigma(L_{bc}) = \tilde{\sigma}_m \cup \{\tilde{\lambda}_n, n \geq m+1\}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\tilde{\sigma}_m$ – конечное множество, с числом точек не превосходящим m . Собственные значения $\tilde{\lambda}_n$ оператора L_{per} допускают следующую асимптотику

$$\tilde{\lambda}_n = (2\pi n)^4 + (2\pi n)^2 a_0 + \beta_n n^2, \quad n \geq m+1,$$

где (β_n) – суммируемая с квадратом последовательность. Соответственно для оператора L_{ap} имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\tilde{\lambda}_n = (\pi(2n+1))^4 + (\pi(2n+1))^2 a_0 + \gamma_n n^2, \quad n \geq m+1,$$

где (γ_n) – суммируемая с квадратом последовательность.

Теорема 2. Оператор $-L_{bc}$, $bc \in \{per, ap\}$, генерирует аналитическую полугруппу операторов.

Отметим, что в докладе будет приведено точное асимптотическое представление этой полугруппы, а также теоремы об оценках равносходимости спектральных разложений.

Литература

1. А.Г. Баскаков, А.В. Дербушев, А.О. Щербаков. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. Матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3-28.

УДК 514.8:517.983:519.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕНЗОРНОЙ ТОМОГРАФИИ МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ* SOLUTION OF 3D TENSOR TOMOGRAPHY PROBLEMS WITH USAGE OF SINGULAR VALUE DECOMPOSITION*

Полякова А.П.*

** Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН; Новосибирский
государственный университет; Новосибирск, Россия
anna.polyakova@ngs.ru*

В данной работе рассматриваются задачи по восстановлению потенциальной части трехмерного векторного и симметричного 2-тензорного поля, заданного в единичном круге, по его известному нормальному преобразованию Радона.

Нормальное преобразование Радона векторного поля $\mathbf{v} = (v_i)$ и нормальное преобразование Радона симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w} = (w_{ij})$ определяются формулами

$$[\mathcal{R}^\perp \mathbf{v}](\xi, s) = \iint_{P_{\xi, s}} (v_i \xi^i) du dv, \quad [\mathcal{R}^\perp \mathbf{w}](\xi, s) = \iint_{P_{\xi, s}} (w_{ij} \xi^i \xi^j) du dv,$$

здесь $P_{\xi, s}$ - плоскость, перпендикулярная направлению ξ и отстоящая на расстояние $|s|$ от начала координат, u, v - координаты локальной системы координат, заданной на плоскости $P_{\xi, s}$, по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3. Поскольку соленоидальная часть векторного и симметричного 2-тензорного поля лежит в ядре оператора нормального преобразования Радона, мы можем восстановить лишь его потенциальную часть.

Построено сингулярное разложение операторов нормального преобразования Радона в векторном и 2-тензорном случае, получена формула обращения и аппроксимации для обратного оператора. В исходном пространстве ортонормированные базисы строятся с помощью полиномов Якоби и сферических гармоник. Используя [1] удалось показать, что соответствующие ортонормированные базисы в пространстве образов строятся на основе полиномов Гегенбауэра и сферических гармоник.

Полученное сингулярное разложение послужило основой для численного решения задачи по восстановлению потенциальной части трехмерного векторного и симметричного 2-тензорного поля по его известному нормальному преобразованию Радона. Проведено всестороннее тестирование разработанного алгоритма с целью установления границ его применимости.

Литература

1. Louis A.K. Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon Transform. – Society for industrial and applied mathematics. – Vol.15, № 3 (1984), p. 621-633.

* Работа осуществлена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31491-мол_а). Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 3630/ГФ4-2015)

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ABOUT THE CONDITIONS OF SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONCLASSICAL EQUATIONS OF THIRD ORDER

Попов Н.С.

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова", г. Якутск, Россия;
popovnsrg@mail.ru*

Рассматриваются пространственно нелокальные краевые задачи для линейных одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений с постоянными коэффициентами, но с общими нелокальными краевыми условиями А.А. Самарского и интегральными условиями с переменными коэффициентами. Доказательства теорем существования и единственности регулярных решений проведены методом Фурье. Исследование разрешимости в классах регулярных решений приводит к изучению системы интегральных уравнений Вольтерры второго рода. В частных случаях даются условия невырожденности полученных систем интегральных уравнений в явном виде.

Исследованию подобных нелокальных краевых задач для параболических и гиперболических уравнений посвящены работы [1, 2].

I. Пусть $\Omega = (0, 1)$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. В области Q рассматривается уравнение

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t) + \int_0^1 K_1(x)u(x, t)dx, \\ u_x(1, t) &= \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t) + \int_0^1 K_2(x)u(x, t)dx, \end{aligned} \quad (2)$$

где $f(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ – заданные функции, определенные

при $x \in \bar{\Omega} = [0, 1]$, $t \in [0, T]$, α – постоянная.

Краевая задача 1. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия (2), а также начальные условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Регулярная разрешимость краевой задачи 1 доказывается методом Фурье [3], с помощью которого разрешимость краевой задачи 1 сводится к разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерры. В частности, при выполнении условий

$$\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \beta_1(t) = \beta_2(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]; \quad K_1(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

имеем следующее интегральное уравнение

$$p_1 \psi(t) + \int_0^t m(t, \tau) \psi(\tau) d\tau = F_2(t), \quad (4)$$

где

$$p_1 \neq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 K_2(x) \left[\frac{5}{6} + \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \right] dx \neq 1,$$

которое является условием невырожденности интегрального уравнения (4).

II. В области Q рассматривается уравнение

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - u_{xxt} = f(x, t), \quad (5)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$u_x(0, t) = \int_0^1 K_1(x) u(x, t) dx, \quad u_x(1, t) = \int_0^1 K_2(x) u(x, t) dx, \quad (6)$$

где $f(x, t)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ – заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega} = [0, 1]$, $t \in [0, T]$, α – постоянная.

Краевая задача 2. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (5) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия (6), а также начальные условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

Разрешимость краевой задачи 2 эквивалентно редуцируется к разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерры.

Если $K_1(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, 1]$, то имеем следующее интегральное уравнение

$$p_2 u(t) + \int_0^t m(t - \tau) u(\tau) d\tau = F_2(t), \quad (8)$$

где

$$p_2 \neq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 K_2(x) dx \neq \frac{6}{11},$$

которое является условием невырожденности интегрального уравнения (8).

Метод продолжения по параметру и априорных оценок для псевдопараболических уравнений с переменными коэффициентами использовалась в работе [4].

Литература

1. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2008. № 3(62). С. 165-174.
2. Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С.1072-1077.
3. Кожанов А.И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Доклады Академии Наук. 2014. Т. 457, № 2. С. 152-156.
4. Попов Н.С. Разрешимость краевой задачи для псевдогиперболического уравнения с нелокальными интегральными условиями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 3. С. 359-372.

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ $2n$ -ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ***
**BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR $2n$ -PARABOLIC EQUATIONS
WITH CHANGING TIME DIRECTION**

Попов С.В.

*ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова", г. Якутск, Россия;
madu@ysu.ru*

Рассматриваются $2n$ -параболические уравнения второго и четвертого порядков с меняющимся направлением времени с условиями склеивания с переменными коэффициентами по $t \in [0, T]$.

В работе [1] явно представлены условия разрешимости для краевых задач для параболических уравнений $2n$ -го порядков с меняющимся направлением времени. При этом для доказательства разрешимости были рассмотрены общие диагональные условия склеивания с постоянными коэффициентами, более того, были найдены зависимости показателей гильбертовых пространств от весовых функций склеивания.

В настоящей работе устанавливается разрешимость краевых задач в пространствах Гельдера для уравнений

$$\operatorname{sgn} x u_t + (-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = 0.$$

Показано, что гильбертовские классы их решений зависят как от нецелого показателя Гельдера, так и от коэффициентов условий склеивания, заданных на интервале $[0, T]$ при выполнении необходимых и достаточных условий на входные данные задачи.

Литература

1. Попов С.В., Потапова С.В. Гильбертовские классы решений $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 424, № 5. С. 594-596.
2. Попов С.В. Гильбертовские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением времени с переменными условиями склеивания // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 69-80.

* Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014-2016 гг. (проект № 3047).

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ*

INTERFACE PROBLEM FOR THIRD ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS AND COEFFICIENT ALTERNATE IN SIGN*

Потапова С.В.*

* Северо-Восточный федеральный университет,
Россия, Якутск
sv-potapova@s-vfu.ru

В прямоугольнике $Q = (-1,1) \times (0,T)$ $0 < T < +\infty$ рассматриваем задачу сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и первой производной по времени

$$u_t + h(x)u_{xxx} + c(x,t)u = f(x,t), \quad (1)$$

где функции $f(x,t)$, $c(x,t)$ определены при $(x,t) \in Q$, функция $h(x)$ такова, что на каждом из отрезков $[-1,0]$ и $[0,1]$ она непрерывна, знакоопределена, в точке $x = 0$ имеет разрыв первого рода и при переходе через нее меняет знак.

Работ по исследованию разрешимости краевых задач для уравнений с кратными характеристиками в случае когда коэффициенты терпят разрыв не очень много [1-6].

В этих работах авторы рассматривают задачи типа Жевре, т.е. когда граничные условия задаются на части верхней и на части нижней границ. Такого типа задачи хорошо изучены для параболических уравнений с меняющимся направлением времени [7]. Также подобные задачи, когда граничные условия задаются на верхней и нижней границе, были рассмотрены в работе [8] для псевдогиперболического уравнения с меняющимся направлением времени.

В данной работе мы расширяем класс задач для уравнений с меняющимся направлением времени, задавая начальные условия только при $t = 0$ на всем интервале $(-1,1)$, не разбивая его на части верхней и нижней границ. При таком условии формулируем корректные постановки краевых задач для уравнения (1) и доказываем существование и единственность регулярных решений в соответствующих анизотропных пространствах Соболева.

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН. 1979. 239 с.
2. Абдинозаров С. Хашимов А. Краевые задачи для уравнения с кратными характеристиками и разрывными коэффициентами // Уз. мат. журн. 1993. N 1. С. 3-12.
3. Хашимов А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа с кратными характеристиками // Уз. мат. журн. 1995. N 2. С. 95-97.
4. Антипин В.И. Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени. Математические заметки ЯГУ, 2011, Т.18, N 1, С. 8-15.

* Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047) и РФФИ (проект 15-31-50077\15)

5. Антипин В.И. Разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа, Сибирский математический журнал, 2013, Т.54, N 2. С.245-257.
6. Pyatkov S.G., Popov S., Antipin V.I. On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations // Integral Equation and Operator Theory, 2014, V. 80, N 4, 557-580.
7. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.
8. Potapova S.V. Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, V.3, N 1, 2012. P. 75-91.

УДК 517.946

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

CONJUGATION PROBLEM FOR NON CLASSIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Применко А.А.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск
alenaprimenko@yandex.ru*

Пусть Ω есть интервал $(-1,1)$ оси Ox , Q – прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, $a(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ суть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $h(x)$ есть заданная функция, такая что $h(x) \in C([-1, 0])$, $h(x) > 0$ при $x \in [-1, 0]$, $h(x) \in C([0, 1])$, $h(x) > 0$ при $x \in [0, 1]$, $h(-0) \neq h(+0)$. Обозначим $Q^- = (-1, 0) \times (0, T)$, $Q^+ = (0, 1) \times (0, T)$, $Q_0 = Q^- \cup Q^+$. Рассматриваются задачи нахождения функции $u(x, t)$, являющейся в Q_0 решением уравнения

$$u_{ttt} - h(x)u_{xxt} + a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

при заданных условиях сопряжения

$$u(-0, t) = \alpha(t)u(+0, t), \quad t \in (0, T); \quad (2)$$

$$u_x(+0, t) = \beta(t)u_x(-0, t), \quad t \in (0, T). \quad (3)$$

Для уравнения (1) с условиями сопряжения (2), (3) рассмотрены краевые задачи и задача с данными Коши по t . Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, обсуждаются вопросы о неединственности и о существовании собственных функций.

ОБ Н-СВОЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ABOUT H-SVOYSTVE OF FUNCTIONALITIES

Прудников В.Я.

*Тихоокеанский государственный университет
Россия, Хабаровск
prudnikov.vit@yandex.ru*

В теории некорректных задач важную роль имеет вопрос о сходимости по норме последовательности к данному элементу, если известны слабая сходимость этой последовательности и сходимость по функционалу [1-4]. Функционалы, имеющие такое поведение, названы А.С.Леоновым функционалами с Н-свойством. В упомянутых работах приведены достаточно обширные классы функционалов с Н-свойством в пространствах Лебега и Соболева. Сформулируем один из результатов в данном направлении. Обозначим через Ω область в пространстве $\mathbf{R}^n$, $f(x, u) : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ – функция Каратеодори,

$$F(u) := \int_{\Omega} f(x, u(x)) \, d\mu(x),$$

где μ – σ -конечная положительная мера на σ -алгебре Σ подмножеств Ω , $L^p(\Omega) = L^p(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega)$ (m раз), $1 \leq p < \infty$.

Теорема. Пусть $u \rightarrow f(x, u)$ – выпуклая функция в $\mathbf{R}^m$, $u^0 \in L^p(\Omega)$, функционал F конечен на $L^p(\Omega)$

Для того чтобы функционал F имел Н-свойство на элементе u^0 , необходимо и достаточно существование положительного числа k такого, что функция

$$\sup_u \left\{ k |u - u^0(x)|^p - \frac{1}{2} [f(x, u) + f(x, u^0(x))] + f\left(x, \frac{1}{2}(u + u^0(x))\right) \right\}_+$$

была суммируемой на Ω .

Литература

1. Леонов А. С. Обобщение метода максимальной энтропии для решения некорректных задач // Сиб. матем. журн.. 2000. Т. 41, С.863-872.
2. Леонов А. С. Регуляризирующие функционалы общего вида для решения некорректных задач в пространствах Лебега // Сиб. матем. журн., 2003. Т. 44, № 6. С. 1295–1309.
3. Леонов А.С. Функционалы с Н-свойством в пространстве W_1^1 // Мат. сб. 2004. Т. 195, №6. С. 121-136.
4. Леонов А.С. Об Н-свойстве функционалов в пространствах Соболева // Мат. заметки. 2005. Т. 77, вып. 3. С. 378–394.

**ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ
ДИФФУЗИИ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ**
**THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF
FRACTIONAL DIFFUSION IN NONCYLINDRICAL DOMAIN.**

Псху А.В.

*Институт прикладной математики и автоматизации,
Россия, Нальчик
pskhu@list.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} u(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

где $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = D_{0y}^\alpha$ – дробная производная Римана-Лиувилля [1, с. 9] порядка α , $\alpha \in (0, 1)$, с началом в точке $y = 0$, в области $D = \{(x, y): z_1(y) < x < z_2(y), 0 < y < T\}$. Здесь $z_1(y)$ и $z_2(y)$ – непрерывные на $[0, T]$ функции, $z_1(y)$ не убывает, а $z_2(y)$ не возрастает, $z_1(y) < z_2(y)$ для всех $y \in [0, T)$, и $z_1(T) \leq z_2(T)$. Под регулярным решением уравнения (1) в области D будем понимать решение из класса $y^{1-\alpha} u(x, y) \in C(\bar{D} \setminus \{y = T\})$, $u_{xx}(x, y), D_{0y}^\alpha u(x, y) \in C(D)$.

Исследуется задача: найти регулярное решение уравнения (1) в области D , удовлетворяющее условиям

$$u(z_1(y), y) = \varphi_1(y), \quad u(z_2(y), y) = \varphi_2(y), \quad 0 < y < T; \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), \quad z_1(0) < x < z_2(0). \quad (3)$$

Уравнения в частных производных дробного порядка последнее время исследуются весьма интенсивно, что связано, в частности, с многочисленными приложениями в физике и моделировании, (см., например, [1, гл. 5], [2]. Обзор работ, посвященных уравнению дробной диффузии работ можно найти в [3], [4]. В частности, первая краевая задача для уравнения (1) в прямоугольной области решена в [5]. Практически во всех работах, посвященных уравнению (1), изучались начальные и краевые задачи в ограниченных и неограниченных цилиндрических областях. В данной работе указаны достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и (3) в области D , которая, вообще говоря, цилиндрической не является.

Отметим, что первая краевая задача для уравнения теплопроводности ($\alpha = 1$) в нецилиндрической области была решена в работах [6] и [7].

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. - М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Учайкин В.В. Метод дробных производных. - Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
4. Псху А.В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. матем., 73:2 (2009), 141-182.
5. Псху А.В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференциальные уравнения, 39:9 (2003), 1286-1289.

6. Gevrey M. Sur les equations aux derivees Partielles du type parabolique // Journal de mathematiques pures et appliquees 6^e serie, tome 9 (1913), p. 305-476.
7. Petrowsky I. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung // Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 383-419.

УДК 517.911

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ ГОЛОМОРФНОСТИ

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTION THE CAUCHY PROBLEM FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF FIRST ORDER IN THE REGION OF HOLOMORPHY

Пчелова А.З.

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
Россия, Чебоксары
archelova@mail.ru*

Введение. Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной правой частью пятой степени, решение которого обладает подвижными особыми точками алгебраического типа, в общем случае не разрешимое в квадратурах. Наличие подвижных особых точек не позволяет применять к этому уравнению известные аналитические и численные приближенные методы, так как они не адаптированы к этой категории особых точек. В настоящей работе сформулирована теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения в области голоморфности.

Методика исследования. Применяется приближенный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными точками алгебраического типа, идея которого изложена в работах [1–4].

Результаты исследования. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$w'(z) = w^5(z) + r(z),$$

к которому с помощью некоторой замены переменных приводится дифференциальное уравнение вида

$$w'(z) = f_0 + f_1 w(z) + f_2 w^2(z) + f_3 w^3(z) + f_4 w^4(z) + f_5 w^5(z)$$

(где f_i , $i = 0, 1, \dots, 5$, – голоморфные функции комплексной переменной z), в общем случае не интегрируемое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками.

Рассматривается задача Коши

$$w'(z) = w^5(z) + r(z), \tag{1}$$

$$w(z_0) = w_0. \tag{2}$$

Теорема. Пусть функция $r(z)$ задачи Коши (1)–(2) удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $r(z) \in C^1$ в области $|z - z_0| < \rho_1$, где $\rho_1 = \text{const} > 0$,

$$2) \exists M_1 : \frac{|r^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq M_1, \text{ где } M_1 = \text{const}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда решение этой задачи является голоморфной функцией

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (3)$$

в области $|z - z_0| < \rho$, где

$$\rho = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{5(M^4 + 1)} \right\}, M = \max \left\{ |w_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(z_0)|}{n!} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство теоремы состоит из двух этапов. На первом этапе доказывается единственность представления решения в виде степенного ряда (3), а на втором этапе – сходимость этого ряда. Используется метод мажорант к решению (3) заданного уравнения, а не к правой части дифференциального уравнения, как это делается в известной теореме Коши существования и единственности решения дифференциального уравнения.

Оценки

$$|C_n| \leq \frac{1}{n} 5^{n-1} M (M^4 + 1)^n, n = 1, 2, 3, \dots$$

для коэффициентов C_n ряда (3), полученные в ходе доказательства этой теоремы, позволяют построить приближенное решение задачи Коши (1)–(2) в виде

$$w_N(z) = \sum_{n=0}^N C_n (z - z_0)^n.$$

Литература

1. Орлов В. Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – Т. 25, № 10. – 1989. – С. 1829–1832.
2. Орлов В. Н. Об одном конструктивном методе построения первого и второго мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. – Т. 19. – ІМ НАН України, Київ. – 1998. – С. 155–165.
3. Орлов В. Н. Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В. Н. Орлов // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. – СПб., 2008. – № 4. – С. 102–108.
4. Орлов В. Н. Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, С. А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. – 2010. – № 4(18). – С. 2–6.

О ПАРАДИГМЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИФФУЗИОННОГО ГОРЕНИЯ ON THE RECONSTRUCTION TO THE INITIAL STAGE OF INNER TURBULENCE

Е.В. Радкевич
E.V. Radkevich

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
evrad07@gmail.com

Abstract

The mathematical inner turbulence model describing structure formations in instability zones are proposed and justified. The constructed mathematical object reproduces the basic process instabilities and their stabilization inverse relations, that requires the agreement of micro and macro scales, wave and diffusion processes. The birth of two-speed flow (the Riemann-Hugoniot catastrophe) and the alternation origin (band flow) are described. Physical interpretation and numerical analysis are discussed.

Доклад посвящен реконструкции начальной стадии внутренней турбулентности (без учета граничных эффектов), включая математическое описание возникновения двухскоростного режима (катастрофа Римана-Гюгонио) и перемежаемости. Современные подходы к теоретическому описанию начальной стадии внутренней турбулентности дают результаты, плохо согласуемые с экспериментом. Поэтому был построен математический объект [1]-[2], воспроизводящий основные неустойчивости процесса и стабилизирующие их обратные связи. Его создание потребовало согласования микро и макромасштабов, волнового и диффузионного процессов. В частности, удалось построить математическую реконструкцию начального этапа внутренней турбулентности, включая образования двухскоростного режима (катастрофы Римана-Гюгонио) и перемежаемости. Трудности расчетов таких процессов заключаются в том, что моделирование проводится одновременно на нескольких масштабных уровнях. К настоящему времени в экспериментальных исследованиях изучены многие детали начальной стадии процесса внутренней турбулентности, но общего теоретического представления об этом процессе пока не существует. Модель, используемая в данной работе, основана на многоскоростной системе уравнений Эйлера, распространение возмущений в которой приводит к катастрофе Римана-Гюгонио. Для описания образования флуктуаций плотностей, приводящих к перемежаемости, используется модифицированное уравнение Кана-Хилларда. Разномасштабность требует значительных вычислительных ресурсов. Двумерные расчеты основаны на явных и явно-итерационных алгоритмах, эффективно реализованных на многопроцессорной вычислительной системе.

Литература

1. E.A. Lukashiev, N.N. Yakovlev, E.V. Radkevich and V.V. Palin. On the Possibility of the Cahn-Hilliard Approach Extension to the Solution of Gas Dynamics Problems (Inner Turbulence) // 40th International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE 2014), AIP Conference Proceedings 1631, 197 (2014); doi: 10.1063/1.4902477.
2. Лукашев Е.А., Радкевич Е.В., Яковлев Н.Н. О реконструкции начальной стадии внутренней турбулентности // Наноструктуры, математическая физика и моделирование, 2014, том. 11, № 1, 73-99.

**ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ
ГРАНИЦЫ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД В ТЕРМИНАХ
КОНВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОХОЖДЕНИЯ**
**WAVEFIELDS IN THE VICINITY AT CURVILINEAR CONTACT OF
INHOMOGENEOUS MEDIA IN TERMS OF CONVOLUTION-TYPE
TRANSMISSION OPERATORS**

Ракшаева Е.Ж.*, Айзенберг А.М.*, Песчанко А.И.***

** Новосибирский государственный университет, Россия, Новосибирск*

rcatherine89@gmail.com , peschanko@mail.ru

*** Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука. СО РАН,
Россия, Новосибирск*

AizenbergAM@ipgg.sbras.ru

Строгое описание явления отражения и преломления на границе двух сред играет важную роль для развития теории методов решения прямых и обратных задач сейсмологии. Были предприняты многочисленные попытки использовать строгие постановки краевых задач математической теории волн с целью описания этого явления в терминах операторов прохождения (отражения и преломления). Впервые граничные условия на плоском контакте однородных акустических сред были записаны в форме преобразования отражения-преломления с конволюционными операторами прохождения в [3]. Позже это представление граничных условий было обобщено на случаи плоского или криволинейного контакта неоднородных акустических и упругих сред [1, 2, 4]. Операторы прохождения также имеют вид двукратных сверток по криволинейной границе. Их ядра содержат быстро осциллирующие и дробно-радикальные функции, которые зависят от локальных значений материальных параметров сред и средней кривизны границы.

Рассматривается постановка начально-краевой задачи о распространении сейсмических волн в канонической модели среды: отражение и преломление волн на криволинейном контакте (из класса поверхностей Александрова А.Д. [0]) двух неоднородных полупространств с различными материальными параметрами. В каждом полупространстве общее решение системы уравнений движения частиц представляется в виде обобщенного частичного преобразования Фурье по пространственным частотам, подобного разложению Зоммерфельда-Вейля. Новым элементом теории является доказательство (в сотрудничестве с научным руководителем) существования такой криволинейной метрики в однородной окрестности криволинейной границы, в которой система уравнений механического движения частиц инвариантна по отношению к ограниченному регулярному возмущению плоской границы. Граничные условия начально-краевой задачи, записанные в терминах механики сплошной среды, трансформированы с помощью частичного преобразования Фурье в эквивалентные условия в форме линейного преобразования отражения-преломления на границе. Это преобразование записано в терминах новых матричных операторов прохождения конволюционного типа. Операторы прохождения действуют на предельные значения компонент волновых полей, которые непрерывны на границе. Элементы матричных ядер этих операторов представлены двукратным преобразованием Фурье от коэффициентов отражения или преломления плоских волн с материальными параметрами сред, фиксированными в точке вычисления свертки. Существенно, что геометрические параметры границы между акустическими и изотропными упругими средами не влияют на элементы матричных ядер. Использование фиксированности параметров сред позволяет представить операторы прохождения на криволинейной границе в виде изо-

морфном операторам прохождения на плоской границе. Криволинейная граница в малой окрестности точки отражения-преломления рассматривается как плоский контакт между однородными средами с материальными параметрами, фиксированными в точке касания. При этом кривизна границы учитывается во входных параметрах предельных значений компонент волновых полей.

Литература

1. Ракшаева Е.Ж., Айзенберг А.М., Айзенберг М.А., Андерссон Ф. Описание отраженных и преломленных сейсмических волн на контакте однородных сред в терминах конволюционных операторов прохождения // “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”, 2011, Новосибирск, Россия, 50-51.
2. M. Ayzenberg, I. Tsvankin, A.M. Aizenberg, and B. Ursin. Effective reflection coefficients for curved interfaces in transversally isotropic media // *Geophysics*, 2009, 74, 5, WB33-WB53.
3. A.J. Berkhout. *Applied Seismic Wave Theory* // *Advances in exploration geophysics*, vol. I, Elsevier, 1987.
4. Klem-Musatov K.D., Aizenberg A.M., Helle H.B. and Pajchel J. Reflection and transmission at curvilinear interface in terms of surface integrals // *Wave Motion*. 2004, 39, 1, 77-92.
5. Burago Yu.D., Ivanov S.V., and Malev S.G., Remarks on chebyshev coordinates // *Journal of Mathematical Science*, Vol. 140, 4 (2007) 497-501.

УДК 517.9

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОШИ–РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ* A REPRESENTATION OF GENERAL SOLUTION OF THE CAUCHY- RIEMANN TYPE EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Расулов А.Б.¹, Солдатов А.П.²

¹Московский государственный национальный
исследовательский университет, Россия, Москва
rasulov-abdu@rambler.ru

²Белгородский государственный национальный
исследовательский университет, Россия, Белгород
soldatov48@gmail.com

Пусть односвязная область G на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ограничена гладкой дугой L в верхней полуплоскости и отрезком $l = [\tau_0, \tau_1]$ вещественной прямой. В этой области рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{(z - \bar{z})a(z)}{|z - \bar{z}|^{n+1}}U + \frac{b(z)}{|z - \bar{z}|^m}\bar{U} = F(z), \quad (1)$$

где $0 < m < 1 < n$ и $a, b \in C(\bar{G})$. Хорошо известно, что интегральный оператор

* Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113PK01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_G \frac{f(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G,$$

действует $L^p(G) \rightarrow H(\bar{G})$, где $p > 2$ и H означает класс Гельдера, и функция $u = Tf$ удовлетворяет (в обобщенном смысле) уравнению $u_z = f$. В частности, в случае $A \in L^p(G)$ таким решением служит $\Omega = TA$. Рассмотрим общий случай коэффициента A . С этой продолжим L до гладкого контура L^1 , ограничивающего область $G^1 \supseteq G$ и предположим, что множитель a удовлетворяет следующим условиям: существует такая аналитическая в области G^1 функция $a_0 \in H(\bar{G}^1)$, что $a = a_0$ на интервале l , а на контуре L^1 она представима в виде $\tilde{a}_0(t) |t - \bar{t}|^{n-1}$, где $\tilde{a}_0 \in H(L^1)$ и $\tilde{a}_0(\tau_0) = \tilde{a}_0(\tau_1) = 0$. Кроме того, $A_0(z) = [a(z) - a_0(z)] / |z - \bar{z}|^n \in L^p(G)$, $p > 2$. Тогда показано, что в области G существует обобщенное решение Ω уравнения $\partial_{\bar{z}} \Omega = A$ вида

$$\Omega(z) = -\frac{a_0(z)}{(n-1)|z - \bar{z}|^{n-1}} + h(z), \quad h \in H(\bar{G}).$$

В этих предположениях существуют такие линейно независимые функции $\varphi_j \in H(\bar{G})$, $h_j \in L^p(G)$, $1 \leq j \leq n$, и линейный оператор P , действующий $L^p(G) \rightarrow H(\bar{G})$, что при $F_0 = e^{-\Omega} F \in L^p(G)$ общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$U = e^{\Omega} \left[(1 + P)(\phi + TF_0) + \sum_1^n \xi_j \varphi_j \right]$$

с произвольными $\xi_j \in \mathbb{R}$, где функция $\phi(z) \in H(\bar{G})$ аналитична в области G и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \int_G (\phi + TF_0)(\zeta) h_j(\zeta) d_2 \zeta = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВУМЯ НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

ABOUT THE SOLVABILITY OF PROBLEMS OF THE THEORY OF HEAT CONDUCTIVITY WITH TWO NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Рахмонов Ф.Д.*

* Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Узбекистан, Ташкент
farxod_frd@bk.ru

Рассмотрим в области $D_T = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ задачу на собственные значения

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$X(0) - X(1) = 0, \quad (2)$$

$$\int_{\alpha}^1 X(x) dx = 0 \quad (3)$$

В данной работе исследуются вопросы псевдобазисности системы собственных и присоединенных функций несамосопряженного оператора исходной одномерной краевой задачи (1)-(3) с двумя нелокальными граничными условиями указанного выше типа задачи теории теплопроводности. Задачи подобного вида исследовались в работах [1], [2].

Определение. Система функций $\{\varphi_n(x), \psi_n(x), h_n(x)\}$ называется псевдобазисом в пространстве $L_2[a; b]$, если существует число $c \in [a, b]$ и $d \in [a, b]$, где $c < d$ таких, что подсистема $\{\varphi_n(x)\}$ является базисом в $L_2[a; c]$, подсистема $\{\psi_n(x)\}$ является базисом в $L_2[c; d]$, подсистема $\{h_n(x)\}$ является базисом в $L_2[d; b]$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Если $0 < \alpha < 1$, $\alpha \notin Q$, то все собственные значения задачи $Lu = \lambda u$ имеет вид $\lambda_n^1 = 4\pi^2 n^2$, $n \in N$, $\lambda_n^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{(1-\alpha)^2}$, $n \in N$ и $\lambda_n^3 = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\alpha^2}$, $n \in N$. Им соответствует собственные функции соответственно $X_n^1(x) = \sin \pi n(2x - \alpha)$, $X_n^2(x) = \cos \frac{\pi n}{1-\alpha}(2x - 1)$ и $X_n^3(x) = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}(2x - 1)$, который система функций $\{X_n^1(x), X_n^2(x), X_n^3(x)\}$ является псевдобазисом в пространстве $L_2[-\frac{1-\alpha}{2}; \frac{1+\alpha}{2}]$.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\alpha \notin Q$ и $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция и представима на отрезке $[0; 1]$ в виде регулярно сходящегося рядом

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin n\pi(2x - \alpha) + B_n \cos \frac{n\pi}{1-\alpha}(2x - 1) + C_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}(2x - 1) \right]$$

Тогда решение задачи (7)–(10) представляется регулярно сходящимся в области $D_T = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin n\pi(2x - \alpha) + B_n e^{-\left(\frac{2\pi n}{1-\alpha}\right)^2 t} \cos \frac{n\pi}{1-\alpha} (2x-1) + C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\alpha^2} t} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} (2x-1) T$$

аким образом, справедливо следующая

Теорема 3. Пусть $0 < \alpha < 1, \alpha \notin Q$ и при каждом $0 \leq \tau \leq T$ функция $f(x, \tau)$ – непрерывно дифференцируемая и представима на отрезке $[0; 1]$ в виде регулярно сходящемся рядом

$$f(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [D_n(\tau) \sin n\pi(2x - \alpha) + E_n(\tau) \cos \frac{n\pi}{1-\alpha} (2x-1) + F_n(\tau) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} (2x-1)] .$$

Тогда решение задачи (11) представляется регулярно сходящимся в области $D_T = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t D_n(\tau) e^{-4\pi^2 n^2 \tau} d\tau \sin n\pi(2x - \alpha) + \int_0^t E_n(\tau) e^{-\left(\frac{2\pi n}{1-\alpha}\right)^2 \tau} d\tau \cos \frac{n\pi}{1-\alpha} (2x-1) + \right. \\ \left. + \int_0^t F_n(\tau) e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\alpha^2} \tau} d\tau \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} (2x-1) \right]$$

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $0 < \alpha < 1, \alpha \notin Q$, $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция и представима на отрезке $[0; 1]$ в виде регулярно сходящемся рядом

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin n\pi(2x - \alpha) + B_n \cos \frac{n\pi}{1-\alpha} (2x-1) + C_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} (2x-1) \right],$$

где $\varphi(x) = v_0(x) + \tau(0)x - \frac{1}{1-\alpha} \mu(0) - \frac{1}{2}(1+\alpha)\tau(0)$. При каждом $0 \leq \tau \leq T$ функция $f(x, \tau)$ – непрерывно дифференцируемая и представима на отрезке $[0; 1]$ в виде регулярно сходящемся рядом

$$f(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [D_n(\tau) \sin n\pi(2x - \alpha) + E_n(\tau) \cos \frac{n\pi}{1-\alpha} (2x-1) + F_n(\tau) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} (2x-1)],$$

где $f(x, t) = F(x, t) + \frac{1}{2}(2x-1-\alpha) \frac{d\tau}{dt} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{d\mu}{dt}$, причем

$\int_{\alpha}^1 v_0(x) dx = \mu(0)$, $v_0(0) - v_0(1) = \tau(0)$. Тогда решение задачи представляется регулярно сходящимся в области $D_T = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рядом

$$v(x, t) = -\tau(t)x + \frac{1}{1-\alpha} \mu(t) + \frac{1}{2} \tau(t)(1+\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin n\pi(2x - \alpha) + B_n e^{-\left(\frac{2\pi n}{1-\alpha}\right)^2 t} \cos \frac{n\pi}{1-\alpha} (2x-1) + \\ + C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\alpha^2} t} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} (2x-1)] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t D_n(\tau) e^{-4\pi^2 n^2 \tau} d\tau \sin n\pi(2x - \alpha) + \right. \\ \left. + \int_0^t E_n(\tau) e^{-\left(\frac{2\pi n}{1-\alpha}\right)^2 \tau} d\tau \cos \frac{n\pi}{1-\alpha} (2x-1) + \int_0^t F_n(\tau) e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\alpha^2} \tau} d\tau \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} (2x-1) \right].$$

Литература

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. № 2. С. 294-304.
2. Касимов Ш.Г., Рахманов Ф.Д. Об одной спектральной задаче теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. Ташкент, Вестник НУУз, 2013г. № 2. С. 83-86.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ТИПА БИЦАДЗЕ MIXED PROBLEM FOR DEGENERATED ELLIPTIC SYSTEM OF EQUATIONS OF TYPE BISADZE

Рахмонов Х. О., Меражова Ш. Б.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
shsharipova@mail.ru

В работах [1] - [2] в различных областях рассматривались эллиптические системы уравнений (система уравнений типа Бицадзе):

$$\begin{cases} u_{xx} + 2v_{xy} - u_{yy} = 0 \\ v_{xx} - 2u_{xy} - v_{yy} = 0 \end{cases}$$

В комплексных переменных $z = x + iy$ эта система имеет вид: $W_{zz} = 0$ где $W = u(x, y) + iv(x, y)$.

Как известно ([1]), для таких систем «задача типа Дирихле» (даже в круге) некорректно поставлена.

В области $D = \{(x, y) / 0 < x < \pi, 0 < y < 1\}$ рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_{xx} + 2v_{xy} - y^m u_{yy} + \alpha_1(y)u_y + \beta_1(y)u = f_1(x, y) \\ v_{xx} + 2u_{xy} - y^m v_{yy} + \alpha_2(y)u_y + \beta_2(y)u = f_2(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где, $m > 0, \alpha_1(y), \alpha_2(y), \beta_1(y), \beta_2(y) \in C^1(\bar{D})$

$$2\alpha_1(y) + my^{m-1} \leq -\delta_i < 0, i = 1, 2. \quad (*)$$

Система (1) в области D является эллиптической системой типа Бицадзе [1].

Начально-краевая задача: Найти в области D решения системы (1), удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = v(x, 0) &= 0, \\ u(0, y) = v(0, y) = u(\pi, y) = v(\pi, y) \end{aligned} \quad (2)$$

Замечание: Если $m = 0$, то кроме условия (2) еще задаются начальные условия:

$$u_y(x, 0) = v_y(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi]. \quad (2')$$

Теорема: Пусть $f_1, f_2 \in W_2^1(D)$ и выполнены условия (*) для коэффициентов системы (1), кроме того $\beta_1(y) \leq 0, \beta_2(y) \geq 0, 0 \leq y \leq 1$, тогда существует и при том единственное решение «начально-краевой задачи» (1) - (2) из пространства С. Л. Соболева $W_2^2(D)$.

Доказательство существования и единственности решения задачи получено применением метода Галеркина и априорных оценок.

Литература

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М. Изд-во АН СССР, 1959. - 164с.
2. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: НГУ, 1983-84с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

NONLOCAL PROBLEM FOR AN EQUATION OF MIXED TYPE

Репин О.А.

Самарский государственный экономический университет
matstat@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$xU_{xx} + yU_{yy} + \beta(U_x + U_y) = 0, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1 \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной при $x > 0, y > 0$ кривой Жордана σ с концами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$ и отрезком OB ($x=0, 0 \leq y \leq 1$), а при $x > 0, y < 0$ характеристиками уравнения (1) $OC: x+y=0$, $AC: \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0, y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{x > 0, y < 0\}$; $\theta_0(x)$ - точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x,0) \in (0,1)$ с характеристикой OC .

Задача. Найти функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $U(x, y)$ является решением уравнения (1) в области Ω ;
- 2) $U(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;
- 3) $U(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$U(x, y)/\sigma = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad U(0; y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$A(I_{0+}^{a, \frac{1}{2}, -a}(t))^{\beta-1} u[\theta_0(t)](x) + B \left(I_{0+}^{a-\beta+\frac{3}{2}, 0, -a}(t)^{-\frac{1}{2}} \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{\beta} U_y(t, y) \right) (x) = g(x),$$

$$0 < x < 1.$$

Здесь $\varphi(s)$, $\varphi_1(y)$, $g(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, a - действительный параметр: $\frac{1}{2} - \beta < a < \frac{3}{2} - \beta$; A, B, C - некоторые константы, $(I_{0+}^{\alpha, \beta, n} f)(x)$ - обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго.

Доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

SOLUTIONS PROPERTIES OF TRICOMI PROBLEM FOR GELLERSTEDT EQUATION

Роговой А.В.

Южно-Казахстанский гуманитарный институт им. М.Сапарбаева
Казахстан, Шымкент
rog2005@list.ru

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y < 0$ - характеристиками $AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и $BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 1$ уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (1)$$

а при $y > 0$ - кривой

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y): \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2} + \delta \right)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad -\infty < \delta < +\infty \right\},$$

рассматривается задача Трикоми: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию

$$u|_{\sigma_\delta \cup AC} = 0,$$

так чтобы были выполнены следующие условия «склеивания» решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$:

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_y(x, +0) = u_y(x, -0), \quad 0 < x < 1.$$

По числу δ определим следующее число

$$\gamma_\delta = \operatorname{arccotg} 2\delta, \quad 0 < \gamma_\delta < \pi.$$

Будем говорить, что функция $h(x, y)$ принадлежит классу $C_{A,B}^{\alpha,\beta}(\bar{\Omega})$ тогда и только тогда, когда функция $x^\alpha |1-x|^\beta h(x, y) \in C(\bar{\Omega})$.

Назовем n -регулярным решением задачи Трикоми решение принадлежащее классу

$$u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap C_{A,B}^{-n,0}(\bar{\Omega}).$$

Введем следующие обозначения

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (2)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x). \quad (3)$$

Решая задачу Коши-Гурса в гиперболической части области и краевую задачу в эллиптической части области, применяя преобразование Меллина

$$F(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx,$$

а также исследуя взаимосвязь функций (2) и (3) и их образов при преобразовании Меллина со свойствами решений задачи Трикоми, доказана следующая теорема.

Теорема 1 Необходимым и достаточным условием $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ -регулярности решения задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта является необращение функции

$$R(s, \gamma_\delta) \equiv \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} + \frac{\frac{1}{s - \frac{m+1}{m+2}} P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{\frac{1}{s - \frac{m+1}{m+2}} P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)} = 0$$

в нуль на промежутке

$$\frac{m}{m+2} - n < s < \frac{m}{m+2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При $\gamma_\delta \rightarrow 0$ решение будет $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ -регулярным для любого конечного n , а при $\gamma_\delta \rightarrow \pi$ решение не будет $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ -регулярным для любого n . При $\gamma_\delta = \frac{\pi}{2}$ решение будет $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ регулярым только для $n=1$. В случае, если решение не будет $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ -регулярным – на правую часть уравнения Геллерстедта должны быть наложены дополнительные условия.

УДК 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ФДУ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА STABILITY OF SOLUTIONS OF LINEAR NON-AUTONOMOUS FDE SYSTEMS IN SOBOLEV SPACE H^1

Романовский Р. К., Назарук Е. М.

Омский государственный технический университет, Россия, Омск
elmarnaz@mail.ru

1. Работа примыкает к [1,2]. Рассматривается задача Коши

$$\dot{x}(t) = \int_0^1 [d_s T(s, t)] x(t-s) \quad (t \geq 1), \quad x|_{[0,1]} = \varphi \in E = W_2^1[(0,1) \rightarrow \mathbb{C}^N]. \quad (1)$$

Здесь $T: [0,1] \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$, $\text{Var}_s[T] < \infty$, $T \in C$ по t , $|T| \leq \text{const}$, $T(0, t) = 0$.

Функции $\varphi \in E$ абсолютно непрерывны, в частности, однозначно определяются данными $\dot{\varphi}(\tau)$, $\varphi(0)$. Будем отождествлять $\varphi \in E$ с вектором $[\dot{\varphi}, \varphi(0)]^T$. Определим скалярное произведение в E формулой $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^1 \dot{\varphi}_2^* \dot{\varphi}_1 d\tau + \varphi_2^*(0) \varphi_1(0)$.

ЛЕММА 1. Норма $\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ топологически эквивалентна стандартной норме в E .

Введем класс функций $H^1 = \left\{ x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^N, x \in W_{2, \text{loc}}^1 \right\}$.

ТЕОРЕМА 1. Задача Коши (1) однозначно разрешима в классе $\mathbf{H}^1$. Ограничение решения на отрезок $[n, n+1]$ дается формулой

$$x_n(\tau) = x(\tau+n) = \int_0^\tau \dot{x}_n(\tau) d\tau + x_n(0), \quad \tau \in [0,1], \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

где вектор $u_n = [\dot{x}_n, x_n(0)]^T$ – решение разностной задачи Коши

$$\begin{aligned} u_n &= \Lambda_n u_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad u_0 = \varphi, \\ \Lambda_n &= \begin{bmatrix} (I - A_n)^{-1}(\Gamma_n S - B_n) & (I - A_n)^{-1} \Gamma_n S \\ S & I_0 \end{bmatrix}, \\ A_n &= \int_0^\tau T(\tau-s, \tau+n) \bullet ds, \quad B_n = \int_\tau^1 [T(1, \tau+n) - T(1+\tau-s, \tau+n)] \bullet ds, \quad S = \int_0^1 \bullet ds, \\ \Gamma_n &= T(1, \tau+n), \quad I, I_0 - \text{единицы в } L_2[(0,1) \rightarrow \mathbb{C}^N], \mathbb{C}^N. \end{aligned} \quad (2)$$

ЛЕММА 2. Матрица Λ_n задает равномерно по n ограниченный, компактный оператор $E \rightarrow E$.

2. Зададим эрмитов оператор $E \rightarrow E$ формулой

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 S \\ S F_2^* & F_0 \end{bmatrix}, \quad F_1, F_2 \in \text{End } L_2(0,1), \quad F_0 \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad F_1^* = F_1, \quad F_0^* = F_0.$$

ЛЕММА 3. Если при некотором $\varepsilon > 0$

$$F_0 > \varepsilon I_0, \quad \Delta = F_1 - F_2 F_0^{-1} F_2^* \geq \varepsilon I, \quad (3)$$

то при некотором $\tilde{\varepsilon} > 0$ $F \geq \tilde{\varepsilon} I_E$, $I_E = \text{diag}(I, I_0)$.

3. Будем говорить, что решение $x=0$ системы (1) экспоненциально устойчиво в W_2^1 – топологии, если это свойство имеет место для решения $u_n = 0$ разностного уравнения (2): для решений u_n задачи Коши (2) с любой $\varphi \in E$

$$\|u_n\| \leq \mu e^{-\nu(n-m)} \|u_m\| \quad (n \geq m \geq 0, \quad \mu, \nu = \text{const} > 0).$$

Зафиксируем матрицу-функцию $F_n: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \text{End } E$ со свойствами

$$F_n^* = F_n, \quad \alpha_1 I_E \leq F_n \leq \alpha_2 I_E \quad (\alpha_k > 0) \quad (4)$$

и эрмитову форму $\nu(\varphi, n) = \langle F_n \varphi, \varphi \rangle$. Разностная производная $\nu(u_n, n) - \nu(u_{n-1}, n-1)$ формы ν вдоль траекторий системы (2) после подстановки $u_n = \Lambda_n u_{n-1}$ и замены $u_{n-1} \sim \varphi$ принимает вид

$$\dot{\nu}(\varphi, n) = \langle G_n \varphi, \varphi \rangle, \quad G_n = \Lambda_n^* F_n \Lambda_n - F_{n-1}.$$

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы решение $x = 0$ системы (1) было экспоненциально устойчиво в W_2^1 – топологии, необходимо и достаточно существование матрицы F_n класса (4) такой, что $G_n \leq -\alpha I_E$ ($\alpha > 0$).

Литература

- [1] Романовский Р. К., Назарук Е. М. // Матем. заметки. 2014. Т. 95. №1. С. 129 – 135.
- [2] Романовский Р. К., Назарук Е. М. // Сиб. мат. журнал. 2014. Т. 55. №4. С. 851 – 862.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

METHOD OF LYAPUNOV FUNCTIONS FOR ALMOST PERIODIC DIFFERENCE SYSTEM IN HILBERT SPACE

Романовский Р. К., Троценко Г.А.

Омский государственный технический университет, Россия, Омск
galatr205@mail.ru

1. В вышедшем в последние два десятилетия цикле работ группы сотрудников и аспирантов ОмГТУ [1-5] построен вариант прямого метода Ляпунова для подклассов эволюционных уравнений с почти периодическими коэффициентами, в котором условие на производную функции Ляпунова вдоль траекторий системы существенно ослаблено по сравнению с общим случаем. В частности, в [2] получен результат такого типа для разностной системы

$$x_n = \Lambda_n x_{n-1} \quad (1)$$

в фазовом пространстве $\mathbb{C}^N$ с почти периодической матрицей Λ_n (здесь речь идет о разностной производной). Выполняемые в [2] построения существенно опираются на локальную компактность фазового пространства. В данной работе предпринята попытка перенести результат из [2] на более общую ситуацию.

2. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $End H$ – множество линейных ограниченных операторов $H \rightarrow H$, Λ_n – оператор-функция $\mathbb{Z} \rightarrow End H$. Целое число T называется ε – почти-периодом Λ_n , если $\|\Lambda_{n+1} - \Lambda_n\| < \varepsilon$, $n \in \mathbb{Z}$. Оператор-функция Λ_n называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное на оси множество ε – почти-периодов: существует целое число $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что любой отрезок $[n, n+l]$ содержит хотя бы один ε – почти-период. Рассмотрим разностное уравнение (1) в фазовом пространстве H с почти периодической Λ_n . Будем говорить, что решение $x_n = 0$ уравнения (1) экспоненциально устойчиво, если для любого решения $x_n : \mathbb{Z} \rightarrow H$ верна оценка

$$\|x_n\| \leq \mu e^{-\nu(n-m)} \|x_m\| \quad (n > m). \quad (2)$$

Зафиксируем оператор-функцию $F_n : \mathbb{Z} \rightarrow End H$ со свойствами

$$F_n^* = F_n, \quad F_n \geq aI, \quad a = \text{const} > 0, \quad F_n \text{ почти периодична.} \quad (3)$$

Построим эрмитову форму

$$\nu(x, n) = \langle F_n x, x \rangle, \quad x \in H.$$

Разностная производная формы ν вдоль траекторий системы (1) дается формулой

$$\dot{\nu}(x, n) = \langle G_n x, x \rangle, \quad G_n = \Lambda_n^* F_n \Lambda_n - F_{n-1}.$$

Теорема. Пусть для уравнения (1) с почти периодическим оператором Λ_n существует почти периодический оператор F_n со свойствами (3) такой, что

$$G_n \leq 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad G_k \leq -bI \text{ при некоторых } k \in \mathbb{Z}, \quad b > 0. \quad (4)$$

Тогда решение $x_n = 0$ уравнения (1) экспоненциально устойчиво.

Замечание. Ранее в [2] в конечномерном случае $H = \mathbb{C}^N$ оценка (2) была получена, с использованием компактности единичной сферы в $\mathbb{C}^N$, при несколько более слабых по сравнению с (4) требованиях на матрицу G_n :

$$G_n \leq 0, \quad \langle G_n x_n, x_n \rangle \neq 0 \text{ на каждом решении } x_n \neq 0.$$

Центральным местом в доказательстве является построение компакта $E = \mathcal{H}[A_n] \times S$, где $\mathcal{H}[A_n]$ – оболочка почти периодической матрицы A_n , S – единичная сфера в $\mathbb{C}^N$, и непрерывного отображения $f: E \rightarrow (0, \infty)$; вытекающая отсюда оценка $\nu_0 = \min f > 0$ дает подход к построению постоянной ν в (2).

Литература

1. Добровольский С.М., Котюргина А.С., Романовский Р.К. Об устойчивости решений линейных систем с почти периодической матрицей//Мат. заметки. 1992. Т.52. №6. С. 10–14.
2. Кириченкова О.В., Котюргина А.С., Романовский Р.К. Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами// Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. №1. С. 170–174.
3. Алексенко Н.В. Устойчивость решений почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа//Изв. вузов. Математика. 2000. №2. С. 3–6.
4. Троценко Г.А. Об устойчивости решений почти периодических системы функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа//Изв. вузов. Математика. 2003. №6. С. 77–81.
5. Добровольский С.М., Рогозин А.В. Прямой метод Ляпунова для почти периодической разностной системы на компакте// Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. №1. С. 98–105.

УДК 519.634

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН С ВОЗМОЖНЫМ КОНТАКТОМ БЕРЕГОВ*

DOMAIN DECOMPOSITION METHOD FOR A MODEL CRACK PROBLEM WITH A POSSIBLE CONTACT OF CRACK FACES

Рудой Е.М.*

* *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
Россия, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Россия, Новосибирск
rem@hydro.nsc.ru*

В работе рассматривается скалярное уравнение Пуассона в области с разрезом, на берегах которого заданы условия одностороннего ограничения. Предложен итерационный метод решения задачи. Метод основан на декомпозиции области и алгоритме Удзавы нахождения седловой точки Лагранжиана. Для построения алгоритма исходная область разбивается на две подобласти, в каждой из которых на каждом итерационном шаге решается линейная задача для уравнения Пуассона. Решения для каждой области связываются между собой двумя множителями Лагранжа: один обеспечивает “склеивание решений”, а вто-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект номер)

рой – выполнение условия одностороннего ограничения. Приведены примеры численного решения задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МД-3123.2015.1).

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА, СТРУНЫ И СМЕШАННОГО ТИПА

INVERSE PROBLEMS FOR THE LAPLACE EQUATION, STRINGS AND MIXED TYPES

Сабитов К.Б.

*Институт прикладных исследований Республики Башкортостан,
Россия, Стерлитамак
sabitov_fmfm@mail.ru*

Обратные задачи разного плана для классических уравнений математической физики изучены достаточно полно; усилиями многих математиков создана теория обратных задач (см. книги [1–9] и приведенную там обширную библиографию).

В связи с изучением обратной задачи по определению правой части уравнения смешанного типа, например, известного уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = \Phi(x, y) \quad (1)$$

в прямоугольной области $G = \{(x, y) \mid 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y) = f_1(x)g_1(y), & y > 0, \\ \Phi_2(x, y) = f_2(x)g_2(y), & y < 0, \end{cases}$$

возникает необходимость исследования обратной задачи по отысканию правых частей уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = \Phi_1(x, y)$ в области $G_+ = G \cap \{y > 0\}$ и уравнения струны $u_{xx} - u_{yy} = \Phi_2(x, y)$ в области $G_- = G \cap \{y < 0\}$. Ранее в наших работах [10–12] были изучены обратные задачи для уравнения (1) при $g_1(y) = g_2(y) \equiv 1$, $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ и $f_1(x) \neq f_2(x)$.

После просмотра указанных выше монографий, особенно книг [7, гл. IV], [9, гл. 9], стало ясно, что обратные задачи по отысканию правой части уравнений Лапласа и струны практически не исследованы.

В связи с чем первая часть доклада посвящена обратным задачам по отысканию правой части уравнения (1) в прямоугольной области G_+ .

В п. 1.1 рассмотрен случай, когда $g_1(y) \equiv 1$ и неизвестными являются функции $u(x, y)$ и $f_1(x)$. Здесь доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения. Решение построено в виде сумм ортогональных рядов.

В п. 1.2 изучен случай, когда $g_1(y) \neq 1$ и неизвестными также являются функции $u(x, y)$ и $f_1(x)$. Установлен критерий единственности решения поставленной обратной задачи. Аналогично п. 1.1 доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленной обратной задачи.

В п. 1.3 изучается обратная задача, в которой неизвестными являются функции $u(x, y)$ и $g_1(y)$. Относительно функции $g_1(y)$ получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода, из которого при определенных условиях на данные следует однозначная разрешимость обратной задачи.

Во второй части доклада будут представлены результаты по изучению обратных задач, аналогичных первой части, для уравнения (1) в области гиперболичности, т.е. в G_- .

Третья часть доклада посвящена обратной задаче для уравнения (1) в области G .

В п. 3.1 рассмотрен случай, когда $g_1(y)$ и $g_2(y)$ известные функции и неизвестными являются функции $u(x, y)$ и $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$.

В п. 3.2 рассмотрен случай, когда $g_1(y)$ и $g_2(y)$ остаются известными, а неизвестными являются функции $u(x, y)$ и $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

В пунктах 3.1 и 3.2 установлены критерии единственности решения. Решение построено в виде сумм ортогональных рядов. При обосновании равномерной сходимости рядов возникает проблема малых знаменателей.

В п. 3.3 рассмотрен случай, когда $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются известными, а неизвестными остаются $u(x, y)$, $g_1(y)$ и $g_2(y)$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1986. 288 с. (изд. 3).
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танан В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
4. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука. СО, 1982. 88 с.
5. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М: Наука, 1984. 264 с.
6. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991. 302 с.
7. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208 с.
8. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.
9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с. (изд. 2).
10. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Известия Вузов. Математика. 2011. №2. С. 71 – 85.
11. Сабитов К.Б., Хаджи И.А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия Вузов. Математика. 2011. № 5. С. 44 – 52.
12. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Обратная задача для уравнения эллиптического-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, №3. С. 633 – 647.

МАРКОВСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ*

MARKOV MODELING

Савельев Л.Я.

Новосибирский государственный университет
Россия, Новосибирск 630090, Пирогова 2
savelev@math.nsc.ru

Марковской называется последовательность, случайных величин, $x(t)$ ($t = 0, 1, 2, \dots$), у которых при известном настоящем $x(t_0)$ прошлое $\{x(t) | t < t_0\}$ и будущее $\{x(t) | t > t_0\}$ стохастически независимы. В случае, когда время t и общее множество S значений случайных переменных $x(t)$ конечно или счетно *марковское свойство* выражается в том, что совместные распределения конечных семейств $\{x(t) | t \geq t_0\}$ задаются произведениями матриц, составленных из *начальных и переходных вероятностей*. Если переходные вероятности не зависят от t , то марковская последовательность называется *однородной*. Связи между переходными вероятностями в общем случае описываются системами дифференциальных и операторных уравнений. В дискретном случае используются разностные уравнения. Рассматриваются различные группировки множества S , числовые характеристики групп и серий их появления в реализациях процесса. Особый интерес представляют числа серий данного типа и максимумы их длин, которые тесно связаны с критическими значениями параметров рассматриваемого процесса. Экстремальные значения таких характеристик могут быть использованы для прогнозирования различных катаклизмов. Возможность прогнозировать процесс является одним из самых важных свойств марковских моделей. При удачном выборе модели краткосрочные марковские прогнозы оправдываются.

Благодаря абстрактному смыслу понятий *значение* и *момент* марковская модель может достаточно адекватно описывать широкий круг явлений и процессов любой природы. В докладе рассматриваются марковские последовательности с малыми числами значений, для которых можно получать точные формулы рассматриваемых распределений и их моментов. Выделяются результаты для последовательностей с 2, 3, 4 значениями и некоторые их применения. Они позволяют моделировать динамику одной или двух выбранных характеристик рассматриваемого процесса, разделив их изменения на два класса по нужному признаку (например, *значительные* и *незначительные*). Такое огрубление часто позволяет достаточно адекватно описывать динамику процесса. Приводятся точные формулы для стационарного распределения и оценки времени его достижения. Описывается моделирование структуры трещин и динамики волнового фронта.

Литература

Савельев Л.Я. Простые стохастические модели трещин. Сибирский журнал индустриальной математики. Том XVII, №2(58). С. 97-106.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00275).

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ МАКСВЕЛЛА-АУЖАНА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

BOUNDARY CONDITIONS OF MAXWELL-AUZHAN FOR ONE DIMENSIONAL NONLINEAR MOMENT SYSTEM EQUATIONS OF BOLTZMANN

Сакабеков А. *, Аужани Е. **

* *Казахстанско-Британский технический университет, Казахстан, Алматы*

a.sakabekov@kbtu.kz

** *Казахский Национальный Университет им. Аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

erkawww@gmail.com

Одним из приближенных методов решения уравнения Больцмана является моментный метод. Моментные методы отличаются друг от друга выбором различных систем базисных функций. Например, Грэд [1], [2] при получении моментной системы для однородного уравнения Больцмана раскладывал функцию распределения частиц по полиномам Эрмита около локального максвелловского распределения. Грэд пользовался декартовыми координатами скоростей и моментная система Грэда содержала в качестве коэффициентов такие неизвестные гидродинамические характеристики, как плотность, температура, среднюю скорость и др. В [3] нами получена моментная система, отличающаяся от системы уравнений Грэда. При этом мы пользовались сферическими координатами скоростей и разлагали функцию распределения в ряд по собственным функциям линеаризованного оператора столкновений [4], [5], являющимся произведением полиномов Сонина и сферических функций. Коэффициенты разложения, моменты функции распределения, определялись иначе, чем у Грэда. Полученная система уравнений, соответствующая частичной сумме ряда, которую мы называли системой моментных уравнений Больцмана, является нелинейной гиперболической системой относительно моментов функции распределения частиц. Дифференциальная часть полученной системы является линейной, а нелинейность входит как квадратичные формы моментов функции распределения. Квадратичные формы – моменты нелинейного интеграла столкновений – вычислены в работе [6] и выражаются через коэффициенты Тальми [7] и Клебша-Гордона [8].

В [3] аппроксимировано однородное граничное условие для функции распределения частиц и доказана корректность начально-краевой задачи для нестационарной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана в трехмерной области. Более точно, доказано существование единственного обобщенного решения начально-краевой задачи для системы моментных уравнений Больцмана в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственным переменным.

В данной работе приведем аппроксимацию микроскопического граничного условия Максвелла, когда часть молекул отражается от поверхности зеркально, а часть – диффузно с максвелловским распределением. Граничное условие задано в виде интегрального соотношения между падающими на границу частиц и отраженными от границы частиц (при условии, что известна вероятность того, что частица, падающая на границу со скоростью v_i отлетит со скоростью v_r).

При этом граничные условия для системы моментных уравнений Больцмана зависят от четности или нечетности приближения [9]. Изучены вопросы корректности начально-краевой задачи для шестимоментной системы уравнений Больцмана в пространстве функ-

ции непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственному переменному.

Литература

1. Grad G. Kinetic theory of rarefied gases. Comm. Pure Appl. Math, 2, 331, 1949.
2. Grad G. Principle of the kinetic theory of gases. Handuch der Physik, Volume 12, Springer, Berlin, p.p. 205-294.
3. Сакабеков А. Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана. - Алматы: Научно-издательский центр "Гылым", 2002, 276 стр.
4. Коган М.Н. Динамика разряженного газа. - М.: Наука, 1967.
5. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. - М.: Мир, 1975.
6. Kumar K. Polynomial expansions in Kinetic theory of gases. Annals of physics, 57, 115-141 (1966).
7. Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. Нуклонные ассоциации в легких ядрах. - М.: Наука, 1969.
8. Мошинский М. Гармонический осциллятор в современной физике: от атомов до кварков. - М.: Мир, 1972.
9. Sakabekov A., Auzhani Y. Boundary conditions for the one-dimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations. AIP Journal of Mathematical Physics, 55, 123507 (2014).

УДК 517.54

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

ABOUT THE ISSUE OF INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DOUBLY-CONNECTED DOMAIN

Салимов Р.Б., Шмагин Ю.А.

*Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, Казань
k421s@mail.ru*

Пусть D_z – двусвязная бесконечная область в плоскости $z = x + iy$, ограниченная двумя простыми замкнутыми конечными контурами L_{z0}, L_{z1} . Будем искать форму этой области D_z и аналитическую в ней функцию $w(z)$, если на границе области $L_z = L_{z0} \cup L_{z1}$ значения $w(z)$ заданы в виде функции $w = \varphi(x) + i\psi(x)$ при $z \in L_{z0}$ и функции $w = \varphi(y) + i\psi(y)$ при $z \in L_{z1}$ следующим образом

$$w = \varphi_{0j}(x) + i\psi_{0j}(x), \quad a \leq x \leq b, \quad j = 1, 2, \quad z \in L_{z0}, \quad (1)$$

$$w = \varphi_{1j}(y) + i\psi_{1j}(y), \quad c \leq y \leq d, \quad j = 1, 2, \quad z \in L_{z1}, \quad (2)$$

здесь a, b, c, d – заданные числа. Допустим, что каждая из введенных функций (1), (2) в плоскости $w = \varphi + i\psi$ задает конечный простой замкнутый контур L_{wj} , $j = 1, 2$, причем L_{w0} охватывает контур L_{w1} , который определяется (2), и указанные контуры не имеют общих точек. Это означает, что функции (1) при $x = a$ и при $x = b$ имеют одинаковые значения, как и (2) при $y = c$ и $y = d$. Эта задача является обобщением известных обратных краевых задач [1]. Будем считать, что функции (1) и (2) удовлетворяют условию Гельдера. Контур $L_w = L_{w0} \cup L_{w1}$ является границей области D_w , заключенной между кривыми

L_{w0} и L_{w1} , а функция $w = w(z)$ конформно отображает область D_z на D_w . Примем, что $w(\infty) = w_0$, $w_0 \in D_w$, а обратная к $w = w(z)$ функция $z = z(w)$ в $w = w_0$ имеет простой полюс. Для граничных значений функции $z = z(w)$ по (1) и (2) имеем

$$\operatorname{Re} z(w) = x(w), a \leq x \leq b, w \in L_{w0}; \operatorname{Im} z(w) = y(w), c \leq y \leq d, w \in L_{w1}, \quad (3)$$

$x(w), y(w)$ - функции, обратные соответственно (1) и (2). Тем самым мы приходим к смешанной краевой задаче для нахождения аналитической в области D_w функции $z(w)$ имеющей простой полюс $w_0 \in D_w$. Чтобы получить формулы для решения полученной задачи, отобразим область D_w конформно на кольцо $q < |\zeta^*| < 1$ в плоскости $\zeta^* = r \cdot e^{i\gamma}$, $r > 0, 0 \leq \gamma \leq 2\pi$ функцией $w = w(\zeta^*)$ так, чтобы кривой L_{w0} отвечала окружность $|\zeta^*| = 1$, контуру L_{w1} - окружность $|\zeta^*| = q$, точка $w_0 \in D_w$ перешла в точку ζ_0^* , $q < |\zeta_0^*| < 1$. Краевое условие (3) примет вид

$$\operatorname{Re} z[w(e^{i\gamma})] = x_0(\gamma), \operatorname{Im} z[w(qe^{i\gamma})] = y_1(\gamma), 0 \leq \gamma \leq 2\pi. \quad (4)$$

Обозначив $F(\zeta^*) = z[w(\zeta^*)]$ и точку границы кольца $q < |\zeta^*| < 1$ через $t = e^{i\gamma}$ или

$t = qe^{i\gamma}, 0 \leq \gamma \leq 2\pi$, краевое условие (4) запишем так

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu} F(t)] = c(t), \quad (5)$$

где

$$\nu(e^{i\gamma}) = 0, \nu(qe^{i\gamma}) = \pi/2, c(e^{i\gamma}) = x_0(\gamma), c(qe^{i\gamma}) = y_1(\gamma), 0 \leq \gamma \leq 2\pi. \quad (6)$$

Таким образом мы пришли к краевой задаче Гильберта для функции $F(\zeta^*) = z[w(\zeta^*)]$, имеющей простой полюс в точке ζ_0^* , областью определения которой является $q < |\zeta^*| < 1$. Для решения задачи заданной условиями (5)-(6) можно воспользоваться результатами работы [2]. Искомая функция $z[w(\zeta^*)]$ здесь выражается через оператор Шварца для кольца [3].

В работе предлагается и другой метод решения задачи (5)-(6) в более общей постановке, аналогичной постановке внешней задачи Ф.Д.Гахова, когда вначале находится решение соответствующей однородной задачи в классе функций, имеющих простой полюс в ζ_0^* и простой нуль в точке $\zeta^* = p$, $q < p < 1$. Это решение содержит две произвольные постоянные. Полученные в ходе вычисления этой задачи функции и формулы были использованы для решения внутренней задачи, когда область D_z является конечной. Получены условия однолиственности контуров L_{z0} и L_{z1} области D_z .

Литература

1. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 1965. 333с.
2. Салимов Р.Б. Модификация нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитических функций в многосвязной круговой области// Изв.Сарат.ун-та. Нов.сер. 2012. Т.12. Сер.Матем., Мех., Информ., вып.1, с.32-38.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640с.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОТРЕЗКАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

SCORE ERRORS ON BASIC POINTS OF INTEGRATION

Санеева Л.И. *, Назарова Л.И. **

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, Улан-Удэ*

**ili04@mail.ru, ** luna_uu@mail.ru*

Возможные постановки классической задачи рассматривались многими математиками: в работах Н.С. Бахвалова [1], Л.В. Войтишек [2], С.Л. Соболева [4].

В данной работе строятся кубатурные формулы с переменным шагом интегрирования для произвольной области интегрирования Ω с кусочно-гладкой границей, используя идею из монографии Ц.Б. Шойнжурова ([5], стр.188-192) и схемы из работ С.Н. Бахвалова [1] и Л.В. Войтишек [2] по теории кубатурных формул.

Пусть область Ω с кусочно-гладкой границей разбита на k частей Ω_j , $j = 1, 2, \dots, k$.

Введем класс функций B_1 :

$$B_1 = \left\{ \varphi \in C^m / \max_{\substack{x \in \Omega_j \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \varphi| \leq M_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

$$l_j(x) = \sum_{h_j \beta = t_j^{(1)}}^{t_j^{(2)}} \sum_{\gamma=0}^m \sum_{s=0}^{k_j-1} C_\gamma^s(j) \delta(x - h_j(\beta + \gamma)h_j) = \sum_{h_j \beta = t_j^{(1)}}^{t_j^{(2)} + m-1} h_j D_\beta(j) \delta(x - h_j \beta), \quad (1)$$

где

$$D_\beta(j) = \begin{cases} \sum_{\gamma=0}^m \sum_{s=0}^{k_j-1} C_\gamma^s(j), & t_j^{(1)} \leq h_j \beta \leq (m-1)h_j + t_j^{(1)}, \\ 1, & t_j^{(1)} + mh_j \leq h_j \beta < t_j^{(2)}, \\ \sum_{\gamma=0}^{t_j^{(2)} + m-1-\beta} \sum_{s=0}^{k_j-1} C_{m-\gamma}^s(j), & t_j^{(2)} \leq h_j \beta < t_j^{(2)} + mh_j. \end{cases}$$

Искомый функционал (1) построен.

Особенность этого функционала заключается в том, что он аннулирует точечные функционалы по малым участкам $[t_j^{(1)}, t_j^{(2)}]$ и заменяет их функционалами с шагами h_j .

Рассмотрим интеграл и квадратурную формулу

$$J(f) = \int_0^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^{N-1} J_j(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_\beta}^{x_{\beta+1}} f(x) dx \quad \text{и} \quad S(f) = \sum_{j=1}^{N-1} S_j(f) \quad (2)$$

с остаточным членом $J(f) - S(f) = \sum_{j=1}^{N-1} B_0 \max_{x \in \Delta_\beta} |f^{(m)}(x)| h^m$, где $h = \frac{1}{N}$.

В результате преобразований получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(t'(\varphi))^{m+1}} F(\varphi) \right) = 0 \quad \text{или} \quad F(\varphi) (\varphi'(t))^{m+1} = \text{const}. \quad (3)$$

Общее решение этого уравнения зависит от двух произвольных постоянных C_0 и C_1 .

Решение уравнения (3) принимает вид:

$$t(x) = \frac{\int_0^x \frac{1}{F^{m+1}}(x) dx}{\int_0^1 \frac{1}{F^{m+1}}(x) dx}. \quad (4)$$

Теорема 2. Если $f \in B_F \subset W_\infty^m$, $x = \varphi(t)$ - непрерывная дифференцируемая функция, $\varphi(0)=0$ и $\varphi(1)=1$ и $t = t(x)$ обратная функция к $\varphi(t)$, $t(0)=0$, $t(1)=1$ и $Sf = \sum_{j=1}^N S_j f$ - квадратурная формула с остаточным членом $R = \frac{1}{N^n} \int_0^1 [\varphi'(t)]^{m+1} B_0 F[\varphi(t)] dt + o(1)$,

то при $N \rightarrow \infty$ асимптотически оптимальное распределение узлов x_β формулы (2) выражается формулой (4).

Формула (3) дает равенство оценок погрешностей на элементарных отрезках интегрирования при оптимальном распределении узлов.

Такой подход позволяет оценить функционалы погрешности на малых участках, в этом заключается отличие от работы Л.В. Войтишек [2].

Литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
2. Войтишек Л.В. Об одном частном случае построения кубатурных формул с пограничным слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – Т.9, №2. – С. 417-419.
3. Санеева Л.И. О некоторых кубатурных формулах для областей с гладкими границами. - Изд-во LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 110с.
4. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
5. Шойнжуров Ц.Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. – Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. – 247с.

УДК 57.02.001.57:574.4

ПОРЯДОК НАТУРАЛЬНОГО РЯДА В РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ, ПОЛУЧЕННОМ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ORDER OF A NATURAL ROW IN THE DIFFERENTIAL EQUATION RECEIVED AT THE RESEARCH OF ECOLOGICAL SYSTEMS

Саранча Д. А., Юрезанская Ю. С.

ВЦ РАН,

Россия, Москва

saran@ccas.ru, july@ccas.ru

При исследовании моделей тундровых популяций и сообществ получен тип разностных уравнений, для которых при определенном сценарии изменения параметров последовательно возникают зоны стабильности с устойчивыми циклами и их периоды изменяются в порядке натурального ряда, а зоны стабильности отделены друг от друга переходными зонами с более сложными режимами [1, 2].

В качестве некоторого приближения к полученной упрощенной модели рассмотрено уравнение вида:

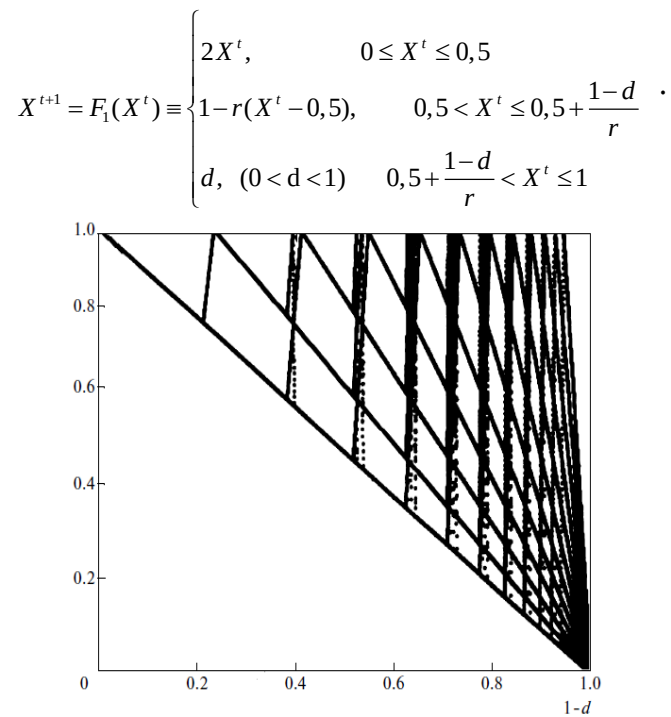


Рис. 1. Результаты ВЭ – зависимость траекторий модели от величины $1-d$. Вертикальное сечение графика при выбранном значении d – точки траектории

Для такой функции были проведены вычислительные эксперименты (ВЭ) (при $r \gg 1$) [1]. Характер динамических режимов исследовался при изменении параметра d от 1 до 0. На рис.1 можно выделить зоны стабильности, которые отделены переходными зонами со сложными режимами (черные вертикальные полосы). Внутри зон стабильности период траекторий постоянный, при переходе от одной зоны стабильности к другой период изменяется в порядке натурального ряда. В каждой из переходных зон существуют периодические траектории с периодом большим любого наперед заданного натурального числа. При этом «ширину» переходных зон можно сделать как угодно малой при стремлении параметра r к бесконечности. Для исследования переходных зон выбрано «треугольное отображение» и треугольное отображение дополненное «ступенькой» (ТОСТ): $X^{t+1} = d$ при $X^t \geq B$, $X^{t+1} = F(X^t) = 1 - 2|0,5 - X^t|$ при $X^t < B$. Для ТОСТ получены формулы для определения координат точек, формирующих периодические траектории. Проведено исследование «первой переходной зоны», возникающей при уменьшении параметра d после возникновения цикла периода 2. При этом используется процедура последовательного рассмотрения циклов со все большими величинами периодов. Расчеты показали, что между циклами периодов 4 и 6 возникают все четные циклы (эту область обозначим ОПЦ)). Для циклов, период которых не превышает 18 имеем следующую последовательность [2]: 2, 4, 8, 16, 12, 16, 18, 14, 18, 10, 18, 14, 18, 16, 6, а для циклов не превышающих 28: 2, 4, 8, 16, 24 (**3*8**), 28 (**7*4**), 20 (**5*4**), 28, 12 (**3*4**), 24, 28, 20, 28, 24, 28, 16, 28, 24, 28, 20, 28, 24, 28, 26 (**13*2**), 22 (**11*2**), 26, 18 (**9*2**), 26, 22, 26, 14 (**7*2**), 28, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 28, 24, 28, 10 (**5*2**), 20, 28, 24, 28, 26, 22, 26, 28, 18, 28, 26, 22, 26, 28, 24, 28, 26, 14, 28, 26, 28, 24, 28, 26, 22, 26, 28, 18, 28, 26, 22, 26, 28, 24, 28, 20, 28, 24, 28, 26, 28, 16, 28, 26, 28, 24, 28, 20, 28, 24, 28, 26, 22, 26, 28, 6 (**3*2**). Здесь жирным шрифтом (в скобках) отмечены сомножители, формирующие данный период. Чертой объединены соседние циклы, для которых выполняются условия следующего утверждения. Если в ОПЦ возник цикл определенного периода n , то непосредственно за ним возникают циклы с периодом $n \cdot 2^m$, ($m = 1, 2, 3 \dots$), а непосредственно перед ним не может быть циклов с таким периодом. Кроме того, при расчете последовательностей получен еще ряд соотношений: в ОПЦ разность в периодах соседних циклов не может равняться 6; в последовательности, левее цикла периода 10,

разность в периодах соседних циклов не может равняться 10. Такого типа утверждения могут быть продолжены (для 12, 14 и т.д.).

Разрешенными являются разности 2^m , ($m=1, 2, 3 \dots$).

Литература

1. Недоступов Э.В., Саранча Д.А., Чигерев Е.Н., Юрезанская Ю.С. О некоторых свойствах одномерных унимодальных отображений // ДАН. Т. 430. - 2010. - №1. - С. 23-28.
2. Трапеев Р. В., Люлякин О. П., Саранча Д. А., Юрезанская Ю. С. Метод комплексных исследований на примере моделирования популяций леммингов. - М.: ВЦ РАН, 2014. - 115 с.

УДК 57.02.001.57:574.4

О МЕТОДАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ НАБОРОВ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ МОДЕЛЕЙ ABOUT THE METHODS OF ECOLOGICAL OBJECTS MODELING BY MEANS OF THE SETS OF THE INTERCONNECTED MODELS

Саранча Д. А., Юрезанская Ю. С.

ВЦ РАН,
Россия, Москва
saran@ccas.ru, july@ccas.ru

Возможности количественного описания экологических объектов многократно возросли с появлением системной динамики Дж. Форрестера, с возможностью создавать подробные имитационные модели в диалоге с экспертами, и тем самым устранить претензии биологов об излишне упрощенном описании, предъявляемые к докомпьютерным (аналитическим) моделям. Но эффективность такого подхода сдерживают такие его особенности, как ограничение численными расчетами и детальность описания, перерастающая в «необозримость» модели, в силу этого имитационная модель, в которой каждый блок выверен со специалистами, не может гарантировать успех моделирования. Для сохранения междисциплинарных достоинств имитационных подходов и устранения их недостатков предлагается их использовать в рамках комплексных исследований (КОИС), включающих в себя полный набор операций – от сбора, отбора, анализа и переработка исходной (биологической) информации, до формирования имитационной системы – набора взаимосвязанных моделей разной степени детализации.

В такой набор моделей, кроме детальных имитационных, должны входить и сопряженные с ними упрощенные модели, имеющие небольшое количество переменных, допускающие проведение подробного портретного исследования. Упрощенные модели позволяют настраивать детальные модели на соответствующие режимы, а также выдвинуть гипотезы о ведущих механизмах изучаемого явления.

Цель комплексных исследований – помочь сформировать представление об изучаемом объекте, максимально снять алгоритмические проблемы, создать возможности для широкого использования неформальных (интуитивных) методов, провести согласованное объединение этапов формирования и анализа свойств набора моделей с генерированием на их основе гипотез о ведущих механизмах изучаемого явления.

Метод КОИС сформировался в процессе моделирования тундрового сообщества [1-4]. Построен набор взаимодополняющих моделей тундровых популяций и сообществ для описания динамики численности тундровых животных. Основа набора – имитационная модель «растительность-лемминги-песцы» (РЛП), построенная с использованием экс-

пертно оцененных зависимостей, учитывающая сезонные изменения параметров. Была обоснована возможность использования в качестве упрощенной модели одномерного разностного уравнения, связывающего численности леммингов (ведущего блока в модели РЛП) в двух соседних годах. Наличие таких разностных уравнений позволило определить в исходной имитационной модели области параметров, обеспечивающие динамические режимы изменения численностей популяций близкие к наблюдаемым в природе, а также сформулировать гипотезы о ведущих механизмах, определяющих колебания численности тундровых животных – выделены два ведущих безразмерных показателя: относительная скорость прироста популяции и доля гарантированно выживших зверьков. На основе анализа результатов вычислительных экспериментов удалось сформулировать и решить «обратную имитационную задачу». Она состоит во введении таких дополнительных предположений, которые позволили получить формулы, связывающие параметры исходной модели сообщества с параметрами разностного уравнения. Такой переход основан на том, что в конкретный временной отрезок (сезон), изменение соответствующих переменных происходит в сравнительно узком диапазоне, что позволяет для этого диапазона осуществить линеаризацию исходных (экспертных) функций.

Использование метода КОИС при моделировании тундровых популяций и сообществ позволило реализовать идею об эффективности использования имитационных технологий для обоснования упрощенных уравнений, допускающих параметрические исследования. Был создан особый класс моделей, учитывающих сезонность [5, 6], а также тип разностных уравнений, для которых при определенном сценарии изменения параметров последовательно возникают зоны стабильности с устойчивыми циклами и их периоды изменяются в последовательности натурального ряда, а зоны стабильности отделены друг от друга переходными зонами с более сложными режимами [7]. Наличие предыдущего опыта моделирования позволило перейти на другой уровень описания – использование индивидуально-ориентированных моделей [3, 4].

Литература

1. Саранча Д.А. Количественные методы в экологии. Биофизические аспекты и математическое моделирование. -М.: МФТИ, 1997. -283 с.
2. В.Н. Глушков, Д.А. Саранча. Комплексный метод математического моделирования биологических объектов. Моделирование тундрового сообщества // Автоматика и телемеханика. -2013. №2. -С. 94 -108.
3. Тращев Р. В., Люлякин О. П., Саранча Д. А., Юрезанская Ю. С. Метод комплексных исследований на примере моделирования популяций леммингов. - М.: ВЦ РАН, 2014. - 115 с.
4. Sarancha D.A, Lyulyakin O.P., Trashcheev R.V. Interaction of simulation and analytic methods in modelling of ecological and biological objects // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. -2012. V. 27. N. 5. -P. 413-522.
5. Лобанов А.И., Саранча Д.А.; Старожилова Т.К. Учет сезонности в модели Лотки–Вольтерра//Биофизика. Т. 47. -2002. -№ 2. -С. 325-330.
6. Бибик Ю.В., Попов С.П., Саранча Д.А. Неавтономные математические модели экологических систем. -М.: ВЦ РАН, 2004. -120 с.
7. Недоступов Э.В., Саранча Д.А., Чигерев Е.Н., Юрезанская Ю.С. О некоторых свойствах одномерных унимодальных отображений // ДАН. Т. 430. - 2010. - №1. - С. 23-28.

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ПО ЗАДАНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

ON THE CONTINUATION OF A SOLUTION OF THE HOMOGENEOUS SYSTEMS OF MAXWELL EQUATION FROM ITS VALUES ON A PART OF THE BOUNDARY

Сатторов Э.Н.*, Эрмаматова Зухро Э.**

* Самаркандский государственный университет, Узбекистан, Самарканд
Sattorov-e@rambler.ru

** Самаркандский государственный университет, Узбекистан, Самарканд

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений в области однородности среды, для монохроматического поля при отсутствии сторонние токи и сторонние заряды уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H; \quad \operatorname{rot} H = \sigma_1^* E, \quad (1)$$

где ε , μ - электромагнитные постоянные (диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость); $\sigma_1^* = \sigma_1 - i\omega\varepsilon$ - комплексная электропроводность, σ_1 - электропроводность среды, обратная к ее удельному электрическому сопротивлению ρ , $\sigma_1 = \frac{1}{\rho}$,

$E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$ - напряженность электрического и магнитного полей, ω - частота электромагнитного колебания, коэффициент k - волновое число среды: задается выражением

$$k^2 = i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\varepsilon = i\omega\mu\sigma_1^*.$$

Рассматриваемая система эллиптическая, задача Коши для эллиптических уравнений неустойчива относительно малого изменения данных, т.е. некорректна [1]. В некорректных задачах теорема существования предполагается заданным априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному, ([2], с.4). Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена ([3], с.58).

Задача 1. Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S :

$$[n(y), E(y)] = f(y), \quad [n(y), H(y)] = g(y), \quad y \in S. \quad (2)$$

По заданным $f(y)$ и $g(y)$ на S вычислить $E(x)$, $H(x)$, $x \in D$.

Задача 2. Пусть на S заданы функции $f(y)$ и $g(y)$. Указать условия на $f(y)$ и $g(y)$ необходимые и достаточные для того, чтобы существовало решение системы (1) класса $A(D) \cap C(D \cup S)$, удовлетворяющее условию (2).

Задача (1), (2) относится к числу некорректно поставленных задач. Ж.Адамар заметил, что решение задачи 1 неустойчиво. После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризующих операторов.

В 1926 г. Т.Карлеман ([2], с. 41) построил формулу, которая связывает значения аналитической функции комплексного переменного в точках области с ее значениями на куске границы этой области. На основе этой формулы в ([2], с.34) введено понятие функции Карлемана задача Коши для уравнения Лапласа и в некоторых случаях указан способ ее построения. Конструкция функции Карлемана дает возможность в этих задачах построить регуляризацию и получить оценку условной устойчивости. Чаще всего в приложениях вместо вектор-функций $f(y)$ и $g(y)$ задаются на S их приближения $f_\delta(y)$ и

$g_\delta(y)$ соответственно с заданным уклонением $\delta > 0$ и требуется по $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ построить решение в точках области D с заранее заданной точностью. Поскольку решение задачи неустойчиво, то построение приближенного решения невозможно.

Для того, чтобы построить устойчивое решение, необходимо сузить класс рассматриваемых решений. Чаще всего это компакт в известных функциональных пространствах. Если известно число, характеризующее компакт (размеры компакта, которому принадлежат решения), то речь идёт о построении семейства вектор-функции $E_\sigma(x) = E_\sigma(x, f_\delta, g_\delta)$, $H_\sigma(x) = H_\sigma(x, f_\delta, g_\delta)$ (регуляризация), зависящих от положительного параметра $\sigma > 0$ (параметр регуляризации).

Из выше сказанного нам удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на её основе регуляризованное решение задачи Коши и критерий разрешимости в специальной области.

Литература

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – С. 38-70.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. – 92 с.
3. Берс А., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.

УДК 517.956.2

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОСТОЯННЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

ON THE INVESTIGATION THE EQUATION OF THE GENERALIZED ANALYTIC FUNCTION WITH THE CONSTANT DEVIATION ARGUMENT

Сафаров Д.С.

*Курган-Тюбинский государственный университет, Республика Таджикистан
Safarov – 5252@ mail. Ru*

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + a w(z) + b w(z+h) = 0, \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $2w_{\bar{z}} = w_x + iw_y$, a, b, h – постоянные. Решение уравнения будем понимать в обобщённом смысле И.Н. Векуа [1]. Будем искать решение уравнения, допускающих в любой конечной части плоскости $\mathbb{C}$, содержащие точки z , и $z+h$, полюсов, как у однозначных аналитических функций.

Пусть λ – корень характеристического уравнения

$$\lambda + a + b e^{\lambda \bar{h}} = 0. \quad (2)$$

Так как, функция $\psi(\lambda) = \lambda + a + b e^{\lambda \bar{h}}$ – целая аналитическая функция на плоскости $\mathbb{C}_\lambda$, то уравнение (2) имеет бесконечное число решений. Если λ – корень уравнения (2), то функция $\vartheta(z) = \exp \lambda \bar{z}$ является решением уравнения (1) и удовлетворяют условию

$$\vartheta(z+h) = e^{\lambda \bar{h}} \vartheta(z). \quad (3)$$

Тогда, любое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3) представимо в виде

$$g(z+h) = e^{\lambda \bar{h}} \varphi(z), \quad (4)$$

где $\varphi(z)$ – однозначная аналитическая функция с периодом h .

Следовательно, в представление решения (1), в виде (4), $\varphi(z)$ – мероморфная периодическая функция. Полную характеристику множества периодов мероморфной функции даёт следующая теорема доказанная Абелем и Якоби [2]:

Все периоды мероморфной периодической функции являются целыми кратными одного периода ω или сумой целых кратных двух периодов ω_1, ω_2 , отношение которых ω_2 / ω_1 имеет положительную мнимую часть.

Периоды ω и ω_1, ω_2 соответственно, называются примитивными (основными) периодами однопериодических и двоякопериодических мероморфных функций.

Ещё, Якоби доказал что не существует отличной от константы мероморфной функции с $n \geq 3$ примитивными периодами.

Утверждение 1. Пусть λ – корень уравнения (2). Тогда для существования решения (1) с заданными полюсами как у мероморфной функции и удовлетворяющее условию (3), необходимо и достаточно, чтобы отклонение h можно было представить в виде:

$$1) \quad h = k\omega, \quad k = 0 \pm 1 \pm 2, \dots, \quad \operatorname{Re} \omega \neq 0; \quad \text{или}$$

$$2) \quad h = n\omega_1 + m\omega_2, \quad \operatorname{Im}(\omega_2 / \omega_1) \neq 0, \quad n, m - \text{целые числа.}$$

В первом случае решение получается с помощью элементарных однопериодических функций. Во втором случае решение находится посредством эллиптических функций, построенных на периодах ω_1, ω_2 , $\operatorname{Im}(\omega_2 / \omega_1) \neq 0$, [3].

Утверждение 2. Если выполнено условия утверждение 1 и $h = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n$, $n \geq 3$, то решение (1) представимо в виде

$$w(z) = ce^{\lambda \bar{z}}, \quad c - \text{const},$$

и когда λ – корень кратности m , то любая функция вида

$$p(\bar{z})e^{\lambda \bar{z}},$$

где $p(\bar{z})$ – полином по $\bar{z}$ степени $m-1$, также, является решением уравнения (1).

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции, - М.: 1959. 683 с.
2. Ахиезер И.Н. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. 304с.
3. Сафаров Д.С.. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции. - Душанбе Дониш, 2012. 190 с.

ЗАДАЧА КЕЛДЫША ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

THE KELDYSH PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENT IN RECTANGULAR DOMAIN

Сафина Р.М.

Поволжская государственная академия физической культуры, спорта и туризма,
Россия, Казань
rimma77705@mail.ru

Рассмотрим уравнение Пулькина С.П. [1]

$$Su \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{k}{x} = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $k \geq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные действительные числа.

Задача Келдыша. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-), \quad (2)$$

$$Su(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D^+ \cup D^-, \quad (3)$$

$$u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (4)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

где φ, ψ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$.

Данная работа является продолжением исследований автора [2], где изучена Дирихле для уравнения (1) в прямоугольной области D при $0 < k < 1$.

В работах [1], [3, с.68] показано, что в случае задачи E (т.е. задачи Келдыша)

$$u_x(0, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta.$$

Теорема 1. Если существует решение задачи (2) – (5), то оно единственно только и только тогда, когда при всех $n \in N$ выполнены условия

$$\Delta(n, \alpha, \beta) = ch\lambda_n\beta \sin \lambda_n\alpha + sh\lambda_n\beta \cos \lambda_n\alpha \neq 0, \quad (6)$$

где $\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, μ_n — n -ый корень уравнения $J_{\frac{k-1}{2}}(\mu_n) = 0$.

Лемма. Если $\tilde{\alpha} = p/q$, $p, q \in N$, $(p, q) = 1$ и $k \neq \frac{1}{p}(4dq - q - 4r) - 2$, $d \in N$, $r = 1, \dots, q-1$, то существуют положительные постоянные C_0 и $n_0 \in N$, такие, что при всех $n > n_0$ справедлива оценка

$$|\Delta(n, \alpha, \beta)| \geq C_0 e^{\lambda_n \beta}. \quad (7)$$

При выполнении оценки (7) при всех $n > n_0$ и неравенства (6) при $n = \overline{1, n_0}$ решение задачи (2) – (5) определяется в виде суммы ряда Фурье

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(y) X_n(x), \quad (8)$$

где

$$u_n(y) = \begin{cases} \frac{\varphi_n(\cos \lambda_n \alpha \operatorname{sh} \lambda_n y + \sin \lambda_n \alpha \operatorname{ch} \lambda_n y) + \psi_n \operatorname{sh} \lambda_n (\beta - y)}{\Delta(n, \alpha, \beta)}, & y > 0, \\ \frac{\varphi_n(\sin \lambda_n (y + \alpha) + \psi_n (\operatorname{sh} \lambda_n \beta \cos \lambda_n y - \operatorname{ch} \lambda_n \beta \sin \lambda_n y))}{\Delta(n, \alpha, \beta)}, & y < 0, \end{cases}$$

$$X_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x),$$

$J_\nu(t)$ - функция Бесселя первого рода,

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x) dx, \quad \psi_n = \int_0^l \psi(x) x^k X_n(x) dx.$$

Теорема 2. Пусть функции $\varphi(x) \in C^4[0, l]$ и $\psi(x) \in C^4[0, l]$ и $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = \varphi''(0) = \psi''(0) = 0$, $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi'(l) = \psi'(l) = \varphi''(l) = \psi''(l) = 0$ и выполнена оценка (7) при всех $n > n_0$. Тогда если $\Delta(n, \alpha, \beta) \neq 0$ при всех $n = \overline{1, n_0}$, то существует единственное решение задачи (2) – (5) и это решение определяется рядом (8); если $\Delta(n, \alpha, \beta) = 0$ при некоторых $n = s_1, s_2, \dots, s_h \leq n_0$, то задача (2) – (5) разрешима, когда выполняются условия $\varphi_m = 0, \psi_m = 0, m = s_1, s_2, \dots, s_h$.

Литература

1. Пулькин С.П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта // Изв. вузов. Математика. 1960. №6(19). С. 214 – 225.
2. Сафина Р.М. Задача Дирихле для уравнения Пулькина в прямоугольной области // Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научн. сер., 2014. №10. С. 91 – 101.
3. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014. 304 с.

УДК 534.222.2

ДИНАМИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОБ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

THE REFRACTION COEFFICIENTS' DYNAMICS IN LINEAR PROBLEM OF SHOCK WAVE DISTURBANCE

Семенко Е.В., Семенко Т.И.

* Новосибирский государственный педагогический университет,
Россия, Новосибирск
senenko54@gmail.com, semenko_ti@mail.ru

Рассматривается задача Коши для уравнений Эйлера и условий Ренкина-Гюгонио на разрыве, линеаризованная на кусочно-постоянном решении с линией разрыва - плоскостью $x=0$. Искомыми являются возмущения гидродинамических параметров и формы ударной волны.

На основе полного решения задачи Коши в спектральных переменных рассмотрена задача преломления плоских волн. Выведены формулы для угла преломления и коэффициентов преломления, на основе которых произведены численные расчеты. Результаты сравниваются с предыдущими работами, в частности с классической работой [J.F. McKenzie, K.O. Westphal, Interaction of linear waves with oblique shock waves, Phys. Fluids 11, 2350-2362 (1968)].

Выясняется, что большинство классических результатов требуют значительного уточнения. В частности, существенно уточнена динамика коэффициентов преломления в зависимости от угла падения. Изучена зависимость коэффициентов преломления от предфронтного числа Маха, опровергнуто так называемое аномальное усиление (abnormal amplification) коэффициентов преломления вблизи критических углов падения.

УДК.517.958

**ПРИМЕНЕНИЕ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В РЕШЕНИИ
ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**
**APPLICATION OF THE LOADED EQUATIONS IN THE SOLVING OF
PROBLEMS OF PRESSURELESS FILTRATION**

Сербина Л. И.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение
«Институт прикладной математики и информатики»*

Россия, Нальчик

LSerbina@mail.ru

Одно из перспективных направлений развития теории краевых задач связано с постановкой и исследованием качественно новых неклассических задач, существенно расширяющих возможности методов математического моделирования нелинейных динамических процессов и систем самой различной природы. Как показано в [1], особое место среди задач подобного типа занимают нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений, которые совершенно естественно возникают при математическом моделировании различных процессов и систем с распределенными параметрами, имеющих пространственно-временную фрактальную организацию.

В данной работе, следуя общей идее А.М. Нахушева и продолжая ранее начатые исследования [2], [3], решение задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня потока грунтовой воды в водонасыщенных средах с фрактальной структурой эквивалентно сводится к решению начально-краевой задаче для дифференциального уравнения с частными производными для нагруженного уравнения параболического типа.

Проведен качественный анализ аналитического метода исследования нагруженного дифференциального уравнения одномерного безнапорного фильтрационного течения. Особое внимание уделено вопросу поиска нелокального условия для модельного нагруженного уравнения фильтрации, представляющего собой интегральное соотношение между значениями искомой функции на границе области и внутри нее, возникающего в результате самоподобного изменения структуры фильтрационного потока. Разработаны аналитические методы прогноза поведения нелинейного одномерного безнапорного течения, обнаруживающих самосогласованное стремление к критическим режимам.

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.
2. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007.

УДК 517.929.4

УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И ДИНАМИКА ПТИЧЬЕГО ГРИППА* DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND AVIAN INFLUENZA DYNAMICS

Скворцова М.А.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
sm-18-nsu@yandex.ru*

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида [1]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S_w(t) = -[\mu_w^s + m_{wb}(t)] S_w(t) + \alpha_{bw}^s m_{bw}(t - \tau_{bw}) S_b(t - \tau_{bw}) - \frac{\beta_w S_w(t) I_w(t)}{S_w(t) + I_w(t)}, \\ \frac{d}{dt} S_b(t) = -[\mu_b^s + m_{bw}(t)] S_b(t) + \alpha_{wb}^s m_{wb}(t - \tau_{wb}) S_w(t - \tau_{wb}) - \frac{\beta_b S_b(t) I_b(t)}{S_b(t) + I_b(t)} + b(t) S_b(t) \left(1 - \frac{S_b(t)}{K}\right), \\ \frac{d}{dt} I_w(t) = -[\mu_w^i + m_{wb}(t)] I_w(t) + \alpha_{bw}^i m_{bw}(t - \tau_{bw}) I_b(t - \tau_{bw}) + \frac{\beta_w S_w(t) I_w(t)}{S_w(t) + I_w(t)}, \\ \frac{d}{dt} I_b(t) = -[\mu_b^i + m_{bw}(t)] I_b(t) + \alpha_{wb}^i m_{wb}(t - \tau_{wb}) I_w(t - \tau_{wb}) + \frac{\beta_b S_b(t) I_b(t)}{S_b(t) + I_b(t)}. \end{cases}$$

Данная система описывает распространение птичьего гриппа у перелетных птиц, мигрирующих между двумя территориями. Здесь $S_w(t)$ и $S_b(t)$ – численности здоровых птиц на зимней и летней территориях, $I_w(t)$ и $I_b(t)$ – численности зараженных птиц на зимней и летней территориях соответственно. Предполагается, что $m_{wb}(t)$, $m_{bw}(t)$ и $b(t)$ – кусочно-постоянные неотрицательные периодические функции, все параметры системы также неотрицательны.

В [1] были получены условия на коэффициенты системы, при которых существует асимптотически устойчивое периодическое решение $(S_w(t), S_b(t), I_w(t), I_b(t)) = (S_w^*(t), S_b^*(t), 0, 0)$, соответствующее здоровой особи. Мы получаем оценки скорости сходимости решений к указанному периодическому решению с использованием решения $H(t)$ специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова [2]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} H + HA(t) + A^*(t)H = -I, & t \in [0, T], \\ H(0) = H(T) > 0. \end{cases}$$

Важно отметить, что нахождение решения данной краевой задачи является хорошо обусловленной задачей и не требует вычисления спектра матрицы монодромии [2].

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г.В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-31528).

Литература

1. Ванг К.-Ш., Ву Дж. Периодические системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и динамика птичьего гриппа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 32-42.
2. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332-348.

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛА КАТОДУ ПРИ ЭЛЕКТРОИСКРОВОМ ЛЕГИРОВАНИИ MATHEMATICAL MODELING OF HEAT'S TRANSMISSION TO CATHODE ATTACHED TO ELECTRO-SPARK ALLOYING

Смагин С.И., Пономарюк Ю.Ю.

*Вычислительный Центр ДВО РАН
680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65
neznaikaza@gmail.com*

В промышленности актуальна проблема повышения срока эксплуатации деталей машин, особенно режущего инструмента, штамповой оснастки.

В 1943 г. Б.Р. Лазаренко и Н.И. Лазаренко был предложен метод электроискрового легирования (ЭИЛ), который позволял упрочнять металлические поверхности токопроводящими материалами.

При ЭИЛ происходит взаимодействие катода (обрабатываемой детали) и анода (легирующего инструмента). Для оптимизации метода ЭИЛ требуются численные расчеты температуры в поверхностном слое.

В настоящей работе рассматривается задача нагрева при ЭИЛ прямоугольного катода-параллелепипеда Q_0 с рабочей поверхностью Π_0 , расположенного так, что:

$Q_0 = \{x \in R^3 : |x_i| < a_i, \quad i = 1, 2, \quad -a_3 < x_3 < 0\}$, $\Pi_0 = \{x \in R^3 : |x_i| < a_i, \quad i = 1, 2, \quad x_3 = 0\}$. Источниками тепла являются поверхностный тепловой поток $\mathbf{q}_0$ с плотностью $\mathbf{W}_0$, возникший в результате электроискрового разряда, а также сильно разогретый жидкий металл, который в виде капель попадает с анода на рабочую поверхность Π_0 . Здесь $q_0(x, t) = q_0(x', 0, t)$, $x' = (x_1, x_2)$, $t > 0$ - время. Далее будем говорить не о множестве капель, а об образованном ими слое Q , заключённом между основанием Π и гладкой поверхностью S .

Рассматриваемая задача является нелинейной и определена в сложной трехмерной области $Q_0 \cup \Pi_0 \cup Q$, с изменением формы слоя после каждого электроискрового разряда. В работе строится нелинейная математическая модель определения температурного поля катода - с помощью нелинейного граничного условия, которое заменяет все уравнения теплового баланса в области Q .

Получены результаты численного моделирования процесса остывания слоя, помещенного на границу теплопроводящего полупространства с различными исходными данными. В качестве материала анода рассматривались различные тугоплавкие металлы: титан, вольфрам, тантал. Материалом катода-подложки считалось железо.

Литература

1. Албу А.Ф., Горбунов В.И., Зубов В.И. Оптимальное управление процессом плавления / Журн. вычислит. математики и матем. физики, 2000, том 40, N4, с. 517-531.
2. Алексанян В.Д., Верхотуров А.Д., Подчерняева И.А., Сиденко Н.Р., Юртин И.И. Математическая модель определения температурного поля в поверхностном слое при электроискровом легировании / Институт машиноведения и металлургии [препринт]. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. - 34 с.
3. Верхотуров А.Д. Формирование поверхностного слоя металлов при электроискровом легировании. Владивосток: Дальнаука, 1995. - 324 с.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. - 456 с.
5. Теплотехнический справочник / Под общ. ред. Юренева В.Н. и Лебедева П.Д. В 2-х т. Т. 2. М.: Энергия, 1976. - 896 с.

УДК 735.29

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМИ КОШИ ON INVERSE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CAUCHY DATA

Сорокин Р.В., Шипина Т.Н.

Сибирский федеральный университет, Россия, Красноярск
rsor@mail.ru, stn_71@mail.ru

В работе исследуется однозначная разрешимость обратных задач для систем нелинейных параболических уравнений и систем составного типа с данными Коши. Идентифицируемые коэффициенты в уравнениях зависят только от временной переменной. В работах [1,2] представлены обратные задачи для линейных систем составного типа с неизвестными коэффициентами, также зависящими только от переменной t .

Задача 1. В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t, x) | t \in [0, T], x \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения действительных функций $U(t, x)$, $V(t, x)$, $b_{12}(t)$, $b_{21}(t)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + \varphi_1(U) + b_{12}(t)V + m_1(t, x), \\ V_t = V_{xx} + b_{21}(t)U + \varphi_2(V) + m_2(t, x) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$U(0, x) = U_0(x), \quad V(0, x) = V_0(x), \quad x \in E_1$$

и условиями переопределения

$$U(t, 0) = \gamma_1(t), \quad V(t, 0) = \gamma_2(t), \quad t \in [0, T],$$

где $\varphi_1(U) = \sum_{n=0}^2 a_{1n}(t)U^n$, $\varphi_2(V) = \sum_{n=0}^2 a_{2n}(t)V^n$, $a_{ji}(t) \in C[0, T]$, $j = 1, 2$, $i = 0, 1, 2$.

Задача 2. В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t, x) | t \in [0, T], x \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения действительных функций $U(t, x)$, $V(t, x)$, $b_{11}(t)$, $b_{12}(t)$, $b_{21}(t)$, $b_{22}(t)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + a_1(t)U_x + b_{11}(t)U + b_{12}(t)V + m_1(t, x), \\ V_t = a_2(t)V_x + b_{21}(t)U + b_{22}(t)V + m_2(t, x) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$U(0, x) = U_0(x), \quad V(0, x) = V_0(x), \quad x \in E_1$$

и условиями переопределения

$$U(t, 0) = \gamma_1(t), \quad V(t, 0) = \gamma_2(t),$$

$$U(t, 0) = \gamma_3(t), \quad V(t, 0) = \gamma_4(t), \quad t \in [0, T],$$

Считаем, что $\gamma_i(t) \in C^1[0, T]$, $i = 1, \dots, 4$, функции $U_0(x)$, $V_0(x)$ достаточно гладкие и ограничены вместе со своими производными при $x \in E_1$, функции $m_i(t, x)$, $i = 1, 2$, непрерывные по переменной t , достаточно гладкие по переменной x и ограничены вместе со своими производными по переменной x в $\Pi_{[0;T]} = \{(t, x) | t \in [0, T], x \in E_1\}$.

Используя условия переопределения, обратные задачи приводятся к задачам Коши для систем нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений, которые не содержат неизвестных коэффициентов $b_{ij}(t)$, а содержат следы производных функций $U(t, x)$, $V(t, x)$ по пространственным переменным. Разрешимость полученных неклассических задач следует из теоремы, представленной в работе [3].

Существование и единственность решения представленных обратных задач установлена в классах гладких ограниченных функций в $\Pi_{[0;T]}$.

Литература

1. Сорокин Р.В., Шипина Т.Н. О разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа // Вычислительные технологии. 2003. Т.8. Ч.3. С.139-146.
2. Вячеславова П.Ю., Сорокин Р.В. Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа // Журнал СФУ: математика и физика. Красноярск. 2009. Т.2, №3. С.288 – 297.
3. Фроленков И.В., Романенко Г.В. О разрешимости специальных систем одномерных нагруженных параболических уравнений и систем составного типа с данными Коши // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. 17. №1. С.135–148.

УДК 519.632, 550.832.74, 550.832.75

РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ДВУМЕРНЫХ И ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КАРОТАЖА НА GPU

2D AND 3D COMPUTER SIMULATION OF THE ELECTRIC AND ELECTROMAGNETIC LOGGING ON GRAPHICS PROCESSORS

Суродина И.В.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительной математики и математической геофизики
Сибирского отделения Российской академии наук,
Россия, Новосибирск
sur@ommfao1.sccc.ru*

Быстрые решения прямых задач могут служить основой для инверсии некоторых геофизических задач. Одним из современных и перспективных направлений является использование параллельных вычислений на GPU. Для получения максимального выигрыша при использовании GPU необходимо организовать вычисления полностью параллельно, учитывая GPU архитектуру.

Решение прямых задач электрического и электромагнитного каротажа с помощью конечно-разностного или конечно-элементного методов приводит к большим разреженным системам линейных уравнений, которые достаточно часто решаются методами сопряженных направлений. Без подходящего предобуславливателя решение таких систем имеет медленную сходимость.

В работе реализован алгоритм, предложенный нами в работе [1] для построения параллельного предобуславливателя, аппроксимирующего обратную матрицу. Необходимо отметить, что данный алгоритм требует небольших затрат на построение предобуславливающей матрицы и организован полностью параллельно.

Программы реализованы на GPU с использованием технологии NVIDIA CUDA и функций линейной алгебры библиотеки CUBLAS. В результате получен выигрыш от 10 до 50 раз по времени относительно последовательных вариантов программ в зависимости от размерности сеток и геофизических свойств реальных моделей.

Литература

1. Labutun I.B., Surodina I.V. Algorithm for Sparse Approximate Inverse Preconditioners in Conjugate Gradient Method //Reliable Computing (Interval Computations) Journal http://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/tables-of-contents.html#Volume_18

УДК 519.1

ЗАДАЧИ НЕЧЕТКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ПРИНЦИПА ЗАДЕ

THE GENERALIZED PRINCIPLE OF PRINCIPLE ZADEN AND PROBLEMS FUZZY PROGRAMMING

Ph.D Т.Батзул*, Ц.Жаргалсайхан*

**-Монгольский университет Науки и Технологии
must1204@gmail.com*

Анотация: Используя распределение одной и многомерной случайной величины по новому определены классы нечеткого множества с распределениями. В работе также обоснован принцип нахождения экстремума нечеткой числовой функции с дискретными распределениями. Пусть $F(t)$ -функция распределения этой случайной величины X . Также $P(x \leq t)$ -вероятность случайной величины X , причем $t \in (-\infty; \infty)$, другими словами $F(t) = P(x \leq t)$. Обозначим через $\Phi(G, R)$ класс функций принимающих значения из действительного числового множества, определенного на множестве G . В настоящей работы мы определим следующие определения нечеткого множества.

Определение. Пусть A нечеткое множество, определенное на G , и $\mu_A(x)$ обозначает функцию принадлежности множества A . Кроме того, для любого элемента x множества G и функции $g_A \in \Phi(G, R)$ выполняется условия: $\mu_A(x) = P(X \leq g_A(x))$ или $\mu_A(x) = F(g_A(x))$. Обозначим такой нечеткий класс множеств A через $(G, X, \Phi(G, R))$.

Элементы класс нечетких множеств $(G, X, \Phi(G, R))$ назовем нечетким множеством $F(t)$ -распределением, а класс $(G, X, \Phi(G, R))$ назовем классом нечетких множеств с $F(t)$ -распределением, определенном на множестве G . Именно $F(g_A(x))$ является характеристической функцией множества A .

Кроме того, в этой работы мы рассматриваны следующие результаты.

Теорем 1. Каждое нечеткое множество является элементом некоторого класса нечетких множеств с распределением.

Определение 9. Пусть s некоторое положительное целое число, $\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ и $\tilde{f}_j(x_1, \dots, x_k)$ -нечеткие функции ($j = \overline{1, s}$).

$$\begin{cases} \tilde{f}_j(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \\ j = \overline{1, s} \end{cases} \quad (1)$$

Тогда рассмотрим задачу: найти экстремальное значение нечеткой функций $\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ при условиях (1). Назовем эту задачу задачей нечеткого программирования.

Принцип. (Обобщенный Принцип принципа Заде). Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ - положительные числа, и выполняется условия: $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < 1$. Если распределение $F(t)$ случайной величины X принимает значения из множества $\{0, p_1, p_2, \dots, p_n, 1\}$ то решение задача нечеткого программирования можно найти путем объединения решения при $F(t) = 1$ ба $F(t) = p_j$ ($j = 1, 2, \dots, s$).

Литература

1. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
2. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
3. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
4. Д.Содномдорж, Р.Лхагвасүрэн. цахилгаан системийн тооцоонд тодорхой бус олонлогийг хэрэглэх нь. УБ 2003 он /на монгольском языке/.
5. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, vol.8, N 3, pp. 338–353.
6. Батыршин И.З., Недосекин А.А., Стецко А.А., Тарасов В.Б., Язенин А.В., Ярушкина Н.Г. Теория и практика нечетких гибридных систем. Под ред. Н.Г. Ярушкиной. М.: Физматлит, 2007. [ISBN 978-5-9221-0786-0](#)
7. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. - 166с.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ*

ON DIFFERENTIAL-INVARIANT SOLUTIONS

Талышев А.А.

*Новосибирский государственный университет,
Россия, Новосибирск
tal@academ.org*

Система дифференциальных уравнений называется автоморфной относительно группы Ли, если все её решения находятся на орбите одного из них [1, § 25]. Пусть система дифференциальных уравнений E допускает конечномерную группу симметрий Ли G . Перечень всех потенциально возможных типов автоморфных систем данной группы определяется неравенствами:

$$\max\{n, r_k\} \leq d_k \leq \min\{n + r_k, \nu_k\}, \quad r_k \leq r, \quad d_k \leq d_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

где n — размерность пространства независимых переменных, r — размерность группы G , r_k — общий ранг k -го продолжения группы G , ν_k — размерность k -го продолжения пространства независимых и зависимых переменных, и d_k — размерность орбиты решения в k -ом продолжении пространства.

Орбита всякого решения системы E в продолженном пространстве может рассматриваться как система дифференциальных уравнений. Для каждого решения системы E существует такое k_3 , что при $k \geq k_3$ орбита будет вполне интегрируемой и в силу этого автоморфной системой дифференциальных уравнений [2].

Аutomорфная система максимального ранга (т.е. та, у которой ранг $\rho_{k_3} = d_{k_3} - r_{k_3} = n$) участвует в групповом расслоении [1, § 26]. А решения автоморфных систем меньшего ранга названы в [1, с. 336] дифференциально-инвариантными решениями.

Для построения автоморфных систем используется теорема о представлении неособых инвариантных многообразий [1, § 25]. В силу этой теоремы уравнения орбиты в продолженном пространстве могут быть записаны в виде $\Psi(J_{k_3}) = 0$, где J_{k_3} — универсальный инвариант группы порядка k_3 . Требование полной интегрируемости накладывает условия на отображение Ψ . Эти условия являются системой дифференциальных уравнений на отображение Ψ , которая называется «разрешающей системой» [1, § 25]. Т.е. каждое решение «разрешающей системы» определяет некоторую автоморфную систему.

В случае построения инвариантных решений (т.е. таких, у которых дефект инвариантности $\delta = d_{k_3} - n = 0$) «разрешающая система» называется «подмоделью» [3]. Автоморфная система в этом случае тривиальна.

Во всех остальных случаях автоморфные системы являются системами дифференциальных уравнений, для интегрирования которых можно использовать результаты работы [4].

Для автоморфных систем нулевого ранга тривиальной оказывается «разрешающая система».

Приводятся примеры дифференциально-инвариантных решений.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2133.2014.1).

Литература

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Талышев А.А. Об автоморфных системах конечномерных групп Ли. Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, № 4. С. 130–138.
3. Овсянников Л.В. Программа «Подмодели». Газовая динамика. Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 29–55.
4. Талышев А.А. Об интегрировании автоморфных систем конечномерных групп Ли. Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, № 1. С. 108–114.

УДК 517.948

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА AN ERROR ESTIMATE OF APPROXIMATE SOLUTION WHEN SOLVING INTEGRAL EQUATION

Танана В.П.*, Сидикова А.И.**

* Южно-Уральский государственный университет (НИУ),
Россия, Челябинск
tvpa@susu.ac.ru

** Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Россия, Челябинск
7413604@mail.ru

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s,t)u(s)ds = f(t), \quad c \leq t \leq d, \quad (1)$$

где $P(s,t) \in C([a,b] \times [c,d])$, $u(s) \in L_2[a,b]$, $f(t) \in L_2[c,d]$ и ядро оператора $P(s,t)$ – замкнуто. Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $u_0(s)$ уравнения (1), которое принадлежит множеству $M = \{u(s) : u(s), u'(s) \in L_2[a,b], u(a) = 0\}$.

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны $f_\delta \in L_2[c,d]$ и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta(t) - f_0(t)\|_{L_2} < \delta$. Требуется по $f_\delta(t)$, δ и M определить приближенное решение $u_\delta(s)$ и оценить его отклонение от точного решения $u_0(s)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$. Введем операторы B и C такие, что

$$u(s) = Bv(s) = \int_a^s v(\xi)d\xi; \quad v(s), Bv(s) \in L_2[a,b],$$

$$Cv(s) = ABv(s) = \int_a^b K(s,t)v(s)ds, \quad K(s,t) = \int_b^s P(\xi,t)d\xi; \quad v(s) \in L_2[a,b], Cv(s) \in L_2[c,d].$$

Оператор C заменим конечномерным оператором C_n , для которого известна величина

$$h_n = \|N(t)\|_{L_2} \sqrt{\frac{b-a}{n}}, \quad \text{где } N(t) = \max_{a \leq s \leq b} |P(s,t)|; \quad t \in [c,d], \quad \text{определяемая соотношением}$$

$$\|C_n - C\| \leq h_n.$$

Для определения оператора C_n разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей и введем функции $\bar{K}_i(t)$ и $K_n(s, t)$ формулами $\bar{K}_i(t) = K(s_i, t)$, где $s_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

$$K_n(s, t) = \bar{K}_i(t); \quad s_i \leq s < s_{i+1}, \quad t \in [c, d], \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Используя (2), определим конечномерный оператор C_n формулой

$$C_n v(s) = \int_a^b K_n(s, t) v(t) dt; \quad t \in [c, d].$$

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом регуляризации

$$\inf \left\{ \|C_n v(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \int_a^b [v(s)]^2 ds : v(s) \in L_2[a, b] \right\}, \quad \alpha > 0. \quad (3)$$

Вариационная задача (3) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений [1]

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ij} v_i + \alpha v_j = g_j; \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (4)$$

$$\text{где } b_{ij} = \int_c^d \bar{K}_i(t) \bar{K}_j(t) dt, \text{ а } g_j = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \int_c^d \bar{K}_j(t) f_\delta(t) dt.$$

Решение системы (4) обозначим через $(\bar{v}_i)^{-\alpha}$. Используя обобщенный принцип невязки, параметр регуляризации $\bar{\alpha}(C_n, f_\delta, h_n, \delta)$ в системе (4) определим из уравнения

$$\left\{ \int_c^d \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t) \bar{v}_i^{-\alpha} - \bar{f}_{\delta, n}(t) \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\bar{v}_i^{-\alpha} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} h_n + \delta. \quad (5)$$

Решение $v_{\delta h_n}(s)$ задачи (4), (5) обозначим через $v_{\delta h_n}(s) = \left\{ \bar{v}_i^{-\alpha} : s_{i-1} \leq s < s_i \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Приближенное решение $u_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1) будет непрерывной, кусочно-линейной функцией, определяемой формулой $u_{\delta h_n}(s) = B v_{\delta h_n}^{\bar{\alpha}(C_n, f_\delta, h_n, \delta)}(s) = \int_a^s v_{\delta h_n}(\xi) d\xi$.

Теорема 1. Пусть $u_0(s) \in M$, а $u_{\delta h_n}(s)$ определена формулой (10) и $\|\bar{f}_{\delta, n}\| > \delta + \|u'_0(s)\| h_n$. Тогда существует число $r > 0$ такое, что $\|u_{\delta h_n}(s) - u_0(s)\| \leq 2\omega(\delta + 2rh_n, r)$, где $\omega(\sigma, r) = \sup_u \left\{ \|u(s)\|_{L_2} : u(s) \in M_r, \|Au(s)\| \leq \sigma \right\}$.

Литература

1. Танана В.П., Сидикова А.И. Об оценке погрешности регуляризующего алгоритма, основанного на обобщенном принципе невязки, при решении интегральных уравнений // Журн. выч. методы и програм 2015. Т.16, № 1. С.1-9.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ON THE SOLVABILITY OF AN INVERSE PROBLEM FOR SOME CLASSES OF PARABOLIC EQUATIONS OF FOURTH ORDER

Телешева Л.А.

Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ

love_20_09@mail.ru

В работе изучается вопрос о разрешимости обратной задачи определения неизвестного коэффициента в итерированном уравнении параболического типа четвертого порядка, с интегральным условием переопределения. Прямые задачи для итерированного уравнения теплопроводности изучались в работах Ошурбекова Н.А., Попова С.В., Глушак А.В., Зерагия П.К. В работе Меграниева Я.Т. рассматривалась обратная задача для итерированного уравнения с неизвестной правой частью с нелокальными условиями переопределения. Ранее в данной постановке обратная задача не рассматривалась.

Обратная задача: найти функции $u(x, t), q(t)$ связанные в прямоугольнике $Q = \{(x, t) : x \in (0, 1), t \in (0, T), T < \infty\}$ уравнением

$$u_{tt} - au_{xxt} + u_{xxxx} + q(t)u = f(x, t)$$

Причем для функции $u(x, t)$ должны выполняться граничные условия:

$$u(0, t) = \varphi_0(t), u(1, t) = \varphi_1(t), t \in (0, T),$$

$$u_{xx}(0, t) = \psi_0(t), u_{xx}(1, t) = \psi_1(t), t \in (0, T),$$

начальные условия

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in [0, 1],$$

и условия переопределения

$$\int_0^1 K(x)u(x, t)dx = \mu(t), t \in [0, 1].$$

Получены условия существования и единственности решения поставленной задачи.

Литература

1. Ошурбеков Н.А. Задача Коши для итерированного уравнения теплопроводности. Известия НАН РК, Серия физ.-математическая., 2007, №3, стр.30-33.
2. Попов С.В. Нелокальные контактные краевые задачи для итерированных уравнений теплопроводности. Мат. заметки ЯГУ, 1994, т.1, №2, стр.55-65.
3. Глушак А.В. Итерированные задачи Коши и Дирихле с оператором Бесселя в Банаховом пространстве. Известия высших учебных заведений. Математика, 1999, №8(447), стр.3-10.
4. Зерагия П.К. О решении основной граничной задачи для одного нелинейного бикалорического уравнения. Труды Тбилисского государственного университета, 1976, 166, с.5-11.
5. Меграниев Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка. Вестник ТОГУ, 2012, №4(27), стр.25-34.
6. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Netherlands. VSP, 1999.

О МОДИФИЦИРОВАННОМ МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА *

A MODIFIED GALERKIN METHOD FOR THE SECOND ORDER EQUATION OF MIXED TYPE

И.М. Тихонова, И.Е. Егоров

*Научно-исследовательский институт математики
Северо-Восточного федерального университета, Россия, Якутск.
IrinaMikh3007@mail.ru, IvanEgorov51@mail.ru.*

Пусть $\Omega \subset R^n$ ограниченная область с гладкой границей S , $Q = \Omega \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = k(x, t)u_{tt} - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t). \quad (1)$$

где коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями.

Изучается следующая краевая задача: найти решение уравнения (1), удовлетворяющий условиям

$$u|_{S_T} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{P_0^+} = 0, \quad u_t|_{P_T^-} = 0. \quad (3)$$

где

$$P_0^+ = \{(x, 0) : x \in \Omega, k(x, 0) > 0\}, \quad P_T^- = \{(x, T) : x \in \Omega, k(x, T) > 0\}.$$

В данной работе рассматривается частный случай краевой задачи В.Н. Врагова [1], когда уравнение смешанного типа принадлежит гиперболическому типу вблизи нижнего основания и эллиптическому типу на верхнем основании цилиндрической области [2]. При этом получена оценка скорости сходимости модифицированного метода Галеркина. Оценка выражается через параметр регуляризации и собственные числа оператора Лапласа по пространственным переменным. Работа является продолжением статьи [3].

Литература

5. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 6, С. 1098-1105.
6. Егоров И.Е., Тихонова И.М. Применение стационарного метода Галеркина к уравнению смешанного типа // Математические заметки ЯГУ. 2012, Т. 19, вып. 2, С. 20-28.
7. Егоров И.Е., Тихонова И.М. Применение модифицированного метода Галеркина к уравнению смешанного типа // Математические заметки СВФУ. 2014, № 4.

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ НЕВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА

SOLUTION OF DIRICHLET PROBLEM FOR A NONDEGENERATE ELLIPTIC SYSTEM, DEPENDING ON A PARAMETER

Токибетов Ж.А., Абдурахитова Г.Е.

*Казахский Национальный университет имени аль-Фараби,
Казахстан, Алматы*

*Казахский Национальный университет имени аль-Фараби,
Казахстан, Алматы
gulzhan_ae@mail.ru*

Данная работа посвящена к построению решения задачи Дирихле встречающаяся при изучении гомотопической классификации эллиптических систем, зависящих от параметра [1]:

$$-\Delta u_j + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

Эта система при $\lambda = 1$ вырождается, при $\lambda > 1$ она является сильно связанной [2], а при $\lambda < 1$ она сильно эллиптична [3]. Построим сначала общее решение системы (1) в круге $D \equiv \{z \mid |z| < 1\}$. Вводя в рассмотрение комплексную функцию $w = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ и комплексные дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{перепишем систему}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + k \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z \partial \bar{z}} = 0, \quad k = \frac{\lambda - 2}{\lambda}. \quad (2)$$

Здесь следует отметить, что k -действительный параметр, если он был бы комплексный, то как в [4] с помощью преобразования $w = w_1 e^{i \arg \varphi}$, $z = z_1 e^{i \arg \phi}$, не изменяя систему (2) k можно сделать действительным. Из системы (2)

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + k \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \Phi'(z)(1 - k^2),$$

где $\Phi(z)$ -аналитическая функция класса $C^{1,h}(\bar{D})$, отсюда при $k \neq 1$ после некоторого преобразования, получим общее решение системы (2) из класса $C^{1,h}(\bar{D})$, $0 < h < 1$, представленное с помощью двух произвольных аналитических функций $\Phi(z)$ и $\psi(z)$ из класса $C^{1,h}(\bar{D})$:

$$w(z) = \left(|z|^2 - 1 \right) \Phi' + \bar{z} \Phi - k \bar{z} \bar{\Phi}(z) + \psi(z) \in C^{2,h}(D). \quad (3)$$

Представление (3) решений системы (2) используем для построения решения задачи Дирихле в круге для этой системы. т.е. теперь будем искать решение системы

(2) в случае , когда область D , где рассматривается система, есть круг $|z| \leq 1$ и когда на его границе $\Gamma \equiv \{z| -1\}$ заданы граничные условия

$$\operatorname{Re} w = f_1(x, y), \quad \operatorname{Im} w = f_2(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (4)$$

Теорема. Общее решение системы (2) класса $C^{2,h}(D)$ в круге $D \equiv \{z| < 1\}$ при $k \neq 0,1$ представляется формулой (3) и решение задачи Дирихле (4) для этой системы определяется формулой (3), а аналитические функции $\Phi(z)$, $\psi(z)$ определяется формулами

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2k\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\sigma) d\sigma}{e^{i\sigma} + z},$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\sigma) \frac{z}{e^{i\sigma} + z} d\sigma - \frac{1}{2k\pi i} \int_{\Gamma} f(\sigma) \frac{d\sigma}{e^{i\sigma} + z}.$$

Литература

1. Янушаускас А.И. Задача с наклонной производной теории потенциалов. Новосибирск СО «Наука» 1986, 262С.
2. Нгуен Тхыа Хол. Задача Дирихле для сильносвязанных систем эллиптического типа. // ДАН СССР, 1966, Т.171, №2.
3. Вишик М.И. О сильно эмпирических систем дифференциальных уравнений. // Мат.сб. 1951, Т.29, №3, 61-76.
4. Токибетов Ж.А. О формуле Помпею для обобщенной аналитической функции // Мат.заметки, 1972, Т.11, вып.3.

УДК 517.925.54+517.929

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ* ON PROPERTIES OF SOLUTIONS TO ONE SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGH DIMENSION

Уварова И.А.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
sibirochka@ngs.ru

Работа посвящена изучению связей между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом. Ранее (см., например, [1, 2] и обзорную статью [3]) были указаны широкие классы систем

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t, x), \quad n \gg 1,$$

для которых нахождение приближенного решения можно свести к решению скалярного уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)). \quad (1)$$

В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений вида

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-31528).

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g(t, x_n) - \frac{n}{\tau} \varphi_1(x) x_1, \\ \frac{dx_j}{dt} &= \frac{n}{\tau} \varphi_{j-1}(x) x_{j-1} - \frac{n}{\tau} \varphi_j(x) x_j, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{n}{\tau} \varphi_{n-1}(x) x_{n-1} - \theta x_n,\end{aligned}\tag{2}$$

где $\tau > 0$, $\theta \geq 0$, $g(t, u)$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по u . Системы такого вида возникают при моделировании многостадийного синтеза вещества. Опираясь на методы, предложенные Г.В. Демиденко, мы указываем условия на функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n-1$, при которых последняя компонента $x_n(t)$ решения системы (2) при $n \gg 1$ является приближенным решением уравнения (1) [4].

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г.В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Демиденко Г.В., Лихошвай В.А., Котова Т.В., Хропова Ю.Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58-68.
2. Демиденко Г.В. Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1274-1282.
3. Демиденко Г.В. О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Математический форум. 2011. Т. 5. С. 45-56.
4. Уварова И.А. О свойствах решений одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Вестник НГУ. Сер.: Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, № 2. С. 88-97.

УДК 517.958, 517.986.7

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА–ЖЕЛТОВА–КОЧИНОЙ*

EXPLICIT FORM OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE BARENBLATT–ZHELTOV–KOSCHINA EQUATION

Умаров Х.Г.

Чеченский государственный университет
364907, Грозный, ул. Шерипова, 32
umarov50@mail.ru

Исследование течения однородной слабосжимаемой жидкости в трещиновато-пористых средах приводит [1, гл. 3, § 4] к дифференциальному уравнению в частных производных третьего порядка (модель двойной пористости Баренблатта–Желтова–Кочиной)

$$u_t - \omega(u_{xxt} + u_{yyt} + u_{zzt}) = \chi(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),\tag{1}$$

где ω и χ – положительные постоянные, зависящие от геометрических характеристик пласта (в частности, имеет место линейная зависимость ω и χ от проницаемости k) и

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422-а.

свойств фильтрующей жидкости.

Трещины в горных породах в подавляющем большинстве расположены не хаотично, а по определенным системам, каждая из которых ориентирована в пространстве. К параметрам горного пласта, существенно влияющим на фильтрационный поток, относится ориентация трещин в пространстве, порождающая анизотропию горного пласта и являющаяся специфической характеристикой нефтяного коллектора. В горных пластах распространена анизотропия связанная или с естественной слоистостью осадочных пород, или с развитой системой параллельных микротрещин, вызванных напряжениями в горной породе. При этом если пласт характеризуется ярко выраженной анизотропией трещиноватой среды, то это порождает существенную неоднородность пласта по проницаемости. Так, например, в грозненских нижнемеловых залежах отмечается ярко выраженное вертикальное направление трещиноватости, которое порождает значительную неоднородность пласта по проницаемости, поэтому фильтрационный поток в основном осуществляется [2, с. 85] «снизу – вверх».

Для анизотропных пластов с выраженными горизонтальным и вертикальным направлениями трещиноватости, модельное представление фильтрации Баренблатта–Желтова–Кочинной принимает вид [1]

$$u_t - \omega(u_{xxt} + u_{yyt}) - \omega_0 u_{zzt} = \chi(u_{xx} + u_{yy}) + \chi_0 u_{zz}, \quad (2)$$

причем, в зависимости от направления трещиноватости, одни коэффициенты уравнения существенно меньше других.

Если направление трещиноватости вертикальное, то, пренебрегая изменением фильтрационного потока в «горизонтальном» направлении (слагаемым $\omega(u_{xxt} + u_{yyt})$), от уравнения (2) переходим к математической модели фильтрации в анизотропной трещиновато-пористой среде, в которой фильтрационный поток в основном осуществляется «снизу – вверх»:

$$u_t - \omega_0 u_{zzt} - \chi_0 u_{zz} = \chi(u_{xx} + u_{yy}), \quad (3)$$

в этом случае в «горизонтальном» направлении происходит [1, с. 109] беспрепятственный обмен жидкостью между блоками и трещинами.

Если же направление трещиноватости горизонтальное, то, пренебрегая в (2) изменением фильтрационного потока в «вертикальном» направлении (слагаемым $\omega_0 u_{zzt}$), приходим к математической модели фильтрации в анизотропной трещиновато-пористой среде, в которой направление фильтрационного потока в основном «горизонтальное»:

$$u_t - \omega(u_{xxt} + u_{yyt}) - \chi(u_{xx} + u_{yy}) = \chi_0 u_{zz}. \quad (4)$$

В этом случае в «горизонтальном» направлении рассматриваемая среда не будет по своему макроскопическому поведению отличаться [3] от обычной пористой среды, что соответствует уменьшению размеров блоков и возрастанию плотности трещиноватости [4] в «горизонтальном» направлении.

В докладе исследуются математические модели нестационарной фильтрации в изотропных и, с ярко выраженной вертикальной или горизонтальной проницаемостью, анизотропных трещиновато-пористых средах с нахождением в явном виде решения задачи Коши для уравнений (1), (3), (4).

Литература

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. – 211 с.
2. Майдебор В.Н. Особенности разработки нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. М.: Недра, 1980. – 288 с.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / Отв. ред. П.Я. Кочина. – М.: Наука, 1969. – 545 с.

4. Ромм Е.С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. – М.: Недра, 1966. – 284 с.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО- ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА **PROBLEMS WITH THE INTEGRAL CONDITION FOR THE PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH THE NONCHARACTERISTIC LINE OF THE MODIFICATION OF TYPE**

Уринов А.К.*, Маманазаров А.О.**

**Ферганский государственный университет, Узбекистан, Фергана,*
urinovak@mail.ru;

***Ферганский государственный университет, Узбекистан, Фергана,*
mamanazarovaz@mail.ru.

В настоящее время расширяется круг рассматриваемых задач с неклассическим краевым условием для дифференциальных уравнений в частных производных. Если вначале рассматривались задачи со смещением, задачи типа Бицадзе-Самарского и некоторые их обобщения, то в последнее время ставятся и исследуются задачи с интегральным условием. По постановке и методам исследования задач с интегральным условием, а также по их практической значимости публиковался ряд научных статей, среди которых следует отметить работы И. Коннона, Н.И. Ионкина, Н.И. Камынина, А.М. Нахушева, А.И. Кожанова, Л.С. Пулькиной и др. В настоящей работе сформулированы и исследованы две неклассические задачи с интегральным условием для следующего модельного уравнения смешанного типа

$$u_{xx} - \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign} x)u_{tt} - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} x)u_t = 0. \quad (1)$$

Пусть $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2$, $D_0 = \{(x, t) : x = 0, 0 < t < T\}$, $D_1 = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, $D_2 = \{(x, t) : -x < t < T + x, (-T/2) < x < 0\}$, а $l = \operatorname{const} > 0$, $T = \operatorname{const} > 0$. Уравнение (1) в области D относится к парабола-гиперболическому типу, причем отрезок D_0 является линией изменения типа уравнения и он не является характеристикой.

Задача 1. Найти функцию $u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_1) \cap C^2(D_2)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $D \setminus D_0$, условию склеивания $\lim_{x \rightarrow 0} u_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow +0} u_x(x, t)$, $t \in (0, T)$ и краевым условиям $u(x, 0) = \varphi_0(x)$, $x \in [0, l]$;

$$\int_0^l u(x, t) dx = \int_0^t q(\eta) u(l, \eta) d\eta + \varphi_1(t), \quad t \in [0, T]; \quad (2)$$

$$\alpha(t) \frac{d}{dt} u\left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) + \beta(t) \frac{d}{dt} u\left(\frac{t-T}{2}, \frac{t+T}{2}\right) = \gamma(t), \quad t \in (0, T),$$

где $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $q(t)$ - заданные непрерывные функции, причем

$$\alpha^2(t) + \beta^2(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]; \quad \int_0^l \varphi_0(x) dx = \varphi_1(0).$$

Задача 2. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям задачи 1, когда (2) заменено интегральным условием $\int_0^l u(x, t) dx = u(l, t) + \varphi_1(t), \quad t \in [0, T]$, причем

$$\alpha^2(t) + \beta^2(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]; \quad \int_0^l \varphi_0(x) dx = \varphi_0(l) + \varphi_1(0).$$

Доказано, что справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $\varphi_0(x) \in C^1[0, l] \cap C^3(0, l)$, $\varphi_0''(x) \in L[0, l]$; $\varphi_1(t) \in C^1[0, T] \cap C^3(0, T)$, $\varphi_1''(t) \in L[0, T]$, $\varphi_1'(0) - \varphi_0'(l) + \varphi_0'(0) + \varphi_0(0)q(0) = 0$ и выполнена одна из следующих групп условий:

- I. $\alpha(t) - \beta(t) \equiv 0, t \in [0, T]; \quad \alpha(t), \beta(t) \in C^1[0, T]; \quad \gamma(t) \in C^1(0, T) \cap L_2[0, T];$
- II. $\alpha(t) + \beta(t) \equiv 0, t \in [0, T]; \quad \alpha(t), \beta(t) \in C^2[0, T], \quad \gamma(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T),$
 $\gamma'(t) \in L[0, T], \quad \varphi_0'(0) - 2\gamma(0)[\beta(0) - \alpha(0)]^{-1} = 0;$
- III. $\alpha(t) \mp \beta(t) \neq 0, t \in [0, T]; \quad \alpha(t), \beta(t) \in C^1[0, T], \quad \gamma(t) \in C^1(0, T) \cap L_2[0, T].$

Тогда задача 1 имеет единственное решение.

Теорема 2. Пусть $\varphi_1(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T)$, $\varphi_1'(t) \in L_2[0, T]$ и выполнена одна из следующих групп условий:

- I. $\alpha(t) - \beta(t) \equiv 0, t \in [0, T]; \quad \alpha(t), \beta(t) \in C^1[0, T], \quad \gamma(t) \in C^1(0, T) \cap L_2[0, T],$
 $\varphi_0(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l), \quad \varphi_0'(x) \in L_2[0, l];$
- II. $\alpha(t) + \beta(t) \equiv 0, t \in [0, T]; \quad \alpha(t), \beta(t) \in C^2[0, T]; \quad \gamma(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T),$
 $\gamma'(t) \in L[0, T]; \quad \varphi_0(x) \in C^1[0, l] \cap C^3(0, l), \quad \varphi_0''(x) \in L[0, l]; \quad \varphi_0'(0) - 2\gamma(0)[\beta(0) - \alpha(0)]^{-1} = 0;$
- III. $\alpha(t) \mp \beta(t) \neq 0, t \in [0, T]; \quad \alpha(t), \beta(t) \in C^1[0, T]; \quad \gamma(t) \in C^1(0, T) \cap L_2[0, T];$
 $\varphi_0(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l), \quad \varphi_0'(x) \in L_2[0, l].$

Тогда задача 2 имеет единственное решение.

Эти теоремы доказываются с использованием методов принципа экстремума и интегральных уравнений.

О СЛУЧАЯХ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА-ЛЯВА ABOUT CASES UNIQUE SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE BOUSSINESQ-LOVE EQUATION

Уткина Е.А.

Казанский федеральный университет, Россия, Казань
eutkina1@yandex.ru

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$, $p = [0, y_1]$, $q = [0, x_1]$. В настоящей заметке речь идет об уравнении

$$u_{xxuy} - u_{yy} + u_{xx} = 0, \quad (1)$$

известном в литературе как уравнение Буссинеска-Лява [1]. Оно описывает продольные волны в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции.

Задача: Найти функцию $u(x, y) \in C^{2,2}(D) \cap C^{1,0}(D \cup p) \cap C^{0,1}(D \cup q) \cap C^{0,0}(\bar{D})$, являющуюся в D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x_1, y) = 0, \quad u(x, y_1) = 0. \quad (2)$$

Применим к решению поставленной задачи метод разделения переменных. Будем отыскивать решение (1) в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3)$$

С учетом (3) преобразуем (1) к виду:

$$X''(x)Y''(y) + X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0.$$

Отсюда следует, выполнение соотношения

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = 1 - \frac{Y(y)}{Y''(y) + Y(y)}.$$

При этом в полученном соотношении левая часть зависит только от переменного x , а правая – только от y . Это означает, что обе эти части равны некоторой константе

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = 1 - \frac{Y(y)}{Y''(y) + Y(y)} = -\lambda, \quad (4)$$

которую пишем со знаком минус для удобства последующих рассуждений.

Из (4), с учетом условий (2) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами для определения $X(x)$, $Y(y)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(x_1) = 0, \quad (5)$$

$$Y''(y) + \frac{\lambda}{1 + \lambda} Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(y_1) = 0. \quad (6)$$

Решениями (5) являются функции вида $X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{x_1} x$, где A_n – произвольная постоянная, n – произвольное натуральное число, а решения (6) имеют вид $Y_n(y) = B_2 \sin \frac{\pi n}{\sqrt{(\pi n)^2 + (x_1)^2}} y$. При этом из граничных условий следует, что

$y_1 = \frac{k}{n} \sqrt{(\pi n)^2 + (x_1)^2}$, для некоторых фиксированных натуральных $n = n_1$, $k = k_1$. Итак, имеет место

Теорема. Решение задачи (1)-(2) тождественно равно нулю, если $y_1 \neq \frac{k_1}{n_1} \sqrt{(\pi n_1)^2 + (x_1)^2}$, где k_1, n_1 - некоторые фиксированные натуральные числа. В

противном случае $u(x, y) = A \sin \frac{\pi n_1 x}{x_1} \sin \frac{\pi n_1 y}{\sqrt{(\pi n_1)^2 + (x_1)^2}}$.

Отметим, что решение более общего, чем (1) уравнения с неоднородными граничными условиями другим методом рассматривалось автором в [2].

Литература

1. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А.Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка// ДАН СССР.– 1987.– Т.297.– №3.– С.547–552.

2. Уткина Е.А. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка// Дифференциальные уравнения.– 2011.– Т.47.– №4.– С.400–404.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ МЕМБРАНЫ NUMERICAL MODELLING OF DEFORMATION OF THE MEMBRANE

Ушаков А.Л.

Южно-Уральский государственный университет (нигу),
Россия, Челябинск
ushakov_al@inbox.ru

Пусть Ω – прямоугольная область в $\mathbb{R}^2$, Γ_1 – верхняя и правая стороны Ω , а $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$. Рассматривается математическая модель

$$\Delta u_1 = f_1 \text{ в } \Omega, u_1 = 0 \text{ на } \Gamma_1, \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \quad (1)$$

деформации прямоугольной мембраны под действием давления. Здесь f_1 – нагрузка, u_1 – смещение мембраны в Ω , а $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Производится редукция модели (1) к конечно-разностной модели, т.е. к системе линейных алгебраических уравнений

$$\bar{u}_1 \in \mathbb{R}^N : A \bar{u}_1 = \bar{f}_1, \bar{f}_1 \in \mathbb{R}^N. \quad (2)$$

где $\bar{v}_1 \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{1,N})'$, $N = m \cdot n$, $m, n \in \mathbb{N}$, а $v_{1,n(i-1)+j} = v_{1,i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, и $v_{1,i,j}$ являются значениями функции дискретного аргумента соответствующего узлам сетки

$(x_i, y_j) = ((i-0,5)h_1, (j-0,5)h_2)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, шаги сетки $h_1 = b_1 / (m+0,5)$, $h_2 = b_2 / (n+0,5)$, состоящей из указанных выше узлов, а матрица A размерности $N \times N$:

$$A = \nabla_x' \nabla_x + \nabla_y' \nabla_y,$$

где матрицы ∇_x, ∇_y размерности $N \times N$ определяются следующим образом

$$\langle \nabla_x \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-(u_{1,i+1,j} - u_{1,i,j}) h_1^{-1} v_{1,i,j}) h_1 h_2, u_{1,m+1,j} = v_{1,m+1,j} = 0, j = 1, \dots, n,$$

$$\langle \nabla_y \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (- (u_{1,i,j+1} - u_{1,i,j}) h_2^{-1} v_{1,i,j}) h_1 h_2, \quad u_{1,i,n+1} = v_{1,i,n+1} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Производится фиктивное продолжение (2) до модели

$$\vec{\bar{u}} \in \mathbb{R}^{2N} : D\vec{\bar{u}} = \vec{\bar{f}}, \quad \vec{\bar{f}} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad \bar{f}_2 = \bar{0}, \quad (3)$$

где векторы

$$\vec{\bar{v}} \in \mathbb{R}^{2N} : \vec{\bar{v}} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2')',$$

блочная, верхнетреугольная матрица D размерности $2N \times 2N$ такова, что

$$D_{11} = A, \quad D_{12} = -\theta, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = A,$$

а матрица

$$\theta = \nabla_x' \nabla_y - \nabla_y' \nabla_x.$$

Для приближенного решения полученной системы (3) предлагается вычислительная модель, т.е. итерационный процесс

$$\vec{\bar{u}}^k \in \mathbb{R}^{2N} : C(\vec{\bar{u}}^k - \vec{\bar{u}}^{k-1}) = -\tau_k (D\vec{\bar{u}}^{k-1} - \vec{\bar{f}}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \tau_k > 0, \quad \forall \vec{\bar{u}}^0 \in \vec{\bar{W}}_1, \quad (4)$$

где подпространство $\vec{\bar{W}}_1 = \{ \vec{\bar{v}} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2')' : \bar{v}_2 = 0 \}$, блочная матрица C размерности $2N \times 2N$ такова, что

$$C_{11} = A, \quad C_{12} = -\theta, \quad C_{21} = \theta, \quad C_{22} = A.$$

Заметим, что в итерационном процессе из (4) возникают задачи с факторизованным оператором следующего вида

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N : LL^* \bar{U} = \bar{F}, \quad \bar{F} \in \mathbb{C}^N,$$

при этом возможно расщепление на более простые задачи

$$\bar{W} \in \mathbb{C}^N, \quad L\bar{W} = \bar{F}, \quad \bar{F} \in \mathbb{C}^N,$$

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N, \quad L^* \bar{U} = \bar{W}, \quad \bar{W} \in \mathbb{C}^N,$$

где матрицы с комплексной единицей $\dot{e}$:

$$L = \nabla_x' - \dot{e} \nabla_y', \quad L^* = \bar{L}' = \nabla_x + \dot{e} \nabla_y, \quad LL^* = (\nabla_x' - \dot{e} \nabla_y')(\nabla_x + \dot{e} \nabla_y) = A + \dot{e} \theta,$$

В процессе (4) полагается, что $\tau_1 = 1$, если $k > 1$, то для выбора итерационных параметров τ_k применяется метод скорейшего спуска. Теоретически доказывается и экспериментально подтверждается, что для приближённого вычисления $\bar{u}_1$ из (2), (3) по предложенному итерационному процессу (4) требуется $O(N)$ арифметических операций. Для дискретных моделей (2), (3) предложенный численный метод моделирования деформации мембраны, с комплексной факторизацией попеременно-треугольного вида (4), по количеству арифметических операций оптимален.

**АЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ
ДЛЯ СРЕД СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ И СТРОЕНИЯ**
**ANALYTICAL MODELING OF WAVE FIELDS FOR COMPLEX
SUBSURFACE STRUCTURES AND GEOMETRIES**

Фатьянов А.Г.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Россия, Новосибирск
fat@nmsf.ssc.ru*

В работе изложен аналитический метод моделирования сейсмических волновых полей для широкого круга геофизических сред (включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и т.д) на сверхдальние расстояния. Поскольку не используются конечно-разностные аппроксимации, не возникает сеточной дисперсии при расчетах волновых полей для произвольных моделей сред и баз наблюдений.

На основе аналитического метода развит алгоритм моделирования сейсмических волновых полей для значительных пространственно-временных масштабов на “обычных” компьютерах. Это позволило, например, проводить расчеты волновых полей и для источников вибрационного типа, которые характеризуются большими пространственными размерами и длиной записи экспериментальных данных.

Аналитическое представление решения в спектральной области позволяет проводить анализ полного поля по частям, в частности, получать однократные волны. На основе созданной программы расчёта волновых полей проведено моделирование водных волн и сейсмического “звона” на Луне. Объяснено явление монотонного смещения резонанса в область более низких частот с увеличением расстояния регистрации, обнаруженное при экспериментальных работах с вибратором.

**МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО
ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

**MANY DOTS PROBLEM FOR HIGHER ORDER MIXED TYPE
DIFFERENTIAL EQUATION**

Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш.

*Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент;
kudratillo52@mail.ru , zamira_85.05@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} x \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

в области $\Omega = \{-1 < x < 1, x \neq 0, 0 \leq t \leq T\}$.

Задача. Ищется функция $u(x, t)$ удовлетворяющая уравнению (1) в области Ω и следующим условиям:
начальным и внутренним

$$u(x, t_1) = \varphi_1(x), u(x, t_2) = \varphi_2(x), \dots, u(x, t_n) = \varphi_n(x), \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T, \quad (2)$$

граничным

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad (3)$$

а также условиям склеивания

$$u(-0, t) = u(+0, t), \quad u_x(-0, t) = u_x(+0, t). \quad (4)$$

Корректные и некорректные краевые задачи для уравнения четвертого порядка (неклассических уравнений) были рассмотрены в работах А.И.Кожанова, И.Г.Пяткова, К.С.Фаязова, И.О.Хажиева а также для уравнения низкого порядка в работах многих авторов. Внутреннее краевые задачи для уравнения четвертого и более общего порядка рассмотрены в работах Ю.Н.Валицкого, С.Х.Нурметова, Б.И.Пташника и других.

Дискретные задачи, а именно задачи с данными внутри области регулярности решения, были рассмотрены в работах [2], [3]. Многоточечные задачи для абстрактного дифференциального уравнений были изучены в работе М. А.Атаходжаева, О. М. Эгамбердиева [4].

Определение. Под решением задачи понимаем функцию которая удовлетворяет уравнению (1) в Ω , и имеет соответствующие непрерывные производные в области регулярности решения, а также непрерывную в замкнутой $\bar{\Omega}$.

Исследуемая нами задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики. В нашем случае отсутствует непрерывная зависимость решения от данных, а в некоторых случаях даже существования и единственность.

В данной работе нами получено представления решения, условия единственности и существования решения.

Предположим, что выполнены соотношения

$$t_{j+1} - t_j = t_0 > 0, \quad t_1 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Теорема 1. Для единственности решения задачи необходимо и достаточно, чтобы уравнения

$$\sqrt{\mu_k} t_0 = m\pi, \quad (6)$$

не имели решений в целых числах μ_k, m .

Литература

1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984. 53-55 стр.
2. Валицкий Ю.Н. Четырехточечная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. -Функцион. анализ, 1981, 15 вып. 4, с. 69-70.
3. Лаврентьев М.М., Амонов Б. К. Определение решения уравнения диффузии по его значениям на дискретных множествах. //Докл. АН СССР. 1976, Т. 228, №6, с. 1284-1285.
4. Атаходжаев М. А., Эгамбердиев О. М. Задача Коши для абстрактного бикалорического уравнение. Сибирский математический журнал. Т. 31, №4. 1990г. 187-191с.

НЕКОРРЕКТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

THE ILL-POSED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATION OF FOURTH ORDER

Фаязов К.С.*, Хажиев И.О.***, Фаязова З.К.***

* Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
kfayazov@yahoo.com

** Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент
h.ikrom@mail.ru

*** Центр высоких технологий, Узбекистан, Ташкент
z.fayazova@yahoo.com

Пусть $u(t)$ – функция скалярного аргумента t , $0 \leq t \leq T$, со значениями в пространстве Гильберта H .

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Bu_{iiii} = Au, \quad (1)$$

где A – самосопряженный и положительный оператор с плотной в H областью определения $D(A)$; B – самосопряженный оператор, осуществляющий изоморфизм H в H , причем $E^+ + E^- = I$, где E^+, E^- – спектральные проекторы, соответствующие положительной и отрицательной частям спектра оператора B .

Задача Коши. Найти решение уравнения (1) такое, что

$$u^{(i)}|_{t=0} = f_i, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

Для уравнений первого и второго порядка задача исследована в [2].

В случае $B = I$ задача для уравнений первого и второго порядка исследована в [2]. Рассматриваемая нами задача (1), (2) относится к некорректно поставленным задачам математической физики. В данной работе установлена оценка условной устойчивости и построено приближенное решение.

В работе [3] исследовано свойство собственных функций спектральной задачи вида

$$Au = \lambda Bu \quad (3)$$

Пусть $(\cdot, \cdot)$ – скалярного произведения в H . Предположим, что $O \in \rho_A$ – резольвентное множество оператора A и $A^{-1}B$, вполне непрерывен как оператор из H в H . Пусть H^2 компактно вкладывается в H (H^2 – гильбертово пространство с нормой $\|u\| = (Au, Au)$). С помощью метода действительной интерполяции построим пространства $H^s = (H^2, H)_{1-s/2, 2}$.

Отметим, что H^s совпадает с областью определения A^s (см. [3]). Обозначим, через $\mathfrak{Z}(X, Y)$ (X, Y – гильбертовы пространства) пространства линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y . Пусть $U = E^+ - E^-$. Пусть φ_i^+, φ_i^- – собственные функции задачи (3), соответствующие положительным λ_i^+ и отрицательным λ_i^- собственным значениям. Нормируем собственные функции

$$(U\varphi_i^\pm, \varphi_i^\pm) = \pm \delta_{ij},$$

(δ_{ij} – символ Кронекера).

Пусть $s_0 > 0$ такое, что $U \in \mathfrak{Z}(H^{s_0}, H^{s_0})$. В [3] доказано, что собственные функции задачи (3) образуют базис Рисса в H . Тогда имеем

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^+(t) \varphi_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^-(t) \varphi_k^-,$$

где $u_k^{\pm} = \pm(U_k, \varphi_k^{\pm})$,

$$\|u\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (|U_k, \varphi_k^+|^2 + |U_k, \varphi_k^-|^2),$$

причем данная норма в пространстве H эквивалентна исходной.

Под обобщенным решением задачи (1), (2) понимаем функцию, удовлетворяющую следующим условиям $u(t) \in C([0, T]; H)$,

$$\int_0^T (u, Bv_{ttt} + Av) dt = (f_0, Bv_{tt}(0)) + (f_1, Bv_t(0)) + (f_2, Bv_t(0)) + (f_3, Bv(0)).$$

для любой функции $v(t) \in L_2((0, T); H^2)$,

$$v_t, v_{tt}, v_{ttt} \in L_2(0, T; H), V(T) = V_t(T) = V_{tt}(T) = V_{ttt}(T) = 0.$$

Введем обозначение $M = \left\{ u : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^3 \mu_k^{3-j} \left(\frac{d^j u_k^+(T)}{dt^j} \right)^2 + \mu_k^{3-j} \left(\frac{d^j u_k^-(T)}{dt^j} \right)^2 \right) \leq m^2 \right\}$ и пусть

$$\|f_0\|_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 (|f_{0k}^+|^2 + |f_{0k}^-|^2), \quad \|f_1\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 (|f_{1k}^+|^2 + |f_{1k}^-|^2),$$

$$\|f_2\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (|f_{2k}^+|^2 + |f_{2k}^-|^2), \quad \|f_3\|_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (|f_{3k}^+|^2 + |f_{3k}^-|^2),$$

где $\mu_k = \sqrt{|\lambda_k^{\pm}|}$, $\lambda_k^{\pm}$ – собственные значения соответствующие собственным функциям спектральной задачи (3).

Теорема. Пусть операторы A и B удовлетворяет указанным условиям и пусть $u(t) \in M$, $\|f_0 - f_{0\varepsilon}\|_3 \leq \varepsilon$, $\|f_1 - f_{1\varepsilon}\|_2 \leq \varepsilon$, $\|f_2 - f_{2\varepsilon}\|_1 \leq \varepsilon$, $\|f_3 - f_{3\varepsilon}\|_0 \leq \varepsilon$, тогда для любого решения задачи (1), (2) при $t \in (0, T)$ имеет место неравенство

$$\|u(t)\|_0^2 \leq \omega^2(\varepsilon, m),$$

$$\text{где } \omega(\varepsilon, m) = \inf_t \left\{ \left(2(8\varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}} (m^2 + s)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)} + s \right)^{1/2} \right\}.$$

Литература

1. Levine H. A. Logarithmic Convexity and the Cauchy Problem for some Abstract Second order Differential Inequalities. // J. of Dif. Equations 1970, v.8, pp. 34-55.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
3. Пятков С.Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. - Новосибирск, 1986. - С. 65-84.

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА
ОПЕРАТОРОВ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА***

**ANALYTIC RESOLVING OPERATORS FAMILIES OF FRACTIONAL
ORDER DEGENERATE EVOLUTION EQUATIONS***

Федоров В.Е.*, Романова Е.А.**

** Челябинский государственный университет, Россия, Челябинск*
kar@csu.ru

*** Челябинский государственный университет, Россия, Челябинск*
linux_21@mail.ru

Исследована разрешимость класса линейных однородных уравнений в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной Капуто произвольного порядка [1, 2]. Найдены условия, обобщающие для случая уравнения первого порядка условие относительной секториальности для пары операторов в уравнении, при которых построено аналитическое разрешающее семейство операторов уравнения. Полученные результаты проиллюстрированы на примере начально-краевой задачи для уравнения с вырожденным дифференциальным по пространственным переменным оператором при дробной производной по времени.

Литература

1. Федоров В.Е., Дебуш А. Один класс вырожденных дробных эволюционных систем в банаховых пространствах // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 12. С. 1616-1622.
2. Федоров В.Е., Гордиевских Д.М. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 71-83.

* Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант Правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

A SUFFICIENT CONDITION OF SOLUTIONS EXISTENCE FOR INFINITE SYSTEMS OF ALGEBRAIC EQUATIONS

Федоров Ф. М.

*Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного
федерального университета им. М.К. Аммосова, Россия, Якутск*

foma_46@mail.ru

Приложение линейных дифференциальных уравнений в частных производных для решения различных практических задач привело к мысли изучать бесконечные системы алгебраических уравнений. В настоящее время эти системы возникают при решении многих задач математического моделирования, в частности, при изучении различных задач волноводов, задач электростатики, дифракции, граничных задач статической теории упругости и многие задачи естествознания, техники, а также самой математики. Вместе с тем вполне приемлемая для практики теория бесконечных систем в настоящее время разработана в основном только для частных видов систем, таких как регулярные (вполне регулярные, квазирегулярные), системы с разностными индексами, дискретные уравнения Винера-Хопфа. Можно также отметить периодические системы, сравнительно недавно открытые нами как обобщение систем с разностными индексами. Для регулярных систем существенную роль играет существование мажорантной системы, имеющая простое решение. Само решение в основном ищется методом последовательных приближений. Системы с разностными индексами, а также дискретные уравнения Винера-Хопфа относятся к уравнениям в свертках и для их решения применяются проекционные методы, методы вычетов и полуобращения. Тем не менее, в последние годы нами разработан новый подход к изучению бесконечных систем с общей позиции [1-3], который реализован на практике [4].

В наших ранних работах в основном изучались совместные системы с бесконечным определителем, отличным от нуля, а также были найдены некоторые необходимые условия их несовместности. В настоящей работе найдены достаточные условия существования решения бесконечных систем с отличным от нуля определителем. Эти условия обоснуют алгоритмы практического решения [4] произвольных бесконечных систем с ненулевым определителем. Определяющую роль в наших исследованиях играет обобщение преобразования (алгоритма) Гаусса [1]. Именно этот способ позволяет точно решать урезанную от бесконечной системы конечную систему любого порядка n [2,3]. Таким образом, если определитель общей системы отличен от нуля, то вместе общей системы можем рассмотреть гауссову систему, при этом не нарушая общности можно считать, что бесконечный определитель равен 1. Вводится специальный двойной ряд, подобно в теории нормальных систем [5]. Определителем Крамера назовем определитель гауссовой системы в котором j -й столбец заменен столбцом свободных членов гауссовой системы. Получены:

Теорема 1. *Если повторные ряды по строкам и столбцам специального двойного ряда существуют и равны между собой, то определитель Крамера является решением исходной гауссовой системы.*

* Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047)

Теорема 2. Если специальный двойной ряд сходится, то определитель Крамера является решением исходной гауссовой системы.

Литература

1. Федоров Ф.М. Об алгоритме Гаусса для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 1. С. 133 - 140.
2. Федоров Ф.М. Неоднородные гауссовы бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 1. С. 124 - 131.
3. Федоров Ф.М., Иванова О.Ф., Павлов Н.Н. Сходимость метода редукции и совместность бесконечных систем // Вестник СВФУ. 2014. Т. 11, № 2, С. 14 - 21.
4. Федоров Ф.М., Павлов Н.Н., Иванова О.Ф. Алгоритмы реализации решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. Заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, в. 1. С. 215 -223.
5. Каган В.Ф. Основания теории определителей. Киев: Гос. Изд. Укр. 1922.

УДК 517.956

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА*

GALERKIN'S METHOD FOR MIXED TYPE EQUATION*

Федоров В.Е., Тихонова И.М.

*НИИ математики Северо-Восточного федерального университета
имени М.К. Аммосова, Россия, Якутск
vefedorov58@mail.ru*

В настоящем докладе рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка с произвольным многообразием изменения типа, которая отличается от задач В.Н.Врагова [1] и А.Н.Терехова [2]. Ранее авторами в работе [3] при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения было доказано существование единственного регулярного решения в пространстве Соболева. При этом использовалась методика исследований, разработанная для уравнений смешанного типа высокого порядка [4]: нестационарный метод Галеркина в сочетании с методом регуляризации. С помощью срезающих функций устанавливались априорные оценки для приближенных решений, которые позволяли доказать гладкость точного решения задачи в строго внутренней подобласти цилиндрической области, за исключением некоторых окрестностей нижнего и верхнего оснований цилиндра, где гладкость решения задачи следует из эллиптичности уравнения вблизи оснований цилиндра.

В настоящей работе для указанной задачи применяется модифицированный метод Галеркина [5]. При построении приближенных решений в качестве базисных функций выбираются собственные функции задачи Дирихле для уравнения Лапласа по переменным x из R^n . Априорные оценки для приближенных решений устанавливаются сразу во всей области в целом, что существенно упрощает доказательство однозначной регулярной разрешимости задачи. Получена оценка погрешности приближенных решений относительно точного решения через параметр регуляризации и собственные числа задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Далее авторами планируется применение для данной задачи стацио-

* Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России на 2014-2016 гг. (проект №3047)

нарного метода Галеркина (без привлечения метода регуляризации) с оценкой скорости сходимости приближенных решений к точному решению задачи.

Литература

1. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, №6. С. 1098-1105.
2. Терехов А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 1979. С. 128-136.
3. Тихонова И.М., Федоров В.Е. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго порядка // Математические заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, №2. С. 109-117.
4. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. 133 с.
5. Егоров И.Е., Тихонова И.М. Применение модифицированного метода Галеркина к уравнению смешанного типа // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21, №4.

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

ON A PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION FOR PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH A SMOOTH LINE CHANGE TYPE

Хайдаров И.У.*

* Ферганский государственный университет, Узбекистан, Фергана,
ibrohimbek@mail.ru

Рассмотрим параболо-гиперболическое уравнение

$$0 = L_{\lambda} u \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1^2 u, & x, y \in \Omega_0, \\ u_{xx} \operatorname{sign} y + u_{yy} \operatorname{sign} x - \lambda_2^2 u \operatorname{sign} x + y, & x, y \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_1^* \cup \Omega_2^*, \end{cases} \quad (1)$$

где λ_1, λ_2 – заданные действительные числа, $\Omega_0 = (x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1$, $\Omega_1 = (x, y): -y < x < 1+y, (-1/2) < y < 0$, $\Omega_2 = (x, y): -x < y < 1+x, (-1/2) < x < 0$, а Ω_1^* и Ω_2^* – области, симметричные областям Ω_1 и Ω_2 соответственно относительно прямой $x+y=0$.

Пусть $O(0,0), A(1,0), B(0,1), A^*(0,-1), B^*(-1,0), C(1/2,-1/2), D(-1/2,1/2), A_0(1,1)$, а $OA(OB^*), OB(OA^*), OC(OD), AA_0$ – отрезки прямых $y=0, x=0, x+y=0, x=1$ соответственно; $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_1^* \cup \Omega_2^* \cup OA \cup OB \cup OC \cup OD$.

Краевые задачи для уравнения $L_{\lambda} u = 0$ в области $\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup OA$ исследованы в [1,2,3], а в областях $\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup OA \cup OB$ – в [4]. Краевые задачи для уравнения $L_{\lambda} u = 0$ в области Ω впервые поставлены и исследованы в [5].

Задача I. Найти функцию $u(x, y)$, которая:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup OA^* \cup OB^*) \setminus (OC \cup OD) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega_0) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_1^* \cup \Omega_2^*)$;
- 2) удовлетворяет уравнению $L_{\lambda} u = 0$ в областях $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_1^*, \Omega_2^*$;
- 3) удовлетворяет условиям

$$u(1, y) = \int_0^1 u(x, y) dx + \mu(y), \quad (1, y) \in \overline{A_1 A_0}; \quad (2)$$

$$u(0, y) = f_1(y), \quad (0, y) \in \overline{B_2 O}; \quad u_x(0, y) = k \cdot u(0, -y) + f_2(y), \quad (0, y) \in B_2 O; \quad (3)$$

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad (x, 0) \in \overline{A_2 O}; \quad u_y(x, 0) = k \cdot u_y(-x, 0) + g_2(x), \quad (x, y) \in A_2 O. \quad (4)$$

Здесь $\mu(y)$, $f_j(y)$, $g_j(x)$ ($j=1,2$) - заданные функции, причем $\mu(y) \in C^1[0,1]$; $f_1(t)$, $g_1(t) \in C[-1,0] \cap C^2(-1,0)$ и $f_1(0) = g_1(0)$; $f_2(t), g_2(t) \in C^1(-1,0)$ и $f_1' t$, $g_1' t$, $f_2 t$, $g_2 t$ - ограничены при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow -1$.

Пусть $u(x, y)$ - решение задачи I. Введем обозначения: $u_x(0) = \tau_1 x$, $0 \leq x \leq 1$, $u_y(0) = \tau_2 y$, $0 \leq y \leq 1$, $u_x(x, 0) = \nu_1 x$, $0 < x < 1$, $u_x(0, y) = \nu_2 y$, $0 < y < 1$.

Пользуясь условиями (3) - (4), формулами, которые определяют решения задачи Коши для уравнения $L_\lambda u = 0$ в областях Ω_j , Ω_j^* ($j=1,2$) [6], и непрерывностью решения $u(x, y)$ при переходе через линии $x+y=0$, нетрудно убедиться, что задача I эквивалентна следующей задаче в области Ω_0 : найти регулярное в области Ω_0 решение $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_0 \cup OA \cup OB)$ уравнения

$$u_{xx} - u_y - \lambda_1^2 u = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad (5)$$

удовлетворяющее условиям (2) и

$$\tau_2 x = k \cdot \tau_1 x + \Phi_1 x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (6)$$

$$\nu_1 x + k \cdot \nu_2 x = -f_2 - x + C_{0x}^{0, \lambda_2} [\tau_1 x - f_1 - x], \quad 0 < x < 1, \quad (7)$$

где $J_s(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка s ,

$$\Phi_1 x = g_1 - x - k \cdot f_1 - x + \int_0^x [g_2 - t - f_2 - t] J_0[\lambda_2 x - t] dt,$$

$$C_{mx}^{0, \lambda} p(x) \equiv \text{sign}(x-m) \left\{ \frac{d}{dx} p(x) + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_m^x p(t) \bar{J}_1 \lambda_2(x-t) dt \right\}, \quad m \in [0,1];$$

$$\bar{J}_1(z) = (2/z) J_1(z).$$

Равенства (6) и (7) являются основными функциональными соотношениями между $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$, получаемыми из того условия, что решение задачи I в области гиперболичности уравнения (1) должно удовлетворить условиям (3) - (4).

Теорема. Если выполнено неравенство, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \neq 0$, то задача I не может иметь более одного решения.

Единственность решения задачи I доказана методом принципа экстремума.

Пользуясь задачей I в Ω [1] и Дирихле в Ω_0 для уравнения $L_\lambda u = 0$, методом интегральных уравнений можно доказать и существование решения задачи I.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболического типа. Ташкент. Фан. 1986. 220 с.

2. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного парабола-гиперболического типа со спектральным параметром// Дифференциальные уравнения. 1988, Т.ХХIV, –С.117-126.
3. Каримов Э.Т. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа со спектральным параметром. Автореф. канд. дисс. Ташкент. 2006. 19 с.
4. Эгамбердиев У. Краевые задачи для смешанного парабола-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа. Автореф. канд. дисс. Ташкент. 1984. 17 с.
5. Хайдаров И.У. Краевые задачи для парабола-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа: Дисс.... канд. физ. -мат. наук. –Ташкент, 2011. -120 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1977. 737с.

УДК 532:536

ОЦЕНКА ДЕБИТА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ В ЭЛЕМЕНТЕ РАЗРАБОТКИ БИТУМИНОЗНОЙ ЗАЛЕЖИ МЕТОДОМ ПАРОГРАВИТАЦИОННОГО ДРЕНИРОВАНИЯ*

EVALUATION HORIZONTAL WELL PRODUCTIVITY IN THE ELEMENTS OF DEVELOPING BITUMINOUS DEPOSIT BY THE STEAM ASSISTED GRAVITY DRAINAGE METHOD

Хайруллин М.Х., Морозов П.Е., Шамсиев М.Н., Абдуллин А.И.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра
Российской академии наук, Россия, Казань
morozov@imm.knc.ru*

Одним из эффективных способов разработки залежей высоковязких нефтей и природных битумов является технология парогравитационного дренирования SAGD (steam-assisted gravity drainage). В этой технологии используются две горизонтальные скважины (ГС), которые бурятся параллельно вблизи подошвы пласта на расстоянии 5-10 метров одна над другой [1]. Верхняя горизонтальная скважина используется для нагнетания пара и создания в пласте высокотемпературной паровой камеры, а нижняя скважина – для добычи нефти. В данной работе предложена аналитическая модель для расчета дебита горизонтальной скважины при разработке залежи сверхвязкой нефти методом парогравитационного дренирования.

Экспериментальные исследования на физической модели показали, что можно выделить три основные стадии процесса SAGD. На начальной стадии пар, имеющий относительно низкую плотность, поднимается вверх и происходит рост паровой камеры до кровли пласта. После того, как паровая камера достигает кровли пласта, она продолжает расширяться в горизонтальном направлении. На заключительной стадии происходит расширение паровой камеры в направлении подошвы пласта.

Предположим, что расстояние между парами ГС составляет $2M$ и движущаяся граница паровой камеры остается прямолинейной. Формулы для расчета дебита нефти q добывающей ГС в ограниченном пласте имеют следующий вид:

I. Для периода роста паровой камеры:

* Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект № МК-7380.2015.1) и РФФИ (проект №14-05-00861).

$$q(t) = 3L \left(\frac{kg\alpha}{mv_s} \right)^{\frac{2}{3}} (\phi \Delta S_0)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}}, \quad 0 \leq t \leq t_*, \quad (1)$$

где $t_* = \frac{8H}{27} \left(\frac{1}{2a} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\phi \Delta S_0 mv_s H}{kg\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$ – время, за которое паровая камера достигает кровли

пласта, $W_s^* = \frac{9}{2H} \left(\frac{kg\alpha}{\phi \Delta S_0 mv_s} \right)^{\frac{2}{3}} t_*^{\frac{4}{3}}$ – ширина паровой камеры.

II. Для периода расширения паровой камеры в горизонтальном направлении:

$$q(t) = 2L \left(\frac{\phi \Delta S_0 kg\alpha H}{2amv_s} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t_* \leq t \leq t_* + T_M, \quad (2)$$

где $T_M = (M - W_s^*) \left(\frac{\phi \Delta S_0 amv_s H}{2kg\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$ – время достижения паровой камерой боковой границы пласта (время начала смыкания паровой камеры с соседними паровыми камерами).

III. Для периода расширения паровой камеры в направлении подошвы пласта:

$$q(t) = 2L \left(\frac{\phi \Delta S_0 kg\alpha H}{2amv_s} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{kg\alpha L}{2amv_s M} (t - t_* - T_M), \quad t_* + T_M \leq t \leq t_* + T_M + T^*, \quad (3)$$

где $T^* = 2M \left(\frac{\phi \Delta S_0 amv_s H}{2kg\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$, а $t_* + T_M + T^*$ – время, за которое паровая камера достигает подошвы пласта (время полной выработки пласта).

Здесь k – эффективная проницаемость пласта, H – эффективная толщина пласта, L – длина ГС, ΔS_0 – разность начальной и конечной нефтенасыщенности, ϕ – пористость, α – температуропроводность, v_s – кинематическая вязкость нефти при температуре закачиваемого пара, g – ускорение свободного падения, m – безразмерный параметр, a – эмпирическая константа, равная 0.4 [2], $T_M = M \sqrt{\frac{\phi \Delta S_0 amv_s H}{2kg\alpha}}$ – время, за которое граница паровой камеры достигает боковой границы пласта. Суммарный объем отобранной нефти по формулам (1)-(3) равен $\phi \Delta S_0 V$, где $V = MHL$ – объем пласта.

Сравнение с результатами экспериментов на физической модели показало, что предложенная модель адекватно описывает процесс SAGD [2] и позволяет исследовать влияние фильтрационно-емкостных параметров пласта и плотности сетки скважин на производительность горизонтальной скважины при парогравитационном дренировании.

Литература

1. Butler R.M. Thermal recovery of oil and bitumen. New Jersey: Prentice Hall, 1991. 528 p.
2. Хайруллин М.Х., Морозов П.Е., Шамсиев М.Н., Абдуллин А.И. Оценка дебита горизонтальной скважины при разработке залежи сверхвязкой нефти методом парогравитационного дренирования // ИФЖ, 2014. Т. 87. № 4. С. 865 - 870.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ И УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ПАРАБОЛО- ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ *

NON LOCAL PROBLEM WITH THE INTEGRAL CONDITION AND THE CONDITION BITSADZE-SAMARSKII FOR THE PARABOLIC- HYPERBOLIC EQUATION

Халилов К.С. *, Солиев И.С. **

* Ферганский государственный университет, Узбекистан, Фергана,
xalilov_q@mail.ru

** Ферганский государственный университет, Узбекистан, Фергана,
ilxom_2190@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$2u_{xx} - (1 - \text{sign} y)u_{yy} - (1 + \text{sign} y)u_y - 2\mu(y)u = 0, \quad (1)$$

в области $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2$, где $D_0 = \{(x, y) : y = 0, 0 < x < 1\}$,
 $D_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) : -y < x < 1 + y, (-1/2) < y < 0\}$, а $\mu(y)$ - задан-
ная кусочно-постоянная функция, причем $\mu(y) = \lambda_1^2$ при $y \geq 0$, $\mu(y) = -\lambda_2^2$, при $y < 0$,
 $\lambda_1 \in R$, а $\lambda_2 \in R$ или чисто мнимое число.

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу с интегральным услови-
ем в области D_1 и условием Бицадзе-Самарского в области D_2 .

Задача. Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1) \cap C^2(D_2)$, удовлетворяющую урав-
нению (1) в областях D_1 , D_2 и условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (2)$$

$$\int_0^1 u(x, y) dx = \int_0^y u(1, t) dt + \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (3)$$

$$A_{0x}^{1, \lambda_2} \left[\frac{d}{dx} u \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2} \right) \right] = a(x) \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) + b(x), \quad 0 < x < (1/2); \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1,$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a(x)$, $b(x)$ - заданные непрерывные функции, причем
 $a(x) \neq 0$, $x \in [0, 1]$, а A_{0x}^{1, λ_2} - оператор, действующий по формуле [1]

$$A_{0x}^{1, \lambda} [f(x)] \equiv f(x) - \int_0^x f(t) \frac{t}{x} \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\lambda \sqrt{x(x-t)} \right] dt$$

$J_s(z)$ - функция Бесселя первого рода порядка s .

В данной работе доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

Пусть $u(x, y)$ - решение задачи. Примем обозначения:

* Работа выполнена при финансовой поддержке РУз Ф-4-59

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = \nu(x), \quad 0 < x < 1$$

и предположения $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\nu(x) \in C^1(0, 1) \cap L[0, 1]$.

Пользуясь введенным обозначением, условием (4) и решением задачи Коши для уравнения $u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2^2 u = 0$, как и в работе [1], находим

$$a_2(x)\nu(x) = C_{0x}^{0, \lambda_2} [\tau(x)] - 2b(x), \quad x \in (0, 1), \quad (5)$$

$$\text{где } C_{0x}^{0, \lambda_2} [f(x)] \equiv f'(x) + \frac{1}{2} \lambda_2^2 \int_0^x f(t) \bar{J}_1[\lambda_2(x-t)] dt, \quad \bar{J}_1(z) = (2/z) J_1(z).$$

Из уравнения (1) и краевых условий (2), (3) при $y \rightarrow +0$ следует соотношения

$$\tau''(x) - \lambda_1^2 \tau(x) = \nu(x), \quad 0 < x < 1; \quad (6)$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \int_0^1 \tau(x) dx = \varphi_2(0). \quad (7)$$

Подставляя (5) в (6), имеем интегро-дифференциальное уравнение относительно $\tau(x)$:

$$\tau''(x) - \lambda_1^2 \tau(x) = a_2^{-1}(x) \{ C_{0x}^{0, \lambda_2} [\tau(x)] - 2b(x) \}, \quad x \in (0, 1), \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть $a(x) \in C[0, 1]$, $b(x) \in C^1(0, 1)$, $b'(x) \in L[0, 1]$. Тогда, если $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| > 0$, $a(x) > (-1/2)$, $x \in [0, 1]$ или $\lambda_2 = 0$, $\forall \lambda_1 \in R$, $a(x) \neq (-1/2)$, $x \in [0, 1]$, то задача {(7), (8)} может иметь не более одного решения.

Теорема доказывается с использованием принципа экстремума для оператора C_{0x}^{0, λ_2} [1].

Существование решения задачи {(7), (8)} доказывается эквивалентным сведением рассматриваемой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которой следует из единственности решения задачи.

После того, как найдена функция $\tau(x)$ из задачи {(7), (8)}, решение поставленной задачи в области D_1 находится как и в работе [2], а в области D_2 - как решение задачи Коши для уравнения (1).

Литература

1. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. – Ташкент: Фан, 1997. – 166 с.
2. Голованчиков А.Б., Симонова И.Э., Симонов Б.В. Решение диффузионной задачи с интегральным граничным условием // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. Т.7. №2. – С.339-349.

СХЕМА ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ALTERNATIVE DIRECTIONS SCHEME OF NUMERICAL SOLUTION FOR HEAT EQUATION OF THE MIXED TYPE

Ханхасаев В.Н., Дармахаев Э.В.

*Восточно-Сибирский государственный технологический университет,
Россия, Улан-Удэ
hanhvladnick@mail.ru*

*Восточно-Сибирский государственный технологический университет,
Россия, Улан-Удэ
erdenid.90@mail.ru*

В работах Ханхасаева В.Н. и Буянтуева С.Л. [1], посвященных математическому моделированию отключения электрической дуги в спутном потоке газа, численно и аналитически решались различные краевые задачи для гиперболического уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами, получаемого обобщением закона Фурье [2] в случае существенно нестационарных тепловых процессов и с учетом конечной скорости тепло-массообмена в них. Разовьем математическую модель [1], добавив период горения электрической дуги до момента отключения и заменив гиперболическое уравнение гиперболо-параболическим с переменными коэффициентами, где параболичность означает квазистационарную фазу горения дуги с бесконечной скоростью распространения тепла.

В данной работе рассматривается уравнение смешанного типа в частных производных 2-го порядка

$$k(\tau) \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q_v(x, y, \tau) \quad (1)$$

в цилиндрической области $G = \Omega \times [T_1, T_2]$, $\Omega = [0, l_x] \times [0, l_y]$; $T_1 < 0$, $T_2 > 0$, $l_x > 0$, $l_y > 0$; $\Gamma = \gamma \times [T_1, T_2]$, $\gamma = \partial\Omega$. При этом, $k(\tau) = 0$, $\tau \leq 0$; $k(\tau) > 0$, $\tau > 0$; $\forall (x, y, \tau) \in G$, т.е. при $\tau \leq 0$ уравнение (1) параболическое, а при $\tau > 0$ гиперболическое. Коэффициенты c, ρ, λ – удельные теплоемкость, плотность, теплопроводность, k – коэффициент тепловой релаксации [2], q_v – внутренние источники тепла.

Решение уравнения (1) ищется в области при этом

$$\left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_{0x, lx} T \right]_{x=0, l_x} = q_{0x, lx}, \quad \left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_{0y, ly} T \right]_{y=0, l_y} = q_{0y, ly}$$

$$T(x, y, \tau)|_{\tau=T_1} = T_0(x, y).$$

$\alpha_{0x, lx, 0y, ly}$ и $q_{0x, lx, 0y, ly}$ – коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на границе области. $T_0(x, y)$ – начальное распределение поля температур в момент времени $\tau = T_1$.

В предыдущих работах [3,4] приведены теоретическое обоснование, алгоритм и разностные схемы численного расчета для внутренних точек дискретного разбиения области задания более общего гиперболо-параболического уравнения. В настоящей работе, более тесно связанной с процессом тепло-массообмена, подробно описываются разностные схемы для граничных точек области задания при введении краевых условий третьего рода на основе сохранения теплового баланса и консервативности всей схемы.

По полученным разностным схемам был проведен численный расчет на языке Фортран с переменными коэффициентами k и q_v и выводом полей температур при различных моментах времени, вид которых говорит об устойчивости примененных разностных схем.

В работах [5,6] численный расчет предлагалось проводить по обычным явной и неявной схемам, которые почти на порядок менее экономичны, чем предложенная здесь схема переменных направлений. Кроме этого, в них используются краевые условия первого рода.

Литература

1. Ханхасаев В.Н., Буянтуев С.Л. Численный расчет одной математической модели электрической дуги в потоке газа // Сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. "Энергосберегающие и природоохранные технологии на Байкале", ВСГТУ, БГУ. Улан-Удэ, 2001. С. 168-172.
2. Лыков А.В. Теплообмен // М.: Энергия, 1972, 560 с.
3. Ханхасаев В.Н., Местникова Н.Н. Схема переменных направлений для численного решения гипербола-параболического уравнения // Сб. тр. междунар. конф. «Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения», Институт космич. и информ.технол. СФУ, Красноярск, 2011, С.117-120.
4. Ханхасаев В.Н., Местникова Н.Н., Ханхасаева Я.В. Численное решение гипербола-параболического уравнения по схеме переменных направлений // Сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. "Инновационные технологии в науке и образовании", БГУ. Улан-Удэ, 2011. С. 79-82.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики // М.: Наука, 1973. 409с.
6. Романова Н.А. О сходимости разностных схем одной краевой задачи для уравнений смешанного типа: Дис: канд. физ-мат. наук (01.01.02). Якутский гос.универс. Якутск, 1994. 109 с.

УДК 517.95+532.5

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ON ONE GENERALIZATION OF THE NAVIE-STOCKES EQUATIONS

Ханхасаев В.Н.

*Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ,
Россия;
hanhvladnick@mail.ru*

В работах Рагаллера динамика дугового разряда моделировалась системой Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = v_z \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Q(T) \quad (3)$$

Эта система описывает эволюцию во времени полей температуры T , радиальной v_r и аксиальной v_z скоростей газа. Система выведена с рядом допущений: импульс p предполагается не зависящим от радиуса; пренебрегается аксиальными теплопроводностью, вязкостью; эффекты турбулентного переноса включаются в коэффициенты радиальных теп-

лопроводности и вязкости. В данной постановке исследуется случай свободного остывания при интенсивном обдуве столба дуги в области перехода тока через ноль. Тогда, если пренебречь остаточным током и излучательным переносом энергии, то джоулево тепло $Q(T) = \sigma E^2 = 0$ и хорошей аппроксимацией для импульса $p(z)$ служит известное аксиальное распределение давления газа в зависимости от различной геометрии сопла. В работах автора, посвященных математическому моделированию процесса электрической дуги в спутном потоке газа, численно и аналитически решались различные краевые задачи для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье.

Продолжая это исследование, модифицируем систему Рагаллера, заменяя параболическое уравнение энергии (3) обобщением гипотезы Фурье (4) и уравнением теплового баланса (5):

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} - \alpha \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = v_z \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + Q(T) \quad (5)$$

Для полученной системы ставятся соответствующие начальные и краевые условия; составлены и отлажены ряд программ на языке Фортран, дающие ряд хороших результатов, согласующихся с проведенными экспериментами при соответствующем выборе коэффициента тепловой релаксации α . Система Рагаллера (1) - (3) является частным случаем системы уравнений (1),(2),(4),(5) при $\alpha = 0$. Это один из этапов обобщения уравнений Навье-Стокса на пути к более общим уравнениям Бернетта, вытекающим из кинетической теории газов.

УДК 517. 956

ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА THE MAIN BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR GENERALIZED BI- AXIALLY SYMMETRIC HELMHOLTZ EQUATION

Хасанов А.Х., Сеилханова Р.Б.

Актюбинский университет им. С. Баишева, г. Актобе, Казахстан.

E-mail: anvarhasanov@yahoo.com, s.rahila@inbox.ru,

Рассмотрим обобщенное осесимметрическое уравнение Гельмгольца [1,2]

$$H_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y - \lambda^2 u = 0, \quad 0 < 2\alpha, 2\beta < 1, \quad \alpha, \beta, \lambda - \text{const.} \quad (H_{\alpha,\beta}^{\lambda})$$

Для уравнения $H_{\alpha,\beta}^{\lambda}$ построены следующие фундаментальные решения [3,4]

$$q_1(x, y; x_0, y_0) = k_1 (r^2)^{-\alpha-\beta} A_2^{(3)}(\alpha + \beta; \alpha, \beta; 2\alpha, 2\beta; \xi, \eta, \zeta), \quad (1)$$

$$q_2(x, y; x_0, y_0) = k_2 (r^2)^{\alpha-\beta-1} x^{1-2\alpha} x_0^{1-2\alpha} A_2^{(3)}(1-\alpha + \beta; 1-\alpha, \beta; 2-2\alpha, 2\beta; \xi, \eta, \zeta), \quad (2)$$

$$q_3(x, y; x_0, y_0) = k_3 (r^2)^{-\alpha+\beta-1} y^{1-2\beta} y_0^{1-2\beta} A_2^{(3)}(1+\alpha - \beta; \alpha, 1-\beta; 2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta, \zeta), \quad (3)$$

$$q_4(x, y; x_0, y_0) = k_4 (r^2)^{\alpha+\beta-2} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} A_2^{(3)}(2-\alpha - \beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta, \zeta), \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \\ r_2^2 \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} - \\ x+x_0 \\ - \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} - \\ y-y_0 \\ + \end{pmatrix}^2, \quad \xi = \frac{r^2 - r_1^2}{r^2}, \quad \eta = \frac{r^2 - r_2^2}{r^2}, \quad \zeta = -\frac{\lambda^2}{4} r^2. \quad (5)$$

$$A_2^{(3)}(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y, z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n-p} (b_1)_m (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_n m! n! p!} x^m y^n z^p, \quad (6)$$

конфлюэнтная гипергеометрическая функция от трех переменных и k_i , ($i=1, 2, 3, 4$) постоянные.

Пусть $\Omega \subset R_2^+$ - область, ограниченная отрезками $I_1 = (0, a)$, $I_2 = (0, b)$ соответственно осей OX , OY и кривой Γ с концами в точках $A(a, 0)$, $B(0, b)$, где $a, b = \text{const} > 0$. Параметрическое уравнение кривой Γ будет $x = x(s)$, $y = y(s)$, где S длина дуги, отсчитываемая от точки $A(a, 0)$. Относительно кривой Γ будем предполагать, что:

- функции $x = x(s)$, $y = y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$ на отрезке $[0, l]$, не обращающиеся одновременно в нуль;
- производные $x''(s)$, $y''(s)$ удовлетворяют условию Гельдера на $[0, l]$, где l - длина кривой Γ ;
- в окрестности точек $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ выполняются условия

$$\left| \frac{dx}{ds} \right| \leq C y^{1+\varepsilon}(s), \quad \left| \frac{dy}{ds} \right| \leq C x^{1+\varepsilon}(s), \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad c = \text{const}. \quad (7)$$

В указанной области Ω решены основные краевые задачи для уравнения $H_{\alpha, \beta}^{\lambda}$ [5, 6, 7, 8].

Например:

Задача N (задача Хольмгрена). Найти в области Ω регулярное решение $u(x, y)$ уравнения $H_{\alpha, \beta}^{\lambda}$, непрерывное в $\bar{\Omega}$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$y^{2\beta} u_y(x, y) \Big|_{y=0} = v_1(x), \quad x \in I_1, \quad (8)$$

$$x^{2\alpha} u_x(x, y) \Big|_{x=0} = v_2(y), \quad y \in I_2, \quad (9)$$

$$u(x, y) \Big|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (10)$$

где $v_1(x)$, $v_2(y)$, $\varphi(s) \in C$ - заданные функции, причем $v_1(x)$ на концах интервала I_1 может обращаться в бесконечность порядка меньше, чем $1-2\beta$, а $v_2(y)$ - меньше, чем $1-2\alpha$.

Литература

1. R. Gilbert. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. New York, London: Academic Press. 1969.
2. R.B. Seilkhanova, A.H. Hasanov; Particular solutions of generalized Euler-Poisson-Darboux equation, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2015 (2015), No. 09, pp. 1-10.
3. A. Hasanov, Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations. Vol. 52, No. 8, 2007, pp. 673-683.
4. A. Hasanov and E.T. Karimov, Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients. Applications Mathematical Letters, 22, 2009, pp. 1828-1832.

5. H. M. Srivastava, A. Hasanov and Junesang Choi. Double-Layer Potentials for a Generalized Bi-Axially Symmetric Helmholtz Equation. *Sohag Journal of Mathematics An International Journal*. 2, No. 1, 1-10 (2015)
6. M.S. Salakhitdinov and A. Hasanov. The Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Eurasian Mathematical Journal*, Volume 3, Number 4(2012), 99 – 110.
7. М.С. Салахитдинов, А. Хасанов. Краевая задача ND_1 для обобщенного осе симметрического уравнения Гельмгольца. Доклады Адыкского Академии Наук, Т.13, N1, 2012, стр. 109-116.
8. M.S. Salakhitdinov M. S. and A. Hasanov, A solution of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 53 (4), 2008, p. 355-364.

УДК 550.830, 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С ИЕРАРХИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

MATHEMATICAL MODELING OF WAVE FIELDS IN LAYERED MEDIA WITH HYERARCHIC INCLUSIONS

Хачай О.А. *, Хачай А.Ю. **

* *Институт геофизики Уральского отделения Российской Академии Наук,
Россия, Екатеринбург*
olgakhachay@yandex.ru

** *Уральский федеральный университет, Институт математики и компьютерных
наук, Россия, Екатеринбург*
1c@ta-ural.ru

Геологическая среда представляет собой открытую систему, на которую воздействуют как внешние, так и внутренние факторы, что может привести ее в неустойчивое состояние. Проявление этой неустойчивости, как правило, происходит локально, и эти зоны геологической среды называются динамически активными элементами, которые являются индикаторами потенциальных источников аварий и катастроф. Эти объекты обладают отличными от вмещающей геологической среды физико-механическими свойствами и способностью в резонансном режиме реагировать на внешние и внутренние воздействия, связанные с изменениями напряженно-деформированного состояния в их окрестности. Кроме того эти объекты обладают способностью изменять свою конфигурацию и структуру в пространстве и во времени, что осложняет задачу прогноза состояния и степени аварийной опасности. В работе Хачай О.А. [1] изложены принципы построения систем мониторинга природно-техногенных аварий и катастроф с использованием сейсмических и электромагнитных полей в пассивном и активном режиме возбуждения, в которых составной частью входят задачи картирования динамически активных зон.

Для решения задач геолого-геофизического картирования в настоящее время широко используется модель слоисто-блоковой среды с включениями, в рамках которой созданы аппаратно-методические комплексы изучения трехмерно неоднородных сред с соответствующей теорией интерпретации геофизических данных [2]. При изучении пространственно-временных изменений структуры, физических свойств геологической среды или массива горных пород и связанных с ними напряженно-деформированного или фазового состояния модель слоисто-блоковой среды с включениями усложняется: она представляет собой двух ранговую цепочку в общей иерархически неоднородной модели среды. В ра-

боте рассмотрена задача моделирования электромагнитного и сейсмического поля в слоистой среде с включениями иерархической структуры. Построены алгоритмы моделирования в электромагнитном случае для 3-D неоднородности, в сейсмическом случае для 2-D неоднородности. Представляет интерес с использованием полученных алгоритмов исследовать вопрос об изучении связи между тензорами напряжения и деформации на каждом иерархическом уровне и о возможном отклонении ее от обобщенного закона Гука. С другой стороны, с увеличением степени иерархичности среды увеличивается степень пространственной нелинейности распределения составляющих сейсмического и электромагнитного поля, что предполагает исключение методов линеаризации задачи при создании методов интерпретации. Кроме того, усложняется процесс комплексирования методов, использующих электромагнитное и сейсмическое поле для изучения отклика среды с иерархической структурой. Эта проблема неразрывно связана с формулировкой и решением обратной задачи для распространения электромагнитного и сейсмического полей в таких сложных средах [3]. В работе [4], выписано уравнение теоретической обратной задачи для переменного электромагнитного поля (скалярный случай) для модели проводящая иерархическая неоднородность k -го ранга, расположенная в v -ом слое проводящего n -слоистого полупространства

Литература

1. Хачай О.А. О комплексировании сейсмических и электромагнитных активных методов для картирования и мониторинга состояния двумерных неоднородностей в N -слоистой среде / О.А. Хачай, А.Ю. Хачай // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2011. – № 2(219). – С. 49-56.
2. Хачай О.А. Моделирование электромагнитного и сейсмического поля в иерархически неоднородных средах, / О.А. Хачай, А.Ю. Хачай // Вестник ЮУрГУ, Серия «Вычислительная математика и информатика». — 2013. — Т. 2, № 2, — С. 48–55.
3. Хачай О.А. К вопросу об обратной задаче активного электромагнитного мониторинга иерархической геологической среды / О.А. Хачай, А.Ю. Хачай // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: тез. Докладов международного семинара им. Д.Г.Успенского. Екатеринбург, 27-31 января 2014г. - Екатеринбург: изд-во УрО РАН, 2014. – С.266-269.
4. Хачай О.А. Моделирование и интерпретация волновых полей в иерархически неоднородных средах / О.А. Хачай, А.Ю. Хачай // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. Доклады Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти В.К.Иванова. Челябинск, 10-14 ноября 2014г. -Челябинск. Издательский центр ЮУрГУ, 2014г. – С.162-164.

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ*

JUNCTION PROBLEMS FOR THIN INCLUSIONS IN ELASTIC BODIES.

Хлуднев А.М.*

** ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет,
Россия, Новосибирск
khlud@hydro.nsc.ru*

Рассматриваются задачи равновесия упругих тел, содержащих тонкие включения различной природы при наличии отслоений. Именно, рассматриваются упругие, жесткие и полужесткие включения. Для описания упругих включений используются модели Бернулли-Эйлера и Тимошенко. Обсуждаются предельные переходы по параметрам жесткости тонких включений и формулируются предельные задачи. Исследуются задачи сопряжения вида упругое включение – жесткое включение, упругое включение - упругое включение и находятся условия сопряжения.

Литература

1. A. M. Khludnev, M. Negri. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body, *Z. Angew. Math. Mech.* V. 92 (2012), 341--354.
2. A.M. Khludnev, G.R. Leugering. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies, *Mathematics and Mechanics of Complex Systems.* V. 2 (2014), 1--21.
3. H. Itou, A.M. Khludnev, G.R. Leugering. Timoshenko thin inclusions in an elastic body with possible delaminations. *Doklady physics.* V. 59 (2014), 401--404.
4. A.M. Khludnev. *Z. Angew. Math. Mech.*, doi 10.1002/zamm.201400103.
5. A.M. Khludnev, G.R. Leugering. *Mathematics and Mechanics of Solids*, doi 10.1177/1081286513505106.
6. H. Itou, A.M. Khludnev. *Math. Meth. Appl. Sciences*, doi 10.1002/mma.3279.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (13-01-00017)

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ON SOLVABILITY OF NONLOCAL PROBLEMS FOR LOADED PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS

Холиков Д.К.

Ташкентский архитектурно-строительный институт
г.Ташкент, Узбекистан
xoliqov23@mail.ru

В работе изучается начально-краевая задача для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка.

В области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим нагруженное уравнения в частных производных третьего порядка

$$Lu = f(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx, \quad (1)$$

где

$$Lu \equiv u_{xxt} + d(x, t)u_t + a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_{xt} + c(x, t)u_x + e(x, t)u,$$

α, β - заданные постоянные, причем $0 \leq \alpha \leq \beta \leq l$.

Задача. Найти регулярное решение в области D решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяют начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

и следующим граничным условиям

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad (3)$$

$$u_x(0, t) = \int_0^l u(x, t) dx + \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

здесь $\varphi(x), \psi_1(t), \psi_2(t)$ - заданные функции, причем

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi'(0) = \int_0^l \varphi(x) dx + \psi_2(0).$$

Теорема. Если коэффициенты уравнения (1) и заданные функции удовлетворяют

$a(x, t), b(x, t) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D); c(x, t), d(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D);$
 $e(x, t), f(x, t) \in C(\bar{D}); \varphi(x) \in C^1[0, l] \cap C^2(0, l), \psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1[0, T]$ и кроме того
 $d(x, t) \leq 0, \forall (x, t) \in D$, то задача (1)-(3) разрешима и притом единственным образом.

Теперь покажем, что условие $d(x, t) \leq 0$ является необходимым. При нарушении условия на коэффициент $d(x, t)$ уравнения (1) как показывает ниже пример, что задача (1)-(4) может оказаться некорректно поставленной.

Действительно, что функция $u(x, t) = t \sin 2kx$ в области $D_0 = \{(x, t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ является решением уравнения

$$u_{xxt} + (2k)^2 u_t = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi u(x, t) dx$$

удовлетворяющее условиям $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$.

Приведенный пример показывает, что нарушение условия теоремы, может привести к нарушению корректности начально-краевых задач для уравнения (1).

УДК 517.956

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ЦИЛИНДРАХ С ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛЕНКОЙ*

SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN CYLINDERS WITH A TWO-LAYER FILM

Холодовский С.Е.

Забайкальский государственный университет, Россия, Чита
hol47@yandex.ru

Краевые задачи в областях с наноразмерными включениями имеют широкие приложения [1-3]. В цилиндре $D = (x, y : x \in R, y \in Q \subseteq R^m)$, состоящем из двух полуцилиндров $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$, $y \in Q$, для функций $u_i(x, y)$ в D_i рассмотрен класс задач

$$\partial_x^2 u_1 + Lu_1 = 0, \quad Mu_1|_S = 0, \quad \partial_x^2 u_2 + Lu_2 = H(x, y), \quad Mu_2|_S = h(x, y), \quad (1)$$

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = B \partial_x u_2, \quad \partial_x u_2 - \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1, \quad (2)$$

где $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$, $S = \partial D$; M и L – линейные дифференциальные операторы по переменным y_i , $y = (y_1, \dots, y_m)$, условия сопряжения (2) выполняются на двухслойной пленке, состоящей из сильно- и слабо проницаемых прослоек $x = -0$ и $x = +0$; постоянные $A, B > 0$.

Теорема. Если классическая задача в цилиндре D без пленки вида

$$\partial_x^2 f + Lf = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ H(x, y), & x > 0, \end{cases} \quad Mf|_S = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ h(x, y), & x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

корректна и ее решение вместе с производными, входящими в эту задачу, удовлетворяет условию $|f(x, y)| = O(e^{\alpha|x|})$, $x \rightarrow -\infty$, $0 < \alpha < \operatorname{Re} \gamma_i$, то решение задачи (1), (2) существует, единственно и в случаях $T \neq 0$ и $T = 0$ имеет соответственно вид

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\sqrt{T}} \int_0^\infty f(x-t, y) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt,$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) + f(-x, y) - \frac{2}{\sqrt{T}} \int_0^\infty f(-x-t, y) [(1-A\gamma_1)e^{-\gamma_1 t} - (1-A\gamma_2)e^{-\gamma_2 t}] dt,$$

и

$$u_1(x, y) = \frac{2}{AB} \int_0^\infty f(x-t, y) e^{-\gamma_0 t} t dt,$$

* Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

$$u_2(x, y) = f(x, y) + f(-x, y) - \frac{2}{AB} \int_0^{\infty} f(-x-t, y) e^{-\gamma_0 t} [(1-A\gamma_0)t + A] dt,$$

где $\gamma_i = [A + B + (-1)^i \sqrt{T}](2AB)^{-1}$, $i=1,2$; $\gamma_0 = (A+B)(2AB)^{-1}$, $T = (A-B)^2 - 4AB$, $f(x, y)$ – решение задачи (3). Доказательство основано на методе работ [1-3].

Литература

1. Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204-1208.
2. Kholodovskii S. E. On the Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation on the Plane with a Three-Layer Film Inclusion // Differential Equations. 2013. Vol. 49. No. 12. pp. 1655–1660.
3. Холодовский С.Е. Об эффективном решении задачи о движении неограниченной струны с точечной массой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 1. С. 105-112.

УДК 517.95

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО- ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ON EXTREMUM PRINCIPLE FOR CHARACTERISTICLY LOADED EQUATION OF HYPERBOLIC-PARABOLIC TYPE

Хубиев К.У.

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, Нальчик
khubiev_math@mail.ru

В области Ω , ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=1$, $y=h>0$ соответственно при $y>0$, и характеристиками волнового уравнения $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$, при $y<0$, рассмотрим характеристически нагруженное уравнение

$$Lu + du(x \pm H(-y)y, 0) = f, \quad (1)$$

где $H(y)$ – функция Хевисайда; $u = u(x, y)$; $d = d(x, y) = d_1(x, y)$, $f = f(x, y) = f_1(x, y)$ при $y>0$, $d = d(x, y) = d_2(x \pm y)$, $f = f(x, y) = f_2(x, y)$ при $y<0$ – заданные функции,

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y + a_1(x, y)u_x + c_1(x, y)u, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_2(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c_2(x, y)u, & y < 0. \end{cases}$$

Обозначим через Ω^+ , Ω^- – параболическую и гиперболическую части области Ω соответственно, а через J – интервал $0 < x < 1$ прямой $y=0$.

Под регулярным решением уравнения (1) будем понимать функцию $u = u(x, y)$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega \setminus J)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$, кроме того, $u_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала J .

В работах [1], [2] были сформулированы и доказаны принципы экстремума для нагруженных интегральных уравнений и дифференциального уравнения первого порядка. В работе [3] методом, предложенным в [4], доказан принцип максимума для уравнения (1) в Ω^- .

В данной работе сформулирован и доказан принцип экстремума для уравнения (1) в области Ω при определенных условиях на коэффициенты уравнения.

Литература

1. Нахушев А.М. К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 3. С. 30-34.
2. Хубиев К.У. О принципе экстремума для нагруженных уравнений// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 3. С. 47-50.
3. Хубиев К.У. О принципе максимума для характеристически нагруженного уравнения гиперболического типа// Материалы III Международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик-Терскол, 3-7 декабря 2014 г. С. 219-221.
4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

УДК 004.421.2, 519.178

НОВЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОСТИ ДЛЯ ВЗВЕШЕННЫХ ГРАФОВ КОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ ПРАВИЛ КИРХГОФА*

A NEW CONCEPT OF THE BETWEENNESS CENTRALITY FOR WEIGHTED GRAPHS OF COMMUNICATION NETWORKS ON THE BASE OF THE KIRCHHOFF'S LAW

Цынгугев Б.Т.

*Забайкальский государственный университет,
Россия, Чита
btsynguev@gmail.com*

Современные методы исследования сетевых структур получили бурное развитие в связи с появлением феномена социальных сетей (*social network analysis*). Методы анализа социальных сетей применяются во многих областях науки, таких как экономика, физика, социология, биология и информационные технологии.

Одним из базовых понятий в анализе сетевых структур является центральность (*betweenness centrality*). Первое описание центральности было в [8]. Центральность вершины v - это важная мера, отражающая то, насколько вершина v участвует в процессе распространения информации между остальными вершинами в графе.

Одно из первых определений центральности вершины представлено следующей формулой:

$$c_B(v) = \frac{1}{n_B} \sum_{s,t \in V} \frac{\sigma_{s,t}(v)}{\sigma_{s,t}},$$

где $\sigma_{s,t}$ - число геодезических путей между вершинами s и t , $\sigma_{s,t}(v)$ - число геодезических путей между вершинами s и t проходящих через вершину v . Коэффициент нормировки n_B равен $(n-1)(n-2)$, если вершина v не может быть начальной s или конечной t вершинами, и $n_B = n(n-1)$ иначе.

Наилучшая вычислительная сложность алгоритма поиска центральности равна $O(mn)$ и представлена в [5].

* Работа поддержана Отделением математических наук РАН и грантом РГНФ (проект 15-02-00352)

В [2, 6, 11] мера центральности вычисляется на основе модели электрической цепи. В данной модели граф рассматривается как электрическая цепь с идеальными элементами, где каждое ребро имеет некую пропускную способность (значение обратное сопротивлению), а вершины графа являются ее узлами. Для поиска меры центральности в модели электрической цепи используются правила Кирхгофа. Для этого электрическая цепь заземляется в некоторой вершине t и подается электрический ток в некоторой вершине s . В [6] ток подается в некоторой единственной вершине s , а также в единственной вершине t сеть заземляется. Мерой центральности вершины v служит средняя величина тока, проходящего через вершину v по всем возможным парам s и t . Таким образом, в модели электрической цепи при расчете меры центральности учитываются не только геодезические пути.

В [2] рассматривается модель электрической цепи, где пропускная способность всех ребер графа принимается равной некоторому постоянному параметру α . В отличие от [6] в модели [2] в электрическую цепь искусственно вводится $n+1$ заземленная вершина, и каждая вершина сети соединена с ней ребром с пропускной способностью $1-\alpha$. Эти изменения позволили существенно уменьшить вычислительную сложность алгоритма. Кроме того, это дало возможность применить стохастические методы в вычислении меры центральности в графах с большой размерностью. Но данная модель применима только для не взвешенных графов.

В данной работе предлагается новый способ определения центральности для взвешенных графов на основе правил Кирхгофа. Метод имеет относительно невысокую вычислительную сложность.

Литература

1. Жижченко А.Б., Изаак А.Д. Информационная система Math-Net.Ru. Применение современных технологий в научной работе математика // Успехи Математических Наук. 2007. Т. 62, № 5(377). С. 107–132.
2. Avrachenkov K., Litvak N., Medyanikov V., Sokol M. Alpha current flow betweenness centrality // Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8305. P. 106–117.
3. Bastian M., Heymann S., Jacomy M. Gephi: an open source software for exploring and manipulating networks // International AAAI Conference on Weblogs and Social Media. 2009.
4. Borgatti S.P., Everett M.G., Freeman L.C. Ucinet for Windows: Software for Social Network Analysis // MA: Analytic Technologies. 2002.
5. Brandes U. A faster algorithm for betweenness centrality // Journal of Mathematical Sociology. 2001. Vol. 25. P. 163–177.
6. Brandes U., Fleischer D. Centrality measures based on current flow // In Proceedings of the 22nd annual conference on Theoretical Aspects of Computer Science. 2005. P. 533–544.
7. Chebukov D., Izaak A., Misurina O., Pupyrev Yu., Zhizhchenko A. Math-Net.Ru as a digital archive of the Russian mathematical knowledge from the XIX century to today. Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 7961. P. 344–348.
8. Freeman L.C. A set of measures of centrality based on betweenness // Sociometry. 1977. Vol. 40. P. 35–41.
9. Mazalov V.V., Trukhina L.I. Generating functions and the Myerson vector in communication networks // Discrete Mathematics and Applications. 2014. Vol. 24(5). P. 295–303.
10. Myerson R.B. Graphs and cooperation in games // Math. Oper. Res. 1977. Vol. 2. P. 225–229.
11. Newman M.E.J. A measure of betweenness centrality based on random walks // Social networks. 2005. Vol. 27. P. 39–54.

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИФФУЗИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ
ПРИ НАЛИЧИИ ПОГЛОЩЕНИЯ ***
NONLINEAR DIFFUSION IN A MEDIA WITH AN ABSORPTION

Чиркунов Ю. А.

*Новосибирский государственный технический университет,
Россия, Новосибирск
chr101@mail.ru*

Для пятипараметрической модели нелинейной диффузии в неоднородной среде при наличии поглощения найдены все коэффициенты диффузии и коэффициенты поглощения при которых модель допускает непрерывную группу Ли преобразований, действующую на множестве решений уравнения, описывающего модель. Для каждой такой модели получены формулы производства решений, содержащие произвольные постоянные, а все существенно различные (не связанные точечными преобразованиями) инвариантные решения либо найдены в явном виде, либо их отыскание сведено к решению нелинейных интегральных уравнений. Наличие произвольных постоянных в этих интегральных уравнениях и формулы производства решений позволяют исследовать различные краевые задачи для рассматриваемой модели. Для полученных инвариантных подмоделей исследованы: 1) диффузионный процесс, для которого в начальный момент времени в фиксированной точке заданы концентрация и ее градиент; 2) диффузионный процесс, для которого в начальный момент времени в фиксированной точке заданы концентрация и ее скорость. При некоторых дополнительных условиях установлены существование и единственность решений краевых задач, описывающих данные процессы. Решение этих задач сведено к решению нелинейных интегральных уравнений. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании диффузии вещества, диффузии электронов проводимости и других частиц, диффузии поля, распространения тепла в неоднородной среде.

Литература

- [1] Yu. A. Chirkunov, S. V. Nazarenko, S. B. Medvedev and V. N. Grebenev, Invariant solutions for the nonlinear diffusion model of turbulence. J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 185501.
- [2] Чиркунов Ю. А., Хабиров С. В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск. НГТУ. 2012. 659 с.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию №2014/138, проект № 435; гранта № НШ-2133.2014.1. в рамках Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ;

НЕСКОЛЬКО ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

SEVERAL LINEAR AND NONLINEAR EQUATIONS OF HIGH ORDER

Чуешева Н.А.

** Кемеровский государственный университет,
Россия, Кемерово
chuesheva@ngs.ru*

Уравнения высокого порядка рассматривались в книгах Врагова В.Н. [1], Демиденко Г.В., Успенского С. В. [2], Егорова И. Е., Пяткова С.Г., Попова С. В. [3], Чуешева А.В. [5]. Корректные постановки граничных задач для уравнений четвертого порядка изучались в работе Кожанова А.И. [4].

В тезисах доклада Чуешевой Н.А. [6]:

1) в области $D = \{(x, t) : x \in (0, \pi), t \in (0, \pi)\}$ рассматривалось уравнение $u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + cu_x + du + eu_t = f(x, t)$ с граничными условиями $u|_{t=0, t=\pi} = u|_{x=0, x=\pi} = u_{xx}|_{x=0, x=\pi} = 0$. При некоторых условиях на коэффициенты уравнения доказана теорема существования и единственности.

2) При $a = 4, b = 3, c = 4, d = 5, e = 0$ для этой задачи построен пример неединственности решения.

3) В области $D = \{(x, t) : x \in (0, \pi), t \in (0, 1)\}$ рассматривалось уравнение $(1-t)^2 u_{tt} - u_{xxxx} + a(x, t)u_{xxx} - u_{xx} + a(x, t)u_x + \frac{3}{4}u + (1-t)u_t = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{t}{2}\right) \sin x$ с граничными условиями $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = u|_{x=0, x=\pi} = u_{xx}|_{x=0, x=\pi} = 0$. При аналитическом коэффициенте $a(x, t)$ и аналитической правой части в $\bar{D}$ для этой задачи, аналогично, как в [1], построен пример решения, которое не принадлежит классу функций $W_2^2(D)$;

4) в области $D = \{(x, t) : x \in (0, \pi), t \in (0, 1)\}$ рассматривалось уравнение $u_{tt}^n - u_{xxxx}^n + u_{xx}^n + u_t^n = 0$ с граничными условиями $u^n|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^5}, u_t^n|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^3}, u^n|_{x=0, x=\pi} = u_{xx}^n|_{x=0, x=\pi} = 0$. Для этой задачи построен пример неустойчивости решения.

В тезисах доклада Чуешевой Н.А. [7] выписаны некоторые точные решения для уравнений Кортевега-де-Фриза, Бюргерса-Кортевега-де Фриза, Кадомцева-Петвиашвили.

В статье [8] рассматривается задача Коши для следующего уравнения Кортевега-де-Фриза пятого порядка $u_t - u_{xxxxx} + c_1(u^3)_x + c_2(u_x)^2_x + c_3(u u_{xx})_x = 0$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $u(0, x) = u(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $c_3 \neq 0$. Функция $u(x, t)$ является действительной или комплексной. Доказаны условия корректности задачи.

В частности, решением этого уравнения при:

1) $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ будет вещественная функция:

$$u(x, t) = -\frac{4b^2}{3} \frac{(65 + \sqrt{145})}{3 - \sqrt{145}} + \frac{2b^2}{77 - 3\sqrt{145}} \frac{(25 - 31\sqrt{145})}{77 - 3\sqrt{145}} \tanh^2(-a - bx + 2b^5(17 + \sqrt{145})t).$$

2) $c_1 = -1$, $c_2 = c_3 = 1$ будет комплексная функция:

$$f(z) = -\frac{4b^2}{3} \frac{(55 + i\sqrt{95})}{3 + i\sqrt{95}} - \frac{2b^2}{43 - 3i\sqrt{95}} \frac{(35 + 29i\sqrt{95})}{43 - 3i\sqrt{95}} \tanh^2(-a - bx + 2b^5(7 + i\sqrt{95})t).$$

3) $c_2 = -1$, $c_1 = c_3 = 1$ будет вещественная функция:

$$u(x, t) = 8b^2 - 12b^2 \tanh^2(-a - bx + 16b^5 t).$$

Литература

- [1] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. -- Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1983.
- [2] Демиденко Г.В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
- [3] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. -- Новосибирск: Изд-во Наука. 2000.
- [4] Кожанов А.И. Начально-краевая задача для уравнения типа обобщённого уравнения Бусинеска с нелинейным источником. // Матем. зам., 1999, т. 65, № 1. – С. 70 – 75.
- [5] Чуешев А.В. Об одном нелинейном уравнении смешанного типа нечетного порядка Вестник Новосиб. ун-та, серия "математика, механика, информатика".- Новосибирск.— 2001.-- Т. 1, Вып.1.-- С.107--123.
- [6] Чуешева Н.А. Несколько линейных и нелинейных дифференциальных уравнений Дни геометрии в Новосибирске: тез. междунар. конф., Новосибирск, 28—31 августа. 2013г. -- Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. -- С.93--94.
- [7] Чуешева Н.А. Краевые задачи для некоторых уравнений третьего порядка. Дни геометрии в Новосибирске: тез. междунар. конф., Новосибирск, 24—27 сентября. 2014г. -- Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. - С.80--81.
- [8] Kato Takamori/ Well-posedness for the fifth order KdV equation. Funkc. Ekvacioj=Funct. Equat. 2012. 55, № 1, с. 17-53.

УДК 517

МНОГОЗНАЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ В d -АНАЛИЗЕ И СЛЕДСТВИЕ ЭТОГО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

POLYSEMY OF DEFINITE INTEGRALS IN d -ANALYSIS AND THE CONSEQUENCE OF IT FOR THE DECISION THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Чуриков В.А.

*Томский политехнический университет,
Россия, Томск
vachurikov@list.ru*

В d -анализе – направлении дробного анализа, в основе которого лежит d -оператор дробного интегрирования вещественных или комплексных порядков вещественной переменной, имеется более одной базовой первообразной и как следствие, *много-*

значный неопределённый интеграл. Многозначность неопределённого интеграла дробного вещественного порядка $s > 0$, в d -анализе выражается [1]

$$(d^s f)(x) \equiv \int f(x) d^s x = 1^{-s\{k\}} F^{(s)}(x) + 1^{-s\{k\}} C_s(x) \equiv F^{(s\{k\})}(x) + C_s^{\{k\}}(x).$$

Здесь $(d^s f)(x)$ - d -оператор интегрирования порядка s действующий на функцию f . $F^{(s\{k\})}(x) \equiv 1^{-s\{k\}} F^{(s)}(x)$ - *многозначная базовая первообразная*; $1^{-s\{k\}} C_s(x) \equiv C_s^{\{k\}}(x)$ - *многозначный полином интегрирования*, которые являются обобщением констант интегрирования в классическом анализе; индекс $k=0, 1, 2, 3 \dots$ пробегает множество значений всех первообразных, которые определяются комплексными коэффициентами $1^{-s\{k\}}$, определяемые равенством [1]

$$1^{-s\{k\}} = \exp(-i2\pi sk) = \cos(i2\pi sk) - i \sin(i2\pi sk).$$

Здесь случай $k=0$, будет соответствовать *главной базовой первообразной* $F^{(s\{0\})}(x) \equiv 1^{-s\{0\}} F^{(s)}(x) = F^{(s)}(x)$ и *главному полиному интегрирования* $1^{-s\{0\}} C_s(x) \equiv C_s^{\{0\}}(x)$. Для остальных значений k соответственно будут *дополнительные полиномы интегрирования* и *дополнительные первообразные*. Для многозначных неопределённых интегралов можно получить обобщение на случай определённых интегралов [2].

Если порядок s является иррациональным числом, то множество коэффициентов, а значит и неопределённых интегралов, образуют бесконечное счётное множество. Если s – рациональное число, то его можно представить в виде $s = r / p$ ($r, p \in \mathbb{N}$; $p > 1$), r и p натуральные числа, не имеющие общих делителей не равных 1, тогда число коэффициентов будет r .

Теорема. Если функция $f(x)$ в области значений переменной x , ($a \leq x \leq b$) имеет *неопределённый многозначный интеграл вещественного или комплексного порядка s* , $F^{(s\{k\})}(x) + C_s^{\{k\}}(x)$, который для каждого значения k будет конечен и кусочно-непрерывен в области значений переменной x от a до b , то в этих пределах значений переменной x имеется *многозначный определённый интеграл* порядка s от функции $f(x)$, который вычисляется с помощью формулы

$$\begin{aligned} (d^s f)(x) \Big|_a^b &\equiv \int_a^b f(x) d^s x = (F^{(s\{k\})}(x) + C_s^{\{k\}}(x)) \Big|_a^b = \\ &= F^{(s\{k\})}(b) - F^{(s\{k\})}(a) + C_s^{\{k\}}(b) - C_s^{\{k\}}(a). \end{aligned} \quad (*)$$

Формулу (*) будем называть *многозначной формулы Ньютона – Лейбница вещественного или комплексного порядка s* .

Константу $C_s^{\{k\}}(b) - C_s^{\{k\}}(a) \equiv C_s^{\{k\}}(a; b) = C_s^{\{k\}}(x) \Big|_a^b$ в (*) будем называть *многозначными константами интегрирования* определённого интеграла (*). Из которых для $k=0$ будет *главная константа интегрирования*, а для остальных значений k - *дополнительные константы интегрирования* порядка s для нижнего предела a и верхнего предела b .

Главное значение интеграла совпадает с ранее введённым определённым интегралом в d -анализе [2]. В случае классического анализа, когда $s=1$, интеграл (*) переходит в определённый интеграл классического анализа. В этом случае интеграл становится однозначным, остаётся только главное значение, а константа интегрирования $C_1^{\{0\}}(a; b) = 0$.

Многозначность определённых интегралов дробных порядков при решении дифференциальных уравнений, будет приводить, в общем случае, не к одному общему решению, как в классическом анализе, а к множеству общих решений, которое будет иметь конечное множество решений в случае рациональных порядков, а для иррациональных порядков к бесконечному счётному множеству. Каждому общему решению будет соответствовать бесконечное множество частных решений.

Литература

1. Чуриков В.А. О многозначности дробных производных и интегралов отрицательного и мнимого аргумента. Труды VI Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, 26 – 29 мая 2009 г. (VI International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, May 26 – 29, 2009) – Томск: Изд-во ТПУ, – 2009, – С. 671–673.

2. Чуриков В.А. Определённый интеграл дробного порядка, его неоднозначность и основная теорема d -анализа // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: материалы республиканской конференции с участием учёных из стран СНГ. Ташкент, 21 - 23 ноября 2013 Г. – Ташкент: Издательство НУУ – 2013, – С. 207–209.

УДК 517.927

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ, СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

THE UNIQUENESS AND NONUNIQUENESS OF SOLUTIONS, EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF SOME PROBLEMS PAIRING FOR ELLIPTIC OPERATORS

Шадрина Н.Н.

Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ

Shadrinann8@yandex.ru

В работе исследуются существование собственных чисел и собственных функций для оператора Лапласа при задании на некоторой внутренней поверхности специальных условий сопряжения.

Пусть x есть точка ограниченной области Ω из пространства R^n с гладкой (для простоты - бесконечно дифференцируемой) границей Γ , y есть точка интервала $(a, 1)$, $-\infty < a < 0$, Q есть цилиндр $\Omega \times (a, 1)$, $S = \Gamma \times (a, 1)$ есть боковая граница Q , α, β - есть заданные действительные числа.

Обозначим $Q_1 = \Omega \times (a, 0)$, $Q_2 = \Omega \times (0, 1)$.

Задача на собственные значения с условиями сопряжения: найти функцию $u(x, y)$ и число λ такие, что в цилиндрах Q_1 и Q_2 выполняется уравнение

$$\Delta u = \lambda u \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, y)$ условий

$$u(x, y)|_S = 0, \quad (2)$$

$$u(x, a) = u(x, 1) = 0, \quad x \in \Omega \quad (3)$$

$$u(x, -0) = \alpha u(x, +0), \quad u_y(x, +0) = \beta u_y(x, -0), \quad x \in \Omega \quad (4)$$

Задача (1)-(4) в случае $\alpha = \beta = 1$ представляет собой классическую задачу дифракции. В данной работе рассматривается случай произвольных α и β .

УДК 519.63.245

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДАМИ МОНТЕ-КАРЛО NUMERICAL MODELING OF SAME PROBLEM OF RELAXATIONAL FILTRATION BY MONTE CARLO METHODS

Шакенов К.К.

*Казахский национальный университет имени аль – Фараби,
Казахстан, Алматы
shakenov2000@mail.ru*

Рассматривается модель фильтрации по закону Дарси в релаксационно-сжимаемой пористой среде $\Omega \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0, T]$:

$$\lambda'_m \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = \chi \lambda_m \Delta_x \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} + \chi \Delta_x p(t, x) \text{ в } Q, \quad (1)$$

$$\mathbf{W}(t, x) = -\frac{\kappa}{\mu} \text{grad}_x p(t, x) \text{ в } Q, \quad (2)$$

где Ω – ограниченная область, $\partial\Omega$ – граница области Ω , $Q = \Omega \times [0, T]$, $x \in \Omega \in \mathbb{R}^3$, t – время, $t \in [0, T]$, $p(t, x)$ – давление жидкости, $\mathbf{W}(t, x)$ – скорости фильтрации, χ – коэффициент пьезопроводности пласта, $\chi = \frac{\kappa}{\mu\beta}$, μ – вязкость жидкости, κ – коэффициент проницаемости, β – коэффициент упругоёмкости пласта, λ_m – время релаксации пористости при постоянном перепаде давления, $\lambda'_m = \lambda_m \frac{\beta_*}{\beta}$, β_* – динамический коэффициент упругоёмкости пласта, $\beta_* = m_0 \beta_f + \beta_c \frac{\lambda_p}{\lambda_m}$, m_0 – пористость жидкости в невозмущенных пластовых условиях, β_f – коэффициент сжимаемости жидкости, β_c – коэффициент сжимаемости пористой среды, λ_p – время релаксации давления при постоянной пористости. Все указанные параметры (коэффициенты) заданы и положительны. [1].

Уравнение (1) удовлетворяет начальным условиям:

$$p(t, x) = p^0(x) \text{ при } t = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = p^1(x) \text{ при } t = 0, \quad (4)$$

и граничному условию

$$a(t, x) p(t, x) + b(t, x) \frac{\partial p(t, x)}{\partial \mathbf{n}} = \varphi(t, x) \text{ на } \partial\Omega \times [0, T], \quad (5)$$

где $p^0(x)$, $p^1(x)$, $a(t, x)$, $b(t, x)$, $\varphi(t, x)$ – заданные функции, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль.

Сначала, начально-краевая задача (1), (3), (4), (5), после дискретизации только по временной переменной, решается численно с помощью алгоритмов «блуждания по сферам»,

«блуждания по шарам», «блуждания по решеткам» методов Монте–Карло и вероятностно-разностным методом. Затем, методами Монте–Карло оценивается $\text{grad}_x p(t, x)$, и, из уравнения (2) оценивается $\mathbf{W}(t, x)$ во всех дискретных точках по времени. [2], [3], [4], [5].

Литература

1. Молокович Ю.М., Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. Издательство Казанского университета. Казань, 1987. – 106 с.
2. Shakenov K. Solution of one mixed problem for equation of relaxational filtration by Monte Carlo methods. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Volume 93. Advances in High Performance Computing and Computational Sciences. Springer. Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2006. Pages 205 – 210.
3. Shakenov K.K. Solution of problem for one model of relaxational filtration by probability– difference and Monte Carlo methods. Polish Academy of Sciences. Committee of Mining. //Archives of Mining Sciences. Volume 52, Issue 2, Krakow, 2007. Pages 247 – 255.
4. Shakenov K. The Solution of the Initial Mixed Boundary Value Problem for Hyperbolic Equations by Monte Carlo and Probability Difference methods. Trends in Mathematics. Fourier Analysis. Pseudo-differential Operators, Time-Frequency Analysis and Partial Differential Equations. Birkhäuser. © Springer International Publishing Switzerland 2014. P. 349 – 355.
5. Шакенов К.К. Решение задач Неймана для уравнений Гельмгольца и Пуассона и вычисление производной от решения методами Монте–Карло. Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. № 3 (26), 2001, Алматы, 2001. С. 26 – 33.

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГУРСА В КВАДРАТУРАХ

ON THE SOLVABILITY OF THE THREE-DIMENSIONAL PROBLEM GOURSAT IN QUADRATURES

Шакирова И.М.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Россия, Казань
inna.sarvarova@yandex.ru*

В параллелепипеде $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$ рассмотрим уравнение Бианки

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0 \quad (1)$$

с условиями

$$u|_{\bar{x}} = \varphi_1(y, z), \quad u|_{\bar{y}} = \varphi_2(x, z), \quad u|_{\bar{z}} = \varphi_3(x, y), \quad (2)$$

где X, Y, Z – грани D при $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ соответственно, и $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ такие, что $\varphi_2(x, z_0) \equiv \varphi_3(x, y_0), \quad \varphi_1(y, z_0) \equiv \varphi_3(x, y_0), \quad \varphi_1(y_0, z) \equiv \varphi_2(x_0, z).$

В настоящем сообщении речь идет об отыскании вариантов условий, достаточных для построения точных решений рассматриваемой задачи, получаемые путем факторизации левой части (1) операторами первого и второго порядка. Выяснено, что при выполнении условий

$$a_x + ab - e \equiv c_x + bc - f \equiv d_x + bd - g \equiv 0 \quad (3)$$

уравнение (1) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)(u_{yz} + au_y + cu_z + du) = 0. \quad (4)$$

А тождества

$$b_y + bc - f \equiv b_z + ab - e \equiv b_{yz} + ab_y + cb_z + bg - g \equiv 0 \quad (5)$$

обеспечивают запись этого уравнения с помощью тех же операторов, но взятых в обратном порядке

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + a \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} + d\right)(u_x + bu) = 0. \quad (6)$$

При выполнении тождеств (3) с помощью (4) получаются две задач:

$$v_x + bv = 0, \quad v(x_0, y, z) = \lambda(y, z) = \left(\varphi_{1_{yz}} + a\varphi_{1_y} + c\varphi_{1_z} + d\varphi_1\right)_{x=x_0}, \quad (7)$$

$$u_{yz} + au_y + cu_z + du = v(x, y, z), \quad u(x, y_0, z) = \varphi_2(x, z), \quad u(x, y, z_0) = \varphi_3(x, y) \quad (8)$$

При этом (7) решается непосредственным интегрированием уравнения первого порядка, после чего задача (8) является классической задачей Гурса с двумя независимыми переменными y, z , где x можно рассматривать в качестве параметра. Решение для (8) дается, например, в [1, с. 14], но формула там зависит от функции Римана рассматриваемого уравнения. В [1, с. 15], [2], [3] приведены различные варианты условий на коэффициенты уравнения вида (8), достаточных для построения функции Римана в явном виде, что влечет за собой разрешимость задачи Гурса в квадратурах. Всего имеется семь таких вариантов.

В случае тождеств (5) тоже получается пара задач аналогичных (7), (8). Меняя в указанном выше рассуждении ролями переменные x, y, z при определенных требованиях, играющих роль (3) или (5), можно сформулировать еще четыре задачи Гурса типа (8), решение каждой из которых оказывается эквивалентно решению исходной задачи (1), (2). К каждой из шести получаемых задач можно применить любой из упомянутых выше семи вариантов условий построения функции Римана в явном виде. Нетрудно видеть, что в результате всех перечисленных действий мы приходим к 42 различным случаям условий разрешимости задачи (1), (2) в квадратурах.

Литература

1. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское матем. об-во, 2001. 226 с.
2. Жегалов В. И. К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций // Неклассические уравнения матем. физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. С. 73-79.
3. Жегалов В.И., Сарварова И.М. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // Изв. вузов. Математика, 2013, №3. С. 68-73.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

REGARDING THE INVESTIGATION OF A SPECIAL SYSTEM OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Шамсудинов Ф.М.

*Курган- Тюбинский государственный университет им.Носира Хусрава, Таджикистан
faizullo100@yahoo.com*

Пусть D прямоугольник $D = \{(x, y): 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$.

Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y=0, 0 < x < \delta_1\}, \Gamma_2 = \{x=0, 0 < y < \delta_2\}.$$

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x,y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x,y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a_2(x,y)}{r^\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_2(x,y)}{r^\gamma} u = \frac{f_2(x,y)}{r^\gamma}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{b_2(x,y)}{r^\delta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_3(x,y)}{r^\delta} u = \frac{f_3(x,y)}{r^\delta}, \end{cases} \quad (1)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_j(x, y)$, $b_j(x, y)$, $c_k(x, y)$, $f_k(x, y)$, $j = \overline{1, 2}$,

$k = \overline{1, 3}$ - заданные функции области D , $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma = \delta = 1$.

Проблеме исследования уравнений и переопределенных систем с сингулярными и сверх сингулярными коэффициентами посвящены много работ.

В настоящей работе на основе способа разработанного Н.Раджабовым, получено представление многообразия решений системы уравнений (1) при $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma = \delta = 1$.

В дальнейшем обозначим $C_2(D)$ – класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D и такие, что $u_{xy} \in C(D)$.

Пусть третье уравнение системы (1) является главным. Тогда в этом случае получим следующее утверждение

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (1) $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma = \delta = 1$ коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям

$$1) a_2(x, y), b_2(x, y) \in C_x^1(\overline{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\overline{D}),$$

$$b_1(x, y), c_j(x, y), f_j(x, y) \in C(\overline{D}), j = \overline{1, 3};$$

$$1) c_3(x, y) = r \partial_y(b_2(x, y)/r),$$

$$c_1(x, y) = r^{\alpha+\beta} \partial_x(a_1(x, y)/r^2) + a_1(x, y)b_1(x, y),$$

$$c_2(x, y) = r \partial_x(a_2(x, y)/r);$$

$$2) |b_2(x, y) - b_2(0, 0)| \leq H_1 r^{\delta_1}, H_1 = \text{const}, 0 < \delta_1 < 1,$$

$$|a_2(x, o) - a_2(o, o)| \leq H_2 x^{\gamma_1}, H_2 = \text{const}, o < \gamma_1 < 1;$$

$$3) \quad b_2(o, o) < o, \quad a_2(o, o) > o$$

$$4) \quad a) \quad \partial_x (b_2(x, y)/r) = \partial_y (a_2(x, y)/r) \quad \text{в } D,$$

5) $b)f_1(x, y)$ и $f_3(x, y), f_2(x, y)$ и $f_3(x, y)$ связаны при помощи коэффициентов системы в явном виде;

$$6) \quad f_3(x, y) = o(r^{\delta_2}), o < \delta_2 < 1, f_2(x, o) = o(x^{\gamma_2}), o < \gamma_2 < 1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде

$$u(x, y) \equiv X_1(\varphi_3(x), \varphi_2(x), f_3(x, y)), \quad (2)$$

$$\varphi_3(x) \equiv N_1(c_1, f_2(x, o)), \quad \varphi_2(x) = \psi_1(o) + \int_o^x \frac{f_3(t, o)}{t} dt,$$

где $X_1(\varphi_3(x), \varphi_2(x), f_3(x, y)), N_1(c_1, f_2(x, o))$ -известные интегральные операторы, c_1 -произвольная постоянная.

УДК 517.956

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

CONJUGATION PROBLEMS FOR HIGH ORDER NONCLASSICAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Шарин Е.Ф.¹, Кожанов А.И.²

¹ФГАОУ ВПО "Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К.Аммосова", Якутск;

²Институт математики имени С.Л. Соболева, Новосибирск
¹ef.sharin@s-vfu.ru, ²kozhanov@math.nsc.ru

В математике и в математическом моделировании давно изучаются так называемые задачи сопряжения, иначе обобщенные задачи дифракции. Задачи с условиями сопряжения естественным образом возникают в теории уравнений смешанного типа. Изучению таких уравнений посвящено много работ.

В [1] авторы изучали задачи сопряжения для дифференциальных уравнений

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} u - h(x) u_{xx} + c(x, t) u = f(x, t)$$

($D_t^{2p} = \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}, p \geq 1$) в случае строго положительной функции $h(x)$, непрерывной всюду

за исключением, быть может, одной внутренней точки области определения. В работе [2] изучаются аналогичные задачи для уравнения составного типа

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} (u - g(x) u_{xx}) - h(x) u_{xx} + c(x, t) u = f(x, t)$$

в случае строго положительной функции $g(x)$ и не обязательно положительной функции $h(x)$.

Литература

1. Кожанов А.И., Шарин Е.Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических уравнений высокого порядка // Украинский математический вестник. 2014. Т.11, № 2, С. 181-202.
2. Кожанов А.И., Шарин Е.Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических уравнений высокого порядка. II // Математические заметки СВФУ. 2014. Т.12, № 1, С. 18-28.

УДК 517.926; 517.27

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ, ЛИНЕЙНОЙ ПО УПРАВЛЕНИЮ, С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ NUMERICAL SOLVING AN NONLINEAR TIME-OPTIMAL-CONTROL PROBLEM LINEAR IN CONTROL WITH CONSTANT DELAY

©Шевченко Г.В.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
shevch@math.nsc.ru*

Характерной особенностью задач оптимального управления для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием является то, что можно отдельно находить решение сопряжённой системы, а затем, используя её решение, определять экстремальное управление u^{ext} , и при $u = u^{\text{ext}}$ находить решение прямой системы. Это следствие того, что в этом случае сопряжённая система не зависит от фазовых состояний исходной системы, как имеющих запаздывание, так и не имеющих.

Задачи оптимального управления для систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием в общем случае не позволяют отдельно находить решения сопряжённой и прямой систем. Краевая задача, возникающая из принципа максимума Понтрягина, содержит уравнения, зависящие одновременно от состояний, зависящих от запаздывания, и от состояний, имеющих опережение. И первый вопрос, а существует ли вообще решение такой краевой задачи? Поэтому необходимо выделить класс нелинейных задач, для которых решение краевой задачи существует, и найти его подкласс, в котором возможно "некоторое подобие" раздельного их решения.

Этот класс непуст, поскольку содержит по крайней мере систему, рассматриваемую ниже. Более того, как показано она является элементом выше указанного подкласса.

Пусть управляемый динамический процесс описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений с постоянным временным запаздыванием $h > 0$ вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + f_1(x(t)) + f_2(x(t-h)) + Cu(t), \quad (1)$$

где

x – n -мерный вектор фазового состояния объекта; $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-h, 0]$, φ – заданная непрерывная функция; $A(t)$ и $B(t)$ – непрерывные квадратные матрицы размера n ; $f_1(x(t))$ и

$f_2(x(t-h))$ – непрерывные и непрерывно дифференцируемые по своим аргументам вектор-функции; $C(t)$ – непрерывная матрица размера $n \times s$; u – s -мерный вектор управляющих воздействий (управление), компоненты которого являются измеримыми функциями и стеснены ограничением

$$u(t) \in U; \quad (2)$$

U – компактное выпуклое тело из $\mathbb{R}^s$, причём 0 является внутренней точкой множества U .

Предполагается, что система (1) управляема в начало координат при любой заданной непрерывной функции φ .

Задача. Требуется найти допустимое управление $u^0(t)$ ($t \in [0, T]$), переводящее систему (1) при заданной функции φ в начало координат за наименьшее время $T = T_{\text{opt}}$.

Для этой задачи оптимального быстрогодействия предложен итерационный алгоритм численного решения и доказана его сходимость к оптимальному решению. Использование принципа максимума Понтрягина для поставленной задачи приводит к необходимости решения краевой задачи вида (1),

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = - \left\langle \left(A^*(t) + \frac{\partial f_1(x(t))}{\partial x} \right), \psi(t) \right\rangle \\ - \begin{cases} \left\langle \left(B^*(t+h) + \frac{\partial f_2(x(t))}{\partial x} \right), \psi(t+h) \right\rangle, & t \in [0, T-h], \\ 0, & t \in [T-h, T] \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

с начальной функцией $\varphi(t)$, $\psi(T) = c^*$ и управлением $u = u^* = u^*(t)$, где

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in U} \langle \psi(t), C^* v \rangle \quad (t \in [0, T]).$$

Поиск решения этой краевой задачи производится по следующей схеме.

Берётся траектория $\tilde{z}(t)$, $t \in [0, T]$, системы (1). При $x(t) = \tilde{z}(t)$ находится решение $\tilde{\psi}(t)$ сопряжённой системы (3) с граничным условием $\psi(T) = c^*$. Затем находится решение $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, T]$, системы (1) с начальной функцией φ и управлением $u = u^*(t) = \arg \max_{v \in U} \langle \tilde{\psi}(t), C^* v \rangle$. Если $\|\tilde{x}(T) - \tilde{z}(T)\| > \varepsilon$, то полагаем $\tilde{z}(T) = \tilde{x}(T)$, $t \in [0, T]$, и повторяем цикл. При $\|\tilde{z}(T) - \tilde{x}(T)\| \leq \varepsilon$ решение краевой задачи (1), (3) найдено с заданной точностью ε .

Показано, что такая схема даёт решение краевой задачи (1), (3).

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. Шевченко Г.В. Метод численного решения нелинейной задачи оптимального быстрогодействия с аддитивным управлением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 11. С. 1843-1853.

О МНОЖЕСТВЕННЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ ДЛЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ON MULTIPLE SOLUTIONS OF THE GINZBURG-LANDAU NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A SUPERCONDUCTING PLATE IN A MAGNETIC FIELD

Шейна А.А.

ВЦ РАН,
Россия, Москва
sheinaa@yandex.ru

Проводится аналитико-численный анализ множественных решений одномерной нелинейной краевой задачи (КрЗ) для модели Гинзбурга-Ландау (ГЛ) [1]. Задача описывает стационарные состояния сверхпроводящей бесконечной пластины конечной толщины, помещенной в магнитное поле, и в безразмерных переменных имеет вид (см. [2], [3]):

$$a'' - \psi^2 a = 0, \quad \psi'' + \kappa^2 (\psi - \psi^3) - a^2 \psi = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (1)$$

$$a(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad a'(D) = h, \quad \psi'(D) = 0. \quad (2)$$

Здесь все величины вещественны; D, h и κ – безразмерные положительные параметры: D – полуширина пластины, h – напряженность магнитного поля, κ – параметр теории ГЛ, характеризующий материал сверхпроводника; $a(x)$ – потенциал магнитного поля, $\psi(x)$ – “эффективная волновая функция” (“параметр порядка”), где величина $\psi^2(x)$ равна концентрации “сверхпроводящих электронов в металле”:

$$0 \leq \psi^2(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D]. \quad (3)$$

Для КрЗ (1), (2) справедливо: 1) ограничению (3) удовлетворяют все решения; 2) для любого фиксированного $h > 0$ пара $\{a(x, h), \psi(\tilde{\alpha}, h)\} = \{h\tilde{\alpha}, 0\}$ есть решение (единственное с $\psi(x, h) \equiv 0$), и существует такое $h_{fin} = h_{fin}(\kappa, D) > 0$, что при $h > h_{fin}$ других решений нет; 3) если $\{a(x, h), \psi(\tilde{\alpha}, h)\}$ – решение, то $\{a(x, h), -\psi(\tilde{\alpha}, h)\}$ – тоже решение (для определенности далее имеем ввиду те решения, для которых $\psi(0, h) = \psi_0(h) > 0$).

В [3], [4] представлен аналитико-численный анализ нелинейной КрЗ (1), (2) с ограничением $0 \leq \psi(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D]$. Предложен простой численный метод нахождения всех таких решений в широком диапазоне изменения параметров (при фиксированном значении $h = h(\kappa, D) > 0$ может быть до трех решений), в том числе не найденные ранее другими методами (см. [2]) динамически неустойчивые и неизолированные решения; построены более подробные и точные непрерывные диаграммы состояний пластины (зависимости $\psi_0(h)$ при $0 \leq h \leq h_{fin}$), описывающие ее переход из сверхпроводящей фазы в нормальную (и наоборот) при усилении (ослаблении) магнитного поля, что позволило детально изучить явление магнитного гистерезиса и эволюцию диаграмм с изменением параметров κ и/или D , и др.; поставлены и изучены спектральные задачи для исследования динамической (не)устойчивости решений в рамках линейной теории возмущений и для априорного нахождения пороговых значений магнитного поля.

Целью данной работы является развитие методов и подходов [3], [4] для нахождения тех решений КрЗ (1), (2), для которых ψ -компоненты могут менять знак на интервале $(0, D)$. Такие решения, которые представляют как математический, так и физический интерес, особенно для толстых пленок и больших значений κ (см., например, [5]), еще более затруднительно находить итерационными методами типа релаксации [2]; неслучайно в [5] при попытках находить такие решения алгоритм их вычислений не приводится (по утверждению автора, ввиду его сложности).

Для развития алгоритма [3] предварительно изучается вспомогательная однородная КрЗ для состояний пластины в отсутствие магнитного поля:

$$\tilde{\psi}'' + \kappa^2 (\tilde{\psi} - \tilde{\psi}^3) = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad \tilde{\psi}'(0) = 0, \quad \tilde{\psi}'(D) = 0. \quad (4)$$

Нетривиальные решения $\tilde{\psi}(x)$ этой задачи, отличные от ± 1 , выражаются через эллиптические функции (см. [5]). Они являются “огibaющими” для соответствующих ψ -решений исходной КрЗ (1), (2) (с тем же числом узлов на $(0, D)$), определяя верхние и нижние границы для значений ψ -решений на $[0, D]$. Вспомогательная КрЗ (4) при значениях параметра κD таких, что $l\pi \leq \kappa D < (l+1)\pi$, где $l \geq 1$, имеет (с точностью до знака) l узловых решений $\tilde{\psi}^{(s)}(x)$ ($s=1, \dots, l$), где $\tilde{\psi}^{(s)}(x)$ имеет s нулей на $(0, D)$.

В численных экспериментах обнаружено, что для некоторых фиксированных значений $h = h(\kappa, D) > 0$ существуют до двух решений исходной КрЗ (1), (2), для которых ψ -компоненты имеют одинаковое число узлов на $(0, D)$. При этом одно из этих решений отвечает начальным данным, лежащим внутри гистерезисной петли, и не может быть найдено итеративными методами типа [2].

В результате, развитие подхода [3], [4] дало возможность провести дополнительный математический анализ и более полные численные исследования множественных решений нелинейной КрЗ (1), (2) в широком диапазоне изменения параметров, осуществить построение отвечающих им диаграмм состояний пластины в магнитном поле с описанием различных фазовых переходов в режимах ослабления или усиления поля, выявить случаи магнитного гистерезиса, и др.

Автор выражает благодарность Н.Б. Конюховой за руководство работой.

Литература

1. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. К теории сверхпроводимости// ЖЭТФ, 20(12), 1064–1082 (1950).
2. Zharkov, G.F. First and Second Order Phase Transitions and Magnetic Hysteresis in a Superconducting Plate// J. Low Temp. Phys. 130(1/2), 45–67 (2003).
3. Дышко А.Л., Жарков Г.Ф., Конюхова Н.Б., Курочкин С.В. Аналитико-численные исследования нелинейной краевой задачи для сверхпроводящей пластины в магнитном поле// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 45(9), 1651–1676 (2005).
4. Konyukhova, N.B. and Kurochkin, S.V. On Nonlinear Ginzburg–Landau Boundary Value Problem for a Superconducting Plate in a Magnetic Field// Intern. Scientific Journal Spectral and Evolution Problems. 17, 125–136 (2007).
5. Marcus, P.M. Exact Solution of the Ginzburg–Landau Equations for Slabs in Tangential Magnetic Fields// Reviews of Modern Physics. 294–299 (1964).

**РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В РАМКАХ
МОДЕЛИРОВАНИЯ АКВАТОРИЙ С «ЖИДКИМИ» ГРАНИЦАМИ****INVESTIGATION OF ONE INVERSE PROBLEM IN CASE OF
MODELING WATER AREAS WITH “LIQUID” BOUNDARIES*****Шелопут Т.О.*, Агошков В.И.****

** Московский физико-технический институт (государственный университет),
Россия, Москва
sheloput@phystech.edu*

*** Институт вычислительной математики РАН, Россия, Москва
agoshkov@inm.ras.ru*

В гидродинамике часто возникает проблема моделирования акваторий (океанов, морей, рек и т.д.) с «жидкими» границами. Под понятием «жидкой» (открытой) в данном случае подразумевается часть границы, на которой нарушается условие непротекания (например, проливы, устья рек, границы раздела океанов). Нередко эффектами такого рода пренебрегают, считая «жидкую» границу «твердой». В настоящее время имеется несколько подходов к моделированию открытых границ. Например, можно использовать приближение «материальной» границы (см. [1]) и другие приближения. Один из распространенных способов заключается в следующем. Допустим, необходимо рассчитать залив некоторого моря, тогда рассчитывается модель данного моря с крупной сеткой, и искомая функция интерполируется на «жидкую» границу залива. Также, если поведение граничной функции заведомо известно по многолетним наблюдениям, эти данные можно использовать для ее приближенного задания. Однако, применение таких приближений не всегда является обоснованным и может привести к понижению точности полученного решения.

Данная работа посвящена одному из методов рассмотрения задач моделирования акваторий с «жидкими» границами. В рамках данного подхода граничное условие на «жидкой» части границы считается неизвестным, исследуется и решается обратная задача по восстановлению граничной функции. Работа основана на теории сопряженных уравнений [2], оптимального управления и общей методологии исследования и решения обратных задач, изложенной в [3]. Методология применяется к обратной задаче для нестационарного уравнения конвекции-реакции-диффузии, описывающего распространение тепла и солености. Работа включает в себя результаты численных экспериментов, проведенных для акватории Балтийского моря.

Результаты данной работы могут быть использованы в дальнейшем для решения более сложных обратных задач и задач ассимиляции данных наблюдений в акваториях с «жидкими» границами. Также данная работа является одним из этапов в разработке алгоритмов для расчета скоростей, уровня, температуры и солености, применимых к реальным объектам.

Литература

1. Гилл А. Динамика атмосферы и океана [Книга]. - М. : Мир, 1986. - Т. 1 : стр. 108-115.
2. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения [Книга]. - М. : ИВМ РАН, 2001.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект номер 14-11-00609)

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект номер 13-01-00753)

3. Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. [Книга]. - М. : ИВМ РАН, 2003.

УДК 517.956

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

ON SOME MATHEMATICAL MODELS OF FILTRATION THEORY

Шергин С.Н., Пятков С.Г.

*Югорский государственный университет,
Россия Ханты-Мансийск,*

ssn@ugrasu.ru
s_pyatkov@ugrasu.ru

Работа посвящена рассмотрению обратных задач для некоторых математических моделей, возникающих в теории фильтрации. Вместе с решением определяются неизвестная правая часть и коэффициенты в псевдопараболическом уравнении 3-го порядка. Уравнения такого типа и более общий класс уравнений - уравнения типа Соболева возникают при описании процессов процессов фильтрации, тепломассопереноса, волновых процессов и во многих других областях.

Рассматривается задача об определении вместе с решением U неизвестной правой части и коэффициентов в уравнении:

$$LU_t + MU = f, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где L, M – операторы второго порядка по переменным x . G – ограниченная область в R^n ($n \geq 1$) с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение дополняется краевыми и начальными условиями:

$$U|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad (2)$$

$$U|_{t=0} = U_0(x), \quad (3)$$

В качестве условий переопределения рассматриваются значения решения U в отдельных точках. То есть условия переопределения имеют вид

$$U(x_i, t) = \alpha_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (4)$$

где x_i произвольные точки лежащие в G .

Правая часть (1) имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t) f_i(x, t) + f_0(x, t), \quad f_i \in L_\infty(0, T; L_p(G)) \quad (i = 1, 2, \dots, r_0), \quad (5)$$

где функции f_i даны. Часть коэффициентов оператора M зависящих от t считаются неизвестными, и оператор M имеет вид:

$$MU = M_{r_0} U + \sum_{k=r_0+1}^r c_k(t) M_k U,$$

$$M_k U = \sum_{i,j=1}^n b_{i,j}^k(x, t) U_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^k(x, t) U_{x_i} + b_0^k(x, t) U.$$

Условия согласования имеют вид: $\alpha_i(0) = U_0(x_i, t) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$.

А коэффициенты оператора L имеют следующий вид:

$$LU = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, t) U_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) U_{x_i} + a_0(x, t) U.$$

Основным результатом является доказательство теоремы о существовании единственного решения $(U, c_1, \dots, c_r)$ задачи (1)-(4) на промежутке $[0, \gamma_0]$ такое, что

$$U \in C([0, \gamma_0]; W_p^2(G)), \quad U_t \in L_p([0, \gamma_0]; W_p^2(G)), \quad c_i(t) \in L_p(0, \gamma_0) \quad (i=1, 2, \dots, r).$$

УДК 519.632

РАЗМЕР ОБЛАСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ КАК ПАРАМЕТР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ*

THE SIZE OF THE DOMAIN OF MEASUREMENTS OF THE ADDITIONAL INFORMATION IN THE CONTINUATION PROBLEM AS THE REGULARIZATION PARAMETER *

Шишленин М.А.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Россия, Новосибирск
mshishlenin@ngs.ru*

Некоторые проблемы интерпретации гравитационных и магнитных полей, связанных с разведкой полезных ископаемых, приводят к некорректной задаче Коши для уравнения Лапласа [1,2]. Предположим, что локальная часть Земли может быть описана как часть полупространства. Неоднородность распределения плотности под поверхностью $x = 0$ Земли вызывает напряженность гравитационного поля на поверхности Земли, отличное от своего среднего значения. Хотя эти отклонения малы в процентном выражении, они регистрируются гравиметрами. Эти данные используются в поисково-разведочных работах.

Целью исследования является определение расположения и формы подземных неоднородностей, основанное на гравиметрических данных измерений.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа (задача продолжения) [3,4]:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) : x \in (0, L_x), y \in (0, L_y)\},$$

$$u(0, y) = f(y), \quad u_x(0, y) = g(y).$$

Необходимо продолжить функцию $u(x, y)$ с границы $x = 0$ в область Ω .

Задача продолжения формулируется как обратная задача, решение которой строится методом минимизации целевого функционала.

Показано, что размер области измерения можно рассматривать как параметр регуляризации.

Приведены теоретические результаты и результаты численных расчетов.

Литература

[1] М.М. Лаврентьев. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1955. Т.102, № 2. С. 205-206.

[2] М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-09230) и Министерства образования и науки Российской Федерации.

[3] В.А. Козлов, В.Г. Мазья, А.В. Фомин. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т.31, № 1. С. 64-73.

[4] S.I. Kabanikhin, Y.S. Gasimov, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev, S. Kasenov. Regularization of the continuation problem for elliptic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, No. 6. P. 871-884.

УДК 517.95

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА*

CONJUGATION PROBLEMS FOR SOME NONCLASSICAL HIGH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Шубин В.В.*

* Новосибирский государственный университет, Россия, Новосибирск,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия Новосибирск
vlad.v.shubin@gmail.com

В работе рассматриваются задачи сопряжения для следующих неклассических дифференциальных уравнений

$$(-1)^{p+1} \frac{\partial^{2p+1} u}{\partial y^{2p+1}} + h(x)u_{xx} + c(x, y)u = f(x, y)$$

$$(-1)^{p+1} \frac{\partial^{2p+1}}{\partial y^{2p+1}} (g(x)u_{xx} + c_1(x, y)u) + h(x)u_{xx} + c_2(x, y)u = f(x, y)$$

в прямоугольнике $Q = (-1, 1) \times (0, Y)$, где p — целое неотрицательное число, $Y > 0$.

Предполагается, что $h(x), g(x)$ могут иметь разрыв первого рода при $x = 0$, причем $g|_{[-1, 0]}(x), h|_{[-1, 0]}(x) \in C^1[-1, 0]$, $g|_{[0, 1]}(x), h|_{[0, 1]}(x) \in C^1[0, 1]$ (значения в точке $x = 0$ понимаются как предельные значения слева и справа соответственно), $g(x) > 0$ при $x \in [-1, 1]$.

Во всех рассматриваемых задачах задаются краевые условия

$$u(-1, y) = 0,$$

$$u(1, y) = 0$$

и условия сопряжения

$$\alpha_1(y)u(-0, y) + \alpha_2(y)u(+0, y) + \alpha_3(y)u_x(-0, y) + \alpha_4(y)u_x(+0, y) = 0,$$

$$\beta_1(y)u(-0, y) + \beta_2(y)u(+0, y) + \beta_3(y)u_x(-0, y) + \beta_4(y)u_x(+0, y) = 0.$$

При $y = 0$ и $y = Y$ задаются краевые условия

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{при } k = 0, \dots, p,$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right|_{y=Y} = 0 \quad \text{при } k = 0, \dots, p-1$$

или

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-06582

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{при } k = 0, \dots, p,$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right|_{y=Y} = 0 \quad \text{при } k = 1, \dots, p.$$

Для второго уравнения также рассматривается начально-краевая задача с условиями

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{при } k = 0, \dots, 2p.$$

В работе доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений рассматриваемых задач, приводятся условия на коэффициенты уравнения и коэффициенты сопряжения достаточные для существования регулярных решений.

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ*

STUDY OF SENSITIVITY OF THE OPTIMAL SOLUTION OF VARIATIONAL DATA ASSIMILATION PROBLEMS*

Шутяев В.П.*, Пармузин Е.И.*

**Институт вычислительной математики Российской академии наук,
Россия, Москва
victor.shutyaev@mail.ru*

При математическом моделировании изменений климата для различных районов планеты важную роль играет теория чувствительности избранных функционалов по отношению к характеристикам континентов, Мирового океана, начальным данным, внешним источникам и внутренним параметрам задачи. Исследование чувствительности климата позволяет на основе реальных данных оценить ретроспективно качество моделей и найти новые механизмы, ответственные за формирование климата.

В настоящее время в связи с исследованиями глобальных изменений на планете Земля очень важной является проблема получения и рационального использования данных измерений с целью ретроспективного анализа в различных областях знаний. Математическая модель данной проблемы может быть сформулирована как задача об усвоении и обработке многомерных (включающих зависимость от временной и пространственных переменных) данных, представляющая собой одну из задач оптимального управления. Начиная с работ Л.С.Понтрягина, Н.Н.Красовского, Ж.-Л.Лионса, Г.И.Марчука постановки и изучение задач вариационного усвоения данных наблюдений на основе теории сопряженных уравнений привлекают внимание многих исследователей, занимающихся приложениями методов оптимального управления для практического решения тех или иных проблем (см. [1]-[2]). Наряду с разработкой и обоснованием алгоритмов численного решения задач вариационного усвоения данных наблюдений, важную роль играют свойства самого оптимального решения (см. [3]-[6]). Чрезвычайно важным является вопрос о чувствительности оптимальных решений задач

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-11-00609) и РФФИ (проект 15-01-01583).

вариационного усвоения к погрешностям данных наблюдений и параметрам моделей, малоисследованный до последнего времени.

В настоящей работе рассматривается проблема исследования чувствительности оптимального решения задачи вариационного усвоения данных наблюдений для нелинейной эволюционной модели. На основе соотношений, связывающих погрешности оптимального решения задачи вариационного усвоения с ошибками данных наблюдений через гессиан функционала стоимости, предложены алгоритмы вычисления коэффициентов чувствительности как норм операторов отклика, возникающих в уравнениях для погрешностей. Проведено численное исследование чувствительности оптимального решения на примере задачи вариационного усвоения данных наблюдений о температуре поверхности моря для модели термодинамики в постановке, аналогичной введенной в работе [7] (с целью восстановления потоков тепла на поверхности моря), на основе экспериментов по вычислению спектра гессиана и сравнению оптимальных решений в возмущенной и невозмущенной задачах вариационного усвоения в приложении к акватории Балтийского моря.

Литература

- 1.Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. - М., Наука, 1993, 224 с.
- 2.Шутяев В.П. Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. - М., Наука, 2001, 239 с.
- 3.Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P. On analysis error covariances in variational data assimilation. - SIAM J. Sci. Comput., 2008, v.30, no.4, pp. 1847–1874.
- 4.Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P. On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems. - J. Comp. Phys., 2010, v.229, pp. 2159–2178.
- 5.Gejadze I.Yu., Copeland G.J.M., Le Dimet F.-X., Shutyaev V. Computation of the analysis error covariance in variational data assimilation problems with nonlinear dynamics. - J. Comp. Phys., 2011, v.230, pp. 7923–7943.
- 6.Gejadze I., Shutyaev V.P., Le Dimet F.-X. Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation. - Quartely Journal of the Royal Meterological Society, 2013, v.139, pp. 1826-1841.
- 7.Parmuzin E.I., Shutyaev V.P. The study of solution sensitivity for the variational observation data assimilation problem in the Black Sea dynamics model. - Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2013, v.28, no.1, pp. 37–52.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**
**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SINGLE EQUATION OF
HYPERBOLIC-PARABOLIC TYPE FOTHE COCHY PROBLEM**
FOURTH ORDER

Шхагапсоев А.М.

*Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Институт прикладной математики и автоматизации»,
Россия, Нальчик
sh2ps@yandex.ru*

Рассматривается уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_y + \beta u_{xxx} + \gamma u_x = 0, & y > 0, \\ u_{xxxx} - 2au_{xxy} + a^2 u_{yyy} = 0, & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в конечной области $D = D_1 \cup D_2 \cup A_0 B_0$; $D_1 = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < h\}$; $D_2 = \{(x, y) : y < 0, -x < y < x - r\}$; $A_0 B_0 = \{(x, y) : 0 < x < r, y = 0\}$; $\beta, -\gamma, a = \text{const} > 0$.

Регулярным в области D решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^4(D_2)$, такую, что $u_{xxx}, u_y \in C(D_1)$ и при подстановке, которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача. Найти регулярное в области D решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u_{xx}(r, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u\left(\frac{x+r}{2}, \frac{x-r}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_2(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{x+r}{2}, \frac{x-r}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (5)$$

где n – внутренняя нормаль; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ – заданные функции и выполняются

условия: $\varphi_3(0) = \psi_1''(0), \psi_2'\left(\frac{r}{2}\right) = \psi_3'\left(\frac{r}{2}\right)$.

Задача (2), (3), (5) и $u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_1(x), 0 \leq x \leq r$, для уравнения (1) при $\beta = -1, a = 1$ исследована в [1].

Доказана следующая

Теорема. Если $\varphi_1(y) \in C^2[0, h], \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C^1[0, h], \psi_1(x) \in C^2[0, r], \psi_2(x), \psi_3(x) \in C^2[0, r]$, то задача (2) – (5) для уравнения (1) имеет и притом единственное решение.

Литература

[1] Шхагапсоев А.М. Краевая задача для уравнения гиперболо-параболического типа четвертого порядка с линеаризованным уравнением Кортевега-де-Фриза в параболической

части // Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики». Нальчик, 2014. С. 140 – 142.

УДК 517.958

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФОРМОЙ ЖЕСТКОГО
ВКЛЮЧЕНИЯ В ПЛАСТИНЕ КИРХГОФА — ЛЯВА***
**SHAPE CONTROL OF A RIGID INCLUSION IN THE KIRCHHOFF--
LOVE PLATE**

Щербаков В.В.*

** Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Россия, Новосибирск
sherbakov87@gmail.com*

В докладе рассматривается задача оптимального управления для краевой задачи теории упругости с неизвестными границами, описывающей равновесие пластины Кирхгофа — Лява с объемным жестким включением и трещиной. В качестве основы при формулировке модели взяты идеи, изложенные в [1]. Предполагается, что трещина выходит на границу жесткого включения. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия, не позволяющие противоположным берегам проникать друг в друга. Доказана разрешимость задачи оптимального управления, в которой целевой функционал совпадает с первой производной функционала энергии системы по длине трещины, а в роли функции управления выступает форма жесткого включения. Таким образом, оптимальная форма включения обеспечивает наиболее безопасное состояние равновесия системы с точки зрения критерия разрушения Гриффитса.

Литература

1. Хлуднев А.М. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 5. С. 98–110.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00017, 14-01-31182) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (МД-3123.2015.1).

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF OSCILLATIONS OF A BEAM

Юлдашева А.В.

*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугека,
Узбекистан, Ташкент
yuasv86@mail.ru*

Рассмотрим в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x)h(x, t) \quad (1)$$

и поставим для него следующую задачу: найти пару функций (u, p) , удовлетворяющих уравнению (1), начальным данным

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

граничным условиям

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, u_{xx}(0, t) = 0, u_{xx}(l, t) = 0 \quad (3)$$

и условию переопределения

$$\int_0^T H(t)u(x, t) dt = \delta x. \quad (4)$$

Прежде чем сформулировать основной результат, приведем некоторые преобразования и утверждения, нужные для основания разрешимости поставленной задачи. Обозначим

$$\sigma x = \int_0^T H(t)h(x, t) dt.$$

Пусть $u \in C_{x,t}^{4,2} Q_T \cap C_{x,t}^{3,1} \overline{Q_T}$, $p \in C[0, 1]$ и выполняются равенства (1)-(4). В этом случае пару функций (u, p) будем называть классическим решением задачи.

Умножим уравнение (1) на $H(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до T , получим

$$p(x) = \frac{1}{\sigma x} \left[\int_0^T H''(t)u(x, t) dt + \delta^4(x) \right]. \quad (5)$$

Лемма. Если выполнены следующие условия

$$H(t) \in C^2[0, T], H(T) = H'(T) = 0, \sigma x \geq \sigma_0 > 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

$$\delta x \in C^4[0, 1], \delta 0 = \delta l = \delta'' 0 = \delta'' l = 0,$$

то задачи (1)-(4) и (1)-(3), (5) эквивалентны.

Теорема. Если выполнены условия леммы, то задача (1)-(3), (5) однозначно разрешима.

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ТРЕХМЕРНОМ СЛОЕ ON THE EIGEN OSCILLATIONS IN THREE-DIMENSIONAL LAYER

Юмов И.Б.

Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ
igyumov@mail.ru

Во многих областях физики представляет важное значение исследование собственных колебаний в неограниченных волноводных областях.

В представленном докладе рассматривается задача о собственных колебаниях в трехмерном волноводе, образованном локальным гладким возмущением слоя между двумя плоскостями. Рассмотрен случай акустически жесткого компактного препятствия в слое.

При этом предполагается, что хотя бы одна из компонент границы слоя – акустически мягкая. Используя вариационный принцип минимакса, ([3]) построен пример существования собственных значений, лежащих левее точки отсечки непрерывного спектра.

Пусть $\Omega_0 := \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, z \in [0, d]\}$, где $d = \text{const} > 0$, и B есть компактная односвязная подобласть Ω_0 с гладкой границей $\partial B \in C^2$, $\Omega := \Omega_0 \setminus B$. Пусть $B(a_1, a_2)$ есть двухпараметрическое семейство растяжений множества B такое, что

$$B(a_1, a_2) = \{(x, y, z) \in \Omega_0 : (x/a_1, y/a_2, z) \in B\},$$

где $a_1, a_2 \geq 1$, $\Omega(a_1, a_2) = \Omega_0 \setminus B(a_1, a_2)$, $|a| = a_1 + a_2$.

Собственные колебания газа описываются следующей задачей для уравнения Гельмгольца: найти $u \in L_2(\Omega(a_1, a_2))$, такую, что

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{в } \Omega(a_1, a_2), \\ u(x, y, 0) = u_z(x, y, d) = 0, \\ u_{\vec{n}}|_{\partial B(a_1, a_2)} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Известно, что непрерывный спектр задачи (1) есть промежуток $[\Lambda_0^2, +\infty)$, где $\Lambda_0^2 = \pi^2/(4d^2)$. В работе показано, что если выполняется неравенство

$$\iiint_B \cos(\pi z/d) dx dy dz > 0, \quad (2)$$

то для достаточно большого $|a|$ задача (1) имеет собственное значение в интервале $(0, \Lambda_0^2)$, т.е. левее начала непрерывного спектра.

Литература

1. Rellich F. Das Eigenwertproblem zu $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren // Studies and Essays Presented to R. Courant, Interscience Publishers, New York, 1948. P.329-344.
2. Jones D.S. The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Pros. Camb. Phil. Soc. 1953. V.49, P.668-684.
3. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1989.
4. Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D. Existence theorems for trapped modes // Journal of Fluid Mechanics, 261, 1994, 21–31.
5. Назаров С.А. Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 5, С. 1086–1101.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

ASYMPTOTICALLY OPTIMAL ERROR FUNCTIONAL OF THE CUBATURE FORMULAS

Юмова Ц.Ж.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия,
Улан-Удэ
syum@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$ и $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, где m_k – неотрицательные целые, Ω – ограниченная с кусочно-гладкой границей $\Gamma(\Omega)$ область в E_n .

В работе [1] получена оценка снизу нормы функционала погрешности с любыми коэффициентами и любыми узлами в классе тех функций $\varphi(x) \in C_{\bar{m}}(A)$, у которых в рассматриваемой области определения частные производные вдоль выбранных координатных направлений до порядка $(m_k - 1)$ включительно, обладают свойством гладкости, а производные порядка m_k кусочно-непрерывны и ограничены. В монографии [2] получены оценки норм функционалов погрешности с равномерным распределением узлов, действующих в пространстве L_2^m непериодических функций.

В данной работе, используя вспомогательные леммы, доказана оценка снизу нормы произвольного функционала погрешности кубатурных формул с узлами на параллелепипедах в анизотропном пространстве Соболева.

Теорема. Пусть $\varepsilon_\Omega(x)$ – характеристическая функция области Ω , которая имеет кусочно-гладкую границу $\Gamma = \Gamma(\Omega)$. Тогда для любого функционала погрешности кубатурных формул общего вида

$$l_\Omega(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{\beta \in \Delta} \sum_{k=0}^n h^n D^{m_k} \delta(x - h\beta),$$

с узлами на вершинах параллелепипеда с шагом h_k при $h \rightarrow 0$ имеет место оценка снизу

$$\|l_{\Omega(C,x)}\|_{W_p^{(\Omega)}(\bar{m}^*)} \geq (\text{mes } \Omega)^{\frac{p-1}{p}} \|l(x)\|_{\tilde{W}_p^{(\Delta)}(\bar{m}^*)} h^{m^*} (1 + O(h))$$

Литература

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
2. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
3. Шойнжуров Ц.Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. – Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. – 274 с.
4. Юмова Ц. Ж. Интегрирование периодических функций в неизотропном пространстве Соболева $\tilde{W}_p^m(\Delta_{\bar{h}})$, $1 < p < \infty$ // Вестник БГУ, серия 13 «Математика и информатика», выпуск 1, г. Улан-Удэ, 2004, С. 152–159.

**К ПРОБЛЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ
МАГИСТРАНТОВ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ
ON THE PROBLEM OF MATHEMATICAL PREPARATION OF
GRADUATES OF NATURAL SCIENCE DIRECTIONS**

С.С. Янтранова

Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ
yantranova@mail.ru

Математическое моделирование – это описание в виде уравнений и неравенств реальных физических, химических, биологических, экологических, технологических и экономических процессов окружающего мира. Математическое моделирование сочетает в себе опыт различных отраслей науки о природе и обществе, прикладной математике, информатике и системного программирования для решения фундаментальных проблем. Результатом разработок бывает система математических моделей, которая описывает качественно новые и сложные закономерности функционирования объекта в новых условиях. Для их решения приходится привлекать фундаментальные знания из различных областей математики.

Ориентация в течении многих лет на технократический аспект образования, и как следствие, относительно большое количество часов на математику и физику, отсутствие необходимости обновлять и доказывать состоятельность тех или иных программ по данным дисциплинам привели к застою и девальвации математического, естественнонаучного и инженерного образования в глазах современного общества. Необходимым велением времени является расширение гуманитарной составляющей любого образования, в том числе и математического. Вполне естественным ответом было бы включение в традиционную программу по математике сведений по истории и методологии науки, экологии, безопасности жизнедеятельности, экономике и т.д. Поскольку этого не было сделано, в учебных планах появились новые дисциплины: экология, экономика, ОБЖ, основы права, культурология и другие. Это повлекло за собой уменьшение объема математики и естественнонаучных дисциплин в структуре общего и профессионального образования.

Дальнейшее развитие общества и появление новых информационных технологий, их быстрое совершенствование и проникновение во все сферы науки и техники, привело к осознанию новых задач образования таких, как информатизация образования, компьютерная грамотность и информационная культура. Самыми первыми приверженцами включения информатики в процесс образования были математики: академики А.П. Ершов, А.А. Самарский, С.В. Емельянов и др. В результате школах и вузах появилась новая дисциплина «Информатика». Неприятие данного процесса основным контингентом преподавателей математики привело к тому, что математики все дальше отходили процесса интеграции математики и информатики, а кафедры информатики комплектовались из преподавателей вычислительной техники и других специальных дисциплин.

Уменьшение количества часов на математику произошло, также по причине перераспределения учебной нагрузки в пользу увеличения самостоятельной работы студентов. В некоторых вузах учебные планы предусматривают курсовые работы по математике, открывающие новые возможности для совершенствования математического образования. Выполнение курсовых работ вызывает много нареканий со стороны преподавателей, так как студенты используют часто готовые рефераты, скачанные из Интернета. Здесь есть над чем работать математическим кафедрам, так как выполнение курсовых работ для студентов – это простая формальность.

Переход на двухуровневую систему высшего образования – на бакалавриат и магистратуру требует пересмотра структуры научных знаний, уровней интеграции и новых подходов математической подготовки в сфере профессиональной подготовки будущего специалиста.

Вместо усиления роли математики и фундаментальных наук в базовом образовании на младших курсах читаются специальные дисциплины, тем самым еще больше потеснив математику. Однако, появление магистратуры, дает прекрасную возможность познакомить студентов с достижениями современной математики и возможностями ее применения в естественнонаучных исследованиях. Часто используемый термин «прикладная направленность» можно наполнить новым содержанием. И здесь есть возможность математикам проявить должную активность, чтобы занять достойное место в системе подготовки магистров. В течение двух лет преподавателями кафедры геометрии читался курс «Математическое моделирование биологических процессов» для магистрантов эколого-биологических специальностей. Также в последнее время появился курс «Прикладная математика» для магистрантов специальности «Земельный кадастр». Что в первом случае так и во втором часы, отводимые на данные курсы ничтожно малы – это 14 часов аудиторных при этом, данные часы отводятся на лабораторные работы, 4 часа на зачет, следовательно, основная нагрузка – самостоятельная работа магистрантов.

Поэтому, зачетные работы были сформулированы в виде проектов, которые включали задания с элементами математического моделирования и содержали материал в соответствии научному направлению факультета или будущей специальности магистрантов.

Кроме проектов магистранты должны были подготовить доклады по различным разделам математики. Например, магистранты эколого-биологического направления были предложены доклады по темам: «Биомасса популяции, как приложение определенного интеграла», «Дифференциальные уравнения в теории эпидемии», «Использование математического понятия «точки перегиба» в биохимии». Для магистрантов специальностей «Городской кадастр» и «Земельный кадастр» была предложена тема доклада: «Измерение геометрических величин в сферической, эллиптической и гиперболической геометриях». А также была проведена лабораторная работа на тему: «Применение многократных интегралов для измерения геометрических величин». Лабораторная работа проводилась с использованием современных информационных технологий, к которой были привлечены студенты-дипломники с Института Математики и Информатики. Интерес был обоюдный, так как разработка таких занятий с использованием современных информационных технологий являлась частью экспериментальных исследований будущей дипломной работы для математиков.

В заключении данной работы, как геометр приведу верную аксиому - предметное содержание естественнонаучного образования должно включать все больше элементов прикладной математики.

Литература

1. Концепция российского математического образования. Версия от 13 февраля 2013

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОТОКА ВОЗДУХА, ПРИЧИНЯЮЩЕГОСЯ КОНДЕНСАЦИЕЙ ВОДЯНОГО ПАРА

MODEL OF A VERTICAL FLOW OF AIR, CAUSED BY CONDENSATION OF WATER VAPOR

Яшима Х.Ф.*, Гомрани С.*, Марин Антуня Х.**

* *Université 8 Mai 1945 de Guelma, Algérie, Guelma*
hisaoofujitayashima@qq.com, sarra.ghomrani@hotmail.fr

** *Universidad de La Habana, Cuba, La Habana*
marin@fisica.uh.cu

Как известно, конденсация водяного пара даст скрытое тепло, которое причинит восходящее движение воздуха, а восхождение воздуха в свою очередь причинит конденсацию водяного пара. Возрастание восходящего движения воздуха будет задерживаться трением падающих капель, произведенных конденсацией. Рассматриваем этот процесс в вертикальном высоком цилиндре и моделируем его одномерными интегро-дифференциальными уравнениями. Точнее, речь идет о уравнениях

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_z (\rho v) &= -H_{tr}, \\ \rho(\partial_t v + v \partial_z v) &= -R_1 \partial_z (\rho T) - g[\Sigma + \rho] + f, \\ \rho c_v (\partial_t T + v \partial_z T) - R_1 T (\partial_t \rho + v \partial_z \rho) &= (R_1 T + L_{tr}) H_{tr}, \\ H_{tr} &= (\pi_{vs}(T) \partial_z \log \rho - \partial_z \pi_{vs}(T)) v, \\ \Sigma &= (1/z_1) \int_{[0,t]} \varphi(t-s) \int_{[0,z_1]} H_{tr}(z,s) dz ds, \\ f &= \rho v (R_1 \rho(z_1) T(z_1) - p_{ex}(z_1)) \left(\int_{[0,z_1]} \rho v dz \right)^{-1},\end{aligned}$$

где ρ — плотность, v — скорость, T — температура, R_1 — постоянная газов, g — ускорение сила тяжести, L_{tr} — скрытое тепло, $\pi_{vs}(T)$ — плотность насыщения водяного пара, $\varphi(\tau)$ — вероятность того, чтобы капля осталась во время τ после ее образования, $p_{ex}(z_1)$ — внешнее давление в $z = z_1$; уравнения рассматриваются в области

$$0 < z < z_1, \quad 0 < t < \infty.$$

Численное решение этих уравнений ([1]) показывает, что в начале скорость воздуха растет очень быстро, а потом решение стабилизуется. Нам кажется, что решение хорошо соответствует явлениям, производящимся в реальной атмосфере. Можно принимать в счет тоже вязкость и теплопроводность в уравнениях, но существенно это не изменяет решение.

Литература

[1] Ghomrani, S., Marín Antuña, J., Fujita Yashima, H.: Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo numérico. *Rev. Cubana Física*, 2015.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

B.Uuganbayar, D.Oyunbileg. The fractional discrete model with one dimension	3
Bukhgeim A.L. Zeta function, riemann hypothesis, and inverse problems	4
Chumakov G.A. Almost orthogonal quasi-isometric grids Почти ортогональные квази-изометрические сетки	6
Chumakova N.A., Noskov A.S. Nonlinear dynamics of mathematical models of catalytic systems. Нелинейная динамика математических моделей каталитических систем	7
H.Barucq, A.Bendali, J.Diaz, M'Barek Fares, S.Tordeux. A discontinuous galerkin method to solve the helmholtz equation in heterogenous media	8
Ecalle J. Прямые и обратные задачи в теории сингулярных ОДУ с помощью резургентного анализа Direct and inverse problems for singular ODE's in the light of resurgent analysis	8
Lyubanova A.Sh. Inverse problems for the nonlinear stationary equations. Обратные задачи для нелинейных стационарных уравнений	10
Muravnik A.B. On compactification of solutions of quasilinear parabolic inequalities	11
Popivanov N. Pohozhaev identities and applications for quasi-linear equations of mixed elliptic-hyperbolic type	13
Rutkauskas S. On the dirichlet type problem to degenerate at a line elliptic systems	14
Sattorov E.N., Ermamatova F.E. On the continuation of the solutions of a generalizedcauchy-riemann system	15
Suragan D., Baikonys A. Boundary integral conditions for the Kohn laplacian on the heisenberg group	16
Batzul T., Chimedlodoi B., Uurthaikh Sh.. Asymptotic stability linear differential equation with diagonal periodic coefficients. Асимптотическая устойчивость линейного дифференциального уравнения с диагонально-периодическими коэффициентами	16
Tani A. Classical solvability of the radial viscous fingering problem in a hele-shaw cell	17
Абдрахманов А.М. О краевой задаче для системы Бицадзе-Янушаускаса. Bitsadze-Yanusauskas system's boundary value problem	18
Абдрахманова А.А., Павлов В.П. Моделирование одностороннего нагрева стеклопластикового стержня с упругой опорой Modeling of fiberglass rod with the elastic support's one-sided heating	18
Абдуллаев А.А. Об одной задаче с конормальной производной для уравнения эллиптического типа второго рода About one problem with conormal derived for elliptical type equation of the second kind	20

Абдуллаев О.Х.

Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором.

Non-local problem for the loaded mixed type equation with the integrated operators 21

Абдуллаев Х.Т.

Методы для управления, планирования и организации здравоохранения.

Mathematical methods for the management, planning and organization of health care 23

Абдуллин А.И., Морозов П.Е.

Обратная задача количественной оценки притока к боковым стволам многоствольной скважины

Inverse problem of quantitative evaluation inflow to sidehole of multilateral well 24

Абдурахимов А.

Критерии единственности решения двухточечной краевой задачи стационарных режимов работы реактора

Criteria for uniqueness of the solution boundary-value problem of stationary modes of operation of the reactor 26

Аблабеков Б.С.

Обратные задачи для псевдопараболических уравнений

Inverse problems for pseudo-parabolic equations 27

Абулов М.О., Амиров Ж.Р.

Смешанная задача для одного уравнения третьего порядка

On an mixed problem for an equation of the third order 28

Авдеев А.В., Санжарлинская Г.М.

Программные инструменты intel для решения научно-исследовательских задач

Intel software for solving research, scientific and education problems 30

Агафонцев А.А., Иткина Н.Б., Шурина Э.П.

Иерархия моделей эффективной среды с учетом пористости

Porosity medium effective models hierarchy 31

Айда-заде К.Р., Гамзаев Х.М.

Численный метод решения одной обратной задачи для обобщенного уравнения Бюргерса

Numerical method for solution an inverse problem for the generalized burgers equation 32

Акрамов Т.А.

Применение качественных методов анализа дифференциальных уравнений, моделирующих химические процессы (обзор)

The application of the qualitative methods for analysis of differential equations modelling chemical processes (review) 34

Акрамов Т. А.

Обоснование закона действующих масс для малых концентраций в уравнениях химической кинетики

Verification of mass action law for the low concentrations in the chemical kinetics equations 36

Алиев Н.А., Мустафаева Е.Ю.

Исследование разрешимости трехмерного уравнения Гельмгольца с нелокальными граничными условиями

Investigation of solvability of three-dimensional Helmholtz equation with nonlocal boundary conditions 38

Аликулов Т.Н., Мукимов А.Х.

О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка

On a correct solvability of boundary problems for the second order equations 39

Алсыкова А.А.

Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения Буссинеска
Nonlocal problem with integral conditions for the Boussinesq equation 41

Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И.

О разрешимости особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода со спектральным параметром
On solvability of particular Volterra integral equation of second kind with spectral parameter 42

Андреев В.К.

Об одной обратной задаче для двумерных уравнений Навье–Стокса.
On an inverse problem for two-dimensional Navier-Stokes equations. 44

Андреев В.К., Черемных Е.Н.

Априорные оценки сопряженной задачи, описывающей совместное термокапиллярное движение трех жидкостей.
A priori estimates of the one conjugate problem describing joint thermocapillary motion of the three liquids. 45

Анисова М.А.

Стохастическая устойчивость итерационных моделей ресурсных систем.
Stochastic stability of iterative models of resource systems. 46

Аносов В. П.

О разрешимости краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений высокого порядка в пространствах Л.Н. Слободецкого.
On the solvability of boundary value problems for elliptic differential-operator equations of higher order in the spaces of L. N. Slobodetskii. 48

Антипин В.И.

Гладкие решения краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа.
Smooth solutions of boundary problems for the operator-differential equations of mixed type. 49

Антипин В. И., Попов С.В.

О краевых задачах для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками.
Boundary value problems for equations of the third order with multiple characteristics. 50

Апаков Ю.П. О нелинейной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

On a nonlinear boundary value problem for third order with multiple characteristics. 51

Арипов М.М, Рахмонов З.Р.

Критические экспоненты для вырождающегося уравнения параболического типа с двойной нелинейностью и нелокальным граничным условием.
Critical exponents for a degenerate parabolic equation with a double nonlinearity and nonlocal boundary condition. 53

Артюшин А.Н.

Вариационные неравенства с ограничением на решение для абстрактных гиперболических уравнений.
Variational inequalities for abstract hyperbolic equations with a constraint on the solution. 55

Асеев Н.А.

Математическое моделирование процесса распространения нефтяного загрязнения в море после аварийного разлива с учетом дополнительных источников/стоков.
Mathematical model of oil spill propagation in a sea after accident taking into account additional sources of pollution. 56

Асхабов С.Н.

О существовании, единственности и оценках решений уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью.

On existence, uniqueness and estimates solutions of convolution type equations with monotone nonlinearity.

57

Атгаев А.Х.

Задача граничного управления для нагруженного волнового уравнения с двумя спектральными параметрами.

Boundary control problem for loaded wave equation with two spectral parameters.

59

Базарова В.Б., Пухначёв В.В.

Точные решения уравнения $u_t = \Delta \ln u$.

Exact solutions of $u_t = \Delta \ln u$ equation.

59

Балакина Е.Ю.

Определение поверхностей разрывов коэффициентов нестационарного уравнения переноса.

Defining surfaces of discontinuity of the coefficients of nonstationary transport equation.

60

Басаева Е.К., Каменецкий Е.С., Хосаева З.Х.

Влияние нелинейных эффектов на стабильность общества.

The influence of nonlinear effects on the stability of society.

61

Батищев В.А., Гетман В.А.

Моделирование коротких спиральных волн в аорте.

Simulation of short spiral waves in the aorta.

63

Белов Ю.Я., Коршун К.В.

Об обратной задаче для параболического уравнения с параметром.

On inverse problem for a parabolic equation with a parameter.

65

Бжеумихова О.И., Лесев В.Н.

Первая краевая задача для уравнения в частных производных с запаздывающим аргументом.

The first boundary value problem for partial differential equation with the delayed argument.

66

Блохин А.М., Егитов А.В., Ткачев Д.Л.

Линейная неустойчивость решений математической модели, описывающей течения вязкоупругой полимерной жидкости. Случай бесконечного плоского канала.

Linear instability of solutions of mathematical model describing the flow of viscoelastic polymeric fluid. Case of infinite plane canal.

67

Бобоев К.С.

Конечно-разностный метод решения обратной задачи для P_n приближения кинетического уравнения переноса.

Finite difference solution methods for the inverse problem for P_n - approximation kinetic transport equation.

68

Болодурина И.П., Иванова Ю.П.

Оптимальное управление кусочно-гладкой системой дифференциальных уравнений с запаздыванием с приложением в иммунологии.

Optimal control of piecewise-smooth system of differential delay equations with application in immunology.

70

Бредихина А.Б.

Об оценках погрешности метода проекционной регуляризации.

On the error estimates of the projection regularization method.

71

Булгатова Е.Н., Павлова Е.Б.

Оптимальное распределение узлов квадратурной формулы с весом.

Optimal distribution of nodes of the quadrature formula with weight.

72

Булдаев А.С. Метод неподвижных точек в задачах оптимизации управляемых систем. Method of the fixed points in optimization problems of controlled systems.	73
Бутерин С.А. Обратная задача для интегро-дифференциального оператора свертки с условиями третьего рода. Inverse problem for a convolution integro-differential operator with conditions of the third kind.	74
Бухгейм А.А. Обратные задачи и полиномы Цернике. Inverse problems and zernike polynomials.	76
Васильев В.Б. Краевые задачи для псевдодифференциальных уравнений в областях сложной формы. Boundary value problems for pseudo differential equations in domains with a complicated form.	76
Васильева Е.Г., Цыренжапов Н.Б. Оценка сверху функционала погрешности квадратурных формул с симметричным пограничным слоем. An upper estimate of error functional of the quadrature formulas with a symmetric boundary layer.	77
Ватульян А.О., Нестеров С.А. О некоторых задачах определения неоднородного предварительного напряженного состояния в термоупругих телах . On some problems of identification of inhomogeneous residual stress state on thermoelastic bodies.	78
Вержбицкий М.А. О некоторых обратных задачах конвективного теплообмена. On some inverse convective heat transfer problems.	80
Викентьева Н.А. О новых нелокальных задачах для уравнений с частными производными. On new non-local problems for partial differential equations.	81
Вишняков Е.Ю. Об оценке погрешности регуляризующего алгоритма, основанного на обобщенном принципе невязки, при решении интегральных уравнений. On error estimates for regularizing algorithm based on generalized residual method when solving integral equations.	81
Войтишек А.В. Мера управляемости стохастических моделей, описываемых итерационными алгоритмами с периодическими множествами устойчивых состояний. Handling measure for stochastic models which can be described by iterative algorithms with periodic sets of stable states.	83
Волчков Ю.М. Вариационные принципы в задачах определения критического времени выпучивания оболочек при установившейся ползучести. Variational principle in the problem of determining the critical time buckling of shells at steady creep.	84
Воронин А.Ф. Об усилении альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале. On strengthening the Fredholm alternative for integral equations of convolution.	85

Гималтдинова А.А.

Задача неймана для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области.

Neumann problem for mixed type equation with two lines of change of type in rectangular area.

86

Гласко Ю.В., Скачков С.А.

Интропродолжение потенциальных полей и концентрация масс.

Introcontinuation of potential fields and concentration of mass.

87

Глинский Б.М., Мартынов В.Н., Сапетина А.Ф.

3D моделирования сейсмических волновых полей в средах характерных для вулканических структур.

3D modeling of seismic wave fields in a medium specific to volcanic structures.

89

Гордиенко В.М.

Диссипативные интегралы энергии в смешанной задаче для волнового уравнения.

Dissipative energy integrals in a mixed problem for the wave equation.

90

Григорьев Ю.М., Борисова М.Н., Иванова А.А.

Математическое моделирование волны тока и напряжения в линии передачи.

Mathematical Modeling Of Current And Voltage Waves On A Transmission Line

91

Григорьев Ю.М.

Трехмерный аналог формул Колосова-Мусхелишвили.

Three-dimensional analogue of the Kolosov–Muskhelishvili formulae.

92

Григорьева А.И.

Нелокальные краевые задачи для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений с разрывным коэффициентом.

Nonlocal boundary value problems for pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations with time-advance coefficient.

94

Дармаев Т.Г.

Математическое моделирование ламинарно-турбулентного перехода в плоскопараллельных течениях.

Mathematical modelling of laminar-turbulent transition in shear flows.

95

Демиденко Г.В.

Задача коши для псевдогиперболических уравнений.

The cauchy problem for pseudohyperbolic equations.

96

Деревцов Е.Ю., Касымбеков А.С., Мальцева С.В., Светов И.Е., Султанов М.А.

О восстановлении разрывных функций по томографическим данным.

About recovering of discontinuous functions by tomography data.

97

Джамалов С.З.

О корректности некоторых прямых и обратных задачах для уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка в пространстве.

About correctness of some direct and inverse problems for the mixed type equation of the first kind in the space.

98

Джамалов С.З.

О корректности некоторых прямых и обратных задачах для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в пространстве.

About correctness of some direct and inverse problems for the mixed type equation of the second kind in the space.

100

Джолдасбаев С.К., Исламгожаев Т.У., Ловазов Т.З.

Применение микроконтроллера для мониторинга спортивного оборудования силовой скамьи для жима лежа штанги.

Microprocessor control system based on microcontroller for sports equipment weight bench for bench press.

101

Довгилевич Л.Е., Максютлов Р.Г. , Софронов И.Л. Повышение точности конечно-разностных sbp схем вблизи границы. Increasing the accuracy of finite difference schemes sbp near the border.	102
Дурдиев Д.К., Меражова Ш. Б. Обратные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. Inverse problems for equation of mixed parabolic – hyperbolic type.	103
Егоров И.Е., Тихонова И.М. О задаче Врагова для уравнения смешанного типа второго порядка. An the Vragov problem for the second order equation of mixed type.	105
Елеуов А.А. О базисности собственных функций корректных краевых задач для дифференциального уравнения на отрезке. Axis symmetric problem for the spatial layer frankl.	106
Ершов А.А. Асимптотика решения второй краевой задачи для уравнения Лапласа вне малой окрестности отрезка. Asymptotics of solutions of second boundary value problem for the Laplace equation outside a small neighborhood of the segment .	107
Ершова А.А., Танана В.П. Приложение общей схемы обобщенного метода невязки для задачи восстановления фононного спектра кристаллов. Annex general scheme of generalized residual method for problem of recovering the phonon spectra of crystals.	109
Ефремова Н.А. О нечётких моделях сложных систем. On fuzzy models of complex systems.	111
Ешеева И.Р. Прогнозирование в социально-экономических системах на основе математической модели. Forecasting in the social and economic systems based on mathematical models.	112
Жегалов В.И., Миронов А.Н. Об условиях разрешимости четырехмерной задачи Гурса в квадратурах. On the conditions of solvability four Goursat problem in quadratures.	113
Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Эффективные параллельные алгоритмы решения трехмерных параболических уравнений. Efficient parallel algorithms for solving three-dimensiona parabolic equations.	115
Жура Н.А., Солдатов А.П. Краевая задача для гиперболической системы на плоскости. Boundary value problem for hyperbolic system on the plane.	116
Жэнтаева Ж.К. Численные эксперименты по асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом неустойчивого типа. Numerical experiments on asymptotics of solutions of linear delay-differential equations of instable type.	117
Заика Ю.В., Костикова Е.К. Параметрическая идентификация модели термодесорбции водорода. Parametric identification of hydrogen thermal desorption model.	118
Зайцева Н.В. Краевые задачи для гиперболического уравнения с оператором Бесселя. Boundary value problems for a hyperbolic equation with Bessel operator.	119

Захарова Н.Б.

Верификация оперативных данных наблюдений о температуре поверхности Балтийского моря.

Verification of an operational observation data of surface temperature of the Baltic sea. 120

Зикиров О.С.

Нелокальная задача для гиперболических уравнений третьего порядка.

On the nonlocal problem for hyperbolic equation of the third order. 121

Ибрагимова Н.А.

О потенциалах для В-эллиптической системы уравнений.

About potentials for B-elliptic systems of the equations. 123

Иванова Т.М., Серебряный В.Н., Харькова М.А.

Методы оптимизации функции распределения ориентаций магниевых сплавов с низкой симметрией образца.

Optimization of the orientation distribution function for magnesium alloys with low sample symmetry. 125

Иконников О.А.

Непараметрические модели линейных динамических процессов высоких порядков.

Non-parametrical models of linear dynamic processes of high orders. 126

Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А.

Неравенство Гординга для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений и его приложения.

Garding's inequality for a class of degenerate elliptic equations and its application. 128

Иткина Н.Б., Марков С.И., Шурина Э.П.

Решение задачи Дарси на базе разрывного метода Галеркина.

Discontinuous Galerkin method for Darcy's problem solving. 129

Кабанихин С.И., Воронов Д.А., Криворотько О.И., Белоног А.Ю.

Численное решение обратной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на примере задач фармакокинетики.

Numerical solution of inverse problem for systems of ordinary differential equations by the example of pharmacokinetics. 131

Кабанихин С.И., Криворотько О.И., Воронов Д.А., Ермоленко Д.В., Каштанова В.Н.

Численный метод решения обратных задач эпидемиологии и иммунологии.

Numerical method for solving inverse problems in epidemiology and immunology. 132

Каденова З.А.

Оценка устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными.

Stability of solutions of the systems linear integral equations of the first kind with two variables in unlimited areas. 133

Калинин Я.В., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г.

Многокритериальная оптимизация законов движения шагающих роботов.

Multicriteria optimization of the motion laws of walking robots optimization. 134

Калинин Я.В.

Применение пакетов прикладных программ для моделирования сложных социально-экономических систем.

Applying service software for modelling complex socio-economic systems. 135

Кальменов Т.Ш., Арпова Г.Д.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с потенциальным граничным условием.

An initial-boundary problem for the heat equation with the potential boundary condition. 137

Каменецкий Е.С., Орлова Н.С.

Исследование математической модели виброкипящего слоя с использованием пакета openfoam.

Investigation of vibrofluidized bed mathematical model using openfoam. 138

Каримов К.Т.

Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами.

Dirichlet's problem for the three-dimensional elliptical equation with two singular coefficients. 140

Каримов Ш.Т.

Аналог задачи Гурса для уравнения Буссинеска-Лява с сингулярными коэффициентами.

Analog of Goursat problem for Boussinesq - Love equation with singular coefficients. 141

Касимов Ш.Г.

О средних спектральных разложениях распределений из класса Лиувилля.

On means of spectral expansions of distributions in Liouville's classes. 143

Катанаев М.О.

Геометрическая теория дефектов.

Geometric theory of defects. 145

Кибирев В. В.

Об одном из методов исследования задачи о наклонной производной.

One of the methods of investigation the oblique derivative problem. 145

Киржинов Р.А.

Об одной нелокальной краевой задаче для модельного уравнения парабола-гиперболического типа.

On a nonlocal boundary value problem for model equation of mixed parabolic-hyperbolic type. 146

Кожанов А.И.

Квазигиперболические уравнения как новый объект уравнений математической физики.

Quasihyperbolic equations - the new object of equations of mathematical physics. 148

Кожевникова Л.М., Хаджи А.А.

Существование решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях.

Existence of solutions of elliptic equations with non-degree of nonlinearity in unbounded domains. 149

Козлова С.В., Рыжков И.И.

Исследование процесса разделения многокомпонентных смесей в цилиндрической термодиффузионной колонне.

The study of multicomponent mixture separation in a cylindrical thermogravitational column. 150

Колтуновский О.А.

Радиально-симметричное решение обратной задачи для гиперболического уравнения.

A radially symmetric solution to an inverse problem for a hyperbolic equation. 152

Копылова В.Г.

О задаче идентификации функции источника двумерной полуэволюционной системы уравнений.

On some identification problem for source function to two-dimensional semievolutionary system of equations. 152

Коробов А.А. Об эффективных алгоритмах для определения точечной полноты и точечной вырожденности линейных систем с запаздыванием. On efficient algorithms for determination of pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear delay-differential systems.	154
Коробов О.А. Метод разрывных смещений повышенного порядка аппроксимации. Displacement discontinuity method of high order approximation.	155
Королев В.С. Моделирование оптимальных траекторий космических аппаратов. Simulate optimum spaceship trajectory.	156
Королев В.С. Особенности решений уравнений динамических систем. Peculiarities of solutions of the equations in dynamical systems.	157
Королёва К.А. Фреймовая синхронизация 8-psk и 16-qam модулированных систем при некогерентном приеме. Frame synchronization for 8-psk and 16-qam modulated signals.	159
Короткова Е.М. О некоторых обратных задачах для параболической системы уравнений. On some inverse problems for parabolic systems of equations.	161
Кошанов Б.Д. Разрешимость уравнений движения магнитной газовой динамики с цилиндрической и сферической симметрией. Solvability of the equations of motion of magnetic gas dynamics with cylindrical and spherical symmetry.	162
Кошелева Ю.А. Разрешимость обратных нелинейных задач для ультрапараболических уравнений. Solvability of the inverse nonlinear problems for ultraparabolic equations.	164
Кравченко В.А. Моделирование решения технических задач аппаратом функциональных грамматик. Modeling of technical problems solving using functional grammars.	165
Кулагина М.Ф., Микишанина Е.А. Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений The construction of almost periodic solutions of some systems of differential equations.	167
Кумыков Т.С. Математическое моделирование изменения заряда облачных капель в фрактальной облачной среде. The mathematical modeling of the changes of the charge cloud droplets in fractal cloud environment.	169
Курманбаева А.С. Краевые задачи для линейных и нелинейных нагруженных псевдопараболических уравнений. Boundary value problems for linear and nonlinear of loading pseudo-parabolic equations.	170
Лагерр Р. О размерностях ядра и коядра эллиптического оператора с разрывными коэффициентами в плоских областях с угловыми точками. On dimker and dimcoker of an elliptic operator with discontinuous coefficients in plane domains with angular points.	171

Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. Задачи оптимального управления коэффициентами полулинейных УМФ эллиптического типа с разрывными данными и их аппроксимация. Optimal control problems with controls in coefficients of semilinear pdes of elliptic type with discontinuous data and their approximation.	172
Лукина Г.А. О разрешимости пространственно-нелокальных задач с интегральными условиями для дифференциальных уравнений третьего порядка. Solvability of space nonlocal problems with integral conditions for third order differential equations.	174
Луцкий А.Е., Ханхасаева Я.В. Задача 3D обтекания модели летательного аппарата при активном воздействии на поток. 3D problem of the flow around aircraft model with active influence on the flow.	175
Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б. Потенциалы для уравнения восьмого порядка. Potential for eighth order equation.	176
Магденко Е.П. Осесимметрическое термокапиллярное движение в цилиндре при малых числах марангони. Axisymmetric thermocapillary motion of within a cylinder the marangoni number of small.	178
Магомедов И.И., Магомедов А.И. Оценка коэффициентов двойных рядов Фурье-Якоби для абсолютно-непрерывных функций. Estimation of coefficients of the Fourier – Jacobi double-series for absolutely – continuous function.	179
Магомедова Е.С., Магомедов Р.И. Использование дробной производной при моделировании численности популяции. Usage of fractional derivative in modeling of population number.	180
Мадаева Е.А. Идентификация линейных динамических систем 1-го и 2-го порядка по синусоидальному сигналу. Identification the linear dynamic systems of the 1st and the 2nd order for sinusoidal signal.	181
Макаова Р.Х. Задачи Гурса для уравнения Аллера. The Goursar problem for Hallaire equation.	182
Максудов Р.З. Об одном методе решения многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. About one method of the decision of the multivariate inverse problems for hyperbolic equations.	183
Мамадалиев Н.К., Абдуллаев А.А. Задача Геллерстедта для уравнения эллиптического -гиперболического типа второго рода. Problem Gellerstedt for the elliptic - hyperbolic of the second type equation.	184
Маматов М.Ш., Алимов Х.Н. Дискретная игра преследования, описываемая уравнениями второго порядка с начальными условиями. Discrete pursuit game, describes a second order equation with the initial condition.	185

Маматов М.Ш., Ташманов Е.Б.

Дискретная игра преследования, описываемая уравнениями второго порядка с граничными условиями.

Discrete pursuit game described by second-order equations with boundary conditions. 187

Масаева О.Х.

Смешанная краевая задача для уравнения с фрактальным оператором лапласа в главной части.

Mixed boundary value problem for equation with fractal laplace operator in the main part. 188

Матвеева И.И.

О свойствах решений одной нелинейной системы, возникающей при моделировании многостадийного синтеза вещества.

On properties of solutions to one nonlinear system arising under modeling multistage synthesis of a substance. 189

Мередов М., Мередова М.М.

Об одной задаче Коши-Гурса для системы гиперболических уравнений четвертого порядка.

On one Cauchy-Goursat problem for the system of fourth order hyperbolic equations. 190

Миждон А.Д.

Гибридные системы дифференциальных уравнений.

Hybrid systems of differential equations. 191

Миждон К.А.

Оценка предельных возможностей одной управляемой системы.

Estimation of the limit possibilities for one control system. 192

Мирсабуров М., Бобомуродов У.Э.

Краевая задача с недостающим условием Трикоми на характеристике, для уравнения смешанного типа второго рода.

Boundary value problems with missing condition Tricomi on characteristics for equations of mixed type of the second kind. 193

Михайлов А.А., Мартынов В.Н.

Моделирование распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн в неоднородной модели "земля-атмосфера" при наличии стратификации ветра в атмосфере.

Numerical modeling of seismic and acoustic-gravity waves propagation for a heterogeneous earth-atmosphere model in a wind-stratified atmosphere. 195

Молчанова Е. А.

Численно-аналитическое определение собственных значений краевой задачи.

Numerical-analytical determination of the own values of a boundary task. 196

Мусабеков К.С.

Необходимое условие оптимальности в задаче управления химическим реактором.

Necessary condition of optimality in chemical reactor control problem. 198

Мустафин С.А., Зейнуллина А.А., Мусина Ж.Ф.

Моделирование процесса твердения закладочного массива.

Modeling of the hardening process for filling. 200

Намсараева Г.В.

Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска.

Linear inverse problems for some analogues Boussinesq equations. 200

Нахушева В.А.

Краевая задача для уравнения Буссинеска смешанного типа с разрывным по времени коэффициентом диффузии.

Boundary value problem for the Boussinesq equation of mixed type with time discontinuous diffusion coefficient. 202

Нахушева З.А.

Нелокальная задача с интегральными условиями для уравнения Лапласа.

Nonlocal problem with integral conditions for the Laplace equation.

204

Нгуен Дык Банг, Чистякова Е.В.

Модель гидравлического тракта энергетической установки на основе теории вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений.

Model hydraulic path of the power plant based on the theory of degenerate systems of integro-differential equations.

205

Нгуен Хак Диен, Чистяков В.Ф.

О понятии индекса для линейных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных.

On the concept of the index for linear differential-algebraic equations of partial derivative.

206

Неустроева Н.В.

Задача равновесия упругой пластины, содержащей наклонную трещину на границе жесткого включения.

An equilibrium problem for an elastic plate with inclined crack on the boundary of a rigid inclusion.

207

Нигмедзянова А.М.

Интегральное представление решения одного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода с отрицательными параметрами.

The integral representation of the solution of the one you are born elliptic equation of the rst kind with negative parameters.

208

Никитина Т.Н.

Об уравнении Монжа–Ампера на положительном потоке.

On the Monge – Ampere equation on a positive current.

210

Николаев О.Ю.

Разрешимость обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при старшей производной.

Solvability of inverse problems for parabolic equations of high order with an unknown coefficient of the highest derivative.

211

Новиков И.С.

Алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения в регионе с учетом ресурсов на устранение локальных источников.

An algorithm for solving the optimization problem of economic damage from pollution in region taking into account resources available for removing the local sources.

212

Ольшанский М.А., Чернышенко А.Ю.

Метод конечных элементов для уравнений, заданных на поверхностях, и моделирование течений в средах с трещинами.

A finite element method for pdes posed on surfaces and modeling of flows in fractured media.

214

Ошоров Бато Б., Ошоров Батор Б.

Об одной математической модели механики сплошных сред.

About one mathematical model for mechanics of continuous mediums.

215

Ошоров Б.Б., Сордоханова Е.Н.

Неклассические краевые задачи для некоторых систем уравнений с частными производными.

Nonclassical boundary value problems for some systems of equations with partial derivatives.

216

Ошоров Б.Б.

Краевые задачи с разрывными граничными условиями для некоторых классов модельных систем уравнений.

Boundary problems with discontinuous boundary conditions for some classes of model systems of the equations.

218

Павлов С.С.

Коэффициентная обратная задача для квазигиперболических уравнений высокого порядка с интегральным переопределением.

Coefficient inverse problem for quasihyperbolic higher-order equations with integral over determination.

219

Панов А.В.

Точные решения уравнений динамики двухфазной среды.

Exact solutions of equations of dynamics two-phase medium.

221

Пармузин Е.И., Агошков В.И., Захарова Н.Б.

Вариационное усвоение данных наблюдений для модели термодинамики Балтийского моря.

Variational data assimilation problem for the Baltic sea thermodynamics model.

221

Паровик Р.И.

Численное моделирование фрактальных осцилляторов с трением.

Numerical modeling of fractal oscillator with damping.

222

Пащенко Г.Н.

Нейросетевая система управления объектом с запаздыванием и неточными данными.

Neural network control system of the object with delay and inexact data.

223

Петрушко И.М.

О первой смешанной задаче для параболических уравнений сменяющимся направлением времени со слабым вырождением типа Келдыша.

On the first mixed problem for parabolic equations with changing time direction with weak degeneracy of Keldysh type.

224

Пиманов Д.О., Фадеев С.И., Косцов Э.Г.

Исследование математических моделей микроэлектромеханических резонаторов разного типа.

Mathematical model research of different types of microelectromechanical resonators.

225

Пинигина Н.Р.

Краевые задачи для некоторых классов уравнений составного типа.

Boundary value problem for a classe of equations of composite type.

226

Плеханова М.В., Байбулатова Г.Д.

Численное решение задачи управления системой уравнений фазового поля.

Numerical solution of control problem for system of phase field equations.

228

Плеханова М.В. Задача шоуолтера для квазилинейного вырожденного уравнения.

Showalter problem for a high order quasilinear degenerate equation.

229

Подгаев А.Г., Лисенков К.В.

Задача Стефана и краевые задачи для нелинейных уравнений в областях с немонотонной нецилиндрической границей.

Stefan problem and initial-boundary value problems for nonlinear equations in domain with non-tube and non-monotone boundary.

230

Поляков Д.М.

О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями.

About spectral properties of fourth order differential operator with periodic and semiperiodic boundary conditions.

231

Полякова А.П.

Решение задач трехмерной тензорной томографии методом сингулярного разложения.

Solution of 3D tensor tomography problems with usage of singular value decomposition. 233

Попов Н.С.

Об условиях разрешимости нелокальных краевых задач для неклассических уравнений третьего порядка.

About the conditions of solvability of nonlocal boundary value problems for nonclassical equations of third order. 234

Попов С.В.

Краевые задачи для $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

Boundary value problems for $2n$ -parabolic equations with changing time direction. 236

Потапова С.В.

Задача сопряжения для уравнения с кратными характеристиками со знакопеременным коэффициентом.

Interface problem for third order equation with multiple characteristics and coefficient alternate in sign. 237

Применко А.А.

Задачи сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

Conjugation problem for non classic differential equations with discontinuous coefficients. 238

Прудников В.Я.

Об H -свойстве функционалов.

About H -svoystve of functionalities. 239

Псху А.В.

Первая краевая задача для уравнения дробной диффузии в нецилиндрической области.

The first boundary value problem for equation of fractional diffusion in noncylindrical domain. 240

Пчелова А.З.

Существование и единственность решения задачи Коши для одного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка в области голоморфности.

The existence and uniqueness of solution the Cauchy problem for a nonlinear differential equation of first order in the region of holomorphy. 241

Радкевич Е.В.

О парадигме турбулентного диффузионного горения.

On the reconstruction to the initial stage of inner turbulence. 243

Ракшаева Е.Ж., Айзенберг А.М., Песчанко А.И.

Волновые поля в окрестности криволинейной границы неоднородных сред в терминах конволюционных операторов прохождения.

Wavefields in the vicinity at curvilinear contact of inhomogeneous media in terms of convolution-type transmission operators. 244

Расулов А.Б., Солдатов А.П.

Представление общего решения уравнения типа Коши–Римана с сингулярными коэффициентами.

A representation of general solution of the Cauchy- Riemann type equation with singular coefficients. 245

Рахмонов Ф.Д.

О разрешимости задачи теории теплопроводности с двумя нелокальными краевыми условиями.

About the solvability of problems of the theory of heat conductivity with two nonlocal boundary conditions.

247

Рахмонов Х. О., Меражова Ш. Б.

Смешанная задача для вырождающихся эллиптических систем уравнений типа Бисадзе.

Mixed problem for degenerated elliptic system of equations of type Bisadze.

249

Репин О.А.

Нелокальная задача для одного уравнения смешанного типа.

Nonlocal problem for an equation of mixed type.

250

Роговой А.В.

Свойства решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта.

Solutions properties of Tricomi problem for Gellerstedt equation.

251

Романовский Р. К., Назарук Е. М.

Устойчивость решений линейных неавтономных систем ФДУ в пространстве Соболева.

Stability of solutions of linear non-autonomous FDE systems in Sobolev space H^l

252

Романовский Р. К., Троценко Г.А.

Метод функций Ляпунова для почти периодической разностной системы в Гильбертовом пространстве.

Method of Lyapunov functions for almost periodic difference system in Hilbert space.

254

Рудой Е.М.

Метод декомпозиции области для модельной задачи теории трещин с возможным контактом берегов.

Domain decomposition method for a model crack problem with a possible contact of crack faces.

255

Сабитов К.Б.

Обратные задачи для уравнений Лапласа, струны и смешанного типа.

Inverse problems for the Laplace equation, strings and mixed types.

256

Савельев Л.Я.

Марковское моделирование.

Markov modeling.

258

Сакабеков А., Аужани Е.

Граничные условия Максвелла-Аужана для одномерной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана.

Boundary conditions of Maxwell-Auzhan for one dimensional nonlinear moment system equations of Boltzmann.

259

Салимов Р.Б., Шмагин Ю.А.

Об одной обратной краевой задаче для двусвязной области.

About the issue of inverse boundary value problem for a doubly-connected domain.

260

Санеева Л.И., Назарова Л.И.

Оценка погрешностей на элементарных отрезках интегрирования.

Score errors on basic points of integration.

262

Саранча Д.А., Юрезанская Ю.С.

Порядок натурального ряда в разностном уравнении, полученном при исследовании экологических систем.

Order of a natural row in the differential equation received at the research of ecological systems.

263

Саранча Д.А., Юрезанская Ю.С.

О методах моделирования экологических объектов с помощью наборов взаимосвязанных моделей.

About the methods of ecological objects modeling by means of the sets of the interconnected models.

265

Сатторов Э.Н., Эрматов З.Э.

О продолжении решений однородной системы уравнений Максвелла по заданным значениям на части границы.

On the continuation of a solution of the homogeneous systems of Maxwell equation from its values on a part of the boundary.

267

Сафаров Д.С.

Об исследовании уравнения обобщённых аналитических функций с постоянным отклонением аргумента.

On the investigation the equation of the generalized analytic function with the constant deviation argument.

268

Сафина Р.М.

Задача Келдыша для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области.

The Keldysh problem for mixed type equation with singular coefficient in rectangular domain.

270

Семенко Е.В., Семенко Т.И.

Динамика коэффициентов преломления в линейной задаче об ударной волне.

The refraction coefficients' dynamics in linear problem of shock wave disturbance.

271

Сербина Л. И.

Применение нагруженных уравнений в решении задач нестационарной безнапорной фильтрации.

Application of the loaded equations in the solving of problems of pressureless filtration.

272

Скворцова М.А.

Уравнения с запаздывающим аргументом и динамика птичьего гриппа.

Delay differential equations and avian influenza dynamics.

273

Смагин С.И., Пономарюк Ю.Ю.

Математическое моделирование передачи тепла катоду при электроискровом легировании.

Mathematical modeling of heat's transmission to cathode attached to electro-spark alloying.

274

Сорокин Р.В., Шипина Т.Н.

Некоторые обратные задачи для систем дифференциальных уравнений с данными Коши.

On inverse problems for systems of differential equations with Cauchy data.

275

Суродина И.В.

Решение прямых двумерных и трёхмерных задач электрического и электромагнитного каротажа на GPU.

2d and 3d computer simulation of the electric and electromagnetic logging on graphics processors

276

Т.Батзул, Ц.Жаргалсайхан.

Задачи нечеткого программирования и обобщенный принцип принципа Заде.

The generalized principle of principle Zadeh and problems fuzzy programming.

277

Талышев А.А.

О дифференциально-инвариантных решениях.

On differential-invariant solutions.

279

Танана В.П., Сидикова А.И.

Об оценке погрешности приближенного решения интегрального уравнения первого рода.

An error estimate of approximate solution when solving integral equation. 280

Телешева Л.А.

О разрешимости одной обратной задачи для некоторых классов параболических уравнений четвертого порядка.

On the solvability of an inverse problem for some classes of parabolic equations of fourth order. 282

Тихонова И.М., Егоров И.Е.

О модифицированном методе Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка.

A modified Galerkin method for the second order equation of mixed type. 283

Токибетов Ж.А., Абдурахитова Г.Е.

Решение задачи Дирихле для одной невырождающейся эллиптической системы, зависящей от параметра.

Solution of Dirichlet problem for a nondegenerate elliptic system, depending on a parameter. 284

Уварова И.А.

О свойствах решений одной системы нелинейных дифференциальных уравнений высокой размерности.

On properties of solutions to one system of nonlinear differential equations of high dimension. 285

Умаров Х.Г.

Явный вид решения задачи Коши для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной.

Explicit Form Of The Solution Of The Cauchy Problem For The Barenblatt–Zhel'tov–Kochina Equation 286

Уринов А.К., Маманазаров А.О.

Задачи с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа.

Problems with the integral condition for the parabolic-hyperbolic equation with the noncharacteristic line of the modification of type. 288

Уткина Е.А.

О случаях однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения Буссинеска–Лява.

About cases unique solvability of the Dirichlet problem for the Boussinesq-Love equation. 290

Ушаков А.Л.

Численное моделирование деформации мембраны.

Numerical modelling of deformation of the membrane. 291

Фатьянов А.Г.

Аналитическое моделирование волновых полей для сред сложной структуры и строения.

Analytical modeling of wave fields for complex subsurface structures and geometries. 293

Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш.

Многоточечная задача для уравнения смешанного типа высокого порядка.

Many dots problem for higher order mixed type differential equation.

Фаязов К.С., Хажиев И.О., Фаязова З.К.

Некорректная краевая задача для дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка.

The ill-posed boundary value problem for differential-operator equation of fourth order. 295

Федоров В.Е., Романова Е.А.

Аналитические разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка.

Analytic resolving operators families of fractional order degenerate evolution equations. 297

Федоров Ф. М.

Достаточное условие существования решений бесконечных систем алгебраических уравнений.

A sufficient condition of solutions existence for infinite systems of algebraic equations. 298

Федоров В.Е., Тихонова И.М.

Применение метода Галеркина для уравнения смешанного типа.

Galerkin's method for mixed type equation. 299

Хайдаров И.У.

Об одной задаче с интегральным условием для парабола-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа.

On A Problem With An Integral Condition For Parabolic-Hyperbolic Equation With A Smooth Line Change Type 300

Хайруллин М.Х., Морозов П.Е., Шамсиев М.Н., Абдуллин А.И.

Оценка дебита горизонтальной скважины в элементе разработки битуминозной залежи методом парогравитационного дренирования.

Evaluation horizontal well productivity in the elements of developing bituminous deposit by the steam assisted gravity drainage method. 302

Халилов К.С., Солиев И.С.

Нелокальная задача с интегральным условием и условием Бицадзе-Самарского для парабола-гиперболического уравнения.

Non local problem with the integral condition and the condition Bitsadze-Samarskii for the parabolic-hyperbolic equation. 304

Ханхасаев В.Н., Дармахаев Э.В.

Схема переменных направлений численного решения смешанного уравнения теплопроводности.

Alternative directions scheme of numerical solution for heat equation of the mixed type. 306

Ханхасаев В.Н. Об одном обобщении уравнений Навье-Стокса. On one generalization of the Navie-Stockes equations. 307

Хасанов А.Х., Сеилханова Р.Б.

Основные краевые задачи для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца.

The main boundary value problems for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. 308

Хачай О.А., Хачай А.Ю.

Математическое моделирование волновых полей в слоистых средах с иерархическими включениями.

Mathematical modeling of wave fields in layered media with hierarchic inclusions. 310

Хлуднев А.М. Задачи сопряжения тонких включений в упругих телах. Junction problems for thin inclusions in elastic bodies. 312

Холиков Д.К.

О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения.

On solvability of nonlocal problems for loaded pseudo-parabolic equations. 313

Холодовский С.Е.

Решение краевых задач в цилиндрах с двухслойной пленкой.

Solution of boundary value problems in cylinders with a two-layer film. 314

Хубиев К.У.

О принципе максимума для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа.

On extremum principle for characteristicly doaded equation of hyperbolic-parabolic type. 315

Цынгугев Б.Т.

Новый способ вычисления центральности для взвешенных графов коммуникационных сетей на основе правил Кирхгофа.

A new concept of the betweenness centrality for weighted graphs of communication networks on the base of the Kirchhoff's law. 316

Чиркунов Ю. А.

Нелинейная диффузия в неоднородной среде при наличии поглощения.

Nonlinear diffusion in a media with an absorption. 318

Чушева Н.А.

Несколько линейных и нелинейных уравнений высокого порядка.

Several linear and nonlinear equations of high order. 319

Чуриков В.А.

Мнозначность определённых интегралов в d -анализе и следствие этого для решения дифференциальных уравнений.

Polysemy of definite integrals in d -analysis and the consequence of it for the decision the differential equations. 320

Шадрина Н.Н.

Единственность и неединственность решений, собственные значения и собственные функции некоторых задач сопряжения для эллиптических операторов.

The uniqueness and nonuniqueness of solutions, eigenvalues and eigenfunctions of some problems pairing for elliptic operators. 322

Шакенов К.К.

Численное моделирование одной задачи релаксационной фильтрации методами Монте-Карло.

Numerical modeling of same problem of relaxational filtration by Monte Carlo methods. 323

Шакирова И.М.

О разрешимости трехмерной задачи Гурса в квадратурах.

On the solvability of the three-dimensional problem Goursat in quadratures. 324

Шамсудинов Ф.М.

Об исследовании одной специальной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами.

Regarding the investigation of a special system of second order differential equations with singular coefficients. 326

Шарин Е.Ф., Кожанов А.И.

Задачи сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка.

Conjugation problems for high order nonclassical differential equations. 327

Шевченко Г.В.

Численное решение нелинейной задачи оптимального быстрогодействия, линейной по управлению, с постоянным запаздыванием.

Numerical solving an nonlinear time-optimal-control problem linear in control with constant delay. 328

Шеина А.А.

О множественных решениях нелинейной краевой задачи Гинзбурга-Ландау для сверхпроводящей пластины в магнитном поле.

On multiple solutions of the Ginzburg-Landau nonlinear boundary-value problem for a superconducting plate in a magnetic field. 330

Шелопут Т.О., Агошков В.И.

Решение одной обратной задачи в рамках моделирования акваторий с «жидкими» границами.

Investigation of one inverse problem in case of modeling water areas with “liquid” boundaries. 332

Шергин С.Н., Пятков С.Г.

О некоторых математических моделях теории фильтрации.

On some mathematical models of filtration theory. 333

Шишленин М.А.

Размер области измерения дополнительной информации в задаче продолжения, как параметр регуляризации.

The size of the domain of measurements of the additional information in the continuation problem as the regularization parameter. 334

Шубин В.В.

Задачи сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка.

Conjugation problems for some nonclassical high-order differential equations. 335

Шутяев В.П., Пармузин Е.И.

Исследование чувствительности оптимального решения задач вариационного усвоения данных наблюдений.

Study of sensitivity of the optimal solution of variational data assimilation problems. 336

Шхагапсоев А.М.

Краевая задача для одного уравнения гиперболо-параболического типа четвертого порядка.

Boundary value problem for a single equation of hyperbolic-parabolic type for the fourth order problem. 338

Щербаков В.В.

Оптимальное управление формой жесткого включения в пластине Кирхгофа - Лява.

Shape control of a rigid inclusion in the Kirchhoff- Love plate. 339

Юлдашева А.В.

Обратная задача для уравнения колебания балки.

Inverse problem for the equation of oscillations of a beam. 340

Юмов И.Б.

О собственных колебаниях в трехмерном слое.

On the eigen oscillations in three-dimensional layer. 341

Юмова Ц.Ж.

Асимптотически оптимальные функционалы погрешности кубатурных формул.

Asymptotically optimal error functional of the cubature formulas. 342

Янтранова С.С.

К проблеме математической подготовки магистрантов естественнонаучного направления.

On the problem of mathematical preparation of graduates of natural science directions. 343

Яшима Х.Ф., Гомрани С., Марин Антуня Х.

Моделирование вертикального потока воздуха, причиняющегося конденсацией водяного пара.

Model of a vertical flow of air, caused by condensation of water vapor. 345

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ

Тезисы докладов

22-27 июня 2015 г.

Под редакцией д.ф.-м.н. А.И.Кожанова, к.ф.-м.н. Б.Б.Ошорова.
Ответственный за выпуск: к.ф.-м.н. Е.Г. Васильева.

Подписано в печать 10.06.2015г. Формат 60×84 1/8
Усл. п. л. 42,78. Тираж 200 экз. Заказ №149.

Издательство ВСГУТУ.
670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в.

©ВСГУТУ, 2015 г.