

Ю.А. Никитченко

**МОДЕЛИ
НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Москва
Издательство МАИ
2013

ББК 22.253
УДК 533.6.011.72
Н 62

Н62 **Никитченко Ю.А.**
Модели неравновесных течений. – М: Изд-во МАИ, 2013. –160 с.: ил.

ISBN 978-5-4316-0161-3

Рассмотрены модели неравновесных течений совершенного однокомпонентного газа. Термин “неравновесность” понимается в смысле отклонения функции распределения молекул от локально-максвелловской. Предложен метод построения моментных уравнений с использованием функции распределения общего вида. На базе системы моментных уравнений получен ряд новых моделей течения многоатомных газов. Разработаны граничные условия на твердой поверхности, пригодные для течений в широком интервале чисел Кнудсена. Проведено тестирование разработанных моделей на примере расчета вырожденных течений. Рассмотрена тестовая задача гиперзвукового обтекания бесконечно тонкой пластины под нулевым углом атаки.

Монография рассчитана на специалистов в области аэромеханики, газодинамики и ряда смежных областей. Она может быть полезна студентам старших курсов соответствующих специальностей вузов.

Рецензенты:

действительный член РАН, д-р техн. наук, профессор *Ю.А.Рыжов*
д-р физ.-мат. наук, профессор *Ю.И.Хлопков*

ISBN 978-5-4316-0161-3

© Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет), 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Условные обозначения.....	6
Введение.....	10
Глава 1	
СИСТЕМА МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ	
МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ	
1.1. Основные допущения. Используемые термины и символы.....	20
1.2. Построение системы моментных уравнений.....	23
1.3. Замыкание системы моментных уравнений.....	28
1.4. Время релаксации.....	30
1.5. Энергообмен между поступательными и внутренними	
степенями свободы молекул.....	33
1.6. Двадцатичетырехмоментная система уравнений.....	35
Глава 2	
СОГЛАСОВАННАЯ СИСТЕМА МОМЕНТНЫХ	
УРАВНЕНИЙ	
2.1. Аппроксимирующая функция распределения.	
Моменты пятого порядка в локальном выражении.....	41
2.2. Сопоставление балансового и локального выражений	
моментов четвертого порядка.....	44
2.3. Согласование балансового и локального выражений	
моментов четвертого порядка.....	47
Глава 3	
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СОХРАНЕНИЯ	
3.1. Модель первого приближения.....	56
3.2. Модель второго приближения. Релаксационная модель.....	69
Глава 4	
ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГРАНИЧНЫХ	
УСЛОВИЙ НА ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ	
4.1. Общие положения.....	82
4.2. Функция распределения в граничной точке.....	86
4.3. Скольжение и скачок температуры.....	88
4.4. Вспомогательная модель граничных условий.....	90
4.5. Оценка значения свободного параметра модели.....	93

Глава 5
ИНЖЕНЕРНЫЕ МОДЕЛИ

5.1. Внепорядковая модель первого приближения.....	95
5.2. Вспомогательная кинетическая модель. Анализ внепорядковой модели.....	100
5.3. Гибридная модель.....	110

Глава 6
ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ ВЫРОЖДЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

6.1. Общие замечания.....	116
6.2. Теплопередача в плоском слое неподвижного газа.....	118
6.3. Плоское течение Куэтта.....	120
6.4. Задача о структуре ударной волны.....	124

Глава 7
ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ
ПРИ НУЛЕВОМ УГЛЕ АТАКИ

7.1. Общие замечания.....	131
7.2. Формулировка задачи. Единицы измерения.....	132
7.3. Системы уравнений. Граничные условия.....	133
7.4. Конечно-разностная реализация.....	143
7.5. Результаты расчетов.....	146
Библиографический список.....	155

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механика жидкости и газа – один из наиболее изученных разделов физики – имеет многовековую историю. Вместе с тем интерес к этой области науки не ослабевает и на сегодняшний день.

Аэрокосмическая техника, вакуумные технологии и ряд других областей техники требуют описания течений, параметры которых изменяются в очень широком интервале значений плотности, скорости и температур текучей среды. Классические модели течений, вполне удовлетворительно описывающие процессы при том или ином режиме течения, становятся непригодными в столь широком интервале изменения параметров среды.

Особенностью газодинамических процессов, реализуемых в современных технических устройствах, является их существенная неравновесность, обусловленная высокими градиентами параметров газа и малым временем протекания этих процессов. Методы молекулярно-кинетической теории зачастую непригодны для решения практических задач из-за недопустимо большого количества вычислительных операций.

Модели течения в макроскопических переменных, как правило, сильно ограничены или по числам Маха, или по числам Кнудсена. Применение их для описания течений в широком интервале режимов течения неравновесных газов сопряжено с существенными трудностями.

В настоящей монографии анализируются наиболее характерные недостатки основных макроскопических моделей неравновесных течений. Предпринята попытка построения моделей, в которых указанные недостатки отсутствуют.

Особое внимание уделено практической ценности моделей. Рассматриваются течения одно- и многоатомных совершенных однокомпонентных газов.

В тестовых расчетах предпочтение отдается задачам, связанным со сверх- и гиперзвуковыми течениями. Вместе с тем рассмотрены теплопередача через слой неподвижного газа и течение Куэтта при малых и умеренных числах Маха. Обе задачи решаются в широком интервале чисел Кнудсена.

Часть материалов, вошедших в данную монографию, опубликована в научных изданиях. Ссылки даются в соответствующих главах. Материалы глав 2 и 5, а также части глав 3 и 7 публикуются впервые.

При написании монографии предполагалось, что она будет полезна студентам вузов, изучающим курс динамики газов. В связи с этим автор приносит извинения своим квалифицированным коллегам за избыточно подробную интерпретацию некоторых определений, физических процессов и математических выражений.

Автор искренне благодарен академику Ю.А. Рыжову за постоянное и конструктивное внимание к данной работе, профессору Ю.И. Хлопкову за обсуждение отдельных разделов и полезные замечания, доценту С.А. Попову за всестороннюю помощь в написании и подготовке монографии.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Операции

Интегралы по пространству молекулярных скоростей и пространству внутренних энергий молекул:

$$\int \dots d\bar{c} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots dc_1 dc_2 dc_3, \quad \int \dots d\bar{\xi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$$\int \dots d\bar{c} d\varepsilon \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dc_1 dc_2 dc_3 \int_0^{\infty} \dots d\varepsilon, \quad \int \dots d\bar{\xi} d\varepsilon \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \int_0^{\infty} \dots d\varepsilon.$$

Используются прямоугольные декартовы системы координат.

Векторные и тензорные выражения записаны в индексной форме. Тензор, находящийся вне тензорного выражения, обозначается своим элементом, заключенным в фигурные скобки, например тензор напряжений $\{P_{ij}\}$. Для векторов сохранено традиционное обозначение.

Повторяющиеся греческие подстрочные индексы, используемые в одночленах, подразумевают суммирование от 1 до 3, например:

$$P_{\alpha\alpha} \equiv P_{11} + P_{22} + P_{33}.$$

Выделена система координат $OXYZ$, соответствующая главным осям тензора напряжений. Индексы векторов и тензоров в этой системе обозначаются прописными латинскими буквами, например: c_x , P_{YY} , φ_{XYZ} .

Подстрочный символ “звездочка” обозначает суммирование одночленов по всем «различимым» перестановкам индексов («неразличимыми» считаются перестановки, различающиеся транспозицией индексов в пределах одного симметрического тензора), например:

$$M_{**\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} \equiv M_{ij\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + M_{ki\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + M_{jk\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}.$$

Здесь $M^{(3)}$ – симметрический тензор третьего ранга. Полученная сумма представляет собой симметрический тензор. Таким образом, подстрочные звездочки обозначают операцию симметрирования с исключением повторений тождественных по значению членов. Количество звездочек в одночлене равно рангу тензорного уравнения.

Символы

δ_{ij} – символ Кронекера;

X^+ – надстрочный символ обозначает принадлежность величины X к процессу обратных столкновений молекул;

\tilde{X} – надстрочный символ используется для обозначения величины X , относящейся к отраженным поверхностью молекулам (глава 4);

\hat{X} – надстрочный символ используется для обозначения величины X , относящейся к падающим на поверхность молекулам (глава 4);

X_∞ – подстрочный символ используется для обозначения величины X , относящейся к невозмущенному потоку.

Надстрочные квадратные скобки обозначают номер приближения, соответствующего приближению процедуры Чепмена–Энскога, например: $q_i^{[1]}$ – тепловой поток в гидродинамическом (первом) приближении.

Микроскопические величины

m_0 – масса молекулы;

$\xi_i = c_i + u_i$ – молекулярная, тепловая и групповая (макроскопическая) скорости;

ε – внутренняя энергия молекулы;

$f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$ – одночастичная функция распределения, фазовое пространство которой дополнено пространством внутренних энергий молекулы ε ;

$f_0 = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right)$ – равновесная функция распределения;

J^- – интеграл прямых столкновений;

J^+ – интеграл обратных столкновений;

τ – среднее время свободного пробега молекулы;

$\frac{1}{\tau^+}$ – средняя частота обратных столкновений молекул;

τ_p – время релаксации напряжений;

τ_φ – время релаксации теплового потока, создаваемого поступательным движением молекул;

τ_ω – время релаксации теплового потока, обусловленного переносом внутренней энергии молекул;

τ_θ – время релаксации разности температур θ ;

τ_4 – время релаксации моментов четвертого порядка поступательных степеней свободы $M_{ijkl}^{(4)}$;

$\tau_{\Omega 4}$ – время релаксации моментов четвертого порядка внутренних степеней свободы $M_{ij}^{\Omega(4)}$;

$\lambda = \frac{\mu}{p} \sqrt{RT}$ – средняя длина свободного пробега молекулы;

$h = \frac{\tau_\theta}{\tau_p}$.

Макроскопические величины

n – концентрация молекул;

$\rho = m_0 n$ – плотность газа;

u_i – проекция вектора макроскопической скорости газа;

P_{ij} – компонент тензора напряжений (потока импульса);

$T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}$ – поток импульса, отнесенный к одной молекуле (единица измерения –

1 кельвин), или удельное напряжение;

p^m – «механическое» давление;

p – «термодинамическое» давление;

T_t – «поступательная» температура;

T_Ω – температура внутренних степеней свободы молекул;

$\theta = T_t - T_\Omega$;

T – «термодинамическая» температура;

E – энергия теплового движения молекул (поступательного, вращательного и колебательного) в единице объема;

E_Ω – энергия внутренних степеней свободы молекул (вращательных и колебательных) в единице объема;

p_{ij}^m – компонент тензора неравновесных напряжений (механических);

p_{ij} – компонент тензора неравновесных напряжений (термодинамическая форма);

q_i – проекция вектора теплового потока;

φ_i – проекции вектора теплового потока, обусловленного только поступательным движением молекул;

ω_i – проекция вектора теплового потока, обусловленного переносом внутренней энергией молекул;

$\varpi_i = \frac{\omega_i}{\rho}$;

φ_{ijk} – моменты третьего порядка (по поступательным степеням свободы);

$\psi_{ijk} = \frac{2\varphi_{ijk}}{\rho}$;

Δu – скольжение скорости на границе газ – твердая поверхность. В главе 4 для обозначения этой величины использован символ u ;

ΔT – скачок температуры на границе газ – твердая поверхность;

$\zeta_u, \zeta_{uT}, \zeta_T$ – эмпирические коэффициенты в уравнениях скольжения скорости и скачка температура на границе газ – твердая поверхность;

$M_{ijkl}^{(4)}$ – моменты четвертого порядка (по поступательным степеням свободы);

$M_{ij}^{\Omega(4)}$ – моменты четвертого порядка (по внутренним степеням свободы);
 μ – коэффициент вязкости (сдвиговой);
 $\mu_{ij} = \tau_p P_{ij}$ – “тензорный” коэффициент вязкости;
 s – показатель степени температуры в аппроксимациях $\mu = cT_t^s$ или $\mu = cT^s$, где
 c – константа;
 W – степень неравновесности газа;
 m – параметр гибридной модели.

Основные константы и критерии подобия

k – постоянная Больцмана;
 c_p, c_v – изобарная и изохорная удельные теплоемкости;
 $R = \frac{k}{m_0}$ – удельная газовая постоянная;
 $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты;
 c_{Ω} – удельная теплоемкость внутренних степеней свободы;
 $c_{\omega} = \left(\frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma-1)} - \frac{15}{4} \right) R = \frac{c_p}{\text{Pr}} - \frac{15}{4} R$;
 $c_{\mu} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right)$;
 $c_{\lambda} = 1 - \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \right) h$;
 Pr – число Прандтля;
 M – число Маха;
 Kn – число Кнудсена.

Аббревиатуры

НСФ – модель Навье–Стокса–Фурье;
 БГК – кинетическая модель Бхатнагара–Гросса–Крука;
 М24 – двадцатичетырехмоментная модель;
 М24с – двадцатичетырехмоментная модель, согласованная по моментам четвертого порядка;
 М45 – сорокапятимоментная модель;
 R13 – регуляризованная тринадцатимоментная модель [15];
 DSM – метод прямого статистического моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать газовую среду, для которой справедливо уравнение состояния Клапейрона. Основное внимание уделим неравновесным течениям такой среды. Под термином «неравновесное состояние» будем понимать такое состояние газовой среды, при котором функция распределения молекул по скоростям существенно отличается от локально-максвелловской, т.е. равновесной, функции распределения. В неравновесной газовой среде энергия неравномерно распределена между степенями свободы молекул, как поступательными, так и внутренними.

Физико-математические модели динамики газовой среды можно разделить на три группы в соответствии применяемым уровнем описания. Уровень описания, в свою очередь, целесообразно определить по элементарному объекту, относительно которого строится модель.

На уровне наиболее детального описания в качестве элементарного объекта используется отдельная молекула газа. К этому уровню относятся статистические модели [1], изначально именуемые методами Монте-Карло, а в дальнейшем – методами прямого статистического моделирования. Модели газовой среды этого уровня отличаются минимальным количеством дополнительных допущений, что повышает адекватность модели, и высокой трудоемкостью численной реализации, в смысле количества вычислительных операций.

Рассмотрение полного статистического ансамбля при решении практических задач не реализуемо даже на современных суперкомпьютерах. На практике используются сокращенные ансамбли, результаты расчета которых распространяются на полный ансамбль при ряде допущений. Тем не менее в области разреженных газов результаты расчетов по статистическим моделям часто используются в качестве эталонных для многих модельных задач.

Условия на границе раздела фаз могут быть записаны с учетом реальных процессов межмолекулярного взаимодействия в адсорбированных слоях. Органической особенностью моделей этого уровня является сильно избыточная информативность. Принципиальных ограничений по числам Маха и Кнудсена эти модели не имеют.

Следующий уровень описания – уровень кинетических уравнений (кинетический уровень). Элементарный объект моделей этого уровня – группа молекул, объединенных по какому-либо принципу. В моделях, используемых для решения практических задач, рассматривается группа молекул, обладающих одинаковой (почти одинаковой) скоростью [2]. Уравнение баланса количества молекул в этой группе записывается с использованием одночастичной функции распределения (уравнения Больцмана и Максвелла–Больцмана). Наибольшее распространение на практике получили так называемые модельные кинетические уравнения (БГК-модель, S-модель и т.п.) [3].

В теоретических исследованиях значительный интерес представляют модели, объединяющие в группу молекулы газа в соответствии с некоторым за-

данным распределением по скоростям и положениям в пространстве (уравнение Лиувилля). В этом случае группа молекул определяет некоторое отдельное состояние системы. Эти модели также не имеют ограничений по числам Маха и Кнудсена.

Изначально модели кинетического уровня использовались для описания течений одноатомных газов. В дальнейшем эти модели были распространены и на многоатомные газы [4, 5, 6]. Разработаны методы численной реализации кинетических моделей в достаточно плотных газах [7].

Модели кинетического уровня также избыточно информативны с точки зрения задач газодинамики. Однако трудоемкость их реализации существенно меньше, чем трудоемкость реализации статистических моделей, и в некоторых случаях она приемлема для решения практических задач. Условия на границе раздела фаз записываются с использованием того или иного вида функции распределения отраженных молекул, учитывающего реальные процессы межмолекулярного взаимодействия.

Следующий уровень описания базируется на теории сплошной среды и, следовательно, ограничен малыми значениями чисел Кнудсена. Будем называть его гидродинамическим уровнем. Модели этого уровня наименее информативны и, следовательно, наиболее экономичны. При построении гидродинамических моделей в качестве элементарного объекта рассматривается «жидкая частица», для которой записываются уравнения сохранения массы, импульса и энергии.

Для моделей динамики невязкой и нетеплопроводной среды этих уравнений достаточно, чтобы получить замкнутую систему. Уравнение движения этой системы принято называть уравнением Эйлера. Всю систему уравнений в дальнейшем будем называть моделью Эйлера.

В модели вязкой и теплопроводной среды дополнительно привлекаются реологический закон Ньютона (закон трения Стокса) и закон Фурье (модель Навье–Стокса–Фурье или НСФ). В рамках данной работы не рассматриваются течения анизотропных и вязкопластичных сред, поэтому для характеристики гидродинамического уровня ограничимся двумя упомянутыми моделями, отметим только, что в середине прошлого века была построена более общая теория моделей сплошной среды [8]. Однако методы этой теории не получили широкого распространения в области задач газовой динамики.

В отношении информативности гидродинамических моделей отметим следующее. При описании динамики среды, состояние которой близко к локально-равновесному, а число Кнудсена исчезающе мало, достаточно информативной является уже модель Эйлера. Граничные условия на границе раздела фаз при этом следуют из самой модели, т.е. предполагают отсутствие трения и тепловых потоков.

В слабонеравновесных течениях, в которых число Кнудсена мало, но конечно, а число Рейнольдса не настолько велико, чтобы возникла турбулентность, модель НСФ также является достаточно информативной и, по существу, основной физико-математической моделью динамики газовой среды, исполь-

зуемой в практических задачах. Условия на границе раздела фаз для данной модели (условия прилипания) адекватно моделируют реальные физические процессы и, как правило, не нуждаются в уточнении. Состояние газа в течениях указанного типа достаточно хорошо согласуется с базовыми положениями теории сплошной среды, чем и обусловлена высокая эффективность применения моделей Эйлера и НСФ.

Особый случай представляют неравновесные течения, т.е. течения с умеренными и большими характерными числами Кнудсена (Kn^*). Под термином «характерное число Кнудсена» будем понимать критерий подобия, вычисленный по характерному геометрическому размеру сильно возмущенной области течения. В такой формулировке этот критерий может использоваться в качестве критерия неравновесности течения даже в достаточно плотных газах, где число Кнудсена, вычисленное традиционным способом, мало.

В качестве простейшего примера рассмотрим обтекание тела размером 1 м сверхзвуковым потоком при нормальных условиях. Средняя длина пробега молекулы при этом составит $\lambda \approx 1$ мкм. Число Кнудсена, вычисленное по размеру тела, $Kn \approx 10^{-6}$. Размер сильно возмущенной области (толщина ударной волны, неизбежно возникающей при таком обтекании) составляет несколько длин свободного пробега молекулы, т.е. $Kn^* \approx 0.1 \dots 1$. При таких значениях характерного числа Кнудсена уместно говорить о сильнонеравновесном течении в области ударной волны, что, впрочем, является широко известным фактом.

В неравновесных течениях проявляется недостаточная информативность моделей гидродинамического уровня и их ограниченность по числам Кнудсена. Линейная зависимость между тензорами напряжений и скоростями деформаций становится слишком грубым приближением, так же как и пропорциональность теплового потока, градиенту температур.

Пренебрежение коэффициентом объемной вязкости, часто имеющее место в практических приложениях модели НСФ, также является слишком грубым допущением. Ниже будет показано, что даже в условиях слабонеравновесного течения такое допущение влечет ошибку того же порядка, что и нормальное неравновесное напряжение, определяемое посредством коэффициента объемной вязкости.

Такое «пренебрежительное» отношение к коэффициенту объемной вязкости, по-видимому, сложилось исторически. Изначально уравнения Навье–Стокса использовались преимущественно для описания течения в пограничных слоях. Неравновесные нормальные напряжения не играют существенной роли в таких течениях. Совершенствование средств и методов вычислений привело к тому, что модель НСФ стала применяться во всей расчетной области. Даже в пристеночной области решается полная система уравнений, не огрубленная линеаризацией, параболизацией и другими упрощениями. В неравновесных течениях правильный учет объемной вязкости становится принципиально важным.

В отношении условий на границе раздела фаз отметим, что условия скольжения скорости и скачка температуры [9] даже в сильнонеравновесных

течениях хорошо аппроксимируют условия взаимодействия газа с поверхностью [10]. Только при $Kn^* > 1$ эти граничные условия требуют уточнения.

Недостаточная информативность гидродинамических моделей проявляется и в случае больших чисел Рейнольдса при возникновении турбулентных течений. Этот вид течения, вообще говоря, не может быть описан только на основе положений теории сплошной среды и требует привлечения дополнительных моделей турбулентности. В настоящей работе, посвященной существенно неравновесным течениям, числа Рейнольдса которых малы, проблемы турбулентности рассматриваться не будут.

В предлагаемой классификации моделей динамики газа, не претендующей на их исчерпывающую систематизацию, отсутствует самостоятельный уровень описания, соответствующий моделям неравновесных течений в макроскопических переменных (в дальнейшем – модели неравновесных течений).

Такие модели занимают промежуточное положение между кинетическими и гидродинамическими моделями. В их основе лежит то или иное кинетическое уравнение, из которого при помощи функции распределения специального вида получают замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно макроскопических переменных. Получаемые таким способом модели, с одной стороны, лишены избыточной информативности кинетических моделей, с другой – содержат необходимую информацию о молекулярных процессах, отсутствующую в теории сплошной среды.

Методы построения моделей неравновесных течений начали разрабатываться в первой половине двадцатого века. Интерес к ним не ослабевает и по сегодняшний день. Прежде всего, к таким методам относятся методы Грэда [11], Чепмена–Энскога [12, 13], Гильберта [9] и целый ряд более поздних методов.

В настоящей монографии при построении и анализе моделей неравновесных течений будут рассматриваться преобразования систем моментных уравнений, поэтому методу Грэда уделим особое внимание. В методе Грэда, реализованном в виде 20- и 13-моментной моделей [11], сначала строится аппроксимирующая функция распределения в виде разложения локально-равновесной функции по полиномам Эрмита относительно тепловой скорости. Предполагается, что бесконечный ряд разложения соответствует истинной функции распределения.

Разложение обрывается на членах, соответствующих моментам n -го порядка. Аппроксимирующая функция распределения обеспечивает “правильные” значения всех моментов до n -го порядка включительно. Далее записывается система моментных уравнений с использованием полученной функции распределения. Моменты $(n+1)$ -го порядка (у Грэда – моменты четвертого порядка), фигурирующие в уравнении моментов n -го порядка, получают интегрированием аппроксимирующей функции распределения.

С процедурой замыкания системы уравнений связана одна из особенностей метода: моменты четвертого порядка выражаются через моменты предыдущих порядков локально, без использования балансовых зависимостей – мо-

ментных уравнений. В результате полученные моменты четвертого порядка не удовлетворяют своим моментным уравнениям. В дальнейшем будем называть это рассогласованностью локального и балансового выражений замыкающих моментов.

Другой важной особенностью модели Грэда является вид аппроксимирующей функции распределения. Последняя представлена в виде разложения равновесной функции по степеням проекций тепловой скорости молекул. Коэффициентами такого разложения являются неравновесные напряжения и моменты третьего порядка. В периферийной области пространства скоростей, т.е. при больших по модулю значениях молекулярных скоростей, функция распределения приобретает отрицательные значения.

В слабонеравновесных течениях, где неравновесные напряжения и тепловые потоки (свертки моментов третьего порядка) малы, отрицательные области не оказывают существенного влияния на вычисление моментов четвертого порядка.

При высокой степени неравновесности, например в ударных волнах высокой интенсивности, неравновесные напряжения и тепловые потоки по порядку величины приближаются к значениям давления и потока энергии. Выражения моментов четвертого порядка становятся слишком недостоверными.

В работе [14] на примере задачи о профиле ударной волны показано, что ряд, используемый для аппроксимирующей функции, сходится в среднем при числах Маха, не превышающих 1.85, т.е. имеет место ограничение по числам Маха (формальные ограничения 20-моментной модели по числам Кнудсена отсутствуют). Интересен тот факт, что в верхней по потоку области профиля ударной волны, рассчитанной по 20-моментной модели Грэда, при $M_\infty \approx 1.8$ возникает разрыв пространственных производных макропараметров. Эта область, получившая название «субскачка», прогрессирует с увеличением числа Маха. На основании указанного факта субскачок ассоциируют с ограничениями работы [14].

В данной монографии будет представлена 24-моментная модель (модель M24), соответствующая 20-моментной модели Грэда в случае одноатомного газа. Отличие модели M24 заключается в виде аппроксимирующей функции, не содержащей разложений по степеням проекций тепловой скорости. Тем не менее на профиле ударной волны, рассчитанной по данной модели, возникает субскачок при $M_\infty \geq 1.8$. Более того, профиль ударной волны, рассчитанный по модели R13 [15] (она будет рассмотрена ниже), не содержит субскачка в широком интервале чисел Маха, хотя эта модель замыкается грэдовой 13-моментной аппроксимирующей функцией.

Модель НСФ, в случае ее формального построения, также замыкается 13-моментной функцией (точнее, ее аналогом, часто называемым “навье-стоксовой функцией распределения”) и не имеет ограничений по числам Маха. Приведенные доводы позволяют предположить, что ограничения на сходимость ряда [14] не являются, по крайней мере, основной причиной образования субскачка. Ниже будет показано на примере модели M24, что даже частичное согласование

локального и балансового представлений замыкающих моментов позволяет исключить субскачок.

Наиболее часто обсуждаемой, но редко используемой на практике является 13-моментная модель Грэда. Она представляет собой упрощенный вариант 20-моментной модели, в которой вместо моментов 3-го порядка используются их свертки, т.е. проекции вектора теплового потока. Бездивергентной частью тензора моментов 3-го порядка в уравнении напряжений пренебрегают, что вносит ограничения по числам Кнудсена. Такое упрощение привело к неработоспособности модели в области сверхзвуковых течений (точнее, при $M_\infty \geq 1.65$). Из-за пренебрежения бездивергентным тензором были потеряны члены второго порядка малости в уравнении неравновесных напряжений, в результате чего оставшиеся члены второго порядка стали внепорядковыми.

Формально ограничения по числам Кнудсена должны быть такими же, как у модели НСФ ($Kn^* \ll 1$). Этот недостаток 13-моментной модели отмечался рядом авторов (см., например, [9]).

В работах [15, 16] построена модель, уточняющая 13-моментную систему уравнений Грэда. Если отвлечься от специфических корректировок 13-моментной модели, то основное содержание работы сводится к тому, что для свертки моментов четвертого порядка, фигурирующих в уравнениях теплового потока, записываются соответствующие моментные уравнения, замыкаемые локализованными в указанном смысле моментами пятого порядка. Далее применяется процедура, аналогичная методу Чепмена–Энскога.

В результате для свертки моментов четвертого порядка получают балансовые (нелокализованные) зависимости, которые и используются для замыкания уравнений третьего порядка. Аналогичная процедура применяется к бездивергентному тензору моментов третьего порядка. Как указывалось выше, модель R13 не содержит ограничений по числам Маха. Ограничение по числам Кнудсена, связанное с использованием процедуры Чепмена–Энскога во втором приближении, менее жестки, чем в исходной 13-моментной модели: $Kn^* < 1$.

Метод Грэда изначально использовался только для одноатомных газов. Позже метод был применен для построения моделей течения многоатомных газов [17, 18]. Эти модели не получили широкого распространения в практике газодинамических расчетов.

Граничные условия на твердой поверхности в моделях Грэда формулируются на основе кинетических условий с последующей аппроксимацией функции распределения в граничной точке (функции распределения с разрывом) полиномами Эрмита. Выделение моментов функции распределения, для которых необходимо задавать граничные условия, осуществляется по количеству семейств характеристик при данной размерности задачи. Характеристики определяются при довольно сильных допущениях. Отметим, что в гидродинамическом приближении полученные таким способом граничные условия совпадают по структуре с условиями скольжения скорости и скачка температуры, о которых было сказано выше.

Еще один широко используемый метод построения моделей неравновесных течений – метод Чепмена–Энскога – основан на разложении локально равновесной функции распределения по степеням малого параметра, имеющего смысл характерного числа Кнудсена. Старшую степень малого параметра принято считать номером или порядком приближения. Для нулевого и первого приближений $Kn^* \ll 1$, для высших приближений $Kn^* < 1$.

В отличие от метода Гильберта, макропараметры ρ , u , T в ряд не разлагаются; разложению подлежит оператор локальной производной по времени. Функция распределения подставляется в уравнение Больцмана, и проводится сортировка членов уравнения по порядку малости величины. Полученное интегральное уравнение относительно малых добавок к локально равновесной функции распределения в совокупности с условиями разрешимости этого уравнения позволяет определить вид функции распределения в соответствующем приближении.

Система дифференциальных уравнений, получаемая этим методом, состоит только из уравнений сохранения. Содержащиеся в ней неравновесные величины вычисляются как моменты функции распределения соответствующего приближения. В приближениях от нулевого до третьего получают модели Эйлера, НСФ, Барнетта и супер-Барнетта. Отметим что терминами «метод Чепмена–Энскога» или «процедура Чепмена–Энскога» иногда обозначают сортировку членов по порядку величины малого параметра в зависимостях, не связанных с уравнениями сохранения.

Одна из особенностей метода Чепмена–Энскога заключается в том, что приближения второго и следующих порядков содержат посторонние решения [19]. Причины этого будут рассмотрены ниже при выводе моделей второго приближения из системы моментных уравнений. Основные сложности численной реализации модели Барнетта изложены в работах [20, 21, 22].

Высшие приближения метода Чепмена–Энскога имеют значительную теоретическую значимость, так как в них появляются новые, не содержащиеся в модели НСФ члены, например температурные напряжения. Анализ таких членов способствует лучшему пониманию процессов, протекающих в неравновесных течениях. Однако область практического применения моделей высших приближений слишком узка.

В моделях первого приближения предполагается, что члены порядка Kn^* существенны, а члены порядка $(Kn^*)^2$ и более пренебрежимо малы. Класс течений, для которых такое приближение приемлемо, достаточно широк. Значительно более узкий класс течений допускает второе приближение, предполагающее существенными членами $(Kn^*)^2$, но пренебрегающее членами $(Kn^*)^3$ и выше. И только очень специфические условия течения могут потребовать приближения, в котором существенны члены порядка $(Kn^*)^3$ и не существенны уже члены $(Kn^*)^4$.

Метод Гильберта позволяет строить модели течений какого-либо определенного вида. Модификации метода Гильберта [23, 24] допускают «сшивание» таких течений, например внешнее течение «сшивается» с погранслоем, а тот, в свою очередь, с кнудсеновским слоем, в котором выставляются граничные условия на твердой поверхности.

Современные тенденции в области математического моделирования течений заключаются в использовании единой физико-математической модели для описания всего течения, чему способствует интенсивное развитие вычислительных средств. Хотя методы «сшивания» и комбинации различных моделей остаются достаточно актуальными, в данной работе они рассматриваться не будут. Обзор методов комбинации различных моделей можно найти в работе [25].

Модели, использующие разрывную функцию распределения, впервые были предложены И.Е. Таммом и Г.М. Мот-Смитом для решения задачи о структуре ударной волны (бимодальное распределение). Общий метод построения таких моделей описан в [9]. Сам метод не предусматривает каких-либо ограничений на числа M и Kn^* , более того, он применим для построения свободномолекулярных моделей.

Пространство скоростей разбивается на отдельные области. Внутри каждой области записывается индивидуальная функция распределения. Затем записываются системы моментных уравнений для всех функций. Количество получаемых систем, очевидно, соответствует количеству областей разбиения, что существенно повышает трудоемкость численной реализации. Модели этой группы отличаются простотой формулировки граничных условий, вполне адекватных кинетическим граничным условиям. При $Kn \rightarrow \infty$ и соответствующем разбиении пространства скоростей, модели дают точное свободномолекулярное решение.

Чаще всего в качестве индивидуальных функций используют функции равновесного распределения. Примером может служить модель [26], построенная на базе двухпоточной функции распределения и исследованная применительно к распространению волновых возмущений в разреженном газе. При $Kn \approx 1$ расчетные значения фазовой скорости и коэффициента затухания хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Более общий характер имеет модель [27, 28]. Здесь пространство скоростей в общем случае может быть разбито на области (фрагменты), соответствующие октантам прямоугольной декартовой системы координат. В зависимости от условий решаемой задачи, фрагменты могут объединяться. В качестве индивидуальных функций используются не только равновесные сферические, но и «деформированные» функции распределения. Тестирование этой модели в широком интервале чисел Кнудсена показало, что в переходной области течения ($Kn \approx 1$) она почти не улучшает более экономичную модель НСФ даже в пристеночных областях, где, как предполагалось, она должна была бы иметь существенное преимущество. Дальнейшего развития модель [28] не получила.

В качестве самостоятельного направления в области моделирования неравновесных течений может быть рассмотрено направление, связанное с конст-

руированием одночастичных функций распределения, не содержащих асимптотических разложений по малому параметру или по степеням проекций тепловой скорости [29, 30, 31, 32]. Такие функции имеют вид максвелловской (гауссовой) функции распределения, аргумент которой включает в себя, помимо традиционных макропараметров, энтропию и внешнее произведение проекций тепловой скорости. В отношении моделей, построенных с использованием такой функции, отметим только, что они еще далеки от практической газодинамики, хотя и достаточно перспективны для описания течений в широком интервале чисел Кнудсена.

Рассмотренные выше модели неравновесных течений находились между кинетическим и гидродинамическим уровнями используемой классификации. В 80-х годах прошлого столетия начали развиваться методы расчета, в основу которых были положены кинетически согласованные разностные схемы [33, 34, 35, 36]. Дальнейшее развитие эти методы получили в виде квазигидродинамической системы уравнений [37].

Особенностью этих моделей является то, что в них рассматривается дискретная эволюция функции распределения, с дальнейшим преобразованием аналога кинетического уравнения в систему макроскопических уравнений. С точки зрения используемой классификации эти модели содержат элементы всех трех уровней описания и представляются достаточно перспективными. К преимуществам этих моделей также надо отнести их органическую «настроенность» на параллельные (многопроцессорные) вычисления.

Чисто формальная база моделей этого типа (разностные схемы численного решения кинетического уравнения) требует большого числа допущений феноменологического характера для согласования формальной базы с описываемыми физическими процессами. В ряде случаев допущения сделаны неудачно. Например, в работе [38] в результате произвольного выбора числа Прандтля (в исходной модели оно равно единице) коэффициент объемной вязкости не соответствует времени вращательной релаксации, используемому в данной модели.

Ввиду актуальности методов расчета неравновесных течений число исследований в этой области достаточно велико. Рассмотренные модели течений – это далеко не полный перечень современных методов описания динамики газовых сред. Представленный выше обзор надо рассматривать скорее как некоторое сечение по множеству существующих моделей, соответствующее направленности данной монографии.

Настоящая работа преследует две основные цели.

Первая цель заключается в построении ряда моделей, позволяющих:

- частично согласовать локальные и балансовые выражения моментов, замыкающих систему моментных уравнений;
- исключить посторонние решения из моделей второго приближения в смысле процедуры Чепмена–Энскога.

Вторая цель – разработка модели, пригодной для практических газодинамических расчетов сильнонеравновесных течений, в частности гиперзвуковых.

Для достижения поставленных целей применяется метод построения системы моментных уравнений, использующий функцию распределения общего вида и не связанный с непосредственным вычислением интеграла столкновений для той или иной модели молекулы. Аппроксимирующая функция распределения конструируется только на этапе замыкания полученной системы моментных уравнений. В этом заключаются отличия применяемого метода от метода Грэда.

Предполагается, что погрешности, вносимые предлагаемым методом, не существенны для газодинамических расчетов. Это относится, прежде всего, к времени релаксации неравновесных величин.

Отметим, что рассматриваемые системы моментных уравнений или громоздки, или сильно нелинейны. Строгий анализ даже типа этих систем представляет значительные трудности, в связи с чем основные свойства полученных моделей будут оцениваться на основе численных решений простейших вырожденных течений.

Основное внимание традиционно будет уделено структуре плоской ударной волны. Эта задача допускает строгую постановку граничных условий и позволяет рассматривать течения высокой степени неравновесности. Для этого течения получено, пожалуй, наибольшее количество экспериментальных и расчетных данных.

В работе рассматриваются уравнения моментов до пятого порядка включительно. Общепринятая форма записи таких уравнений очень громоздка. Вместе с тем моментные уравнения обладают рядом специфических особенностей, позволяющих существенно упростить форму записи. Специальные формы записи указаны в разделе “Условные обозначения” и подробно поясняются в тексте работы при их первом использовании.

Нестационарные процессы, в которых эволюция параметров играет определяющую роль, в настоящей монографии не рассматриваются.

Глава 1

СИСТЕМА МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ

1.1. Основные допущения. Используемые термины и символы

Будет рассматриваться одночастичная функция распределения, фазовое пространство которой дополнено энергией внутренних степеней свободы молекулы: $f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$. Здесь t – время; x_i – декартовы координаты геометрического пространства; ξ_i – проекции молекулярной скорости (скорость молекулы в лабораторной системе координат); ε – энергия внутренних степеней свободы молекулы.

Помимо молекулярной скорости, рассмотрим тепловую скорость молекулы $c_i = \xi_i - u_i$, где $u_i = \frac{1}{n} \int \xi_i f d\bar{\xi} d\varepsilon$ – групповая скорость молекул или макроскопическая скорость газа; n – концентрация молекул, $d\bar{\xi} = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ – элемент объема в пространстве скоростей.

Под энергией внутренних степеней свободы будем понимать разность между полной энергией теплового движения молекулы и энергией ее поступательного теплового движения (энергией межмолекулярного взаимодействия пренебрегаем). Такой подход вполне применим к описанию течений, температура которых находится в интервале $(10^2 \dots 10^4)$ К, и, следовательно, квантование вращательных и возбуждение колебательных степеней свободы молекулы не существенны.

Используемая интерпретация энергии внутренних степеней свободы позволяет упростить вывод моментных уравнений, учитывающих обмен энергией между поступательными и внутренними степенями свободы. Хорошо разработанные методы двухтемпературной релаксации [39, 40, 41, 5, 42] дают аналогичные моментные уравнения. Отличие заключается в зависимостях для времен релаксации неравновесных параметров, связанных с обменом энергией между поступательными и внутренними степенями свободы. О времени релаксации будет сказано ниже, здесь отметим только, что использование зависимостей типа приведенных в [5, 42] позволяет несколько расширить интервал температур.

Энергию теплового движения молекул, заключенных в единице объема, определим следующим образом:

$$E = \int \left(\frac{m_0 c^2}{2} + \varepsilon \right) f d\bar{c} d\varepsilon = n \frac{m_0 \overline{c^2}}{2} + E_\Omega. \quad (1.1)$$

Здесь m_0 – масса молекулы; E_Ω – энергия внутренних степеней свободы молекул, заключенных в единице объема; $\overline{c^2}$ – средний квадрат тепловой скорости; $d\bar{c} = dc_1 dc_2 dc_3 \equiv d\bar{\xi}$ – элемент объема в пространстве скоростей.

Температура поступательных степеней свободы (поступательная температура) определена в молекулярно кинетической теории:

$$\frac{3}{2}kT_t = \frac{m_0 \overline{c^2}}{2}, \quad (1.2)$$

где k – постоянная Больцмана. Таким образом, поступательная температура может рассматриваться как удвоенная средняя энергия поступательного движения молекулы, приходящаяся на одну поступательную степень свободы. Постоянная Больцмана в этом выражении выполняет функции коэффициента, переводящего единицу измерения энергии 1 джоуль в 1 кельвин.

Температура, называемая далее «термодинамической температурой», определена термодинамическим соотношением

$$E = c_v \rho T, \quad (1.3)$$

где c_v – изохорная теплоемкость.

Из определений E , T_t и T следует определение «температуры внутренних степеней свободы» T_Ω :

$$c_v T = \frac{3}{2} R T_t + c_\Omega T_\Omega. \quad (1.4)$$

Здесь $R = \frac{k}{m_0}$ – удельная газовая постоянная; $c_\Omega = c_v - \frac{3}{2} R$ – теплоемкость

внутренних степеней свободы молекулы. При допущениях, сделанных в отношении температурного интервала рассматриваемых течений, температура T_Ω может рассматриваться как «вращательная температура», однако такая трактовка в настоящей работе применяться не будет.

Энергия E_Ω и температура T_Ω связаны соотношением

$$E_\Omega = c_\Omega \rho T_\Omega. \quad (1.5)$$

Здесь ρ – плотность газа.

Кроме этого, будем использовать разность поступательной температуры и температуры внутренних степеней свободы:

$$\theta = T_t - T_\Omega, \quad (1.6)$$

являющуюся, очевидно, неравновесной величиной.

В соответствии с (1.4) температуры находятся в следующем соотношении:

$$T_t = T + \frac{5 - 3\gamma}{2} \theta; \quad (1.7)$$

$$T_\Omega = T - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\theta, \quad (1.8)$$

где γ – показатель адиабаты.

Под напряжением или моментом второго порядка будем понимать $P_{ij} = m_0 \int c_i c_j f d\bar{c} d\varepsilon$. Для удобства записи введем удельное напряжение, т.е. напряжение (плотность потока импульса), приходящееся в среднем на одну молекулу:

$$T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}. \quad (1.9)$$

Будем рассматривать два вида разложения тензора напряжений на сферический и бездивергентный тензоры:

$$P_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m; \quad (1.10)$$

$$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p. \quad (1.11)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера.

В дальнейшем p^m будем называть «механическим давлением», а p – «термодинамическим давлением» в соответствии с их определениями:

$$p^m = \frac{1}{3} P_{\alpha\alpha} = \rho RT_t, \quad (1.12)$$

$$p = \rho RT. \quad (1.13)$$

В уравнении (1.12) и ниже принято суммирование по повторяющимся греческим индексам.

Механическое давление p^m в соответствии с его определением (1.12) представляет собой среднее значение нормального напряжения (потока импульса), которое может быть ассоциировано с энергией поступательных степеней свободы, так как отличается от нее только постоянным множителем $\frac{2}{3}$.

Термодинамическое давление p подразумевает осреднение всей (не только поступательной) энергии теплового движения по всем (поступательным и внутренним) степеням свободы молекул. В состоянии равновесия газовой среды энергия теплового движения равномерно распределена по степеням свободы. Значения обоих давлений совпадают.

В неравновесных условиях значения p^m и p уже не могут рассматриваться в виде единого параметра газовой среды. Градиенты скорости, присутствующие в поле течения, приводят к перераспределению энергий группового и теплового движений. Характерно, что энергия группового движения, например при торможении потока, передается сначала на поступательные степени свободы.

Если в качестве одной из степеней свободы рассматривать координатную ось в направлении движения среды, то энергия будет передаваться только на эту поступательную степень свободы. Такой процесс обусловлен деформацией функции распределения и не связан с межмолекулярными столкновениями.

Далее, в результате столкновений молекул энергия перераспределяется между поступательными и внутренними степенями свободы. При этом энергообмен между различными поступательными степенями свободы протекает в несколько раз быстрее, чем между поступательными и внутренними.

Таким образом, поступательные и внутренние степени свободы находятся в разных условиях по отношению к процессу энергообмена, что и приводит к несовпадению средних энергий на этих степенях свободы и, следовательно, к различным значениям p^m и p . Процесс энергообмена между степенями свободы молекул подробно рассмотрен в разделе 3.1.

Величины p_{ij}^m представляют собой неравновесные напряжения. Приставка «механическое» по отношению к p_{ij}^m избыточна, так как напряжение является

ся механической величиной по определению. Надстрочный символ используется для единства символики в выражениях типа (1.10). Кроме этого, в рамках используемой символики $p_{ij}^m \equiv p_{ij} \equiv P_{ij}$ при $i \neq j$. Нормальные неравновесные напряжения обладают очевидным свойством:

$$p_{\alpha\alpha}^m \equiv 0. \quad (1.14)$$

Величины p_{ii} , компоненты главной диагонали тензора $\{p_{ij}\}$, строго говоря, не являются напряжениями в механическом понимании. Будем называть их, а вместе с ними и остальные компоненты $\{p_{ij}\}$ «термодинамическими неравновесными напряжениями».

Уравнения (1.7), (1.10) – (1.12) позволяют установить связь между тензорами $\{p_{ij}^m\}$ и $\{p_{ij}\}$:

$$p_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \rho R \theta. \quad (1.15)$$

Из последнего выражения следует, что нормальные термодинамические неравновесные напряжения содержат в себе величину, пропорциональную разности энергий на поступательных и внутренних степенях свободы молекул. Такая форма неравновесного напряжения, традиционно используемая в газодинамике, обязана своим существованием неоднозначному определению понятия давления.

Будем рассматривать две группы моментов третьего порядка. Первую группу определим следующим образом:

$$\varphi_{ijk} = \frac{m_0}{2} \int c_i c_j c_k f d\bar{c} d\varepsilon. \quad (1.16)$$

Свертка тензора $\{\varphi_{ijk}\}$, очевидно, представляет собой вектор теплового потока, обусловленный переносом энергии поступательного движения молекул:

$$\varphi_{i\alpha\alpha} \equiv \varphi_i. \quad (1.17)$$

Моменты второй группы:

$$\omega_i = \int c_i \varepsilon f d\bar{c} d\varepsilon. \quad (1.18)$$

Это вектор теплового потока, обусловленный переносом внутренней энергии молекул. Полный тепловой поток:

$$q_i = \varphi_i + \omega_i. \quad (1.19)$$

1.2. Построение системы моментных уравнений

В работе Грэда [11] и более поздних работах (см., например, [5]) построение системы моментных уравнений начинается с определения аппроксимирующей функции распределения. Моментные уравнения получают посредством подстановки этой функции в уравнение Максвелла–Больцмана. Такая последовательность построения позволяет выразить релаксационные члены моментных уравнений через параметры столкновения молекул.

Модель процесса столкновений, как правило, сильно упрощена или представлена в настолько общем виде, что не приводит к каким-либо конкретным зависимостям. На практике даже в кинетических моделях течений используют максвелловское время релаксации в его гидродинамическом приближении:

$$\tau_{\text{рел}} = \frac{\mu}{p} \quad (\text{см., например, [4]}). \quad \text{В моментных уравнениях тепловых потоков учет}$$

внутренних степеней свободы, как правило, ограничивается введением модифицированной поправки Эйкана в гидродинамическое приближение коэффициента теплопроводности. Впрочем, это приближение обеспечивает вполне удовлетворительную с практической точки зрения точность [44].

С учетом сказанного, представляется целесообразным строить систему моментных уравнений для функции распределения общего вида, представляя правые части уравнений в релаксационной форме. Времена релаксации соответствующих моментов могут быть выражены с привлечением эмпирических, феноменологических и других зависимостей. В настоящей работе времена релаксации будут рассматриваться в гидродинамическом приближении.

При таком построении к аппроксимирующей функции распределения будут предъявляться более мягкие требования. От нее потребуются конкретные выражения только для замыкающих моментов. В системе моментных уравнений n -го порядка это моменты порядка $n+1$. В отношении остальных моментов вид функции распределения может быть достаточно общим. В дальнейшем будем исходить из того, что функция распределения более общего вида меньше округляет истинную функцию.

Перейдем к построению системы моментных уравнений. Следуя работе Грэда [11], ограничимся системой моментных уравнений до третьего порядка включительно. Общее уравнение переноса имеет вид

$$\int V_{ijk\dots}^{(N)} \frac{\partial f}{\partial t} d\bar{\xi} d\varepsilon + \int V_{ijk\dots}^{(N)} \xi_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} d\bar{\xi} d\varepsilon = \int V_{ijk\dots}^{(N)} J^{+} d\bar{\xi} d\varepsilon - \int V_{ijk\dots}^{(N)} J^{-} d\bar{\xi} d\varepsilon. \quad (1.20)$$

Здесь $V_{ijk\dots}^{(N)}$ – молекулярный признак момента N -го порядка; J^{-} и J^{+} – интегралы прямых и обратных столкновений.

Моменты, не содержащие энергию внутренних степеней свободы, определим как $M_{ijk\dots}^{(N)} = m_0 \int c_i c_j c_k \dots f d\bar{c} d\varepsilon$, где N (порядок момента) соответствует рангу представляющего этот момент тензора. Молекулярный признак этих моментов: $V_{ijk\dots}^{(N)} = m_0 \xi_i \xi_j \xi_k \dots$

Моменты, содержащие энергию внутренних степеней свободы, – $M_{ijk\dots}^{\Omega(N)} = \int \varepsilon c_i c_j c_k \dots f d\bar{c} d\varepsilon$. Ранг соответствующего тензора $N-2$ (моменты ниже второго порядка не существуют). Молекулярный признак этих моментов: $V_{ijk\dots}^{(N)} = \varepsilon \xi_i \xi_j \xi_k \dots$. Обратим внимание на то, что все моменты вычисляются в системе координат, связанной с потоком газа. Ниже приведены основные моменты в формальном и газодинамическом обозначениях:

$$M^{(0)} \equiv \rho; M_i^{(1)} \equiv 0; M_{ij}^{(2)} \equiv P_{ij}; M^{\Omega(2)} \equiv E_{\Omega}; M_{ijk}^{(3)} \equiv 2\varphi_{ijk}; M_i^{\Omega(3)} \equiv \omega_i.$$

Уравнение (1.20), проинтегрированное с соответствующим молекулярным признаком, позволяет записать общее моментное уравнение порядка $N \geq 2$ (в уравнениях моментов, содержащих энергию внутренних степеней свободы, символ M_{\dots} должен быть заменен символом $M_{\dots}^{\Omega(\dots)}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ijk\dots}^{(N)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(u_{\alpha} M_{ijk\dots}^{(N)} \right) + M_{***\dots\alpha}^{(N)} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{M_{***\dots}^{(N-1)}}{\rho} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial M_{ijk\dots\alpha}^{(N+1)}}{\partial x_{\alpha}} = \\ = \frac{M_{ijk\dots}^{(N)+}}{\tau^{+}} - \frac{M_{ijk\dots}^{(N)}}{\tau}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь $\frac{M_{ijk\dots}^{(N)+}}{\tau^{+}} = \int V_{ijk\dots}^{(N)} J^{+} d\bar{\xi} d\varepsilon - u_{*} \int V_{***\dots}^{(N-1)} J^{+} d\bar{\xi} d\varepsilon - u_{*} u_{*} \int V_{***\dots}^{(N-2)} J^{+} d\bar{\xi} d\varepsilon - \dots$ – бы-
строга наработки момента в результате обратных столкновений; τ – среднее
время свободного пробега молекулы; $\frac{1}{\tau^{+}}$ – средняя частота обратных столкно-
вений.

Подстрочный символ “звездочка” обозначает суммирование одночленов по всем «различимым» перестановкам индексов («неразличимыми» считаются перестановки, различающиеся транспозицией индексов в пределах одного симметрического тензора), например:

$$M_{**\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{\alpha}} \equiv M_{ij\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_k}{\partial x_{\alpha}} + M_{ki\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial x_{\alpha}} + M_{jk\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}}. \quad (1.22)$$

Эта операция является операцией симметрирования с исключением повторений тождественных по величине одночленов. Такая операция “компактного симметрирования” характерна для моментных уравнений. В отличие от традиционной операции симметрирования, данная операция, примененная к моментным уравнениям, освобождает их от постоянных множителей. Например, если $\{A_{ijkl}\} = \{P_{ij} P_{kl}\}$, т.е. $A = P \otimes P$ (такое произведение тензора напряжений встретится ниже), то компактная и традиционная формы записи соотносятся как $P_{**} P_{**} = 1/8 A_{(ijkl)}$, так как нетождественных по величине одночленов только три, и каждому из них соответствует восемь сочетаний индексов.

В (1.21) предполагается, что одночлен, содержащий тензор нулевого ранга (скаляр), например E_{Ω} , не существует.

Подставляя в (1.20) молекулярные признаки m_0 и $m_0 \xi_i$, получим уравнения сохранения массы и импульса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0; \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\rho u_i u_{\alpha} + P_{i\alpha}) = 0. \quad (1.24)$$

В дальнейшем помимо дивергентной записи (1.24) будет использоваться уравнение для макроскопической скорости, получаемое линейной комбинацией (1.23) и (1.24):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (1.25)$$

Остальные моментные уравнения будут получены с помощью зависимости (1.21). Уравнение энергии внутренних степеней свободы:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_\Omega + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha E_\Omega) + \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{E_\Omega^+}{\tau^+} - \frac{E_\Omega}{\tau} = \frac{\tau}{\tau^+} \frac{E_\Omega^+ - E_\Omega}{\tau} = \Xi. \quad (1.26)$$

Правая часть уравнения, обозначенная символом Ξ , представляет собой быстроту передачи энергии от поступательных степеней свободы к внутренним.

Уравнение напряжений:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial \varphi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{P_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{P_{ij}}{\tau}. \quad (1.27)$$

Правая часть уравнения с учетом (1.10) может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{P_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{P_{ij}}{\tau} &= \frac{p_{ij}^{m+} + \delta_{ij} p^{m+}}{\tau^+} - \frac{p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m}{\tau} = \\ &= -\frac{1}{\tau} \left(p_{ij}^m - \frac{\tau}{\tau^+} p_{ij}^{m+} \right) - \delta_{ij} \frac{1}{\tau} \left(p^m - \frac{\tau}{\tau^+} p^{m+} \right) = -\frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{\tau}{\tau^+} \Pi \right) p_{ij}^m - \delta_{ij} \frac{2}{3} \Xi \end{aligned} \quad (1.28)$$

Здесь учтено, что механическое давление составляет 2/3 от энергии поступательного теплового движения молекул и, следовательно, член $\frac{1}{\tau} \left(p^m - \frac{\tau}{\tau^+} p^{m+} \right)$

представляет собой быстроту передачи энергии Ξ с соответствующим множителем. Скалярным коэффициентом Π обозначено отношение неравновесных напряжений, создаваемых молекулами после и до столкновений, т.е. $\Pi = p_{ij}^{m+} / p_{ij}^m$. Это отношение не зависит от значений индексов, в противном случае компоненты тензора напряжений релаксировали бы с разной скоростью.

Отмеченное свойство отношения p_{ij}^{m+} / p_{ij}^m , а также фигурирующих ниже отношений $\varphi_{ijk}^+ / \varphi_{ijk}$ и ω_i^+ / ω_i является основой применяемого метода построения моментных уравнений для функции распределения общего вида. Кроме этого, благодаря данному свойству правые части моментных уравнений могут быть представлены в виде релаксационных членов без использования какой-либо модели межмолекулярного взаимодействия.

Сразу оговоримся, что напряжение p_{ij}^{m+} , рассматриваемое вне выражения p_{ij}^{m+} / τ^+ , имеющего физический смысл, представляет собой некоторую гипотетическую величину. Такое напряжение возникнет в том случае, если все моле-

кулы, находящиеся в рассматриваемом элементе объема, испытывают только одно столкновение. Описанный процесс, очевидно, физически невозможен (без участия гипотетического объекта, типа демона Максвелла). При построении моментных моделей напряжение p_{ij}^{m+} не будет рассматриваться как самостоятельная физическая величина, что и снимает неопределенность ее трактовки. К формальной трактовке p_{ij}^{m+} мы вернемся в разделе 5.2. Все сказанное относится и к остальным макроскопическим величинам с надстрочным символом “+”.

Уравнение напряжений принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial \varphi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \Xi. \quad (1.29)$$

Время релаксации напряжений

$$\tau_p = \frac{\tau}{1 - \frac{\tau}{\tau^+} \Pi}. \quad (1.30)$$

Подстрочный символ соответствует напряжению, т.е. обозначается латинским p . Аналогичным образом будут обозначаться времена релаксации других величин. Отметим, что в отечественной литературе максвелловское время релаксации часто обозначают τ_p , где подстрочный символ – кириллическое “эр”. Максвелловское время релаксации (обозначим его $\tau_{\text{рел}}$) определено как характерное время затухания возмущений в пространственно однородном максвелловском газе. Для обеспечения «правильного» коэффициента вязкости в гидродинамическом приближении принимают $\tau_{\text{рел}} = \mu/p$. Таким образом, $\tau_{\text{рел}}$, так же как и τ_p , может рассматриваться как время релаксации напряжений. При построении моментных моделей для τ_p будет использоваться гидродинамическое приближение, в котором значения τ_p и $\tau_{\text{рел}}$ совпадают.

Зависимости (1.10) и (1.12) позволяют получить из (1.29) уравнения для механического давления и неравновесного напряжения, которые потребуются в дальнейшем. Заменяя в (1.29) свободные индексы индексом суммирования $i = j = \beta$ и деля обе части полученного уравнения на три, получим уравнение механического напряжения:

$$\frac{\partial}{\partial t} p^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p^m) + \frac{2}{3} P_{\beta\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\frac{2}{3} \Xi. \quad (1.31)$$

Домножая (1.31) на символ Кронекера и вычитая полученное выражение из (1.29), приходим к уравнению неравновесных напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Уравнение моментов третьего порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} T_{**} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} M_{ijk\alpha}^{(4)} = -\frac{\varphi_{ijk}}{\tau_\varphi}; \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{E_\Omega}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} P_{i\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} M_{i\alpha}^{\Omega(4)} = -\frac{\omega_i}{\tau_\omega}. \quad (1.34)$$

Здесь для релаксационных членов $-\varphi_{ijk}/\tau_\varphi = \varphi_{ijk}^+/\tau^+ - \varphi_{ijk}/\tau$ и $-\omega_i/\tau_\omega = \omega_i^+/\tau^+ - \omega_i/\tau$ использованы преобразования, аналогичные (1.28), (1.30). Учтено, что $\varphi_{ijk}^+/\varphi_{ijk}$ и ω_i^+/ω_i – скалярные выражения.

Полученные уравнения образуют 24-моментную систему, которая остается незамкнутой в силу неопределенности моментов четвертого порядка $M_{ijkl}^{(4)}$ и $M_{ij}^{\Omega(4)}$. Кроме этого, неопределены времена релаксации τ_p , τ_φ , τ_ω и член Ξ , характеризующий энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы молекул. Причиной такой неопределенности, как указывалось выше, является функция распределения общего вида, используемая при выводе уравнений.

1.3. Замыкание системы моментных уравнений

Для замыкания 24-моментной системы воспользуемся работой [45], где аппроксимирующая функция распределения сконструирована исключительно для замыкания системы моментных уравнений на уровне моментов четвертого порядка. В главе 2 эта функция распределения будет конкретизирована для вычисления моментов пятого порядка.

Рассмотрим функцию распределения следующего вида:

$$f_A = f_P F_\Omega + f_\varphi. \quad (1.35)$$

Здесь f_P – функция распределения, моделирующая моменты от нулевого до второго порядков, за исключением энергии внутренних степеней свободы E_Ω ; F_Ω – функция распределения, моделирующая E_Ω ; f_φ – функция распределения, моделирующая моменты третьего порядка, включая тепловой поток ω , создаваемый переносом внутренней энергии молекул.

В качестве f_P выберем эллипсоидальную функцию (аналогичную функции работы [30]), записанную в главных осях тензора напряжений:

$$f_P = \frac{n}{(2\pi R)^{3/2} \sqrt{T_{XX} T_{YY} T_{ZZ}}} \exp\left(-\frac{c_X^2}{2RT_{XX}} - \frac{c_Y^2}{2RT_{YY}} - \frac{c_Z^2}{2RT_{ZZ}}\right). \quad (1.36)$$

Прописными латинскими буквами обозначены индексы компонентов векторов и тензоров в главных осях. Составляющие поступательной температуры обозначены T_{II} :

$$\left. \begin{aligned} \rho RT_{XX} &= P_{XX} \\ \rho RT_{YY} &= P_{YY} \\ \rho RT_{ZZ} &= P_{ZZ} \end{aligned} \right\} - \text{главные значения тензора напряжений.}$$

Положение главных осей определено состоянием газовой среды в данной точке пространства в данный момент времени и не зависит от выбора «лабораторной» системы координат. Несмотря на схожесть с индексной формой записи тензорных выражений, уравнение (1.36) представляет собой скалярное выражение. Вопрос об инвариантности его относительно преобразования координат не возникает.

Допустим, что распределение молекул по внутренним энергиям не зависит от их тепловых поступательных скоростей, т.е.

$$F_{\Omega} = F_{\Omega}(t, x_1, x_2, x_3, \varepsilon). \quad (1.37)$$

При таком допущении конкретный вид функции F_{Ω} не существен, если речь идет о замыкании системы моментных уравнений. На эту функцию налагаются только два естественных условия:

$$\int F_{\Omega} d\varepsilon = 1 \text{ и } \int \varepsilon F_{\Omega} d\varepsilon = \frac{E_{\Omega}}{n}. \quad (1.38)$$

В отношении функции f_{φ} можно заметить следующее. Если эта функция представлена в виде суммы функций, нечетных по одной или трем координатам пространства скоростей, то при вычислении моментов четвертого порядка интегралы таких функций тождественно обратятся в нуль. Таким образом, F_{Ω} и f_{φ} могут быть представлены широким классом функций. Можно надеяться, что среди функций этого класса найдутся достаточно хорошо аппроксимирующие истинную функцию распределения.

Таким образом, моменты $M_{ijkl}^{(4)}$ могут быть определены интегрированием только функции f_P . Для определения моментов $M_{ij}^{\Omega(4)}$ потребуется интегрирование произведения $f_P F_{\Omega}$.

Проекция вектора тепловой скорости в произвольной системе координат связана со своими проекциями в главных осях тензора напряжений зависимостью $c_i = e_{iX} c_X + e_{iY} c_Y + e_{iZ} c_Z$, где e_{iJ} – косинусы углов между осями произвольной системы координат и главными осями.

Значения напряжений в произвольной системе координат могут быть представлены следующим образом:

$$P_{ij} = m_0 \int c_i c_j f_P d\bar{c} = m_0 \int (e_{iX} e_{jX} c_X^2 + e_{iY} e_{jY} c_Y^2 + e_{iZ} e_{jZ} c_Z^2) f_P d\bar{c}. \quad (1.39)$$

В целях сокращения записи в правой части уравнения опущены слагаемые, содержащие проекции тепловой скорости в нечетной степени, не дающие вклад в интеграл. Учтено, что преобразование координат линейно и, следовательно, модуль якобиана преобразования равен единице. Элемент объема пространства скоростей: $d\bar{c} \equiv dc_X dc_Y dc_Z$.

После интегрирования получаем:

$$P_{ij} = e_{iX} e_{jX} P_{XX} + e_{iY} e_{jY} P_{YY} + e_{iZ} e_{jZ} P_{ZZ}. \quad (1.40)$$

В локальном выражении момент четвертого порядка может быть представлен как

$$M_{ijkl}^{(4)} = m_0 \int c_i c_j c_k c_l f_p d\bar{c}. \quad (1.41)$$

Вычисление этого интеграла достаточно громоздко, хотя содержит только элементарные операции. Укажем алгоритм вычисления.

Проекции тепловых скоростей перемножаются с учетом их разложения по главным осям тензора напряжений. Опускаются члены, содержащие проекции c_i в нечетных степенях. Оставшиеся члены группируются в суммы вида (1.39). Проводится интегрирование и группировка в суммы вида (1.40). В результате получено следующее выражение:

$$M_{ijkl}^{(4)} = \frac{1}{\rho} (P_{ij} P_{kl} + P_{ik} P_{jl} + P_{il} P_{jk}) \equiv \frac{1}{\rho} P_{**} P_{**}. \quad (1.42)$$

Моменты четвертого порядка, содержащие энергию внутренних степеней свободы, интегрируются элементарно с учетом (1.38) и (1.39):

$$M_{ij}^{\Omega(4)} = \int \varepsilon c_i c_j f_p F_{\Omega} d\bar{c} d\varepsilon = \int \varepsilon F_{\Omega} d\varepsilon \int c_i c_j f_p d\bar{c} = \frac{E_{\Omega}}{n} \frac{P_{ij}}{m_0} = \frac{E_{\Omega}}{\rho} P_{ij}. \quad (1.43)$$

Производные моментов четвертого порядка в уравнениях моментов третьего порядка (1.33) и (1.34) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial M_{ijk\alpha}^{(4)}}{\partial x_{\alpha}} = R \left(T_{**} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_{\alpha}} \right); \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} M_{i\alpha}^{\Omega(4)} = \frac{E_{\Omega}}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + P_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{E_{\Omega}}{\rho} \right). \quad (1.45)$$

Уравнения моментов третьего порядка после подстановки (1.44), (1.45):

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (u_{\alpha} \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_{\alpha}} = - \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_{\varphi}}; \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (u_{\alpha} \omega_i) + \omega_{\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} + P_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{E_{\Omega}}{\rho} \right) = - \frac{\omega_i}{\tau_{\omega}}. \quad (1.47)$$

Таким образом, система моментных уравнений замкнута по моментам четвертого порядка.

1.4. Время релаксации

Будем рассматривать времена релаксации $\tau_p, \tau_{\varphi}, \tau_{\omega}$ в гидродинамическом приближении. Уравнения неравновесных величин (1.32), (1.46) и (1.47) представим в безразмерном виде. Единицами измерения основных газодинамических величин будем считать некоторые их характерные значения: $\rho_{\bullet}, T_{\bullet}, p_{\bullet}$. Единицы измерения времени и теплового потока (момента третьего порядка): $t_{\bullet} = L_{\bullet} / \sqrt{RT_{\bullet}}, q_{\bullet} = p_{\bullet} \sqrt{RT_{\bullet}}$, где L_{\bullet} – характерный размер течения.

При таком выборе единиц в уравнениях неравновесных величин изменятся только члены, содержащие константы R и c_Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}; \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} = -\frac{\varphi_{ijk}}{\tau_\varphi}; \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{c_\Omega}{R} P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} = -\frac{\omega_i}{\tau_\omega}. \quad (1.50)$$

В последнем уравнении энергия внутренних степеней свободы заменена соответствующей температурой, см. (1.5).

В безразмерных зависимостях плотность, скорость, температуры (T_Ω и $T_t = T_{\alpha\alpha}/3$), давление, а в общем случае и производные этих величин имеют порядок единицы. Безразмерные времена релаксации по порядку величины соответствуют числу Кнудсена или безразмерному среднему времени свободного пробега молекулы τ , которое в дальнейшем используется для оценки порядка малости величин.

Будем считать τ малой величиной. Члены левых частей уравнений (1.48) – (1.50), не содержащие неравновесных величин, очевидно, имеют порядок единицы. Несложно сформулировать условия задачи, в которой левая часть уравнения будет содержать единственный член порядка единицы или несколько таких членов одного знака. Релаксационный член будет иметь тот же порядок величины. Отсюда непосредственно следует, что почти все неравновесные величины имеют порядок τ . Исключение составляют моменты третьего порядка, значения индексов которых не совпадают, например φ_{123} . Порядок величины этих моментов – τ^2 , что непосредственно следует из (1.49).

В рассматриваемом приближении слабонеравновесного течения (гидродинамическом приближении) уравнения неравновесных величин будут вырождаться в реологический закон Ньютона и закон Фурье. После домножения (1.48) на τ_p и исключения слагаемых, содержащих неравновесные величины (порядок этих слагаемых после домножения станет равным τ^2), получим выражение для неравновесных напряжений в гидродинамическом приближении. Процедура сортировки членов уравнений по порядку величины будет подробно описана в главе 3. Ниже будем рассматривать (1.48) – (1.50) в физической размерности, считая время релаксации малой величиной.

В целях сокращения записи рассмотрим только касательные напряжения ($i \neq j$), для которых реологический закон Ньютона имеет наиболее простой вид:

$$p_{ij}^m = -\tau_p p^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.51)$$

Учтено, что $P_{ii} \sim p^m$. Здесь и далее знак \sim обозначает «асимптотически равно».

В реологическом законе Ньютона касательные напряжения выражаются как

$$p_{ij}^m = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.52)$$

Сравнение правых частей двух последних выражений приводит к вполне ожидаемому результату:

$$\tau_p = \frac{\mu(T_t)}{p^m} = \frac{\mu(T)}{p}. \quad (1.53)$$

В гидродинамическом приближении оба выражения для τ_p эквивалентны.

Аналогичным образом определяется время релаксации теплового потока. В левой части (1.49) отбрасываются слагаемые с неравновесными величинами. Учитывается, что $T_{ii} \sim T_t \sim T$. Моменты третьего порядка, выраженные через старшие члены (1.49):

$$\varphi_{iii} = -\tau_\varphi \frac{3}{2} R p^m \frac{\partial T_t}{\partial x_i} \sim -\tau_\varphi \frac{3}{2} R p \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad (1.54)$$

$$\varphi_{ijj} = -\tau_\varphi \frac{1}{2} R p^m \frac{\partial T_t}{\partial x_i} \sim -\tau_\varphi \frac{1}{2} R p \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i \neq j. \quad (1.55)$$

Два последних уравнения совместно с зависимостью $\varphi_i = \varphi_{i\alpha\alpha}$ позволяют получить выражение теплового потока поступательных степеней свободы в гидродинамическом приближении:

$$\varphi_i = -\tau_\varphi \frac{5}{2} R p \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.56)$$

Из закона Фурье:

$$\varphi_i = -\frac{c_p}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.57)$$

Так как рассматриваются только поступательные степени свободы, то $c_p = (5/2)R$, $\text{Pr} = 2/3$, т.е., как и для одноатомного газа,

$$\varphi_i = -\frac{15}{4} R \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.58)$$

Сравнение правых частей (1.56) и (1.58), приводит к зависимости

$$\tau_\varphi = \frac{3}{2} \frac{\mu}{p} = \frac{3}{2} \tau_p. \quad (1.59)$$

В многоатомном газе к составляющей φ_i добавляется составляющая ω_i . Главные члены (1.50):

$$\omega_i = -\tau_\omega c_\Omega p^m \frac{\partial}{\partial x_i} (T_\Omega). \quad (1.60)$$

В рассматриваемом приближении $T_\Omega \sim T$. С учетом этого

$$\omega_i = -\tau_\omega c_\Omega p \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.61)$$

В законе Фурье на долю внутренних степеней свободы отводится часть теплового потока:

$$\omega_i = -\left(\frac{c_p}{\text{Pr}} - \frac{15}{4} R \right) \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} = -c_\omega \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (1.62)$$

$$\text{Здесь } c_\omega = \frac{c_p}{\text{Pr}} - \frac{15}{4} R.$$

Из двух последних выражений следует:

$$\tau_\omega = \frac{c_\omega \mu}{c_\Omega p} = \frac{c_\omega}{c_\Omega} \tau_p. \quad (1.63)$$

Если использовать аппроксимацию Эйкена $\text{Pr} = 4\gamma/(9\gamma - 5)$, то $\tau_\omega = \tau_p$.

Обратим внимание на тот факт, что для определения времен релаксации в первом приближении не требуется какая-либо конкретная модель межмолекулярного взаимодействия. Более высокие приближения требуют дополнительной информации и не могут быть получены на базе применяемого метода построения системы моментных уравнений.

1.5. Энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы молекул

В уравнениях (1.26) и (1.29) быстрота энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы выражена двумя способами:

$$\Xi = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\tau}{\tau^+} E_\Omega^+ - E_\Omega \right) \text{ и } \Xi = \frac{3}{2} \frac{1}{\tau} \left(p^m - \frac{\tau}{\tau^+} p^{m+} \right)$$

В терминах температуры эти зависимости принимают следующий вид:

$$\Xi = c_\Omega \frac{\rho}{\tau} \left(\frac{\tau}{\tau^+} T_\Omega^+ - T_\Omega \right); \quad (1.64)$$

$$\Xi = \frac{3}{2} R \frac{\rho}{\tau} \left(T_t - \frac{\tau}{\tau^+} T_t^+ \right). \quad (1.65)$$

Время релаксации неравновесных величин, например время релаксации неравновесных напряжений в (1.30), представлено в виде

$$\tau_p = \tau / \left(1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{p_{ij}^{m+}}{p_{ij}^m} \right). \quad (1.66)$$

Время релаксации разности температур $\theta = T_t - T_\Omega$, являющейся неравновесной величиной порядка τ , может быть выражено по аналогии с (1.66):

$$\tau_{\theta} = \tau / \left(1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{\theta^+}{\theta} \right). \quad (1.67)$$

Здесь $\theta^+ = T_t^+ - T_{\Omega}^+$.

Отметим, что выражения типа (1.66) могут быть построены только в том случае, если отношение значений неравновесной величины после и до столкновения, например p_{ij}^{m+} / p_{ij}^m , являются скалярами. В частности, для термодинамических напряжений p_{ij} и полного теплового потока q_i , как будет показано ниже, такие выражения построить нельзя. Для разности температур θ выражение (1.67) допустимо в силу скалярности самой величины.

Представим быстроту энергообмена Ξ в виде релаксационного члена разности температур θ . Вычтем (1.65) из (1.64). Заменяем c_{Ω} на $c_v - \frac{3}{2}R$ и перегруппируем члены следующим образом:

$$\frac{3}{2} \rho R \left(1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{(T_t^+ - T_{\Omega}^+)}{(T_t - T_{\Omega})} \right) \frac{T_t - T_{\Omega}}{\tau} = c_v \frac{\rho}{\tau} \left(\frac{\tau}{\tau^+} T_{\Omega}^+ - T_{\Omega} \right). \quad (1.68)$$

Левая часть (1.68) содержит выражение (1.67), а правая аналогична (1.64). С учетом этого быстрота энергообмена может быть представлена как

$$\Xi = \frac{3}{2} \rho R \frac{c_{\Omega}}{c_v} \frac{\theta}{\tau_{\theta}}. \quad (1.69)$$

Время релаксации τ_{θ} представим в виде

$$\tau_{\theta} = h \tau_p \quad (1.70)$$

Отношение времен релаксации, обозначенное в настоящей работе h , вычисляется через параметр Z , обратная величина которого представляет долю неупругих столкновений по отношению к общему числу столкновений молекул. Существует ряд теоретических и полуэмпирических зависимостей для определения Z , например [43, 46, 47], а также экспериментальные данные [48, 49]. В настоящей работе величина h будет оцениваться в соответствии с рекомендациями работы [47] по следующей зависимости:

$$h = Z \frac{(7 - 2s)(5 - 2s)}{30}. \quad (1.71)$$

Здесь s – показатель степени температуры в аппроксимации коэффициента вязкости $\mu = c T_t^s$, где c – константа.

В отношении выражения (1.69) отметим, что аналогичные зависимости были получены и другими авторами (см., например, [5]). Однако при их выводе разность между термодинамической и поступательной температурами (аналог $T_t - T_{\Omega}$) предполагалась малой величиной, т.е. рассматривалось слабонеравновесное состояние газа. Приведенный выше вывод выражения (1.69) не накладывает каких-либо ограничений на степень неравновесности газа.

1.6. Двадцатичетырехмоментная система уравнений

Из полученных выше моментных уравнений составлена система двадцати четырех скалярных уравнений, называемая далее моделью M24. В развернутом виде (без подстрочных звездочек) эта система может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
 \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho u_i u_\alpha + P_{i\alpha}) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial t} E_\Omega + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha E_\Omega) + \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} &= \frac{3(\gamma-1)}{2} c_\Omega \rho \frac{\theta}{h \tau_p}; \\
 \frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}) + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial \varphi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} &= \\
 &= -\frac{P_{ij} - \delta_{ij} P^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} R \rho \frac{\theta}{h \tau_p}; \quad (1.72) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \varphi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \varphi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\
 &+ \frac{R}{2} \left(P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p}; \\
 \frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{E_\Omega}{\rho} \right) &= -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\omega_i}{\tau_p}.
 \end{aligned}$$

Полученную систему можно представить в термодинамических терминах. Для этого потребуется несколько дополнительных уравнений, представляющих собой линейные комбинации уравнений системы (1.72).

Уравнение температуры внутренних степеней свободы (линейная комбинация уравнения сохранения массы и уравнения энергии внутренних степеней свободы):

$$\frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{3(\gamma-1)}{2} \frac{\theta}{h \tau_p}. \quad (1.73)$$

Уравнение поступательной температуры (линейная комбинация уравнения сохранения массы и свертки уравнения напряжений):

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{2}{3R\rho} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\frac{5-3\gamma}{2} \frac{\theta}{h \tau_p}. \quad (1.74)$$

Почленное вычитание (1.73) из (1.74) приводит к уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) = -\frac{\theta}{h \tau_p}. \quad (1.75)$$

Почленное сложение (1.73) и (1.74) с учетом (1.4) дает уравнение термодинамической температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (1.76)$$

Уравнение термодинамического давления (линейная комбинация уравнения сохранения массы и (1.76)):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p) + (\gamma - 1) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + (\gamma - 1) \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (1.77)$$

Зависимость (1.15) позволяет получить из (1.32) и (1.75) уравнение термодинамических неравновесных напряжений. Правая, релаксационная часть этого уравнения принимает следующий вид:

$$-\frac{P_{ij}^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{5 - 3\gamma}{2} R \rho \frac{\theta}{h \tau_p}. \quad (1.78)$$

Неравновесные напряжения P_{ij}^m и разность температур θ могут быть заменены термодинамическими неравновесными напряжениями P_{ij} с использованием уравнения (1.15) и следующей из него зависимости

$$P_{\alpha\alpha} = 3 \frac{5 - 3\gamma}{2} \rho R \theta. \quad (1.79)$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (2\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) q_\alpha) = -\frac{P_{ij}}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{h - 1}{h} \frac{P_{\alpha\alpha}}{\tau_p} \end{aligned} \quad (1.80)$$

Отметим, что уравнение термодинамических неравновесных напряжений можно получить из (1.27) посредством почленного вычитания (1.77). При этом левая, дифференциальная часть уравнения будет соответствовать (1.80), а правая, релаксационная часть примет вид

$$\frac{P_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{P_{ij}}{\tau} = \frac{P_{ij}^+ + \delta_{ij} P^+}{\tau^+} - \frac{P_{ij} + \delta_{ij} P}{\tau} = -\frac{P_{ij} - \frac{\tau}{\tau^+} P_{ij}^+}{\tau}. \quad (1.81)$$

Здесь учтено, что термодинамическое давление – инвариант столкновений. Дальнейшее преобразование правой части, аналогичное (1.28), невозможно, так как отношение P_{ij}^+ / P_{ij} не является скалярной величиной.

В отличие от нормальных напряжений P_{ii}^m , термодинамические нормальные напряжения P_{ii} включают в себя неравновесность поступательных и внутренних степеней свободы, что отражено в (1.15). Релаксация термодинамических нормальных напряжений будет протекать в несколько раз дольше (коэф-

фициент h составляет несколько единиц). Касательные же напряжения в «механическом» и в термодинамическом выражении совпадают: в соответствии с (1.15) $p_{ij} \equiv p_{ij}^m$ при $i \neq j$. Следовательно, касательные и нормальные термодинамические напряжения будут релаксировать с разной быстротой. Факт участия термодинамических нормальных напряжений в двух релаксационных процессах наглядно демонстрируется правой частью (1.80).

Уравнение полного теплового потока получим почленным сложением уравнения тепловых потоков ω_i и свертки моментов третьего порядка φ_{ijk} , с последующим исключением ω_i из правой части:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha q_i) + q_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + c_p P_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{P_{i\beta}}{\rho} \right) = \\ = -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{q_i}{\tau_p} - \left(\frac{2}{3} - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \right) \frac{\varphi_i}{\tau_p} \end{aligned} \quad (1.82)$$

Это же уравнение может быть получено из общего уравнения переноса (1.20) с молекулярным признаком $V_i^{(3)} = \xi_i \left(m_0 \frac{\xi_\alpha \xi_\alpha}{2} + \varepsilon \right)$. Преобразование правой части уравнения, аналогичное (1.28) и (1.30),

$$\frac{q_i^+}{\tau^+} - \frac{q_i}{\tau} = -\frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{q_i^+}{q_i} \right) q_i = -\frac{q_i}{\tau_q} \quad (1.83)$$

возможно только в гидродинамическом приближении. При этом $\frac{\varphi_i}{q_i} = \frac{15 \text{Pr}(\gamma - 1)}{4 \gamma}$, а время релаксации принимает значение $\tau_q = \frac{\tau_p}{\text{Pr}}$. В таком

приближении слабонервного течения уравнение (1.82) вырождается в закон Фурье и не соответствует порядку приближения всей системы уравнений. В самой же системе гидродинамические приближения используются только для времен релаксации, а не для моментных уравнений в целом.

В условиях существенно неравновесного течения преобразование (1.83) неприменимо по следующим причинам. Вектор \mathbf{q} представляет собой сумму векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varphi}$. Направления последних определяется, преимущественно, вектор-градиентами полей T_Ω и T_t (точнее, составляющими $T_t - T_{ii}$). В общем случае направления этих вектор-градиентов не совпадают, так как формируются под воздействием разных физических процессов. Более того, векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ релаксируют с разной скоростью. Следовательно, суммарный вектор \mathbf{q} изменяет свое направление в процессе релаксации, а именно разворачивается в направлении вектора $\boldsymbol{\varphi}$, релаксирующего с меньшей скоростью ($\tau_\omega = 2/3 \tau_\varphi$). Отношение q_i^+/q_i не может рассматриваться как скалярная величина в силу $q_1^+/q_1 \neq q_2^+/q_2 \neq q_3^+/q_3$.

Полученные выше уравнения позволяют записать 24-моментную систему уравнений в термодинамических переменных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}) + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (2\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) q_\alpha) = -\frac{p_{ij}}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{h-1}{h} \frac{P_{\alpha\alpha}}{\tau_p} \\
\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \varphi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \varphi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\
&+ \frac{R}{2} \left(P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p} \\
\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha q_i) + q_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + c_p P_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{p_{i\beta}}{\rho} \right) = \\
&= -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{q_i}{\tau_p} - \left(\frac{2}{3} - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \right) \frac{\varphi_i}{\tau_p}.
\end{aligned} \tag{1.84}$$

Представляет интерес сравнение полученной системы уравнений с 20-моментной системой Грэда, записанной для одноатомного газа. В этом случае различия между системами содержатся только в уравнениях моментов третьего порядка. Релаксационные члены не сравниваются, так как методики их вывода принципиально различаются.

Различие в аппроксимирующих функциях распределения привело к тому, что члены уравнения (1.21) $-\frac{M^{(N-1)}}{\rho} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial M_{ijk\dots\alpha}^{(N+1)}}{\partial x_\alpha}$, ($N=3$), представлены в

24-моментной системе выражением

$$\frac{R}{2} \left(P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right), \tag{1.85}$$

а в 20-моментной системе – выражением

$$\frac{R}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (p_{jk} T_t) + \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ik} T_t) + \frac{\partial}{\partial x_k} (p_{ij} T_t) + (\delta_{jk} p_{i\alpha} + \delta_{ik} p_{j\alpha} + \delta_{ij} p_{k\alpha}) \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \right. \\
\left. + p \left(\delta_{jk} \frac{\partial T_t}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial T_t}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{\partial T_t}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{R\rho} \left(p_{ij} \frac{\partial P_{k\alpha}}{\partial x_\alpha} + p_{ik} \frac{\partial P_{j\alpha}}{\partial x_\alpha} + p_{jk} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} \right) \right]. \tag{1.86}$$

Здесь использована символика, принятая в настоящей монографии.

Отметим, что выражение (1.85) представляет собой «естественную» форму записи, так как P_{ij} и T_{ij} относятся к основным переменным системы (1.72). Компактный вид (1.85) обусловлен замыкающей функцией (1.35).

Система M24, имеющая симметричный вид уравнения моментов третьего порядка, тем не менее не позволяет исключить основной недостаток 20-моментной системы, называемый коротковолновой неустойчивостью и выражающийся в появлении субскачка на профиле ударной волны. Задача о профиле ударной волны будет рассмотрена ниже. Здесь мы только проиллюстрируем возникновение субскачка.

На рис.1.1 показаны профили скорости и температуры в плоской ударной волне. Численное решение системы M24 проводилось двумя принципиально различными методами. Использовался метод Мак-Кормака и прогонка четырехдиагональной матрицы с нестационарным членом (этот метод описан в седьмой главе настоящей монографии). Результаты расчетов практически совпадали.

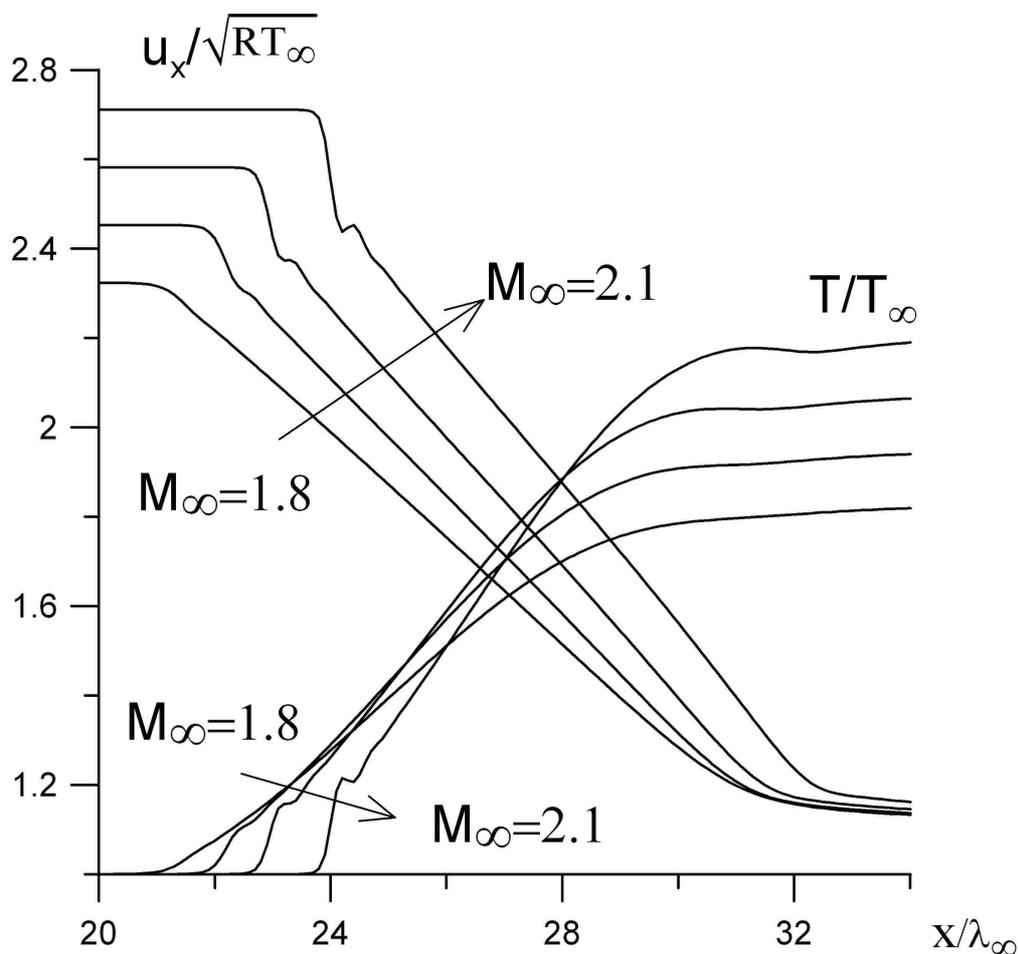


Рис.1.1. Профили скорости и температуры в ударной волне одноатомного газа. Модель M24, $s = 1$

При $M > 1.8$ возникает физически неадекватное искажение профиля (субскачок). На профилях ударной волны в многоатомных газах субскачок проявляется аналогичным образом.

В работе Грэда и ряде более поздних работ используется сокращенный вариант 20-моментной системы уравнений – 13-моментная система. Уравнения моментов третьего порядка заменяются их свертками, соответствующими проекциям вектора теплового потока в одноатомном газе. Как отмечено во введении, такое сокращение приводит к огрублению уравнений напряжений и появлению в них внепорядковых членов. Корректировка вносимых огрублений [15, 16] приводит к существенному усложнению указанных уравнений.

При решении систем уравнений в частных производных на многопроцессорных вычислительных устройствах векторное или тензорные уравнения рассматриваются как единое уравнение, допускающее эффективное распараллеливание. С этой точки зрения и 20- и 13-моментные системы представляют собой системы пяти уравнений, но 20-моментная система не содержит внепорядковых членов. В этой связи сокращенный вариант 24-моментной системы рассматриваться не будет.

При многопроцессорной реализации 24-моментная система рассматривается как система шести уравнений. Отметим, что в случае одноатомных газов система (1.72) содержит четыре уравнения, а система (1.84) – пять. Количество скалярных уравнений в обеих системах, разумеется, одинаково.

В заключение отметим, что модель M24 построена с использованием двух сильных допущений, которые необходимо учитывать при анализе как самой модели, так и области ее применения. Эти допущения:

- моменты четвертого порядка, замыкающие систему моментных уравнений, определены локально;

- времена релаксации моментов второго и третьего порядков определены в гидродинамическом приближении.

В остальном модель соответствует исходному кинетическому уравнению.

Глава 2
СОГЛАСОВАННАЯ СИСТЕМА МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Аппроксимирующая функция распределения. Моменты пятого порядка в локальном выражении

Система моментных уравнений M24 замкнута моментами четвертого порядка (1.42) и (1.43), полученными интегрированием аппроксимирующей функции распределения. Такое представление моментов, очевидно, является локальным. Вместе с тем моменты четвертого порядка определены балансовыми зависимостями, т.е. моментными уравнениями в соответствии с (1.21):

$$\frac{\partial M_{ijkl}^{(4)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(u_\alpha M_{ijkl}^{(4)} \right) + M_{***\alpha}^{(4)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{2\varphi_{***}}{\rho} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial M_{ijkl\alpha}^{(5)}}{\partial x_\alpha} = \frac{M_{ijkl}^{(4)+}}{\tau^+} - \frac{M_{ijkl}^{(4)}}{\tau}; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ij}^{\Omega(4)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(u_\alpha M_{ij}^{\Omega(4)} \right) + M_{*\alpha}^{\Omega(4)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{\omega_*}{\rho} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial M_{ij\alpha}^{\Omega(5)}}{\partial x_\alpha} = \\ = \frac{M_{ij}^{\Omega(4)+}}{\tau^+} - \frac{M_{ij}^{\Omega(4)}}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Покажем, что локальные выражения (1.42) и (1.43) не являются решениями уравнений (2.1) и (2.2).

В балансовых выражениях моментов четвертого порядка содержатся моменты пятого порядка: $M_{ijklm}^{(5)}$ и $M_{ijk}^{\Omega(5)}$. Получим локальные выражения этих моментов, конкретизируя аппроксимирующую функцию распределения (1.35).

Функция F_Ω может иметь достаточно произвольный вид. От нее требуется только выполнение условий (1.38). Это связано с тем, что моменты $M_{...}^{\Omega(...)}$ содержат внутреннюю энергию молекул ε только в первой степени. Повышение порядка момента обусловлено увеличением показателя степени проекций тепловой скорости.

Другим обстоятельством, допускающим достаточно произвольный вид функции F_Ω , является сделанное выше допущение о том, что распределение молекул по внутренним энергиям не зависит от их тепловых поступательных скоростей.

Выберем в качестве F_Ω равновесную функцию вида

$$F_\Omega = 2\sqrt{\varepsilon} / \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{3} \frac{E_\Omega}{n} \right)^{3/2} \times \exp\left(-\varepsilon / \frac{2}{3} \frac{E_\Omega}{n} \right). \quad (2.3)$$

Представим функцию f_φ (см. (1.53)), в главных осях тензора напряжений:

$$f_\varphi = \left(\Phi_{XYZ} + \sum_{I=X,Y,Z} (\Phi_I + \Phi_I^\Omega) \right) f_P F_\Omega. \quad (2.4)$$

Вспомогательные функции $\Phi_{...}$ определим следующим образом:

$\Phi_{XYZ} = Ac_X c_Y c_Z$, где A - неизвестный коэффициент.

Потребуем:

$$\frac{m_0}{2} \int c_X c_Y c_Z \Phi_{XYZ} f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \frac{\rho}{2} AR^3 T_{XX} T_{YY} T_{ZZ} = \varphi_{XYZ}.$$

Отсюда следует:

$$\Phi_{XYZ} = c_X c_Y c_Z \frac{2\varphi_{XYZ}}{\rho R^3 T_{XX} T_{YY} T_{ZZ}}. \quad (2.5)$$

Функцию Φ_X представим в виде $\Phi_X = Ac_X + Bc_X^3 + Cc_X c_Y^2 + Dc_X c_Z^2$. Для определения неизвестных коэффициентов потребуем:

$$\int c_X \Phi_X f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = 0; \quad \frac{m_0}{2} \int c_X^3 \Phi_X f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \varphi_{XXX};$$

$$\frac{m_0}{2} \int c_X c_Y^2 \Phi_X f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \varphi_{XYY}; \quad \frac{m_0}{2} \int c_X c_Z^2 \Phi_X f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \varphi_{XZZ}.$$

После интегрирования и решения системы линейных уравнений получаем:

$$\Phi_X = \frac{c_X}{RT_{XX}} \left(- \left(\frac{\varphi_{XXX}}{P_{XX}} + \frac{\varphi_{XYY}}{P_{YY}} + \frac{\varphi_{XZZ}}{P_{ZZ}} \right) + c_X^2 \frac{\varphi_{XXX}}{3RT_{XX} P_{XX}} + c_Y^2 \frac{\varphi_{XYY}}{RT_{YY} P_{YY}} + c_Z^2 \frac{\varphi_{XZZ}}{RT_{ZZ} P_{ZZ}} \right). \quad (2.6)$$

Функции Φ_Y и Φ_Z получены аналогичным образом:

$$\Phi_Y = \frac{c_Y}{RT_{YY}} \left(- \left(\frac{\varphi_{YXX}}{P_{XX}} + \frac{\varphi_{YYY}}{P_{YY}} + \frac{\varphi_{YZZ}}{P_{ZZ}} \right) + c_X^2 \frac{\varphi_{YXX}}{RT_{XX} P_{XX}} + c_Y^2 \frac{\varphi_{YYY}}{3RT_{YY} P_{YY}} + c_Z^2 \frac{\varphi_{YZZ}}{RT_{ZZ} P_{ZZ}} \right); \quad (2.7)$$

$$\Phi_Z = \frac{c_Z}{RT_{ZZ}} \left(- \left(\frac{\varphi_{ZXX}}{P_{XX}} + \frac{\varphi_{ZYY}}{P_{YY}} + \frac{\varphi_{ZZZ}}{P_{ZZ}} \right) + c_X^2 \frac{\varphi_{ZXX}}{RT_{XX} P_{XX}} + c_Y^2 \frac{\varphi_{ZYY}}{RT_{YY} P_{YY}} + c_Z^2 \frac{\varphi_{ZZZ}}{3RT_{ZZ} P_{ZZ}} \right). \quad (2.8)$$

Функцию Φ_X^Ω представим в виде $\Phi_X^\Omega = Ac_X + Bc_X \varepsilon$. Для определения неизвестных коэффициентов потребуем:

$$\int c_X \Phi_X^\Omega f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = 0; \quad \int c_X \varepsilon \Phi_X^\Omega f_P F_\Omega d\bar{c} d\varepsilon = \omega_X.$$

После интегрирования и решения системы линейных уравнений получаем:

$$\Phi_X^\Omega = \frac{3}{2} \frac{c_X \omega_X}{RT_{XX} E_\Omega} \left(\frac{n}{E_\Omega} \varepsilon - 1 \right). \quad (2.9)$$

Аналогичным образом получены зависимости:

$$\Phi_Y^\Omega = \frac{3}{2} \frac{c_Y \omega_Y}{RT_{YY} E_\Omega} \left(\frac{n}{E_\Omega} \varepsilon - 1 \right); \quad (2.10)$$

$$\Phi_Z^\Omega = \frac{3}{2} \frac{c_Z \omega_Z}{RT_{ZZ} E_\Omega} \left(\frac{n}{E_\Omega} \varepsilon - 1 \right). \quad (2.11)$$

Из полученных выражений с учетом (2.4) может быть составлена функция f_φ . Соотношение (1.35) позволяет получить полную аппроксимирующую функцию распределения:

$$f_A = \left[1 + c_X c_Y c_Z \frac{2\varphi_{XYZ}}{\rho R^3 T_{XX} T_{YY} T_{ZZ}} + \sum_{I=X,Y,Z} c_I \frac{3}{2} \frac{\omega_I}{RT_{II} E_\Omega} \left(\varepsilon \frac{n}{E_\Omega} - 1 \right) + \sum_{I=X,Y,Z} \frac{c_I}{RT_{II}} \left(- \left(\frac{\varphi_{IXX}}{P_{XX}} + \frac{\varphi_{IYY}}{P_{YY}} + \frac{\varphi_{IZZ}}{P_{ZZ}} \right) + \frac{c_X^2 \varphi_{IXX}}{(1+2\delta_{IX}) RT_{XX} P_{XX}} + \frac{c_Y^2 \varphi_{IYY}}{(1+2\delta_{IY}) RT_{YY} P_{YY}} + \frac{c_Z^2 \varphi_{IZZ}}{(1+2\delta_{IZ}) RT_{ZZ} P_{ZZ}} \right) \right] f_P F_\Omega. \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) инвариантно относительно преобразования «лабораторной» системы координат на основании соображений, приведенных в разделе 1.3 по отношению к выражению (1.36).

Получим локальные выражения моментов порядка выше третьего с использованием аппроксимирующей функции вида (2.12). В силу нечетности функции f_φ локальные выражения моментов четвертого порядка соответствуют выведенным выше выражениям (1.42), (1.43).

Моменты третьего порядка с учетом разложения $c_i = e_{iX} c_X + e_{iY} c_Y + e_{iZ} c_Z$ выразим следующим образом:

$$\varphi_{ijk} = \frac{m_0}{2} \int c_i c_j c_k f_A d\bar{c} d\varepsilon = e_{i\alpha} e_{j\beta} e_{k\gamma} \varphi_{\alpha\beta\gamma}; \quad (2.13)$$

$$\omega_i = \int c_i \varepsilon f_A d\bar{c} d\varepsilon = e_{i\alpha} \omega_\alpha. \quad (2.14)$$

В этих выражениях каждый из индексов суммирования α, β, γ принимает значения X, Y, Z (индексы главных осей). Моменты третьего порядка, стоящие в правых частях, соответствуют главным осям тензора напряжений.

Локальные выражения моментов пятого порядка:

$$M_{ijklm}^{(5)} = m_0 \int c_i c_j c_k c_l c_m f_A d\bar{c} d\varepsilon; \quad (2.15)$$

$$M_{ijk}^{\Omega(5)} = \int c_i c_j c_k \varepsilon f_A d\bar{c} d\varepsilon. \quad (2.16)$$

После преобразования проекций тепловой скорости в систему координат главных осей тензора напряжений и интегрирования выражений (2.15), (2.16) получаем громоздкие суммы, из которых достаточно просто комбинируются выражения типа (1.40), (2.13) и (2.14). В результате получаем:

$$M_{ijklm}^{(5)} = 2R \left(T_{ij} \varphi_{klm} + T_{ik} \varphi_{jlm} + T_{il} \varphi_{jkm} + T_{im} \varphi_{jkl} + T_{jk} \varphi_{ilm} + T_{jl} \varphi_{ikm} + T_{lm} \varphi_{ikl} + T_{kl} \varphi_{ijm} + T_{km} \varphi_{ijl} + T_{lm} \varphi_{ijk} \right) \equiv 2RT_{**} \varphi_{***}; \quad (2.17)$$

$$M_{ijk}^{\Omega(5)} = 2 \frac{E_\Omega}{\rho} \varphi_{ijk} + R (T_{jk} \omega_i + T_{ik} \omega_j + T_{ij} \omega_k) \equiv 2 \frac{E_\Omega}{\rho} \varphi_{ijk} + RT_{**} \omega_*. \quad (2.18)$$

Локальные выражения моментов четвертого и более высоких порядков можно получить посредством моделирующей функции распределения (2.12) исходя из достаточно общих положений. Примем во внимание следующие обстоятельства:

- аппроксимирующая функция распределения (2.12) дает точные значения моментов до третьего порядка включительно;
- интегрирование аппроксимирующей функции с четырьмя и более проекциями тепловой скорости, т.е. $m_0 \int c_i c_j c_k c_l \dots f_A d\bar{c} d\varepsilon$, приводит к произведениям, содержащим моменты не выше третьего порядка;
- в пределах одного произведения E_Ω и моменты третьего порядка могут появляться не более одного раза;
- моменты функции распределения (любого порядка) представляют собой симметрические тензоры.

На основании указанного можно утверждать, что локальное выражение момента n -го порядка представляет собой сумму симметризованных в указанном выше смысле (подстрочные звездочки) несимметрических тензоров n -го ранга. При этом каждое слагаемое состоит из произведения момента нулевого порядка (плотность газа) на моменты второго и третьего порядков, отнесенные к плотности. Напомним, что моменты первого порядка тождественно равны нулю. Например, моменты шестого порядка в локальном выражении будут иметь

$$\text{вид: } M_{ijklmn}^{(6)} = \frac{1}{\rho^2} P_{**} P_{**} P_{**}; \quad (2.19)$$

$$M_{ijkl}^{\Omega(6)} = \frac{1}{\rho^2} E_\Omega P_{**} P_{**}. \quad (2.20)$$

2.2. Сопоставление балансового и локального выражений моментов четвертого порядка

Для выяснения того, насколько локальное представление моментов четвертого порядка соответствует моментным уравнениям, подставим локальные выражения моментов четвертого и пятого порядков в моментные уравнения (2.1) и (2.2). Наиболее компактный вид уравнений будет получен, если моменты второго и третьего порядков отнести к плотности, т.е.

$$P_{ij} / \rho = RT_{ij}, \quad \varphi_{ijk} / \rho = \psi_{ijk} / 2, \quad \omega_i / \rho = \bar{\omega}_i. \quad (2.21)$$

Локальные выражения моментов в этих символах:

$$M_{ijkl}^{(4)} / \rho = R^2 T_{**} T_{**}; \quad (2.22)$$

$$M_{ij}^{\Omega(4)} / \rho = c_\Omega RT_\Omega T_{ij}; \quad (2.23)$$

$$M_{ijklm}^{(5)} / \rho = RT_{**} \psi_{***}; \quad (2.24)$$

$$M_{ijk}^{\Omega(5)} / \rho = c_\Omega T_\Omega \psi_{ijk} + RT_{**} \bar{\omega}_*. \quad (2.25)$$

Моментные уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{M_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + \frac{M_{***\alpha}^{(4)}}{\rho} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - R \psi_{***} \frac{\partial T_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} - \\ & - RT_{*\alpha} \psi_{***} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{M_{ijkl\alpha}^{(5)}}{\rho} \right) + \frac{M_{ijkl\alpha}^{(5)}}{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{M_{ijkl}^{(4)+}}{\rho \tau^+} - \frac{M_{ijkl}^{(4)}}{\rho \tau} \end{aligned} ; \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{M_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + \frac{M_{*\alpha}^{\Omega(4)}}{\rho} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - R \bar{\omega}_* \frac{\partial T_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} - RT_{*\alpha} \bar{\omega}_* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{M_{ij\alpha}^{\Omega(5)}}{\rho} \right) + \frac{M_{ij\alpha}^{\Omega(5)}}{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{M_{ij}^{\Omega(4)+}}{\rho \tau^+} - \frac{M_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho \tau} \end{aligned} . \quad (2.27)$$

После подстановки локальных выражений в моментные уравнения и деления на газовую постоянную получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (T_{**} T_{**}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_{**} T_{**}) + T_{*\alpha} T_{**} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{R} \psi_{***} \frac{\partial T_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{R} T_{*\alpha} \psi_{***} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_{**} \psi_{**\alpha} + T_{*\alpha} \psi_{***}) + \frac{1}{R} (T_{**} \psi_{**\alpha} + T_{*\alpha} \psi_{***}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{T_{**}^+ T_{**}^+}{\tau^+} - \frac{T_{**} T_{**}}{\tau} \end{aligned} ; \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (T_\Omega T_{ij}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_\Omega T_{ij}) + T_\Omega T_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c_\Omega} \bar{\omega}_* \frac{\partial T_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{c_\Omega} T_{*\alpha} \bar{\omega}_* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{R} T_\Omega \psi_{ij\alpha} + \frac{1}{c_\Omega} (T_{*\alpha} \bar{\omega}_* + T_{ij} \bar{\omega}_\alpha) \right) + \\ & + \left(\frac{1}{R} T_\Omega \psi_{ij\alpha} + \frac{1}{c_\Omega} (T_{*\alpha} \bar{\omega}_* + T_{ij} \bar{\omega}_\alpha) \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{T_\Omega^+ T_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{T_\Omega T_{ij}}{\tau} \end{aligned} . \quad (2.29)$$

В этих уравнениях принято:

$$(T_{**} T_{**})^+ = T_{**}^+ T_{**}^+ , \quad (2.30)$$

т.е. до и после столкновений молекул локальные выражения моментов четвертого порядка (2.22) и (2.23) остаются неизменными.

Уравнения моментов второго порядка (1.26), (1.27) в терминах T_{ij} и T_Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{ij} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_{ij}) + T_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\psi_{ij\alpha}}{R} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{T_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{T_{ij}}{\tau} ; \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega} \frac{\partial \bar{\omega}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\bar{\omega}_\alpha}{c_\Omega} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{T_\Omega^+}{\tau^+} - \frac{T_\Omega}{\tau} . \quad (2.32)$$

Домножим (2.31) на T_{kl} (индексы, используемые в тензорных выражениях, взаимно независимы; их значения произвольны). Затем уравнение (2.31), за-

писанное относительно индексов k и l , домножим на T_{ij} и почленно сложим полученные выражения. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (T_{ij}T_{kl}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_{ij}T_{kl}) + T_{\alpha j}T_{kl} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + T_{i\alpha}T_{kl} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + T_{ij}T_{\alpha l} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \\ + T_{ij}T_{k\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} \left(T_{kl} \frac{\partial \psi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} + T_{ij} \frac{\partial \psi_{kl\alpha}}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{R} (T_{kl}\psi_{ij\alpha} + T_{ij}\psi_{kl\alpha}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \quad (2.33) \\ = \frac{T_{ij}T_{kl}^+ + T_{kl}T_{ij}^+}{\tau^+} - 2 \frac{T_{ij}T_{kl}}{\tau} \end{aligned}$$

Проделав эту операцию для других, различимых сочетаний индексов ($T_{ik}T_{jl}$ и $T_{il}T_{jk}$) и проведя почленное сложение, приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (T_{**}T_{**}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_{**}T_{**}) + T_{\alpha*}T_{**} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} T_{**} \frac{\partial \psi_{**\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} T_{**}\psi_{**\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \quad (2.34) \\ = \frac{T_{**}T_{**}^+}{\tau^+} - 2 \frac{T_{**}T_{**}}{\tau} \end{aligned}$$

Отметим, что в выражении $T_{**}T_{**}^+$ шесть слагаемых, а в $T_{**}T_{**}$ только три, что является следствием исключения тождественных членов из последнего выражения, см. (1.42).

Аналогичным образом из зависимостей (2.31), (2.32), домноженных на T_Ω и T_{ij} , можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (T_\Omega T_{ij}) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_\Omega T_{ij}) + T_\Omega T_{* \alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R} T_\Omega \left(\frac{\partial \psi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} + \psi_{ij\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \right) + \\ + \frac{1}{c_\Omega} T_{ij} \left(\frac{\partial \varpi_\alpha}{\partial x_\alpha} + \varpi_\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{T_\Omega T_{ij}^+ + T_\Omega^+ T_{ij}}{\tau^+} - 2 \frac{T_\Omega T_{ij}}{\tau} \quad (2.35) \end{aligned}$$

Уравнения (2.34) и (2.35) являются точными, в том смысле, что соответствуют функции распределения общего вида; аппроксимирующая функция f_A не использовалась при их выводе. Вычтем (2.34) и (2.35) из (2.28) и (2.29) соответственно. Если бы уравнения (2.34) и (2.35) содержали точные моментные соотношения, то результатом такой операции было бы тривиальное тождество. В результате указанной операции получаются следующие выражения:

$$\frac{1}{R} \left(T_{*\alpha} \frac{\partial \psi_{***}}{\partial x_\alpha} + \psi_{**\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{T_{**}^+ T_{**}^+}{\tau^+} - \frac{T_{**} T_{**}^+}{\tau^+} + \frac{T_{**} T_{**}}{\tau}; \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{R} \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega} \left(T_{*\alpha} \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_\alpha} + \varpi_\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{T_\Omega^+ T_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{T_\Omega T_{ij}^+}{\tau^+} + \frac{T_\Omega T_{ij}}{\tau} - \frac{T_\Omega^+ T_{ij}}{\tau^+}. \quad (2.37)$$

Не делая сильного допущения, можно принять $\tau^+ = \tau$. Для максвелловых молекул, в частности, это строгое равенство. Правые части выражений (2.36) и (2.37) преобразуются в достаточно простые выражения:

$$\frac{1}{R} \left(T_{*\alpha} \frac{\partial \psi_{***}}{\partial x_\alpha} + \psi_{***\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right) = \tau \frac{T_{**}^+ - T_{**}}{\tau} \frac{T_{**}^+ - T_{**}}{\tau} \equiv \tau \left(\frac{T_{**}^+ - T_{**}}{\tau} \right)^2; \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{R} \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega} \left(T_{*\alpha} \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_\alpha} + \varpi_\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = \tau \frac{T_\Omega^+ - T_\Omega}{\tau} \frac{T_{ij}^+ - T_{ij}}{\tau}. \quad (2.39)$$

С учетом соотношений (1.28), (1.30) и (1.69) и сделанного допущения $\tau^+ = \tau$, можно записать:

$$\frac{T_{ij}^+ - T_{ij}}{\tau} = -\frac{1}{R\rho} \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\theta}{h\tau_p} \equiv -\frac{1}{R\rho} \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{c_\Omega}{c_v} \frac{\theta}{h\tau_p}; \quad (2.40)$$

$$\frac{T_\Omega^+ - T_\Omega}{\tau} = \frac{3}{2} (\gamma-1) \frac{\theta}{h\tau_p} \equiv \frac{3}{2} \frac{R}{c_v} \frac{\theta}{h\tau_p}. \quad (2.41)$$

Таким образом, рассогласование локального и балансового выражений моментов четвертого порядка определяется зависимостями:

$$\frac{1}{R} \left(T_{*\alpha} \frac{\partial \psi_{***}}{\partial x_\alpha} + \psi_{***\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p \left(\frac{1}{R\rho} \frac{p_{**}^m}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{c_\Omega}{c_v} \frac{\theta}{h\tau_p} \right)^2; \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{R} \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega} \left(T_{*\alpha} \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_\alpha} + \varpi_\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = -\frac{3}{2} \frac{R}{c_v} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{\theta}{h} \left(\frac{1}{R\rho} \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{c_\Omega}{c_v} \frac{\theta}{h\tau_p} \right). \quad (2.43)$$

Полученные выражения накладывают дополнительные, не следующие из молекулярно-кинетической теории, условия на процессы переноса (левая часть уравнений) и процессы релаксации (правая часть). Эти условия являются следствием несовершенства аппроксимирующей функции распределения и сами по себе не описывают каких-либо физических процессов. Однако, если ставится задача формального согласования локального и балансового выражений моментов четвертого порядка, зависимости (2.42) и (2.43) могут быть использованы в качестве условий такого согласования.

2.3. Согласование балансового и локального выражений моментов четвертого порядка

Представим моменты четвертого порядка в следующем виде:

$$M_{ijkl}^{(4)} = \frac{1}{\rho} P_{**} P_{**} + m_{ijkl}^{(4)}; \quad (2.44)$$

$$M_{ij}^{\Omega(4)} = c_\Omega T_\Omega P_{ij} + m_{ij}^{\Omega(4)}. \quad (2.45)$$

В этих выражениях $m_{ijkl}^{(4)}$ и $m_{ij}^{\Omega(4)}$ выполняют функции согласующих добавок, вид которых предстоит установить.

Подставим (2.44) и (2.45) в моментные уравнения (2.26) и (2.27). Проведем преобразования полученных уравнений, описанные в предыдущем разделе.

В результате получим дифференциальные уравнения, определяющие согласующие добавки:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + \frac{m_{***\alpha}^{(4)}}{\rho} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + R \left(T_{*\alpha} \frac{\partial \psi_{***}}{\partial x_\alpha} + \psi_{***\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p \left(\frac{p_{**}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right)^2 = - \frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\rho \tau_4} ; \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + \frac{m_{*\alpha}^{\Omega(4)}}{\rho} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + c_\Omega \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + R \left(T_{*\alpha} \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_\alpha} + \varpi_\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{3}{2} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{R\theta}{h} \left(\frac{p_{ij}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right) = - \frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho \tau_{\Omega 4}} . \quad (2.47)$$

В правых частях уравнений фигурируют времена релаксации моментов четвертого порядка τ_4 и $\tau_{\Omega 4}$, определяемые аналогично времени релаксации напряжений (см. (1.30)) при условии $\tau^+ = \tau$. Эмпирических зависимостей, подобных реологическому закону Ньютона и закону Фурье, для этих величин не существует. Из общих соображений можно предположить: $\tau_4 \approx \tau_p$, $\tau_{\Omega 4} \approx h \tau_p$.

Такие предположения имеют характер оценки величин τ_4 и $\tau_{\Omega 4}$. В численных решениях отношения τ_4/τ_p и $\tau_{\Omega 4}/\tau_p$ будут рассматриваться как свободные параметры модели. Если значения этих параметров не указаны, то будут приниматься приведенные выше приближенные соотношения.

Для определения отношения τ/τ_p , так же как для определения параметра h (см. (1.71)), может быть использовано соотношение работы [45]:

$$\frac{\tau}{\tau_p} = \frac{(7-2s)(5-2s)}{30} . \quad (2.48)$$

Определим порядок величины согласующих добавок $m_{ijkl}^{(4)}$ и $m_{ij}^{\Omega(4)}$. Представим уравнения (2.46) и (2.47) в безразмерном виде, используя характерные значения величин раздела 1.4. Характерную величину моментов четвертого порядка определим как p_\bullet^2 . Безразмерные уравнения совпадут по форме записи с уравнениями (2.46) и (2.47) с точностью до постоянных множителей R и c_Ω , не изменяющих порядок величины остальных членов уравнений.

Для сокращения записи будем рассматривать (2.46) и (2.47) как безразмерные уравнения, в которых основные газодинамические переменные ρ , \mathbf{u} , T_i , T_Ω , p^m имеют порядок единицы, а неравновесные величины p_{ij}^m , θ , ψ_{ijk} (кроме ψ_{123} и подобных), ϖ_i имеют порядок τ . Учтем, что τ , τ_p , τ_4 и $\tau_{\Omega 4}$ – величины одного порядка малости.

Считая порядок величины согласующих добавок неопределенным, выделим старшие члены левых частей уравнений (2.46) и (2.47). Примем во внимание безразмерные соотношения: $T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho} = \frac{1}{\rho}(\delta_{ij}p^m + p_{ij})$, $T_t = \frac{p^m}{\rho}$,

$\delta_{*\alpha}T_t \frac{\partial \psi^{***}}{\partial x_\alpha} = T_t \frac{\partial \psi^{***}}{\partial x_*}$. Множители порядка единицы, значения которых в данном случае несущественны, обозначим C_1, C_2, C_3, \dots

Старшие члены уравнения (2.46):

$$C_1 \left(T_t \frac{\partial \psi^{***}}{\partial x_*} + \delta_{**} \psi_{**\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} \right) - (C_2 p^{**} + \delta_{**} C_3 \theta) \left(C_2 \frac{p^{**}}{\tau_p} + \delta_{**} C_3 \frac{\theta}{\tau_p} \right). \quad (2.49)$$

Старшие члены (2.47):

$$C_4 \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + C_5 \left(T_t \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_*} + \delta_{ij} \varpi_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} \right) + \theta \left(C_6 \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} + \delta_{ij} C_7 \frac{\theta}{\tau_p} \right). \quad (2.50)$$

В общем случае в поле течения будут присутствовать области, в которых два слагаемых выражения (2.49) будут иметь разные знаки, а три слагаемых (2.50) – одинаковые знаки. Следовательно, порядок величины выражений будет определяться порядком отдельных слагаемых, который соответствует τ .

Возвращаясь к уравнениям (2.46) и (2.47), можем утверждать, что релаксационные члены, стоящие в правых частях уравнений и являющиеся старшими членами слагаемых, содержащих $m_{ijkl}^{(4)}$ и $m_{ij}^{\Omega(4)}$, также должны иметь порядок τ . Отсюда непосредственно следует, что порядок малости согласующих добавок $m_{ijkl}^{(4)}$ и $m_{ij}^{\Omega(4)}$ соответствует τ^2 .

Локальные выражения моментов четвертого порядка (1.42) и (1.43), в силу проведенных оценок, представляют указанные моменты с точностью до τ включительно. Этот факт будет использован для построения моделей второго приближения в главе 3. Согласующие добавки при этом не потребуются.

Система моментных уравнений (1.72), после внесения производных согласующих добавок в уравнения моментов третьего порядка и дополнения всей системы уравнениями (2.46) и (2.47), может рассматриваться как самостоятельная модель неравновесного течения. Эта модель включает в себя 45 скалярных уравнений. В дальнейшем будем называть ее моделью М45. Так же как и модель М24, модель М45 не содержит явных ограничений по числам Кнудсена.

Уравнения моментов до второго порядка включительно модели М45 совпадают с соответствующими уравнениями модели М24, см (1.72) или (1.84). Уравнения третьего и четвертого порядков, с учетом замены моментов ψ_{ijk} и ϖ_i их «системными» значениями φ_{ijk} и ω_i , принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ijk\alpha}^{(4)}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p}; \\
\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_{i\alpha}^{\Omega(4)}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\omega_i}{\tau_p}; \\
\frac{\partial m_{ijkl}^{(4)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha m_{ijkl}^{(4)}) + m_{**\alpha}^{(4)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + 2R \left(T_{*\alpha} \left(\frac{\partial \varphi_{***}}{\partial x_\alpha} - \varphi_{***} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \right) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} \right) - \\
&\quad - \frac{\tau}{\tau_p} \frac{\tau_p}{\rho} \left(\frac{p_{**}^m}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right)^2 = -\frac{\tau_p}{\tau_4} \frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\tau_p}; \\
\frac{\partial m_{ij}^{\Omega(4)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha m_{ij}^{\Omega(4)}) + m_{*\alpha}^{\Omega(4)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + R \left(T_{*\alpha} \frac{\partial \omega_*}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} - \omega_* T_{*\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \right) + \\
&\quad + 2c_\Omega \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{3}{2} \frac{c_\Omega}{c_v} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{R\theta}{h} \left(\frac{p_{ij}^m}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{c_\Omega}{c_v} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) = -\frac{\tau_p}{\tau_{\Omega 4}} \frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\tau_p}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Система (2.51), так же как и система модели М24, обладает коротковолновой неустойчивостью, хотя «субскачок» на профиле ударной волны отсутствует до чисел Маха $M_\infty \approx 3$. На рис. 2.1 представлен профиль скорости плоской ударной волны в одноатомном газе.

Для численного решения использовались метод Мак-Кормака и прогонка четырехдиагональной матрицы с нестационарным членом. Расчеты проводились для $s=1$, $\tau/\tau_p = 0.5$, $\tau_4/\tau_p = 1$. При $M_\infty > 2$ на профиле возникает волнообразная область, прогрессирующая с увеличением числа Маха.

Коротковолновая неустойчивость модели М45, видимо, связана с тем, что моменты пятого порядка, присутствующие в выражениях (2.46) и (2.47), представлены своими локальными выражениями. Кроме этого, аппроксимирующая функция, применяемая для замыкания моментных уравнений четвертого порядка, содержит разложение по степеням тепловой скорости.

Как отмечалось выше, сходимость получаемого ряда в среднем ограничена числами Маха $M_\infty \approx 1.85$. Согласованность локального и балансового выражений моментов четвертого порядка, отличающая данную модель от модели М24, позволяет несколько расширить по числам Маха область физически адекватных решений. Применение численных методов, сглаживающих решения, например [50], позволяет расширить эту область до чисел Маха, превышающих 2.5.

Можно ожидать, что согласование локального и балансового выражений моментов пятого порядка позволит еще больше расширить область адекватных решений. Однако полученная система уравнений вряд ли будет представлять практический интерес.

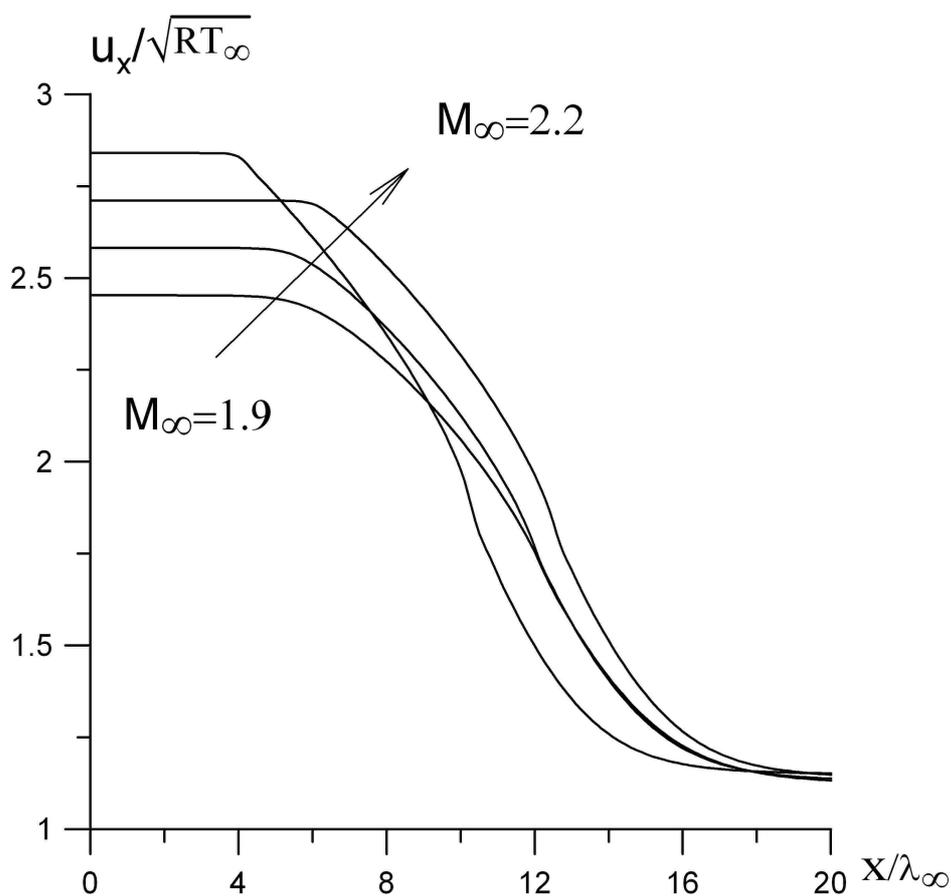


Рис. 2.1. Профиль скорости в плоской ударной волне одноатомного газа. Модель M45, $s = 1$

Количество уравнений в системе (2.51) может быть сокращено до 24, если вместо дифференциальных уравнений согласующих добавок $m_{ijkl}^{(4)}$ и $m_{ij}^{\Omega(4)}$ использовать их приближения. Приближения по старшим членам будут иметь порядок τ^2 и, будучи подставленными в уравнения моментов третьего порядка, замкнут систему на уровне 24 уравнений.

Формально строгое приближение по старшим членам предполагает исключение из левых частей дифференциальных уравнений для $m_{ijkl}^{(4)}$ и $m_{ij}^{\Omega(4)}$ системы (2.51) слагаемых с порядком малости τ^2 . Величины, входящие в слагаемые порядка τ^1 , должны быть представлены своими старшими приближениями. Удельные напряжения $T_{ij} = \delta_{ij}T_t + p_{ij}/R\rho$ заменяются поступательной температурой. Неравновесные напряжения и разность температур, фигурирующие в выражениях релаксационного типа p_{ij}^m/τ_p и θ/τ_p , а также моменты третьего порядка, заменяются их гидродинамическими приближениями.

Описанное приближение будет подробно представлено в главе 3 при построении релаксационной модели. Здесь отметим только, что замена моментов третьего порядка их гидродинамическими приближениями в уравнениях согласующих добавок с последующей подстановкой полученных зависимостей в

уравнения моментов третьего порядка системы (2.51) приводит к высокой нелинейности этих моментных уравнений. В частности, она повышает порядок производных температур T_t и T_Ω до трех. Автором настоящей монографии численные решения такой системы не получены.

К сокращению количества уравнений системы (2.51) можно подойти и с иных позиций. Уравнения (2.46), (2.47) и соответствующие им уравнения системы (2.51) по существу не являются моментными уравнениями. Более того, они не представляют собой балансовых зависимостей, описывающих реальные физические процессы. Указанные уравнения лишь корректируют результат вычисления моментов четвертого порядка, «подправляют» аппроксимирующую функцию распределения. Примененный метод построения моментных уравнений требовал от аппроксимирующей функции лишь «правильных» значений моментов до третьего порядка включительно.

Вообще говоря, нет никаких оснований рассчитывать на высокую точность аппроксимации моментов высших порядков, как функцией f_A , рассматриваемой в настоящей работе, так и 20-моментной функцией Грэда. После введения согласующих добавок, отчасти компенсирующих несовершенство аппроксимирующей функции, трудно говорить о ее каком-либо определенном виде.

Приведенные доводы позволяют отказаться от формально строгих преобразований уравнений согласующих добавок. Будем руководствоваться практическими соображениями, смысл которых будет пояснен ниже.

Приближение по старшим членам уравнений согласующих добавок построим следующим образом. Пренебрежем всеми слагаемыми порядка малости выше чем τ^1 . Заменяем удельные напряжения поступательной температурой: $T_{ij} \approx \delta_{ij} T_t$. Остальные неравновесные величины, входящие в старшие члены уравнений (θ , φ_{ijk} , ω_i и неравновесные напряжения p_{ij}^m в выражениях релаксационного типа), будем считать точными величинами, т.е. определяемыми соответствующими дифференциальными уравнениями системы (2.51).

Такой способ преобразования уравнений согласующих добавок, очевидно, является внепорядковым, но он оправдан приведенными выше доводами. Аналогичное преобразование использовано в работе [15] при построении модели R13, хотя в этой работе оно рассматривается в качестве процедуры Чепмена–Энскога.

В результате указанных преобразований приходим к приближениям согласующих добавок:

$$m_{ijkl}^{(4)} = -\frac{\tau_4}{\tau_p} \tau_p \left(2R \left(T_t \left(\frac{\partial \varphi_{***}}{\partial x_*} - \varphi_{***} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_*} \right) + \delta_{**} \varphi_{***\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\tau}{\tau_p} \frac{\tau_p}{\rho} \left(\frac{p_{**}^m}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) \left(\frac{p_{**}^m}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) \right); \quad (2.52)$$

$$m_{ij}^{\Omega(4)} = -\frac{\tau_{\Omega 4}}{\tau_p} \tau_p \left(\begin{aligned} & 2c_{\Omega} \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{3c_{\Omega}}{2c_v} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{R\theta}{h} \left(\frac{p_{ij}^m}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{c_{\Omega}}{c_v} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) + \\ & + R \left(T_t \left(\frac{\partial \omega_*}{\partial x_*} - \omega_* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_*} \right) + \delta_{ij} \omega_{\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_{\alpha}} \right) \end{aligned} \right). \quad (2.53)$$

Зависимости (2.52) и (2.53) позволяют исключить два последних уравнения из системы (2.51). Полученную систему будем называть системой уравнений, согласованной по моментам четвертого порядка, или моделью M24с. Отличие этой модели от модели M24 заключается только в уравнениях моментов третьего порядка. Запишем систему уравнений модели M24с, в которой уравнение сохранения энергии представлено в термодинамической форме, а моментные уравнения – в “механической”. В таком виде эта модель будет использована в главе 5 для построения гибридной модели.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} &= 0; \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_{\alpha}} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} &= 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial x_{\alpha}} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{2}{3R} \varphi_{\alpha} - \frac{1}{c_{\Omega}} \omega_{\alpha} \right) &= -\frac{\theta}{h\tau_p}; \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(u_{\alpha} p_{ij}^m \right) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_{\alpha}} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_{\alpha} \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}; \\ \frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(u_{\alpha} \varphi_{ijk} \right) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_{\alpha}} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ijk\alpha}^{(4)}}{\partial x_{\alpha}} &= -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p}; \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(u_{\alpha} \omega_i \right) + \omega_{\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} + c_{\Omega} P_{i\alpha} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial m_{i\alpha}^{\Omega(4)}}{\partial x_{\alpha}} &= -\frac{c_{\Omega}}{c_{\omega}} \frac{\omega_i}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

После подстановки зависимостей (2.52) и (2.53) в уравнения моментов φ_{ijk} и ω_i порядок этих дифференциальных уравнений увеличивается до второго. При численной реализации системы (2.54) вторые производные φ_{ijk} и ω_i

способствуют сглаживанию решения. На этом и основывались упомянутые практические соображения.

Профили ударных волн, рассчитанные с использованием модели M24c, не содержат субскачков в широком интервале чисел Маха. Тем не менее эта модель не решает полностью проблему коротковолновой неустойчивости.

На рис. 2.2 показаны профили скорости ударной волны в одноатомном газе. В расчетах принималось: $s = 0.72$, $\tau / \tau_p = 0.5$, $\tau_4 / \tau_p = 1$. Из рисунка видно, что при $M_\infty \geq 3$ профиль начинает «делиться» на два участка, что не соответствует природе явления.

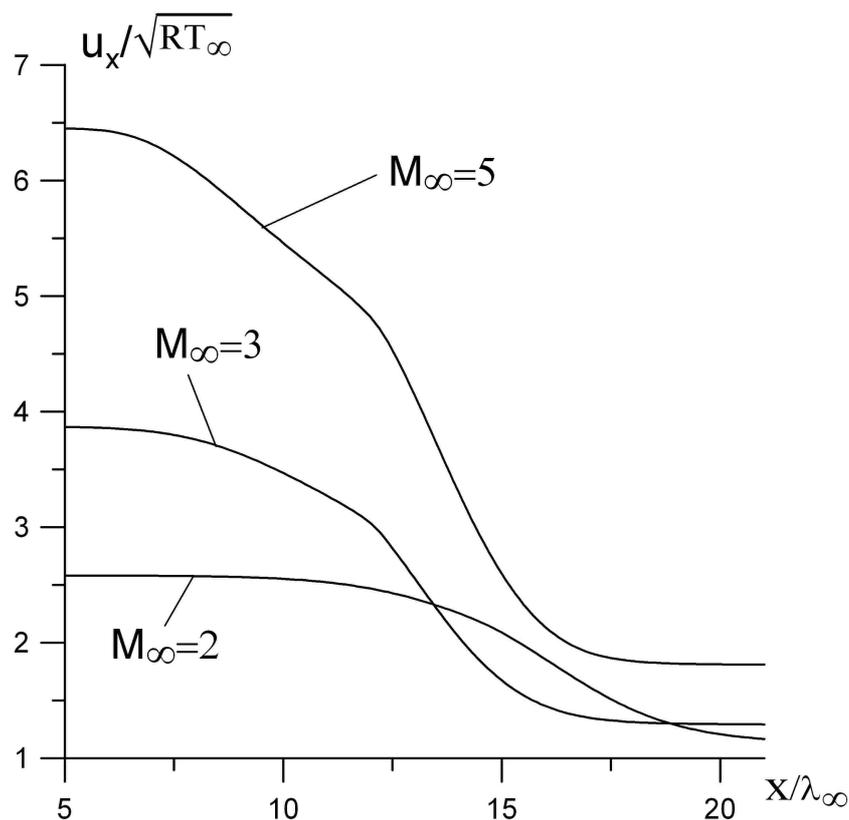


Рис. 2.2. . Профиль скорости в плоской ударной волне одноатомного газа. Модель M24c, $s = 1$, $\tau / \tau_p = 0.5$, $\tau_4 / \tau_p = 1$

Аналогичный характер решения наблюдается и в случае многоатомных газов. На рис. 2.3 представлены профили скорости и температур в ударной волне двухатомного газа. Расчеты проводились при $M_\infty = 3$, $s = 1$, $h = 3.7$, $\tau / \tau_p = 0.5$, $\tau_4 / \tau_p = 1$, $\tau_{\Omega 4} / \tau_p = h = 3.7$.

Модель M24c позволяет расширить интервал физически адекватных решений по числам Маха почти на всю сверхзвуковую область течений. Явных ограничений по числам Кнудсена эта модель не имеет. Допущение о малости безразмерного τ или Kn^* , сделанное при выделении старших членов согласующих добавок, не накладывает прямых ограничений на моментные уравнения по указанным выше причинам.

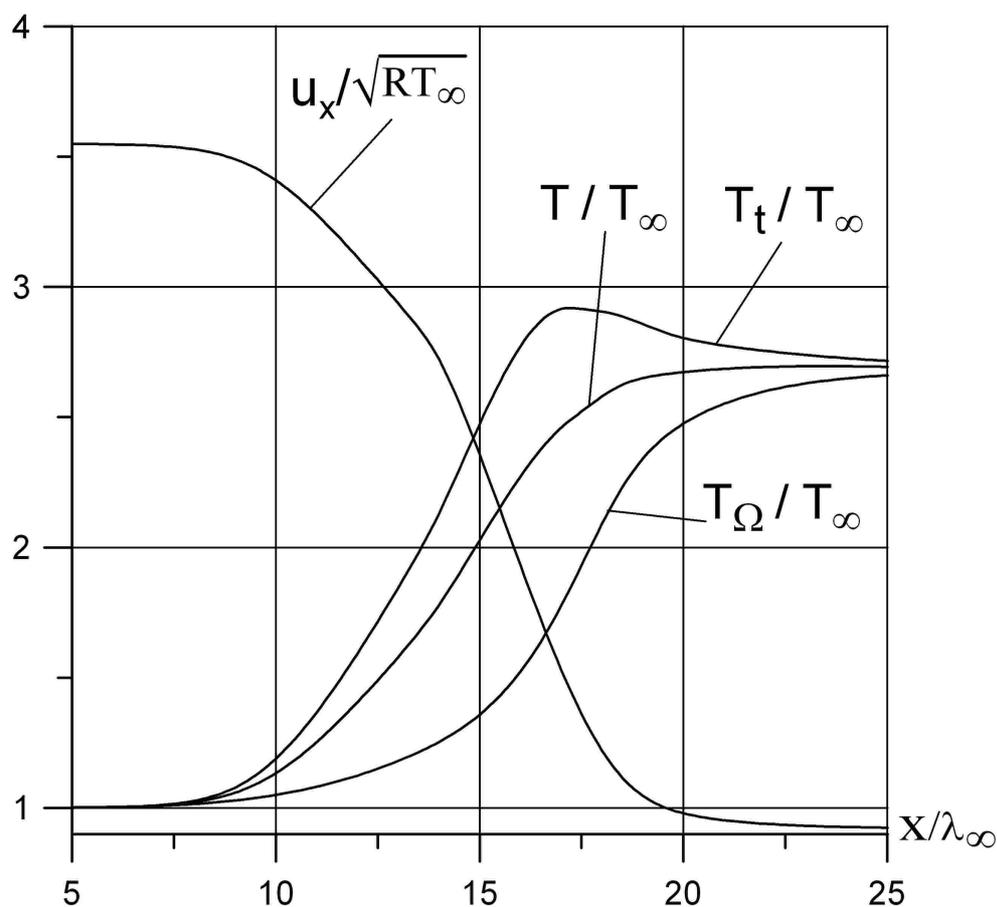


Рис. 2.3. . Профили скорости и температур в плоской ударной волне двухатомного газа. Модель M24c, $M_\infty = 3$, $s = 1$, $h = 3.7$, $\tau/\tau_p = 0.5$, $\tau_4/\tau_p = 1$, $\tau_{\Omega 4}/\tau_p = h = 3.7$

Отметим, что явные ограничения по характерным числам Кнудсена или их отсутствие не являются достаточным критерием применимости модели для расчета неравновесных течений. Классическим примером этого служит модель НСФ, имеющая прямое ограничение $\text{Kn}^* \ll 1$, но во многих случаях дающая качественно верные решения даже в гиперзвуковой области течения.

Глава 3 СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СОХРАНЕНИЯ

3.1. Модель первого приближения

Характерной и позитивной особенностью используемого выше метода построения моделей течения является отсутствие явных ограничений по числам Кнудсена. Замыкание системы проводится в предположении о том, что неточности в определении значений высших моментов слабо влияют на основные моменты: плотность, скорость, температуру, напряжения и тепловой поток. Если среднее время свободного пробега молекулы τ мало по сравнению с характерным временем задачи, что эквивалентно ограничению $\text{Kn}^* < 1$, то моменты четвертого порядка в форме (1.42), (1.43) вносят в уравнения φ_{ijk} и ω_i системы (1.72) погрешность, соответствующую τ^3 . Эта оценка получена из уравнений для φ_{ijk} и ω_i системы (2.51) с учетом того, что порядок величины согласующих добавок $m_{ijkl}^{(4)}$ и $m_{ij}^{\Omega(4)}$ составляет τ^2 . В ряде работ такие же оценки получены для 20-моментной системы Грэда.

В случае произвольных значений τ оценки такого рода невозможны, и вопрос об использовании моделей M24, M24c и M45 для описания течений сильно разреженных газов остается открытым. Предположение Грэда о том, что увеличение числа членов разложения равновесной функции распределения и, следовательно, увеличение количества моментных уравнений повышает точность аппроксимации истинной функции распределения, представляется необоснованным (см. например, [9]).

В качестве альтернативы методу Грэда, с точки зрения ограничений по числам Кнудсена, могут рассматриваться метод Чепмена–Энскога и метод разложения по малому параметру. В этих методах в той или иной форме изначально вносится ограничение по числам Кнудсена: $\text{Kn}^* < 1$. Построение модели начинается с разложения равновесной функции распределения в асимптотический ряд по степеням малой величины (Kn^*). Количество удерживаемых членов ряда определяет порядок (номер) приближения. Эти методы позволяют ограничить систему моментных уравнений только уравнениями сохранения (5-моментная система), а неравновесные величины определять непосредственным интегрированием аппроксимирующей функции распределения в соответствующем приближении.

Аналогичные модели течения могут быть получены непосредственно из системы моментных уравнений. На первом этапе запишем систему моментных уравнений для функции распределения общего вида. Для замыкания системы и конкретизации выражений релаксационных членов уравнений системы привлечем дополнительные допущения относительно замыкающей (аппроксимирующей) функции распределения и времени релаксации. По этому принципу построена система моментных уравнений (1.72).

Обратим внимание на то, что допущения относительно аппроксимирующей функции распределения и допущения относительно выражений времени релаксации не связаны между собой.

На следующем этапе, полагая время релаксации малой величиной τ , выделим из моментных уравнений неравновесных величин члены требуемого порядка малости, который будем считать номером приближения. Аналогичная процедура проделана в главе 1 при получении гидродинамических приближений времен релаксации и в главе 2 для выделения старших членов неравновесных добавок.

В результате получим систему уравнений сохранения, замкнутую выражениями неравновесных величин в требуемом приближении.

Построим систему уравнений, соответствующую первому приближению процедуры Чепмена–Энскога. Уравнения неравновесных величин будем рассматривать в размерной форме, полагая основные газодинамические переменные $\rho, u_i, T, p, (T_t, T_\Omega, p^m)$ и их производные величинами порядка единицы, а неравновесные величины $\theta, p_{ij}^m, p_{ij}, \varphi_{ijk}, \omega_i, q_i$ – малыми величинами порядка τ .

Перепишем уравнение разности температур θ (1.75) в виде

$$\theta = -h\tau_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} \left(\delta_{\alpha\beta} T_t + \frac{p_{\alpha\beta}^m}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) \right). \quad (3.1)$$

В первом приближении (τ^1) в правой части (3.1) удержим только старшие члены. Используем очевидное соотношение

$$\delta_{\alpha\beta} T_t \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = T_t \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.2)$$

Учтем, что в рассматриваемом приближении в соответствии с (1.53)

$$\tau_p p^m = \mu(T_t) \sim \tau_p p = \mu(T). \quad (3.3)$$

В результате получим выражение для разности температур в первом приближении:

$$\theta^{[1]} = -\frac{2}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.4)$$

Аналогичные преобразования проведем для остальных неравновесных величин. Уравнение неравновесных напряжений (1.32) представим следующим образом:

$$p_{ij}^m = -\tau_p \left(\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + (\delta_{* \alpha} p^m + p_{* \alpha}^m) \frac{\partial u_{*}}{\partial x_\alpha} - \right. \\ \left. - \delta_{ij} \frac{2}{3} (\delta_{\alpha\beta} p^m + p_{\alpha\beta}^m) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) \right). \quad (3.5)$$

Первое приближение неравновесных напряжений:

$$p_{ij}^{m[1]} = -\mu \left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right). \quad (3.6)$$

Уравнение неравновесных термодинамических напряжений (1.80) с учетом (1.79) перепишем в виде

$$p_{ij} = \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{h-1}{h} \rho R \theta - \left. \begin{aligned} & -\tau_p \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}) + (\delta_{* \alpha} p + p_{* \alpha}^m) \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \right. \\ & \left. - \delta_{ij} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5-3\gamma}{2} \right) (\delta_{\alpha \beta} p + p_{\alpha \beta}^m) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (2\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij}(\gamma-1)q_\alpha) \right) \end{aligned} \right). \quad (3.7)$$

Заменим разность температур первым приближением (3.4) и выделим главные члены в остальных слагаемых правой части (3.7). В результате приходим к выражению

$$p_{ij}^{[1]} = -\mu \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \left(1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.8)$$

Преобразованное уравнение моментов третьего порядка φ_{ijk} системы (1.72):

$$\varphi_{ijk} = -\frac{3}{2} \tau_p \left(\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \\ & + \frac{R}{2} (\delta_{* \alpha} p^m + p_{* \alpha}^m) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\delta_{* k} T_t + \frac{p_{* k}^m}{R\rho} \right) \end{aligned} \right). \quad (3.9)$$

В первом приближении

$$\varphi_{ijk}^{[1]} = -\frac{3}{4} R \mu \delta_{**} \frac{\partial T_t}{\partial x_*}. \quad (3.10)$$

Тепловой поток поступательных степеней свободы:

$$\varphi_i^{[1]} \equiv \varphi_{i\alpha\alpha}^{[1]} = -\frac{15}{4} R \mu \frac{\partial T_t}{\partial x_i}. \quad (3.11)$$

Преобразованное уравнение теплового потока ω_i системы (1.72):

$$\omega_i = -\frac{c_\omega}{c_\Omega} \tau_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega (\delta_{i\alpha} p^m + p_{i\alpha}^m) \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} \right). \quad (3.12)$$

В первом приближении

$$\omega_i^{[1]} = -c_\omega \mu \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_i}. \quad (3.13)$$

Первое приближение полного теплового потока q_i :

$$q_i^{[1]} = \varphi_i^{[1]} + \omega_i^{[1]} = -\frac{c_p}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.14)$$

Здесь учтено, что в рассматриваемом приближении $T \sim T_t \sim T_\Omega$. Эта же зависимость может быть получена из уравнения теплового потока системы (1.84).

Система уравнений сохранения в совокупности с замыкающими ее зависимостями (3.4), (3.6), (3.8), (3.10), (3.11), (3.13), (3.14) представляет собой модель первого приближения, соответствующую модели НСФ с явно выраженным коэффициентом объемной вязкости. Запишем ее в термодинамических терминах. Ниже будет показано, что только термодинамическая форма записи уравнений сохранения является строгим первым приближением.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{Здесь } p_{ij} = -\mu \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{*}} + \delta_{ij} c_\mu \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad q_i = -\frac{c_p}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad c_\mu = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5 - 3\gamma}{2} h \right).$$

В отличие от модели НСФ, система (3.15) содержит коэффициент объемной вязкости в явном виде. Если коэффициент объемной вязкости μ' включен в уравнение неравновесных термодинамических напряжений в форме

$$p_{ij} = -\mu \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{*}} + \delta_{ij} \frac{2}{3} (\mu - \mu') \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad \text{то очевидно}$$

$$\mu' = \frac{5 - 3\gamma}{2} h \mu. \quad (3.16)$$

Первые приближения неравновесных величин, полученные выше, являются следствием выбора значений времен релаксации в разделе 1.4. В этом плане проделанная процедура дублирует процедуру указанного раздела и имеет только методологический смысл. Однако из реологического закона Ньютона и закона Фурье, используемых для определения времен релаксации τ_p , τ_φ , τ_ω , не следует, и принципиально не может следовать, выражение для коэффициента объемной вязкости.

Выражение (3.16) обусловлено уравнением быстроты энергообмена (1.69) и уравнением для τ_φ (1.70). В совокупности с системой моментных уравнений многоатомных газов указанные уравнения однозначно определяют объемную вязкость.

В зависимости от условий решаемой задачи и уровня описания протекающих процессов применяются различные зависимости для коэффициента объемной вязкости (см., например, [51, 52, 5]). Отличительной особенностью выражения (3.16) является адекватность газодинамическим задачам и по методу получения, и по уровню описания процессов.

Отметим характерную особенность модели первого приближения и, как будет показано ниже, моделей более высоких приближений процедуры Чепме-

на–Энскога. Уравнение энергии систем моментных уравнений (1.72), (2.51), (2.54) может быть представлено в виде двух уравнений, записанных относительно температур T_t и T_Ω , т.е. (1.74) и (1.73). По отношению к моделям M24, M24c и M45 это чисто формальное преобразование. Как отмечено выше, (1.74) представляет собой свертку уравнения напряжения P_{ij} с последующей заменой p^m на T_t посредством уравнения сохранения массы.

Количество скалярных уравнений напряжения при этом будет сокращено на единицу, что компенсирует увеличение количества уравнений энергии. Уравнение (1.73) эквивалентно уравнению энергии внутренних степеней свободы. Таким образом, проведенное преобразование по существу ничего не меняет в системах моментных уравнений.

Аналогичная процедура, примененная к модели первого приближения, приведет к появлению в системе двух уравнений:

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{2}{3R\rho} \frac{\partial \varphi_\alpha^{[1]}}{\partial x_\alpha} = -\frac{5-3\gamma}{2} \frac{\theta^{[1]}}{h\tau_p}; \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha^{[1]}}{\partial x_\alpha} = \frac{3(\gamma-1)}{2} \frac{\theta^{[1]}}{h\tau_p}. \quad (3.18)$$

Общее количество скалярных уравнений системы увеличится до шести. На первый взгляд может показаться, что такое расширение системы повышает ее информативность, позволяя помимо осредненной температуры T определять ее составляющие T_t и T_Ω . Однако в рамках системы (3.15) температуры T_t и T_Ω представимы первыми приближениями в соответствии с (1.7), (1.8):

$$T_t = T + \frac{5-3\gamma}{2} \theta^{[1]}; \quad (3.19)$$

$$T_\Omega = T - \frac{3}{2} (\gamma-1) \theta^{[1]}. \quad (3.20)$$

Возникает вопрос об избыточности системы дифференциальных уравнений, содержащей уравнения (3.17) и (3.18). Модели первого и второго приближений построены в работе [53]. Однако вопрос избыточности системы уравнений в этой работе не рассматривался.

Проанализируем уравнения (3.17) и (3.18) с точки зрения порядка малости входящих в них величин. Релаксационные члены этих уравнений содержат первые приближения разности температур $\theta^{[1]}$. Вместе с тем сами релаксационные члены имеют порядок единицы, так как неравновесная величина порядка τ отнесена к времени релаксации τ_p .

Следуя процедуре Чепмена–Энскога, разность температур, как и другие неравновесные величины, можно представить в любом приближении: $\theta^{[1]}$, $\theta^{[2]}$, \dots , $\theta^{[n]}$, \dots . Истинное значение разности температур в этих терминах:

$$\theta = \theta^{[1]} + (\theta^{[2]} - \theta^{[1]}) + \dots + (\theta^{[n]} - \theta^{[n-1]}) + \dots \quad (3.21)$$

Порядок малости каждого последующего слагаемого увеличивается на единицу. Все члены уравнений (3.17), (3.18), содержащие неравновесные величины, определены с точностью до τ . Это относится, в частности, и к составляющим температуры T_{ii} , имеющим порядок единицы, и представляемым выражением

$$T_{ii} = T_t + \frac{P_{ii}^{m[1]}}{R\rho}. \quad (3.22)$$

Релаксационные члены уравнений (3.17), (3.18), имеющие порядок единицы и содержащие неравновесную величину θ , представлены без поправок первого приближения. Таким образом, релаксационные члены уравнений (3.17), (3.18) записаны в приближении τ^0 , соответствующем модели Эйлера. В первом приближении, соответствующем данной модели, релаксационные члены должны быть выражены как

$$\frac{\theta^{[1]} + (\theta^{[2]} - \theta^{[1]})}{\tau_p} = \frac{\theta^{[2]}}{\tau_p}. \quad (3.23)$$

Представление релаксационного члена в виде (3.23) вносит существенные осложнения, характерные для моделей второго приближения. Нелинейные члены, появляющиеся в уравнении энергии, не только увеличивают количество вычислительных операций при численной реализации модели, но и снижают устойчивость используемых методов решения. В следующем разделе будет рассмотрена модель второго приближения. Забегая вперед, отметим, что численная реализация этой модели значительно сложнее реализации моделей M24, M24c и M45, даже несмотря на громоздкость последних.

Вместе с тем такая усложненная модель не имеет преимуществ перед системой (3.15). Значения основных параметров потока (ρ , u_i , p , T , p_{ij} , q_i), вычисленные по усложненной модели, совпадут со значениями, полученными из решения системы (3.15). Это следует из того, что уравнение энергии в термодинамических переменных не содержит релаксационного члена, а в соотношении (3.8) для термодинамического неравновесного напряжения использовано первое приближение θ . Второе приближение было бы внепорядковым.

Значения температур T_t и T_Ω , вычисленные по усложненной модели, соответствуют первому приближению. Этот же порядок приближения дают зависимости (3.19), (3.20) в совокупности с системой (3.15).

На примере численного теста покажем, что первые приближения температур T_t и T_Ω , независимо от способа их получения, приводят к качественно неверным результатам.

На рис. 3.1, 3.2 и 3.3 представлены результаты расчета структуры ударной волны в двухатомном газе. Использовались модель первого приближения (3.15) и ее модификация с уравнениями энергии (3.17), (3.18). Температуры T_t и T_Ω в первом случае рассчитывались по зависимостям (3.19), (3.20), во втором были получены непосредственно из решения системы уравнений. Полученные двумя различными методами значения всех параметров потока, включая T_t и T_Ω , практически совпадали.

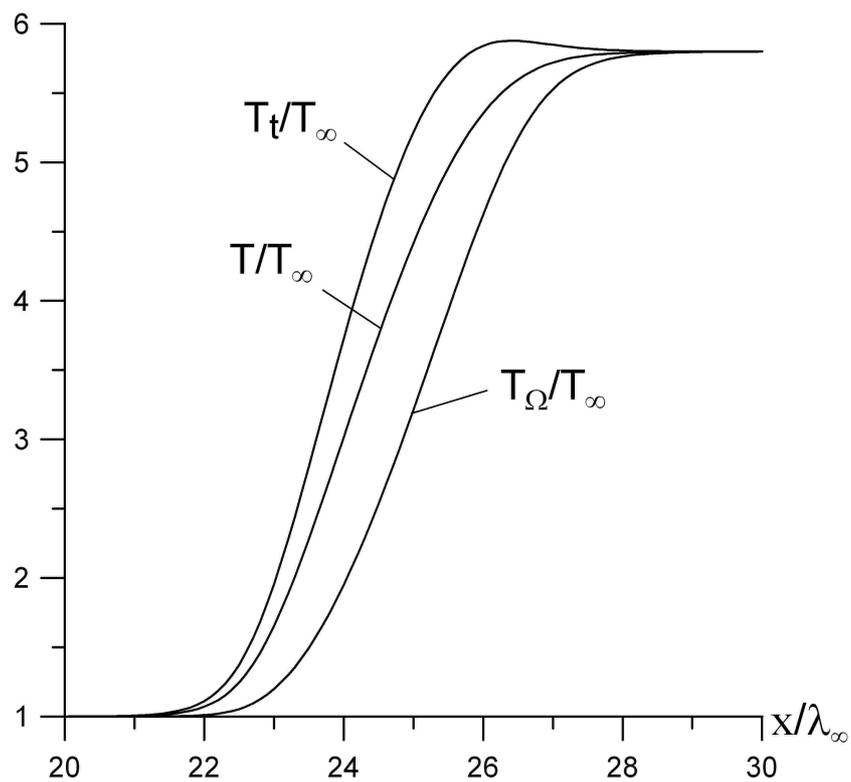


Рис. 3.1. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа. Модель первого приближения, $M_\infty = 5$, $s = 1$, $h = 1$

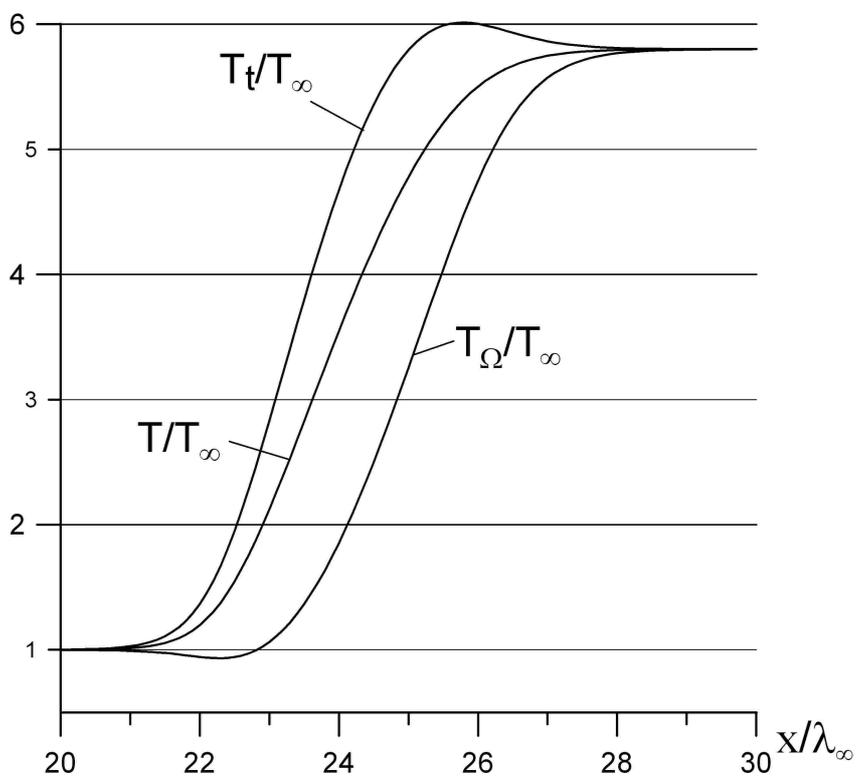


Рис. 3.2. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа. Модель первого приближения, $M_\infty = 5$, $s = 1$, $h = 1.5$

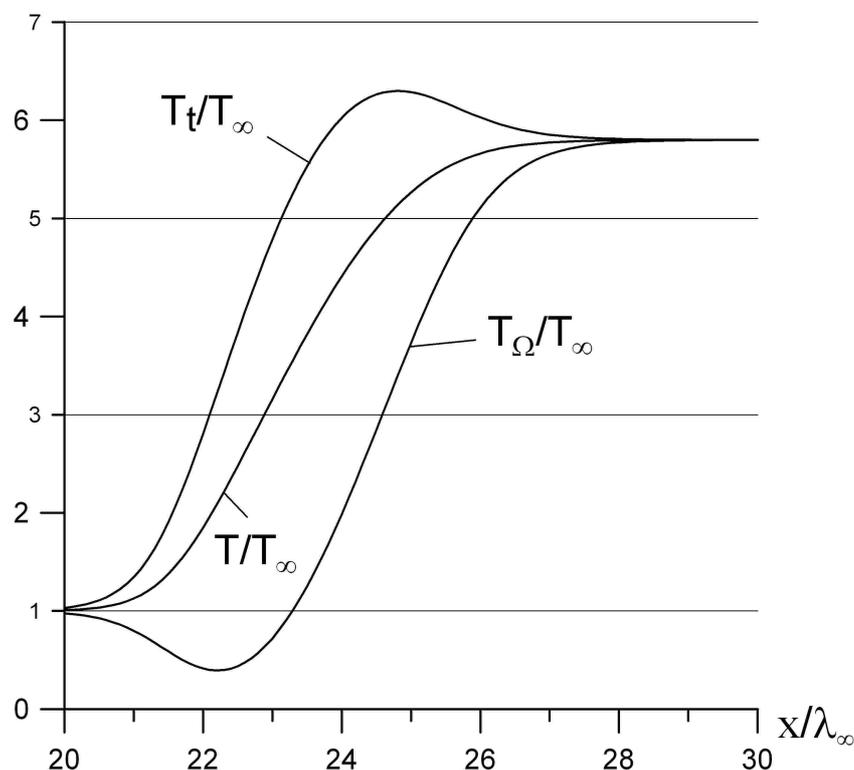


Рис. 3.3. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа. Модель первого приближения, $M_\infty = 5$, $s = 1$, $h = 2.5$

Рассматривалось течение при $M_\infty = 5$. Принималось: $\mu = \mu(T^s)$, $s = 1$. Параметр h задавался в интервале $h = 1 \dots 2.5$. Значение $h = 2.5$ соответствует зависимости (1.71) при $s = 1$ и $Z = 5$.

По мере увеличения значения параметра h на профиле температуры внутренних степеней свободы наблюдается физически неадекватная область. В начальной части профиля энергия передается от “холодных” внутренних степеней свободы к “горячим” поступательным степеням. Этот модельный эффект наблюдается при всех значениях $h > 1$. Так как полученные двумя различными методами значения термодинамической (осредненной) температуры T совпали, а решение системы (3.15) требует выполнения закона сохранения энергии в явной форме, то, очевидно, занижение значений T_Ω компенсировалось соответствующим завышением T_t .

Энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы молекул протекает в несколько раз медленнее, чем энергообмен между только поступательными степенями, т.е. значение h составляет несколько единиц. Это является экспериментально установленным фактом. Вместе с тем параметр h входит в выражения для θ и p_{ii} даже в первом приближении (см. (3.4), (3.8)). Следовательно, значения T_t и T_Ω , соответствующие модели первого приближения, физически неадекватны.

В моделях неравновесных течений коэффициент вязкости зачастую определяют как функцию поступательной температуры (см., например, [38]). Такой

подход вполне оправдан, так как перенос импульса молекул связан исключительно с их поступательным движением. Полученный выше результат говорит о том, что T_t должна быть представлена приближением, как минимум, выше первого.

Проанализируем причину отмеченной неадекватности первых приближений T_t и T_Ω . Рассмотрим первые приближения полных нормальных напряжений P_{ii} , выраженные через механические и термодинамические переменные. Выбор именно этого параметра течения для анализа энергообмена обусловлен тем, что величина P_{ii} отличается от энергии поступательного движения молекул, заключенных в единице объема, только постоянным множителем;

$$P_{ii} = p^m - 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad (3.24)$$

$$P_{ii} = p - \frac{5-3\gamma}{3} h\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.25)$$

Второе слагаемое правой части выражения (3.25) введено для замены p^m на p в соответствии с первым приближением уравнения (1.15). Зависимость (3.25) может быть представлена в виде

$$P_{ii} = p - 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right) \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.26)$$

При этом последние два слагаемых рассматриваются как неравновесные нормальные термодинамические напряжения p_{ii} .

Не снижая общности выводов, рассмотрим одномерное течение газа. Пусть одна из степеней свободы соответствует координатной оси, направление которой совпадает с направлением движения потока. Назовем ее продольной осью и будем считать декартовой осью X .

При изменении скорости движения газа происходит деформация функции распределения молекул по скоростям. Для определенности рассмотрим торможение газа в системе координат, связанной с центром масс жидкой частицы и движущейся со скоростью u_x . Группа молекул, летящих по направлению потока, имеет большую групповую скорость и меньшую по отношению к T_t температуру. Группа молекул, летящих против направления потока, имеет меньшую групповую скорость и большую температуру. В результате такой деформации возникает неравновесное напряжение p_{xx}^m .

В случае торможения потока ($\frac{\partial u_x}{\partial x} < 0$) продольная степень свободы обогащается энергией ($p_{xx}^m > 0$), а в случае разгона потока – обедняется ($\frac{\partial u_x}{\partial x} > 0$, $p_{xx}^m < 0$). Этот процесс не связан с межмолекулярными столкновениями и обогащает или обедняет только одну (продольную) поступательную степень сво-

боды. В выражениях (3.24), (3.25) это учтено слагаемым $\left(-2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$ или в принятой системе координат $-\left(-2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$. В не упрощенном первом приближении выражении (см., например, (1.32) или (3.5)) соответствующий член “наработки напряжений” определен как $-2\tau_p P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x}$, т.е. различие заключается только в множителе, выполняющем функции коэффициента вязкости.

Член $\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \equiv \frac{1}{3}2\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$ уравнений (3.24), (3.25) (в одномерной постановке это $\frac{1}{3}2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}$) учитывает тот факт, что механическое давление

$p^m = \frac{1}{3}P_{\alpha\alpha}$ в процессе наработки напряжений также будет изменяться, а именно на одну треть величины наработки.

Отметим, что в одноатомных газах, не содержащих внутренних степеней свободы, межмолекулярные столкновения не оказывают влияния на величину p^m , а следовательно, и на термодинамическое давление $p \equiv p^m$. В результате межмолекулярных столкновений избыточная (в случае торможения потока) энергия одной поступательной степени свободы перераспределяется между остальными поступательными степенями свободы. Общее количество энергии теплового движения остается неизменным.

В многоатомных газах инвариантом столкновений является только термодинамическое давление p , так как механическое давление p^m участвует в процессе энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы. Этот факт учтен вторым слагаемым уравнения (3.25), представляющим собой первое приближение разности температур $\theta^{[1]}$ с множителем $\frac{5-3\gamma}{2}$.

Если в соответствии с (1.4) рассматривать термодинамическую температуру как средневзвешенное значение T_t и T_Ω , то множитель $\frac{5-3\gamma}{2}$ представляет собой весовой коэффициент температуры внутренних степеней свободы:

$$T = \frac{3}{2}(\gamma-1)T_t + \frac{5-3\gamma}{2}T_\Omega. \quad (3.27)$$

Из этого уравнения следует соотношение давлений:

$$p = \frac{3}{2}(\gamma-1)p^m + \frac{5-3\gamma}{2}\rho RT_\Omega. \quad (3.28)$$

Величину ρRT_Ω в ряде работ называют “давлением внутренних степеней свободы” или “вращательным давлением”. В традиционном понимании термин “давление” ассоциируется с термином “напряжение”. Вместе с тем внутренние

степени свободы не создают напряжений P_{ij} в газовой среде. В настоящей монографии термин “давление” не используется применительно к величине ρRT_{Ω} , чтобы не вводить в заблуждение читателей, не искушенных в особенностях профессионального жаргона.

В соответствии с (1.5) величина ρRT_{Ω} пропорциональна удельной энергии внутренних степеней свободы E_{Ω} . Последнее слагаемое (3.28) может быть представлено как

$$\frac{5-3\gamma}{2} \rho RT_{\Omega} = (\gamma-1)E_{\Omega}. \quad (3.29)$$

В последующем изложении величину ρRT_{Ω} будем трактовать как энергию внутренних степеней свободы.

Возвращаясь к уравнениям (3.24) и (3.26), отметим аналогию их структур, при условии применения (3.24) к одноатомным газам. Оба выражения содержат в качестве первого слагаемого инвариант столкновений. Вторые слагаемые описывают наработку напряжений, а третьи уменьшают (по модулю) наработку на величину, учитываемую инвариантом.

Связь между p^m и $\frac{1}{3}2\mu \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$ чисто формальна, так как она следует из определения механического давления. Третий член выражения (3.26), т.е. $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{5-3\gamma}{2}h\right)2\mu \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$, связан со своим инвариантом p более сложным образом. Он учитывает энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы.

Поясним сказанное на схеме распределения нормальных напряжений. Как и ранее, будем рассматривать торможение потока, движущегося вдоль декартовой оси X . Пусть газ двухатомный и содержит две внутренние степени свободы (только вращательные степени). Для такого газа $\gamma = \frac{7}{5}$, $\frac{5-3\gamma}{2} = \frac{2}{5}$, $\frac{3}{2}(\gamma-1) = \frac{3}{5}$, $\rho RT_{\Omega} = E_{\Omega}$.

Предположим, что энергообмен между поступательными и внутренними степенями протекает с той же быстротой, как и энергообмен между только поступательными степенями, т.е. $h = 1$. В этом случае “поперечные” поступательные (Y, Z) и внутренние степени содержат одинаковое количество энергии и характеризуются одинаковыми температурами: $T_{yy} = T_{zz} = T_{\Omega}$.

Схема распределения напряжений (энергий) приведена на рис. 3.4. Пунктирными линиями изображены внутренние степени свободы, не создающие напряжений, но учитываемые при вычислении средней энергии теплового движения.

Механическое давление p^m , в соответствии с его определением, представляет собой среднее арифметическое значение нормальных напряжений. Оно изображено на рисунке горизонтальной линией. Термодинамическое дав-

ление – среднее арифметическое значение энергий всех степеней свободы молекулы с соответствующим коэффициентом. Оно также отмечено горизонтальной линией.

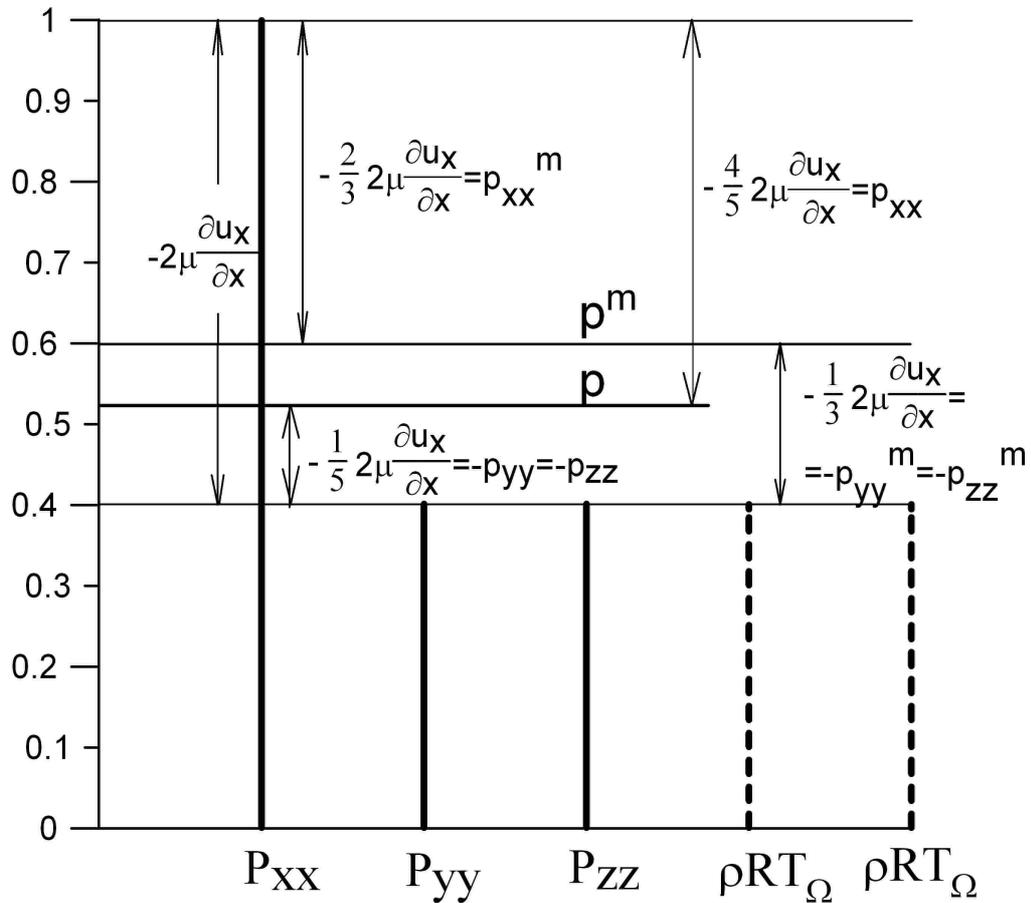


Рис. 3.4. Схема распределения нормальных напряжений при $h = 1$

Коэффициент энергий поступательных степеней составляет $2/3$, так как среднее значение потока импульса молекулы ($m_0 \overline{c_i^2}$) вдвое больше ее средней кинетической энергии, отнесенной к одной из трех поступательных степеней свободы. Коэффициент энергий внутренних степеней свободы вычисляется аналогично. Для газа с двумя внутренними степенями свободы это $2/2$, а с тремя – $2/3$.

Как отмечено выше, при $h=1$ температура внутренних степеней свободы T_{Ω} соответствует поперечным температурам T_{yy} и T_{zz} . “Провал” T_{Ω} на профиле ударной волны не наблюдается (см. рис. 3.1).

Теперь примем $h=5/2$, т.е. поступательно-вращательный энергообмен протекает медленнее поступательно-поступательного. Выбранное значение не противоречит экспериментальным данным и соответствует зависимости (1.71) для максвелловских молекул ($s=1$). Последнее слагаемое в (3.26) обратится в ноль.

Вся наработка напряжения будет представлена неравновесным напряжением p_{xx} . Неравновесных напряжений p_{yy} и p_{zz} не возникнет. Напомним, что рассматривается одномерное течение, в котором $\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$.

Термодинамическое давление p сравнивается с P_{yy} и P_{zz} . Компенсация избытка нормального импульса P_{xx} по отношению к среднему значению энергии (p) будет осуществляться только за счет недостатка энергии на внутренних степенях свободы. Сразу оговоримся, что это особенность первого приближения.

Схема описанного распределения напряжений показана на рис. 3.5. Механическое давление и соответствующие ему неравновесные напряжения не изменятся. Параметр h не влияет на их значения. Заниженная по сравнению с предыдущим случаем энергия внутренних степеней свободы, очевидно, означает заниженную температуру T_Ω , что и объясняет физическую неадекватность кривой этой температуры в начальном участке профиля ударной волны (см. рис. 3.3).

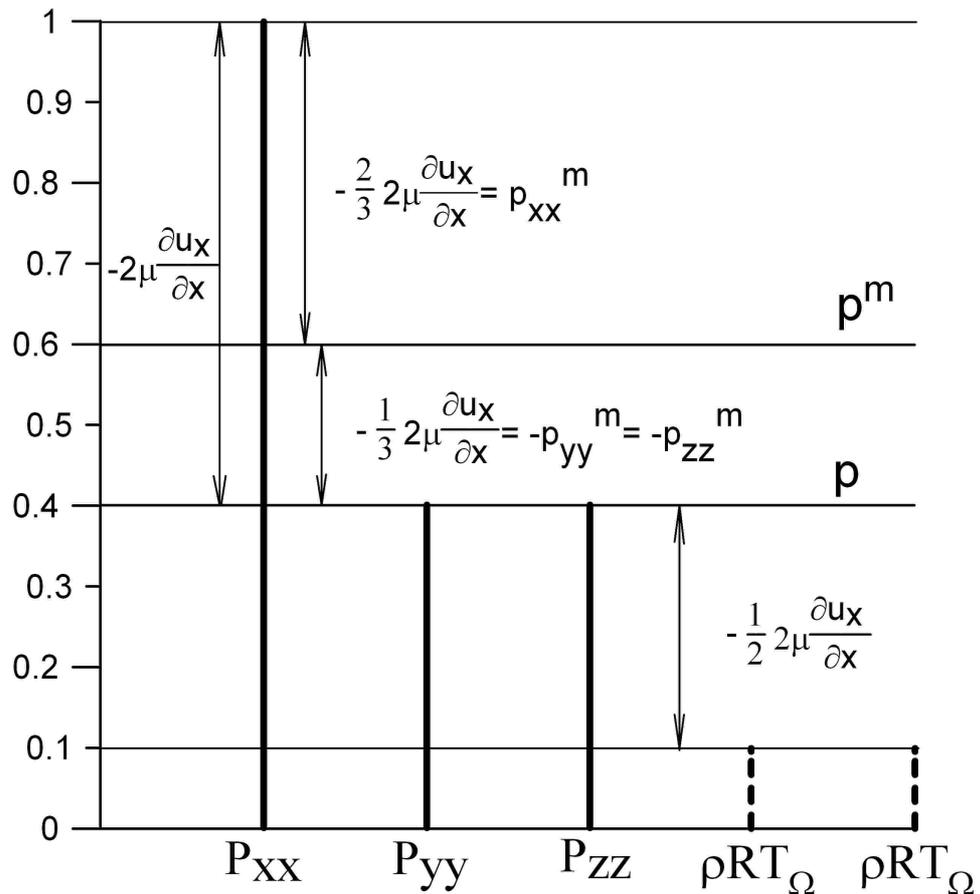


Рис. 3.5. Схема распределения нормальных напряжений при $h = 2.5$

Понятно, что при любых значениях $h > 1$ температура внутренних степеней свободы будет занижена, а температура T_t - завышена (см., например, рис. 3.2).

Проведенный анализ приводит к выводу о том, что модели первого приближения не позволяют определять температуры T_t и T_Ω даже в первом приближении. В частности, двухтемпературные модели, система дифференциальных уравнений которых содержит только уравнения сохранения (см., например, [5]), нельзя рассматривать в качестве моделей первого приближения.

В моделях n -го приближения (в смысле процедуры Чепмена–Энскога) разность температур θ должна быть представлена $(n+1)$ -м приближением, что непосредственно следует из анализа порядка малости членов уравнений (3.17) и (3.18).

Вместе с тем пренебрежение коэффициентом объемной вязкости, даже в виде его первого приближения (3.16), приводит к существенной погрешности определения термодинамического неравновесного напряжения p_{ii} . В рассмотренном примере течения погрешность вычисления p_{xx} при $h = 2.5$ составит $p_{xx}/3$.

Такая неточность может существенно сказаться на значениях основных газодинамических переменных (ρ, u, p, T), а в ряде случаев – и на характере течения. Исключением являются безотрывные пристеночные течения, в которых нормальные неравновесные напряжения слабо влияют на параметры и характер течения.

Рассмотренная выше физическая неадекватность определения температур T_t и T_Ω является особенностью первого приближения. В этом приближении величина τ_p предполагается исчезающе малой ($\text{Kn}^* \ll 1$). В уравнениях неравновесных величин удерживаются только старшие члены. Если течение существенно неравновесно и на характерное число Кнудсена накладываются менее жесткие ограничения ($\text{Kn}^* < 1$), отброшенные члены уравнения начинают играть принципиально важную роль. Это, в частности, относится к дивергенции теплового потока в уравнениях для θ и p_{ii} , оказывающей значительное влияние на процесс наработки напряжений. Этот вопрос подробно рассматривается в главе 5.

Модели, в которых неравновесные величины представлены своими моментными уравнениями, дают вполне адекватные значения температур T_t и T_Ω . Примером этого могут служить профили температур, рассчитанные при $h = 3.7$ и показанные на рис. 2.3.

3.2. Модель второго приближения. Релаксационная модель

При построении модели первого приближения величина τ предполагалась настолько малой, что ее квадратом можно было пренебречь. Такое допущение оправданно для слабонеравновесных течений. Повышение допустимой

степени неравновесности может быть достигнуто, если в уравнениях неравновесных величин удерживать члены порядка малости до τ^2 , пренебрегая членами порядка τ^3 и выше. При этом в правых частях уравнений (3.1), (3.5), (3.9) и (3.12) неравновесные величины должны быть представлены своими первыми приближениями, а одночлены, содержащие произведения двух неравновесных величин, должны быть опущены.

Уравнение (3.9) может быть заменено уравнением для φ_i , так как момент третьего порядка φ_{ijk} , фигурирующий только в (3.5), будет заменен своим первым приближением. Аналогично может быть преобразовано уравнение неравновесных термодинамических напряжений (3.7), при условии, что разность температур θ , стоящая в правой части выражения, будет заменена своим вторым приближением.

Получаемые в результате такой процедуры неравновесные величины будут определены с точностью до τ^2 . Тем не менее такой метод построения модели второго приближения, так же как и упомянутые выше методы, обладает существенным недостатком, связанным с выражением частных производных по времени.

В качестве примера рассмотрим уравнение (3.5). Проведя указанные замены, получим:

$$p_{ij}^{m[2]} = -\tau_p \left(\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^{m[1]} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^{m[1]}) + (\delta_{*\alpha} p^m + p_{*\alpha}^{m[1]}) \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} (\delta_{\alpha\beta} p^m + p_{\alpha\beta}^{m[1]}) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varphi_{ij\alpha}^{[1]} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha^{[1]} \right) \right). \quad (3.30)$$

Первое слагаемое правой части (3.30) после подстановки (3.6) будет содержать смешанные производные $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j}$. Производная $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ может быть выражена из уравнения сохранения импульса модели Эйлера:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}. \quad (3.31)$$

Смешанную производную получают в результате дополнительного дифференцирования дифференциального уравнения (1.18):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \right). \quad (3.32)$$

Аналогичным образом получают производную $\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x_j}$ в уравнении теплового потока. После подстановки выражений для $p_{ij}^{m[2]}$ и $\varphi_i^{[2]}$ в систему уравнений сохранения, в случае одноатомного газа ($p_{ij}^m \equiv p_{ij}$, $\varphi_i \equiv q_i$) приходим к системе уравнений Барнетта.

Одной из особенностей уравнений Барнетта является наличие в них посторонних решений. Целый ряд работ, например [20, 22], посвящен выделению посторонних решений, что приводит к существенному усложнению зависимостей для неравновесных величин и снижает их практическую ценность. Можно предположить, что появление посторонних решений связано с операцией дополнительного дифференцирования дифференциальных уравнений сохранения импульса и энергии.

Следуя работе [53], построим модель второго приближения без использования указанной операции дополнительного дифференцирования. Помимо этого, исправим некорректность указанной работы, связанную с использованием разности $T_t - T_\Omega$ в релаксационном члене уравнений сохранения энергии.

Преобразуем уравнения (3.1), (3.5), (3.9) и (3.12) к следующему виду (уравнение (3.9) заменено уравнением теплового потока поступательных степеней свободы φ_i):

$$\theta + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \right) h \tau_p = -h \tau_p \left(\frac{2}{3} \left(\delta_{\alpha\beta} T_t + \frac{P_{\alpha\beta}^m}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) \right); \quad (3.33)$$

$$p_{ij}^m + \left(\frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial p_{ij}^m}{\partial x_\alpha} \right) \tau_p = -\tau_p \left(\begin{aligned} & p_{ij}^m \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + (\delta_{*i\alpha} P^m + p_{*i\alpha}^m) \frac{\partial u_{*i}}{\partial x_\alpha} - \\ & - \delta_{ij} \frac{2}{3} (\delta_{\alpha\beta} P^m + p_{\alpha\beta}^m) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) \end{aligned} \right); \quad (3.34)$$

$$\varphi_i + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\varphi = -\tau_\varphi \left(\begin{aligned} & \varphi_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \varphi_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\ & + \frac{3}{2} R (\delta_{i\alpha} P^m + p_{i\alpha}^m) \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \\ & + R (\delta_{\alpha\beta} P^m + p_{\alpha\beta}^m) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\delta_{i\beta} T_t + \frac{P_{i\beta}^m}{R\rho} \right) \end{aligned} \right); \quad (3.35)$$

$$\omega_i + \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\omega = -\tau_\omega \left(\omega_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega (\delta_{i\alpha} P^m + p_{i\alpha}^m) \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} \right). \quad (3.36)$$

Члены левых частей уравнений, заключенные в скобки, представляют собой лагранжевы производные $\frac{d}{dt}$ соответствующих неравновесных величин.

Сами левые части уравнений с точностью до величин порядка τ^2 являются зна-

чениями неравновесной величины в точке траектории жидкой частицы, в которой частица окажется по истечении времени релаксации. Назовем эту точку смещенной точкой. Действительно, если θ – разность температур в точке траектории, соответствующей времени t , то по истечении времени $h\tau_p$ в смещенной точке разность температур примет значение

$$\theta|_{t+h\tau_p} = \theta + \frac{d\theta}{dt} h\tau_p + \frac{1}{2} \frac{d^2\theta}{dt^2} (h\tau_p)^2 + \dots \quad (3.37)$$

Левая часть (3.34) отличается от правой части (3.37) членами $\frac{1}{2} \frac{d^2\theta}{dt^2} (h\tau_p)^2 + \dots$,

имеющими порядок малости τ^3 и выше (θ имеет порядок τ). В рассматриваемом приближении такие члены являются внепорядковыми и должны быть опущены. Очевидно, положение смещенной точки для различных неравновесных величин будет различным, но в силу произвольности выбора начальной точки можно считать смещенную точку единой для всех неравновесных величин.

Перегруппируем слагаемые правых частей (3.33) – (3.37) в соответствии с их порядком малости. Опустим слагаемые, содержащие произведения двух неравновесных величин, как внепорядковые члены. При этом левые части уравнений будут определены с точностью до τ^2 .

$$\left(\theta + \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} \right) h\tau_p \right)^{[2]} = -\frac{2}{3} h\tau_p T \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \frac{h\tau_p}{R\rho} \left(p_{\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varphi_\alpha^{[1]} - \frac{3}{3} \frac{R}{c_\Omega} \omega_\alpha^{[1]} \right) \right) ; \quad (3.38)$$

$$\left(p_{ij}^m + \left(\frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial p_{ij}^m}{\partial x_\alpha} \right) \tau_p \right)^{[2]} = -\tau_p p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) - \tau_p \left(p_{ij}^{m[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + p_{j\alpha}^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + p_{i\alpha}^{[1]} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} p_{\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(2\varphi_{ij\alpha}^{[1]} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \varphi_\alpha^{[1]} \right) \right) ; \quad (3.39)$$

$$\left(\varphi_i + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\varphi \right)^{[2]} = -\frac{5}{2} R\tau_\varphi p \frac{\partial T}{\partial x_i} - \tau_\varphi \left(\varphi_i^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \varphi_\alpha^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{p_{i\alpha}^{[1]}}{\rho} \right) + \frac{5R}{2} p_{i\alpha}^{[1]} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \frac{15-9\gamma}{4} R p \frac{\partial\theta^{[1]}}{\partial x_i} \right) ; \quad (3.40)$$

$$\left(\omega_i + \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial\omega_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\omega \right)^{[2]} = -c_\Omega \tau_\omega p \frac{\partial T}{\partial x_i} - \tau_\omega \left(\omega_i^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega p_{i\alpha}^{[1]} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} - \frac{3}{2} (\gamma-1) c_\Omega p \frac{\partial\theta^{[1]}}{\partial x_i} \right) . \quad (3.41)$$

Здесь механическое давление и температуры T_i и T_Ω заменены термодинамическими величинами, в соответствии с (1.7) и (1.8). Это позволит выразить коэффициент вязкости через термодинамическую температуру, т.е. $\mu = \mu(T)$.

Помимо этого, на основании выводов предыдущего раздела уравнение сохранения энергии должно быть записано в термодинамических переменных. В противном случае разность температур θ , фигурирующая в релаксационных члена уравнений сохранения энергии (3.17) и (3.18), должна будет представлена третьим приближением.

Первые члены правых частей (3.38) – (3.41) имеют порядок τ и представляют собой первые приближения соответствующих неравновесных величин. Все слагаемые вторых членов имеют второй порядок малости, так как содержат неравновесные величины и домножаются на время релаксации.

Записывая разложения, аналогичные (3.37), нетрудно показать, что при переходе из рассматриваемой точки в смещенную точку значения вторых членов изменяются на величину третьего порядка малости. В принятом приближении такими изменениями можно пренебречь.

Если использовать уравнения (3.38) – (3.41) для описания неравновесных величин в смещенной точке, то в левых частях этих уравнений будут фигурировать только сами неравновесные величины. Вторые члены правых частей останутся без изменений, а первые члены будут соответствовать более ранней точке – той точке, которая до этого рассматривалась в качестве расчетной для данной неравновесной величины. Уравнения (3.38) – (3.41) примут следующий вид:

$$\theta^{[2]} = \bar{\theta} - \frac{2}{3} \frac{h\tau_p}{R\rho} \left(p_{\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varphi_\alpha^{[1]} - \frac{3}{3} \frac{R}{c_\Omega} \omega_\alpha^{[1]} \right) \right); \quad (3.42)$$

$$p_{ij}^{m[2]} = \bar{p}_{ij}^m - \tau_p \left(p_{ij}^{m[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + p_{* \alpha}^{[1]} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + -\delta_{ij} \frac{2}{3} p_{\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(2\varphi_{ij\alpha}^{[1]} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \varphi_\alpha^{[1]} \right) \right); \quad (3.43)$$

$$\varphi_i^{[2]} = \bar{\varphi}_i - \tau_\varphi \left(\varphi_i^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \varphi_\alpha^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \right. \\ \left. + R\rho \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{p_{i\alpha}^{[1]}}{R\rho} \right) + \frac{5}{2} \frac{p_{i\alpha}^{[1]}}{p} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \frac{15-9\gamma}{4} \frac{\partial \theta^{[1]}}{\partial x_i} \right) \right); \quad (3.44)$$

$$\omega_i^{[2]} = \bar{\omega}_i - \tau_\omega \left(\omega_i^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha^{[1]} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega p_{i\alpha}^{[1]} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} - \frac{3}{2} (\gamma-1) c_\Omega p \frac{\partial \theta^{[1]}}{\partial x_i} \right). \quad (3.45)$$

В этих уравнениях:

$$\bar{\theta}(t) = \theta^{[1]} \Big|_{t-h\tau_p}; \quad (3.46)$$

$$\bar{p}_{ij}^m(t) = p_{ij}^{m[1]} \Big|_{t-\tau_p}; \quad (3.47)$$

$$\bar{\varphi}_i(t) = \varphi_i^{[1]} \Big|_{t-\tau_\varphi}; \quad (3.48)$$

$$\bar{\omega}_i(t) = \omega_i^{[1]} \Big|_{t-\tau_\omega}. \quad (3.49)$$

При переносе уравнений (3.33) – (3.36) в смещенную точку, с точностью до τ^2 выполнялись соотношения:

$$\theta + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \right) h \tau_p = \theta \Big|_{t+h\tau_p}; \quad (3.50)$$

$$p_{ij}^m + \left(\frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial p_{ij}^m}{\partial x_\alpha} \right) \tau_p = p_{ij}^m \Big|_{t+\tau_p}; \quad (3.51)$$

$$\varphi_i + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\varphi = \varphi_i \Big|_{t+\tau_\varphi}; \quad (3.52)$$

$$\omega_i + \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\omega = \omega_i \Big|_{t+\tau_\omega}. \quad (3.53)$$

Те же преобразования могут быть применены и к величинам с обратной стрелкой (смещенным величинам). Если смещать точку с координатой $t - h\tau_p$ в точку с координатой t , то получим:

$$\bar{\theta} + \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} \right) h \tau_p = \theta^{[1]} = -\frac{2}{3} h \tau_p T \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (3.54)$$

Напомним, что величины с обратной стрелкой представляют собой первые приближения соответствующих неравновесных величин в более ранний момент времени.

Смещения из точек с координатами $t - \tau_p$, $t - \tau_\varphi$, $t - \tau_\omega$ приведут к выражениям:

$$\bar{p}_{ij}^m + \left(\frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial x_\alpha} \right) \tau_p = p_{ij}^{m[1]} = -\tau_p p \left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right); \quad (3.55)$$

$$\bar{\varphi}_i + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\varphi = \varphi_i^{[1]} = -\frac{5}{2} R \tau_\varphi p \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad (3.56)$$

$$\bar{\omega}_i + \left(\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_\alpha} \right) \tau_\omega = \omega_i^{[1]} = -c_\Omega \tau_\omega p \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.57)$$

Эти зависимости далее будут представлены в виде релаксационных уравнений.

После подстановки первых приближений неравновесных величин в уравнения (3.42) – (3.45) получаются зависимости, замыкающие систему уравнений сохранения. Уравнение энергии этой системы записано в термодинамических переменных, по указанным выше причинам. В этой связи и неравновесные величины целесообразно представлять в виде p_{ij} и q_i с использованием соотно-

шений (1.15) и (1.19). Смещенные величины, т.е. \bar{p}_{ij} , $\bar{\varphi}_i$, $\bar{\omega}_i$, не могут быть заменены термодинамическими переменными. Как отмечено в главе 1, термодинамические величины p_{ij} и q_i формируются в результате двух различных процессов энергообмена, поэтому время релаксации этих величин не может быть определено в рамках используемого метода построения системы моментных уравнений.

В результате получена замкнутая система уравнений, описывающая течение газовой среды во втором приближении (приближение Барнетта). Будем называть эту систему релаксационной моделью:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p_{i\alpha} + \delta_{i\alpha} p) &= 0; \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) \left(\delta_{\alpha\beta} T + \frac{p_{\alpha\beta}}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{h\tau_p} \left(\frac{2}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \bar{\theta} \right); \\
\frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{\tau_p} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \bar{p}_{ij}^m \right); \\
\frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{\tau_\varphi} \left(\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i} + \bar{\varphi}_i \right); \\
\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{\tau_\omega} \left(c_\omega \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} + \bar{\omega}_i \right).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

В этой системе:

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= \bar{p}_{ij}^m + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} R\rho\bar{\theta} + \\
&+ 3R \frac{\mu}{p} \left(\mu \frac{\partial^2 T_t}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{1}{3} c_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) \right) + \\
&+ \frac{\mu^2}{p} \left((1-c_\mu) \frac{\partial u_*}{\partial x_*} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_*} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \right. \\
&\left. - \delta_{ij} \left(c_\mu \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \left(\frac{2}{3} - c_\mu^2 \right) \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$q_i = \bar{\varphi}_i + \bar{\omega}_i + \mu \left(\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) - c_\lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \\ + R \frac{\mu^2}{p} \left(a_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \left(a_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + a_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \left(\frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + a_4 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_i} \right) T \right); \quad (3.60)$$

$$\mu = \tau_p p; \quad c_\lambda = 1 - \left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \right) h; \quad a_1 = \frac{63}{8} - c_\mu \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Pr}} + \frac{c_\omega^2}{c_\Omega R}; \quad a_2 = \frac{9}{4} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Pr}}; \\ a_3 = \frac{63}{8} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Pr}} + \frac{c_\omega^2}{c_\Omega R}; \quad a_4 = \frac{3}{2} - c_\lambda.$$

Система (3.58) содержит семнадцать скалярных уравнений. Первые пять уравнений (уравнения сохранения) представляют собой моментные уравнения. Остальные двенадцать уравнений получены формально. Они имеют вид релаксационных уравнений, в связи с чем будем называть их релаксационными уравнениями. Очевидно, что эти уравнения не описывают процесс релаксации какой-либо физической величины. Смещенные величины, относительно которых записаны уравнения, также введены чисто формально. По существу система (3.58) представляет собой две подсистемы уравнений.

Анализ свойств системы (3.58) представляется достаточно проблематичным, прежде всего в силу ее высокой нелинейности. Рассмотрим эту систему в простейшем случае одномерного течения одноатомного газа, не взаимодействующего с границами раздела сред. Такое течение рассматривается, например, в задаче о профиле плоской ударной волны.

Для сокращения записи представим систему в безразмерном виде, приняв в качестве единиц измерения следующие характерные значения величин:

плотность ρ_\bullet ; температура T_\bullet ; коэффициент вязкости μ_\bullet ; давление p_\bullet ; время $\tau_\bullet = \frac{\mu_\bullet}{p_\bullet}$; скорость $v_\bullet = \sqrt{RT_\bullet}$; геометрический размер $l_\bullet = v_\bullet \tau_\bullet = \sqrt{RT_\bullet} \frac{\mu_\bullet}{p_\bullet}$; тепловой поток $q_\bullet = p_\bullet \sqrt{RT_\bullet}$.

Будем считать, что течение направлено вдоль оси X . Обозначим: $u_x \equiv u$, $q_x = \varphi_x \equiv \varphi$. У неравновесных нормальных напряжений индексы будут сохранены (p_{xx} , \bar{p}_{xx}) по очевидным причинам.

Система (3.58) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx} - \bar{p}_{xx}); \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2}{3} T \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \left(p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \bar{\varphi}) \right); \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial t} + \frac{4}{3} p \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} = -\frac{\bar{p}_{xx}}{\tau_p};$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{5}{2} p \frac{\partial T}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{\bar{\varphi}}{\tau_\varphi}.$$

В этой системе:

$$p_{xx} - \bar{p}_{xx} = \frac{28}{9} \frac{\mu^2}{p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\mu}{p} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right); \quad (3.62)$$

$$\varphi - \bar{\varphi} = 23 \frac{\mu^2}{p} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + 2 \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (3.63)$$

Система (3.61) приведена к квазилинейному виду. Линеаризация в данном случае заключалась в том, что в левой части уравнения оставлены члены, содержащие первые производные искомых (системных) функций ρ , u , T , \bar{p}_{xx} , $\bar{\varphi}$ с коэффициентами, не содержащими таких производных. Остальные, нелинейные члены отнесены к правой части уравнений.

В матричной форме:

$$E \frac{\partial F}{\partial t} + B \frac{\partial F}{\partial x} = r; \quad E = \{\delta_{ij}\}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ T \\ \bar{p}_{xx} \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix}; \quad (3.64)$$

$$, B = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T}{\rho} & u & 1 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} T & u & 0 & \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{4}{3} p & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} p & 0 & u \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx} - \bar{p}_{xx}) \\ -\frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \left(p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \bar{\varphi}) \right) \\ -\frac{\bar{p}_{xx}}{\tau_p} \\ \frac{\bar{\varphi}}{\tau_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_u \\ b_T \\ b_{xx} \\ b_\varphi \end{pmatrix}.$$

Определив собственные числа матрицы коэффициентов B , приходим к выводу о том, что в рассматриваемом течении имеют место две тепловые скорости. В размерных величинах:

$$V_1 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{14}}{3}} RT; \quad (3.65)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{14}}{3}} RT. \quad (3.66)$$

Для сравнения отметим, что в 13-моментной модели Грэда также присутствуют две тепловые скорости, называемые «скоростями звука» [11]:

$$r_1 = \sqrt{\frac{13 + \sqrt{94}}{5}} RT ; \quad (3.67)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{13 - \sqrt{94}}{5}} RT . \quad (3.68)$$

Будем решать уравнения (3.64) методом характеристик. Запишем уравнение связности. Сразу оговоримся, что метод характеристик является малоэффективным методом даже для решения систем уравнений модели НСФ, нелинейность которых существенно ниже, чем у релаксационной модели. Здесь мы используем его только для анализа свойств системы (3.58).

Уравнения связности:

$$\begin{aligned} & \left\{ Td\rho + d\bar{p}_{xx} = R_0 \right\} \frac{dx}{dt} = u ; \\ & \left\{ TW_1 d\rho + \rho V_1 W_1 du + \rho V_1^2 dT + W_1 d\bar{p}_{xx} + \frac{2}{3} V_1 d\bar{\varphi} = R_1 \right\} \frac{dx}{dt} = u + V_1 ; \\ & \left\{ TW_2 d\rho + \rho V_2 W_2 du + \rho V_2^2 dT + W_2 d\bar{p}_{xx} + \frac{2}{3} V_2 d\bar{\varphi} = R_2 \right\} \frac{dx}{dt} = u + V_2 ; \\ & \left\{ TW_1 d\rho - \rho V_1 W_1 du + \rho V_1^2 dT + W_1 d\bar{p}_{xx} - \frac{2}{3} V_1 d\bar{\varphi} = R_3 \right\} \frac{dx}{dt} = u - V_1 ; \\ & \left\{ TW_2 d\rho - \rho V_2 W_2 du + \rho V_2^2 dT + W_2 d\bar{p}_{xx} - \frac{2}{3} V_2 d\bar{\varphi} = R_4 \right\} \frac{dx}{dt} = u - V_2 . \end{aligned} \quad (3.69)$$

В этой системе:

$$\begin{aligned} W_1 &= V_1^2 - \frac{5}{3} T ; & R_1 &= \left(\rho V_1 W_1 b_u + \rho V_1^2 b_T + W_1 b_{xx} + \frac{2}{3} V_1 b_\varphi \right) dt ; \\ W_2 &= V_2^2 - \frac{5}{3} T ; & R_2 &= \left(\rho V_2 W_2 b_u + \rho V_2^2 b_T + W_2 b_{xx} + \frac{2}{3} V_2 b_\varphi \right) dt ; \\ R_0 &= b_{xx} dt ; & R_3 &= \left(-\rho V_1 W_1 b_u + \rho V_1^2 b_T + W_1 b_{xx} - \frac{2}{3} V_1 b_\varphi \right) dt ; \\ & & R_4 &= \left(-\rho V_2 W_2 b_u + \rho V_2^2 b_T + W_2 b_{xx} - \frac{2}{3} V_2 b_\varphi \right) dt . \end{aligned}$$

За фигурными скобками указаны характеристики, на которых следует решать эти уравнения.

Очевидно, значения величин, обозначенных одним символом, в общем случае имеют разные значения на различных характеристиках. В области невозмущенного потока (равновесной области) значения этих величин совпадут на всех характеристиках, в силу однородности течения.

Нетрудно показать, что детерминант матрицы коэффициентов левой части системы (3.69) в области невозмущенного потока обращается в ноль. Ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов левой части. Таким образом, в области невозмущенного потока нарушается условие единственности решения системы (3.69). Это относится и к системе (3.58), линеаризованной указанным выше методом.

Не вдаваясь в дальнейший анализ системы (3.58), отметим, что рассмотрение ее как единой системы неправомерно. Релаксационные уравнения системы записаны для первых приближений неравновесных величин, смещенных вдоль характеристики $\frac{dx}{dt} = u$. Распространение их на остальные характеристики полной системы противоречит методу получения этих уравнений.

Как отмечалось выше, система (3.58) должна рассматриваться как совокупность подсистемы уравнений сохранения и подсистемы релаксационных уравнений. Последняя должна решаться только на траектории. Характеристики системы уравнений сохранения не имеют принципиальных отличий от характеристик аналогичных систем других моделей, например модели НСФ.

Подсистема уравнений сохранения релаксационной модели характеризуется единственной тепловой скоростью, конкретное значение которой зависит от способа приведения подсистемы к квазилинейному виду. Если квазилинейный вид подсистемы получен описанным выше способом, то тепловая скорость совпадает с адиабатической скоростью звука $V = a = \sqrt{\gamma RT}$.

Проведенный анализ полной системы уравнений (3.58) позволяет объяснить некоторые особенности решения этой системы в виде двух подсистем. Ниже представлены результаты расчета профиля плоской ударной волны с использованием релаксационной модели.

Использовались два принципиально различных метода численного решения: метод прогонки с нестационарным членом и метод характеристик. Оба метода дали близкие результаты.

Ввиду высокой нелинейности уравнений релаксационной модели реализация обоих методов проводилась следующим образом. Решаемая система уравнений записывалась в виде суммы систем модели первого приближения и релаксационной модели с весовым коэффициентом $\alpha = 0 \dots 1$. Члены уравнений, не совпадающие в рассматриваемых моделях, домножались на коэффициент α для релаксационной модели и на $1 - \alpha$ для модели первого приближения. Уравнения сохранения импульса и энергии (3.61) приняли следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha (p_{xx} - \bar{p}_{xx}) + (1 - \alpha) p_{xx}^{[1]} \right); \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2}{3} T \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \left(\alpha \left(p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \bar{\varphi}) \right) + (1 - \alpha) \left(p_{xx}^{[1]} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^{[1]}}{\partial x} \right) \right). \quad (3.71)$$

Здесь $p_{xx}^{[1]}$ и $\varphi^{[1]}$ – величины первого приближения (3.8), (3.11).

На начальном этапе решения принималось $\alpha = 0$. Установившееся решение модели первого приближения использовалось в качестве начального приближения для релаксационной модели. На следующем этапе значения весового коэффициента постепенно увеличивалось до единицы, что соответствовало решению релаксационной модели. Величина шага изменения α составляла $10^{-6} - 10^{-5}$ на один шаг по времени. Число Куранта находилось в пределах $(1 \div 5) \cdot 10^{-2}$.

На рис. 3.6 представлен профиль ударной волны в одноатомном газе. Число Маха $M = 2.23$, $\mu = \mu(T^1)$. При этом числе Маха в области невозмущенного потока возникает слабая волнообразность кривой профиля скорости. Аналогичная волнообразность имеет место на профилях плотности и температуры, но при данном числе Маха этот эффект не заметен, даже при сильном «растяжении» графика по вертикальной оси. В нижней по потоку невозмущенной области волнообразность кривых не наблюдается.

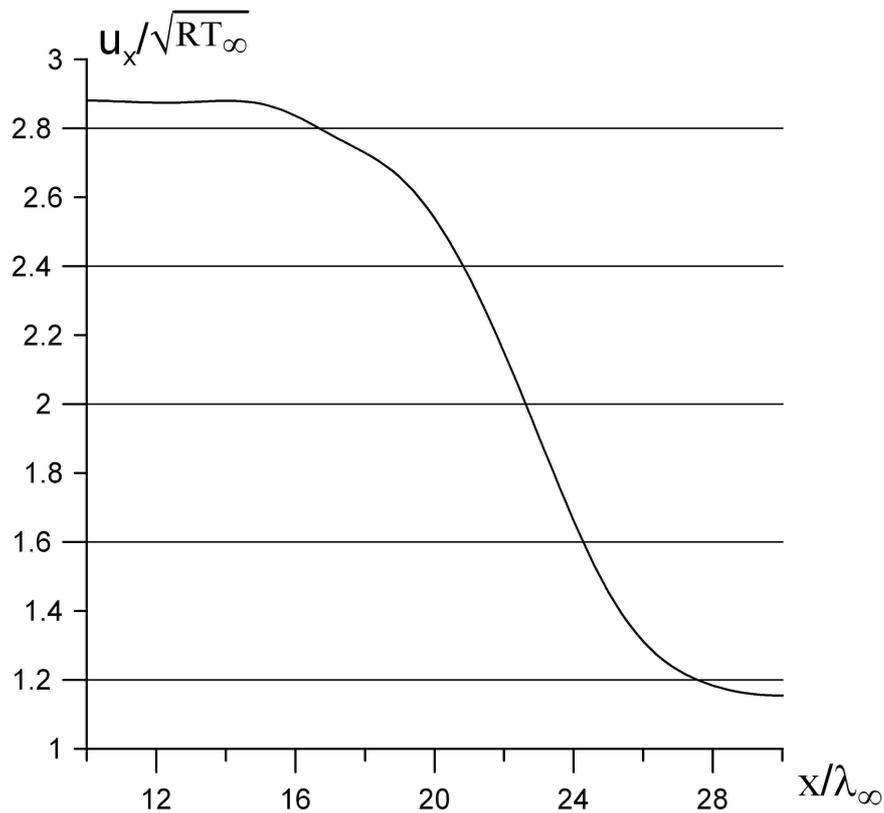


Рис. 3.6. Профиль скорости в плоской ударной волне одноатомного газа. Релаксационная модель, $M_\infty = 2.23$, $s = 1$

По мере увеличения числа Маха волнообразность профилей в невозмущенной области постепенно прогрессирует. На рис. 3.7 представлены профили плотности, скорости и температуры при $M_\infty = 5$. Значения ρ , u_x , T преобразованы к единичному отрезку:

$$\rho^* = \frac{\rho - \rho_{\min}}{\rho_{\max} - \rho_{\min}}. \quad (3.72)$$

Скорость и температура определены аналогично.

Показательно, что в сильнонеравновесной области течения, которая, собственно, и представляет профиль ударной волны, решение является гладким. Субскачок на профилях отсутствует.

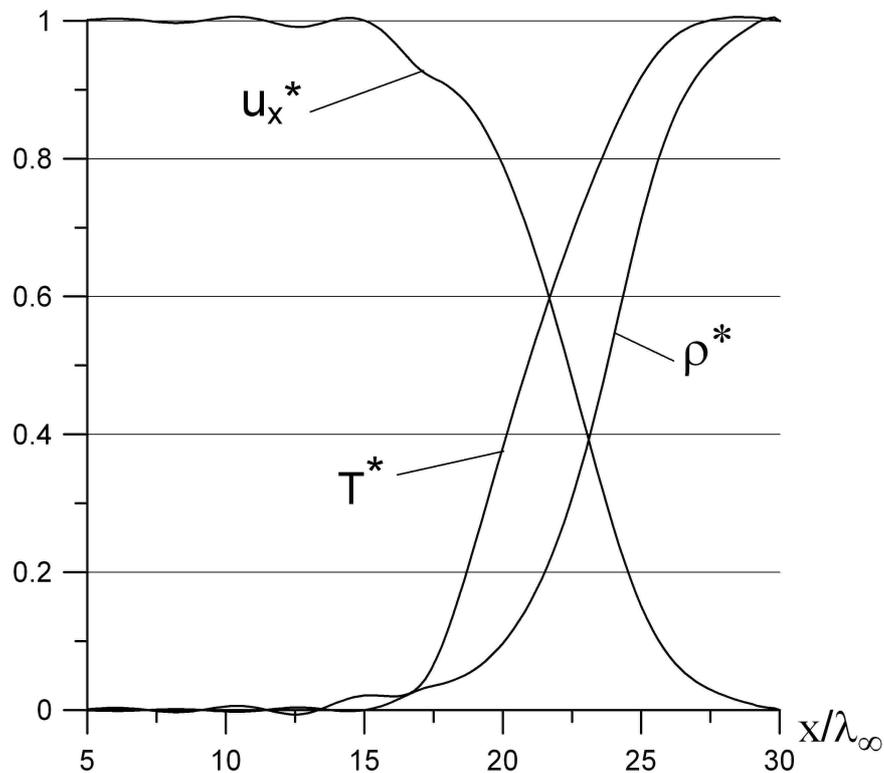


Рис. 3.7. Профили плотности, скорости и температуры в плоской ударной волне одноатомного газа. Релаксационная модель, $M_\infty = 5$, $s = 1$

При решении данной задачи система (3.47), как указывалось выше, рассматривалась в виде двух подсистем. Условие единственности решения в равновесной области не было нарушено. Можно предположить, что неустойчивость решения в этой области связана с нарушением условий единственности полной системы уравнений. Строгий анализ этой проблемы представляет собой весьма сложную задачу. В рамках настоящей работы он не проводился.

Остается надеяться, что применение специальных вычислительных методов, сглаживающих решения, позволит повысить устойчивость решения в равновесной области.

Глава 4

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

4.1. Общие положения

Задачи газодинамики непосредственно связаны с постановкой граничных условий на обтекаемых, как правило твердых, поверхностях. Если состояние газовой среды не слишком далеко от равновесного, в качестве граничных условий вполне пригодны условия прилипания, предполагающие на границе газ–стенка нулевое значение скорости и равенство температуры газа и стенки.

В условиях сильнонеравновесных течений, к которым относятся гиперзвуковые и разреженные течения, такие граничные условия не приемлемы, ввиду возникновения скольжения скорости (или просто – скольжения) и скачка температуры в граничных точках течения. Скольжение может достигать значений, близких к скорости течения невозмущенного потока (внешние течения) или скорости ядра потока (внутренние течения). Скачок температуры может приближаться по порядку величины к характерным значениям температуры.

По-видимому, первые работы по формированию граничных условий на твердой поверхности принадлежат Дж.К. Максвеллу. В этих работах процесс взаимодействия молекул газа с поверхностью твердого тела рассматривался в качестве чисто модельной задачи, а именно поверхность принималась абсолютно гладкой, адсорбированные слои отсутствовали. Рассматривался зеркально-диффузный закон рассеивания отраженных молекул. В качестве весового коэффициента между зеркальной и диффузными составляющими вводился коэффициент аккомодации тангенциального импульса. По аналогии с ним был введен коэффициент аккомодации энергии.

Такая модель содержала в себе противоречие, устраняемое только в случае полного диффузного отражения [9]. Большое количество работ было направлено на усовершенствование модели Максвелла, например [54, 55, 56]. Рассматривались как одноатомные, так и многоатомные газы, а также газовые смеси [57– 64]. Указанные работы, составляющие лишь малую часть исследований в данном направлении, в той или иной мере были направлены на построение функции распределения отраженных молекул. Скольжение скорости (Δu) и скачок температуры (ΔT) во многих случаях удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными даже в области относительно высоких энергий взаимодействующих с поверхностью молекул. При этом рассматриваются почти свободные от адсорбированных слоев и достаточно гладкие поверхности (скол кристалла в условиях высокого вакуума).

Вместе с тем известно [56], что при энергиях взаимодействия, ненамного превышающих энергию теплового движения молекул, закон отражения является почти диффузным, с коэффициентом аккомодации энергии, близким к единице. На реальных поверхностях, имеющих высокую степень шероховатости и развитые адсорбированные слои, оба коэффициента аккомодации не намного

отличаются от единицы. Особенности взаимодействия молекул с реальными поверхностями подробно изложены, например, в работе [9].

Иной подход к формулировке граничных условий на твердой поверхности был использован в работе [65] и в дальнейшем развит в работе [9]. Целью являлось «установление таких *фиктивных макроскопических* граничных условий для уравнений Навье–Стокса на твердой стенке, при выполнении которых решение уравнений Навье–Стокса вне кнудсеновского слоя совпадало бы (с точностью навье-стоксовского приближения) с решением уравнения Больцмана с заданными *истинными кинетическими* условиями на стенке» (цитирована работа [9, с. 317]).

Принципиальным отличием этого подхода является то, что моделируется функция распределения только падающих молекул. Ее представляют в виде разложения равновесной функции распределения по малому параметру. Функция распределения отраженных молекул принимается равновесной с параметрами поверхности.

В результате были получены выражения для скольжения скорости и скачка температуры в неравновесных течениях. В газодинамических задачах эти граничные условия используются наиболее часто. Однако «навье-стоксовское приближение» накладывает ограничения по числу Кнудсена.

Ниже, на примере расчета плоского течения Куэтта, будет показано, что указанные зависимости дают приемлемую с практической точки зрения точность при $Kn < 10^{-1}$. При некоторой корректировке числовых коэффициентов Δu и ΔT интервал применимости может быть расширен до $Kn \leq 1$.

Автором настоящей монографии была предпринята попытка конструирования функции распределения из равновесных функций, которые в каждом октанте пространства молекулярных скоростей определялись индивидуальным набором макропараметров [27]. На границе твердой поверхности функция распределения отраженных молекул принималась равновесной и единой для всех четырех октантов (верхняя полусфера). Формулировка граничных условий для данной модели аналогична их формулировке для кинетических моделей. Тестирование этой модели показали, что она проигрывает модели НСФ с граничными условиями [9] по экономичности, а в некоторых случаях и по точности.

В работе [28] для падающих молекул использовалась равновесная функция распределения (по аналогии с двухпоточной функцией Мотт-Смита). Параметры функции (концентрация, касательные составляющие групповой скорости и температура) определяются по потокам массы, импульса и энергии в граничной точке. Скольжение и скачок температуры, получаемые как моменты совокупности функций распределения отраженных и падающих на поверхность молекул, хорошо согласуются с истинными значениями этих параметров в области больших чисел Кнудсена. При $Kn \sim 1$ точность расчетов снижается, что приводит к существенному искажению всего поля течения.

Такое поведение решения обусловлено видом моделирующей функции распределения. Если невозмущенный поток газа движется параллельно поверхности, а закон отражения молекул от поверхности принят диффузным, то при

$\text{Kn} \rightarrow \infty$ функция распределения в граничной точке имеет вид, представленный на рис. 4.1.

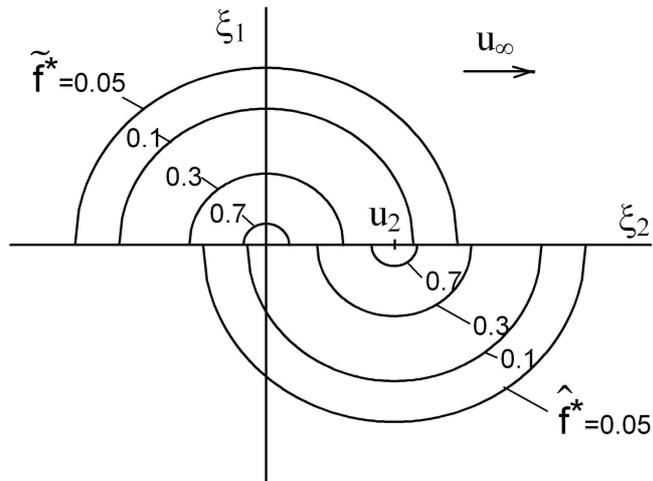


Рис. 4.1. Линии уровня функций распределения падающих и отраженных молекул в граничной точке. $\text{Kn} \gg 1$. Схематическое изображение

Здесь показаны линии уровня функций распределения отраженных (тильда) и падающих (крышка) молекул в пространстве молекулярных скоростей. Система координат $0\xi_1\xi_2$ связана с поверхностью. Направление оси $0\xi_1$ совпадает с направлением внешней нормали поверхности. Функции отнесены к своим максимальным значениям:

$$\tilde{f}^\bullet = \tilde{f} / \frac{\tilde{n}}{(2\pi R \tilde{T}_t)^{3/2}}; \quad (4.1)$$

$$\hat{f}^\bullet = \hat{f} / \frac{\hat{n}}{(2\pi R \hat{T}_t)^{3/2}}, \quad (4.2)$$

где \tilde{n} , \tilde{T}_t – концентрация и поступательная температура отраженных молекул; \hat{n} , \hat{T}_t – концентрация и поступательная температура падающих молекул ($\hat{n} = n_\infty$, $\hat{T}_t = T_{t\infty}$).

Суммарная функция распределения состоит из двух полусфер, смещенных по оси $0\xi_2$ на величину групповой скорости u_2 . Такой вид имеет моделирующая функция в работе [28], что и объясняет хорошее соответствие рассчитанных величин их истинным значениям при $\text{Kn} \gg 1$.

На рис. 4.2 схематически изображены линии уровня функции распределения в граничной точке при $\text{Kn} < 1$.

Функция распределения падающих молекул имеет форму, близкую к эллипсоидальной, точнее к скошенно-эллипсоидальной. На рис. 4.2, назначение которого чисто иллюстративное, линии уровня функции \hat{f}^\bullet изображены в виде эллипсов. Изображения реальных (расчетных) линий уровня при различных числах Кнудсена можно найти в учебном пособии [66].

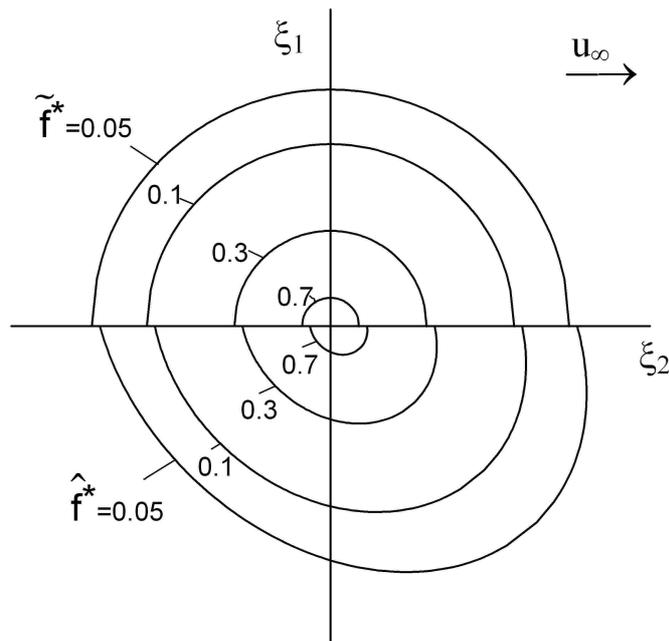


Рис. 4.2. Линии уровня функций распределения падающих и отраженных молекул в граничной точке. $Kn < 1$. Схематическое изображение

Такой вид деформации функции распределения не был предусмотрен моделью, представленной в работе [28]. Надежды на удовлетворительную аппроксимацию интегральных характеристик ($\Delta u, \Delta T$) сферически симметричной функцией с соответствующим набором параметров не оправдались. Вместе с тем функции, сконструированные аналогичным образом, дают вполне удовлетворительные результаты при расчете макропараметров на профиле ударной волны [67].

Кинетическое решение задачи о течении Куэтта [66] позволяет проследить изменения вида функции распределения падающих молекул в зависимости от числа Кнудсена. При $Kn \sim 10^{-2}$ и менее функция имеет скошенно-эллипсоидальный вид. По мере возрастания числа Кнудсена вид функции меняется таким образом, что для быстрых молекул, т.е. молекул, имеющих большие значения нормальной составляющей молекулярной скорости ξ_1 , функция постепенно приобретает сферическую симметрию. Распределение медленных молекул остается скошенно-эллипсоидальным. Дальнейшее увеличение числа Кнудсена приводит к тому, что сферически симметричная функция распространяется на распределение более медленных молекул. При $Kn \sim 10^2$ и более распределение практически всех падающих на поверхность молекул описывается сферически симметричной функцией вследствие того, что на второй (верхней) поверхности был задан диффузный закон отражения молекул.

Надо отметить, что использование равновесной функции распределения для описания распределения отраженных молекул или для описания распределения в невозмущенном потоке, обтекающем поверхность, достаточно харак-

терно для кинетических задач и в значительной степени соответствует рассматриваемым физическим процессам.

В настоящей главе ставится задача построения модели граничных условий с функцией распределения, изменяющей свой вид в соответствии с изложенными выше закономерностями.

4.2. Функция распределения в граничной точке

В геометрическом пространстве будем использовать декартову прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$, связанную с обтекаемой поверхностью. Ось Ox_1 примем в качестве внешней нормали поверхности. В пространстве молекулярных скоростей используем декартову прямоугольную систему координат $Oc_1c_2c_3$, связанную с центром масс жидкой частицы, находящейся в граничной точке. Обе системы сонаправлены.

Будем рассматривать только поступательное движение молекул. При известном соотношении температур T, T_t, T_Ω ((1.4), (1.7), (1.8)) и тепловых потоков q, φ, ω (1.19), вообще говоря, безразлично, для какой из температур выставлять граничные условия. Поступательная температура более удобна, так как именно она определяет молекулярное движение, а следовательно, и поток массы, напряжения и другие механические параметры газа.

Примем диффузный закон отражения молекул от поверхности с полной аккомодацией энергии. Введем следующие обозначения параметров в граничной точке:

n, ρ – концентрация молекул и плотность газа в граничной точке;

\mathbf{u} – вектор групповой скорости, имеющий проекции $u_1 = 0, u_2, u_3$;

T_t, T_w – поступательная температура газа и температура поверхности (в силу принятых допущений, поступательная и термодинамическая температуры адсорбированных молекул совпадают и соответствуют температуре поверхности);

p_{12}, p_{13} – касательные напряжения ($p_{12} \equiv p_{12}^m, p_{13} \equiv p_{13}^m$);

φ_1 – нормальная составляющая вектора теплового потока поступательных степеней свободы.

Как и в разделе 4.1, будем использовать надстрочные символы “тильда” и “крышка” для обозначения величин, относящихся к отраженным и падающим молекулам соответственно. Например, концентрации отраженных и падающих молекул \tilde{n}, \hat{n} . Эти концентрации определены в соответствующих полупространствах пространства молекулярных скоростей.

В соответствии с принятым законом взаимодействия молекул с поверхностью функция распределения отраженных от поверхности молекул представляет собой максвелловскую функцию:

$$\tilde{f} = \frac{2\tilde{n}}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tilde{c}^2}{2RT_w}\right). \quad (4.3)$$

Здесь $\tilde{c}_i = c_i + u_i$. Из условий непротекания следует: $u_1 = 0$.

Распределение падающих на поверхность молекул сформируем из следующих физических соображений. Падающие на поверхность молекулы условно разобьем на группы медленных и быстрых молекул. Медленными молекулами будем называть молекулы, имеющие малые по модулю скорости c_1 . Составляющие скорости c_2 и c_3 не ограничены. Все остальные молекулы будем называть быстрыми.

Медленные молекулы испытывают последнее столкновение вблизи поверхности. Целесообразно принять составляющие температуры T_{22} и T_{33} этих молекул равными температуре газа T_t в граничной точке, а их групповую скорость равной скорости газа \mathbf{u} в той же точке. Составляющую температуры T_{11} обозначим \hat{T}_* . Эта температура существенно меньше T_t , так как группа медленных молекул состоит в основном из молекул, движущихся почти параллельно поверхности. Концентрацию медленных молекул обозначим \hat{n}_0 . Функция распределения примет вид

$$\hat{f}_0 = \frac{2\hat{n}_0}{(2\pi R)^{3/2} T_t \sqrt{\hat{T}_*}} \exp\left(-\frac{c_1^2}{2R\hat{T}_*} - \frac{c_2^2 + c_3^2}{2RT_t}\right). \quad (4.4)$$

Быстрые молекулы испытывают последнее столкновение во внешней области течения. Распределение этих молекул зададим в виде суммы двух функций. Первая содержит как быстрые, так и медленные молекулы:

$$\hat{f} = \frac{2\hat{n}}{(2\pi R\hat{T})^{3/2}} \exp\left(-\frac{\hat{c}^2}{2R\hat{T}}\right), \quad \hat{c}_i = c_i - \hat{u}_i, \quad \hat{u}_1 = 0. \quad (4.5)$$

Отметим, что параметры этой функции \hat{u}_i и \hat{T} в общем случае не равны групповой скорости и поступательной температуре газа в граничной точке.

Вторая функция “вырезает” (знак “минус”) из первой медленные молекулы:

$$\hat{f}_- = -\frac{2\hat{n}_0}{(2\pi R)^{3/2} \hat{T} \sqrt{\hat{T}_*}} \exp\left(-\frac{\hat{c}_1^2}{2R\hat{T}_*} - \frac{\hat{c}_2^2 + \hat{c}_3^2}{2R\hat{T}}\right). \quad (4.6)$$

Такая комбинация функций позволяет существенно упростить интегрирование результирующей функции распределения при определении ее моментов.

Для того чтобы все молекулы, имеющие скорость $c_1 = \hat{c}_1 = 0$, были исключены из распределения \hat{f} , необходимо выполнение следующего очевидного условия:

$$\hat{f}_-(c_1 = 0) = -\hat{f}(c_1 = 0), \quad (4.7)$$

откуда следует:

$$\frac{\hat{n}_0}{\hat{n}} = \sqrt{\frac{\hat{T}_*}{\hat{T}}} = \sigma. \quad (4.8)$$

Параметр σ , значение которого находится в пределах $0 \leq \sigma < 1$, будем считать свободным параметром модели. Введение этого параметра позволяет формально исключить из рассмотрения \hat{n}_0 и \hat{T}_* на основании соотношений

$$\hat{n}_0 = \sigma \hat{n}, \quad \hat{T}_* = \sigma^2 \hat{T}. \quad (4.9)$$

Таким образом, функция распределения f в граничной точке представлена следующим образом:

$$f = \begin{cases} \tilde{f} & \text{при } c_1 > 0; \\ \hat{f} + \hat{f}_- + \hat{f}_0 & \text{при } c_1 \leq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

На рис. 4.3 моделирующие функции представлены схематически своими линиями уровня в пространстве тепловых скоростей.

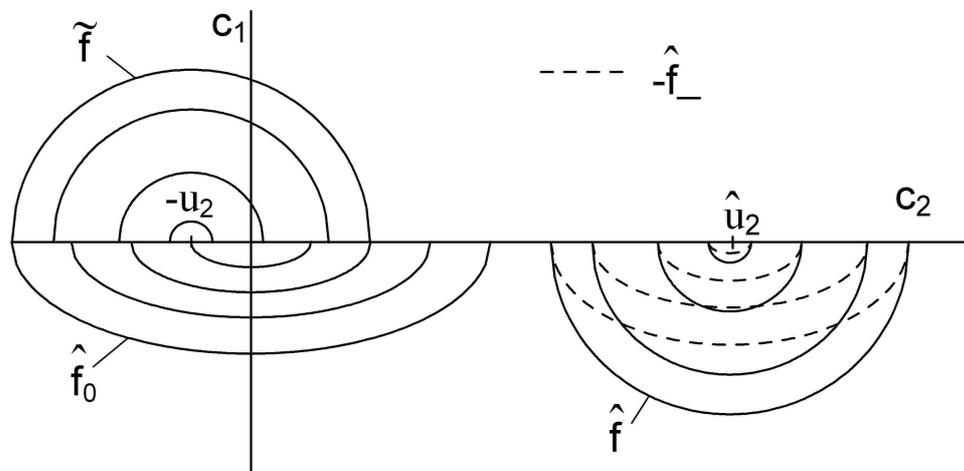


Рис. 4.3. Схема расположения моделирующих функций распределения в пространстве тепловых скоростей

4.3. Скольжение и скачок температуры

Функция распределения в граничной точке содержит восемь неизвестных величин: \tilde{n} , \hat{n} , u_2 , u_3 , \hat{u}_2 , \hat{u}_3 , T_f , \hat{T} (σ – свободный параметр). Для их определения запишем пять скалярных уравнений сохранения и уравнения для p_{12} , p_{13} , φ_1 . Анализ известных моделей граничных условий позволяет сделать вывод о том, что три последние величины являются определяющими параметрами скольжения и скачка температуры, с чем и связан их выбор. Предполагается, что эти величины, а также концентрация газа в граничной точке n определяются системой уравнений, для которой разрабатываемая модель является граничными условиями.

Указанные восемь уравнений могут быть получены интегрированием функции распределения f , домноженной на соответствующие молекулярные скорости:

$$\int_0^{\infty} \int \int \begin{vmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_1 c_2 \\ c_1 c_3 \\ c_1 c^2 \end{vmatrix} \tilde{f} dc_1 dc_2 dc_3 + \int_{-\infty}^0 \int \int \begin{vmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_1 c_2 \\ c_1 c_3 \\ c_1 c^2 \end{vmatrix} (\hat{f} + \hat{f}_- + \hat{f}_0) dc_1 dc_2 dc_3 = \begin{vmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2nRT_t \\ p_{12}/m_0 \\ p_{13}/m_0 \\ 2\varphi_1/m_0 \end{vmatrix}. \quad (4.11)$$

В результате получаем систему восьми уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{n} + \hat{n} &= n; \\ \tilde{n}\sqrt{T_w} &= \hat{n}\sqrt{\hat{T}}; \\ \tilde{n}u_i &= (1-\sigma)\hat{n}\hat{u}_i, \quad i = 2, 3; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$3\tilde{n}T_w + \tilde{n}\frac{u^2}{R} + (3-2\sigma)\hat{n}\hat{T} + (1-\sigma)\hat{n}\frac{\hat{u}^2}{R} = 3nT_t - 2\sigma\hat{n}T_t;$$

$$\tilde{n}u_i\sqrt{T_w} + (1-\sigma^2)\hat{n}\hat{u}_i\sqrt{\hat{T}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2R}} \frac{p_{1i}}{m_0}, \quad i = 2, 3;$$

$$2\tilde{n}T_w^{3/2} + \tilde{n}\frac{u^2}{2R}\sqrt{T_w} - \sigma^2\hat{n}T\sqrt{\hat{T}} - (2-\sigma^2)\hat{n}\hat{T}^{3/2} - (1-\sigma^2)\hat{n}\frac{\hat{u}^2}{2R}\sqrt{\hat{T}} = \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \frac{\varphi_1}{m_0R}.$$

Решение этой системы позволяет связать скольжение и скачок температуры с температурой поверхности и параметрами газа в граничной точке:

$$u'_i = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\vartheta}{\vartheta+(1+\sigma)\vartheta^2} p'_{1i}, \quad i = 2, 3; \quad (4.13)$$

$$\Delta T' = \frac{(3-2\sigma)(\vartheta^2-1) + \vartheta(1+\frac{\vartheta}{1-\sigma})u'^2}{3\vartheta+3-2\sigma}. \quad (4.14)$$

Здесь:

$$u'_i = \frac{u_i}{\sqrt{RT_w}}; \quad \Delta T' = \frac{T_t - T_w}{T_w}; \quad p'_{1i} = \frac{p_{1i}}{\rho RT_w}, \quad i = 2, 3;$$

$$\varphi'_1 = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\frac{2RT_w}{\pi}} \rho RT_w}; \quad \vartheta = \sqrt{\frac{\hat{T}}{T_w}} = 2A \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{B}{2A^3}\right)\right);$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{2-\sigma^2+0.5u'^2-\sigma^2\Delta T'-\varphi'_1}{2-\sigma^2+0.5\frac{1+\sigma}{1-\sigma}u'^2}}; \quad B = \frac{\varphi'_1}{2-\sigma^2+0.5\frac{1+\sigma}{1-\sigma}u'^2}.$$

Указанное выше выражение ϑ является единственным из трех вещественных корней уравнения

$$\vartheta^3 - 3A^2\vartheta + B = 0, \quad (4.15)$$

имеющим физический смысл. Уравнение (4.15) будет использовано ниже для оценки величины параметра σ .

Уравнения (4.13) – (4.15) записаны в удобном для итерационного решения виде. Само решение не представляет особой сложности, по крайней мере для не слишком неравновесных течений, так как итерированные переменные u'_i , $\Delta T'$ и ϑ слабо влияют друг на друга. Кроме этого, значение ϑ близко к единице в широком интервале значений параметров течения.

Единственной неопределенной величиной остается свободный параметр модели σ . Исходя из физических соображений, можно утверждать, что в течениях, близких к свободномолекулярным, значение этого параметра должно быть близко к нулю. Действительно, в условия редких межмолекулярных столкновений даже медленные в указанном выше смысле молекулы попадают в граничную точку из области внешнего течения.

Другими словами, практически все падающие на поверхность молекулы должны быть описаны функцией распределения \hat{f} , т.е. $\hat{n}_0 \rightarrow 0$ и, следовательно, $\sigma \rightarrow 0$. В этом случае функция (4.10) вырождается в двухпоточную функцию, аналогичную изображенной на рис. 4.1.

В гидродинамическом приближении параметр σ должен принимать некоторое конечное значение. Обозначим это значение σ_0 . Линии уровня функции (4.10) принимают скошенно-эллипсоидальную форму, конкретный вид которой зависит от значения параметра σ_0 . В первом приближении свободный параметр σ представим в следующем виде:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \beta \text{Kn}^*}; \quad \text{Kn}^* = \frac{\lambda}{L^*}. \quad (4.16)$$

Здесь λ – средняя длина свободного пробега в граничной точке, L^* – характерный размер возмущенной области течения, вычисленный по нормали к поверхности в данной точке, β – свободный параметр модели.

При расчете внешних течений в качестве характерного размера может рассматриваться толщина пограничного слоя в его общем понимании. Для внутренних течений характерный размер целесообразно принимать равным меньшему из двух значений, одно из которых – толщина погранслоя, второе – поперечный размер канала.

4.4. Вспомогательная модель граничных условий

Оценка параметра σ_0 может быть проведена по модели граничных условий с эллипсоидальной функцией распределения падающих молекул. Модель [9] дает завышенные значения скольжения, спрямляя профиль скоростей в кнудсеновском слое. Модель [11], использующая 13-моментную функцию распределения для падающих на поверхность молекул, принимает коэффициенты

разложения этой функции равными соответствующим коэффициентам, полученным для внешнего течения.

Такой автоматический перенос функции распределения из внешнего течения в граничную точку не корректен по следующей причине. По мере прохождения кнудсеновского слоя молекулы, распределение которых сформировалось во внешнем слое, взаимодействуют с отраженными от поверхности молекулами. Распределение последних принципиально отличается от распределения молекул во внешнем слое, так как формируется под воздействием процессов иной физической природы.

Таким образом, коэффициенты разложения 13-моментной функции падающих молекул в граничной точке должны быть определены с учетом распределения отраженных молекул.

Будем считать, что отраженные от поверхности молекулы описываются распределением (4.3). Для падающих молекул примем 13-моментную функцию распределения:

$$\hat{f} = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right) \left(1 + \sum_{i=1}^3 (A_{ii}c_i^2 + (c^2 - 5RT_t)B_i c_i) + \sum_{i=2}^3 A_{ii}c_1 c_i\right). \quad (4.17)$$

В отличие от классической 13-моментной функции распределения, \hat{f} не содержит члена $A_{23}c_2 c_3$, так как последний не участвует в определении скольжения и скачка температуры. Функции \tilde{f} и \hat{f} в совокупности содержат 12 неизвестных величин. Для их определения запишем уравнения двенадцати моментов, считая напряжения и тепловые потоки в граничной точке известными:

$$\int_0^\infty \int \int \begin{vmatrix} 1 \\ c_i \\ c_i^2 \\ c_1 c_j \\ c_i c^2 \end{vmatrix} \tilde{f} dc_1 dc_2 dc_3 + \int_{-\infty}^0 \int \int \begin{vmatrix} 1 \\ c_i \\ c_i^2 \\ c_1 c_j \\ c_i c^2 \end{vmatrix} \hat{f} dc_1 dc_2 dc_3 = \begin{vmatrix} n \\ 0 \\ P_{ii}/m_0 \\ P_{1j}/m_0 \\ 2\varphi_i/m_0 \end{vmatrix}; i=1, 2, 3; j=2, 3. \quad (4.18)$$

Здесь $P_{ii} = \rho RT_t + p_{ii}^m$.

В результате решения системы уравнений (4.18) получаем зависимости для определения скорости и температуры в граничной точке. Безразмерные скорости, касательные напряжения и тепловые потоки введены аналогично

(4.14). Нормальные напряжения $p'_{11} = \frac{p_{11}^m}{\rho RT_w}$. Безразмерная температура:

$$T' = T_t/T_w;$$

$$a_2 u_2'^3 + \frac{b_2 b_4}{b_3} u_2'^2 + b_3 u_2' + \frac{b_4}{b_3} (b_1 + b_2 u_3'^2) = 0; \quad (4.19)$$

$$a_1 = \frac{9}{25\pi - 42}; \quad a_2 = \frac{1}{5\pi - 6};$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= -5T' + 20a_1T'^{-1/2} + 24a_1 + 3; & b_2 &= 5a_1T'^{-1/2} + 3a_1 + 1; \\
b_3 &= (44a_1 - 2)T' + 20a_1\phi_1'T'^{-1/2} + 30a_1p'_{11}; & b_4 &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} a_2(5\pi p_{12}\sqrt{T'} + 2\phi_2'); \\
b_5 &= T' + \frac{2}{\pi}(6a_2 + 1)\sqrt{T'} + a_2(5 + u_3'^2).
\end{aligned}$$

Выражение для скорости u_3' может быть получено из (4.19) взаимной заменой индексов 2 и 3 скоростей, напряжений и тепловых потоков. Индексы комплексов a и b не являются индексами осей координат и замене не подлежат.

Уравнение для температуры в граничной точке запишем в удобном для дальнейших преобразований виде:

$$\begin{aligned}
&(h_1h_2T'^2 + (25\pi h_1p'_{11} - r_1)T' + r_2p'_{11} + 36h_1\phi_1')^2 T' - \\
&\quad - (2h_1h_3T'^2 + (r_3 - 54h_1p'_{11} - 28h_1\phi_1')T' + r_5p'_{11} + r_4\phi_1')^2 = 0; \quad (4.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= 25\pi - 42; & h_2 &= 45\pi - 14; & h_3 &= 5\pi - 48; \\
r_1 &= 5\pi h_1 s_2 + h_2 s_1; & r_2 &= 5\pi(27s_2 - 5s_1); & r_3 &= s_3(9h_2 + 14h_3); & r_4 &= -90\pi s_2 + 28s_1; \\
r_5 &= s_3(225\pi - 378); & s_1 &= 3(5\pi + 6) + (5\pi - 3)u'^2; & s_2 &= u'^2 + 8; & s_3 &= s_2 - 4.
\end{aligned}$$

Как уже упоминалось выше, использование эллипсоидальной функции распределения падающих на поверхность молекул оправданно только в гидродинамическом приближении. Помимо этого, в исследованиях ряда авторов, например [9], показано, что 13-моментное приближение имеет порядок точности не выше навье-стоксовского. Таким образом, зависимости (4.19), (4.20) могут рассматриваться как модель граничных условий только при малых значениях u_1 , u_2 , $\Delta T'$, p'_{ij} , ϕ'_i . Будем считать указанные параметры величинами первого порядка малости. В уравнениях (4.19) и (4.20) пренебрежем членами более высоких порядков. В частности, примем: $T'^k = 1 + k \Delta T'$, где k – показатель степени.

После преобразований уравнения приобретают следующий вид:

$$u'_i = -\sqrt{2\pi} \frac{10p'_{1i} + \frac{4}{\pi} \phi'_i}{5\pi + 9} \quad \text{или} \quad u'_i \cong -1.0145 p'_{1i} - 0.1292 \phi'_i; \quad (4.21)$$

$$\Delta T' = -\frac{4(5\pi + 9)p'_{11} + 152\phi'_1}{3h_2 - 4h_3 - r_1/h_1} \quad \text{или} \quad \Delta T' \cong -0.25 p'_{11} - 0.3845 \phi'_1; \quad (4.22)$$

где $i = 2, 3$.

В пристеночной области в условиях гидродинамического приближения тангенциальными составляющими теплового потока ϕ'_2 , ϕ'_3 и нормальным неравновесным напряжением p'_{11} можно пренебречь:

$$u'_i = -\frac{10\sqrt{2\pi}}{5\pi + 9} p'_{1i} \quad \text{или} \quad u'_i \cong -1.0145 p'_{1i}; \quad (4.23)$$

$$\Delta T' = -\frac{152}{3h_2 - 4h_3 - r_1/h_1} \phi_1' \quad \text{или} \quad \Delta T' \cong -0.3845\phi_1'. \quad (4.24)$$

4.5. Оценка значения свободного параметра модели

В гидродинамическом приближении значение параметра σ , в соответствии с (4.16), стремится к значению σ_0 . Примем допущения относительно порядка малости неравновесных величин, сделанные выше. Кроме этого, будем полагать, что $\Delta\vartheta = \vartheta - 1$ также является величиной первого порядка малости. Уравнение (4.15) позволяет получить его гидродинамическое приближение:

$$\Delta\vartheta = -\frac{\sigma_0^2 \Delta T' + 2\phi_1'}{2(2 - \sigma_0^2)}. \quad (4.25)$$

В уравнении (4.13) можно принять $\vartheta = 1$, так как правая часть уравнения содержит множитель p'_{1i} , имеющий первый порядок малости. В гидродинамическом приближении

$$u'_i = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2 + \sigma_0} p'_{1i}. \quad (4.26)$$

Приравнивания правые части выражений (4.23) и (4.26) для скольжения скорости, рассчитанного по двум моделям, находим:

$$\sigma_0 = \frac{5\pi - 11}{10} \cong 0.4708. \quad (4.27)$$

Скачок температуры (4.14) с учетом уравнения (4.25) принимает вид:

$$\Delta T' = -2 \frac{3 - 2\sigma_0}{12 - 4\sigma_0 - 3\sigma_0^2} \phi_1'. \quad (4.28)$$

Приравнивая правые части уравнений (4.24) и (4.28), получаем уравнение

$$2 \frac{3 - 2\sigma_0}{12 - 4\sigma_0 - 3\sigma_0^2} \phi_1' = 0.3845\phi_1', \quad (4.29)$$

не имеющее вещественных корней, т.е. значения скачка температуры, рассчитанные по двум рассматриваемым моделям, не совпадут ни при каких значениях σ_0 . Это обстоятельство отчасти снимает неопределенность, заключающуюся в том, что значение σ_0 должно удовлетворять двум не связанным между собой условиям.

Параметр σ_0 может принимать значения в интервале $0 \leq \sigma_0 < 1$. Такому интервалу соответствует следующий интервал отношения $-\frac{\Delta T'}{\phi_1'}$ (см. (4.28)):

$$0.4 < -\frac{\Delta T'}{\phi_1'} \leq 0.5. \quad (4.30)$$

Для вспомогательной модели это отношение составляет 0.3845.

Интервал отношения $-\frac{u'_i}{p'_{1i}}$ (см. (4.26)):

$$0.83 < -\frac{u'_i}{p'_{1i}} \leq 1.25. \quad (4.31)$$

Для вспомогательной модели это отношение составляет 1.0145. Сравнение интервалов (4.30) и (4.31) позволяет сделать вывод о том, что в гидродинамическом приближении параметр σ_0 влияет на скачок температуры существенно меньше, чем на скольжение. Интервал $-\frac{\Delta T'}{\phi'_1}$ в четыре раза меньше интервала

$$-\frac{u'_i}{p'_{1i}}.$$

Если принять значение $\sigma_0 = 0.47$, обеспечивающее совпадение значений скольжения в обеих моделях, то отношение $-\frac{\Delta T'}{\phi'_1}$ примет значение 0.4356.

Относительная погрешность вычисления скачка температуры составит примерно 13%. Учитывая приближённый характер обеих моделей, такую погрешность можно считать удовлетворительной.

В соответствии с (4.16), свободный параметр σ принят в следующем виде:

$$\sigma = \frac{0.47}{1 + \beta \text{Kn}^*}. \quad (4.32)$$

Параметр модели β будет подобран по результатам тестов в главе 6.

Глава 5 ИНЖЕНЕРНЫЕ МОДЕЛИ

5.1 Внепорядковая модель первого приближения

Область применимости рассмотренных выше моделей в значительной мере ограничена числом Маха. Предельное значение этого параметра для моделей М24 и М45 составляет $M_{\max} < 2$. Для релаксационной модели $M_{\max} \approx 2$. Для модели М24с $M_{\max} \approx 3 \div 4$.

Такая оценка M_{\max} получена из решений задачи о структуре плоской ударной волны, относящейся к разряду высоконеравновесных течений. В задачах, связанных с расчетом сверхзвуковых и даже гиперзвуковых течений с косыми скачками уплотнения, предельное число Маха может быть увеличено. При описании потоков расширяющегося газа перечисленные модели не имеют ограничений по указанному параметру.

Задачи аэрокосмической техники, так же как и ряд задач вакуумных технологий, зачастую связаны с течениями, содержащими как области интенсивного расширения, так и области скачкообразного торможения газового потока. В связи с этим возникает необходимость создания моделей течения, адекватно описывающих физические процессы в широком интервале чисел Маха.

С практической точки зрения особый интерес представляют “инженерные” модели, позволяющие с определенной точностью рассчитывать некоторую, неполную, совокупность параметров газовой среды. Теоретическая обоснованность таких моделей отходит на второй план, хотя очевидно, что между “точностью” и теоретической обоснованностью существует прямая связь.

Адекватная инженерная модель, по-видимому, должна базироваться на теоретически обоснованной модели. Отдельные элементы последней, требующие дополнительных частных моделей или сильных допущений, могут быть заменены упрощенными зависимостями, содержащими так называемые “параметры модели”. Значения параметров устанавливаются эмпирическим путем. Примером может служить упрощенная зависимость коэффициента вязкости от температуры $\mu = \mu(T^s)$, в которой s – параметр модели.

Ключевым моментом построения инженерной модели является “конструирование” приближенных зависимостей с определенным, как правило минимальным, набором параметров. Замена элементов исходной модели такого рода приближениями сужает область применимости полученной инженерной модели, хотя известны случаи, когда введение эмпирических параметров расширяло область применимости.

В практике расчета неравновесных течений наиболее широкое распространение получила модель НСФ, теоретически обоснованная только для слабонеравновесных течений. Вместе с тем эта модель дает вполне адекватные описания течений в “неожиданно широкой” области, как по числам Кнудсена, так и по числам Маха. Исключение составляют течения, при описании которых

количественные неточности модели НСФ приводят к качественно неверным результатам. Это относится к задачам, связанным с отрывом потока, аэродинамическим разогревом поверхностей и т. п. Одно из течений этого класса, а именно задача гиперзвукового обтекания острой кромки, будет рассмотрено в главе 7.

Модель НСФ можно рассматривать как инженерную модель (очень удачную инженерную модель), в основе которой лежит первое приближение системы моментных уравнений одноатомных газов. Не определенная первым приближением величина – время релаксации – рассматривается как параметр модели. Произведение времени релаксации и давления заменено эмпирическим коэффициентом – коэффициентом вязкости.

Оговоримся, что исторически модель НСФ строилась в обратной последовательности: от эмпирически установленных законов (закона трения Ньютона и закона Фурье) к формальной записи уравнений сохранения с учетом этих законов.

Количественно неверное описание процессов, очевидно, связано с применением модели НСФ к таким течениям, для которых она не предназначена. В задаче о структуре ударной волны количественное несоответствие выражается, прежде всего, в слишком высоких градиентах параметров потока на профиле волны. Модели НСФ, условно говоря, не хватает вязкости. В расширяющемся газе вязкость этой модели избыточна, хотя это в меньшей степени сказывается на результатах расчета, ввиду меньшей неравновесности.

Формально коэффициент вязкости может быть определен первым приближением моментного уравнения неравновесного напряжения (1.32), приводящим к выражению (1.51). Из последнего непосредственно следует

$$\mu = \tau_p p^m. \quad (5.1)$$

Еще раз оговоримся, что исторически первым был введен коэффициент вязкости (реологический закон Ньютона). Затем Максвелл дал определение времени релаксации, которое, как было отмечено в разделе 1.2, представляет собой время релаксации напряжений, обеспечивающее “правильный” коэффициент вязкости.

Рассмотрим формальную трактовку коэффициента вязкости, считая время релаксации τ_p определенным из каких-либо иных соображений (см., например, [3, 5]). В моментном уравнении (1.32) член, отвечающий за наработку напряжений p_{ij}^m (см. раздел 3.1), имеет вид

$$-\tau_p P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} \equiv -\tau_p (\delta_{j\alpha} p^m + p_{j\alpha}^m) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p (\delta_{i\alpha} p^m + p_{i\alpha}^m) \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}. \quad (5.2)$$

Для получения этого выражения обе части уравнения (1.48) необходимо умножить на $-\tau_p$, чтобы уравнение определяло само напряжение, а не его релаксационный член.

В первом приближении, используемом в модели НСФ, член наработки не содержит неравновесных напряжений p_{ij}^m и преобразуется к виду

$$-2\tau_p P^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.3)$$

При одномерном течении газа вдоль декартовой оси X наработка напряжений имеет место только на этой оси. Выражение (5.2) преобразуется:

$$-2\tau_p P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} \equiv -2\tau_p (p^m + p_{xx}^m) \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5.4)$$

В первом приближении

$$-2\tau_p P^m \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5.5)$$

В случае торможения газа $p_{xx}^m > 0$. Множитель перед производной скорости больше, чем в приближении модели НСФ, в ускоряющемся потоке – наоборот. Таким образом, при торможении член наработки напряжения в моментном уравнении “более вязкий”, чем в модели НСФ, при ускорении – “менее вязкий”. Это отчасти объясняет отмеченное выше свойство модели НСФ.

Очевидно, что сохранение неравновесного напряжения в члене наработки (5.4) при переходе к первому приближению позволит улучшить вязкие свойства модели. Очевидно и то, что полученная модель уже не будет строгим первым приближением, более того – приближение станет внепорядковым. Поясним роль внепорядковых членов с точки зрения физического содержания модели.

Адекватная математическая модель какого-либо естественного (физического) процесса обладает свойством “самокомпенсации” вносимых ею погрешностей. Такая самокомпенсация, разумеется, распространяется только на тот уровень процессов, который соответствует выбранному порядку приближения. Примером такой адекватной самокомпенсирующейся модели может служить закон сопротивления Ньютона, широко распространенный в практике расчета сопротивления тел при гиперзвуковом обтекании.

Несмотря на простейшую, если не сказать примитивную, модель физического процесса, формула Ньютона позволяет во многих случаях достаточно точно определять сопротивление тела при $M_\infty \gg 1$. Характерно, что эта модель предназначена для определения интегральной характеристики процесса взаимодействия газа с поверхностью тела, а не для описания самого процесса.

Другая особенность закона сопротивления Ньютона связана с порядком приближения, который определен условием $M_\infty \rightarrow \infty$. Если энергия теплового движения молекул пренебрежимо мала по сравнению с энергией их группового движения, т.е. $M \rightarrow \infty$, то физическая модель Ньютона совпадает с моделью молекулярно-кинетической теории.

Внепорядковые члены, искусственно включаемые в модель, нарушают ее способность к самокомпенсации. Внепорядковый член вносит в модель описание процесса следующего порядка без учета остальных процессов этого порядка. Примером негативного влияния внепорядковых членов служит 13-моментная модель Грэда, рассмотренная во введении. Уточним, что внепорядковость 13-моментной модели связана с исключением части членов порядка τ^2 из

20-моментной модели. Оставшиеся члены этого порядка малости становятся внепорядковыми.

Другим примером является “испорченная” внепорядковыми членами формула Ньютона, известная как формула Буземана. В этой интерпретации физическая модель Ньютона дополнена центробежными силами, действующими на поток газа при обтекании им выпуклой поверхности. Процессы, отвечающие за возникновение такого потока и отсутствующие в модели Ньютона, в модели Буземана также не учтены. Формула Буземана существенно хуже описывает некоторые виды течений [68]. Справедливости ради надо отметить, что при определении формы тела наименьшего сопротивления формула Буземана приводит к весьма конструктивным выводам.

Несмотря на отмеченные негативные свойства внепорядковых членов, в отдельных случаях их использование позволяет улучшить модель течения. Например, в работе [69] введение внепорядковых членов позволило подавить коротковолновую неустойчивость, свойственную уравнениям Барнетта. В ряде работ по динамике неравновесных течений рассматриваются “усеченные” уравнения Барнетта, представляющие собой, по существу, внепорядковые выражения. Такие уравнения имеют определенные преимущества перед исходным уравнением.

Улучшение вязких свойств модели первого приближения за счет учета неравновесного напряжения в выражениях типа (5.4) использовалось в ряде работ при расчете одномерных течений. В работах [70, 71] для задачи о структуре плоской ударной волны в многоатомном газе применялась упрощенная модель – “simplified translational nonequilibrium model”. В этой модели в выражения для p_{xx} и q_x вводился член, соответствующий первому приближению p_{xx}^m с некоторыми постоянными коэффициентами. Применение внепорядкового члена обосновывалось несколько иными соображениями [72], что, впрочем, не меняло существа вопроса. Рассчитанная обратная ширина профиля плотности лучше согласовывалась с экспериментальными данными, чем ширина, получаемая из решения модели НСФ без объемной вязкости.

В работе [28] рассматривались структура плоской ударной волны и одномерное течение между движущимися поверхностями, имеющими разную температуру (аналог течения Куэтта). Расчеты проводились для одноатомного газа. Отмечено существенное улучшение результатов расчета (наклон профилей, расход газа между пластинами) в случае вычисления коэффициента вязкости по составляющей температуры, соответствующей направлению градиентов основных параметров газа. В принятых обозначениях для ударной волны $\mu = \mu(T_{xx}^s)$.

Принимая во внимание приведенные выше доводы, рассмотрим неравновесные величины в неполном втором приближении (в первом приближении с внепорядковым членом). В дальнейшем мы не будем использовать термины “приближенный” или “усеченный” применительно к выражениям с внепорядковыми членами. Будем использовать термин “внепорядковый”, лучше отображающий существо вопроса.

В механических переменных:

$$\rho R \theta = -\frac{2}{3} h \tau_p P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}; \quad (5.6)$$

$$p_{ij}^m = -\tau_p P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \tau_p P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad (5.7)$$

$$\varphi_i = -\frac{15}{4} R \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha}; \quad (5.8)$$

$$\omega_i = -c_\omega \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha}. \quad (5.9)$$

В термодинамических переменных:

$$p_{ij} = -\tau_p P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} c_\mu \tau_p P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad (5.10)$$

$$q_i = -\frac{c_p}{\text{Pr}} \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}. \quad (5.11)$$

Обозначим:

$$\mu_{ij} = \tau_p P_{ij}. \quad (5.12)$$

В дальнейшем переменную μ_{ij} будем называть тензорным коэффициентом вязкости.

Выражение (5.12) можно трактовать двояко:

$$\mu_{ij} = \tau_p \left(\delta_{ij} p^m + p_{ij}^m \right) = \mu \left(\delta_{ij} + \frac{p_{ij}^m}{p^m} \right); \quad (5.13)$$

$$\mu_{ij} = \tau_p \left(\delta_{ij} p + p_{ij} \right) = \mu \left(\delta_{ij} + \frac{p_{ij}}{p} \right). \quad (5.14)$$

Коэффициент сдвиговой вязкости в уравнении (5.13) связан с поступательной температурой: $\mu = \mu(T_t)$, в уравнении (5.14) – с термодинамической: $\mu = \mu(T)$. Не делая сильного допущения, будем считать эти выражения эквивалентными.

Неравновесные напряжения и тепловой поток с учетом (5.12) будут определены как

$$p_{ij} = -\mu_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \mu_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} c_\mu \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad (5.15)$$

$$q_i = -\frac{c_p}{\text{Pr}} \mu_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}. \quad (5.16)$$

Механические величины записываются аналогично.

Проводя аналогию с электромагнитными явлениями, заметим, что неравновесные члены p_{ij}^m и p_{ij} в зависимостях (5.13) и (5.14) приводят к появлению “индуктивного” сопротивления. Пространственная производная вектора скоро-

сти, содержащаяся в p_{ij}^m и p_{ij} , в этом случае выполняет функции производной по времени вектора магнитной индукции, ограничивая “быстроту” развития процесса. Разумеется, что такую аналогию нельзя рассматривать в качестве феноменологического обоснования введения внепорядковых членов. Данный пример носит иллюстративный характер.

Систему уравнений сохранения в совокупности с (5.15) и (5.16) будем называть внепорядковой моделью первого приближения или сокращенно – внепорядковой моделью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ p_{ij} = -\mu_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \mu_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \delta_{ij} c_\mu \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}; \quad q_i = -\frac{c_p}{Pr} \mu_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}; \quad \mu_{ij} = \tau_p P_{ij}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Во внепорядковой модели тензорный коэффициент вязкости получен из уравнения неравновесных напряжений (1.32). При этом был опущен член

$$2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right). \quad (5.18)$$

Если учтенные члены отвечали за “динамическую” наработку напряжений, то (5.18) определяет “тепловую” наработку.

Кроме этого, мы пренебрегли членами

$$\frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) \equiv \frac{dp_{ij}^m}{dt} + p_{ij}^m \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (5.19)$$

Первое слагаемое правой части представляет собой лагранжеву производную, а второе слагаемое левой части – градиент потока неравновесных напряжений в эйлеровых переменных. Обе величины не принимают участия в наработке и релаксации напряжений. Они только “констатируют” результат этого совокупного процесса.

Представляет интерес, насколько велико влияние опущенных членов на неравновесное напряжение в сильнонеравновесном течении. Строгий формальный анализ, по-видимому, невозможен. Проведем качественную оценку влияния опущенных членов на основе численного решения.

5.2. Вспомогательная кинетическая модель. Анализ внепорядковой модели

Рассмотренные выше моментные модели обладают теми или иными недостатками в области сильнонеравновесных течений. Для оценки влияния членов (5.18) и (5.19) на неравновесное напряжение целесообразно использовать

модель кинетического уравнения, лежащего в основе моментных уравнений системы (1.72), и в частности уравнения (1.32).

В общем уравнении переноса (1.20) интеграл столкновений не конкретизирован. Интерес представляла только структура моментов этого интеграла. В модельном кинетическом уравнении интеграл столкновений должен быть представлен в явном виде.

Рассмотрим кинетическую модель релаксационного типа:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{f^+ - f}{\tau}. \quad (5.20)$$

Применительно к задаче о структуре ударной волны это уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f^+ - f}{\tau}. \quad (5.21)$$

В качестве функции f^+ выберем аппроксимирующую функцию (2.12). В случае одномерного течения вдоль оси X одна из главных осей тензора напряжений совпадает с этой осью. Положение двух других осей произвольно. Заменим в (2.12) индексы главных осей индексами выбранной “лабораторной” системы координат. Функция f^+ примет следующий вид:

$$f^+ = \left(1 + \frac{c_x}{RT_{xx}^+} \left(- \left(\frac{\varphi_{xxx}^+}{P_{xx}^+} + \frac{\varphi_{xyy}^+}{P_{yy}^+} + \frac{\varphi_{xzz}^+}{P_{zz}^+} \right) + c_x^2 \frac{\varphi_{xxx}^+}{3RT_{xx}^+ P_{xx}^+} \right. \right. \\ \left. \left. + c_y^2 \frac{\varphi_{xyy}^+}{RT_{yy}^+ P_{yy}^+} + c_z^2 \frac{\varphi_{xzz}^+}{RT_{zz}^+ P_{zz}^+} + \frac{3}{2} \left(\frac{n}{E_\Omega^+} \varepsilon - 1 \right) \frac{\omega_x^+}{E_\Omega^+} \right) f_P F_\Omega. \quad (5.22)$$

В этом уравнении

$$f_P = \frac{n}{(2\pi R)^{3/2} \sqrt{T_{xx}^+ T_{yy}^+ T_{zz}^+}} \exp \left(- \frac{c_x^2}{2RT_{xx}^+} - \frac{c_y^2}{2RT_{yy}^+} - \frac{c_z^2}{2RT_{zz}^+} \right); \quad (5.23)$$

$$F_\Omega = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi} \left(\frac{2}{3} \frac{E_\Omega^+}{n} \right)^{3/2}} \exp \left(- \frac{\varepsilon}{\frac{2}{3} \frac{E_\Omega^+}{n}} \right). \quad (5.24)$$

На следующем шаге построения кинетической модели определим среднее время свободного пробега молекул τ и макроскопические параметры с надстрочным символом “+”.

Уточним, что указанные параметры, в отличие от их аналогов, использованных при построении системы моментных уравнений в главе 1, имеют формальное определение. Это моменты функции f^+ . Сама же функция носит гипотетический характер. Предполагается, что распределение молекул по скоростям после каждого столкновения соответствует f^+ .

При построении кинетических моделей релаксационного типа вид этой функции выбирается из дополнительных допущений, например используется принцип наиболее вероятного состояния при заданных моментах функции распределения. Если рассматриваемый элемент объема газовой среды считать изолированной системой, то, очевидно, наиболее вероятное состояние будет соответствовать локально-максвелловской функции распределения. Так получена модель БГК. При таком допущении описываемое состояние газа близко к равновесному.

В условиях высокой неравновесности газовой среды наиболее вероятное состояние не может быть определено локально. Этот вопрос подробно рассмотрен в работе [3].

Для определения моментов функции f^+ привлечем следующие соображения. Задача о пространственно однородной релаксации неравновесных напряжений в терминах уравнения (1.32) формулируется как

$$\frac{\partial p_{ij}^m}{\partial t} = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}. \quad (5.25)$$

Решение этого уравнения:

$$p_{ij}^m = p_{ij}^m|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right). \quad (5.26)$$

Аналогичным образом могут быть получены уравнения релаксации остальных неравновесных величин:

$$\theta = \theta|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{h\tau_p}\right); \quad (5.27)$$

$$\varphi_i = \varphi_i|_{t=0} \exp\left(-\frac{2}{3}\frac{t}{\tau_p}\right); \quad (5.28)$$

$$\omega_i = \omega_i|_{t=0} \exp\left(-\frac{c\Omega}{c\omega}\frac{t}{\tau_p}\right). \quad (5.29)$$

Предположим, что макропараметры газа, а следовательно, и функция f^+ слабо меняются за время τ . Такое допущение, соответствующее слабонервному течению, вполне пригодно для оценочных расчетов. Кроме этого, будем считать $\tau^+ = \tau$. Из кинетического уравнения в интегральной форме (см., например, [3], [8]) непосредственно следует, что доля молекул, не испытавших столкновения (нижний индекс “нс”) в течение времени $t < \tau$,

$$(fd\bar{\xi})_{нс} = f|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) d\bar{\xi}. \quad (5.30)$$

Это справедливо и для моментов функции распределения:

$$(p_{ij}^m)_{нс} = p_{ij}^m|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad (5.31)$$

$$\theta_{nc} = \theta|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad (5.32)$$

$$(\varphi_i)_{nc} = \varphi_i|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad (5.33)$$

$$(\omega_i)_{nc} = \omega_i|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (5.34)$$

Рассмотрим баланс неравновесного напряжения p_{ij}^m . По истечении промежутка времени t напряжение будет складываться из напряжений, создаваемых молекулами в начальном состоянии $\left(p_{ij}^m|_{t=0}\right)$, и молекулами, образовавшимися в результате столкновений $\left(p_{ij}^{m+}\right)$. Повторными столкновениями молекул можно пренебречь, так как они не изменяют напряжения p_{ij}^{m+} , в силу сделанного допущения относительно медленной эволюции f^+ .

Экспоненциальный множитель уравнения (5.31) в этом случае играет роль весового коэффициента напряжений $p_{ij}^m|_{t=0}$ и p_{ij}^{m+} . В соответствии с (5.26) можно записать

$$p_{ij}^m|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) = p_{ij}^m|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + p_{ij}^{m+} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right). \quad (5.35)$$

Это уравнение явным образом требует выполнения условия $\tau_p \geq \tau$, при невыполнении которого p_{ij}^{m+} меняет знак, что противоречит процессу релаксации. Покажем, что требование $\tau_p \geq \tau$ является естественным условием.

Время релаксации напряжений τ_p определено зависимостью (1.30). При принятом допущении $\tau^+ = \tau$ эту зависимость можно представить в виде

$$p_{ij}^{m+} = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_p}\right) p_{ij}^m. \quad (5.36)$$

Формально (5.36) представляет собой линейризованный вариант выражения $p_{ij}^{m+} = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) p_{ij}^m$, из которого следует, что мгновенной релаксации соответствует бесконечно малое время τ_p . Процесс релаксации непрерывен во времени.

В интерпретации уравнения (1.30) p_{ij}^{m+} имеет смысл напряжения, создаваемого молекулами, испытавшими одно столкновение. В этом случае релаксация рассматривается как дискретная последовательность отдельных столкновений. Мгновенной релаксации соответствует $\tau_p = \tau$. Верхний предел отношения

$\frac{\tau}{\tau_p}$ не может быть больше единицы. В противном случае релаксация протекала бы при отсутствии столкновений.

Вернемся к уравнению (5.35). Начальный момент времени $t=0$ выбран произвольно. Будем считать, что интересующее нас напряжение p_{ij}^m соответствует начальному моменту, т.е. $p_{ij}^m = p_{ij}^m|_{t=0}$. По истечении периода времени $t = \tau$ баланс напряжений примет вид

$$p_{ij}^m \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) = p_{ij}^m e^{-1} + p_{ij}^{m+}(1 - e^{-1}). \quad (5.37)$$

Это выражение позволяет связать напряжения p_{ij}^{m+} и p_{ij}^m :

$$p_{ij}^{m+} = \frac{\exp\left(1 - \frac{\tau}{\tau_p}\right) - 1}{e - 1} p_{ij}^m = k_p p_{ij}^m. \quad (5.38)$$

По аналогии с (5.38) могут быть получены зависимости для остальных неравновесных величин:

$$\theta^+ = \frac{\exp\left(1 - \frac{\tau}{h\tau_p}\right) - 1}{e - 1} \theta = k_\theta \theta; \quad (5.39)$$

$$\varphi_{ijk}^+ = \frac{\exp\left(1 - \frac{2}{3} \frac{\tau}{\tau_p}\right) - 1}{e - 1} \varphi_{ijk} = k_\varphi \varphi_{ijk}; \quad (5.40)$$

$$\omega_i^+ = \frac{\exp\left(1 - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\tau}{\tau_p}\right) - 1}{e - 1} \omega_i = k_\omega \omega_i. \quad (5.41)$$

Закон сохранения энергии будет выполнен, если полные напряжения и энергию внутренних степеней свободы выразить через инварианты столкновений p и T :

$$P_{ii}^+ = p + p_{ii}^+ = p + p_{ii}^{m+} + \frac{5-3\gamma}{2} \rho R \theta^+ = p + k_p p_{ij}^m + \frac{5-3\gamma}{2} \rho R k_\theta \theta; \quad (5.42)$$

$$E_\Omega^+ = c_\Omega \rho T_\Omega^+ = c_\Omega \rho \left(T - \frac{3}{2} (\gamma - 1) k_\theta \theta \right). \quad (5.43)$$

Отношение $\frac{\tau}{\tau_p}$ будем считать параметром модели. Его значение подбираем опытным путем.

На рис. 5.1 пунктирной линией показан профиль ударной волны в аргоне [73] при $M_\infty = 7.183$. Аппроксимация экспериментальных данных приведена

авторами работы [73]. Кривая 1 соответствует расчету по модельному кинетическому уравнению (5.21) с релаксационным членом (5.22).

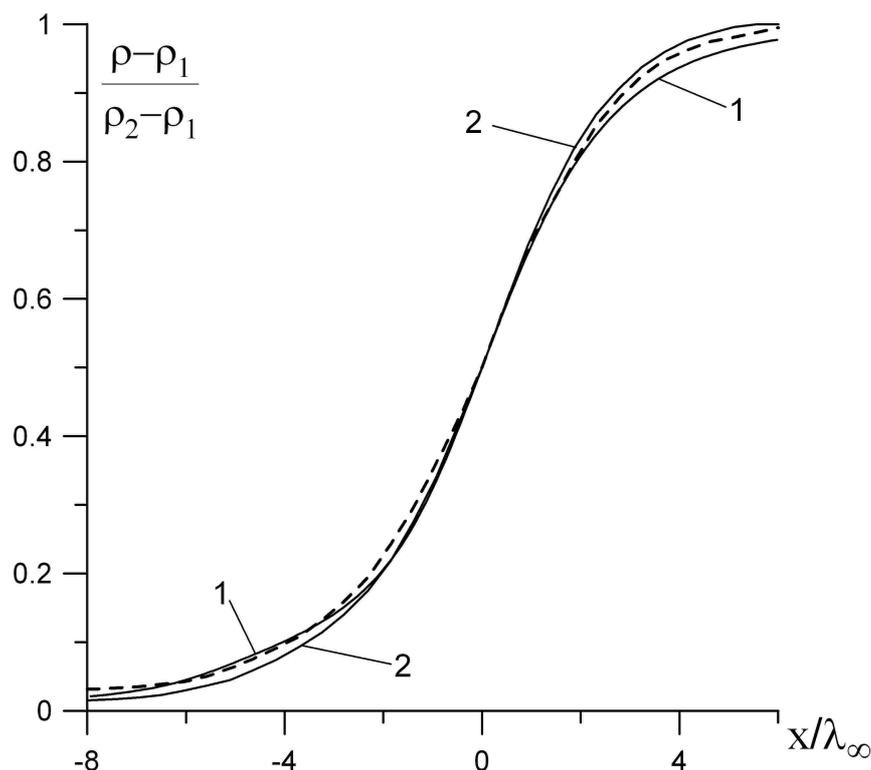


Рис. 5.1. Профиль плотности в плоской ударной волне аргона. $M_\infty = 7.183$. Пунктирная линия – экспериментальные данные [73]; 1 – модельное кинетическое уравнение (5.21), $\tau / \tau_p = 0.8$; 2 – DSM [73], $s = 0.68$

Наилучшее совпадение расчетных и экспериментальных данных получено при $\frac{\tau}{\tau_p} \approx 0.8$. Для сравнения показан расчет методом прямого статистического моделирования (кривая 2), выполненный Г. Бердом при $s = 0.68$ [73].

На рис. 5.2 показан профиль ударной волны в азоте [74] при $M_\infty = 10$. Здесь также наблюдается удовлетворительное совпадение расчетного и экспериментального профилей при $\frac{\tau}{\tau_p} = 0.92$. Значение параметра h определялось по зависимости (1.71) при $Z = 5$.

Вернемся к рассмотрению внепорядковой модели. Проведем качественную оценку влияния членов (5.18) и (5.19) на неравновесное напряжение в моментном уравнении (1.32). Напомним, что эти члены были опущены при “конструировании” внепорядковой модели.

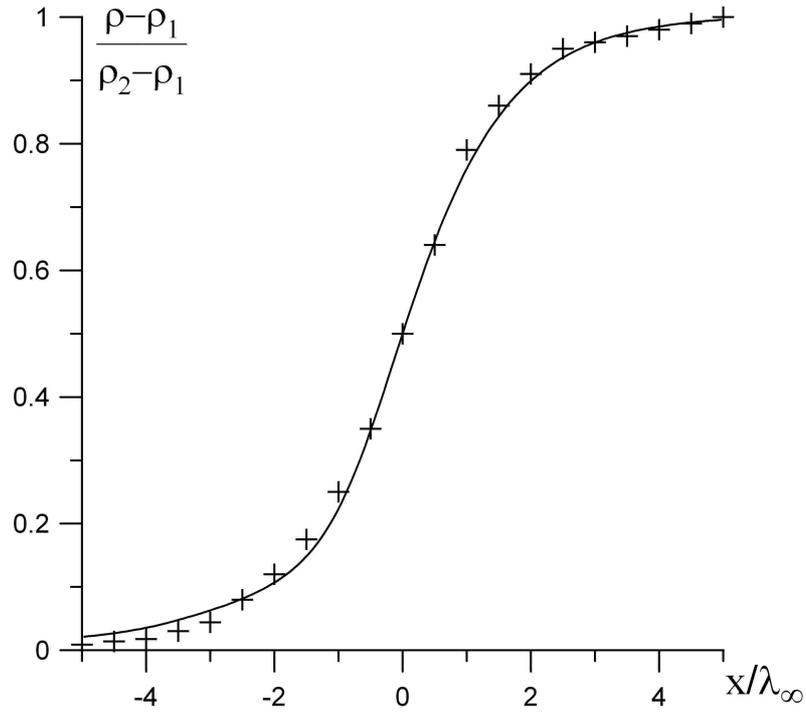


Рис. 5.2. Профиль плотности в плоской ударной волне азота. $M_\infty = 10$. Точки (+) – экспериментальные данные [74]; линия – модельное кинетическое уравнение (5.21), $\tau / \tau_p = 0.92$, $Z = 5$

Используя подобранные значения τ / τ_p , получим решения модельного кинетического уравнения (5.21) при $M_\infty = 5$ для одно- и двухатомного ($\gamma = 7/5$) газов. Такое значение числа Маха можно расценивать и как сильно сверхзвуковое, и как слабо гиперзвуковое, чем и обусловлен его выбор.

Рассчитаем все моменты функции распределения, фигурирующие в моментных уравнениях неравновесного напряжения (1.32) и разности температур (1.75). Запишем уравнение неравновесных напряжений в универсальной для одно- и многоатомных газов форме. Для этого уравнение (1.75) домножим на $\frac{5-3\gamma}{2}h$ и почленно сложим его с (1.32). С учетом стационарности и одномерности решаемой задачи получим выражение

$$p_{xx} = -\frac{\mu}{p} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \left(p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right) + \left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) p_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\varphi_{xxx} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \varphi_x - (\gamma-1)h\omega_x \right) \right). \quad (5.44)$$

Здесь принято: $\tau_p = \frac{\mu}{p}$, $\mu = \mu(T^s)$. Очевидно, что в случае одноатомного газа

$p_{xx}^m \equiv p_{xx}$, а θ и ω_x не существуют.

Рассмотрим уравнение (5.44), в котором все величины правой части взяты из кинетического решения. Примем следующие значения параметра s : для одноатомных газов $s = 0.847$, для двухатомных $s = 0.92$. При этих значениях профиль p_{xx} , полученный из решения модельного кинетического уравнения, близок к профилю, вычисленному по (5.44).

Помимо самого напряжения p_{xx} , определим его первое приближение:

$$p_{xx}^{[1]} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3}h\right)\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5.45)$$

В приближении внепорядковой модели (5.17) неравновесное напряжение

$$p_{xx}^{[2-]} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3}h\right)\tau_p p_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3}h\right)\mu_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5.46)$$

Кроме этого, вычислим члены уравнения (5.44), опускаемые в первом и внепорядковом приближениях:

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \left(p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right); \quad (5.47)$$

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\varphi_{xxx} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3}h \right) \varphi_x - (\gamma-1)h\omega_x \right). \quad (5.48)$$

На рис. 5.3 и 5.4 показаны распределения указанных величин, отнесенные к термодинамическому давлению. Пунктирной линией показано кинетическое решение.

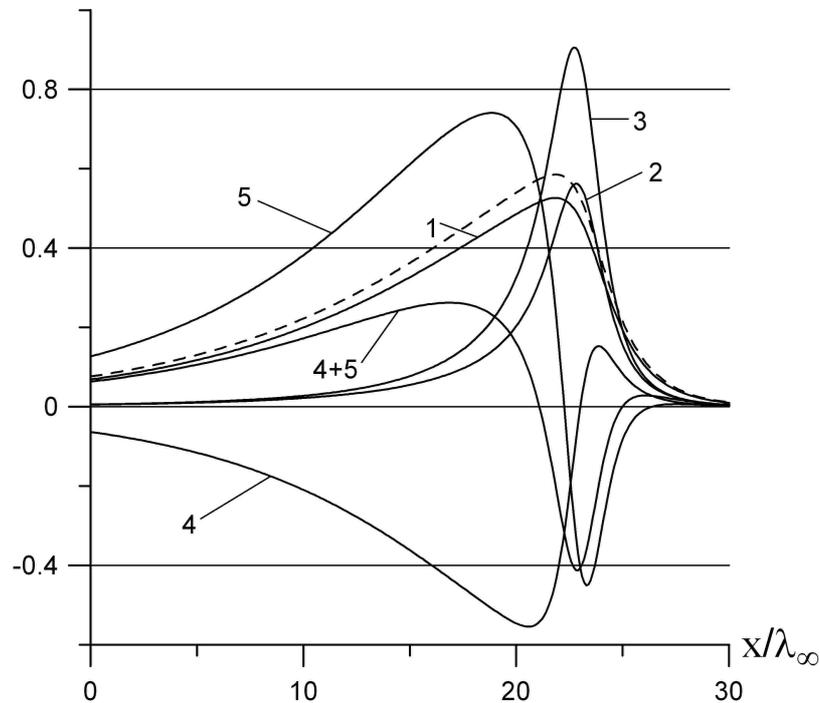


Рис. 5.3. Распределение параметров в плоской ударной волне одноатомного газа. $M_\infty = 5$. Все величины отнесены к давлению p . ---- модельное кинетическое уравнение; 1 – (5.44); 2 – (5.45); 3 – (5.46); 4 – (5.47); 5 – (5.48)

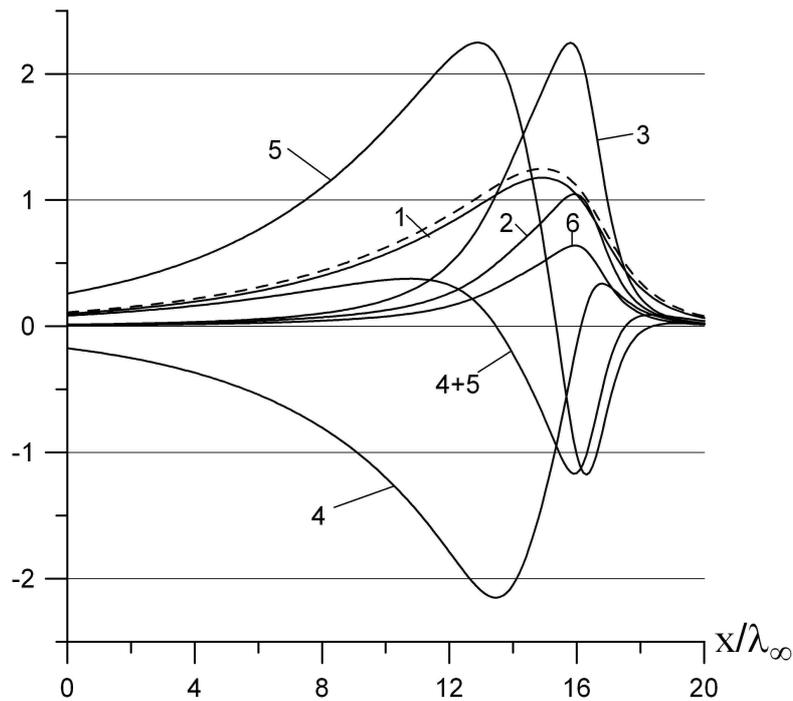


Рис. 5.4. Распределение параметров в плоской ударной волне двухатомного газа. $M_\infty = 5$. Все величины отнесены к давлению p . ---- модельное кинетическое уравнение; 1 – (5.44); 2 – (5.45); 3 – (5.46); 4 – (5.47); 5 – (5.48); 6 – модель НСФ без коэффициента объемной вязкости

Профили неравновесного напряжения в первом и внепорядковом приближениях (кривые 2 и 3) имеют вид узких пиков. Область распространения этих напряжений вверх по потоку существенно меньше области напряжения, определенного моментным уравнением (кривая 1). Причина этого наглядно представлена на рисунках.

В верхней по потоку области ударной волны напряжение формируется за счет градиентов составляющих теплового потока (5.48) (кривая 5), даже несмотря на их частичную компенсацию членом (5.47) (кривая 4). Пренебрежение членами (5.47) и (5.48) в первом и внепорядковом приближениях значительно сужает протяженность возмущенной области.

Обращает на себя внимание, что относительная ширина пиков 2 и 3 в двухатомном газе несколько шире, чем в одноатомном. Это, очевидно, связано с запаздыванием энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы.

Сравнение кривой 3 с кривой 2 показывает, что внепорядковое приближение, увеличивая напряжение, практически не меняет пропорции его профиля. Следовательно, увеличение вязких свойств модели только за счет члена наработки напряжений не позволяет удовлетворительно аппроксимировать профиль напряжений.

В главе 6 будет показано, что искусственное завышение неравновесного члена тензорного коэффициента вязкости (5.13), (5.14) позволяет получать наклон профиля ударной волны с приемлемой точностью в широком интервале

чисел Маха. Однако размер области возмущения и форма профиля не соответствуют экспериментальным данным.

Особый интерес представляет кривая 6 рис. 5.4. Она показывает напряжение первого приближения без учета объемной вязкости, т.е. соответствует уравнению (5.45) при $h = 0$. Вязкие свойства газа при этом значительно занижены. Более того, в условиях, близких к равновесным, кривая 3 будет вырождаться в кривую 2. Кривые 4 и 5 почти исчезнут. Это связано с тем, что неравновесный член в тензорном коэффициенте вязкости и выражения (5.47), (5.48) имеют порядок малости τ^2 . Соотношение кривых 2 и 6 останется прежним, так как порядок соответствующих напряжений τ .

Приведенные графики являются наглядным примером того, что даже в условиях слабонеравновесного течения пренебрежение объемной вязкостью вносит существенную погрешность в значения нормальных неравновесных напряжений.

На рис. 5.5 представлены профили скорости в ударной волне двухатомного газа, рассчитанные с использованием различных моделей.

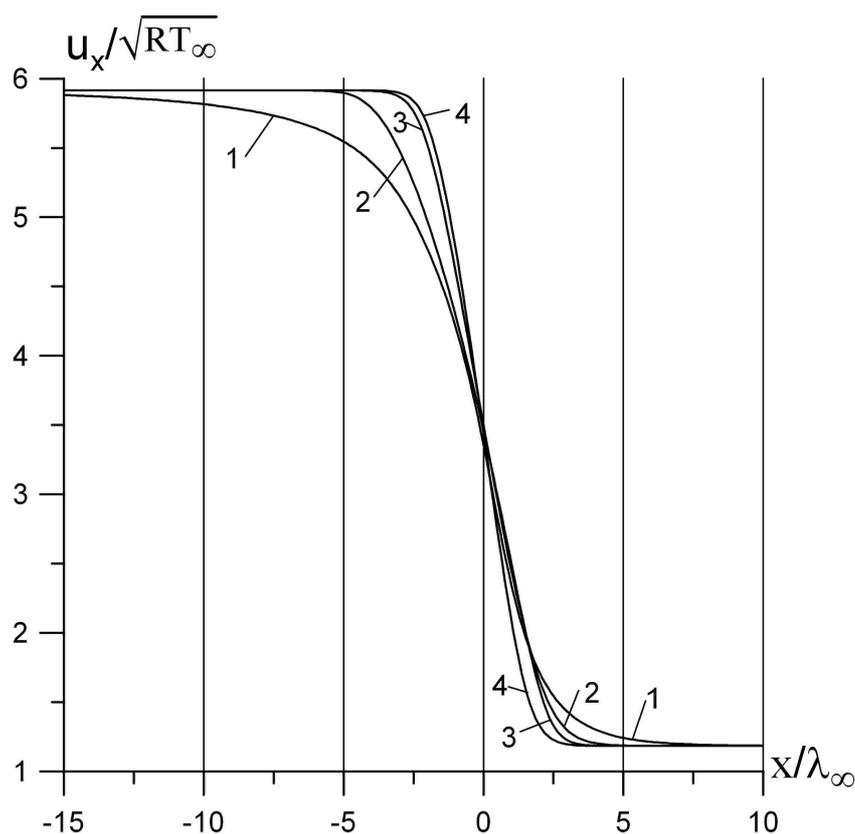


Рис. 5.5. Профили скорости в плоской ударной волне двухатомного газа. $M_\infty = 5$. 1 – модельное кинетическое уравнение; 2 – внепорядковая модель; 3 – модель первого приближения; 4 – модель НСФ без коэффициента объемной вязкости

Профиль 2 рассчитан по внепорядковой модели при $s = 0.67$. Максимальный угол наклона профиля совпадает с максимальным углом профиля 1, рассчитанного по модельному кинетическому уравнению.

Профиль 3 соответствует модели первого приближения с параметром h , определенным по (1.71), профиль 4 – модель НСФ ($h = 0$). Максимальные углы наклона профилей 3 и 4 превышают соответствующий угол наклона профилей 1 и 2 даже при $s = 1$. Большие значения этого параметра не рассматривались.

Ширина профиля 2 несколько больше, чем у профилей 3 и 4, но существенно меньше ширины профиля 1. Очевидно, что такое различие в протяженности возмущенной области связано с пренебрежением членами (5.47) и (5.48) в моделях первого и внепорядкового приближений.

К результатам этого качественного анализа вернемся в главах 6 и 7.

5.3. Гибридная модель

Рассмотренные выше модели имели те или иные недостатки, ограничивающие их область адекватного описания неравновесного течения. Поставим своей задачей расширение этой области за счет комбинации решений, даваемых разными моделями. Комбинационный принцип построения инженерной модели применялся, например, в работе [22]. Авторы данной работы не называли свою модель “инженерной”, но это вопрос терминологии.

Из числа рассмотренных теоретически обоснованных моделей наибольший интерес представляет модель М24с. Главный дефект этой модели заключается в возникновении точки (малой области) разрыва пространственной производной в сильнонеравновесной области течения при гиперзвуковых значениях числа Маха (см. рис. 2.2 и 2.3). В остальной области течения профили гладкие. Размер возмущенной области (ширины профиля) достаточно велик.

Своего рода альтернативой модели М24с являются модели первого и внепорядкового приближений. В наиболее неравновесной области течения эти модели сильно спрямляют профиль (рис. 5.5). При увеличении числа Маха профили становятся почти линейными. Возникновение “излома” профиля или образование “субскачка” исключено. Вместе с тем при больших числах Маха возмущения практически локализуются в окрестности высокоградиентной части профиля, почти не проникая в невозмущенный поток.

Представляется естественным комбинирование модели М24с с какой-либо из упомянутых моделей. Такая комбинация должна предусматривать преобладание решения модели М24с в области с малой степенью неравновесности. В сильнонеравновесной области течения решение должно определяться преимущественно моделью первого или моделью внепорядкового приближения.

Все три модели, по очевидным причинам, содержат единую систему уравнений сохранения (в модели М24с это подсистема). Различие заключается только в интерпретации неравновесных величин p_{ij} и q_i . Других неравновесных величин “упрощенные” модели не содержат. Таким образом, комбиниро-

вание будет распространяться только на неравновесные величины, входящие в уравнения сохранения.

Внепорядковая модель имеет некоторые преимущества перед моделью первого приближения. Во-первых, область возмущений внепорядковой модели несколько шире. Во-вторых, внепорядковая модель может быть непосредственно связана с моделью M24c неравновесным напряжением, входящим в тензорный коэффициент вязкости (5.13), (5.14). Ниже будет показано, что такая связь позитивно сказывается на свойствах внепорядковой модели.

Связь модели первого приближения с моделью M24c опосредованна и осуществляется только через основные газодинамические переменные ρ , \mathbf{u} , T (или p). В случае комбинирования M24c с моделью первого приближения неравновесные величины будут представлять осредненные значения двух различных моделей.

Конкретизируем способ комбинирования модели M24c и внепорядковой модели. Обозначим какую-либо из перечисленных выше неравновесных величин символом r . Значение этой величины, определенное моментным уравнением модели M24c, обозначим r^M . Эта же величина, определенная внепорядковой моделью (моделью неполного второго приближения), обозначается символом $r^{[2-]}$. “Гибридное” значение неравновесной величины:

$$r^H = (1 - W)r^M + Wr^{[2-]}. \quad (5.49)$$

Весовой коэффициент W должен принимать значения, близкие к единице, в сильнонеравновесной области. В условиях равновесия $W = 0$. В этом случае будут удовлетворены сформулированные выше требования к методу комбинирования моделей.

Весовой коэффициент в (5.49) выполняет функции параметра неравновесности среды, определенного на единичном отрезке. В дальнейшем будем называть этот параметр степенью неравновесности.

Степень неравновесности среды целесообразно определять по неравновесным значениям энергии на степенях свободы молекулы. Для удобства записи будем выражать эту энергию в терминах нормальных неравновесных термодинамических напряжений. Введем следующие обозначения:

количество степеней свободы молекулы:

$$N = \frac{2}{\gamma - 1}; \quad (5.50)$$

количество внутренних степеней свободы молекулы:

$$N_{\Omega} = N - 3 = \frac{5 - 3\gamma}{\gamma - 1}. \quad (5.51)$$

В системе главных осей тензора напряжений неравновесные напряжения представлены только нормальными составляющими, пропорциональными неравновесным значениям энергии на поступательных степенях свободы. Сумма квадратов неравновесных нормальных напряжений в главных осях представляет собой квадрат соответствующего тензора. В силу инвариантности квадрата тензора напряжений

$$p_{XX}^2 + p_{YY}^2 + p_{ZZ}^2 = p_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}. \quad (5.52)$$

Правая часть (5.52) представлена в произвольной системе координат.

Неравновесное значение энергии на двух внутренних степенях свободы определено в соответствии с (1.5) и (1.8):

$$\rho R(T_\Omega - T) = -\frac{3}{2}(\gamma - 1)\rho R\theta. \quad (5.53)$$

Напомним, что нормальное напряжение соответствует удвоенной энергии одной степени свободы.

Определим неравновесное состояние газовой среды отношением

$$w = \frac{\sqrt{p_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + N_\Omega (\rho R(T_\Omega - T))^2}}{p} = \frac{\sqrt{p_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \frac{9}{4}(5 - 3\gamma)(\gamma - 1)(\rho R\theta)^2}}{p}. \quad (5.54)$$

Это отношение имеет теоретический предел, соответствующий состоянию газа, при котором вся энергия теплового движения молекул сосредоточена только на одной поступательной степени свободы. Если обогащенная энергией степень свободы соответствует одной из осей системы координат, то неравновесное напряжение, возникающее на этой оси, составляет $(N - 1)p$. На остальных степенях свободы напряжение принимает значение $(-p)$. Следовательно,

$$w_{\max} = \frac{\sqrt{((N - 1)p)^2 + 2(-p)^2 + N_\Omega (-p)^2}}{p} = \frac{\sqrt{6 - 2\gamma}}{\gamma - 1}. \quad (5.55)$$

Под степенью неравновесности будем понимать следующее выражение:

$$W = \frac{w}{w_{\max}} = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{6 - 2\gamma}} \frac{\sqrt{p_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \frac{9}{4}(5 - 3\gamma)(\gamma - 1)(\rho R\theta)^2}}{p}. \quad (5.56)$$

Соотношение значений неравновесной величины r^M и $r^{[2-]}$ в (5.49) однозначно определено степенью неравновесности среды. Введем параметр модели, позволяющий “настраивать” модель на эмпирические данные. В уравнении (5.49) заменим r^M на r^H , определенное тем же уравнением., т. е.

$$r^H = (1 - W)((1 - W)r^M + Wr^{[2-]}) + Wr^{[2-]}. \quad (5.57)$$

Продолжая эту процедуру несколько раз, получим

$$r^H = (1 - W)^m r^M + \left(W \sum_{l=1}^m (1 - W)^{l-1} \right) r^{[2-]}. \quad (5.58)$$

При значении параметра модели $m = 1$ уравнение (5.58) соответствует (5.49), при $m = 2$ – уравнению (5.57). При неограниченном возрастании m гибридное значение величины r^H вырождается в $r^{[2-]}$. Исключение составляет состояние равновесия ($W = 0$), при котором неравновесные величины не существуют.

Будем считать, что неравновесное напряжение, входящее в тензорный коэффициент вязкости (5.14) внепорядковой модели, определено моментным уравнением модели M24с. После принятия такого условия величина $r^{[2-]}$ уже не будет приближением внепорядковой модели, приобретя гибридные свойства.

Последнее положение замыкает разрабатываемую модель. Назовем ее гибридной моделью. Она состоит из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\delta_{i\alpha} p + p_{i\alpha}^H) &= 0; \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) \left(\delta_{\alpha\beta} T + \frac{p_{\alpha\beta}^H}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha^H}{\partial x_\alpha} &= 0; \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) &= -\frac{\theta}{h\tau_p}; \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\
&+ 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}; \quad (5.59) \\
\frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ijk\alpha}^{(4)}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p}; \\
\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_{i\alpha}^{\Omega(4)}}{\partial x_\alpha} &= -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\omega_i}{\tau_p}.
\end{aligned}$$

В этой системе:

$$p_{ij}^H = k_1 p_{ij} - k_2 \left(\mu_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} c_\mu \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right); \quad (5.60)$$

$$q_i^H = k_1 q_i - k_2 \frac{c_p}{Pr} \mu_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}; \quad (5.61)$$

$$\mu_{ij} = \mu \left(\delta_{ij} + \frac{p_{ij}}{p} \right); \quad (5.62)$$

$$k_1 = (1 - W)^m; \quad k_2 = W \sum_{l=1}^m (1 - W)^{l-1} = 1 - k_1; \quad \tau_p = \frac{\mu}{p}; \quad \mu = \mu(T),$$

где m – параметр модели.

Уравнения сохранения записаны в термодинамических переменных, а подсистема неравновесных величин записана в механических переменных. Термодинамическая форма уравнений сохранения обусловлена наличием в ней внепорядковой модели, в которой, как и в модели первого приближения, температуры T_t и T_Ω определены неточно (см. раздел 3.1). Уточним, что после введения моментного значения неравновесного напряжения в тензорный коэф-

коэффициент вязкости в уравнениях сохранения содержится не сама внепорядковая модель, а ее гибридный аналог.

Использование механических переменных в подсистеме неравновесных величин более удобно для численного решения, хотя и не имеет принципиального значения.

Оценку параметра модели m проведем по результатам численного теста. На рис. 5.6 представлен профиль скорости в одноатомном газе при $M_\infty = 7.183$ и $s = 0.75$. Кривые 1 – 5 рассчитаны по гибридной модели, кривая 6 рассчитана по внепорядковой модели. Кривые 1 – 4 соответствуют значениям параметра $m = 1, 2, 3, 4$. Кривая 5 рассчитана при $m \rightarrow \infty$.

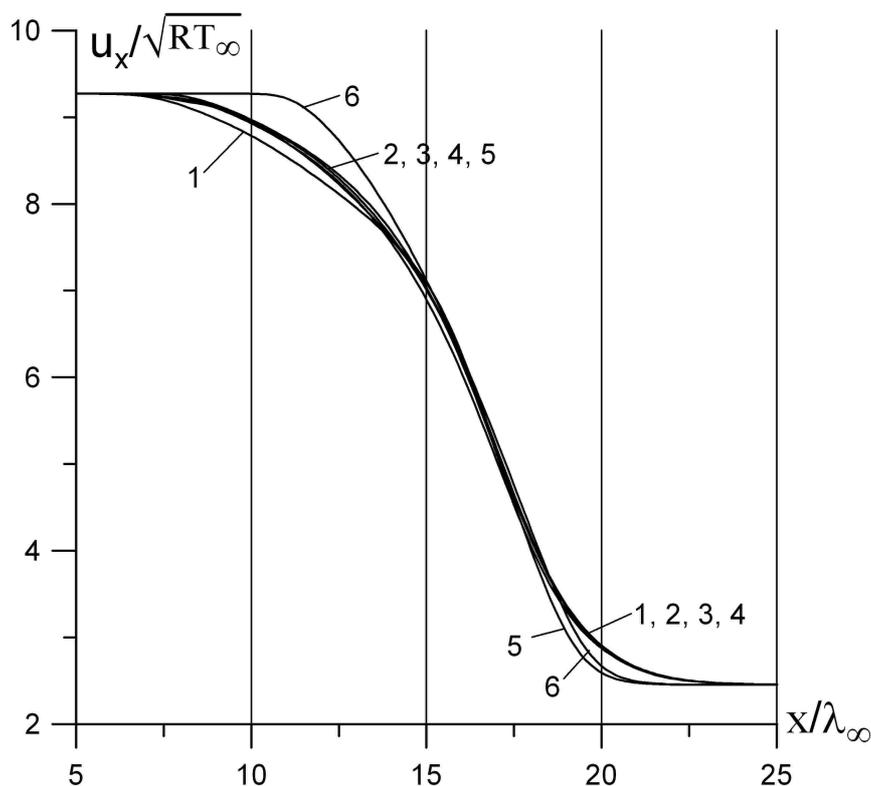


Рис. 5.6. Профиль скорости в плоской ударной волне одноатомного газа. $M_\infty = 7.183$. 1, 2, 3, 4 – гибридная модель при $m = 1, 2, 3, 4$; 5 – гибридная модель при $m \rightarrow \infty$; 6 – внепорядковая модель. Все кривые рассчитаны при $s = 0.75$

Значение параметра m практически не влияет на решение, если оно составляет несколько единиц. Даже в рассматриваемом гиперзвуковом течении высокой неравновесности профиль достаточно широкий и гладкий. Отметим, что узкий высокоградиентный профиль практически всегда можно получить, приняв $s \approx 0.5$ (модель молекул-шаров).

При неограниченном увеличении m (кривая 5) на нижнем по потоку участке профиля возникает высокоградиентная область. Профиль сужается, но остается более широким, чем профиль внепорядковой модели (кривая 6).

Аналогичное соотношение профилей имеет место и в многоатомных газах, хотя различия между гибридной и внепорядковой моделью выражены в меньшей степени.

На основании проведенного анализа представляется целесообразным считать значение параметра модели m постоянным и равным нескольким единицам. Во всех последующих расчетах будет принято $m = 3$.

Описанный метод построения гибридной модели применялся к моделям M24 и M45. Сглаживание профилей имело место только в случае сильного, почти полного, преобладания модели первого приближения. Решение мало отличалось от решения этой модели. Комбинация моделей M24 и M45 с внепорядковой моделью не позволила получить гладкое решение. Видимо, характерный для моделей M24 и M45 “субскачок” является слишком сильным дефектом.

Остается надеяться, что другие методы построения инженерной модели на базе M24 и M45 позволят решить эту проблему.

Глава 6 ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ ВЫРОЖДЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

6.1. Общие замечания

Расчеты вырожденных течений широко распространены в практике моделирования течений газовой среды на разных уровнях описания. Безусловным достоинством такого рода задач является возможность выделения небольшого числа факторов, определяющих условия течения. Анализ полученных результатов, как правило, приводит к вполне определенным выводам относительно свойств рассматриваемой модели.

Тестирование моделей на примере вырожденных течений и сравнение результатов с экспериментальными данными позволяют определить свободные параметры модели. Экспериментальные данные, полученные для вырожденных течений, отличаются высокой степенью достоверности.

В настоящей работе рассматриваются три вида задач, связанных с расчетом вырожденных течений: теплопередача в плоском слое неподвижного газа, плоское течение Куэтта и задача о структуре ударной волны.

В первой задаче течение не относится к числу высоконеравновесных. Расчеты показывают, что даже при отношении температур на границах расчетной области $T_{w1}/T_{w2} = 3$ степень неравновесности W , полученная из решения модели M24, не превышает 0.03 для одноатомных газов и 0.045 для двухатомных. Модели первого приближения в случае неподвижного газа, очевидно, дают $W = 0$. Основным фактором, определяющим параметры газовой среды в этой задаче, являются граничные условия на твердой поверхности. Анализ некоторых видов таких граничных условий будет основной целью тестовых расчетов теплопередачи в неподвижном газе.

Течение Куэтта обладает более высокой степенью неравновесности. Модели M24, M45, M24c при $M = 1$ и $Kn = 1$ дают степень неравновесности $W \approx 0.35$ и $W \approx 0.24$ для одноатомных и двухатомных газов соответственно. В течении Куэтта начинают проявляться различия между моделями, содержащими моментные уравнения и не содержащими таковых. Относительно небольшая неравновесность этих течений позволяет сделать достаточно общие выводы относительно граничных условий на твердой поверхности.

Задача о структуре плоской ударной волны, уже применявшаяся для качественной оценки некоторых свойств разрабатываемых моделей, является своего рода альтернативой двум предыдущим задачам. Число Маха, определяющее степень неравновесности течения, ограничивается, как правило, физическими соображениями. Адекватность между газодинамическим уровнем описания (в узком смысле) и реальными физическими процессами достигается при отсутствии конденсации газа перед ударной волной и отсутствии его диссоциации и ионизации за волной. Других причин, ограничивающих степень неравновесности течения, нет.

Значения основных параметров газа на границах расчетной области определяются исключительно законами сохранения. Требование равновесного со-

стояния среды на границах расчетной области, по существу, определяет значения всех производных параметров газа, что, впрочем, является избыточным граничным условием.

Еще одна позитивная сторона этой тестовой задачи – большое количество экспериментальных данных. Перечисленные выше факторы делают задачу о структуре ударной волны основным тестом для моделей неравновесных течений, пока речь не идет о граничных условиях на твердой поверхности.

В этой главе будут сопоставлены две модели граничных условий на твердой поверхности: феноменологическая модель главы 4 и традиционные для неравновесных течений условия скольжения [9, 65]. Классическая форма условий скольжения в терминах настоящей работы может быть представлена следующим образом:

$$\Delta u_i = -1.431 \frac{p_{i1}^{m[1]}}{\rho \sqrt{RT_t}} - 0.224 \frac{\varphi_i^{[1]}}{p^m}, \quad i = 2, 3; \quad (6.1)$$

$$\Delta T_t = -0.735 \frac{\varphi_1^{[1]}}{\rho R \sqrt{RT_t}}. \quad (6.2)$$

Здесь координата x_1 , фигурирующая в напряжении $p_{i1}^{m[1]}$ и тепловом потоке $\varphi_1^{[1]}$, рассматривается как внешняя нормаль к обтекаемой поверхности.

В уравнении (6.2) коэффициент аккомодации энергии принят равным единице. При описании процессов на реальных шероховатых поверхностях, покрытых развитым адсорбированным слоем, такое допущение в отношении коэффициента аккомодации вполне оправданно, если принимается диффузный закон отражения молекул. Подробнее этот вопрос рассмотрен в [56, 9].

Зависимости (6.1) и (6.2) получены как граничные условия, удовлетворяющие модели НСФ в одноатомном газе. Они весьма эффективны при решении краевых задач. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для выродившихся течений позволяют скорректировать постоянные множители уравнений (6.1) и (6.2) применительно к другим моделям и к течениям многоатомных газов. С этой целью будут рассмотрены граничные условия в виде:

$$\Delta u_i = -\zeta_u \frac{p_{i1}^{m[1]}}{\rho \sqrt{RT_t}} - \zeta_{uT} \frac{\varphi_i^{[1]}}{p^m}, \quad i = 2, 3; \quad (6.3)$$

$$\Delta T_t = -\zeta_T \frac{\varphi_1^{[1]}}{\rho R \sqrt{RT_t}}. \quad (6.4)$$

Здесь ζ_u , ζ_{uT} и ζ_T рассматриваются как свободные параметры модели граничных условий. Задача о теплопередаче позволяет подбирать коэффициент ζ_T независимо от двух других коэффициентов. В течении Куэтта независимо определяется ζ_u . Значение коэффициента ζ_{uT} не может быть определено, в силу одномерности рассматриваемых течений. Некоторые его оценки приведены в главе 7.

Феноменологическую модель (4.13), (4.14), (4.32) будем применять для тестирования всех моделей, зависимости (6.3) и (6.4) – только для моделей M24, M45, M24с и релаксационной моделей. Модели первого приближения, как показано в разделе 3.1, могут вносить существенную погрешность в определение поступательной температуры. Для модели первого приближения, внепорядковой модели, а также гибридной модели, содержащей в себе элементы внепорядковой модели, будут использоваться граничные условия:

$$\Delta u_i = -\zeta_u \frac{p_{i1}^{[1]}}{\rho\sqrt{RT}} - \zeta_{uT} \frac{q_i^{[1]}}{p}, \quad i = 2, 3; \quad (6.5)$$

$$\Delta T = -\zeta_T \frac{q_1^{[1]}}{\rho R\sqrt{RT}}. \quad (6.6)$$

В отношении количества граничных условий, необходимых для моделей с моментными уравнениями, отметим следующее. Характеристическое уравнение модели M24 в одномерном течении представляет собой уравнение шестой степени, коэффициенты которого содержат неравновесную величину ϕ_{ii} . Даже если не принимать во внимание сложность решения этого уравнения, можно предположить, что тип его корней будет существенно зависеть от значений неравновесной величины. Полученные уравнения характеристик будут справедливы только в узких областях поля течения.

Если, следуя Грэду [11], пренебречь неравновесной величиной, то будут получены три семейства двойных характеристик, соответствующих трем тепловым скоростям: $\sqrt{RT_{ii}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}\left(2 \pm \sqrt{\frac{8}{3}}\right)RT_{ii}}$. Можно допустить, что модели M24 и родственным ей моделям достаточно трех граничных условий.

Для численного решения тестовых задач применялись различные методы решения, в частности явная схема Мак-Кормака и метод прогонки ленточной матрицы с нестационарным членом. Результаты расчетов с использованием различных методов практически совпадали. Ввиду того что сами тестовые задачи и методы их численного решения широко известны, мы не приводим систем уравнений рассмотренных моделей, преобразованных для численного решения этих задач.

6.2. Теплопередача в плоском слое неподвижного газа

Схема задачи показана на рис. 6.1. Газовая среда заключена между параллельными бесконечными поверхностями, имеющими температуры T_{w1} и T_{w2} . Будем считать верхнюю поверхность “холодной”, т.е. $T_{w1} > T_{w2}$. Характерной особенностью этой задачи является отсутствие градиентов скорости и связанных с ними диссипативных тепловых потоков.

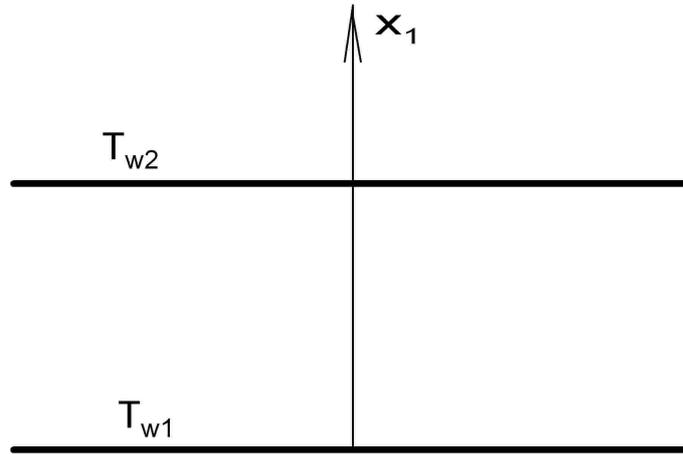


Рис. 6.1. Схема задачи о теплопередаче в плоском слое неподвижного газа

Рассматривалась зависимость отношения теплового потока $q_1 \equiv q$ к его свободномолекулярному пределу q_m от числа Кнудсена:

$$q_m = \frac{\gamma + 1}{4(\gamma - 1)} \sqrt{\frac{2R}{\pi}} R \rho_{w2} \sqrt{T_{w2}} (T_{w1} - T_{w2}); \quad (6.7)$$

$$\text{Kn} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_{w2}}{\rho_{w2} \sqrt{RT_{w2}}} \frac{1}{L}. \quad (6.8)$$

Здесь μ_{w2} , ρ_{w2} – коэффициент вязкости и плотность газа у “холодной” поверхности; L – толщина слоя.

Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными [75, 76]. Отношение температур составляло: $T_{w1}/T_{w2} = 1.013$ для аргона и $T_{w1}/T_{w2} = 1.2$ для воздуха. Степень неравновесности среды при таких значениях температур незначительна. При $\text{Kn} = 1$ модель M24 дает значения $W < 10^{-3}$. В течениях столь низкой неравновесности внепорядковая и релаксационная модели вырождаются в модель первого приближения (для этой модели $W = 0$). Модели M45, M24с и гибридная модель переходят в модель M24.

Отношения тепловых потоков практически совпадали для всех моделей и зависели только от граничных условий. Результаты для аргона и воздуха также практически совпали. Кроме этого, получаемые решения слабо зависели от параметра s в коэффициенте вязкости и от параметра β феноменологической модели (4.32).

Зависимость отношения тепловых потоков от числа Кнудсена показана на рис. 6.2. Для сравнения приведены расчеты модели НСФ с граничными условиями прилипания ($\Delta u_i = 0, \Delta T = 0$). Из рисунка видно, что при $\text{Kn} > 10^{-2}$ кривая 1, соответствующая условиям прилипания, существенно отклоняется от области экспериментальных точек.

Граничные условия скольжения (6.2) дают заниженные результаты при числах Кнудсена, близких к единице (кривая 3). Уменьшение коэффициента ζ_T от 0.735 до 0.55 позволяет улучшить результаты вычислений (кривая 4).

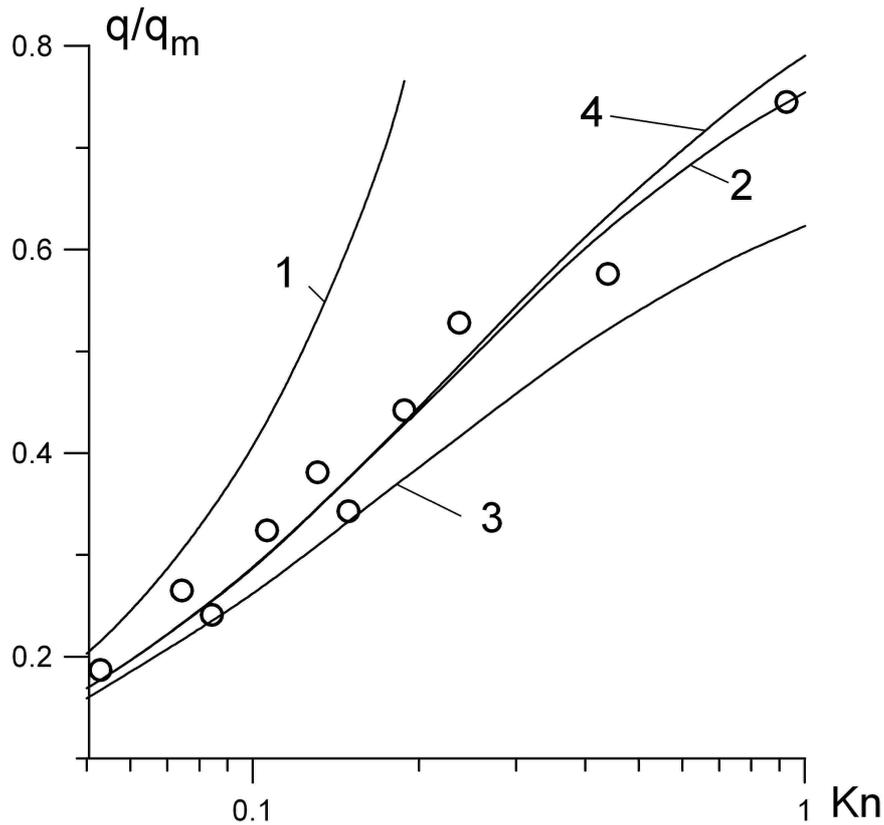


Рис. 6.2. Тепловой поток в плоском слое газа. Газ – воздух, $T_{w1}/T_{w2} = 1.2$.
 O – экспериментальные данные [75, 76]. 1 – модель НСФ с граничными условиями прилипания; 2, 3, 4 – М24, релаксационная модель и модель первого приближения; 2 – феноменологические граничные условия (4.13), (4.14); 3 – граничные условия (6.2); 4 – граничные условия (6.4), (6.6), $\zeta_T = 0.55$

Наилучшую согласованность с экспериментальными данными дает феноменологическая модель граничных условий. Кривая 2 построена по результатам модели М24 при $s = 1$ и $\beta = 5$.

Ниже будет показано, что полученная оценка параметров ζ_T и β распространяется и на более неравновесные течения.

6.3. Плоское течение Куэтта

Схема течения показана на рис. 6.3. Система координат связана с центральной областью течения. Бесконечные параллельные поверхности, имеющие одинаковую температуру T_w , движутся в противоположных направлениях со скоростью u_w .

Рассматривается отношение коэффициента трения c_f к его свободномолекулярному пределу c_{fm} в зависимости от числа Кнудсена при заданном числе Маха:

$$\frac{c_f}{c_{fm}} = 2 \frac{|P_{12}|}{\rho(2u_w)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2u_w}{\sqrt{RT_w}}; \quad (6.9)$$

$$\text{Kn} = \frac{\mu_w}{\rho \sqrt{RT_w}} \frac{1}{L}; \quad (6.10)$$

$$\text{M} = \frac{2u_w}{\sqrt{\gamma RT_w}}. \quad (6.11)$$

Здесь ρ – средняя по толщине зазора плотность газа, L – расстояние между пластинами.

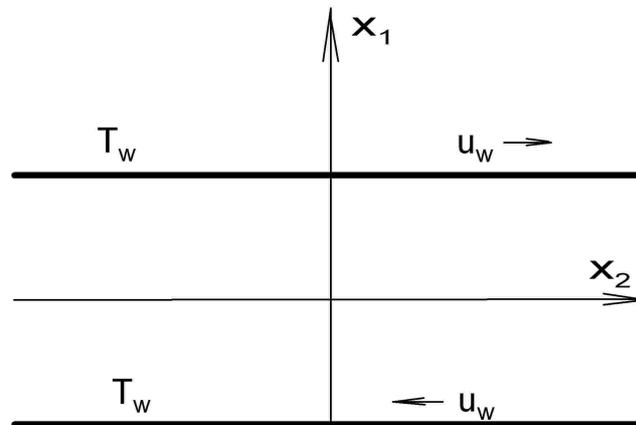


Рис. 6.3. Схема плоского течения Куэтта

При решении этой задачи с ограничением $\text{M} < 2$ модель М24 и базирующиеся на ней “родственные” модели М45, М24с, гибридная модель дают близкие результаты. На этом основании, ниже будут анализироваться расчетные данные только модели М24.

На рис. 6.4 точками обозначены экспериментальные данные Культо и Чанга для воздуха при $\text{M} = 1.4$ [76]. Из приведенных данных следует, что в сильнонеравновесных течениях ($\text{Kn} = 1$, $\text{M} = 1.4$, $\gamma = 7/5$, $W \approx 0.3$) условия прилипания дают существенно завышенные результаты. При $\text{Kn} < 0.1$ феноменологические граничные условия (4.13), (4.14) и условия скольжения обеспечивают практически одинаковый и вполне удовлетворительный коэффициент трения.

При $\text{Kn} > 0.1$ все модели с граничными условиями (6.1), (6.2) занижают результат (кривая 3, модель М24). Граничные условия скольжения при $\zeta_u = 1.21$ и $\text{Kn} < 10$ обеспечивают удовлетворительные значения коэффициента трения (кривая 4 – модель М24, кривая 5 – модель первого приближения). При больших значениях числа Кнудсена эти граничные условия дают коэффициент трения, превышающий свободномолекулярный предел. Здесь необходимо учи-

тывать и тот факт, что модели первого приближения теоретически обоснованы только при $Kn \ll 1$. Удовлетворительные значения коэффициента трения, даваемые моделью первого приближения, даже при $Kn \approx 1$, в значительной степени обусловлены спецификой модельной задачи.

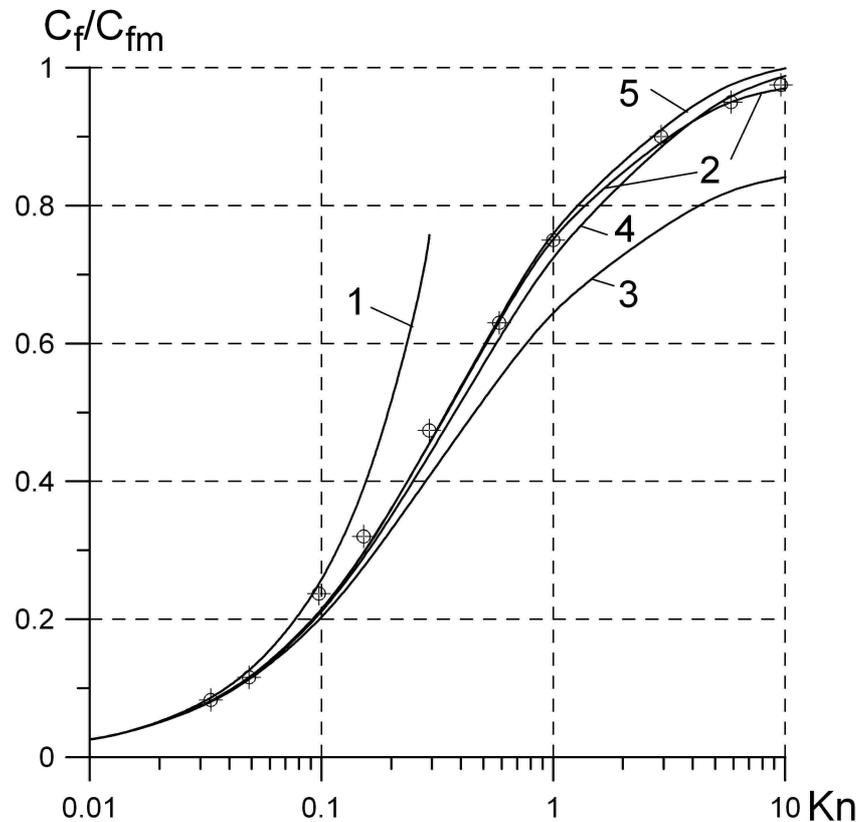


Рис. 6.4. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена в плоском течении Куэтта. Газ – воздух. $M = 1.4$. \circ – экспериментальные данные [76, 77]; 1 – модель НСФ с граничными условиями прилипания; 2, 3, 4 – модель M24; 2 – феноменологические граничные условия; 3 – граничные условия (6.1), (6.2); 4 – граничные условия (6.3), (6.4), $\zeta_u = 1.21$, $\zeta_T = 0.55$; 5 – модель первого приближения, граничные условия (6.5), (6.6), $\zeta_u = 1.21$, $\zeta_T = 0.55$

Следует отметить, что граница физической адекватности условий скольжения зависит от числа Маха, и при $M \approx 4$ превышение свободномолекулярного предела наблюдается уже при $Kn \approx 1$. У феноменологических граничных условий такого недостатка нет. Соответствующая этим граничным условиям кривая 2 построена для модели M24.

Применительно к течению Куэтта при $Kn \rightarrow \infty$ феноменологические граничные условия соответствуют точной свободномолекулярной функции распределения. Уточним, что это относится только к модели граничных условий. Рассматриваемые модели течения таким свойством не обладают.

На рис. 6.5 все кривые соответствуют феноменологическим граничным условиям. Наилучшие результаты получены для 24-моментной модели при

$\beta = 5$ (4.32). Обращает на себя внимание тот факт, что наибольшее расхождение между кривыми имеет место в области $\text{Kn} \approx 1$. Именно в этой области чисел Кнудсена функция распределения падающих молекул меняет эллипсоидальную форму на сферическую.

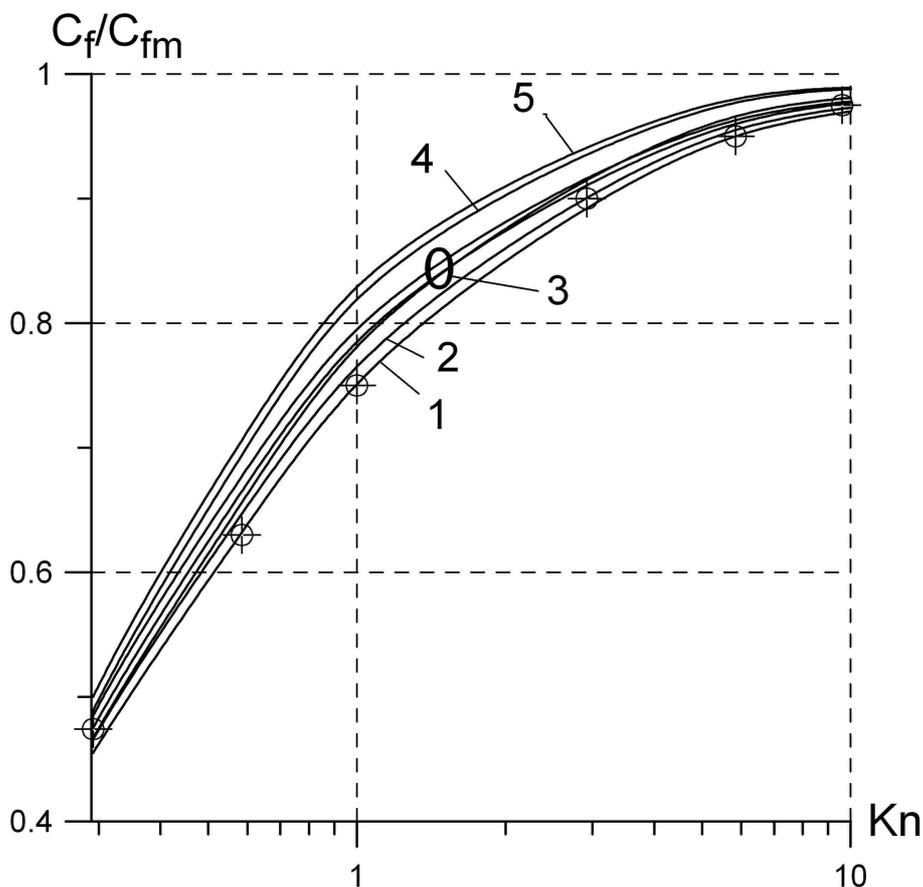


Рис. 6.5. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена в плоском течении Куэтта. Газ – воздух. $M = 1.4$. \circ – экспериментальные данные [76, 77]. Феноменологическая модель граничных условий. 1, 2 – модель M24 $\beta = 5$; 1 – $s = 0.7$; 2 – $s = 1$; 3 – модель M24 ($s = 0.7 \dots 1$, $\beta = 1$), релаксационная модель и модель первого приближения ($s = 0.7 \dots 1$, $\beta = 5$); 4, 5 – релаксационная модель и модель первого приближения ($\beta = 1$); 4 – $s = 0.7$; 5 – $s = 1$

Аналогичные результаты получены при расчетах течений одноатомных газов. На рис. 6.6 представлено сравнение опытных данных Талбота и Бауэра (см. [76]) с результатами расчетов течения одноатомного газа при $M = 0.88$.

Проведенные тесты показали, что феноменологические граничные условия (4.13), (4.14), учитывающие изменение вида функции распределения падающих молекул при $\text{Kn} \approx 1$, вполне адекватны при $\text{Kn} = 10$. Граничные условия скольжения (6.3), (4.4) или (6.5), (6.6) при $\zeta_u = 1.21$ и $\zeta_T = 0.55$ обеспечивают удовлетворительные значения коэффициента трения в переходной области течения ($\text{Kn} \approx 1$). При больших значениях числа Кнудсена коэффициент тре-

ния, даваемый этой моделью граничных условий, может оказаться физически неадекватным.

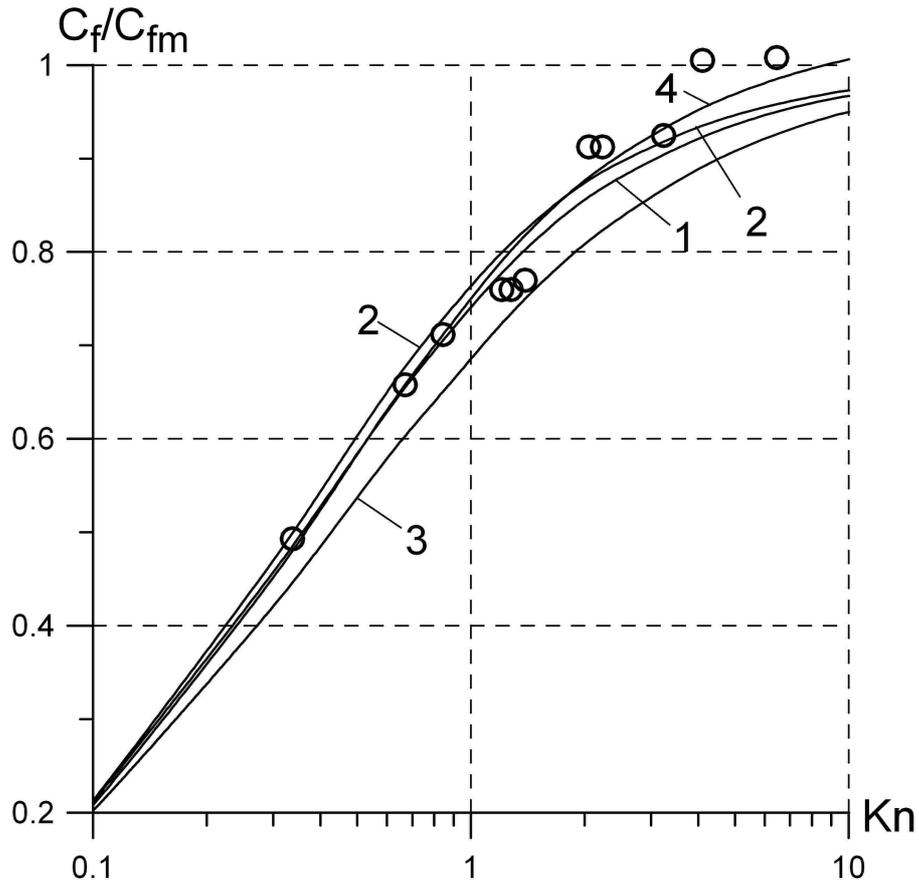


Рис. 6.6. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена в плоском течении Куэтта. Газ – криптон. $M = 0.88$. \circ – экспериментальные данные [76]. 1 – модель M24 и релаксационная модель, $s = 1$, $\beta = 5$, феноменологические граничные условия; 2, 3, 4 – модель первого приближения; 2 – феноменологические граничные условия, $s = 1$, $\beta = 5$; 3 – граничные условия (6.1), (6.2); 4 – граничные условия (6.5), (6.6), $\zeta_u = 1.21$, $\zeta_T = 0.55$

6.4. Задача о структуре ударной волны

Задача формулируется следующим образом. На границах расчетной области выставляются условия Ренкина–Гюгонио. Размер расчетной области составляет несколько десятков длин свободного пробега молекулы в невозмущенном потоке:

$$\lambda_\infty = \frac{\mu_\infty}{p_\infty} \sqrt{RT_\infty}.$$

Анализ результатов расчета проводился по так называемой обратной ширине профиля плотности. Этот параметр вычисляют следующим образом. Значения плотности приводятся к единичному отрезку:

$$\rho^* = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (6.12)$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 – значения плотности перед и за ударной волной.

Затем в точке максимального наклона профиля ρ^* проводится касательная (рис.6.7). Отрезок δ , отсекаемый касательной, принимается в качестве ширины профиля. Обратная ширина профиля вычисляется как λ_∞ / δ . Этот параметр, очевидно, характеризует не ширину профиля в обычном понимании, а его наклон.

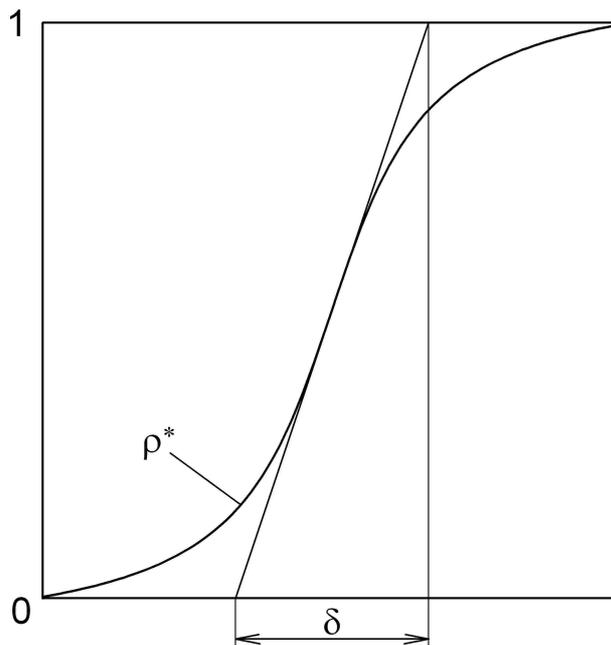


Рис. 6.7. Относительная ширина профиля плотности δ

Задача о структуре ударной волны будет решаться в широком интервале чисел Маха. В связи с этим не будут тестироваться модели M24 и M45, профили которых содержат физически неадекватный субскачок при $M_\infty > 2$. Модель M24c также не будет тестироваться, поскольку она может быть заменена моделью того же уровня информативности и сложности – гибридной моделью. Последняя, в отличие от модели M24c, позволят рассчитывать гладкие профили в гиперзвуковой области. Релаксационная модель, не имеющая аналогов среди разработанных моделей, будет тестироваться в ограниченном по числам Маха интервале.

В настоящем тесте будет рассмотрена внепорядковая модель (5.17), коэффициент вязкости которой определен следующим образом:

$$\mu_{ij} = \mu \left(\delta_{ij} + 2.3 \frac{p_{ij}}{p} \right). \quad (6.13)$$

Множитель 2.3 перед внепорядковым членом подобран опытным путем.

На рис. 6.8 приведены экспериментальные и расчетные данные обратной ширины профиля плотности в ударной волне аргона. Кривая 1 соответствует модели первого приближения, совпадающей в данном случае с моделью НСФ. В сверхзвуковой области чисел Маха даже при $s=1$ профиль слишком крутой, в гиперзвуковой области – слишком пологий.

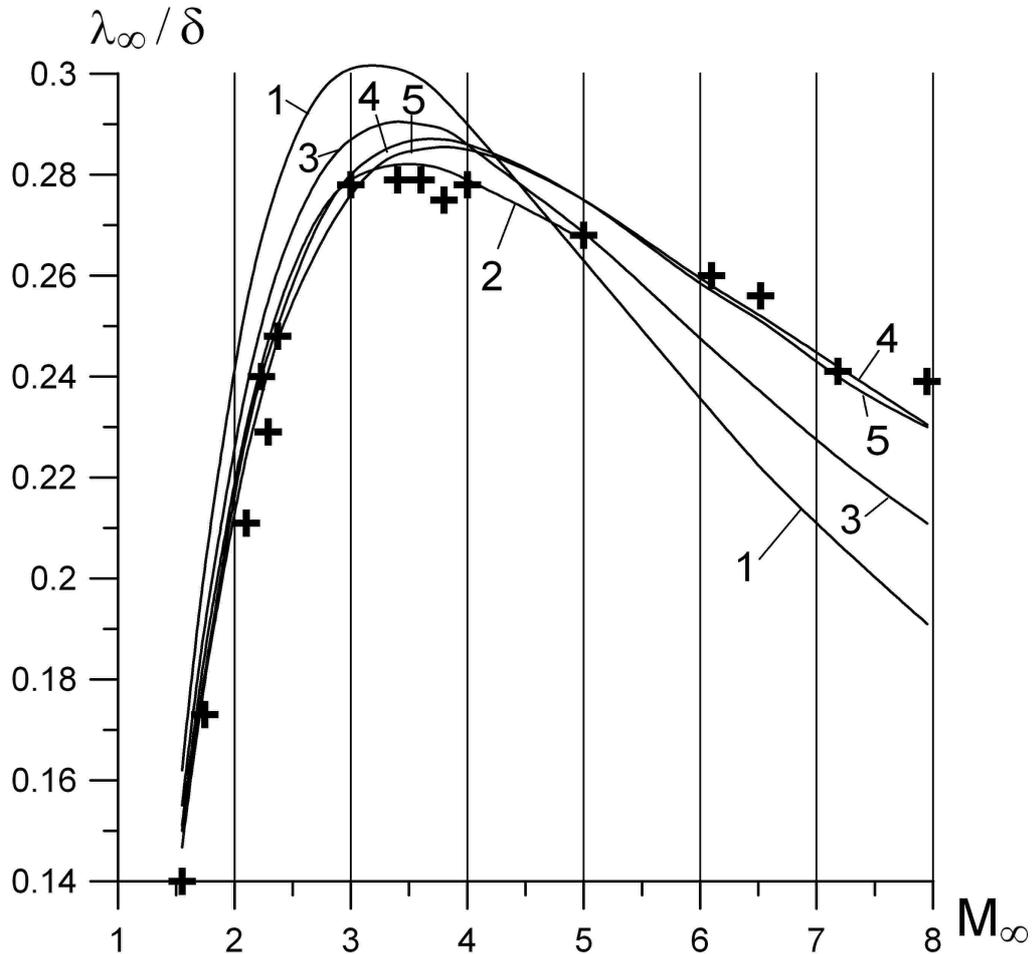


Рис. 6.8. Обратная ширина ударной волны в аргоне. Знак + - экспериментальные данные [73, 74, 78]; 1 – модель первого приближения (НСФ) $s=1$; 2 – релаксационная модель $M_{\infty} \leq 5$, $s=0.9$; 3 – внепорядковая модель $s=0.9$; 4 – внепорядковая модель (6.13) $s=0.82$; 5 – гибридная модель $s=0.8$

Удовлетворительный наклон профиля дает релаксационная модель (кривая 2). Эта кривая построена для $M_{\infty} \leq 5$. При бóльших числах Маха характерная для данной модели волнообразность профиля в невозмущенной области потока становится настолько большой, что возникает вопрос о физической адекватности такого решения.

Внепорядковая модель (кривая 3) улучшает модель первого приближения, хотя в значительной мере наследует ее недостатки. Множитель 2.3 перед внепорядковым членом (см. (6.13)), позволяет получить наклон профиля, удовлетворительно согласующийся с экспериментальными данными (кривая 4). Из

рисунка видно, что кривая 4 мало отличается от кривой 5, построенной по гибридной модели. Среди рассмотренных моделей гибридная модель является наиболее информативной, вместе с тем ее численная реализация существенно проще и экономичнее, чем у релаксационной модели

В неравновесных, и прежде всего в гиперзвуковых, течениях принципиально важную роль играет не столько наклон профиля, сколько ширина возмущенной области, занимаемой профилем. Во многих задачах гиперзвукового обтекания тел размер возмущенной области определяет характер течения. Одна из таких задач будет рассмотрена в главе 7.

На рис. 6.9 показан профиль плотности в ударной волне аргона при $M_\infty = 7.183$. Экспериментальные данные [73] изображены пунктирной линией.

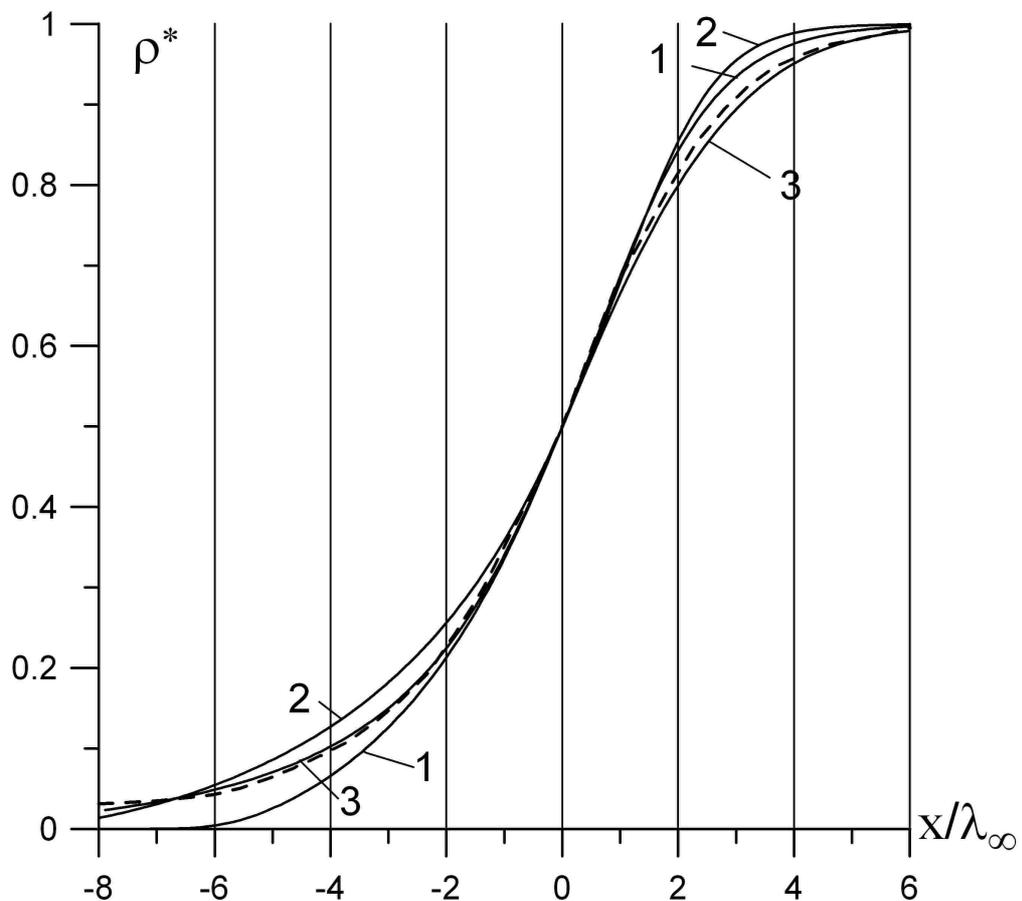


Рис. 6.9. Профиль плотности в плоской ударной волне аргона. $M_\infty = 7.183$. Пунктирная линия – экспериментальные данные [73]; 1 – модель первого приближения (НСФ), $s = 0.945$; 2 – внепорядковая модель (6.13); 3 – гибридная модель

Профиль, рассчитанный по модели первого приближения, наиболее узкий (кривая 1). Его ширину (в обычном понимании) можно оценить десятью длинами пробега. Расчеты по модели первого приближения проводились с параметром $s = 0.945$ для совпадения наклона расчетного профиля с экспериментальным. В связи с этим кривая 1 рис. 6.9 не соответствует кривой 1 рис. 6.8.

Возмущения, рассчитанные внепорядковой моделью (6.13), дальше проникают в невозмущенный поток, но и быстрее затухают за фронтом ударной волны (кривая 2). Ширина профиля – 13 – 14 длин пробега. На рис. 6.9 не показана периферийная область профиля, распространяющаяся вверх по потоку до значений $\approx -10\lambda_\infty$.

Наилучшее соответствие с экспериментальными данными дает гибридная модель (кривая 3). Ширина ее профиля оценивается в 18 – 19 длин пробега. Ширина экспериментального профиля составляет не менее двадцати длин пробега.

При расчете ударных волн в многоатомных газах проявляется различие модели первого приближения и модели НСФ. В остальном результаты тестирования аналогичны полученным выше.

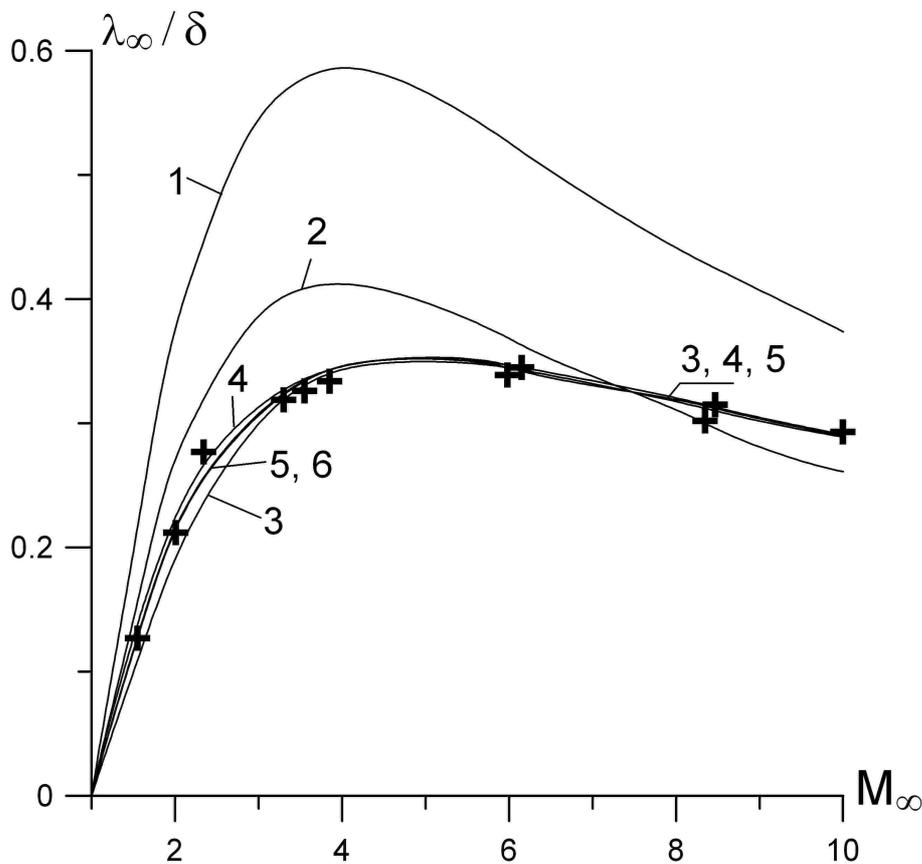


Рис. 6.10. Обратная ширина ударной волны в азоте. Знак + – экспериментальные данные [74, 79]; 1 – НСФ $s=1$; 2 – модель первого приближения $s=1$, $h=h(s)$; 3 – модель первого приближения $s=0.82$, $h=7.3$; 4 – внепорядковая модель (6.13) $s=0.81$, $h=h(s)$; 5 – гибридная модель $s=0.8$, $h=h(s)$; 6 – релаксационная модель $M_\infty < 6$, $s=0.83$, $h=h(s)$

На рис. 6.10 расчетные значения обратной ширины профиля плотности в азоте сопоставлены с экспериментальными данными [74, 79]. Кривая 1, соответствующая модели НСФ при $s=1$, проходит далеко от области эксперимен-

тальных точек. Кривая 2 соответствует модели первого приближения, в которой параметр h рассчитывался по зависимости (1.71). В пояснениях к рисунку эта зависимость условно обозначена $h = h(s)$. Для некоторых практических задач наклон профиля, даваемый моделью первого приближения, можно считать приемлемым.

Если рассматривать h как свободный параметр модели, то при $s = 0.82$ и $h = 7.3$ модель первого приближения (кривая 3) дает наклон профиля, не сильно заниженный в сверхзвуковой области и вполне удовлетворительный – в гиперзвуковой.

Обращает на себя внимание внепорядковая модель (6.13). Результаты расчета этой модели при $s = 0.81$ и $h = h(s)$ представлены кривой 4. Наклон профиля хорошо согласуется с экспериментальными данными и гибридной моделью (кривая 5) как для аргона, так и для азота почти при равных значениях параметра s .

Расчеты по релаксационной модели (кривая 6) проводились при $M_\infty < 6$ по указанным выше причинам (см. пояснения к рис. 6.8, с. 126). Наклон профиля плотности хорошо согласуется с экспериментальными данными и почти совпадает со значениями, даваемыми гибридной моделью.

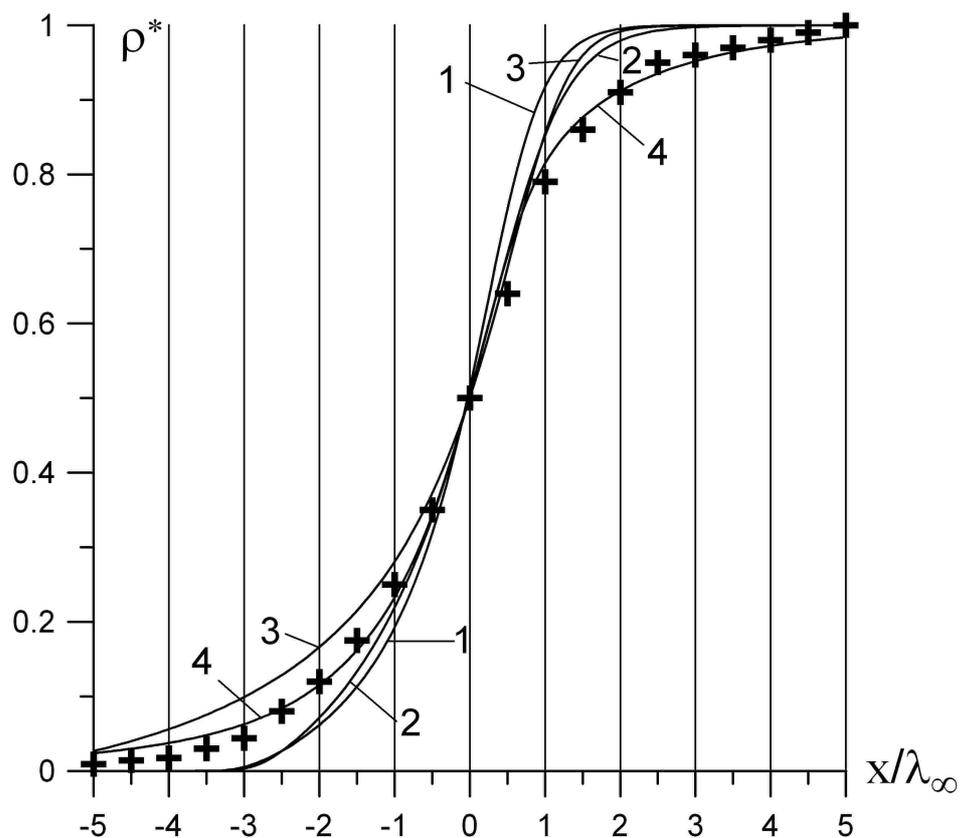


Рис. 6.11. Профиль плотности в плоской ударной волне азота. $M_\infty = 10$. Знак + – экспериментальные данные [74]; 1 – НСФ $s=1$; 2 – модель первого приближения $s=0.82$, $h=7.3$; 3 – внепорядковая модель (6.13) $s=0.81$, $h=h(s)$ 4 – гибридная модель $s=0.8$, $h=h(s)$

Профиль плотности при $M_\infty = 10$ представлен на рис. 6.11. Экспериментальный профиль взят из работы [74]. Наиболее крутой профиль (кривая 1) и наименьшая область возмущения соответствуют модели НСФ при $s = 1$. Наклон этого профиля больше наклона остальных профилей, так как для его уменьшения потребовались бы значения $s > 1$.

Модель первого приближения со свободными параметрами модели $s = 0.82$ и $h = 7.3$ (кривая 2) дает более широкую область возмущений (за счет верхней части профиля) и “правильный” наклон.

Внепорядковая модель (6.13), как и в случае одноатомного газа, позволяет расширить область возмущения вверх по потоку. Наиболее широкая область возмущения и лучшее соответствие формы профиля экспериментальным данным имеет место для гибридной модели (кривая 4).

Тесты позволяют сделать следующие выводы в отношении применения рассмотренных моделей к расчету ударных волн:

1. Модель первого приближения при соответствующем выборе параметра s позволяет получать приемлемый наклон профилей либо в сверхзвуковой, либо в гиперзвуковой области течения. В случае течения многоатомного газа параметр h , рассматриваемый как свободный параметр модели, улучшает свойства модели, расширяя интервал возможных чисел Маха.

2. Внепорядковая модель, оцениваемая по наклону профиля, имеет существенные преимущества по сравнению с моделью первого приближения при незначительном увеличении трудоемкости численной реализации. Форма профиля плохо согласуется с экспериментальными данными.

3. Релаксационная модель позволяет рассчитывать наклон профиля ударной волны с удовлетворительной точностью в сверхзвуковой области течений. Однако даже в этой области течений верхняя по потоку часть профиля имеет нехарактерную для реальных профилей форму (см. рис. 3.6 и 3.7).

Наилучшие результаты получены для гибридной модели. Эта модель значительно уступает в экономичности (в смысле количества вычислительных операций) внепорядковой модели. Отдельно отметим, что при тестировании гибридная модель оказалась на порядок экономичней релаксационной модели. Конкретные значения потребляемого процессорного времени не приводятся, так как эти значения существенно зависят от используемых методов численной реализации. Исследование эффективности тех или иных численных методов применительно к рассматриваемым моделям течения выходит за рамки настоящей работы.

Глава 7 ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НУЛЕВОМ УГЛЕ АТАКИ

7.1. Общие замечания

Задача об обтекании острой кромки гиперзвуковым потоком представляет как практический, так и теоретический интерес. Отдельные элементы летательных аппаратов, например кромки воздухозаборных устройств прямооточных реактивных двигателей, в силу своих конструктивных особенностей имеют настолько малый радиус скругления, что рассматриваются как “острые” кромки. На этих участках имеют место высокий аэродинамический разогрев поверхностей и аномально большие напряжения. Достоверные данные о параметрах газа и поверхности на этих участках принципиально важны при разработке и проектировании летательных аппаратов.

Области острых кромок являются областями формирования косых скачков уплотнения и головных ударных волн. Погрешности в определении параметров газа в этих областях могут привести к качественно неверному описанию интерференции ударных волн, системы косых скачков в каналах и т.п..

В результате движения газа с высокими скоростями вблизи поверхностей большой кривизны образуются области сильнонеравновесного течения. Методы механики сплошной среды в этих областях теоретически не обоснованы. Расчетные данные, полученные с помощью этих методов, не отличаются высокой достоверностью и, как правило, требуют всесторонней экспериментальной проверки.

Определение самого термина “острая кромка” в терминах критериев подобия течения и в контексте применимости методов механики сплошной среды представляет собой самостоятельную и весьма сложную задачу.

Практика расчетов гиперзвуковых обтеканий острых кромок сталкивается с проблемой определения масштаба расчетных сеток. Хорошо разработанные методы построения адаптивных сеток по градиентам параметров газа в слабонеравновесных течениях приводят в условиях высокой неравновесности к столь подробным сеткам, что их численная реализация теряет практический интерес.

Причина этого напрямую связана с сильно завышенными градиентами, даваемыми, например, моделью НСФ. Характерно, что даже на хорошо адаптированных и подробных сетках, интерпретирующих кромку как криволинейную поверхность, решения модели НСФ зачастую физически не адекватны.

В настоящей главе проведена оценка применимости модели первого приближения, а также внепорядковой и гибридной моделей к описанию гиперзвукового обтекания острой кромки. Рассматривается обтекание бесконечно тонкой пластины, установленной под нулевым углом атаки. Такая постановка тестовой задачи позволяет, с одной стороны, предельно сузить широкий спектр конкретных геометрий обтекаемой кромки, с другой – создать “экстремальные” условия обтекания.

Специфика такого обтекания заключается в следующем. На носовой части пластины отсутствует точка торможения потока, так как кромка абсолютно острая. Взаимодействие потока газа с поверхностью происходит за счет касательных напряжений и тепловых потоков.

В набегающем потоке в плоскости размещения пластины выполняются условия симметрии течения и, следовательно, касательные напряжения отсутствуют. В верхней по потоку точке передней кромки, называемой в дальнейшем носиком пластины, касательные напряжения имеют конечное, отличное от нуля значение. Это же относится и к поперечной по отношению к направлению потока составляющей теплового потока.

Таким образом, носик пластины является особой точкой течения, а именно точкой разрыва первой производной продольной составляющей скорости, температуры и других параметров газа. Отметим, что при отличных от нуля углах атаки условие симметрии не выполняется. Течение может не содержать особой точки.

В реальных условиях, даже при очень малых радиусах скругления передней кромки, на ее поверхности будет присутствовать точка торможения потока. Особая точка не возникнет. В этом смысле рассматриваемая тестовая задача “экстремальна”.

Гиперзвуковое обтекание острой кромки изучалось как экспериментальными, так и численными методами в ряде работ [80 – 84]. В качестве острой кромки рассматривался носик клиновидного тела. Поток был направлен параллельно верхней поверхности клина.

При такой постановке задачи в плоскости, являющейся продолжением верхней поверхности клина вверх по потоку, отсутствуют условия симметрии течения. Впрочем, в указанных расчетных работах верхняя по потоку граница расчетной области устанавливалась либо на носике [83, 84], либо в непосредственной близости от него [81]. Возмущением потока перед носиком пренебрегали.

Хотя результаты указанных работ не могут быть непосредственно распространены на поставленную здесь задачу, при анализе результатов тестов будут проведены некоторые сравнения.

В настоящей главе частично использованы материалы работ [85, 86].

7.2. Формулировка задачи. Единицы измерения

Рассмотрим двумерное обтекание бесконечно тонкой пластины, установленной под нулевым углом атаки. Поверхность пластины термостабилизирована. Температура поверхности T_w . Плотность, скорость, температура и давление невозмущенного потока ρ_∞ , u_∞ , T_∞ , p_∞ . Используется декартова прямоугольная система координат, начало которой расположено на носике пластины. Ось X направлена вдоль вектора скорости невозмущенного потока u_∞ . Ось Y является внешней нормалью к верхней поверхности пластины.

Все физические величины рассматриваются в безразмерном виде. Ввиду того что рассматриваемое течение относится к разряду сильнонеравновесных, для обезразмеривания параметров газа используются величины, характерные для молекулярно-кинетической теории:

время $\tau_{p\infty} = \frac{\mu_{\infty}}{p_{\infty}}$ (время релаксации напряжений);

геометрический размер $\lambda_{\infty} = \tau_{p\infty} \sqrt{RT_{\infty}}$ (средняя длина свободного пробега молекулы);

скорость $\sqrt{RT_{\infty}}$ (средняя скорость теплового движения молекул);

плотность ρ_{∞} ;

температура T_{∞} ;

давление и напряжения $p_{\infty} = \rho_{\infty} RT_{\infty}$;

тепловой поток $p_{\infty} \sqrt{RT_{\infty}}$.

При выбранных единицах измерения числа Маха, Кнудсена и Рейнольдса связаны следующим соотношением:

$$\text{Kn} \cdot \text{Re} = \sqrt{\gamma} M.$$

Число Кнудсена, рассчитанное по длине пластины или ее участка, совпадает с соответствующей безразмерной длиной.

7.3. Системы уравнений. Граничные условия

Из всех рассмотренных выше моделей неравновесных течений для решения данной задачи будут использованы модели, не содержащие физически неадекватных участков в области гиперзвукового течения. Это модель первого приближения, внепорядковая и гибридная модели.

Ниже приведены системы уравнений перечисленных моделей. Эти системы записаны в виде развернутых скалярных уравнений, преобразованных для численного решения. Такая форма записи уравнений гибридной модели весьма громоздка и может быть заменена компактной тензорной записью, о чем сказано ниже.

Рассматриваемая тестовая задача накладывает специфические ограничения на методы ее численного решения. Такая специфика связана, прежде всего, с наличием особой точки. В работе [85] показано, что применение явной схемы решения (явная схема Мак-Кормака) не позволяет разместить верхнюю по потоку границу расчетной области достаточно далеко от носика пластины. Там же проведены аналогии с работой [81].

Выбор метода и схемы решения непосредственно связаны с видом конкретного уравнения системы. Порядок дифференциальных уравнений в пределах одной системы каждой из рассматриваемых моделей различен. Более того, уравнения сохранения импульса и энергии гибридной модели меняют свой порядок в зависимости от степени неравновесности течения.

В этой связи автор посчитал целесообразной запись всех систем уравнений в развернутой скалярной форме.

В принятой системе координат в преобразованном для численного решения виде система уравнений модели первого приближения (3.15) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \rho = 0; \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - c_1 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y} = \\ = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + (c_2 + 1) \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - c_1 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(u_y - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} = \\ = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + (c_2 + 1) \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\gamma}{Pr} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{Pr} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{\gamma}{Pr} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left(u_y - \frac{\gamma}{Pr} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \\ + (\gamma - 1) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) T = . \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$= \frac{\gamma - 1}{\rho} \mu \left(c_1 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2c_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_1 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right)$$

В этих уравнениях и ниже $c_1 = \frac{4}{3} + \frac{5 - 3\gamma}{3} h$, $c_2 = \frac{5 - 3\gamma}{3} h - \frac{2}{3}$.

Система уравнений внепорядковой модели (5.17) содержит уравнение сохранения массы в форме (7.1). Остальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - c_1 \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y} = \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-p + \mu_{xy} \left(c_1 \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + c_2 \mu_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) \right); \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - c_1 \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(u_y - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} = \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(-p + c_2 \mu_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu_{xy} \left(c_1 \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad ; (7.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mu_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial y} \right) \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \\ + \left(u_y - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma - 1) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) T = 2 \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\mu_{xy}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\gamma - 1}{\rho} \left(c_1 \mu_{xx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + c_2 (\mu_{xx} + \mu_{yy}) \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_1 \mu_{yy} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \mu_{xy} \left(\left(c_1 \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(c_1 \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \left(\mu_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Коэффициенты вязкости определены зависимостями (5.14) и (3.8):

$$\mu_{ij} = \tau_p \left(\delta_{ij} p + g p_{ij}^{[1]} \right). \quad (7.8)$$

Дополнительный множитель g выполняет функции параметра модели.

Система уравнений гибридной модели (5.59) записана в переменных $\psi_{ijk} = 2\varphi_{ijk}/\rho$ и $\bar{\omega}_i = \omega_i/\rho$. Она содержит уравнение сохранения массы в форме (7.1). Остальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - c_1 k_2 \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - k_2 \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ + \left(u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y} = \quad ; \quad (7.9) \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-p - k_1 p_{xx} + k_2 \left(\mu_{xy} \left(c_1 \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + c_2 \mu_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k_1 p_{xy} + k_2 \left(\mu_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} - k_2 \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - c_1 k_2 \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \\ + \left(u_y - \frac{c_1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} = \quad ; \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-k_1 p_{xy} + k_2 \left(\mu_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(-p - k_1 p_{yy} + k_2 \left(c_2 \mu_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu_{xy} \left(c_1 \frac{\partial u_y}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} k_2 \frac{\mu_{xx}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} k_2 \frac{\mu_{yy}}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \\ + \left(u_y - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial k_2 \mu_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma - 1) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) T = -\frac{\gamma - 1}{\rho} \times \quad ; \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 q_x - \frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma - 1)} k_2 \mu_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1 q_y - \frac{\gamma}{\text{Pr}(\gamma - 1)} k_2 \mu_{xy} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. p_{xx}^H \frac{\partial u_x}{\partial x} + p_{yy}^H \frac{\partial u_y}{\partial y} + p_{xy}^H \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{h \tau_p} \theta = -\frac{2}{3} \left(T_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + T_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) - \\ - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \varphi_x - \frac{2(\gamma - 1)}{5 - 3\gamma} \omega_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{3} \varphi_y - \frac{2(\gamma - 1)}{5 - 3\gamma} \omega_y \right) \right) \quad ; \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}^m}{\partial t} + u_x \frac{\partial p_{xx}^m}{\partial x} + u_y \frac{\partial p_{xx}^m}{\partial y} + \left(\frac{7}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_p} \right) p_{xx}^m = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) p^m + \\ + \frac{2}{3} \left(p_{yy}^m \frac{\partial u_y}{\partial y} + p_{xy}^m \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_{xxx} - \frac{1}{3} \varphi_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_{xyy} - \frac{1}{3} \varphi_y \right) \right) \quad ; \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{yy}^m}{\partial t} + u_x \frac{\partial p_{yy}^m}{\partial x} + u_y \frac{\partial p_{yy}^m}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{7}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_p} \right) p_{yy}^m = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) p^m + \\ + \frac{2}{3} \left(p_{xx}^m \frac{\partial u_x}{\partial x} + p_{xy}^m \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - 2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_{xyy} - \frac{1}{3} \varphi_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_{yyy} - \frac{1}{3} \varphi_y \right) \right) \quad ; \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{xy}^m}{\partial t} + u_x \frac{\partial p_{xy}^m}{\partial x} + u_y \frac{\partial p_{xy}^m}{\partial y} + \left(2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{\tau_p} \right) p_{xy}^m = \\ = -P_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} - P_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} - 2 \left(\frac{\partial \varphi_{xxy}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{xyy}}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} - 2\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - \tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \\ + \left(u_x - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \left(u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\tau_\varphi} \right) \psi_x = \\ = -\psi_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - 2 \left(\psi_{xxx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \psi_{xxy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \psi_{xyy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - \\ - 3 \left(T_{xx} \frac{\partial T_t}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2 \left(T_{xx} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + T_{xy} \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \right) + T_{yy} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_4 \rho \left(2T_t \left(\frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{xxy}}{\partial y} \right) + 7 \left(\psi_{xxx} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xxy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) + \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_4 \rho \left(T_t \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_{xxy}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial y} \right) + 7 \left(\psi_{xxy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - \right) \right) \right) \\ \left. - 2\tau R_{xy} (R_0 + R_{xx} + R_{yy}) \right); \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} - \tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - 2\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \\ + \left(u_x - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \left(u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_\varphi} \right) \psi_y = \\ = -\psi_x \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2 \left(\psi_{xxy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \psi_{xyy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \psi_{yyy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - \\ - 3 \left(T_{xy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2 \left(T_{xx} \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + T_{xy} \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial x} \right) + T_{yy} \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_4 \rho \left(T_t \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial y} \right) + 7 \left(\psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) + \right) - 2\tau R_{xy} (R_0 + R_{xx} + R_{yy}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_4 \rho \left(2T_t \left(\frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial y} \right) + 7 \left(\psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{yyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) + \right) + \psi_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_y \frac{\partial T_t}{\partial y} - 2\tau (R_0 R_{yy} + R_{xy}^2 + R_{yy}^2) \right) \right); \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial t} - 4\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xxx}}{\partial x^2} - \tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xxx}}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{4}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial x} + \\ + \left(u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial y} + \left(3 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\tau_\phi} \right) \psi_{xxx} = -3 \left(T_{xx} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial T_{xx}}{\partial y} \right); \quad (7.18)$$

$$- 3\psi_{xyy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_4 \rho \left(4 \left(\psi_{xxx} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2\tau R_{xx}^2 \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_4 \rho \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (T_t \psi_{xyy}) + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2\tau R_{xx} R_{xy} \right) \right) \right)$$

$$\frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial t} - \tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{yyy}}{\partial x^2} - 4\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{yyy}}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial x} + \\ + \left(u_y - \frac{4}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial y} + \left(3 \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_\phi} \right) \psi_{yyy} = -3 \left(T_{xy} \frac{\partial T_{yy}}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \right); \quad (7.19)$$

$$- 3\psi_{xyy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_4 \rho \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial y} (T_t \psi_{xyy}) + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial x} \right) - 2\tau R_{yy} R_{xy} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_4 \rho \left(4 \left(\psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{yyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 2\tau R_{yy}^2 \right) \right) \right)$$

$$\frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial t} - 2\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xyy}}{\partial x^2} - 3\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xyy}}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial x} + \\ + \left(u_y - \frac{3}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_\phi} \right) \psi_{xyy} = -2\psi_{xyy} \frac{\partial u_y}{\partial x} -$$

$$\begin{aligned}
& -\psi_{yyy} \frac{\partial u_x}{\partial y} - T_{xx} \frac{\partial T_{yy}}{\partial x} - T_{xy} \left(\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \right) - 2T_{yy} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \\
& + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_4 \rho \left(2T_t \frac{\partial \psi_{xxy}}{\partial y} + (\psi_{xxx} + \psi_{xyy}) \frac{\partial T_t}{\partial x} + (\psi_{xxy} + \psi_{yyy}) \frac{\partial T_t}{\partial y} - \right) \right) \right. \\
& \left. - \tau (2R_{xy}^2 + R_{xx}R_{yy}) \right) \Bigg) + \Bigg); \quad (7.20) \\
& + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_4 \rho \left(T_t \frac{\partial \psi_{yyy}}{\partial x} + 3 \left(\psi_{xxy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 3\tau R_{xy} R_{yy} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_{xxy}}{\partial t} - 3\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xxy}}{\partial x^2} - 2\tau_4 T_t \frac{\partial^2 \psi_{xxy}}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{3}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xxy}}{\partial x} + \\
& + \left(u_y - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_4 p^m) \right) \frac{\partial \psi_{xxy}}{\partial y} + \left(2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_\varphi} \right) \psi_{xxy} = -2\psi_{xxy} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \\
& - \psi_{xxx} \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2T_{xx} \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} - T_{xy} \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) - T_{yy} \frac{\partial T_{xx}}{\partial y} + \\
& + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_4 \rho \left(T_t \frac{\partial \psi_{xxx}}{\partial y} + 3 \left(\psi_{xxy} \frac{\partial T_t}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_t}{\partial y} \right) - 3\tau R_{xx} R_{xy} \right) \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_4 \rho \left(2T_t \frac{\partial \psi_{xyy}}{\partial x} + (\psi_{xxx} + \psi_{xyy}) \frac{\partial T_t}{\partial x} + (\psi_{xxy} + \psi_{yyy}) \frac{\partial T_t}{\partial y} - \right) \right) \right) \Bigg); \quad (7.21) \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_4 \rho \left(-\tau (2R_{xy}^2 + R_{xx}R_{yy}) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial t} - 2\tau_{\Omega 4} T_t \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial x^2} - \tau_{\Omega 4} T_t \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{\Omega 4} p^m) \right) \frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial x} + \\
& + \left(u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{\Omega 4} p^m) \right) \frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\tau_\omega} \right) \bar{\omega}_x = \\
& = -\bar{\omega}_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{c_\Omega}{R} \left(T_{xx} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{\Omega 4} \rho \left(\frac{c_\Omega}{R} \left(\psi_{xxx} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x} + \psi_{xxy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial y} \right) + \bar{\omega}_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + \bar{\omega}_y \frac{\partial T_t}{\partial y} + \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p R_0 R_{xx} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{\Omega 4} \rho \left(\frac{c_\Omega}{R} \left(\psi_{xxy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_\Omega}{\partial y} \right) + T_t \frac{\partial \bar{\omega}_y}{\partial x} + \tau R_0 R_{xy} \right) \right); \quad (7.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\omega}_y}{\partial t} - \tau_{\Omega 4} T_t \frac{\partial^2 \overline{\omega}_y}{\partial x^2} - 2\tau_{\Omega 4} T_t \frac{\partial^2 \overline{\omega}_y}{\partial y^2} + \left(u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{\Omega 4} P^m) \right) \frac{\partial \overline{\omega}_y}{\partial x} + \\
+ \left(u_y - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{\Omega 4} P^m) \right) \frac{\partial \overline{\omega}_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\tau_{\omega}} \right) \overline{\omega}_y = \\
= -\overline{\omega}_x \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{c_{\Omega}}{R} \left(T_{xy} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial y} \right) + \quad . (7.23)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{\Omega 4} \rho \left(\frac{c_{\Omega}}{R} \left(\psi_{xxy} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x} + \psi_{xyy} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial y} \right) + T_t \frac{\partial \overline{\omega}_x}{\partial y} + \tau R_0 R_{xy} \right) \right) + \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{\Omega 4} \rho \left(\frac{c_{\Omega}}{R} \left(\psi_{xyy} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x} + \psi_{yyy} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial y} \right) + \overline{\omega}_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + \overline{\omega}_y \frac{\partial T_t}{\partial y} + \tau R_0 R_{yy} \right) \right) \right)$$

Здесь $R_0 = \frac{5-3\gamma}{2h} \frac{\theta}{\tau_p}$; $R_{ii} = \frac{P_{ii}^m}{\rho \tau_p} + R_0$; $R_{xy} = \frac{T_{xy}}{\tau_p}$. Коэффициенты вязкости опре-

делены уравнением (5.62). Гибридные неравновесные напряжения p_{xx}^H , p_{yy}^H , p_{xy}^H – см. (5.60). Среднее время свободного пробега молекулы вводится соотношением $\tau = \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p$. Параметр $\frac{\tau}{\tau_p}$ определен зависимостью (2.48).

Системы уравнений могут быть записаны в индексной тензорной форме. Такая форма использована для записи общих систем уравнений моделей в предыдущих главах. Характерно, что при построении алгоритма численного решения эта форма более удобна, а при многопроцессорной численной реализации – более экономична.

Вместе с тем для эффективной многопроцессорной реализации тензорной формы требуется вводить в программный код “задаваемые операции” или “формальные процедуры” (использованы термины стандарта алгоритмического языка Фортран). Применительно к системе моментных уравнений это операции внешнего произведения, свертывания и симметрирования (“компактное” симметрирование предпочтительно).

В более общем случае этот перечень должен быть дополнен операциями альтернирования и векторного произведения. Построение кода таких операций не содержит принципиальных трудностей, но выходит за рамки настоящей монографии.

На рис. 7.1 показана схема расчетной области течения. Толстой линией изображена обтекаемая пластина. В качестве начальных условий принимались условия невозмущенного потока во всей расчетной области. Граничные условия выставлялись следующим образом.

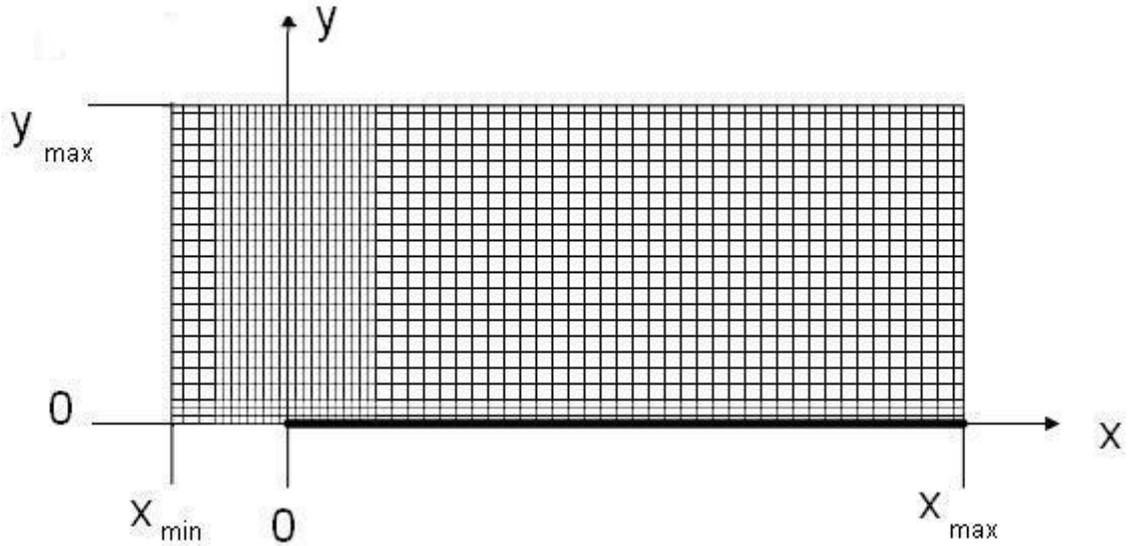


Рис. 7.1. Схема расчетной области

На верхней по потоку границе (линия $x = x_{\min}$) и на линии $y = y_{\max}$ задавались параметры невозмущенного потока. На нижней по потоку границе расчетной области (линия $x = x_{\max}$) вторые производные рассчитываемых параметров принимались равными нулю. На интервале $x_{\min} < x < 0$ линии $y = 0$ (область набегающего потока перед носиком пластины) выставлены условия симметрии, заключающиеся в следующем.

Первые производные по координате Y от параметров, являющихся четными моментами функции распределения по тепловой скорости c_y , равны нулю. Символически это можно представить так:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\rho, u_x, T, T_t, T_{ii}, \psi_x, \psi_{xxx}, \psi_{xyy}, \varpi_x) = 0. \quad (7.24)$$

Нечетные моменты в этой области:

$$u_y, T_{xy}, \psi_y, \psi_{yyy}, \psi_{xxy}, \varpi_y = 0. \quad (7.25)$$

Их вторые производные по координате Y также равны нулю.

Здесь приведен полный перечень переменных гибридной модели. Для модели первого приближения и внепорядковой модели условия распространяются на ρ, u_x, T и u_y соответственно.

На поверхности пластины выставлялись условия скольжения и скачка температуры (6.5) и (6.6). Рассматривались традиционные значения постоянных коэффициентов

$$\zeta_u = 1.431, \zeta_{uT} = 0.224, \zeta_T = 0.735, \quad (7.26)$$

и значения, полученные в главе 6:

$$\zeta_u = 1.21, \zeta_T = 0.55. \quad (7.27)$$

Значение ζ_{uT} было подобрано опытным путем из условий лучшего сглаживания решения в окрестности особой точки. Оно составило $\zeta_{uT} \approx 0.2$ для всех рассмотренных моделей течения.

Расчеты показали, что гибридной модели достаточно трех граничных условий. При различных параметрах расчетной сетки и разных алгоритмах расчета установившиеся решения практически совпадали. Исключение составляла только область особой точки.

Факт достаточности трех граничных условий для гибридной модели не позволяет сделать вывод о необходимом количестве граничных условий модели M24, так как гибридная модель в значительной мере наследует свойства внепорядковой модели. Для последней, так же как и для модели первого приближения, достаточно трех граничных условий.

Отметим, что попытки решения данной тестовой задачи с использованием модели M24 не позволили получить физически адекватные результаты. Это, по-видимому, связано с коротковолновой неустойчивостью модели M24.

При численной реализации гибридной модели был рассмотрен вариант с дополнительными граничными условиями:

$$p_{xy} = -\frac{1}{\zeta_u \sqrt{RT}} (p u_x + \zeta_{uT} q_x); \quad (7.28)$$

$$q_y = \frac{\rho R \sqrt{RT}}{\zeta_T} (T_w - T). \quad (7.29)$$

Значения всех параметров взяты на поверхности пластины. Применительно к уравнениям (7.15), (7.17) и (7.23) эти зависимости имеют вид:

$$T_{xy} = -\frac{1}{\zeta_u \sqrt{T}} \left(T u_x + \zeta_{uT} \left(\frac{1}{2} \psi_x + \varpi_x \right) \right); \quad (7.30)$$

$$\frac{1}{2} \psi_y + \varpi_y = \frac{\sqrt{T}}{\zeta_T} (T_w - T). \quad (7.31)$$

Граничные условия (7.28), (7.29) представляют собой зависимости (6.5) и (6.6), в которых напряжение и тепловые потоки первого приближения заменены их значениями, определенными из соответствующих моментных уравнений. Условия (7.28) и (7.29) по своей структуре соответствуют граничным условиям 13-моментной модели [11].

В слабонеравновесной области ($W \ll 1$, $k_1 \approx 1$, $k_2 \ll 1$) моментные значения напряжений и тепловых потоков практически совпадают с их первыми приближениями. Дополнительные граничные условия слабо отличаются от условий (6.5), (6.6).

В области высокой неравновесности ($W \approx 1$, $k_1 \ll 1$, $k_2 \approx 1$) граничные условия (7.28), (7.29) выполняют функции самостоятельных граничных условий. Но моментные значения напряжений и тепловых потоков, входящие в уравнения сохранения и гибридные выражения напряжений и тепловых потоков (5.60) и (5.61) с весовым коэффициентом k_1 , уже не играют определяющей роли. В этом случае преобладают первые приближения соответствующих вели-

чин ($k_2 \approx 1$). Таким образом, дополнительные граничные условия практически дублируют условия (6.5) и (6.6) в подсистеме моментных уравнений.

Тесты показали, что введение граничных условий (7.28), (7.29) слабо влияет на результаты расчетов, но в то же время существенно повышает устойчивость численного решения. Этим обстоятельством и обусловлено применение дополнительных граничных условий.

7.4. Конечно-разностная реализация

В расчетной области использована единая прямоугольная сетка с переменным шагом (см. схему на рис.7.1). В начале координат (носик пластины) шаг минимален и составляет $\Delta x = \Delta y = 0.1\lambda_\infty$. По мере удаления от начала координат (по оси X – в обоих направлениях) шаг увеличивается в геометрической прогрессии со знаменателем 1.05 – 1.07. После достижения максимального значения $0.5\lambda_\infty$ шаг остается постоянным. Таким образом, обеспечивается наибольшее сгущение сетки в наиболее неравновесной области течения.

Размер расчетной области менялся в пределах $x_{\min} = -(7 \div 10)\lambda_\infty$, $x_{\max} = (120 \div 150)\lambda_\infty$, $y_{\max} = (50 \div 60)\lambda_\infty$. Общее количество узлов расчетной сетки составляло ~ 30000 .

Особая точка течения, как отмечено выше, накладывает существенные ограничения на методы численного решения. В частности, широко распространенные и весьма простые схемы Мак-Кормака, как явная, так и неявная [88], не позволяют получить установившееся решение при достаточно широкой области невозмущенного потока ($|x_{\min}| > 0.5\lambda_\infty$). Видимо, этим обстоятельством обусловлена малая протяженность указанной области ($|x_{\min}| \approx 0.2\lambda_\infty$), используемой в работе [81].

В настоящей работе применен метод прогонки (алгоритм Томаса [87]) в направлении оси X . Ввиду того что решаемые системы уравнений содержат уравнения разных типов, использовалась нестационарная версия этого метода – прогонка ленточной матрицы с нестационарным членом. Таким образом, метод расчета представлял собой метод установления, реализуемый на трех- и четырехдиагональных матрицах.

Для конечно-разностной аппроксимации производных применялись следующие шаблоны. Локальная производная по времени аппроксимировалась линейной зависимостью на отрезке времени Δt . В схемах, использующих трехдиагональную матрицу, первая и вторая производные аппроксимировались квадратной параболой. Шаблон такой схемы изображен на рис. 7.2.

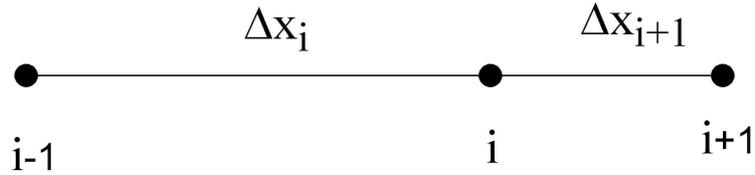


Рис. 7.2. Шаблон для аппроксимации производных на трех узлах расчетной сетки

Дискретные аналоги производных функции F :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = -\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i \Delta_R} F_{i-1} + \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}} F_i + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1} \Delta_R} F_{i+1} + O(\Delta x^3). \quad (7.32)$$

Здесь и ниже $\Delta_R = \Delta x_i + \Delta x_{i+1}$.

В граничных точках:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_{i-1}} &= \\ &= -\frac{2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\Delta x_i \Delta_R} F_{i-1} + \frac{\Delta_R}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}} F_i - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1} \Delta_R} F_{i+1} + O(\Delta x^3). \end{aligned} \quad (7.33)$$

В случае аппроксимации квадратной параболой в любом узле шаблона

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{\Delta x_i \Delta_R} F_{i-1} - \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}} F_i + \frac{2}{\Delta x_{i+1} \Delta_R} F_{i+1} + O(\Delta x^3). \quad (7.34)$$

Для производных по координате Y имеют место эти же соотношения с заменой Δx_{\dots} на Δy_{\dots} .

Трехдиагональная матрица, получаемая после подстановки дискретных аналогов в системы уравнений исследуемых моделей течения, может быть использована для метода прогонки уравнений (7.2) – (7.4) модели первого приближения, уравнений (7.5) – (7.7) внепорядковой модели и уравнений (7.16) – (7.23) гибридной модели. Для остальных уравнений (дифференциальных уравнений первого порядка) матрица коэффициентов будет плохо обусловлена.

Причиной этого являются малые значения разности $\Delta x_{i+1} - \Delta x_i$ (знаменатель прогрессии сетки 1.05 – 1.07) во втором слагаемом правой части (7.32). В периферийных областях расчетной области, где шаг дробления сетки постоянен, рассчитываемый i -й узел полностью “выпадает” из численной схемы.

Отдельно отметим, что уравнения (7.9) – (7.11) гибридной модели содержат вторые производные с коэффициентом k_2 , обращающимся в ноль в области равновесного течения.

Для дифференциальных уравнений первого порядка применена аппроксимация кубической параболой на четырех узлах расчетной сетки. Шаблон показан на рис. 7.3.

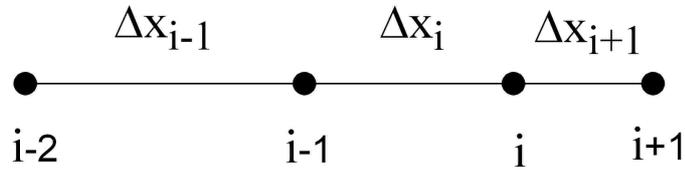


Рис. 7.3. Шаблон для аппроксимации производных на четырех узлах расчетной сетки

Дискретный аналог производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_i} &= \frac{\Delta x_i \Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-1} \Delta_L \Delta_\Sigma} F_{i-2} - \frac{\Delta x_{i+1} \Delta_L}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i \Delta_R} F_{i-1} + \\ &+ \left(\frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}} + \frac{\Delta x_{i-1} \Delta x_i \Delta_L + \Delta x_{i+1} \Delta_L \Delta_\Sigma - \Delta x_i \Delta x_{i+1} \Delta_R}{\Delta x_{i-1} \Delta_L \Delta_R \Delta_\Sigma} \right) F_i + \quad (7.35) \\ &+ \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1}} - \frac{\Delta x_i + \Delta_\Sigma}{\Delta_R \Delta_\Sigma} \right) F_{i+1} + O(\Delta x^4) \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_L = \Delta x_{i-1} + \Delta x_i$, $\Delta_\Sigma = \Delta x_{i-1} + \Delta x_i + \Delta x_{i+1}$.

Производные по координате Y аппроксимированы зависимостями (7.32) и (7.33) с заменой Δx_{\dots} на Δy_{\dots} .

Получаемая четырехдиагональная матрица также плохо обусловлена. Это становится очевидным при постоянном шаге Δx :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \frac{1}{6\Delta x} (F_{i-2} - 6F_{i-1} + 3F_i + 2F_{i+1}) + O(\Delta x^4). \quad (7.36)$$

Коэффициент главной диагонали втрое меньше суммы модулей остальных коэффициентов. Вместе с тем он ни при каких значениях знаменателя прогрессии сетки не обращается в ноль. Сохраняется связь рассчитываемого узла с соседними узлами.

Введение нестационарного члена (локальной производной по времени) позволяет улучшить обусловленность четырехдиагональной матрицы. При решении системы, содержащей уравнения первого и второго порядков, возникает необходимость включения нестационарного члена также и в трехдиагональные матрицы.

Для решения уравнений (7.9) – (7.11) гибридной модели, обладающих отмеченным выше свойством “терять” вторые производные в области равновес-

ного течения, использована комбинация дискретных аналогов производных. Первые производные описываются уравнением (7.35), а вторые – уравнением (7.34). Коэффициенты получаемой четырехдиагональной матрицы представляют собой сумму соответствующих коэффициентов уравнений (7.34) и (7.35).

В отношении устойчивости численного решения рассматриваемых систем уравнений отметим следующее. Число Куранта при $\Delta x_{\max} = 0.5$ для системы уравнений модели первого приближения составляло ~ 0.2 . Для гибридной модели этот параметр ~ 0.1 . Число Куранта внепорядковой модели зависело от параметра g (см.(7.8)), максимальное значение которого ограничено числом Маха невозмущенного потока.

7.5. Результаты расчетов

Расчеты проводились для двухатомного газа при $M_{\infty} = 10.15$ и $T_w = 2.16$ [80]. В указанной работе исследовалось обтекание острого клина. Вектор скорости невозмущенного потока был параллелен верхней поверхности клина. Измерялись нормальные напряжения P_{yy} на этой поверхности.

Как отмечено выше, отличие такого течения от течения, рассматриваемого в тестовой задаче, заключается в том, что перед носиком клина не выполняются условия симметрии течения. Помимо этого, на поверхности реального тела присутствует точка торможения. Носик клина не является особой точкой.

Экспериментальные данные не могут быть полностью распространены на решаемую тестовую задачу. Они будут использованы для качественной оценки результатов расчета.

Расчитанные кривые распределения нормального напряжения на поверхности бесконечно тонкой пластины ($y = 0$) содержат осцилляции P_{yy} в окрестности особой точки. Отсутствие осцилляций имело бы место только в случае полного торможения потока на носике пластины. Носик перестал бы быть особой точкой. Из общих физических соображений можно утверждать, что такое течение невозможно.

Амплитуда осцилляций, а именно ее минимальное значение, использовалась для выбора параметров рассматриваемых моделей течения. Разумеется, нет теоретического обоснования для того, чтобы рассматривать минимум амплитуды в качестве основного критерия применимости той или иной модели к описанию обтекания острой кромки. Выбор такого критерия носит скорее феноменологический и практический характер.

На рис. 7.4 показано распределение нормального напряжения для модели первого приближения при различных значениях параметра s . Параметр h определялся по зависимости (1.71) при $Z = 5$.

Из графиков следует, что наименьшие осцилляции решения соответствуют $s = 0.5$ в аппроксимации $\mu = \mu(T^s)$. При этом имеет место слабая зависимость коэффициента вязкости от температуры. Аналогичные результаты полу-

чены и для других аппроксимаций коэффициента вязкости. В последующих расчетах для модели первого приближения принято $s = 0.5$, $h = 4$ (1.71).

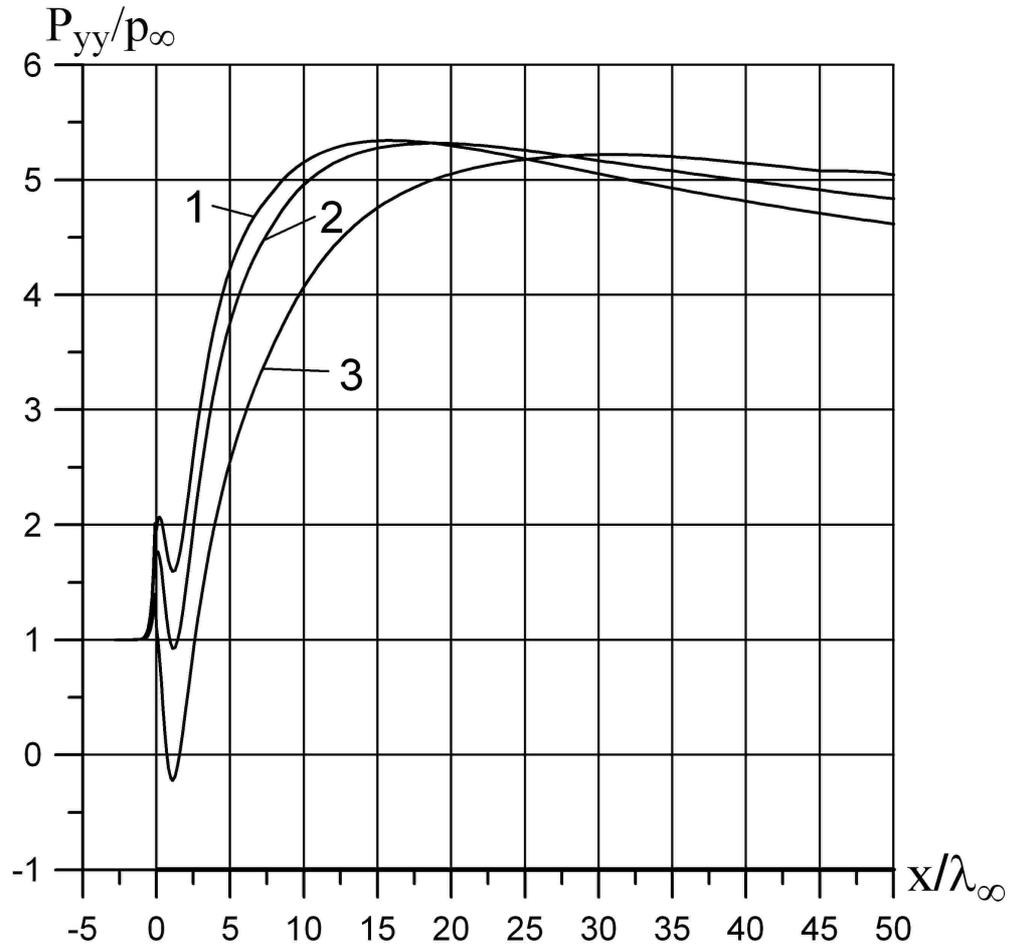


Рис. 7.4. Распределение нормального напряжения при $y = 0$. Модель первого приближения. 1 – $s = 0.5$; 2 – $s = 0.6$; 3 – $s = 0.9$

На рис. 7.5 кривая 1 рисунка 7.4 сопоставлена с кривой нормального напряжения, полученной при $s = 0.5$ и $h = 0$ (модель НСФ без коэффициента объемной вязкости). В области особой точки “провал” напряжения достигает значения $P_{yy} = -0.6$.

В слабонеравновесной области ($x \approx 50\lambda_\infty$) кривые практически совпадают, чего и следует ожидать в слабовозмущенном пограничном слое. В совокупности с результатами расчетов плоской ударной волны (раздел 6.4) такой результат говорит о возможности получения качественно неверных решений при использовании указанной модели для описания неравновесных течений.

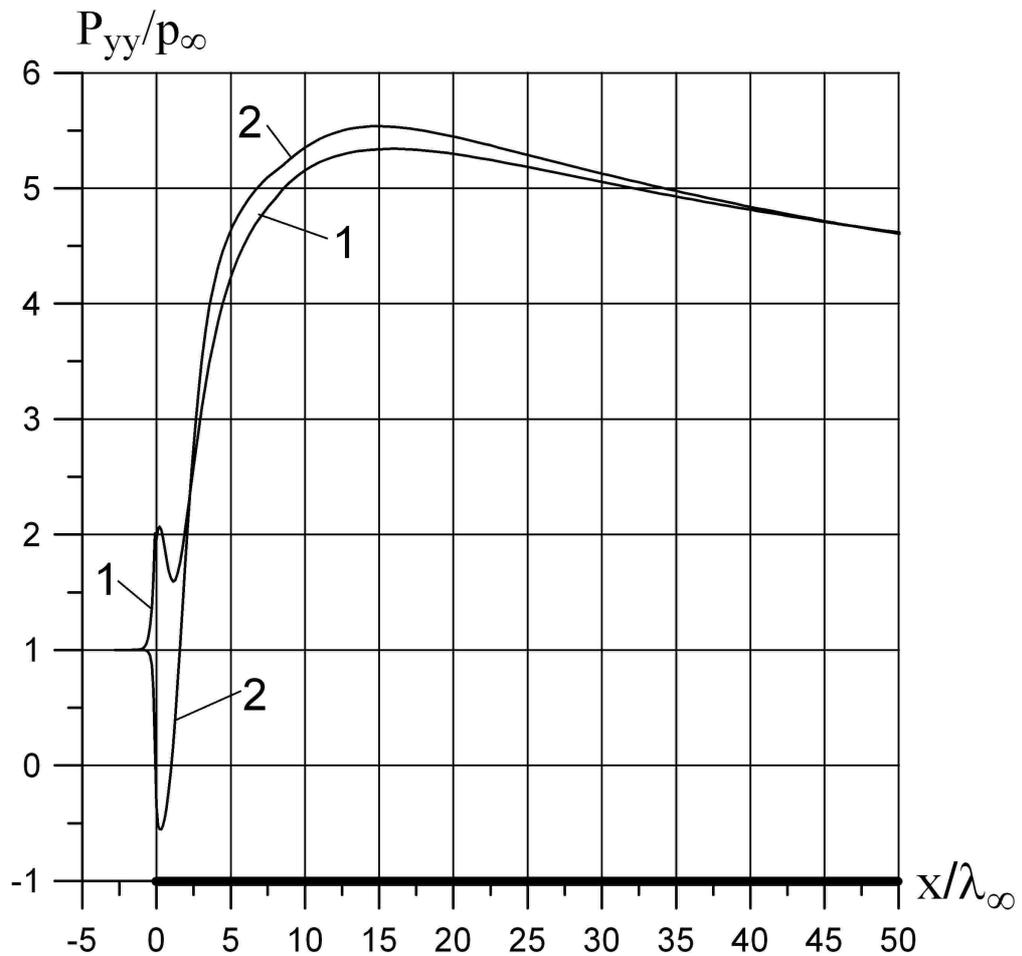


Рис. 7.5. Распределение нормального напряжения при $y = 0$. Модель первого приближения, $s = 0.5$. 1 - $h = 4$; 2 - $h = 0$

Решения внепорядковой и гибридной моделей в меньшей степени зависят от параметра s . Наименьшая амплитуда осцилляций достигается при значениях $s \approx 0.8$, $h = 3.06$ (1.71), которые использованы в дальнейших расчетах. Оценка сделана на основе числовых данных. Графические зависимости не наглядны.

Решения внепорядковой модели сильно зависели от параметра g (7.8). При $g > 4.5$ не удалось получить установившееся решение с использованием описанной расчетной схемы. Это, видимо, связано с тем, что разрыв производных скорости u_i , возникающий в особой точке, дважды входит в выражение неравновесного напряжения.

Производные $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ присутствуют в уравнении неравновесного напряжения (5.10) и в коэффициенте вязкости μ_{ij} (5.14). Таким образом, неравновесные на-

пряжения содержат член $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2$. Приводимые ниже расчетные данные получены при $g = 0.4$.

Гибридной модели коэффициент g не требовался, так как в коэффициенте вязкости μ_{ij} фигурирует напряжение p_{ij} , определенное моментным уравнением (см. (5.62)).

На рис. 7.6 показаны распределения нормального напряжения в плоскости пластины, полученные из решения трех рассматриваемых моделей течения. Коэффициенты граничных условий на пластине соответствовали (7.26).

Здесь приведены экспериментальные данные работы [80]. Пунктирной линией изображено нормальное напряжение, возникающее в условиях свободномолекулярного обтекания. Оно определяется зависимостью

$$(P_{yy})_{FM} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{T_w})p_\infty. \quad (7.37)$$

Значение этого напряжения потребуется при обсуждении результатов.

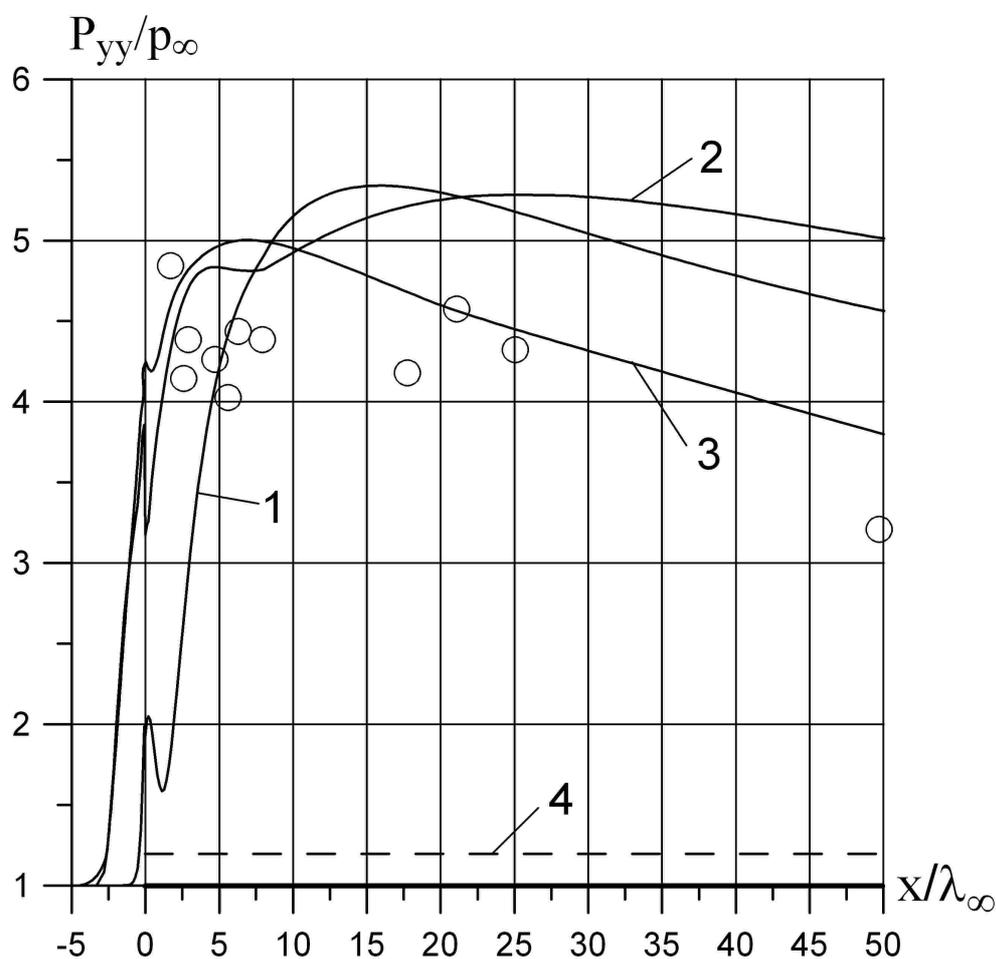


Рис. 7.6. Распределение нормального напряжения при $y = 0$, $M_\infty = 10.15$, $T_w = 2.16$. Граничные условия (7.26). О – экспериментальные данные [80]; 1 – модель первого приближения; 2 – внепорядковая модель; 3 – гибридная модель; 4 – нормальное напряжение на поверхности пластины при свободномолекулярном обтекании (7.37)

График модели первого приближения (кривая 1) существенно смещен в направлении течения относительно области экспериментальных точек. Размер возмущенной области пред носиком пластины в несколько раз меньше соответствующей области двух других моделей. Этот факт, очевидно, связан с отмеченной ранее недостаточной вязкостью модели первого приближения.

Графики внепорядковой и гибридной моделей (кривые 2 и 3) практически полностью находятся в области экспериментальных точек возле носика пластины.

На рис. 7.7 показана возмущенная область перед носиком пластины, соответствующая рис. 7.6.

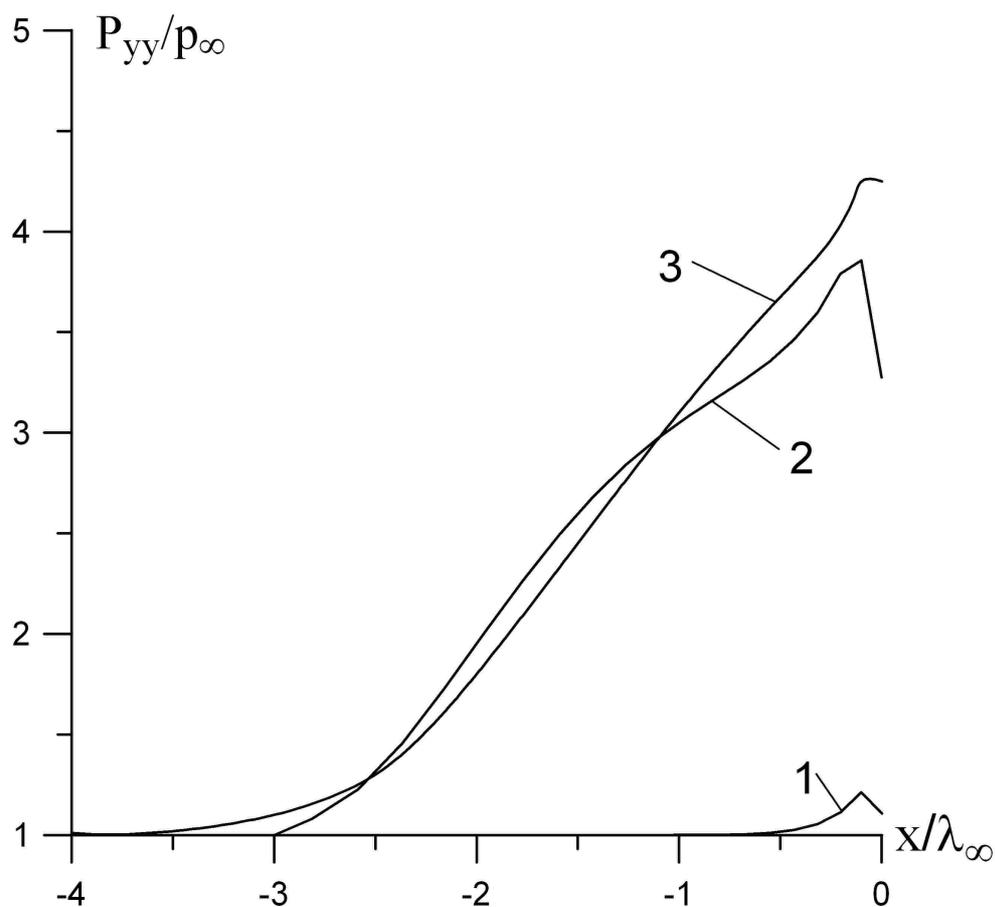


Рис. 7.7. Распределение нормального напряжения при $y = 0$. Фрагмент рис.7.6. Область торможения потока перед носиком пластины. 1 – модель первого приближения; 2 – внепорядковая модель; 3 – гибридная модель

Перед носиком пластины течение, рассчитанное по внепорядковой и гибридной моделям, сильно заторможено. На рис. 7.8 показано распределение продольной составляющей скорости u_x в этой области. Вблизи носика локальные числа Маха составляют: 7.58 – модель первого приближения; 3.21 – внепорядковая модель; 2.29 – гибридная модель.

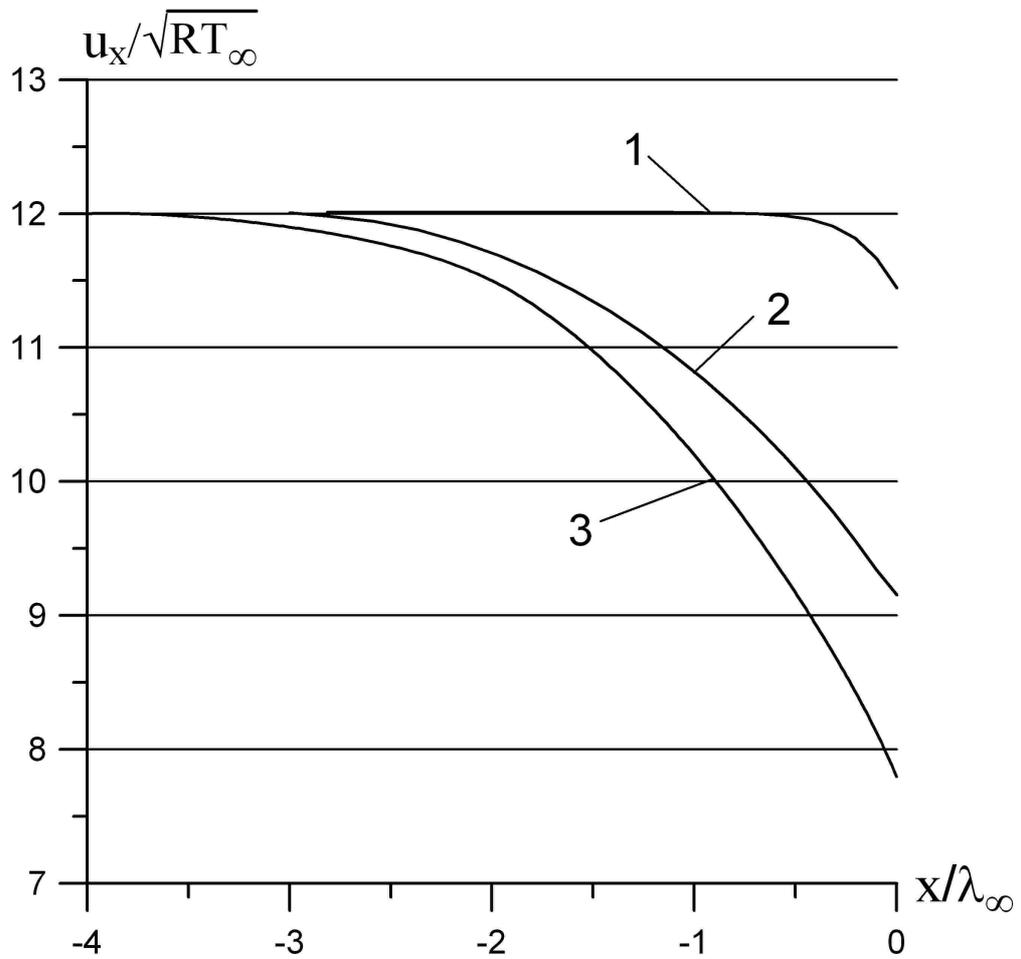


Рис. 7.8. Распределение скорости u_x при $y=0$. Область торможения потока перед носиком пластины. 1 – модель первого приближения; 2 – внепорядковая модель; 3 – гибридная модель

Зависимость распределения нормального напряжения от коэффициентов граничных условий показана на рис. 7.9. Пунктирные кривые соответствуют коэффициентам (7.26). Они перенесены с рис. 7.6. Сплошные линии построены для коэффициентов (7.27) и $\zeta_{uT} \approx 0.2$.

Граничные условия на пластине с коэффициентами (7.27) увеличивают напряжение P_{yy} во всей неравновесной области течения. Это связано с тем, что меньшие значения коэффициентов ζ_u и ζ_T повышают интенсивность процессов трения и теплопередачи. В слабонеравновесной области ($x > (50 \dots 100)\lambda_\infty$) различие в коэффициентах (7.26) и (7.27) слабо влияет на величину P_{yy} .

Как отмечалось, экспериментальные данные [80] получены для обтекания клина. Кроме этого, принятое в работе [80] и в настоящем тесте постоянство температуры поверхности существенно искажает процесс теплопередачи в области носика обтекаемого тела. В связи с этим не представляется возможным определить, какие из граничных условий в данном случае лучше.

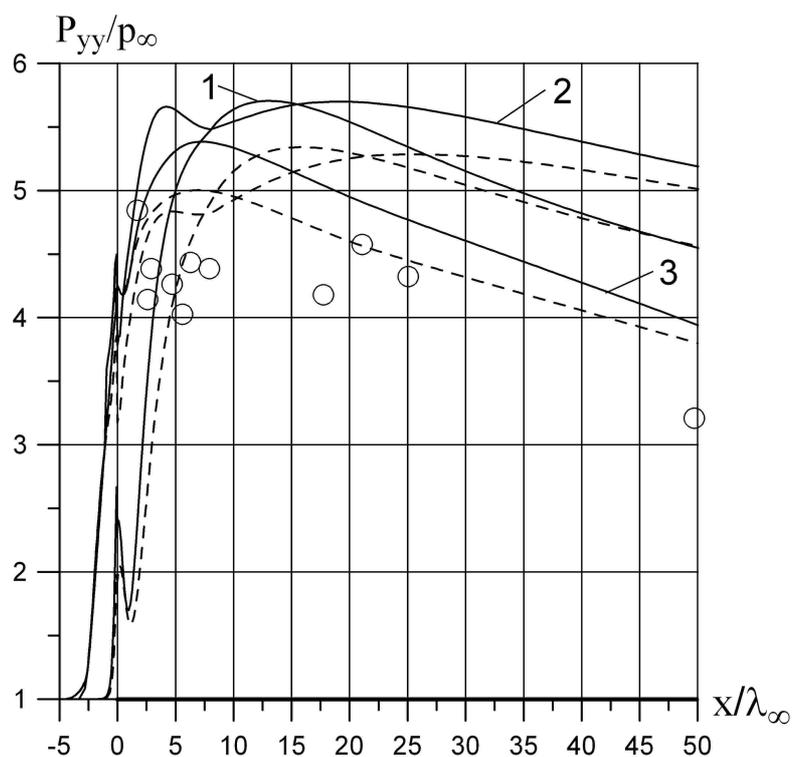


Рис. 7.9. Распределение нормального напряжения при $y = 0$. Граничные условия (7.27). \circ – экспериментальные данные [80]; ----- линии рис. 7.6; 1 – модель первого приближения; 2 – внепорядковая модель; 3 – гибридная модель

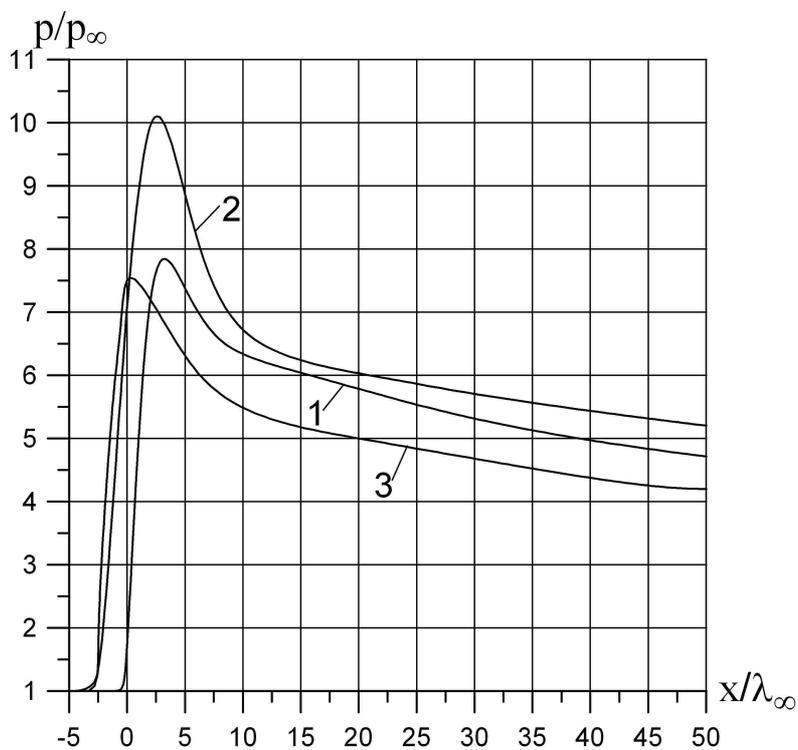


Рис. 7.10. Распределение давления при $y = 0$. 1 – модель первого приближения; 2 – внепорядковая модель; 3 – гибридная модель

Распределения осредненных параметров (давления и температуры) не содержат осцилляций. На рис. 7.10 показаны распределения термодинамического давления, даваемые тремя исследуемыми моделями. Граничные условия соответствовали (7.26).

Гладкие решения являются следствием выполнения законов сохранения. Осцилляции напряжений P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} находятся “в противофазе”, что и приводит к гладким распределениям осредненных параметров.

Тестирование гиперзвукового обтекания тонкой пластины позволяет сделать следующее заключение.

Модель первого приближения неудовлетворительно описывает гиперзвуковое отекание острой кромки, в силу того что область возмущения перед особой точкой значительно сокращена. Такое сокращение области, в свою очередь, является причиной завышения градиентов параметров газа на поверхности обтекаемого тела. При числах Маха $M_\infty \leq 5$ и при соответствующем выборе коэффициента объемной вязкости могут быть получены гладкие распределения P_{yy} [86].

Часто используемая в практических приложениях (в том числе и для гиперзвуковых расчетов) модель НСФ без коэффициента объемной вязкости может давать качественно неверные результаты.

Отметим, что даже в случае детального описания кромки как поверхности большой кривизны при расчете гиперзвуковых обтеканий модель первого приближения не вполне адекватна решаемой задаче. Об этом свидетельствуют результаты тестирования плоской ударной волны, с необходимостью возникающей перед точкой торможения.

Внепорядковая модель позволяет в значительной мере исправить недостатки модели первого приближения. Область возмущения внепорядковой модели существенно шире. Градиенты параметров газа на поверхности обтекаемого тела снижаются. С практической точки зрения важно, что экономичность внепорядковой модели не намного ниже экономичности модели первого приближения.

Наиболее широкую область возмущения и, следовательно, наилучшее сглаживание решения в области особой точки обеспечивает гибридная модель. Относительно широкая область возмущения хорошо согласуется с результатами расчетов профиля плоской ударной волны. Эта же модель требует и наибольших вычислительных ресурсов, что является серьезным ограничением для ее практического использования.

С физической точки зрения лобовая поверхность тела, стянутая в одну точку, представляет собой математическую абстракцию. Однако использование такого рода абстракций в практических расчетах вполне обоснованно, так как это позволяет значительно экономить вычислительные ресурсы. Возникающая в этом случае особая точка течения предъявляет специфические требования к используемой модели процесса, что и демонстрирует проведенное тестирование.

Расчеты острой кромки, стянутой в одну точку, с использованием гибридной модели, в ряде случаев могут оказаться более экономичными, чем расчеты детально описанной лобовой поверхности кромки с использованием более простых моделей. Проведенное тестирование не позволяет сформулировать конкретные рекомендации в этом плане. Такого рода задача требуют специального исследования.

Полученные результаты позволяют сделать некоторые общие оценки процесса гиперзвукового обтекания острой кромки.

В ряде работ, посвященных решению рассматриваемой задачи и использующих модель НСФ, например [81], давление газа в области носовой части отождествляется с нормальным напряжением. Нормальное напряжение в этой области принимает отрицательное значение и не анализируется. Значение вычисленного давления оказывается близким к значению нормального напряжения при свободномолекулярном обтекании (7.37). Расчеты методами прямого статистического моделирования, например [82], дают значения нормального напряжения, также близкие к $(P_{yy})_{FM}$. На этом основании делается вывод: характер гиперзвукового обтекания острых кромок близок к свободномолекулярному.

В упомянутых работах верхняя по потоку граница располагалась практически на носике пластины. Вместе с тем давление в невозмущенном потоке не намного отличается от свободномолекулярного предела нормального напряжения. В рассматриваемой задаче, в соответствии с (7.37), отношение этих величин составляет 1.235 и изображено пунктирной линией на рис. 7.6. Не удивительно, что при указанном расположении верхней границы нормальное напряжение, рассчитанное методами прямого статистического моделирования, слабо отличается от давления в невозмущенном потоке.

Если верхняя по потоку граница достаточно удалена от носика обтекаемого тела, возмущения распространяются вверх по потоку на несколько длин свободного пробега молекулы. На основании проведенного тестирования нельзя точно определить размер возмущенной области, так как разрыв производных в особой точке вносит погрешность в параметры течения. Тем не менее тесты трех моделей свидетельствуют о наличии сильновозмущенной зоны перед носиком бесконечно тонкой пластины. Нормальное напряжение на носике в несколько раз превышает свободномолекулярное значение (см. рис.7.6). Очевидно, что перед носиком реального, даже сильно заостренного тела возмущения будут еще более интенсивными.

Проведение аналогии между гиперзвуковым и свободномолекулярным течениями в области носовой части заостренного тела представляется необоснованным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. –М.: Мир, 1981.
2. Больцман Л., Лекции по теории газов. –М.: Гостехиздат, 1956.
3. Шахов Е.М. Метод исследования движений разреженного газа. –М.: ВЦ АН СССР, 1975. – 207 с.
4. Рыков В.А., Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. №6. С.107-115.
5. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. –М.: Наука, 1989. – 336 с.
6. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. –М.: Наука, 1981. – 206 с.
7. Ларина И.Н., Рыков В.А. Метод численного решения уравнения Больцмана при малых числах Кнудсена // Математическое моделирование. 2000. Т.12. №6.
8. Седов Л.И. Доклады АН СССР. 1965. Т. 165. №3.
9. Коган М.Н. Динамика разреженного газа.–М.: Наука, 1967. – 440 с.
10. Гусев В.Н., Егоров И.В., Ерофеев А.И., Провоторов В.П., Верификация моделей и методов в динамике разреженных газов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. №2. С.128-137.
11. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов:Пер. с англ. // Механика. 1952. Вып. №4 и 5.
12. Enskog D. The kinetic theory of phenomena in fairly rare gases. –Upsala, 1917.
13. Chapman S. On the law of distribution of velocities and on the theory of viscosity and thermal conduction in a non-uniform simple monatomic gas. 1916. Phil. Trans. Roy. Soc., A 216.
14. Holway L.H., Existence of kinetic theory solutions to the shocks structure problem // Phys. Fluids. 1964. V.7. №6.
15. Struchtrup H., Torrilhon M. Regularization of Grad's 13 moment equations: Derivation and linear analysis // Physics of fluids. 2003. V.15, №9. Pp. 2668-2680.
16. Torrilhon M., Struchtrup H. Regularized 13-moment equations: chock structure calculations and comparison to Burnett models // J. Fluid Mech. 2004. V. 513. Pp.171-178.
17. Жданов В.М. К кинетической теории многоатомных газов // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 2099-2108.
18. Алиевский М.Я. Релаксация, распространение звука и процессы переноса в молекулярных газах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. №5. С. 53-67.
19. Бузыкин О.Г., Галкин В.С. О модификациях газодинамических уравнений высших приближений метода Чепмена–Энскога // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. №3. С.185-199.

20. Cercignani C. The Boltzmann equation and its applications. – N.Y.: Springer, 1988. – 455 p.
21. Галкин В.С., Шавалиев М.Ш. Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена–Энскога // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. №4. С.3-28.
22. Бузыкин О.Г., Галкин В.С., Носик В.И. Модификации уравнений Барнетта и задача о структуре ударной волны // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1998. №3. С.164-176.
23. Жигулев В.Н. Уравнения движения неравновесной среды с учетом излучения // Инженерный журнал. 1964. Вып. 2. Т.4. С. 231-241.
24. Галкин В.С. Вывод уравнений медленных течений смесей газов из уравнений Больцмана // Ученые записки ЦАГИ. 1974. Т.5. №4. С.40-47.
25. Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А. Континуальные модели разреженных потоков газа в задачах гиперзвуковой аэродинамики // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 990 – 1016.
26. Лебле С.Б., Соловчук М.А. Уравнения трехмерной динамики газа по функции распределения с разрывом в пространстве скоростей // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. №4. С. 118-128.
27. Никитченко Ю.А. Модель течения газа вблизи поверхности раздела сред // Математическое моделирование. 2003. Т.15. №8.
28. Никитченко Ю.А. Сравнение различных моделей течения газа в широком интервале чисел Кнудсена // Математическое моделирование. 2004. Т.16. №8.
29. Levermore C.D. Moment closure hierarchies for kinetic theories. // J. Stat. Phys. 83(5-6), 1996.
30. Holway L.H. New statistical models in kinetic theory: methods of construction // Phys. Fluids. 1966 V. 3. №3.
31. Pearson K. Mathematical contributions to the theory of evolution – X. Supplement to a memoir on skew variation. Phil. Trans. Royal Soc. London A 197, (1901)443.
32. Pearson K. Mathematical contributions to the theory of evolution – XIX. Second supplement to a memoir on skew variation. Phil. Trans. Royal Soc. London A 216, (1916)429.
33. Поткин В.А. Кинетический анализ разностных схем для газовой динамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т.15. №6 С. 1492-1498.
34. Волочинская М.И., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Об одной схеме интегрирования уравнений газовой динамики. – Препринт №113 ИПМ им. Келдыша АН СССР. –М., 1983.
35. Deshpande S.M. On the maxwellian distribution symmetric form and entropy conservation for Euler equations. – NASA Technical Paper 2583, 1986.
36. Deshpande S.M. Kinetic flux splitting schemes. In: Comp. Dynamic Rev., J. Wiley, Chichester, 1995, h. 161-181.

37. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений // Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. С. 261-278.
38. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Макроскопическая модель газа с по-
ступательно-вращательной неравновесностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. №1. С.141-153.
39. Жигулев В.Н. Об уравнениях физической аэродинамики // Инженер-
ный журнал. 1963. Т.3. №1. С. 137-139.
40. Кнезер Г. Релаксационные процессы в газах // Физическая акустика /
Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. М.: Мир, 1968. Т.2. Ч. А. С. 155-221.
41. Жигулев В.Н., Кузнецов В.М. Некоторые проблемы физической аэро-
динамики // Труды ЦАГИ. 1969. Вып. 1136. С. 1-26.
42. Галкин В.С., Русаков С.В. К теории объемной вязкости и релаксаци-
онного давления // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. Вып.6.
С. 1051-1064.
43. Lordi J. A., Mates R. E. Rotational relaxation in nonpolar diatomic gases //
Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. №2.
44. Галкин В.С., Русаков С.В. О точности модифицированной поправки
Эйкена к коэффициенту теплопроводности молекулярных газов // Изв. РАН.
Механика жидкости и газа. 2005. №4. С. 180–185.
45. Никитченко Ю.А., Система моментных уравнений многоатомных га-
зов // Полет. 2010. №11. С. 43-51.
46. Ларина И.Н., Рыков В.А. Подобие гиперзвуковых течений разрежен-
ного газа около тупых тел // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981.
№2. С. 130-135.
47. Bird G.A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows.
Oxford: Clarendon Press, 1994.
48. Carnevale E.H., Carey C., Larson G. Ultrasonic determination of rotational
collision numbers and vibrational relaxation times of polyatomic gasses at high tem-
peratures // J. Chem. Phys. 1967. V.47, №8. Pp. 2829-2835.
49. Prangma G.J., Alberga A.H., Beenakker J.M. Ultrasonic determination of
the volume viscosity of N₂, CO, CH₄, and CD₄ between 77 and 300 K // Physica.
1973. V. 64. №2. Pp. 278-288.
50. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Численные методы газовой динамики. –
М.: Высшая школа, 1987. – 232 с.
51. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. –М.: Наука,
1954.
52. Физическая энциклопедия. Т.3. –М.: Изд-во «Большая Российская эн-
циклопедия», 1992.
53. Никитченко Ю.А., Модели первого и второго приближений для тече-
ний многоатомных газов // Вестник МАИ. 2012. Т.19. №2. С. 11-17.
54. Nocilla S. The surface re-emission low in free molecular flow // Proc. of
3rd Int. symp. on rarefied gas dynamics. 1963. V.1. Pp. 327-346.

55. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. –М.: Наука, 1973. –245 с.
56. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. –М.: Наука, 1975. –343 с.
57. Gross E.F., Jackson E.A., Ziering S. Boundary value problems in kinetic theory of gases // *Ann. Phys.* 1957. V.1. №2. Pp. 141-167.
58. Ивченко И.М., Яламов Ю.И. Кинетическая теория течения газа, находящегося над твердой стенкой в поле градиента скорости // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1968. №6. С. 139-143.
59. Loyalka S.K. Approximate method in the kinetic theory // *Phys. Fluids.* 1971. V.14. №11 Pp. 2291-2294.
60. Савков С.А., Юшканов А.А. О зависимости коэффициентов скольжения от характера взаимодействия молекул газа с твердой поверхностью // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1986. №5. С. 149-152.
61. Sone Y. Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary // *Rarefied gas dynamics.* N.Y.; L.: Acad. Press. 1969. V.1. Pp. 243-253.
62. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. Скольжение двухатомного газа вдоль плоской поверхности // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 1998. №5. С. 182-189.
63. Латышев А.В., Юшканов А.А. Моментные граничные условия в задачах скольжения разреженного газа // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2004. №2. С. 193-208.
64. Поддоскин А.Б. Влияние неупругих столкновений на коэффициенты скольжения первого порядка двухатомного газа с вращательными степенями свободы // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2004. №6. С. 176-182.
65. Welander P., *Arkiv far Fysik* 7, Hafte 6, 507 (1954).
66. Свирщевский С.Б., Никитченко Ю.А. Кинетические методы в аэродинамике. – М.: Изд-во МАИ, 2001. – 63 с.
67. Mott-Smith H.M. The solution of the Boltzmann equation for a shock wave // *Phys. Rev.*, 82(6): 885.
68. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью – М.: Физматгиз, 1959. – 220с.
69. Zhong X., MacCormack R.W., Chapman D.R. Stabilization of the Burnett equations and application to hypersonic flows // *AIAA Journal.* 1993. V. 31. №6. Pp. 1036-1043.
70. Lumpkin F.E. III, Chapman D.R. A new rotational relaxation model for use in hypersonic computational fluid dynamics // *AIAA Paper* 89-1737. 1989.
71. Lumpkin F.E. III, Chapman D.R. Accuracy of the Burnett equations for hypersonic real gas flows. // *Journal of thermophysics and heat transfer.* 1992. Vol.6. №3, july-sept.
72. Chapman D.R., Fisco K.A., Lumpkin F.E. Fundamental problem in computing radiating flow fields with thick shocks // *SPIE proc. on sens. discr.* V.879. 1988. Pp. 106-112.

73. Holtz T., Muntz E.P. Molecular velocity distribution functions in an argon normal shock wave at Mach number 7 // *Phys. Fluids* 26 (9), September 1983. Pp. 2425-2436.
74. Alsmeyer H. Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 74. Pt. 3. Pp. 497-513.
75. Teagan W.P., Springer G.S. Heat-transfer and density-distribution measurements between parallel plates in the transition regime // *The Physics of Fluids*, 1968. V. 11, №3. Pp. 497-506.
76. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа: – М.: Машиностроение, 1977. – 184 с.
77. Alofs H., Springer G.S. Cylindrical Couette flow experiments in the transition regime // *The Physics of Fluids*. 1971. V. 14. №2. Pp. 298-305.
78. Schmidt B. Electron beam density measurements in argon // *J. Fluid Mech.* 1969. №39. Pp. 361-366.
79. Robben F., Talbot L. Experimental study of the rotational distribution function of nitrogen in a shock wave // *Phys. Fluids*. 1966. V.9. №4. Pp. 653-662.
80. Becker M., Boyland D.E., Flow field and surface pressure measurements in the fully merged and transition flow regimes on a cooled sharp flat plate, *Rarefied Gas Dynamics*, Suppl. 4, Vol. 2, ed. by C.L. Brundin, Academic Press, New York, 1967. Pp. 993-1014.
81. Tannehill J.C., Mohling R.A., Rakich J.V. Numerical computation of the hypersonic rarefied flow near the sharp leading edge of a flat plate // *AIAA Paper*. 1973. №73-200. Pp. 1-13.
82. Butler T.D., Numerical Solutions of Hypersonic Sharp-Leading-Edge Flows // *The Physics of Fluids*. Vol. 10. No. 6. June 1967. Pp. 1205-1215.
83. Stookesberry D.C., Tannehill J.C. Computation of separated flow using the space-marching conservative supra-characteristics method // *AIAA Journal*. 1987. V. 25. №8. Pp. 1063-1070.
84. Kuznetsov M.M., Lipatov I.I., Nikolskii V.S. Rheology of rarefied gas flow in hypersonic shock and boundary layers // *Fluid Dynamics*. 2007. V.42. №5. Pp. 851-857.
85. Никитченко Ю.А. Применение модели Навье–Стокса–Фурье к расчету гиперзвукового обтекания тонкой пластины // *Вестник МАИ*. 2011. Т.18. №3. С. 21-28.
86. Рыжов Ю.А., Никитченко Ю.А., Парамонов И.В. Численное исследование гиперзвукового обтекания острой кромки на основе модели Навье–Стокса–Фурье // *Электронный журнал “Труды МАИ”*. 2012. №55. 9 с.
87. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 1. – М.: Мир, 1991. – 502с.
88. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 2. – М.: Мир, 1991. – 552с.

Научное издание

Никитченко Юрий Алексеевич

**МОДЕЛИ
НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Редактор Е.Л.Мочина

Подписано в печать 2.09.13.
Бум. писчая. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,30. Уч.-изд. л. 10,00. Тираж 500 экз.
Зак.364/216.

Отпечатано с готового оригинал-макета

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993