

Учреждение Российской академии наук
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева
Сибирского отделения РАН

ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ:
ТЕОРИЯ И НОВЫЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ**

*посвященная памяти чл.-корр. РАН В. М. Тешукова
и приуроченная к 65-летию со дня его рождения*

2 – 4 марта 2011 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Новосибирск
2011

Программный комитет:

Ляпидевский В. Ю., д.ф.-м.н. — сопредседатель (Новосибирск)
Чупахин А. П., д.ф.-м.н. — сопредседатель (Новосибирск)
Алексеев С. В., чл.-корр. РАН (Новосибирск)
Андреев В. К., д.ф.-м.н. (Красноярск)
Козлов В. В., д.ф.-м.н. (Новосибирск)
Крайко А. Н., д.ф.-м.н. (Москва)
Куликовский А. Г., академик РАН (Москва)
Липатов И. И., д.ф.-м.н. (Москва)
Макаренко Н. И., д.ф.-м.н. (Новосибирск)
Овсянников Л. В., академик РАН (Новосибирск)
Плотников П. И., чл.-корр. РАН (Новосибирск)
Хабиров С. В., д.ф.-м.н. (Уфа)
Чашечкин Ю. Д., д.ф.-м.н. (Москва)
Чесноков А. А., д.ф.-м.н. (Новосибирск)

Всероссийская конференция “Нелинейные волны: теория и новые приложения” посвящена памяти чл.-корр. РАН В. М. Тешукова и приурочена к 65-летию со дня его рождения. Инициатором проведения конференции и ее организатором выступает Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, который В. М. Тешуков возглавлял с 2004 по 2008 гг. Основная тематика конференции — развитие математических методов исследования актуальных проблем гидродинамики, газовой динамики и смежных областей механики сплошных сред. В ходе работы конференции будут представлены оригинальные сообщения по следующим научным направлениям:

- Математическая теория нелинейных волновых процессов в неоднородных средах;
- Новые модели многофазных сред и жидкостей с усложненными свойствами;
- Теоретико-групповые и геометрические методы в механике.

Сборник включает тезисы докладов, представленных на конференцию учеными из различных научных центров России и зарубежья. Они объединены общим научным направлением — нелинейные волновые процессы в неоднородных средах, крупный вклад в развитие которого внес В. М. Тешуков.

Организаторы надеются, что проведение конференции будет способствовать обмену современной научной информацией в области математической гидромеханики и теории нелинейных волновых процессов, а также обсуждению новых перспективных направлений исследований.

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-06011).

Содержание

АЛЕКСЕЕВ Г. В. <i>О некоторых обратных задачах теории распространения волн в неоднородных средах</i>	7
АЛЕКСЕЕНКО С. В., МАРКОВИЧ Д. М., ЧЕРДАНЦЕВ А. В. <i>Волновая структура пленки жидкости в присутствии интенсивного газового потока</i>	8
АЛЕКСЕЕВ Г. В., ТЕРЕШКО Д. А. <i>Численный анализ задач управления для нестационарных уравнений тепловой конвекции</i>	9
АНДРЕЕВ В. К. <i>О нелинейных волнах в неоднородной жидкости</i>	10
АРХИПОВ Д. Г., КАЧУЛИН Д. И., ЦВЕЛОДУБ О. Ю. <i>Исследование дивергентной системы уравнений для возмущений пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости</i>	11
БАУТИН С. П. <i>Математическое моделирование природных вихрей типа торнадо</i>	12
БЕЛОНОСОВ В. С. <i>Математическая теория нелинейного резонанса для абстрактных гиперболических уравнений</i>	13
БЕЛЫХ В. Н. <i>Об асимптотике колмогоровской ε-энтропии компакта бесконечно дифференцируемых функций (к проблеме К. И. Бабенко)</i>	14
БОГДАНОВ А. Н., ДИЕСПЕРОВ В. Н. <i>Картинки возмущений пограничного слоя при нелинейном профиле скорости набегающего потока</i>	15
БОРЩ В. Л. <i>Вывод уравнения магнитной индукции из гипотезы молекулярных вихрей по Больцману</i>	17
ВАГАНОВА Н. А., ФИЛИМОНОВ М. Ю. <i>Моделирование распространения тепла от теплоизолированной скважины в условиях вечной мерзлоты</i>	18
ВАСИЛЬЕВ А. А. <i>Нелинейные волны при горении и детонации</i>	19
ВЕРЕВКИН И. В. <i>Преобразование Эйлера — Дарбу уравнения Фоккера — Планка</i>	19
ВОРОПАЕВА О. Ф., ЧЕРНЫХ Г. Г. <i>Взаимодействие зоны турбулентного смешения с локальным возмущением гидродинамических полей в устойчиво стратифицированной среде</i>	20
ГАЛЬЦЕВ О. В., МЕЙРМАНОВ А. М. <i>Неустойчивость Релея — Тейлора в теории фильтрации</i>	21
ГАНЖА Е. И. <i>Мультиинтегралы Эйлера в кольцах псевдодифференциальных операторов</i>	22
ГЕРБЕР Е. А., КУТРУНОВ В. Н. <i>Движение кольца вязкой капиллярной жидкости</i>	23
ГОЛОВИН С. В., КАЗАКОВА М. Ю. <i>Трансзвуковые течения газа с неплоскими ударными волнами</i>	25
ГОЛОВИН С. В., КРУТИКОВ М. К. <i>Классификация стационарных течений электропроводной жидкости с постоянным полным давлением</i>	26
ГРИГОРЬЕВ Ю. Н., ЕРШОВ И. В. <i>Нелинейная устойчивость колебательно возбужденного газа. Вариационный подход</i>	27
ДАВЫДОВ А. А., ЧИНЬ ТХИ ЗИЕП ЛИНЬ <i>Канонические формы семейств линейных уравнений с частными производными смешанного типа на плоскости</i>	28

Данилов Д. С., Липатов И. И., Толкачев Г. Ю. Самоиндуцированный отрыв ламинарного пограничного слоя и процессы вязко-невязкого взаимодействия над пористой поверхностью	29
Елюхина И. В. Нелинейное взаимодействие волновых пакетов в неустойчивых системах реакция — диффузия	29
Жибер А. В., Костригина О. С. Точно интегрируемые модели волновых процессов	31
Иванова А. В., Остапенко В. В., Черевко А. А., Чупахин А. П. О модели мелкой воды на сфере	32
Ильичев А. Т. Устойчивость локализованных волн в осесимметричных оболочках, наполненных жидкостью	32
Казаков А. Л. Применение обобщенной задачи Коши для описания некоторых течений газа с ударными волнами	33
Капцов О. В. Метод Лапласа — Мутара интегрирования нелинейных уравнений	34
Катасонов М. М., Мотырев П. А., Сбоев Д. С. Экспериментальное исследование волновых пакетов, возникающих в пограничном слое при его импульсном возбуждении	35
Кедринский В. К. Динамика зародышей кавитации и структура волнового поля при взрывной декомпрессии магмы	36
Князева А. Г. Нелинейные модели сред с диффузией	37
Ковтуненко П. В., Чесноков А. А. Специальные классы решений уравнений горизонтально-сдвигового движения жидкости	38
Козлов В. В., Чернорай В. Г. Экспериментальные исследования нелинейных механизмов при ламинарно-турбулентном переходе на прямых и скользящих крыльях	39
Костиков В. К. Начальная по времени асимптотика волнового движения при наличии погруженного эллиптического цилиндра	40
Крайко А. Н. Об ударных волнах в нестационарных автомодельных и в стационарных осесимметричных течениях	41
Крупчатников В. Н. О совместном влиянии радиационных процессов и бароклинной турбулентности на стратификацию в тропосфере	42
Куликовский А. Г. Многопараметрические фронты сильных разрывов в механике сплошных сред	43
Литвиненко Ю. А., Грек Г. Р., Литвиненко М. В., Козлов Г. В. Экспериментальное исследование восприимчивости дозвуковых макро- и микроструй к акустическому полю	44
Литвиненко А. А., Сафарова Н. С., Хабахпашев Г. А. Воздействие нелинейных внутренних волн на возмущения свободной поверхности водоемов со скачком плотности	45
Ляпидевский В. Ю. Плотностные течения и интрузии: новые математические модели	46
Макаренко Н. И., Малыцева Ж. Л. Докритические стратифицированные течения над препятствиями	47
Медведев С. Б. Законы сохранения для гиперболических систем дифференциальных уравнений	48

МУРТАЗИНА Р. Д. <i>Нелинейные гиперболические уравнения мувицелевского типа</i>	48
НИКУЛИН В. В. <i>Модель движения жидкости в ядре вертикального торнадоподобного вихря</i>	49
ОСИПЦОВ А. Н., ГОЛУБКИНА И. В. <i>Взаимодействие ударных волн и волн с полной дисперсией в запыленном газе</i>	51
ОСТАПЕНКО В. В., КАРАБУТ П. Е. <i>Метод последовательных приближений решения задачи о распаде разрыва малой амплитуды</i>	52
ПЕНЕНКО В. В. <i>Модели и методы для исследования нелинейных динамических систем в задачах окружающей среды и климата</i>	52
ПЛОТНИКОВ П. И. <i>Моделирование нелинейных гидроупругих волн</i>	53
ПОНОМАРЕВА М. А., ШРАГЕР Г. Р., ЯКУТЕНОК В. А. <i>Колебания струи вязкой жидкости, натекающей на твердую горизонтальную плоскость</i>	54
ПУХНАЧЕВ В. В. <i>Газодинамические аналогии в механике несжимаемых вязкоупругих сред</i>	55
РАГОЗИНА В. Е., ИВАНОВА Ю. Е. <i>Эволюционные уравнения как метод изучения динамики сдвигового деформирования</i>	56
РОМЕНСКИЙ Е. И., РОМАНЬКОВ А. С. <i>О моделировании волновых процессов в насыщенных пористых средах</i>	57
САДОВСКИЙ В. М., САДОВСКАЯ О. В. <i>Модели динамики сплошных сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию</i>	58
САЖЕНКОВ С. А. <i>Гомогенизация модели баротропного вязкого газа с быстроосциллирующими начальными данными</i>	59
СНЫТНИКОВ В. Н. <i>Нелинейные волны в двухфазной среде</i>	60
ТЕРСЕНОВ АР. С. <i>Влияние размерности на разрешимость задачи Дирихле для уравнения Р-лапласиана и его анизотропного аналога</i>	60
ХАБАХПАШЕВА Т. И., БАТЯЕВ Е. А. <i>Наклонный вход пологого контура в тонкий слой несжимаемой жидкости</i>	61
ХАБИРОВ С. В. <i>Неавтономные газодинамические подмодели ранга один</i>	62
ХЕ А. К., ЧЕСНОКОВ А. А. <i>Квазинейтральные движения бесстолкновительной плазмы</i>	63
ХЛУДНЕВ А. М. <i>О задачах равновесия упругих тел с жесткими включениями</i>	64
ЦАРЕВ С. П. <i>Неклассические граничные задачи и смежные вопросы</i>	65
ЦВЕЛОДУБ О. Ю., БОЧАРОВ А. А. <i>Эволюция пространственных возмущений на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру</i>	66
ЦВЕТОВА Е. А. <i>Особенности гидродинамических процессов и водообмена в озере Байкал</i>	67
ЧАШЕЧКИН Ю. Д., ПРОХОРОВ В. Е. <i>Гидродинамика и акустика всплеска капли в жидкости</i>	68
ЧИРКУНОВ Ю. А. <i>К вопросу групповой классификации и преобразований эквивалентности систем дифференциальных уравнений</i>	68
ЧУБАРОВ Л. Б., БЕЙЗЕЛЬ С. А., ХУДЯКОВА В. К. <i>Сравнительный анализ некоторых подходов к моделированию оползневого механизма генерации волн цунами</i>	69

ЧУГАЙНОВА А. П. Автомодельные асимптотики, описывающие нелинейные волны	70
ШАНЬКО Ю. В. Обобщенные функционально-инвариантные решения одного уравнения акустики	71
ШЕЛУХИН В. В. Волны в упругой среде, насыщенной двухфазной капиллярной жидкостью	72
ШМИДТ А. В. Решения трехмерной модели дальнего турбулентного следа за буксируемым телом	73
ШОЕВ Г. В., ХОТЯНОВСКИЙ Д. В., БОНДАРЬ Е. А., КУДРЯВЦЕВ А. Н., ИВАНОВ М. С. Влияние вязкости на структуру течения при слабом отражении ударных волн в условиях парадокса Неймана	74
ЮЛМУХАМЕТОВА Ю. В. Подмодели движения газа с линейным полем скоростей	75
DERZHO O. G. Nonlinear Rossby wave trains in polar areas and variability of the Antarctic circumpolar current	76
RICHARD G., GAVRILYUK S. L. Roll waves in sheared flow on an inclined plane	77
Авторский указатель	78

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Г. В. Алексеев

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

В последние годы за рубежом были опубликованы работы, посвященные описанию нерассеивающих оболочек [1, 2]. В этих работах было доказано существование объектов, не рассеивающих падающую на них электромагнитную волну. Эти объекты играют роль “плаща-невидимки”, способного скрывать находящиеся внутри объекты от электромагнитного излучения. Соответствующее явление получило название “electromagnetic cloaking”, а сами оболочки получили название электромагнитных маскировочных оболочек (electromagnetic cloaking shells).

Далее в [3] была рассмотрена задача построения нерассеивающей сферической оболочки для уравнений анизотропной акустики и выписаны формулы основных параметров среды, обеспечивающих нерассеиваемость оболочки. Нужно отметить, что приведенные в [3] формулы содержат сингулярности, поскольку некоторые из параметров обращаются в бесконечность в точке, отвечающей внутреннему радиусу сферического слоя. Этот недостаток исправлен в работе [4].

В данной работе возможность существования нерассеивающих конструкций будет исследована в рамках теории обратных задач. Другими словами, задача построения нерассеивающих акустических конструкций будет сформулирована как обратная задача нахождения неизвестных коэффициентов уравнения Гельмгольца по дополнительной информации о рассеянном данным препятствием поле.

Для исследования рассматриваемых обратных задач применяется подход, основанный на сведении их к соответствующим задачам управления. Указанный подход заключается во введении функционала качества, адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче, и сведении исходной обратной задачи к задаче минимизации указанного функционала качества. Последнее позволяет применять для их решения хорошо развитые методы условной оптимизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00219-а) и грантов ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03 и 09-II-СУ03-003).

Список литературы

- [1] Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R. *Controlling electromagnetic fields* // Science. 2006. V. 312. P. 1780–1782.
- [2] Schurig D., Pendry J. B., Smith D. R. *Calculation of material properties and ray tracing in transformation media* // Opt. Express. 2006. V. 14. P. 9794–9804.
- [3] Cummer S. A., Popa B. I., Schurig D. et al. *Scattering theory derivation of a 3-D acoustic cloaking shell* // Phys. Rev. Letters. 2008. V. 100. 024301.
- [4] Алексеев Г. В., Романов В. Г. *Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики* // СибЖИМ. 2011. Т. 14. (В печати).

ВОЛНОВАЯ СТРУКТУРА ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ ИНТЕНСИВНОГО ГАЗОВОГО ПОТОКА

С. В. Алексеев, Д. М. Маркович, А. В. Черданцев

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Поверхность стекающих пленок жидкости неустойчива к малым возмущениям. Развиваясь, возмущения эволюционируют в нелинейные стационарные трехмерные волны, взаимодействующие друг с другом. При обдуве пленок жидкости высокоскоростным потоком газа толщина пленки существенно уменьшается, частота следования и скорость волн, возникающих на ее поверхности, возрастают [1]. При высоких расходах жидкости имеет место срыв капель жидкости с поверхности пленки и унос их в ядро газового потока. Исследование волновой гидродинамики обдуваемых газом пленок жидкости требует полевого измерения локальной толщины пленки жидкости с высоким пространственным и временным разрешением. В недавней работе авторов такая измерительная система была создана и применена к исследованию кольцевого газожидкостного течения [2]. Измерительная система основана на высокоскоростной модификации метода лазерно-индуцированной флюоресценции. Эксперименты показали, что при воздействии интенсивным потоком газа на поверхности пленки жидкости сосуществуют волны двух типов. Основной объем жидкости переносится долгоживущими первичными волнами, характеризующимися высокой скоростью и амплитудой. На задних склонах первичных волн возникают короткоживущие вторичные волны. После возникновения вторичные волны могут двигаться либо быстрее, либо медленнее породившей их первичной волны. В зависимости от их относительной скорости вторичные волны либо поглощаются следующей первичной волной, либо разрушаются газовым потоком на гребне породившей их первичной волны. В последнем случае образовавшиеся капли уносятся в ядро газового потока. При высоких расходах жидкой фазы первичные и вторичные волны наблюдались ранее и были известны как волны возмущения и волны ряби, соответственно. Однако их взаимосвязь и совместная эволюция были систематически исследованы впервые. Кроме того, было впервые показано, что первичные и вторичные волны существуют и в режимах без уноса жидкой фазы, однако в этом случае отсутствуют быстрые вторичные волны, что и объясняет отсутствие уноса жидкой фазы.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы и проекта РФФИ 10-08-01145-а.

Список литературы

- [1] Asali J. C. and Hanratty T. J. *Ripples generated on a liquid film at high gas velocities* // Int. J. Mult. Flow. 1993. V. 19. P. 229–243.
- [2] Alekseenko S. V., Antipin V. A., Cherdantsev A. V., Kharlamov S. M. and Markovich D. M. *Two-wave structure of liquid film and waves interrelation in annular gas-liquid flow with and without entrainment* // Phys. Fluids. 2009. V. 21. P. 061701–061704.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

Одна из важных задач прикладной гидродинамики связана с проблемой создания течений требуемой конфигурации за счет выбора значений вектора скорости, температуры либо потока тепла на некоторых участках границы области. Нелинейность используемых математических моделей приводит к значительным трудностям при численном решении соответствующих задач управления.

В области Ω с границей Γ рассматривается начально-краевая задача

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\beta T \mathbf{G} \quad \text{в } Q,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } Q,$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \quad \text{на } \Sigma_1,$$

$$\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p \mathbf{n} = \mathbf{g}_2 \quad \text{на } \Sigma_2,$$

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda \Delta T = f \quad \text{в } Q,$$

$$T|_{t=0} = T_0 \quad \text{в } \Omega, \quad T = \psi \quad \text{на } \Sigma_D, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \quad \text{на } \Sigma_N,$$

описывающая процесс распространения тепла в вязкой жидкости. Здесь $\mathbf{u}$, p и T – вектор скорости, давление и температура жидкости, $\nu = \text{const} > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, β – объемный коэффициент теплового расширения, $\mathbf{G}$ – вектор ускорения свободного падения, $\lambda = \text{const} > 0$ – коэффициент температуропроводности, f – объемная плотность источников тепла, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ψ и χ – некоторые функции,

$$\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N},$$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset,$$

$$Q = \Omega \times (0, t_{\max}), \quad \Sigma = \Gamma \times (0, t_{\max}),$$

$$\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, t_{\max}), \quad \Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0, t_{\max}),$$

$$\Sigma_D = \Gamma_D \times (0, t_{\max}), \quad \Sigma_N = \Gamma_N \times (0, t_{\max}).$$

Для данной модели сформулированы задачи условной минимизации функционалов качества, зависящих как от слабых решений исходной начально-краевой задачи, так и от граничных функций $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ и χ , играющих роль управлений. На основе методов исследования экстремальных задач из работ [1, 2] выведена система оптимальности, описывающая необходимые условия минимума.

Разработан численный алгоритм решения задачи граничного управления, основанный на итерационном процессе решения прямых и обратных по времени начальных краевых задач, входящих в нелинейную систему оптимальности. При проведении вычислительных экспериментов исследуется эффективность воздействия температурных и скоростных управлений на течения жидкости, а также влияние числа

Рейнольдса, параметра регуляризации и других величин на точность решения экстремальной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00219-а) и грантов ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03, 09-II-СУ03-003 и 09-III-A-03-07).

Список литературы

- [1] Алексеев Г. В., Терешко Д. А. *Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости*. Владивосток: Дальнаука, 2008.
- [2] Алексеев Г. В., Терешко Д. А. *Экстремальные задачи граничного управления для стационарной модели тепловой конвекции* // Докл. АН. 2010. Т. 430. № 2. С. 173–178.

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Для системы уравнений неоднородной жидкости

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + \frac{1}{\rho} p_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_y &= -g, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y &= 0, \quad u_x + v_y = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести, рассматривается решение, инвариантное относительно оператора $p\partial_p + \rho\partial_\rho + \alpha^{-1}\partial_y$, $\alpha = \text{const}$. Показано, что фактор-система эквивалентна одному “эталонному” нелинейному уравнению третьего порядка (ξ — лагранжева переменная)

$$b_{tt\xi} + b_\xi b_{tt} = f(t) \tag{2}$$

с заданной функцией $f(t)$. По известной функции $b(\xi, t)$ поле скоростей, давление и плотность в системе (1) легко восстанавливаются.

Для двух задач (со свободной границей и заданном движении твердой стенки) для уравнения (2) доказана теорема существования решения.

Исследованы точные решения уравнения (2) при $f = 0$, $f = \text{const}$, $f = e^{-\beta t}$, β — постоянная. Все они описывают различные нестационарные нелинейные внутренние волны в неоднородной жидкости. В докладе приводится подробный анализ этих волн и рассматриваются некоторые их обобщения на случай неоднородной вращающейся жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке междисциплинарного интеграционного проекта № 65 СО РАН.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИВЕРГЕНТНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Д. Г. Архипов¹, Д. И. Качулин¹, О. Ю. Цвелодуб^{1,2}

¹Новосибирский государственный университет

²Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

В статье [1] выведена новая система уравнений, описывающая волновое течение пленки вязкой жидкости, свободно стекающей по вертикальной плоскости. Эта система уравнений записана в системе координат, преобразующей область течения в полосу постоянной толщины ($x = x$, $\eta = y/h(x, t)$, $t = t$, где $h(x, t)$ – толщина пленки). В данной работе показано, что предложенная авторами [1] система допускает введение специальной функции ψ , аналогичной гидродинамической функции тока: $\partial\psi/\partial\eta = hu$, $\partial\psi/\partial x = -hv - \eta\partial h/\partial t$. Для нее одно из уравнений выполняется тождественно и система сводится к одному уравнению на функцию ψ :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_\eta^2}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\psi_\eta(\psi_x + \eta h_t)}{h}\right) - \frac{\mu}{\rho h^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3} = gh + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right),$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$\psi(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial\psi}{\partial x}(x, 1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}(x, 1, t) = 0.$$

Показано, что, если использовать предположения об автомодельности профиля скорости течения и проинтегрировать данное уравнение поперек слоя, то, с учетом граничных условий, из него следует известная модель Шкадова [2].

Для малых расходов пленки решение выведенного уравнения в виде ряда по малому параметру длинноволновости возмущений переходит в известное уравнение Гевика [3]. Разработан численный алгоритм решения задачи и для ряда начальных уединенных возмущений изучена их эволюция.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (ведущий ученый — В. Е. Захаров, ГОУ ВПО “Новосибирский государственный университет”) и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-91333-ННИО-а).

Список литературы

- [1] Алексеенко С. В., Архипов Д. Г., Цвелодуб О. Ю. *Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости* // ДАН. 2011. Т. 436. № 1. С. 24–31.
- [2] Шкадов В. Я. *К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.

- [3] Gjevik B. *Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films* // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 8. С. 1918–1925.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОДНЫХ ВИХРЕЙ ТИПА ТОРНАДО

С. П. Баутин

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

В монографии [1] предложена схема возникновения и устойчивого функционирования восходящих закрученных потоков (ВЗП). Эксперименты, проводимые в Объединенном институте высоких температур (см., например, [2]), подтверждают эту схему в части возникновения и начального функционирования ВЗП.

Для математического моделирования движения воздуха в ВЗП исследуются решения системы уравнений газовой динамики (СУГД), описывающие изэнтропические течения идеального политропного газа в придонной и в вертикальной частях ВЗП.

Для течения в придонной области доказано, что в задаче о плавном стоке на окружности заданного ненулевого радиуса в первоначально покоящемся газе наряду с радиальным движением возникает и окружное. Причем в случае Северного полушария закрутка газа идет в положительном направлении, в случае Южного - в отрицательном. Численным расчетом методом характеристик описана динамика выхода течения с плавным стоком на стационарный режим.

Для моделирования течения в вертикальной части ВЗП строятся начальные слабые бесконечных сходящихся рядов как по степеням малых параметров, входящих в СУГД регулярно, так и по степеням характеристической переменной в окрестности контактной границы. Анализ построенных коэффициентов показал возможность существования течений, закрученных как по всему сечению вертикальной области, так и только в его кольцевой части. Во втором случае в центральной части возможна либо область вакуума, либо область покоящегося газа с ненулевой плотностью. Показано, что основные газодинамические характеристики в вертикальной части ВЗП определяются величиной закрутки газа, поступающего из придонной части. И на их значения влияние силы Кориолиса существенно меньше, чем влияние силы тяжести.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00052).

Список литературы

- [1] Баутин С. П. *Торнадо и сила Кориолиса*. Новосибирск.: Наука, 2008.
- [2] Вараксин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н. *О возможности воздействия на вихревые атмосферные образования* // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, № 3. С. 1–6.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. С. Белоносов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Типичная задача теории возмущений для гиперболических уравнений имеет вид

$$\ddot{u} = -A^2 u + \varepsilon F(\omega t, u),$$

где $u(t)$ — функция со значениями в гильбертовом пространстве, A — неограниченный линейный самосопряженный оператор, ε — малый параметр, $F(\tau, u)$ — непрерывное возмущение, периодическое или почти периодическое по τ , $F(\tau, 0) \equiv 0$. Если $\varepsilon = 0$, то нулевое решение данного уравнения устойчиво. Нас интересует явление параметрического резонанса, то есть потеря устойчивости при сколь угодно малых $\varepsilon \neq 0$, когда частота ω близка к определенным критическим значениям. Хорошо известно, что для линейных уравнений критические частоты определяются спектральными свойствами оператора A и возмущения F , причем амплитуды колебаний решений возмущенных уравнений при резонансе экспоненциально возрастают со временем. В нелинейном случае критические частоты зависят также от амплитуд колебаний, и если условия резонанса выполняются в начальный момент, то с ростом амплитуды они могут нарушаться. Поэтому вместо неограниченного роста наблюдаются “пульсации” амплитуд, теория которых разработана пока только для гамильтоновых систем с конечным числом степеней свободы [1, 2].

В настоящем докладе соответствующая теория строится в бесконечномерном пространстве для квадратичных возмущений вида $B(\omega t)u + Q(u, u)$, где $B(\tau)$ — периодический по τ линейный ограниченный оператор, а $Q(u, v)$ — билинейная эрмитова форма. Показано, что амплитуда колебаний решения $u(t)$ на интервалах времени порядка ε^{-1} приближенно описывается конечномерной динамической системой, зависящей от начальных значений $u(0)$ и $\dot{u}(0)$. Эту систему можно найти методом усреднения Крылова — Боголюбова, который приходится специальным образом модифицировать, чтобы преодолеть известную “проблему малых знаменателей”. В результате удастся объяснить качественную картину пульсации амплитуд при нелинейном резонансе, а также предложить алгоритм приближенного вычисления решений исходного уравнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09–01–00221), Президиума РАН (программа фундаментальных исследований № 2, проект № 121) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1.4918).

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. М.: Наука, 1974.
- [2] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. *Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса*. М.: Наука, 1988.

ОБ АСИМПТОТИКЕ КОЛМОГОРОВСКОЙ ε -ЭНТРОПИИ КОМПАКТА БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ (К ПРОБЛЕМЕ К. И. БАБЕНКО)

В. Н. Белых

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Решена проблема К. И. Бабенко [1, с. 301]: вычислен главный член асимптотики колмогоровской ε -энтропии $H_\varepsilon(X)$ компакта X периодических C^∞ -гладких функций, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных периодических функций. В частности, для классов Жеврея [1] порядка $\alpha > 0$ асимптотика $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражается формулой: $H_\varepsilon(X) \sim B \log_2^{\alpha+1}(1/\varepsilon)$, где $B > 0$ – абсолютная постоянная.

Полученный результат явился своеобразным откликом на реальную потребность вычислительной гидродинамики [2]: проблему продолжения “далеко” по времени гладких решений трехмерных уравнений Эйлера. Известно, что указанная проблематика – одна из труднейших в фундаментальной науке и до сих пор находится (в своей точной математической постановке) вне компетенции современных аналитических и численных методов (см. УМН, 2007, т. 62, вып. 3, с. 3-46, 95-116).

Существует, однако, возможность, не очень ограничивающая физический смысл проблемы и приводящая к более простой математической задаче. Состоит она в предположении потенциальности и осевой симметричности движения жидкости. При этом исходная задача редуцируется к одномерному своему аналогу, описываемому системой эволюционных (нелинейных) псевдодифференциальных уравнений, дополненной данными Коши. Последнюю можно исследовать численными методами. Вопрос о разумном ограничении числа n (степеней свободы конечномерного аналога задачи Коши) оказывается здесь определяющим, поскольку связан с возможностью доведения численного исследования всей задачи в целом до конца. Поэтому параметр n минимизируется, исходя из принадлежности решения задачи компакту X периодических C^∞ -гладких функций. При этом вычислению подлежит величина $H_\varepsilon(X)$, связанная с параметром n неравенством А.Г. Витушкина $n \log_2(1/\varepsilon) \geq b H_\varepsilon(X)$, где $b > 0$ – константа. Для классов Жеврея порядка $\alpha > 0$ и $\varepsilon \sim 10^{-9}$ оптимальное значение n оказывается сравнительно небольшим $n \sim 30$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00147-а) и Междисциплинарного интеграционного проекта № 40 Президиума СО РАН.

Список литературы

- [1] Бабенко К. И. *Основы численного анализа*. РХД, Москва-Ижевск, 2002.
- [2] Belykh V. N. *To the problem of evolutionary “blow-up” of axially symmetric gas bubble in ideal incompressible fluid (main constructive hypothesis)* // Proceedings of Intern. Conf. dedicated to M.A. Lavrentyev on the occasion on his birthday centenary, Kiev (Ukraine), 31 October - 3 November, 2000. Kiev: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, 2000. P. 6–8.

КАРТИНЫ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ПРОФИЛЕ СКОРОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА

А. Н. Богданов¹, В. Н. Диесперов²

¹Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

²Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный Московской области

Исследование устойчивости свободно взаимодействующих трансзвуковых течений выполнено, в основном, для линейного профиля продольной компоненты скорости в пограничном слое (обзор выполненных работ см., например, [1]). Такой вид профиля, все же, является исключительным и по простоте получающихся уравнений модели, и по сложности его практической реализации. На практике реализуются профили скорости более общего, чем простой линейный, вида. В этой связи представляет интерес исследование поведения возмущений в случае другого, отличного от линейного, вида профиля скорости. Аналитическое исследование задачи в достаточно законченном виде, используя преобразования Лапласа и Фурье, дает возможность провести выбор квадратичного профиля $u_0 = y^2$. Хотя общность и этих результатов ограничена, они освещают некоторые существенные закономерности развития возмущений исследуемых течений и позволяют избежать абсолютизации полученных для линейного профиля результатов.

Следует иметь в виду, что при квадратичном виде профиля скорости $u_0 = y^2$ трение на поверхности, определяемое как $u_y|_{y=0}$ есть тождественный нуль. Примеры течения в пограничном слое с нулевым трением на его границе известны — течение при степенном законе убывания скорости во внешнем невязком течении [2], струя с прямолинейной осью [3]. Нулевое трение на границе течения является его особенностью, главное — в точках нулевого трения на поверхности возможен отрыв пограничного слоя. Оригинальные соображения о качественном характере течения в окрестности точки отрыва пограничного слоя высказаны Ландау [4].

Имеется класс течений, в которых могут создаваться (формой обтекаемого тела, углом его атаки) условия обращения поверхностного трения в нуль в одной только точке поверхности. Детальный анализ таких задач привел к созданию теории кромочного отрыва [5]. Обстоятельное исследование отрыва при сверхзвуковом свободном вязко-невязком взаимодействии проведено в [6].

Предотрывное течение может быть описано при выборе профиля скорости $u_0 = y^2 + y$. В этом случае трение на обтекаемой поверхности $y = 0$ уже отлично от нуля. Пример течения при малом поверхностном трении с областями отрыва — плоское стационарное течение несжимаемой жидкости от источника, расположенного в точке пересечения ограничивающих течение прямолинейных стенок, (решение Джеффри — Гамеля) с вызванными малыми неровностями стенок локальными зонами возвратных течений рассмотрен в [7].

Течение с профилем скорости

$$u_0 = y^2/2 + By$$

было рассмотрено [6] для различных величин параметра B . Нетривиальным преобразованием зависимых и независимых переменных уравнение развития возмущений было сведено к линейному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами, решение которого выражалось через функции Бесселя и Струве. Решение уравнения в случае квадратичного профиля, полученное в связи с изучением отрыва потока, приведено также в [8]. Указанное уравнение имело четвертый порядок, решение выписывалось в виде ряда по степеням поперечной координаты. Ни уравнение, ни полученное решение не ставились в соответствие с известными типами уравнений или специальных функций.

В настоящей работе с использованием трехпалубной модели свободного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях исследовано развитие нестационарных возмущений при квадратичном ($u_0 = y^2/2 + y$) профиле скорости невозмущенного пограничного слоя. Показано, что в этом случае основное уравнение развития возмущений уже не сводится к уравнению Эйри, получаемое уравнение оказывается гораздо более сложным для аналитического исследования — уравнением Уиттекера. Основываясь на свойствах решений уравнения Уиттекера можно сделать вывод, что для случая квадратичного профиля скорости поведение дисперсионных кривых качественно отличается от поведения дисперсионных кривых при линейном профиле скорости. Именно, присущий производной функции Эйри колебательный характер изменения относительно действительной оси при отрицательных значениях аргумента не является таковым для производной функции Уиттекера — количество нулей ее ограничено и не превышает нескольких единиц. Это свидетельствует о качественной перестройке поля возмущений при отклонении профиля невозмущенной скорости от линейного.

Список литературы

- [1] Жук В. И. *Волны Толлмина-Шлихтинга и солитоны*. М.: Наука, 2001.
- [2] Слезкин Н. А. *Динамика вязкой несжимаемой жидкости*. М.: ГИТТЛ, 1955.
- [3] Лойцянский Л. Г. *Ламинарный пограничный слой*. М.: Физматгиз, 1962.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.
- [5] *Асимптотическая теория отрывных течений*. Под ред. В. В. Сычева. М.: Наука, 1987.
- [6] Нейланд В. Я., Боголепов В. В., Дудин Г. Н., Липатов И. И. *Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа*. М.: Физматлит, 2003.
- [7] Сычев Вик. В. *О взаимодействии и отрыве для внутренних течений с малым поверхностным трением* // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 98–111.
- [8] Stewartson K. *Is the singularity at separation removable?* // J. Fluid Mech. 1970. V. 44. № 2. P. 347–364.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ИЗ ГИПОТЕЗЫ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ВИХРЕЙ ПО БОЛЬЦМАНУ

В. Л. Борщ

Днепропетровский национальный университет

Уравнение магнитной индукции $\mathbf{B}$ для идеальной проводящей среды [1]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

сохраняет магнитные линии и магнитный поток. Завихренность $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ идеальной жидкости [2] также удовлетворяет уравнению вида (1), порождая аналогию между $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\omega}$ [3]. Известны различные обобщения [4] уравнения индукции (1) на неидеальные проводящие среды, например, сохраняющее магнитные линии, включая их зацепление и узлы, но не магнитный поток [5]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \mathbf{B}, \quad (2)$$

где λ — произвольная скалярная функция.

Разбор оригинального вывода [6] уравнения индукции (1) на основании гипотезы молекулярных вихрей показал следующее. Во-первых, аналогом $\mathbf{B}$ служит не угловая скорость вихря $\boldsymbol{\omega}$, а его периферийная скорость $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, т. е. вихревой импульс [7]. Во-вторых, в [6] не учтено сохранение вихрями цилиндрической формы при движении среды, что было замечено в [8]. В результате выведено уравнение индукции вида (2), в котором функция λ выражается через квадратичную форму $(\mathbf{B} = |\mathbf{B}| \mathbf{t})$ вида:

$$2 \mathbf{t} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{t} = 2 \varepsilon^{p,q} t_p t_q = 2 \varepsilon_{p,q} t^p t^q = (\nabla_q u_p + \nabla_p u_q) t^p t^q.$$

Список литературы

- [1] Куликовский А. Г., Любимов Г. А. *Магнитная гидродинамика*. М.: Логос, 2005.
- [2] Helmholtz H. *Über Integrale der Hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen Entsprechen*. J. Reine Angew. Math. 1858. Bd. LV. S. 25–55.
- [3] Tsinober A. *How Analogous is Generation of Vorticity and Passive Vectors (Magnetic Fields)?*/S. Molokov, R. Moreau, H. K. Moffatt (eds.). *Magnetohydrodynamics: Historical Evolution and Trends*. Dordrecht: Springer, 2007.
- [4] Priest E., Forbes T. *Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications*. Cambridge: University Press, 2000.
- [5] Hornig G., Schindler K. *Magnetic Topology and the Problem of its Invariant Definition*. Phys. Plasmas. 1996. V. 3. № 3. P. 781–791.

- [6] Maxwell J.C. *On Physical Lines of Force. Part I. The Theory of Molecular Vortices Applied to Magnetic Phenomena*. Phil. Mag. 1861. V.XXI. P.161–175. *Part II. The Theory of Molecular Vortices Applied to Electric Currents*. Phil. Mag. 1861. V.XXI. P. 281–291, 338–348.
- [7] Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. *Введение в теорию концентрированных вихрей*. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003.
- [8] Boltzmann L. *Über Faraday's Kraftlinien von Maxwell*. Leipzig: W. Engelmann, 1895.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ОТ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ СКВАЖИНЫ В УСЛОВИЯХ ВЕЧНОЙ МЕРЗЛОТЫ

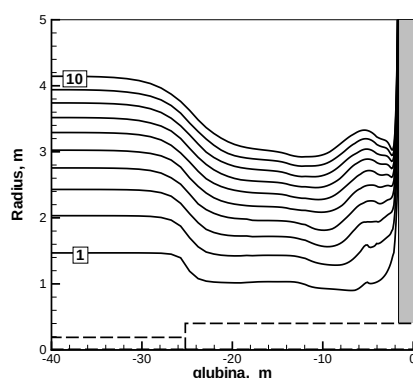
Н. А. Ваганова, М. Ю. Филимонов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Обустройство и эксплуатация нефтяных скважин в районах распространения вечной мерзлоты имеет ряд особенностей. В частности, для более длительного срока эксплуатации скважины, необходимо минимизировать распространение тепла в окружающий грунт.

Рассматривается задача о распространении тепла в грунте от нагретой и теплоизолированной скважины (трубы) с учетом фазового перехода. Расчетная область представляет собой трехмерный параллелепипед, из которого удалена вертикальная цилиндрическая скважина. Грунт может иметь неоднородную структуру, а также включать в себя различные элементы, например, линзы льда, имеющие отличные от окружающего грунта теплофизические параметры, различные слои отсыпки поверхности грунта и слои инженерных конструкций, окружающие скважину. На поверхности скважины задается постоянная температура. Для расчетов используется экономичная неявная локально-одномерная аддитивная схема с целыми шагами.

Разработан комплекс программ предназначен для проведения численного моделирования тепловых полей в приповерхностном слое грунта глубиной до 150 метров с учетом термодиффузионных свойств грунта, теплообмена поверхности грунта с воздухом, в том числе и за счет потерь тепла на излучение и годового климатического цикла.



На рисунке представлено движение границы таяния грунта вокруг скважины в течение 10 лет. Граница инженерных конструкций вокруг скважины обозначена пунктиром. Серым цветом показана зона сезонного оттаивания грунта у поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-96014), программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН и программы интеграционных проектов между УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ГОРЕНИИ И ДЕТОНАЦИИ

А. А. Васильев

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Представлены экспериментальные данные о нелинейных эффектах, наблюдаемых при горении и детонации горючих смесей. Одно из таких явлений — переход горения в детонацию, когда волна ламинарного горения с дозвуковой скоростью на уровне см/с, определяемой только процессами переноса типа диффузии и теплопроводности, постепенно разгоняется за счет автотурбулизации до дозвуковых скоростей в несколько десятков м/с и формирует перед фронтом пламени “предвестник” с движущимся газом. Скорость фронта пламени становится сильно зависящей от газодинамических параметров предвестника, в первую очередь — массовой скорости потока, и видимая скорость становится равной сумме локальной скорости потока и скорости традиционного горения в неподвижной смеси. При определенных условиях волны сжатия от предвестника способны объединиться в ударную волну, которая усиливаясь приводит к переходу течения от дозвука на сверхзвук, и при взрывном протекании химической реакции — переходу от горения к детонации (ПГД). Обсуждаются вопросы корректного моделирования ПГД, обусловленного сложным газодинамическим взаимодействием волн разрежения и сжатия, осложненным протеканием химических реакций и изменением параметров потока на много порядков.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЙЛЕРА — ДАРБУ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА

И. В. Веревкин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Одним из эффективных способов построения решений заданного дифференциального уравнения является сведение его к изученному уравнению. В монографии [1] описан класс линейных дифференциальных уравнений с частными производными и преобразования Эйлера — Дарбу (ЭД), переводящие решения одного уравнения в решения преобразованного уравнения того же типа. В настоящей работе исследуются преобразования ЭД для уравнения Фоккера — Планка (ФП) вида

$$u_t = (F(x)u)_{xx} + (G(x)u)_x.$$

Для указанного уравнения построены преобразование ЭД первого порядка и порядка k , а также противоположное преобразование ЭД, переводящее решения преобразованного уравнения ФП в решения исходного уравнения ФП. Кроме этого, показано, каким образом можно строить решения многомерных уравнений ФП, имеющих вид:

$$u_t = (F_{ij}(x)u)_{x_i x_j} + (G_i(x)u)_{x_i},$$

где F_{ij} — матрица, а $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор независимых переменных. Для этого требуется, чтобы коэффициенты F_{ij} образовывали диагональную матрицу и элементы F_{ii} , а также соответствующие функции G_i , зависели только от переменной x_i . В качестве примера построены решения уравнения ФП, удовлетворяющие заданным начально-краевым условиям.

Список литературы

- [1] Капцов О. В. *Методы интегрирования уравнений с частными производными*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗОНЫ ТУРБУЛЕНТНОГО СМЕШЕНИЯ С ЛОКАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ В ПИКНОКЛИНЕ

О. Ф. Воропаева, Г. Г. Черных

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Динамика локальных возмущений поля плотности и турбулентных образований (зон турбулентного смешения, пятен турбулентности) оказывает существенное влияние на формирование тонкой микроструктуры гидрофизических полей в устойчиво стратифицированной жидкости [1]. Численное моделирование подобных течений начато в СО РАН в 70-е годы [2]. В настоящее время экспериментальное, теоретическое и численное исследование эволюции одиночных локальных турбулентных и ламинарных образований в пикноклине проводится весьма активно. Развитие локальных возмущений в пикноклине с достаточно узкой высокоградиентной прослойкой характеризуется генерацией внутренних волн солитонного типа, приводящих к хорошо выраженному осредненному движению.

В настоящей работе представлена численная модель и исследовано плоское течение, возникающее при взаимодействии зоны турбулентных возмущений и локального ламинарного возмущения поля плотности (неполное перемешивание) в пикноклине. Задача рассмотрена с привлечением осредненных по Рейнольдсу уравнений гидродинамики в приближении Обербека — Буссинеска, замкнутых на основе модифицированной $(\epsilon - \epsilon)$ модели турбулентности. Численное интегрирование уравнений основано на использовании метода расщепления по пространственным переменным.

В начальный момент времени в высокоградиентной прослойке пикноклина задаются два возмущения — турбулентное пятно и локальное возмущение поля плотности. Локальное возмущение поля плотности генерирует две уединенные внутренние волны, одна из которых встречается с эволюционирующим турбулентным пятном и порождаемыми им внутренними волнами. Расчеты показывают, что, если энергия локального возмущения поля плотности достаточно велика, то генерируемое им осредненное движение может поддерживать турбулентность в зоне турбулентного смещения и “продлевать жизнь” последней. Подробное изложение результатов расчетов представлено в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-01-00435а, 09-05-01149).

Список литературы

- [1] Монин А. С., Озмидов Р. В. *Океанская турбулентность*. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1981.
- [2] Васильев О. Ф., Кузнецов Б. Г., Лыткин Ю. М., Черных Г. Г. *Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 45–52.
- [3] Воропаева О. Ф., Черных Г. Г. *Численное моделирование взаимодействия зоны турбулентного смещения и локального возмущения поля плотности в пикноклине* // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 2. С. 49–60.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕЛЕЯ — ТЕЙЛОРА В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

О. В. Гальцев, А. М. Мейрманов

Белгородский государственный университет

Настоящий доклад посвящен исследованию неустойчивости Релея — Тейлора при движении двух вязких несжимаемых несмешивающихся жидкостей различной плотности, разделенных свободной поверхностью. Эта задача имеет важное теоретическое и практическое значение [1], как в классической, так и в подземной гидродинамике. Если динамика жидкостей описывается системой уравнений Стокса, то существование единственного классического решения (т.е. решения с гладкой поверхностью раздела) в целом по времени было установлено в [2]. В теории фильтрации аналогичная задача называется **задачей Маскета** и в своей классической постановке состоит из уравнений фильтрации Дарси в каждой из областей, занятых однородной жидкостью, и стандартных условий на поверхности контактного разрыва. Естественным образом определяется обобщенное решение задачи Маскета. Вопрос о существовании классического либо обобщенного решения (в целом по времени) остается открытым

до настоящего времени. Мы предлагаем строгое описание движения двух несмешивающихся жидкостей в пористых средах как результат усреднения точной микроскопической модели. В этой модели динамика жидкостей описывается системой уравнений Стокса, а динамика упругого скелета — системой уравнений Ламе. Формальное усреднение модели для абсолютно твердого скелета приводит к задаче Маскета. Неформальное усреднение этой модели вызывает непреодолимые (до настоящего времени) трудности, в то время как учет упругих свойств твердого скелета позволяет строго вывести новую корректную феноменологическую модель, которую назовем задачей Маскета для вязко-упругой фильтрации [3]. Численное моделирование точной микроскопической модели для различных структур порового пространства показывает, что в усредненной модели для абсолютно твердого скелета происходит перемещение более тяжелой жидкости вниз в результате перемешивания жидкостей. То есть вместо свободной границы наблюдается зона перемешивания (mushy region). Если же учитывать упругие свойства твердого скелета, то перемещение более тяжелой жидкости вниз происходит при наличии свободной поверхности (классическое решение).

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613).

Список литературы

- [1] Биркгоф Г. *Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора*. — В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964, с. 68–94.
- [2] Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky V., *A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions* // Interfaces and Free Boundaries, 2 (2000) 413–424.
- [3] Meirmanov A. *A Free boundary Muskat problem: some methods of mathematical modeling in porous media* // Submitted to Interfaces and Free Boundaries.

МУЛЬТИИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА В КОЛЬЦАХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. И. Ганжа

Красноярский госпедуниверситет им. В. П. Астафьева, Красноярск

Мультиинтегралом Эйлера на плоскости назовем выражение вида

$$\mathcal{I} = L_1(x, y)\varphi_1(x) + \dots + L_s(x, y)\varphi_s(x), \quad (1)$$

где $\varphi_i(x)$ — произвольные функции одной переменной x , а $L_i(x, y) = a_{i0}(x, y) + a_{i1}(x, y)D_x + \dots + a_{in_i}(x, y)D_x^{n_i}(x)$ — заданные линейные обыкновенные дифференциальные операторы по x с коэффициентами, зависящими от x, y . Подобные выражения обобщают решения, возникающие в каскадном методе Лапласа интегрирования гиперболических уравнений второго порядка на плоскости [1, 2]. В работе

[3] обсуждалось понятие редуцируемости мультиинтегралов Эйлера, были получены конструктивные алгоритмические способы проверки неприводимости или редукции заданного интеграла (мультиинтеграла) к неприводимому.

В данной работе мы обобщаем полученные ранее результаты на псевдодифференциальный случай. Именно, рассматриваются конечные выражения вида

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^s L_i(x, y) \varphi_i(x) + \sum_{k=1}^m a_k(x, y) D_y^{-1} b_k(x, y) \psi_k(y), \quad (2)$$

где $\varphi_i(x)$, $\psi_k(y)$ — произвольные функции одной переменной, $L_i(x, y)$, как и выше — заданные линейные обыкновенные дифференциальные операторы по x , а $a_k(x, y)$, $b_k(x, y)$ — функции от x, y . Доказывается, что наличие интегралов вида (2) у уравнений Лапласа на плоскости (при $s = m = 1$) эквивалентно простейшим соотношениям в кольце Оре псевдодифференциальных операторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00762а) и гранта НШ-7256.2010.1 поддержки ведущих научных школ.

Список литературы

- [1] Darboux G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Т. 2. Paris:Gauthier-Villars, 1889.
- [2] Жибер А. В., Старцев С. Я. *Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений*. Матем. заметки. 2003. Т. 74, №. 6, С. 848–857.
- [3] Ганжа Е. И. *Интегралы и мультиинтегралы Эйлера линейных дифференциальных уравнений с частными производными*, Матем. заметки. 2011. Т. 89, №. 1, С. 19–33.

ДВИЖЕНИЕ КОЛЬЦА ВЯЗКОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Е. А. Гербер, В. Н. Кутрунов

Тюменский государственный университет

Представлена постановка задачи о плоском вращательно-симметричном движении по инерции кольца несжимаемой капиллярной жидкости в рамках неклассической модели гидродинамики [1]. Классификация моделей чисто механического континуума, разработанная В. О. Бытевым, позволяет предложить следующий вид тензора напряжений в случае его линейной зависимости от тензора скоростей деформации:

$$\Pi = -pI + 2\rho MD, \quad (1)$$

где p — гидростатическое давление, I — единичный тензор, ρ — плотность, D — тензор скоростей деформации,

$$M = \begin{pmatrix} \nu & \nu_0 \\ -\nu_0 & \nu \end{pmatrix}$$

— матрица кинематической вязкости, в которой ν — обычная, диссипативная вязкость и ν_0 — недиссипативная вязкость, последняя может иметь любой знак.

Рассматриваемое движение с учетом (1) может быть описано математической моделью, которая представляет собой модифицированные уравнения Навье — Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - M \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{u} = (U, V)$ — вектор скорости.

С граничными условиями (согласно [4]):

$$\begin{cases} \Pi \cdot \vec{n} + p_{gi} \vec{n} = 2\sigma H_i \vec{n} + \nabla_{gr} \sigma |_{r=R_i(\tau, \varphi)}, \\ \frac{d(r - R_i(\tau, \varphi))}{dt} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\vec{n}$ — вектор нормали к свободной границе, p_{gi} — давление газовой среды внутри и вне кольца, H_i — средняя кривизна поверхностей раздела, ∇_{gr} — оператор поверхностного градиента, $R_i(\tau, \varphi)$ — явное уравнение свободной границы.

Решение задачи (2) без учета сил поверхностного натяжения и анализ результатов представлены в [2]. При равенстве нулю недиссипативной вязкости ($\nu_0 = 0$) задача сводится к классической, которая изучена в работе О. М. Лаврентьевой [3].

В данной работе предлагаются результаты численного моделирования поставленной задачи и анализ полученных результатов.

Список литературы

- [1] Андреев В. К., Бублик В. В., Бытев В. О. *Симметрии неклассических моделей гидродинамики*. Новосибирск, Наука, 2003.
- [2] Бытев В. О., Гербер Е. А. *Влияние недиссипативной вязкости на динамику жидкого кольца*. ММТТ-23, Саратов, Издательство СГТУ, 2010, с. 96–99.
- [3] Лаврентьева О. М. *Движение вращающегося кольца в вязкой капиллярной жидкости*. - М., 1984, 51 с. - Деп в ИГ СО АН СССР 19.11.84., № 7562.
- [4] Пухначев В. В. *Движение вязкой жидкости со свободными границами*. Учебное пособие. Новосибирск, Новосибирский государственный университет 1989, 96 с.

ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С НЕПЛОСКИМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

С. В. Головин^{1,2}, М. Ю. Казакова²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В качестве одной из простейших моделей для описания трансзвуковых течений газа используется нелинейное уравнение Кармана — Гудерлея, задающее возмущения равномерного потока, двигающегося со скоростью звука [1, 2]. Это уравнение применяется для моделирования течений газа в соплах в окрестности поверхности перехода через скорость звука, либо в задачах обтекания тел в окрестности местной сверхзвуковой зоны. Точные инвариантно-групповые решения уравнения Кармана — Гудерлея были проклассифицированы в [3]. Было выяснено, что в рамках некоторых из рассматриваемых классов решений течение газа не может оставаться непрерывным во всей области. Данное ограничение преодолевается либо путем введения специальных стенок, ограничивающих область течения, либо, что более естественно, путем расширения класса допустимых решений и рассмотрения течений с ударными волнами. Типичные представители таких классов течений задаются инвариантными решениями, в которых поверхность уровня (поверхность постоянства инвариантной искомой функции) представляет собой обобщенную винтовую поверхность.

Целью работы является исследование инвариантных решений уравнения Кармана — Гудерлея для описания трехмерных течений газа с ударными волнами на неплоских поверхностях. Такие решения существуют в двух подмоделях, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. В работе проведен качественный анализ интегральных кривых на фазовой плоскости для каждого из уравнений. Показано, что в обоих случаях единственной интегральной кривой, отвечающей решению с ударной волной, является сепаратриса седловой особой точки. Для построения решения было исследовано глобальное поведение данных сепаратрис. Были определены значения параметров при которых на сепаратрисе существуют сопряженные точки, удовлетворяющих условиям Ренкина — Гюгонио на ударной волне. Исследование периодов полученных решений показало, что возможны случаи нескольких вложенных ударных волн на винтовых поверхностях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00047), Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4368.2010.1) и молодых докторов наук (МД-168.2011.1), а также Интеграционного проекта СО РАН № 65.

Список литературы

- [1] Гудерлей К. Г. *Теория околосвуковых течений*. М.: Изд-во. иностр. лит., 1960.
- [2] Коул Д., Кук Л. *Трансзвуковая аэродинамика*. М.: Мир, 1989.
- [3] Головин С. В. *Групповое расслоение и точные решения уравнения трансзвукового движения газа*. ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 51-63

КЛАССИФИКАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМ ПОЛНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

С. В. Головин^{1,2}, М. К. Крутиков²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В работе [1] при помощи введения естественной криволинейной системы координат, в которой линии тока и магнитные силовые линии играют роль координатных кривых, выделен и описан класс точных решений уравнений идеальной магнитной гидродинамики (МГД) с постоянным полным давлением. Доказано, что максвелловские поверхности, сотканые из линий тока и магнитных линий, в таких течениях являются поверхностями переноса. Они получаются параллельным переносом одной пространственной кривой вдоль другой пространственной кривой, причем обе задаются с существенным функциональным произволом. Построены отдельные примеры решений, обладающие функциональным произволом в две функции двух переменных и одну функцию одной переменной. Однако полное описание таких решений не было дано в связи с существенной технической сложностью исследования.

В настоящей работе дана исчерпывающая классификация решений уравнений идеальной МГД, в которых полное давление (сумма обычного и магнитного давлений) постоянно во всей области течения. Для решения задачи потребовалось описать решения векторного волнового уравнения, удовлетворяющие геометрическому условию сохранения объема. Сложность задачи заключалась в необходимости классификации случаев разделения переменных в скалярном уравнении, задающем условие несжимаемости, и последующем интегрировании переопределенных систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Проведенное исследование основывалось на систематическом применении преобразований эквивалентности полученных систем уравнений, использовании геометрических свойств получаемых решений и общей теории анализа переопределенных систем дифференциальных уравнений. В результате анализа выделены 7 различных классов течений с постоянным давлением, среди которых есть и существенно новые по сравнению с найденными в [1]. Полученные точные решения обладают значительным функциональным произволом и описывают струйные течения идеальной бесконечно электропроводной жидкости. В работе дается физическое описание течений, определяемых отдельными классами полученных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00047), Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4368.2010.1) и молодых докторов наук (МД-168.2011.1), а также Интеграционного проекта СО РАН № 65.

Список литературы

- [1] Golovin S. V. *Analytical description of stationary ideal MHD flows with constant total pressure*. Phys. Lett. A. 2010. V. 374 P. 901–905.

НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАТЕЛЬНО ВОЗБУЖДЕННОГО ГАЗА. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Ю. Н. Григорьев¹, И. В. Ершов²

¹Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

В докладе рассматривается устойчивость плоского течения Куэтта колебательно неравновесного двухатомного газа. Течение описывается системой уравнений двухтемпературной гидродинамики, где релаксация вращательных мод молекул учитывается коэффициентом объемной вязкости, а колебательной моды — уравнением Ландау — Теллера. Коэффициенты переноса предполагаются зависящими от статической температуры потока.

Из уравнений исходной системы выводятся уравнения для возмущений гидродинамических переменных. Последние рассматриваются в двух вариантах — линеаризованном для малых амплитуд возмущений и нелинейном без ограничения на амплитуды. Для этих систем получены уравнения энергетического баланса полной пульсационной энергии и сформулирована вариационная задача для критического числа Рейнольдса. Соответствующие уравнения Эйлера — Лагранжа после отделения периодических переменных приводятся к спектральным задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где спектральным параметром служит число Рейнольдса. Рассмотрены качественные свойства спектров, общие для линеаризованного и нелинейного случаев. Задачи решались численно методом коллокаций с использованием QZ -алгоритма. Расчеты показали, что в обоих случаях тенденции поведения критических чисел Рейнольдса Re_{cr} совпадают. Минимальные значения достигаются на продольных модах. Возрастание степени неравновесности колебательной энергии и времени колебательной релаксации в диапазонах, реальных для двухатомных газов, при фиксированных числах Маха потока и объемной вязкости приводит к росту значений критических чисел Рейнольдса. Увеличение числа Маха и объемной вязкости также приводит к возрастанию значений критических чисел Рейнольдса. Вместе с тем Re_{cr} в нелинейном случае значительно превышают соответствующие значения для линеаризованной задачи.

Было выполнено сравнение энергетического вариационного подхода для линеаризованной системы возмущений с ее исследованием в рамках линейной теории устойчивости. Показано, что в последнем случае, как и для несжимаемой жидкости, течение Куэтта колебательно неравновесного двухатомного газа абсолютно устойчиво. В то же время вариационный подход дает конечные, хотя и заниженные значения критических чисел Рейнольдса Re_{cr} .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00116).

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ СМЕШАННОГО ТИПА НА ПЛОСКОСТИ

А. А. Давыдов, Чинь Тхи Зиен Линь

Владимирский гос. университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, Владимир

Теория канонических форм линейных уравнений второго порядка с частными производными смешанного типа на плоскости берет свое начало с работ Ф. Трикоми и М. Чибрарио. Период ее бурного развития пришелся на конец прошлого века, когда к 1996 году были получены гладкие канонические формы для всех типичных случаев [1]. Затем появились работы по теории канонических форм семейств уравнений (см. работу [2] и библиографию в ней), но теория здесь еще далека от совершенства.

Основной результат нашей работы — это конечно гладкие канонические формы семейств уравнений смешанного типа на плоскости вблизи нерезонансных сложенных особых точек сети их характеристик.

Теорема Для любого натурального $r \geq 2$ семейство уравнений

$$a(x, y, \epsilon)u_{xx} + 2b(x, y, \epsilon)u_{xy} + c(x, y, \epsilon)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y, \epsilon),$$

где a, b, c — гладкие функции и f — некоторая функция, с параметром $\epsilon \in \mathbb{R}^{m \geq 1}$, имеющее при $\epsilon = \epsilon_0$ нерезонансную сложенную особую точку P семейства характеристик этого уравнения типа седло либо узел (фокус), приводится вблизи точки (P, ϵ_0) к семейству

$$u_{xx} + (k(\epsilon)x^2 - y)u_{yy} = \tilde{f}(x, y, u, u_x, u_y, \epsilon)$$

с некоторой функцией $\tilde{f}$ и $k(\epsilon) = \alpha(\epsilon)(\alpha(\epsilon) + 1)^{-2}/4$ (соответственно $k(\epsilon) = (1 + \alpha(\epsilon)^2)/16$), где $\alpha(\epsilon)$ — соответствующая деформация показателя особой точки, подходящим выбором расслоенных над параметром локальных C^r -координат с началом в этой точке и умножением уравнения на не обращающуюся в ноль C^r -функцию от x, y и ϵ . Показатель особой точки векторного поля вычисляется как отношение наибольшего по модулю собственного числа матрицы линеаризации поля в этой точке к наименьшему для седла и узла, и как модуль отношения мнимой части к вещественной для фокуса; для сложенных особых точек определение аналогично [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП РНПВШ (проект 2.1.1/5568).

Список литературы

- [1] Давыдов А. А., Росалес-Гонсалес Э. Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости // ДАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 151–154.
- [2] Tari F. Two-parameter families of implicit differential equations // Discrete and Continuous Dynamic Systems. 2005. V. 13, № 1. P. 139–162.

САМОИНДУЦИРОВАННЫЙ ОТРЫВ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И ПРОЦЕССЫ ВЯЗКО-НЕВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НАД ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Д. С. Данилов¹, И. И. Липатов¹, Г. Ю. Толкачев²

¹ЦАГИ, Московская область, Жуковский,

²МФТИ, Московская область, Жуковский

Исследовано локальное течение в пограничном слое в окрестности пористого элемента поверхности. На основе асимптотического анализа сформулированы математические модели и определены параметры подобия. Представлены численные и аналитические результаты, описывающие процессы вязко-невязкого взаимодействия ламинарных течений около пористых поверхностей. Такой метод пассивного управления течением в пограничном слое может использоваться для устранения отрыва, а также для затягивания ламинарно-турбулентного перехода. Показано, что давление в точке отрыва при увеличении коэффициента пористости практически не меняется, в то время как градиент давления увеличивается. Это означает, что длина области возмущенного течения уменьшается с ростом коэффициента пористости. Создание новых материалов, в частности технология производства пористых металлов привели к возможности разработки новых методов управления течением в пограничном слое. Во многих случаях можно предположить, что распределенный массообмен подчиняется закону Дарси или реализуется линейная зависимость между распределением вертикальной скорости на поверхности и распределением перепада давления. С математической точки зрения это условие позволяет пересмотреть многие ранее полученные классические результаты для описания самоиндуцированного отрыва в случае пассивного управления течением в пограничном слое. Соответствующая модель включает в себя уравнения пограничного слоя с дополнительным условием, определяющим распределение давления. Оказалось, что для случая нестационарного самоиндуцированного отрыва или для описания процессов длинноволновой неустойчивости необходимо рассматривать модифицированный закон Дарси, учитывающий запаздывание по времени.

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В НЕУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМАХ РЕАКЦИЯ — ДИФфуЗИЯ

И. В. Елюхина

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Развивается подход к редукции PDE к общему нелинейному параболическому уравнению для исследования долговременного поведения систем после потери устойчивости. Рассмотрены модели типа реакция-диффузия

$$\partial \mathbf{Y} / \partial t = \mathbf{D} \partial \mathbf{Y} / \partial x + \mathbf{N}(\mathbf{Y}),$$

описывающие процессы самовоспламенения и распространения пламени [1].

При редукции малые возмущения $\tilde{\mathbf{Y}}$ представляются в виде $A \exp i(kx - \omega t) + k.c.$, где $A = \int_{-\Delta k}^{\Delta k} F(k_0 + \delta k) \exp i(\delta k x - \partial\omega/\partial k|_{k_0} \delta k t - 0.5 \partial^2\omega/\partial k^2|_{k_0} \delta^2 k t - \varepsilon^2 \varpi_i t) d\delta k + O(\varepsilon^3)$, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, и принимается, что 1) ширина полосы волновых чисел мала: $\delta k/k_0 \ll 1$; 2) неустойчивость слабая: $\partial\omega_i/\partial k \ll 1$ на кривой нейтральной устойчивости; 3) $\delta k/k = O(\varepsilon)$, $\tilde{y}/y_0 = O(\varepsilon)$, $\omega_i = \varepsilon^2 \varpi_i = O(\varepsilon^2)$; $\varepsilon \ll 1$ [2]. Параметры линейной устойчивости находятся из дисперсионного уравнения. Для удаления секулярных членов в систему, записанную как $\mathbf{L}\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{N}$, вводится присоединенная матрица $\mathbf{L}^*$: $\mathbf{L}^*\mathbf{L}\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{L}^*\mathbf{N}$. Применяя метод многомасштабных разложений ($x_0 = x$, $x_1 = \varepsilon x$; $\partial/\partial t = \partial/\partial t_0 + \varepsilon \partial/\partial t_1 + \varepsilon^2 \partial/\partial t_2$; $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \varepsilon \mathbf{L}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{L}_2 + \varepsilon^3 \mathbf{L}_3$ и т.д.), группируются члены при одинаковых степенях ε : например, $(\mathbf{L}_0^*\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^*\mathbf{L}_0)\tilde{\mathbf{Y}}_1 + \mathbf{L}_0^*\mathbf{L}_0\tilde{\mathbf{Y}}_2 = \mathbf{L}_0^*\mathbf{N}_2$ при ε^2 , $(L_2)_{11} = \partial/\partial t_2 - D_1(\partial^2/\partial x_1^2) - 2D_1(\partial^2/\partial x_0 \partial x_2)$. С учетом решений 1-го и 2-го приближений и ряда преобразований, в т.ч. перехода к переменным $x_2 - (\partial\omega_r/\partial k)t_2$ и t_2 , из уравнения для секулярных членов при 1-й гармонике на основании 3-го приближения

$$(\mathbf{L}_0^*\mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_1^*\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2^*\mathbf{L}_0)\tilde{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{L}_0^*\mathbf{N}_3$$

для амплитуды огибающей получаем

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \omega_i}{\partial k} \frac{\partial A}{\partial x_1} - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = \frac{\omega_i}{\varepsilon^2} A - (\beta_1 + i\beta_2) |A|^2 A. \quad (1)$$

Выражения для коэффициентов (1) найдены в явном виде; здесь β_1, β_2 – постоянные Ландау, $\partial\omega_r/\partial k$ – групповая скорость, $\partial\omega_i/\partial k$, $\partial^2\omega_i/\partial k^2$, $\partial^2\omega_r/\partial k^2$ характеризуют отклонение центра волнового пакета от гармоники максимального инкремента, дисперсию инкремента и групповой скорости. В отличие от CGLE, (1) позволяет, в частности, описать расположение центра не на гармонике максимального инкремента, т.е. изучить нелинейное взаимодействие между пакетами с центрами на различных гармониках и для кривых инкремента сложного вида, с точками перегиба. Уравнение (1) проанализировано на основе показателей Ляпунова, метрического инварианта динамических систем Колмогорова – Сина и отображения Пуанкаре на плоскости. В его рамках обсуждены закономерности перехода от одного типа взаимодействия к другому и возникновения структур, в т.ч. таковые для самоорганизации, маломодового хаоса и многомодовой турбулентности, касающиеся изменения в распределении энергии по спектру и зависимости фазы или частоты от амплитуды возмущений. Развита приложения к тепломассообменным процессам при химических превращениях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-08-00536).

Список литературы

- [1] Volpert A. I., Hudjaev S. I. *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*. Springer, 1985.
- [2] Elyukhina I., Kholpanov L. *Analysis of long-time interaction of perturbations in problems of macrokinetics* // Theor. Found. Chem. Eng. 2011. V. 45. N 3. (in press)

ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

А. В. Жибер¹, О. С. Костригина²

¹Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа

²Уфимский государственный авиационный технический университет

Работа посвящена исследованию проблемы интегрируемости нелинейных двумерных систем уравнений

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y) \quad (u_{xy}^i = F^i, \quad i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Последние описывают широкий класс нелинейных явлений в самых различных областях теоретической и математической физики.

Изучаемые системы (1) обладают нетривиальной группой внутренних симметрий, генерируемой алгеброй Ли — Беклунда. Симметричный метод классификации интегрируемых уравнений очень эффективен в случае эволюционных уравнений, однако, при симметричной классификации гиперболических уравнений возникают серьезные технические трудности даже в простейшей ситуации (см., например, [1], [2]).

В предлагаемой работе для решения классификационной задачи используется метод, связанный с характеристической алгеброй. Идеи этого алгебраического подхода были предложены в классических работах Дарбу, Гурса, Вессио и других авторов (см., например, [3], [4]), однако окончательное его формирование произошло сравнительно недавно.

В настоящей работе рассматриваются системы уравнений (1) для $n = 2$ обладающие интегралами первого и второго порядка:

$$\begin{aligned} \omega^1(u^1, u^2, u_1^1, u_1^2), \quad \omega^2(u^1, u^2, u_1^1, u_1^2, u_2^1, u_2^2), \\ \bar{\omega}^1(u^1, u^2, \bar{u}_1^1, \bar{u}_1^2), \quad \bar{\omega}^2(u^1, u^2, \bar{u}_1^1, \bar{u}_1^2, \bar{u}_2^1, \bar{u}_2^2). \end{aligned}$$

Проведена классификация таких систем, построены их интегралы и общие решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-01-00088-а, 10-01-91222-СТ-а).

Список литературы

- [1] Жибер А. В., Шабат А. Б. *Системы уравнений $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$ обладающие симметриями*. Доклады АН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 29–33.
- [2] Жибер А. В. *Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий*. Известия РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 4. С. 33–54.
- [3] E. Goursat. *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre*. Annales de la faculté des Sciences de l'Université de Toulouse 2^e série, tome 1, n^o 1 (1899) p.31-78.
- [4] E. Vessiot. *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, intégrables par la méthode de Darboux*. J.Math.Pure Appl. 18; 21 (1939;1942), 1-61; 1-66.

О МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА СФЕРЕ

А. В. Иванова, В. В. Остапенко, А. А. Черевко, А. П. Чупахин

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Модель мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере описывает крупномасштабные движения воды в мировом океане и газа в атмосфере. Она является системой гиперболического типа на компактном многообразии. Это влечет необходимость рассмотрения движений с сильными и слабыми разрывами, области определения которых покрывают всю сферу.

В докладе описываются точные решения различных типов: состояние равновесия, простые стационарные волны, все параметры которых зависят только от широты. Построены решения такого вида с контактными разрывами и ударными волнами типа бора на сфере.

Приведены результаты численных экспериментов по расчету движений описывающих в начальный момент времени возвышение свободной поверхности различной геометрии на некотором участке сферы (подводные хребты). Эти расчеты демонстрируют нетривиальную картину взаимодействия волновых фронтов на сфере.

Работа выполнена при финансовой поддержке НШ-4368.2010.1, Минобразования РФ 2.1.1/3543 и Интеграционного проекта СО РАН № 40.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЛН В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ, НАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

А. Т. Ильичев

Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Так как эксперименты показывают, что волны давления, распространяющиеся в артериях, обнаруживают нелинейные характеристики, возникло и непрерывно продолжается исследование распространения уединенных волн в наполненных жидкостью мембранных трубах, моделируемых мембранной осесимметричной оболочкой. Одним из возможных приложений такого исследования является использование нелинейного волнового распространения для медицинского контроля за состоянием артерий. Другое — динамические эффекты, связанные с распространением волн, могут играть существенную роль при разрыве аневризмы, который является фатальным (аневризма — локализованное выпучивание на артериях и при ее диагностировании следует принять решение, оперировать ее или оставить).

Аневризма очень хорошо моделируется стоячей уединенной волной выпучивания конечной амплитуды на мембранной трубе заполненной жидкостью. Устойчивость такой уединенной волны характеризует устойчивость аневризмы и в линейной стадии исследована в работе. Анализ полных нелинейных уравнений, описывающих распространение волн в осесимметрических упругих трубах, наполненных жидкостью,

также включает исследование кинков, которые двоякоасимптотичны к разным постоянным. Подобные волны не могут быть описаны в рамках слабонелинейного анализа.

Амплитуда уединенных волн данного семейства не может расти бесконечно. При росте амплитуды уединенных волн, их форма изменяется: наверху уединенной волны появляется “плато” и вторая производная в точке максимума стремится к нулю. При достижении нулевого значения второй производной образуется кинк. Это верно как для семейства стоячих уединенных волн, так и для недавно обнаруженных семейств бегущих уединенных волн (см. [1]).

Семейство стоячих уединенных волн в мембранной трубе наполненной жидкостью, неустойчиво относительно осесимметричных возмущений. Параметром семейства служит предварительная деформация в трубе. Неустойчивость связана с существованием неустойчивой собственной функции, отвечающей неустойчивому собственному значению, вещественная часть которого больше нуля (собственное значение расположено в правой комплексной полуплоскости спектрального параметра). В данной работе построена функция Эванса, аналитическая в правой комплексной полуплоскости спектрального параметра, нули которой в этой полуплоскости совпадают с неустойчивыми собственными значениями. Построение функции Эванса проведено численно-аналитическими методами при помощи одного из аналитических пакетов программ.

Список литературы

- [1] Fu, Y. B., Plichev A. T. *Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement* // IMA J. Appl. Math. 2010. V. 75. P. 257–268.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕКОТОРЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

А. Л. Казаков

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Отличие обобщенной задачи Коши (ОЗК) от задачи Коши в традиционной постановке состоит в том, что в ОЗК начальные данные ставятся не на одной, а на двух или более поверхностях [1].

Впервые применил ОЗК для исследования течений газа с ударными волнами В. М. Тешуков. В частности, им было установлено, что газодинамические задачи о резком движении в газ непроницаемого поршня, о регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки, о взаимодействии криволинейных фронтов ударных волн описываются ОЗК с данными на двух поверхностях [2, 3, 4].

В дальнейшем было показано, что некоторые течения газа в окрестности оси или центра симметрии, в том числе с отраженными ударными волнами также описываются ОЗК (для систем с особенностями) [5, 6].

В настоящей работе для двух ОЗК с данными на двух поверхностях, возникающих в газовой динамике, доказаны теоремы существования и единственности решений в классе аналитических функций, которые дополняют и уточняют ранее доказанные [6]. С использованием указанных теорем для численного решения задач строятся неявные разностные схемы. Системы разностных уравнений сводится к трехдиагональным системам линейных алгебраических уравнений. Выполнена программная реализация, которая протестирована на модельных примерах, проведены иллюстрирующие численные расчеты.

Список литературы

- [1] Леднев Н.А. *Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными* // Мат. сб. 1948. Вып. 2. С. 205–266.
- [2] Тешуков В.М. *Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне* // Динамика сплошной среды. 1978. Вып. 33. С. 114–133.
- [3] Тешуков В.М. *О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки* // ПММ. 1982. Т. 46, №. 2. С. 225–234.
- [4] Тешуков В.М. *Пространственное взаимодействие сильных разрывов в газе* // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, № 4. С. 225–234.
- [5] Казаков А.Л. *Построение кусочно аналитических течений газа, состыкованных через ударные волны, вблизи оси или центра симметрии* // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 5. С. 25–38.
- [6] Баутин С.П., Казаков А.Л. *Обобщенная задача Коши и ее приложения*. Наука, Новосибирск. 2006. 399 с.

МЕТОД ЛАПЛАСА — МУТАРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. В. Капцов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В докладе описывается метод интегрирования нелинейной системы Мутара произвольного порядка

$$h_1 = h - (\ln h)'' , \quad h_2 = h_1 - (\ln h h_1)'' , \quad \dots , \quad h_n = h_{n-1} - (\ln h h_1 \dots h_{n-1})'' = 0.$$

Метод основан на преобразованиях Лапласа и Мутара для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основным результатом является следующее утверждение. Система Мутара обладает решением

$$h = -2(\ln W(\varphi_1, \dots, \varphi_n))'' ,$$

где $\varphi_i = a_i e^{k_i x} + b_i e^{-k_i x}$, $a_i, b_i \in R$, $k_i \in C$, $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$, W — вронскиан функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Систему можно отнести к непериодическим цепочкам Тоды с матрицей Картана C_n . Простота метода позволяет надеяться на его дальнейшее развитие.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00049), СО РАН (интеграционный проект 103) и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-7256.2010.1.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ЕГО ИМПУЛЬСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

М. М. Катасонов¹, П. А. Мотырев¹, Д. С. Сбоев²

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

²ЦАГИ, Москва

В последние годы детально рассматривается потенциальная возможность существенного снижения сопротивления обтекаемых тел путем затягивания ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое методами активного управления пристенным течением. Такие методы, например, с использованием микроэлектромеханических систем (Microelectromechanic systems MEMS), предполагают локальное импульсное воздействие на вихревые возмущения, присутствующие в слое сдвига на ранних этапах их развития [1]. Однако в случае импульсного воздействия, в пограничный слой вводится возмущение с широким спектром частот, часть из которых попадает в область неустойчивости течения (если таковая имеется). В результате в пограничном слое возникает волновой пакет, который будет быстро нарастать ниже по потоку и может привести к образованию турбулентного пятна, т.е. положительного эффекта управления не будет достигнуто. Данный волновой пакет получил название “предвестник”, поскольку предшествует фронту локализованного возмущения (резкому изменению скорости) [2].

Настоящая работа посвящена экспериментальному изучению волновых пакетов (предвестников) возникающих в пограничном слое прямого крыла в областях, предшествующих резкому локальному изменению скорости потока внутри пограничного слоя (фронты локализованного возмущения, генерируемого импульсным вдувом-отсосом воздуха). Эксперименты проводились в контролируемых условиях, с использованием методики введения искусственных возмущений, в дозвуковой аэродинамической трубе МТ-324 ИТПМ СО РАН на модели прямого крыла при различном уровне турбулентности набегающего потока в рабочей части.

Работа поддержана грантом Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (МД-3973.2011.1).

Список литературы

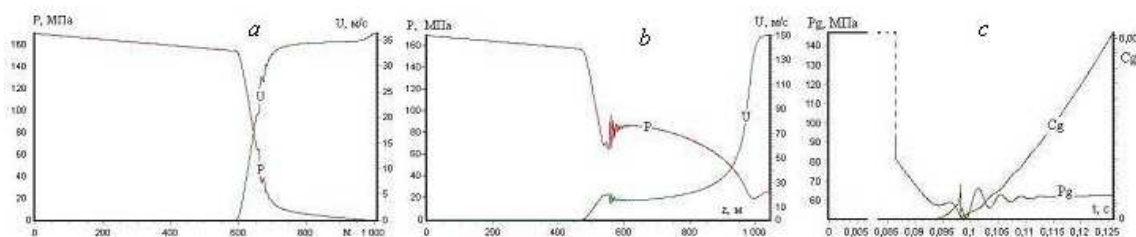
- [1] Бойко А. В., Грек Г. Р., Довгаль А. В., Козлов В. В. *Возникновение турбулентности в пристенных течениях*. Изд-во Наука. Сиб. отделение, 1999.
- [2] Горев В. Н., Катасонов М. М. *Возникновение и развитие предвестников на фронтах продольных структур в пограничном слое прямого крыла* // Теплофизика и аэромеханика. 2004. Т. 11. № 3. С. 403–415.

ДИНАМИКА ЗАРОДЫШЕЙ КАВИТАЦИИ И СТРУКТУРА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ПРИ ВЗРЫВНОЙ ДЕКОМПРЕССИИ МАГМЫ

В. К. Кедринский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Одной из основных проблем, возникающих при моделировании нестационарных высокоскоростных течений расплава магмы и сопровождающих их фазовых переходов, является понимание физической кинетики состояния расплава за фронтом волны декомпрессии. Исследования одномерной динамики состояния кавитирующего расплава магмы, выполненные с использованием многофазной модели [1], показали, что важную роль в кинетике процесса играет динамика кавитационных пузырьков на начальном этапе зарождения многофазного состояния расплава, которая зависит от многих динамических характеристик. Поведение последних оказывается самосогласованным. В работе выполнен численный анализ влияния диффузии растворенного в расплаве газа на структуру волнового поля и динамику роста пузырьков в “лагранжевом” сечении потока магмы за фронтом насыщения кавитационной зоны зародышами. Динамика состояния магмы в волне декомпрессии анализируется в рамках сравнения влияний диффузионных потоков - в случае их существенного ограничения и в случае естественных потоков, обеспечивающих увеличение массы газа в пузырьках. Показано, что в первом случае формируется классический профиль волны декомпрессии, на фронте которой, при переходе в зону насыщения кавитационными зародышами, возникают незначительные возмущения (рис. а). При отсутствии ограничений профиль волны декомпрессии $P(z)$ при переходе через фронт насыщения (см. $z \simeq 500 \div 1050$ м) принципиально меняется (рис. б). При этом в окрестности свободной поверхности ($z \geq 950$ м) возникают скачки массовой скорости $U(z)$ и давления $P(z)$. В течение достаточно продолжительного интервала времени, несмотря на рост пузырька и интенсивную диффузию газа в него из расплава $Cg(t)$, наблюдается эффект стабилизации давления в кавитационном пузырьке $Pg(t)$ (рис. в). Очевидно, начиная с этого временного интервала диффузия и вязкость, по сути, определяют динамику роста кавитационных пузырьков в магме.



Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00500а) и, частично, ИП СО РАН № 59 и Программы Президиума РАН № 12.12.

Список литературы

- [1] Кедринский В. К., Давыдов М. Н., Чернов А. А., Такаяма К. *Начальная стадия взрывного извержения вулканов: динамика состояния магмы в волнах разгрузки* // Докл. АН. 2006. Т. 407, № 2. С. 190–193.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ СРЕД С ДИФфуЗИЕЙ

А. Г. Князева

Томский политехнический университет

Институт прочности физики и материаловедения СО РАН, Томск

Исследование взаимовлияния диффузии и напряжений имеет довольно длинную историю. Этот вопрос обсуждался в работах различных авторов (С. Т. Конобеевский, Б. Я. Любов, Н. С. Фастов, Б. Я. Пинесс, С. Пруссин, Я. С. Подстригач, Дж. Эшелби, М. А. Кришталл, Я. Е. Гегузин, В. С. Еремеев и др.). В твердом теле не существует прямой аналогии между процессами теплопроводности и диффузии. Математическое описание диффузии зависит от ее механизма в реальных веществах. Обзор моделей термоупругих сред с диффузией (с единственной “дополнительной” переменной — концентрацией) с теоремами существования и взаимности представлен в [1], а [2] — пожалуй, единственная обстоятельная монография, посвященная моделированию в механике диффузии в средах с различными реологическими свойствами. Для построения связанных моделей сред с диффузией можно использовать любые из современных термодинамических теорий, обзорам которых посвящены появившиеся в последние годы обзоры, монографии и учебные пособия. В рамках линейной термодинамики необратимых процессов нелинейные модели сред с диффузией следуют из рассмотрения различных механизмов диффузии (вакансионного механизма и механизма внедрения; диффузии в объеме и по границам раздела зерен и фаз); при определении феноменологических коэффициентов при приближении идеального, неидеального и регулярного растворов, а также при учете зависимости физико-механических свойств от состава. Нелинейные определяющие соотношения для изотермических условий появляются и при учете различных механизмов переноса: диффузии, переноса под действием внутренних упругих напряжений, переноса вследствие течения неупругой среды. В работе приводятся примеры связанных моделей, иллюстрирующие роль различных нелинейных эффектов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00034) и в рамках Государственного контракта № 16.740.11.0122.

Список литературы

- [1] Aouadi, M. *Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media* // J. of Thermal Stresses. 2008. V. 31. P. 270–285.
- [2] Kuiken, Gerard D.C. *Thermodynamics of irreversible processes. Applications to diffusion and rheology*. J Wiley and sons: Chichester-Ney York, 1994.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГОРИЗОНТАЛЬНО–СДВИГОВОГО ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

П. В. Ковтуненко, А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Рассматривается система уравнений, описывающая в приближении теории мелкой воды горизонтально-сдвиговое движение идеальной несжимаемой жидкости в открытом протяженном канале переменного сечения [1]. Для построения решений уравнений движения с ненулевой потенциальной завихренностью $\Omega = u_y/h \neq 0$ используется кинетическая формулировка модели

$$\begin{aligned} W_t + uW_x - gh_xW_u &= 0, \quad h = \frac{1}{Y} \int_{u_1}^{u_2} W du, \\ u_{1t} + u_1u_{1x} + gh_x &= 0, \quad u_{2t} + u_2u_{2x} + gh_x = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $W = \Omega^{-1}$ (аналог функции распределения) является искомой функцией переменных t , x и u ; функция $Y(x) = Y_2(x) - Y_1(x)$ — заданная ширина канала; $h(t, x)$ — глубина слоя жидкости в открытом канале; $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ — скорость жидкости в направлении оси Ox на боковых стенках канала $y = Y_1(x)$ и $y = Y_2(x)$.

Показано, что в случае канала постоянного поперечного сечения существует величина R , удовлетворяющая на решениях уравнений (1) такому же уравнению, что и функция W . Это позволяет использовать предложенный в [2] подход для построения специальных классов решений, характеризующихся функциональной зависимостью между интегральными инвариантами Римана W и R . При этом решение задается гиперболической системой двух дифференциальных уравнений с двумя параметрами. Для простых волн получено аналитическое представление решения.

В классе бегущих волн построены решения уравнений (1) с функциональным произволом, непрерывно примыкающие к заданному сдвиговому потоку. Построение решений основано на предложенном В. М. Тешуковым подходе [3], позволяющем

свести интегрирование кинетической модели в классе бегущих волн к решению интегрального уравнения Абеля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/3543), Интеграционного проекта СО РАН №65 и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4368.2010.1).

Список литературы

- [1] Чесноков А. А., Ляпидевский В. Ю. *Волновые движения идеальной жидкости в узком открытом канале* // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 61–71.
- [2] Teshukov V., Russo G., Chesnokov A. *Analytical and numerical solutions of the shallow water equations for 2-D rotational flows* // Math. Models Methods Appl. Sci. 2004. V. 14. P. 1451–1479.
- [3] Тешуков В. М. *Характеристики, законы сохранения и симметрии кинетических уравнений движения пузырьков в жидкости* // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 86–100.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПРИ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОМ ПЕРЕХОДЕ НА ПРЯМЫХ И СКОЛЬЗЯЩИХ КРЫЛЬЯХ

В. В. Козлов, В. Г. Чернорай

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

В докладе приведены результаты экспериментальных исследований нелинейной неустойчивости в двухмерном и трехмерных пограничном слоях и описаны развитые для этого методы исследований [1].

1. Новые методы термоанемометрии в аэрофизическом эксперименте.

Обсуждаются разработанные и использованные в аэрофизических исследованиях методики пространственно-временной термоанемометрической визуализации как двумерных, так и трехмерных течений.

2. Ламинарно-турбулентный переход К-типа на скользящем крыле.

Впервые исследован ламинарно-турбулентный переход К-типа на скользящем крыле и показано, что развитие лямбда-структур в К-режиме перехода в области неблагоприятного градиента давления на прямом крыле качественно идентично их развитию на плоской пластине. Впервые показано, что ламинарно-турбулентный переход, вызванный волнами Толлмина — Шлихтинга на скользящем крыле, приводит к образованию асимметричных лямбда-структур. Наличие поперечного течения приводит к тому, что из двух противовращающихся вихрей лямбда-структуры остается лишь один. Таким образом, впервые показано, что лямбда-структура может трансформироваться в локализованный во времени и пространстве вихрь аналогичный

полосчатой структуре, механизм разрушения которой связан с ее неустойчивостью к вторичным высокочастотным возмущениям.

3. Механизм трансформации лямбда-структуры в турбулентное пятно.

Детально исследован один из механизмов трансформации лямбда-структуры в турбулентное пятно. Показано, что взаимодействие затухающей лямбда-структуры с высокочастотной волной приводит к нарастанию вторичного высокочастотного возмущения и образованию турбулентного пятна, даже если лямбда-структура и высокочастотная волна затухали, когда генерировались независимо. Рост вторичных возмущений объясняется невязкой неустойчивостью перегибного типа.

4. Вторичная неустойчивость продольных вихрей в пограничном слое скользящего крыла.

Проведено детальное экспериментальное изучение формирования пакетов вихревой моды поперечного течения и их вторичной высокочастотной неустойчивости в пограничном слое скользящего крыла. Обнаружены две моды вторичной неустойчивости стационарных вихрей. Предпочтительная мода находилась в зависимости от свойств первичного стационарного возмущения. Изучена динамика процесса нелинейного формирования и развития вихрей в пограничном слое скользящего крыла. Обнаружено, что совращающиеся вихри большой амплитуды могут взаимодействовать друг с другом и, таким образом, снижать свою интенсивность.

Работа поддержана грантом РФФИ (№ 08-01-00027), грантом Президента Российской Федерации (НШ-454.2008.1), грантом Министерства образования и науки РФ (№ РНП. 2.1.2.541).

Список литературы

- [1] Chernoray V. G., Dovgal A. V., Kozlov V. V., Lofdahl L. *Secondary instability of a swept-wing boundary layer disturbed by controlled roughness elements* // Journal of Visualization. 2010. V. 13. № 3. P. 251–256.

НАЧАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРУЖЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

В. К. Костиков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача о нестационарных волнах на поверхности тяжелой идеальной жидкости, возникающих в результате движения полностью погруженного эллиптического цилиндра по заданному закону. Основной целью является построение начальной асимптотики волнового движения, учитывающей сильно нелинейный характер взаимодействия тела со свободной поверхностью в случае, когда цилиндр начинает двигаться с постоянным ускорением из состояния покоя. Аналитический

метод решения использует технику редукции исходной задачи к системе интегродифференциальных уравнений на свободной поверхности [1, 2]. В указанной постановке решение зависит от четырех параметров: эксцентриситета эллиптического сечения цилиндра, начальной глубины его погружения, направления движения и величины ускорения цилиндра. В работе найдены первые девять коэффициентов в разложении решения по степеням времени t . Рассмотрены различные режимы движения (вертикальное всплытие, вертикальное погружение, горизонтальное и комбинированное движения), проведено сравнение волновых картин для разных эксцентриситетов и глубин начального погружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00427).

Список литературы

- [1] Makarenko N. I. *Nonlinear interaction of submerged cylinder with free surface*. JOMAE Transactions of the ASME. 2003. V. 125, N 1. P.72–75.
- [2] Makarenko N. I. *Nonlinear water waves in the presence of submerged elliptic cylinder*. Proc. 23rd Int. Conf. on Offshore Mech. and Arctic Engineering OMAE'04. June 20-25, 2004, Vancouver, Canada. Paper OMAE-51413.

ОБ УДАРНЫХ ВОЛНАХ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ И В СТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

А. Н. Крайко

Центральный институт авиационного моторостроения
им. П. И. Баранова, Москва

Обсуждаются вопросы, связанные с ударными волнами (УВ) в нестационарных автомодельных течениях и в стационарных осесимметричных сверхзвуковых струях. Для автомодельных нестационарных течений это УВ, которые в задаче о схлопывании пустой сферической полости или в задаче Гудерлея распространяются (“отражаются”) от центра или оси симметрии. В отличие от классических постановок допускается уменьшение на отраженной УВ отношения удельных теплоемкостей (“показателя адиабаты”) совершенного газа. Изучены обусловленные этим особенности таких течений. В стационарных осесимметричных сверхзвуковых струях рассматривается усиление слабых УВ, идущих к оси симметрии. В “приближении нелинейной акустики” (ПНА) в противоположность результатам численного интегрирования уравнений Эйлера указанное усиление не зависит от показателя адиабаты газа и от числа Маха потока перед УВ. Построена более точная, чем ПНА, нелинейная теория, лишенная этого недостатка. В ней усиление УВ находится из решения задачи Коши для двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Важно, что границы применимости

развитого подхода определяются по результатам численного интегрирования этих уравнений.

О СОВМЕСТНОМ ВЛИЯНИИ РАДИАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И БАРОКЛИННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА СТРАТИФИКАЦИЮ В ТРОПОСФЕРЕ

В. Н. Крупчатников

*Сибирский гидрометеорологический институт Росгидромета, Новосибирск
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН*

В работе исследуется реакция термической стратификации внетропической тропосферы к вариации радиационного источника нагревания, заданного в форме Ньютона, и бароклиной динамики с помощью модели общей циркуляции атмосферы с зонально симметричными граничными условиями на поверхности [1, 2]. Обсуждаются некоторые механизмы формирования термической стратификации в тропосфере [2, 3, 4]. Тропосфера является слабо стратифицированным слоем, в отличие от стратосферы. Такое различие в стратификации объясняется природой радиационно-динамического равновесия. Солнечная радиация, нагревая поверхность Земли, формирует состояние неустойчивого равновесия слоя, либо конвективно-неустойчивого в тропиках, либо бароклинно неустойчивого в средних широтах (бароклиная турбулентность). Перенос тепла/момента, обусловленный крупномасштабными движениями атмосферы, как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении, в основном сосредоточен в слое конечной толщины, который практически совпадает с тропосферой. Тропосферу можно рассматривать как слой, внутри которого циркуляция перераспределяет основную часть энтропии, которую атмосфера получает от нагревания поверхности. Таким образом, тропосферу можно считать термическим слоем атмосферы, а тропопаузу верхней границей этого слоя. Высота тропопаузы и термическая стратификация тропосферы являются результатом сложного динамического взаимодействия между радиационными процессами и бароклиными турбулентными потоками энтропии (тепла), в то время как стратификация в стратосфере определяется в основном радиационными процессами. Окрестность тропопаузы — это слой, где происходит взаимодействие тропосферы и стратосферы, поэтому высота тропопаузы является одним из ключевых параметров общей циркуляции атмосферы наряду с параметром стратификации в тропосфере, моделирование которых до сих пор остается трудной задачей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-05-00457).

Список литературы

- [1] Боровко И. В., Крупчатников В. Н. *Влияние динамики стратосферного полярного вихря на циркуляцию в нижней тропосфере* // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12. № 2. С. 145–160.

- [2] Borovko I., Krupchatnikov V. *The influence of stratosphere polar vortex dynamics upon a low troposphere thermal stratification* // Bull. Nov. Comp. Center, Num. Model. In Atmosphere., etc., 12(2010), 1–7.
- [3] Held I. M., Larichev V. D. *A scaling theory for horizontally homogeneous, baroclinically unstable flow on a beta plane* // J. Atm. Sci., 1996, V.53, № 7, P. 946–952.
- [4] Мартынова Ю. В., Крупчатников В. Н. *Исследование чувствительности приземной температуры Евразии в зимний период к аномалиям снежного покрова. Роль стратосферы* // Известия РАН, серия ФАО. 2010, Т. 46, № 6. С. 1–13.

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ФРОНТЫ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

А. Г. Куликовский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Рассматриваются сильные разрывы в решениях гиперболических систем уравнений механики сплошной среды. Предполагается наличие потока массы через фронт разрыва. Если число граничных условий обязательных для выполнения на разрыве (следующих из законов сохранения или из других законов и предположений), меньше числа неизвестных в системе уравнений, описывающих состояние и движение среды за разрывом, то при распространении разрыва по заданному неподвижному состоянию среды множество возможных состояний за разрывом (ударная адиабата) может зависеть от более чем одного параметра. Такие разрывы будем называть многопараметрическими. Число параметров, от которых зависит возможное состояние за разрывом, могут уменьшить “дополнительные” граничные условия, возникающие как условия обеспечивающие существование решения задачи о структуре разрыва. Эти дополнительные граничные условия зависят от мелкомасштабных процессов, происходящих внутри структуры, для описания которых в гиперболические уравнения должны быть введены соответствующие этим процессам члены.

Известными ранее многопараметрическими разрывами являются фронты фазовых переходов, когда по разные стороны от разрыва среда описывается различными уравнениями, а также фронты, на которых на среду оказывается внешнее воздействие.

Высказывается точка зрения, что многопараметрические разрывы — один из случаев общего положения в механике сплошных сред. Рассмотрены два примера систем уравнений, относящихся к механике деформируемого твердого тела, когда возникают многопараметрические разрывы, изучена их структура и рассмотрены задачи, в которых такие разрывы возникают. Первый из примеров описывает вариант фазового превращения в виде образования нелинейно упругой среды Кельвина — Фойхта при уплотнении потока невзаимодействующих частиц. В другом примере представлен простейший случай, когда причиной образования многопараметрического разрыва является возникновение в разрыве остаточных деформаций.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ДОЗВУКОВЫХ МАКРО – И МИКРОСТРУЙ К АКУСТИЧЕСКОМУ ПОЛЮ

Ю. А. Литвиненко, Г. Р. Грек, М. В. Литвиненко, Г. В. Козлов

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО
РАН, Новосибирск*

В данной работе представлены результаты экспериментальных исследований по развитию и управлению ламинарной круглой микроструей с различными профилями скорости на выходе из микроканала. Показаны особенности развития ламинарной круглой микроструи при воздействии на нее акустического поля с частотой от 40 Гц до 3 кГц. Отличительной особенностью круглой микроструи $d_{jet} = 400 \text{ мкм}$ от обычной круглой струи ($d_{jet} = 5 \text{ мм}$), является отсутствие кольцевых вихрей, образующихся на начальном участке развития (рис. 1, а). При наложении акустического поля низкой частоты круглая микроструя трансформируется в плоскую квазидвумерную (см. рис. 1, б, в). При повышении частоты в диапазоне от 1,4 кГц до 3 кГц наблюдается взрывообразный характер развития микроструи (см. рис. 1, г). Микроструя резко, в виде конуса, расширяется и турбулизуется. Такое развитие микроструи под действием высоких частот нами объясняется высокой степенью неустойчивости (восприимчивости) микроструи, связанной с очень тонкими слоями сдвига. В ходе экспериментов также исследовались микроструи с параболическим профилем скорости на выходе. Какого-либо существенного влияния параболического профиля на свойства микроструи не выявлено. Полученные результаты вполне согласуются с представленными выше и свидетельствуют о том, что при незначительном увеличении диаметра микроструи ее характерные особенности развития сохраняются.

*a**b**c**d*

Рис. 1. Дымовая визуализация микроструи с “ударным” профилем скорости на выходе при наложении акустического поля: a — без акустического поля, b — 40Гц, c — 80Гц, d — 1500Гц, $d_{jet} 400$ мкм, $U_{out} = 0,5$ м/с.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (код проекта МК-1047.2011.1).

ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА ВОЗМУЩЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВОДОЕМОВ СО СКАЧКОМ ПЛОТНОСТИ

А. А. Литвиненко¹, Н. С. Сафарова¹, Г. А. Хабахпашев^{1,2}

¹Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Для правильного описания внутренних возмущений в естественных водоемах необходимо задавать реальную зависимость плотности от глубины. Наиболее простой моделью, учитывающей стратификацию, является профиль в виде одной ступеньки [1]. В двухслойной жидкости возможны только две моды колебаний, но результаты наблюдений показывают [2], что во многих ситуациях большая часть энергии приходится именно на эти две моды колебаний. Поэтому в докладе рассматривается волны в двухслойной жидкости со свободной поверхностью.

Предполагалось, что жидкости в слоях являются невязкими, несжимаемыми и несмешивающимися, а волны достаточно длинными и слабонелинейными. Выведено эволюционное уравнение, позволяющее определять возмущение свободной поверхности водоема η по ранее найденному решению для возмущения границы раздела ζ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh_1 \nabla^2 \eta + g \nabla[(\zeta - \eta) \nabla \eta] + \frac{c_0^2}{h_1} \nabla^2[(2\zeta - \eta)\eta] - \frac{h_1^2}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \\ = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{c_0^2}{h_1} \nabla^2 \zeta^2 - \frac{h_1^2}{6} \nabla^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \quad c_0^2 = \frac{gh}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\rho'_* \frac{h_1 h_2}{h^2}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время, g — ускорение свободного падения, h_l — равновесная глубина l -го слоя, ρ_l — плотность воды в l -ом слое; индекс l равен 1 для верхнего слоя, и 2 для нижнего; оператор градиента $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\rho'_* = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ и $h = h_1 + h_2$.

В приближении Буссинеска для внутренних волн первой бароклинной моды (знак минус в формуле для c_0^2) в водоемах с пологим дном получено следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \zeta - \alpha \nabla^2 \zeta^2 - \beta \nabla^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \gamma \nabla h_2 \cdot \nabla \zeta. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты α , β и γ зависят только от геометрических (h_1 , h_2) и физических (ρ_1 , ρ_2 , g) параметров задачи.

Численные расчеты показали, в частности, что при взаимодействии плоской гармонической волны, бегущей по свободной поверхности водоема, с уединенной нелинейной осциллирующей внутренней волной, распространяющейся по границе раздела слоев, может наблюдаться интересная интерференционная картина.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (В. Е. Захаров – НГУ).

Список литературы

- [1] Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
- [2] Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане*. М.: Мир, 1981.

ПЛОТНОСТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ИНТРУЗИИ: НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В. Ю. Ляпидевский

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Плотностные течения и интрузии являются одним из основных механизмов вертикального и горизонтального массообмена в стратифицированной по плотности жидкости и представлены в атмосфере и океане движениями различных масштабов. Характерной особенностью таких течений является совместное влияние эффектов нелинейности, дисперсии и турбулентного перемешивания на структуру фронтальных зон. Это обстоятельство значительно затрудняет построение адекватной математической модели для различных видов гравитационных течений. В частности, остается открытым вопрос об определении скорости фронта возмущения, распространяющегося в придонной области или вдоль высокоградиентных прослоек. В работе на основе математической модели трехслойной мелкой воды, учитывающей влияние нелинейности, дисперсии и перемешивания, построены аналитические и численные решения задачи о распространении внутренних волн в интрузионных и гравитационных течениях. Показано, что учет трения на границах раздела в математической модели позволяет адекватно описать изменение фазовых и амплитудных характеристик как симметричных, так и несимметричных уединенных волн в процессе их распространения. Построенные аналитические и численные решения применены для описания эволюции приповерхностных и придонных внутренних волн большой амплитуды в шельфовой зоне моря. Для простейшей модели распространения подводной лавины за счет подъема мелкодисперсных осадков дано правило отбора скорости фронта и показано, что найденная аналитически скорость фронта является предельной скоростью распространения головной части плотностного течения, построенного численно для соответствующей нестационарной проблемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00427), Программы отделений РАН № 14.14.1 и Министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/3543).

ДОКРИТИЧЕСКИЕ СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ НАД ПРЕПЯТСТВИЯМИ

Н. И. Макаренко, Ж. Л. Мальцева

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Рассматривается математическая модель стационарных внутренних волн в слабостратифицированной жидкости, возникающих вследствие взаимодействия потока с обтекаемой поверхностью. В данной работе рассматриваются волновые структуры, формирующиеся в докритическом течении над системой препятствий. Метод основан на асимптотическом анализе уравнения Дюбрей - Жакотен — Лонга с использованием двух безразмерных параметров. Один из них (параметр Буссинеска) характеризует малый градиент плотности жидкости, другой — безразмерную высоту отдельного препятствия. Не так давно в [1] с введением топографических координат была дана формулировка уравнения Дюбрей - Жакотен — Лонга, в которой функция, задающая форму дна с препятствиями, появляется в коэффициентах основного дифференциального уравнения. Такое преобразование существенно облегчает исследование влияния рельефа дна на структуру дальнего волнового поля над препятствиями. В работе [2] предлагается альтернативный метод, основанный на использовании переменных Мизеса. В этом случае также достигается преобразование области течения к прямолинейной полосе, но форма дна участвует только в граничном условии. Данный подход позволяет удовлетворить точным граничным условиям на дне путем решения уравнений уже в главном асимптотическом порядке. Поэтому построенная приближенная модель адекватно описывает чувствительность волновых структур в ближнем поле к малым возмущениям области течения. Получены и проанализированы интерференционные волновые картины для череды конечного числа отдельных препятствий.

Работа выполнена в рамках Программы РАН № 20.4 при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00427).

Список литературы

- [1] Humi M. *Long's equation in terrain following coordinates* // Nonlinear Processes in Geophysics. 2009. V. 16. P. 533–541.
- [2] Makarenko N.I., Maltseva J.L. *Interference of lee waves over mountain ranges* // Natural Hazards and Earth System Sciences. 2011. V. 11. P. 27–32.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Б. Медведев

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

Хорошо известно, что система для двух инвариантов Римана

$$r_t + \lambda(r, s)r_x = 0, \quad s_t + \mu(r, s)s_x = 0. \quad (1)$$

имеет бесконечное число законов сохранения с плотностью $F(r, s)$, которая зависит только от r и s [1].

Если допустить зависимость плотности закона сохранения $F(t, x, r, s)$ от t и x , то возможно существование дополнительных законов сохранения. Найдены необходимые и достаточные условия на коэффициенты λ и μ , при которых существуют законы сохранения зависящие также от t и x .

Несмотря на то, что система инвариантов Римана (1) может приводить к формированию сингулярных решений, для которых пространственные производные равны бесконечности (градиентная катастрофа), эта система может обладать законами сохранения первого порядка. Найдены условия для существования и плотности законов сохранения первого порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке межрегионального интеграционного проекта СО РАН № 103.

Список литературы

- [1] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений* М.: Наука, 1978.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

Р. Д. Муртазина

Уфимский государственный авиационный технический университет

Задача классификации интегрируемых нелинейных гиперболических уравнений

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y) \quad (1)$$

рассматривалась многими авторами (см., например, [1, 2, 3]). В статье [3] предложена схема классификации систем уравнений типа $u_{xy}^i = F^i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), интегрируемых по Дарбу на основе характеристических колец Ли.

Введем обозначения: $u_1 = u_x$, $\bar{u}_1 = u_y$, $D(\bar{D})$ — оператор полного дифференцирования по x (y).

В настоящей работе эта схема применяется для классификации скалярных уравнений (1) лиувилевского типа, т.е. уравнений, обладающих x - и y -интегралами второго порядка $w = w(u, u_1, u_2)$, $\bar{w} = w(u, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

Теорема. Уравнение (1) обладает x - и y -интегралами второго порядка, если выполнены следующие соотношения:

$$A_{u_1} = 0, \quad A_u u_1 + A_{\bar{u}_1} f = -2f_{\bar{u}_1} A,$$

$$B_{u_1} = 0, \quad B_u u_1 + B_{\bar{u}_1} f = -(f_u \bar{u}_1 + f f_u) A - f_{\bar{u}_1} B,$$

где

$$A = \frac{f_{\bar{u}_1} \bar{u}_1}{f - \bar{u}_1 f_{\bar{u}_1}}, \quad B = \frac{\bar{u}_1 f_{u\bar{u}_1} + f f_{u_1 \bar{u}_1} - f_u - f_{u_1} f_{\bar{u}_1}}{f - \bar{u}_1 f_{\bar{u}_1}},$$

$$\bar{A}_{\bar{u}_1} = 0, \quad \bar{A}_u \bar{u}_1 + \bar{A}_{u_1} f = -2f_{u_1} \bar{A},$$

$$\bar{B}_{\bar{u}_1} = 0, \quad \bar{B}_u \bar{u}_1 + \bar{B}_{u_1} f = -(f_u u_1 + f f_{\bar{u}_1}) \bar{A} - f_{u_1} \bar{B},$$

где

$$\bar{A} = \frac{f_{u_1} u_1}{f - u_1 f_{u_1}}, \quad \bar{B} = \frac{u_1 f_{u\bar{u}_1} + f f_{u_1 \bar{u}_1} - f_u - f_{u_1} f_{\bar{u}_1}}{f - u_1 f_{u_1}}.$$

На основе теоремы получен полный список таких уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-91222-СТ-а).

Список литературы

- [1] Vessiot E. *Sur les equations aux derivees partielles du second order, $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, integrables par la methode de Darboux* // J. Math. Pure Appl. 1942. V. 21. №9. P. 1–68.
- [2] Жибер А. В., Соколов В. В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувилевского типа* // УМН. 2001. Т. 56. №1(337). С. 63–106.
- [3] Жибер А. В., Костригина О. С. *Характеристические алгебры Ли и нелинейные гиперболические системы уравнений*. Итоги науки. Юг России. Математический форум. 2010. С. 253–264.

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЯДРЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ТОРНАДОПОДОБНОГО ВИХРЯ

В. В. Никулин

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается движение жидкости в ядре вертикального торнадоподобного вихря. Примерами вертикальных торнадоподобных вихрей являются интенсивные атмосферные вихри (ураганы, смерчи, пыльные вихри) в природе [1, 2], а также их

лабораторные модели [2, 3, 4, 5, 6] . Исследование ведется в рамках модели неоднородной идеальной жидкости, предположения о вращательной симметрии течения и приближения длинных волн (последнее соответствует допущению о том, что характерный масштаб изменения параметров течения в радиальном направлении много меньше, чем в осевом). Ядро вихря моделируется струей неоднородной жидкости (закрученной или нет), распространяющейся вертикально вверх вдоль оси однородной жидкости, вращающейся по закону потенциального вихря.

Показано, что существуют качественно различные режимы распространения струи. Например, в зависимости от величины закрутки внешнего течения, струя более легкой жидкости может, как ускоряться, так и замедляться. Установлено, что решение, описывающее движение жидкости в струе, может быть продолжаемо на конечную или бесконечную высоту. Получены аналитические оценки высот, до которых продолжаемо решение. Построена модель распада струи на конечной высоте. Данная модель качественно объясняет гидродинамику распада и конечность высоты пыльных вихрей и их лабораторных моделей, наблюдаемые в неограниченном пространстве. На основе модели распада установлены строгие неравенства сверху и снизу на высоту вихря. Из этих неравенств следует, что число Фруда, рассчитанное по величине вращательной компоненты скорости на границе ядра, характерной разности плотностей в ядре и вне его, высоте вихря и ускорению свободного падения лежит в небольшом диапазоне от 2 до 4. Показано, что числа Фруда, рассчитанные для интенсивных атмосферных вихрей и лабораторных моделей вертикальных торнадоподобных вихрей, близки к этому диапазону, несмотря на огромное различие характерных размеров и скоростей данных вихревых образований.

Список литературы

- [1] Наливкин Д. В. *Ураганы, бури, смерчи*. Л.: Наука, 1969 г.
- [2] Ives R. L. *Behavior of dust devil* // Bull. Amer. Meteorol. Soc. 1947. № 4. P. 168–174.
- [3] Mullen J. B., Maxworthy T. A. *A laboratory model of dust devil vortices* // Dyn. Atmos. and Oceans. 1977. № 1. P. 181–214.
- [4] Никулин В. В. *Исследование взаимодействия торнадоподобного вихря с твердыми границами* // ПМТФ. 1980. № 1. С. 68–75.
- [5] Анисимова Е. П., Белов Ю. Н., Сперанская А. А., Шандин В. С *Модель атмосферного вихря* // Изв. АН СССР. ФАО. 1981. Т. 17. № 7. С. 768–772.
- [6] Ахметов Д. Г., Гаврилов Н. В., Никулин В. В. *Структура течения в огненном торнадоподобном вихре* // ДАН. 2007. Т. 417. № 1. С. 41–44.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН И ВОЛН С ПОЛНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ В ЗАПЫЛЕННОМ ГАЗЕ

А. Н. Осипцов, И. В. Голубкина

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

В первой части работы рассматривается задача о регулярном (симметричном и несимметричном) взаимодействии пересекающихся плоских скачков уплотнения в стационарном газодисперсном потоке с конечной массовой концентрацией частиц. Обнаружена возможность формирования волновых структур, в которых все либо только некоторые из падающих или отраженных волн вырождаются в так называемые волны с полной дисперсией, т.е. зоны непрерывного изменения параметров обеих фаз, на границах которых выполнены соотношения Рэнкина — Гюгоньо для односкоростной модели “эффективного газа”. Найдены диапазоны безразмерных определяющих параметров (числа Маха, углов между падающими волнами и набегающим потоком, отношения теплоемкостей фаз и массовой концентрации частиц), соответствующие различным возможным волновым конфигурациям. В рамках двухконтинуальной модели запыленного газа проведены численные расчеты структуры течения в области симметричного взаимодействия скачков для типичных конфигураций, включающих волны с полной дисперсией. Рассчитана структура прямой волны с полной дисперсией. Показано хорошее соответствие расчетов структуры прямой волны известным литературным данным. Обнаружен диапазон определяющих параметров, в котором температура несущей фазы имеет локальный максимум внутри волны с полной дисперсией.

Во второй части работы на основании численных расчетов взаимодействия плоских ударных волн в слабозапыленном потоке установлено, что инерционные частицы могут фокусироваться за точкой взаимодействия волн, формируя “пучки” с высокими локальными значениями концентрации и кинетической энергии дисперсной фазы. Рассмотрены три режима взаимодействия волн: симметричное регулярное, симметричное маховское с прямой маховской ножкой и несимметричное регулярное. Показано, что в широком диапазоне определяющих параметров траектории частиц за точкой взаимодействия волн пересекаются и формируется узкая зона накопления частиц, в которой концентрация частиц возрастает в несколько раз по сравнению с ее начальным значением. Структура области пересекающихся траекторий и накопления частиц рассчитана с помощью полного лагранжева подхода. Найден диапазон определяющих параметров, соответствующий режиму оптимальной фокусировки, в котором при прохождении области взаимодействующих скачков конечный двумерный объем дисперсной фазы “схлопывается” в плоскость.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (11-01-00483) и Ведомственной аналитической программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1./1399).

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

В. В. Остапенко, П. Е. Карабут

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Задача о распаде разрыва для гиперболических систем законов сохранения является одной из наиболее распространенных при получении и качественном анализе автомодельных обобщенных решений, на которых тестируются разнообразные численные методы. Однако однозначная разрешимость этой задачи в целом, т.е. для начального разрыва произвольной амплитуды, доказана для достаточно узкого класса гиперболических систем, таких как системы законов сохранения газовой динамики или первого приближения теории однослойной мелкой воды. Для произвольной сильно нелинейной гиперболической системы теорема об однозначной разрешимости задачи о распаде разрыва доказана для начального разрыва достаточно малой амплитуды. Основным недостатком этой теоремы заключается в том, что она не дает явного алгоритма для построения соответствующего автомодельного решения. В настоящей работе предлагается метод последовательных приближений для построения решения задачи о распаде разрыва малой амплитуды. В линейном приближении этого метода получается задачи Коши для линейной гиперболической системы. Ее решение представляет собой линии разрыва, разделенные областями, в которых решение является постоянным. Основное внимание уделяется первому и второму приближениям этого метода, в рамках которых разрывы, получаемые в линейном приближении, разделяются на устойчивые ударные волны и волны разрежения. В качестве конкретного примера проведен анализ качественно различных режимов течения, возникающих при решении задачи о разрушении плотины для модели двухслойной мелкой воды со свободной границей.

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ И КЛИМАТА

В. В. Пененко

ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск

Цель исследований — создание методики природоохранного прогнозирования. Для ее достижения требуются специальные методы анализа многомерных фазовых пространств, порождаемых нелинейными динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. Концепция и системная организация разрабатываемых методов обсуждаются на примере взаимосвязанных задач экологии и климата [1]. В частности, рассматриваются модели динамики атмосферы с гидрологическим циклом и модели переноса и трансформации примесей в

газовом и аэрозольном состояниях. Теоретическую и конструктивную основу методики составляют вариационные принципы, методы теории чувствительности моделей к вариациям параметров, входных данных и источников внешних воздействий.

Аналізу подвергаються багатомерні багатокомпонентні фазові простора, представляючі сукупність даних про функції стану, розраховані з допомогою моделей клімато-екологічних процесів і (або) отримані з допомогою спостережень за досліджуваними процесами, а також функції чутливості цільових функціоналів. Для цієї мети розвинуто ефективні методи ортогональної декомпозиції [2]. Так як обсяг інформації надзвичайно великий, доводиться її попередньо структурувати. Це дозволяє формально представити образи нелінійних функціональних просторів у вигляді матриць у лінійних просторах. В загальному випадку отримуються прямокутні матриці з тензорною структурою елементів. Наприклад, для вивчення глобальної кліматическої інформації зручно використовувати три характерні масштаби часу: 1) кліматический, довжиною більше 30 років з дискретністю 1 рік; 2) річний, довжиною 1 рік з дискретністю 1 календарний місяць; 3) сезонний, довжиною 1 місяць з дискретністю не більше 12 годин. Далі проводиться декомпозиція підготовлених таким чином об'єктів на сукупність ортогональних підпросторів, ранжованих за просторово-часовими масштабами процесів від глобальних кліматических до погодних шумів. Ця технологія дає можливість побудувати інформативні базиси, отримати кількісні оцінки змінливості процесів і виділити ключові елементи, визначаючі механізми і носії довготривалої пам'яті кліматическої системи.

В доповіді приводяться приклади розв'язання природоохоронних завдань з використанням розроблюваної методики.

Робота виконана при фінансовій підтримці Програм № 4 Президіума РАН і № 3.1 ОМН РАН.

Список литературы

- [1] Пененко В. В. *О концепции природоохранного прогнозирования* // Оптика атмосферы и океана. 2010. Т. 23, № 6, С. 432–438.
- [2] V. Penenko, E. Tsvetova. *Orthogonal decomposition methods for inclusion of climatic data into environmental studies* // Ecological modelling. 2008. V. 217. P. 279–291.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИДРОУПРУГИХ ВОЛН

П. И. Плотников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В работе рассматривается вопрос о применении специальной теории Коссера гиперупругих оболочек и теории несжимаемых течений идеальной жидкости к моделированию нелинейных волн, распространяющихся по поверхности бесконечно глубокого океана покрытого упругой пленкой. Дается вывод общих трехмерных нестационарных уравнений динамики гидроупругой системы, в основе которого лежит

лагранжево описание упругого материала и эйлерово описание движения жидкой среды. Для задачи о двумерных бегущих волнах с двумя различными скоростями распространения волн в упругой оболочке и жидкой среде получено эйлерово описание процесса распространения волн. Дается вариационная формулировка задачи. Обсуждается вопрос о возможных сингулярностях решений. Приводится вывод условий Гюгонио на разрывах решений плоской задачи и формулируются соответствующие условия устойчивости.

КОЛЕБАНИЯ СТРУИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, НАТЕКАЮЩЕЙ НА ТВЕРДЮЮ ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ ПЛОСКОСТЬ

М. А. Пономарева, Г. Р. Шрагер, В. А. Якутенок

Томский государственный университет

При натекании струи вязкой жидкости на горизонтальную плоскость при определенных условиях могут наблюдаться ее периодические колебания, которые в осесимметричном случае приводят к закручиванию струи, а в плоском к изгибанию. В последнем случае под струей понимается слой жидкости. В одной из первых работ, посвященных исследованию этого явления [1], отмечается, что причиной возникновения колебаний является рост осевых сжимающих напряжений вдоль струи, а возникновение колебаний характеризуется как потеря устойчивости течения, по аналогии с потерей устойчивости упругого стержня. Рассматриваемое явление наблюдается при достаточно малых значениях числа Рейнольдса [2]. Кроме того, значение высоты сливного отверстия над твердой плоскостью должно превышать некоторую критическую величину.

В настоящей работе рассматривается задача истечения струи вязкой жидкости из прямоугольного канала с заданным расходом. Математическая постановка задачи формулируется в приближении ползущего течения. Для численного решения используется метод граничных элементов. В результате проведенного исследования выяснено, что для определенной величины отношения вязких и гравитационных сил при росте высоты расположения сливного отверстия над твердой стенкой реализуются следующие варианты поведения струи вязкой жидкости, падающей на стенку: 1) симметричное растекание жидкости по стенке; 2) колебательные движения струи с последующим затуханием и переходом к симметричному растеканию; 3) колебания струи с образованием на свободной поверхности наплывов, приводящих к появлению внутренних границ раздела; 4) изгибание струи с образованием газовых включений и внутренних границ раздела. Получена зависимость критической высоты сливного отверстия над твердой плоскостью от определяющих параметров. Проведено сравнение с существующими экспериментальными данными.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг.

Список литературы

- [1] Taylor G.I. *Instability of jets threads and sheets of viscous fluid*. Proc. 12-th Cong. Appl. Mech. Berlin. Springer: Verlag, 1968. P. 384–388.
- [2] Пономарева М. А., Шрагер Г. Р., Якутенок В. А. *Устойчивость плоской струи высоковязкой жидкости, натекающей на горизонтальную твердую плоскость* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 1. С. 53–61.

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ В МЕХАНИКЕ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В докладе рассматриваются двумерные движения несжимаемых вязкоупругих сред Максвелла, Олдройда и Кельвина — Фойхта. Модель Максвелла описывается системой квазилинейных уравнений первого порядка, имеющей как вещественные, так и мнимые характеристики. Выделяется три подмодели указанной модели, в которых эллиптическая часть отделяется от гиперболической. Это позволяет изучить эволюцию нелинейных поперечных волн в несжимаемой среде Максвелла. Обнаружена аналогия между распространением ударных волн в идеальном газе и контактных разрывов со скачком касательного напряжения в такой среде. Аналогия становится полной в предельном случае малых чисел Рейнольдса и больших чисел Вейсенберга при условии, что их произведение имеет порядок единицы. Однако соответствующий идеальный газ не удовлетворяет аксиомам нормального газа. Это приводит к необходимости изучения структуры разрыва путем модификации модели Максвелла. В получающейся модели жидкости Олдройда с малым отношением времен ретардации и релаксации выявлена характерная структура, напоминающая профиль ударного перехода в вязком газе. Для среды Кельвина — Фойхта рассмотрены классы слоистых течений и движений с круговыми траекториями. Оказалось, что поле скоростей в таких движениях подчиняется линейному уравнению, с точностью до обозначений совпадающему с уравнением распространения плоских или цилиндрических акустических волн в вязком газе. Однако давление в среде Кельвина — Фойхта, в отличие от акустики вязкого газа, связано со скоростью нелинейной зависимостью.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИКИ СДВИГОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

Одномерный процесс объемного ударного деформирования в твердом теле в прифронтной области волны описывается решениями уравнения Хопфа [1], известного также как нелинейное уравнение квазипростых волн. Этот факт подтверждает схожесть механизма объемного деформирования в твердых телах и жидкостях и газах. В отличие от газовой динамики, в твердом теле деформирование приводит и к появлению сдвиговых ударных волн, закономерности движения которых изучены намного меньше. В общем случае процессы объемного и сдвигового деформирования в упругих средах оказываются взаимосвязанными. Поэтому получить аналитические или численные решения на основе методов расчетов, применяемых в газовой динамике, становится невозможно. Таким образом приходим к разработке новых приближенных методов вычислений. Один из таких методов основан на объединении приближенного аналитического представления решения в прифронтной области ударной волны и конечно-разностных методов расчетов в остальной области деформирования. Для определения решения в прифронтной области наиболее универсальным является метод сращиваемых асимптотических разложений. На наиболее простом примере плоских одномерных процессов в несжимаемой среде легко показать, что прифронтная область ударных волн определяется некоторым эволюционным уравнением первого порядка:

$$v_{,n} + \alpha v^2 v_{,p} = 0, \quad v = v(n, p), \quad \alpha = \text{const} \quad (1)$$

В уравнении (1) угол наклона характеристик зависит от квадрата интенсивности волны, а не от первой степени как в уравнении Хопфа. Это приводит к существенным различиям в процессах образования и последующего движения объемных и сдвиговых ударных волн. В сообщении предлагается несколько методов определения поля перемещений задачи с помощью решений эволюционного уравнения (1). Они иллюстрируются конкретными примерами различных краевых условий на границе полупространства. Если в рассматриваемых одномерных процессах учитывается ненулевая кривизна волнового фронта, либо диссипация или дисперсия в процессе распространения граничного возмущения, то это приводит к соответствующим волновым эволюционным уравнениям, уточняющим сдвиговое уравнение, изучаемое здесь. Можно показать, что применение метода малого параметра в неодномерных задачах ударного деформирования в прифронтной области ударной волны приводит для нулевого шага к сходному эволюционному уравнению. В этом уравнении основная пространственная координата выбрана вдоль луча, координата эйконала является параметром уравнения.

Список литературы

- [1] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. М.: Мир, 1977.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Е. И. Роменский¹, А. С. Романьков²

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Моделирование течений сжимаемой жидкости в пористых деформируемых средах является актуальной задачей, в частности, для нужд геофизики с приложениями в нефтедобывающих отраслях. До настоящего времени, однако, отсутствует математическая модель, которая с одной стороны достаточно полно описывает требуемые явления, а с другой стороны обладает набором свойств, которые хотелось бы иметь именно от математической модели (гиперболичность, дивергентная форма всех уравнений), для того чтобы иметь возможность применять уже разработанные методы для решения практических задач. Для описания течений жидкости в упругой среде имеется ряд подходов, из которых следует упомянуть теорию Био [1], предназначенную для моделирования волн малой амплитуды в упругих пористых насыщенных средах. Данная теория имеет ряд недостатков и, кроме того, неясна возможность ее обобщения на случай конечных деформаций упругого скелета. Феноменологический подход, основанный на принципах неравновесной термодинамики, был использован при построении модели течений жидкости в упругой пористой среде для случая конечных деформаций [2]. Отметим, что система определяющих дифференциальных уравнений, построенных в [2], является гиперболической, однако привести все ее уравнения к дивергентному виду не удастся.

В докладе предложен вывод уравнений течения сжимаемой жидкости в упругой пористой среде с использованием формализма термодинамически согласованных систем [3]. При этом среда рассматривается как континуум, параметры состояния которого характеризуют двухфазность течения. В статье рассмотрены течения, в которых можно пренебречь тепловыми эффектами. Возникающие определяющие дифференциальные уравнения образуют гиперболическую систему законов сохранения. Выводятся также уравнения для распространения малых возмущений в неподвижной среде, для которых разработан численный метод Рунге-Кутты/WENO высокой точности. Проведен ряд тестовых расчетов, показывающий применимость модели к описанию волн в насыщенной пористой среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09-01-00221, 10-05-00233, 11-01-00147) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 (проект 121).

Список литературы

- [1] Biot M. A. *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Lowfrequency range* // J. Acoust. Soc. Am. 1956. № 2. P. 168–178.
- [2] Blokhin A. M., Dorovsky V. N. *Mathematical modeling in the theory of multivelocitity continuum*. Nova Science. New York, 1995.

- [3] Godunov S. K., Romenskii E. I. *Elements of continuum mechanics and conservation laws*. Kluwer Academic/Plenum Publishers. New York, 2003.

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД, ПО-РАЗНОМУ СОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

В. М. Садовский, О. В. Садовская

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
Сибирский федеральный университет*

Многие природные и искусственные материалы (сыпучие и пористые среды, пенометаллы, волокнистые композиты) проявляют различные механические свойства в экспериментах на растяжение и сжатие. Идеально сыпучие среды, частицы которых свободно контактируют между собой, при сжатии ведут себя как упругие или упруго-пластические тела, но не обладают сопротивлением при растяжении. В связных средах (грунтах, горных породах) допустимые растягивающие напряжения существенно меньше сжимающих и не превышают критического значения, обусловленного сцеплением частиц. Для сравнительно широкого круга горных пород пределы прочности на сжатие и растяжение могут различаться в десять и более раз.

К построению определяющих уравнений разносопротивляющихся материалов применяется обобщенный реологический метод [1], в котором наряду с классическими элементами – упругой пружиной, вязким демпфером и пластическим шарниром, для описания несимметрии механических свойств по отношению к растяжению и сжатию используется новый реологический элемент – жесткий контакт. В пространственном случае определяющие уравнения идеальных сред формулируются в терминах вариационных неравенств с односторонними ограничениями на тензоры напряжений и деформаций. Среда со сложной реологией описывается нелинейными уравнениями, содержащими проекции на допустимые множества. Рассматриваются различные варианты континуальных моделей, описывающих поведение сыпучих сред с упругими и пластическими частицами, пористых сред, жесткость которых существенно возрастает при схлопывании пор.

Для анализа математических моделей разработан параллельный вычислительный алгоритм, основанный на методе расщепления по физическим процессам и по пространственным переменным, в котором для численного решения одномерных гиперболических систем уравнений применяются явные монотонные ENO-схемы – модификации схемы С. К. Годунова [2]. Алгоритм реализован в виде комплекса программ для суперкомпьютеров кластерного типа.

Приводятся результаты численного анализа процессов распространения сигнотон – волн сжатия в разрыхленной сыпучей среде. Выполнены расчеты диссипации механической энергии в пеноалюминии за счет пластического схлопывания пор при сосредоточенном импульсном воздействии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00053), Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 и Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН № 40.

Список литературы

- [1] Садовская О. В., Садовский В. М. *Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред*. М.: Физматлит, 2008.
- [2] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. М.: Физматлит, 2001.

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ БАРОТРОПНОГО ВЯЗКОГО ГАЗА С БЫСТРО-ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

С. А. Саженков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются классические трехмерные уравнения Навье — Стокса вязкой сжимаемой неоднородной жидкости в гладкой ограниченной области, снабженные условием прилипания на границе области и быстро-осциллирующими начальными распределениями плотности. Быстрые осцилляции распределений плотности моделируются как слабые пределы при стремлении малого параметра осцилляций к нулю. Уравнением состояния изучаемой среды является уравнение состояния баротропного газа. Считается, что постоянная адиабаты больше трех.

Строго обоснована процедура гомогенизации при стремлении частот быстрых осцилляций к бесконечности. Как результат, получена предельная эффективная модель динамики сжимаемого вязкого газа с быстро осциллирующими начальными данными, состоящая из законов сохранения импульса и массы, имеющих такой же вид, как в исходной системе, уравнения состояния, отличающегося от исходного уравнения состояния баротропного газа, и содержащего дополнительную искомую функцию — кинетическую, и дополнительную независимую переменную, а также кинетического уравнения, несущего информацию об эволюции быстро-осциллирующих режимов. Существенным местом в работе является то, что от структуры сплошной среды — вязкого баротропного газа — не требуется никаких свойств упорядоченности, например, периодичности, квазипериодичности, случайной однородности. Доказательства в работе основаны на ставших классическими методах в теории корректности моделей вязкого сжимаемого газа и на версии кинетического уравнения, предложенной П. И. Плотниковым и Ж. Соколовски.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00447).

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ ОКОЛОЗВЕЗДНОГО ДИСКА

В. Н. Снытников

*Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Необходимые условия для синтезов основной массы органических соединений в Солнечной системе возникали при ее формировании на этапах оседания пыли к экваториальной плоскости протопланетного диска, появления пылевого субдиска и образования сгустков из газа и первичных тел при развитии гравитационных неустойчивостей [1]. Для изучения этих процессов созданы нестационарные численные модели, которые реализуются на суперкомпьютерах. Численное моделирование динамики околозвездных дисков проводится с использованием кинетического уравнения для описания подсистемы твердых первичных тел, газодинамических уравнений для газовой компоненты, уравнения Пуассона для самосогласованного гравитационного поля и уравнений химической кинетики. В докладе представлены результаты изучения развития гравитационных неустойчивостей в молекулярных облаках с формированием околозвездных дисков и джетов — кумулятивных струй вдоль оси вращения диска, а также волновых процессов, которые происходят в двухфазной гравитирующей среде газ - первичные тела. В вычислительных экспериментах на суперкомпьютерах исследуются формирование и эволюция нелинейных структур в дисках. Особый интерес представляют обнаруженные ранее одиночные волны плотности, для которых предложены аналитические оценки.

Работа проведена при поддержке программ Президиума РАН “Происхождение и эволюция биосферы” и “Происхождение, строение и эволюция объектов Вселенной”, а также интеграционного проекта СО РАН № 26.

Список литературы

- [1] Снытников В. Н., *Абиогенный допланетный синтез пребиотического вещества для биосферы Земли*. Вестник РАН, 2007, №3, С. 218–226.

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРНОСТИ НА РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ P -ЛАПЛАСИАНА И ЕГО АНИЗОТРОПНОГО АНАЛОГА

Ар. С. Терсенов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Одним из классических примеров нелинейных вырождающихся и сингулярных эллиптических уравнений является p -лапласиан и его анизотропный аналог. Эти

уравнения широко применяются при моделировании течения псевдопластичных и дилатантных неньютоновских жидкостей, жидкостей в среде с разной проводимостью в разных направлениях, а также в теории фильтрации. В отличие от краевых задач для p -лапласиана, которые изучаются интенсивно уже более 30 лет, исследования аналогичных задач для анизотропных эллиптических уравнений приобрели систематический характер лишь с конца 90-х годов прошлого века. Нас интересует вопрос существования ограниченного обобщенного решения задачи Дирихле для указанных уравнений. В частности, рассматривается задача Дирихле для нелинейного анизотропного эллиптического уравнения вида

$$-\sum_{i=1}^N \mu_i (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} = c(\mathbf{x})g(u) + f(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^N, \quad (1)$$

где постоянные $\mu_i > 0$ и $p_i > 1$, $i = 1, \dots, N$, а Ω — строго выпуклая ограниченная область. Исследуется случай, когда в уравнении (1) присутствуют сингулярные члены, т.е. члены с показателями $1 < p_i < 2$. Показано, что разрешимость задачи Дирихле в классе ограниченных решений в сингулярном случае существенно зависит от размерности области, в которой она исследуется. Приведено условие, которое определяет число сингулярных p_i -ых (и как следствие размерность), гарантирующее существование ограниченного обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения (1). Аналогичный результат имеет место и для параболических версий p -лапласиана и его анизотропного аналога.

Список литературы

- [1] Starovoitov V., Tersenov Al. S. *Singular and degenerate anisotropic parabolic equations with a nonlinear source* // Nonlinear Analysis, 72 (6), (2010), 3009–3027.
- [2] Tersenov Al., Tersenov Ar. *The problem of Dirichlet for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations* // J. Differential Equations, 235 (2), (2007), 376–396.

НАКЛОННЫЙ ВХОД ПОЛОГОГО КОНТУРА В ТОНКИЙ СЛОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Т. И. Хабахпашева, Е. А. Батяев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

В работе исследуется нестационарное нелинейное взаимодействие пологого тела произвольной формы при его наклонном ударе о свободную поверхность тонкого слоя жидкости (рис. 1). Моделирование такого взаимодействия тесно связано с задачами на прочность в авиастроении, например при аварийной посадке самолета на воду, а также в корабельной гидродинамике при проектировании быстроходных судов. Знание гидродинамических нагрузок при ударе о жидкость необходимо для обеспечения безопасности жизни как инженерной конструкции, так и пассажиров.

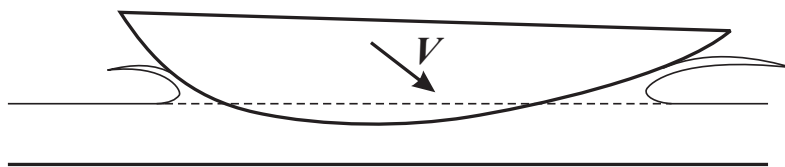


Рис. 1

Исследуются эволюция распределения давления вдоль поверхности тела, изменение области контакта и течение жидкости, вызванное ударом. Для анализа течения жидкости используется метод сращиваемых асимптотических разложений, предложенный А. А. Коробкиным [1] для задач о соударении двух недеформируемых тел, одно из которых покрыто слоем жидкости. Задача решается в предположении образования струй на границе области контакта, без возможности их отрыва. Это условие выполнено, если угол наклона вектора скорости при ударе достаточно большой. Построена эволюционная система дифференциальных уравнений, позволяющая численно решить задачу.

Отметим, что задача о наклонном ударе по тонкому слою жидкости оказалась значительно сложнее аналогичных задач как для удара по бесконечно глубокому слою жидкости, так и для задачи о вертикальном ударе по тонкому слою жидкости. Это связано с тем, что переменная толщина слоя жидкости под телом и нелинейное, несимметричное течение жидкости в слое существенно влияют на распределение гидродинамического давления и требуют адекватного учета как непосредственно в точках контакта, так и интегрально.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-00076).

Список литературы

- [1] Korobkin A. A. *Impact of two bodies one of which is covered by a thin layer of liquid* J. Fluid Mech. 1995. V. 300, P. 43–58.

НЕАВТОНОМНЫЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОДМОДЕЛИ РАНГА ОДИН

С. В. Хабилов

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Для уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния: есть три допускаемые трехмерные подалгебры, содержащие оператор вращения. Для каждой из них инвариантная подмодель сводится к неавтономной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Такая редукция возможна в силу найденных трех интегралов: постоянства энтропии, интеграла закрутки и интеграла Бернулли (интеграла продольного движения). Одна из этих подмоделей задает конические течения с закруткой.

Для специальных уравнений состояния подмодели имеют особые решения, когда не все производные определяются из уравнений. Дополнительные симметрии в случае специальных уравнений состояния сводят систему уравнений к автономной. При отсутствии вращения эти подмодели исследованы. При наличии вращения найдены точные решения для каждой подмодели и описаны соответствующие движения газа.

КВАЗИНЕЙТРАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

А. К. Хе, А. А. Чесноков

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Рассматриваются одномерные квазинейтральные движения бесстолкновительной плазмы при отсутствии магнитного поля. Нелинейное кинетическое уравнение для функции распределения ионов $f(t, x, v)$ имеет вид [1]:

$$f_t + v f_x - \frac{e}{M_i} \varphi_x f_v = 0, \quad \varphi = \frac{T_e}{e} \ln \left(\frac{1}{N_0} \int_{\mathbb{R}} f dv \right), \quad (1)$$

распределение электронов считается равновесным. Модель (1), записанная в полулагранжевых переменных, попадает в класс систем дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами, для которых В. М. Тешуковым предложено понятие обобщенной гиперболичности [2]. Установлена аналогия между моделью бесстолкновительной плазмы (1) и уравнениями, описывающими сдвиговое движение идеальной жидкости в протяженном канале с упругими стенками [3].

С использованием развитых в [2] подходов и результатов [3] определены скорости распространения возмущений в квазинейтральной плазме, сформулированы необходимые и достаточные условия обобщенной гиперболичности уравнений движения. Показано соответствие условий гиперболичности известным критериям устойчивости, полученным в рамках линейной теории.

Построены точные решения (1) в классе бегущих волн, непрерывно примыкающих к заданному стационарному однородному по пространству фону. Предложены дифференциальные законы сохранения, аппроксимирующие исходное интегродифференциальное уравнение. Показано, что известные гидродинамические пределы теории плазмы могут быть выведены из приближенной дифференциальной модели. Кроме того, дифференциальная модель позволяет проводить компьютерное моделирование на основе разработанных численных методов.

Изучено асимптотическое поведение малых возмущений стационарного течения бесстолкновительной плазмы. Показано, что для рассматриваемой модели решение, в общем случае, выходит на некоторый периодический режим. Аналог затухания Ландау [4] возможен при специальном выборе функции распределения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00338), Министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/3543), Интеграционного проекта СО РАН № 65.

Список литературы

- [1] Гуревич А. В., Питаевский Л. П. *Нелинейная динамика разреженной плазмы и ионосферная аэродинамика*. Вопросы теории плазмы. Вып. 10. М., 1980.
- [2] Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*. Изд-во СО РАН, Новосибирск: 2000.
- [3] Чесноков А. А. *Осесимметричные вихревые движения жидкости в длинной эластичной трубе* ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 76–87.
- [4] Ландау Л. Д. *О колебаниях электронной плазмы* ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 574.

О ЗАДАЧАХ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

А. М. Хлуднев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

Рассматриваются задачи о равновесии упругих тел, содержащих жесткие включения с возможным отслоением. Наличие отслоений приводит к необходимости исследования трещин, расположенных на границах жестких включений. При этом на берегах трещин задаются нелинейные краевые условия, исключающие взаимное проникание берегов. В докладе рассматриваются двуслойные упругие конструкции с жесткими включениями и трещинами. Приводятся корректные формулировки задач равновесия. Доказывается разрешимость задач оптимального управления, в которых в качестве функционала качества выступает производная функционала энергии по длине трещины. [1], [2], [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (10-01-00054) и ФЦП “Кадры” (П597).

Список литературы

- [1] Хлуднев А. М. *Задачи теории упругости в негладких областях*. М.: Физматлит, 2010.
- [2] Лойгеринг Г., Хлуднев А. М. *О равновесии упругих тел, содержащих жесткие включения* // ДАН. 2010. Т. 430. № 1. С. 1–4.
- [3] Khudnev A. M., Leugering G. *On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks* // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2010. V. 33. N 16, P. 1955–1967.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

С. П. Царев

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск

В докладе дается обзор малоизвестных результатов по проблеме элементарности первообразных алгебраических функций [1, 2, 3]. Как выяснилось относительно недавно, данная проблема исключительно богата связями с такими, казалось бы, отдаленными вопросами, как граничные задачи типа Дирихле для уравнения колебаний струны $u_{xy} = 0$ [5], полиномами, наименее уклоняющимися от нуля на системе интервалов [4], спиновыми цепочками Гейзенберга и классическими геометрическими теоремами типа Понселе.

Основные алгебраические идеи Чебышева и Золотарева позволяют пролить новый свет на приведенные выше задачи. Предложенные ими и другими математиками конца XIX века конструктивные методы позволяют получить намного более экономные алгоритмы решения исходной задачи об элементарности некоторых эллиптических интегралов и могут послужить основой дальнейших конструктивных результатов в упомянутых выше областях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00762а) и гранта НШ-7256.2010.1 поддержки ведущих научных школ.

Список литературы

- [1] Abel N. H. *Ueber die Integration der Differential-Formel $\frac{pdx}{\sqrt{R}}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind.* J. Reine Angew. Math. 1826. V. 1. P. 185–221.
- [2] Чебышев П. Л. *Об интегрировании иррациональных дифференциалов.* Избранные труды. АН СССР. М. 1955. С. 227–255.
- [3] Золотарев Е. И. *Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению.* Полное собрание сочинений. вып. 1. АН СССР. Л., 1931. С. 161–360.
- [4] Содин М. Л., Юдицкий П. М. *Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах вещественной оси* // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 2. С. 1–61.
- [5] Бурский В. П., Жеданов А. С. *Граничные задачи для уравнения колебания струны, задача Понселе и уравнение Пелля-Абея: связи и соотношения.* Современная математика. Фундаментальные направления. 2006. Т. 16. С. 5–9.

ЭВОЛЮЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОМУ ЦИЛИНДРУ

О. Ю. Цвелодуб^{1,2}, А. А. Бочаров³

¹Новосибирский государственный университет

²Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

³Новосибирский государственный аграрный университет

Рассматриваются течения вязкой пленки жидкости по внешней поверхности вертикального цилиндра. Вследствие неустойчивости плоскопараллельного течения пленки постоянной толщины с плоской свободной границей к бесконечно малым возмущениям такое стекание является волновым уже при сколь угодно малых расходах. Исследование волновых режимов в случае малых расходов и больших радиусов цилиндра сводится к анализу решений одного нелинейного эволюционного уравнения для толщины пленки. Для аксиально-симметричных решений это уравнение переходит в хорошо известное уравнение Курамото — Сивашинского.

Влияние нелинейных эффектов может приводить к формированию стационарно-бегущих режимов. В рассматриваемой модели существует счетное число таких семейств решений [1]. Большинство из них в свою очередь неустойчиво к двумерным и трехмерным возмущениям. В силу этого, дальнейшее развитие начальных возмущений в разных областях значений параметров существенно различается.

В работе приводятся некоторые характерные сценарии эволюции возмущений. Так, например, для волновых чисел близких к нейтральному существует либо одно стационарно-бегущее, либо одно осциллирующее по времени решение, к которым асимптотически стремятся почти все начальные возмущения. При этом осциллирующее по времени решение появляется в результате бифуркации из стационарно-бегущего решения. Особый случай представляют начальные возмущения с определенными симметриями, которые сохраняются в процессе эволюции. В этом случае решения притягиваются к другим стационарно-бегущим решениям, обладающим такими же симметриями.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (ведущий ученый — В. Е. Захаров, ГОУ ВПО “Новосибирский государственный университет”) и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-91333-ННИО-а).

Список литературы

- [1] Бочаров А. А., Цвелодуб О. Ю. *Волновые режимы течения вязкой пленки, стекающей по вертикальному цилиндру* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 176–183.

ОСОБЕННОСТИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ВОДООБМЕНА В ОЗЕРЕ БАЙКАЛ

Е. А. Цветова

ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск

В отличие от мелких водоемов средних широт, которые полностью перемешиваются дважды в год за счет естественной конвекции, озеро Байкал за время полного годового температурного цикла перемешивается лишь частично. Причиной тому служит изменение температуры максимальной плотности с глубиной: она уменьшается со скоростью $0.21^\circ\text{C}/100\text{м}$. В результате естественная конвекция ограничивается верхним слоем толщиной приблизительно 200-250 м. В окрестности этих глубин осенью формируется слой мезотермического максимума, который становится препятствием для водообмена между поверхностными и глубинными водами. Однако, как показывают наблюдения, водообмен все же происходит, но лишь спорадически, при возникновении так называемой термобарической неустойчивости. Причины возникновения и способы реализации этого вида неустойчивости представляют в настоящее время большой теоретический и практический интерес.

Для моделирования гидродинамических процессов в озере используется трехмерная нестационарная математическая модель в негидростатическом приближении со свободной поверхностью. Модель основана на системе полных уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска. Влияние силы Кориолиса представлено тремя компонентами. Различные способы параметризации используются для расчета тензоров турбулентного обмена в уравнениях движения и переноса тепла. Уравнение состояния представляет зависимость плотности от температуры, давления и солёности. Область интегрирования учитывает реальную конфигурацию береговых линий и рельефа дна. На верхней границе водной массы учитывается воздействие атмосферы. На дне задаются условия прилипания и отсутствие потоков тепла. На боковых границах ставятся условия, учитывающие влияние притока и стока рек.

Для исследования влияния на гидродинамические процессы выбросов метана модель дополняется уравнениями переноса и трансформации растворенных и газовых примесей. Механизм трансформации описывается системой кинетических уравнений.

В докладе представлены результаты численных экспериментов при различных сочетаниях параметров, участвующих в моделях. Обсуждаются сценарные расчеты по воспроизведению циркуляции и изменения поля температуры под действием изменяющихся в пространстве и времени атмосферных воздействий. В частности, рассматриваются такие процессы и явления как термобар, естественная и вынужденная конвекция, возникновение и разрушение мезотермического максимума, процессы обновления глубинных вод.

Численное моделирование при участии примесей показало, что, в результате действия источников метана на дне и подъема смеси, формируются компенсирующие потоки, приводящие к возникновению термобарической неустойчивости и опусканию вод до максимальных глубин.

Работа поддержана Программами №№ 4 и 20 Президиума РАН и № 1.3 ОМН РАН.

ГИДРОДИНАМИКА И АКУСТИКА ВСПЛЕСКА КАПЛИ В ЖИДКОСТИ

Ю. Д. Чашечкин, В. Е. Прохоров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Подготовлена установка для синхронной регистрации картины течения, образующегося при падении капли жидкости в слой покоящейся жидкости, и звука, распространяющегося в воздухе и в воде. Ведется фоторегистрация с высоким временным разрешением и высокоскоростная (до 25000 кадров в секунду) видеорегистрация картины течений. Измерения возмущений свободной поверхности проводятся лазерным методом. Звуковой сигнал в воде записывается высокочувствительным гидрофоном в полосе частот до 100 КГц, в воздухе - микрофоном в полосе до 50 КГц. Получены картины переносы вещества из капли в принимающую жидкость и фонограммы звукового ряда в воде и воздухе. Синхронизация оптических и акустических измерений позволяет проследить связь элементов картины течения с особенностями звукового сигнала. Обсуждаются механизмы излучения звука, проведено сравнение с известными работами.

К ВОПРОСУ ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. А. Чиркунов

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный технический университет*

Задача групповой классификации системы дифференциальных уравнений (S) , содержащей произвольный элемент f , удовлетворяющий структурным уравнениям (Q) , состоит в отыскании ядра основных групп, перечислении с точностью до преобразований эквивалентности всех спецификаций произвольного элемента, при котором происходит расширение ядра, и отыскании основной группы для каждой спецификации. При этом основную роль играют преобразования эквивалентности. Преобразованиями эквивалентности системы (S) называются [1] преобразования пространства независимых и зависимых переменных этой системы, продолженные на f и оставляющие инвариантной систему $(S)U(Q)$. Эти преобразования сохраняют вид системы (S) при всех элементах f и образуют группу Ли. Однако, полученные при групповой классификации спецификации системы (S) имеют, вообще говоря, более широкие группы эквивалентности, с помощью которых возможно их дальнейшее "упрощение". Одной из первых работ, в которой была предпринята попытка расширить понятие преобразования эквивалентности, была работа С. В. Хабирова [2]. Затем такое же расширение было сделано в работе С. В. Мелешко [3] при групповой классификации уравнений двумерных движений газа. В работах [2, 3] рассматривались преобразования эквивалентности, зависящие от произвольного элемента f . Но опять

речь шла о преобразованиях, сохраняющих вид системы (S) при всех элементах f . В настоящем докладе дается понятие обобщенных преобразований эквивалентности для системы дифференциальных уравнений, по отношению к которым введенные Л. В. Овсянниковым [1] преобразования эквивалентности являются универсальными преобразованиями эквивалентности. Образующая универсальными преобразованиями эквивалентности группа Ли — это ядро групп эквивалентности для всех спецификаций данной системы. Указан алгоритм групповой классификации системы дифференциальных уравнений с помощью этих обобщенных преобразований эквивалентности. Выяснено место в этом алгоритме метода предварительной групповой классификации, предложенного в работе [4]. Эффективность алгоритма показана на примерах.

Работа выполнена при финансовой поддержке межрегионального интеграционного проекта СО РАН № 103.

Список литературы

- [1] Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.
- [2] Хабиров С. В. *Групповая классификация систем Гамильтона // Динамика сплошной среды*. Новосибирск. 1980. Вып. 44, С. 139–146.
- [3] Мелешко С. В. *Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // ПММ*. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 56–62.
- [4] Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. *Нелокальные симметрии. Эвристический подход*. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1989. Т. 34. С. 3–83.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПОДХОДОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ОПОЛЗНЕВОГО МЕХАНИЗМА ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ЦУНАМИ

Л. Б. Чубаров^{1,2}, С. А. Бейзель¹, В. К. Худякова²

¹Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В докладе рассматриваются два подхода к моделированию оползневых механизмов генерации волн цунами, в которых оползень представляется как объем невязкой несжимаемой жидкости более высокой плотности по сравнению с окружающей водой. Находясь на наклонном дне, оползень движется вниз, вызывая колебания свободной поверхности. Предполагается, что вода и жидкость оползня не перемешиваются между собой. Задача рассматривается в одномерной постановке.

В первом подходе явление описывается с помощью двухслойных нелинейных уравнений мелкой воды [1], где нижний слой представляет оползень, верхний — воду. В рамках этой модели слои оказывают непосредственное влияние друг на друга, то есть искомые характеристики одного слоя (скорость и толщина) зависят от искомым характеристик другого. В противовес этой модели во втором подходе влияние между слоями учитывается только параметрически. Этот подход заключается в последовательном расчете вначале движения оползня, а потом — окружающей его воды. Движение слоя воды, покрывающей оползень, описывается с помощью однослойных уравнений мелкой воды с подвижным дном. Движение ограниченного в пространстве оползня задается этими же уравнениями, но на неизменяющемся дне. Рассчитанная поверхность оползня используется в качестве изменяющегося дна в уравнениях для слоя воды. Параметром влияния верхнего слоя на движение оползня является относительная разность плотностей слоев. В обеих моделях учитывается трение оползня о дно.

Для решения уравнений используется один и тот же вычислительный алгоритм — разностная схема с искусственной вязкостью первого порядка аппроксимации, предложенная М. С. Сладкевичем. Это позволяет проводить сравнение моделей, не отвлекаясь на различие в численных эффектах, которое возникало бы при использовании разных алгоритмов. В широком диапазоне параметров (отношение плотностей слоев, параметры трения, размеры оползня), которые были испробованы авторами, два подхода дают схожие результаты. Наблюдается совпадение как амплитуд, так и фазовых характеристик течения. Различие между подходами увеличивается с уменьшением толщины верхнего слоя. Более тонкий верхний слой сильнее изменяет форму оползня, и, как следствие, проявляются различия на свободной поверхности.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект IV.31.2.1), РФФИ (гранты 09-05-00294-а, 10-05-91052-а-НЦНИ) и президентской программы Ведущие научные школы РФ (грант № НШ-931.2008.9).

Список литературы

- [1] Choi W. *Modeling of strongly nonlinear internal waves in a multilayer system*. Proc. 4th Int. Conf. on Hydrodynamics (Goda Y., Ikehata M., Suzuki K., Eds). 2000. P. 453-458.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

А. П. Чугайнова

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Рассматриваются особенности поведения нелинейных волн в упругих средах, в которых длинноволновые возмущения описываются гиперболическими уравнениями, выражающими законы сохранения. Предполагается, что в явлениях более мелкого

масштаба существенны дисперсия и диссипация. Наличие дисперсии, проявляющейся в структурах ударных волн в виде колебаний, может приводить к тому, что множество разрывов, которым соответствует решение задачи о структуре разрыва в виде стационарной структуры (бегущей волны) приобретает сложное строение. При этом оказалось, что если при построении решений гиперболических систем уравнений использовать только разрывы со стационарной структурой, то для ряда автомодельных задач решения оказываются неединственными. Число решений зависит от влияния дисперсии внутри структуры и неограниченно растет с ростом этого влияния. В связи с этим возникает вопрос, какие решения реализуются и при каких условиях. С целью получения ответа на этот вопрос были проведены численные эксперименты по решению начально-краевых задач для уравнений, описывающих нелинейные волны в вязко упругой среде с дисперсией. Проведенные исследования позволили сформулировать выводы о реализуемости автомодельных решений, рассматриваемых как асимптотики неавтомодельных решений при больших временах и масштабах. Определены способы указания реализующейся асимптотики в зависимости от деталей постановки начально-краевой неавтомодельной задачи.

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Ю. В. Шанько

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматривается двумерное уравнение распространения звука в неподвижной неоднородной среде [1]:

$$\frac{p_{tt}}{\rho c^2} = \left(\frac{p_x}{\rho} \right)_x + \left(\frac{p_y}{\rho} \right)_y, \quad (1)$$

где $\rho = \rho(x, y) > 0$, $c = c(x, y) > 0$ — заданные функции.

Ищутся функции $u = u(t, x, y)$, $q = q(t, x, y)$ такие, что

$$p = u\Phi(q) \quad (2)$$

будет решением уравнения (1) при всех (достаточно гладких) функциях Φ . Соответствующие решения называют обобщенными функционально-инвариантными (ОФИ) [2]. ОФИ решения задают так называемые семейства относительно неискажающихся бегущих волн [3].

Функции u и q удовлетворяют переопределенной системе

$$\begin{aligned} \frac{u_{tt}}{\rho c^2} &= \left(\frac{u_x}{\rho} \right)_x + \left(\frac{u_y}{\rho} \right)_y, \\ \frac{u_t q_t + (u q_t)_t}{\rho c^2} &= \frac{u_x q_x}{\rho} + \left(\frac{u q_x}{\rho} \right)_x + \frac{u_y q_y}{\rho} + \left(\frac{u q_y}{\rho} \right)_y, \\ \frac{q_t^2}{c^2} &= q_x^2 + q_y^2. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе предлагается подход, позволяющий свести систему (3) к переопределенной системе, для функций от *двух, а не трех* независимых переменных, что значительно упрощает ее анализ на совместность.

Основное внимание в работе уделяется решениям, которые можно представить в виде

$$p = u_1\Phi_1(q) + u_2\Phi_2(q),$$

с произвольными функциями Φ_1 и Φ_2 (нетрудно заметить, что любое решение удовлетворяющее этому условию является ОФИ решением).

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 103.

Список литературы

- [1] Бреховских Л. М., Гордин О. А. *Акустика слоистых сред*. М.: Наука, 1989.
- [2] Еругин Н. В., Смирнов М. М. *Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений*. Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 853–865.
- [3] Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1964.

ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ, НАСЫЩЕННОЙ ДВУХФАЗНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. В. Шелухин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Предложен вывод уравнений фильтрации двухфазной жидкости в упругой пористой среде с учетом поверхностного натяжения между жидкими фазами. За основу взят термодинамический подход Ландау — Халатникова к анализу сверхтекучей жидкости [1]. Если модель Био предсказывает одну поперечную и две продольных волны в пороупругой среде, насыщенной одной жидкой фазой, то предложенная модель допускает еще одну дополнительную продольную волну в случае двухфазной жидкости с поверхностным натяжением. Исследовано влияние диссипации на затухание акустических волн. Установлена зависимость между временем затухания и добавками поверхностно-активных веществ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-05-00835).

Список литературы

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.

РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ДАЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА ЗА БУКСИРУЕМЫМ ТЕЛОМ

А. В. Шмидт

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Для описания течения в дальнем турбулентном следе за осесимметричным буксируемым телом в пассивно стратифицированной среде используется модель [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} C_e \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} C_e \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} C_e \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} C_e \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial e}{\partial z} + C_e \frac{e^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + C_e \frac{e^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \epsilon, \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} C_e \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} C_e \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + C_{\epsilon 1} e \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + C_{\epsilon 1} e \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - C_{\epsilon 2} \frac{e^2}{\epsilon}, \\ \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} C_\rho \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} C_\rho \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} C_\rho \frac{e^2}{\epsilon}, \\ \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} C_{1\rho} \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} C_{1\rho} \frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial z} + 2C_\rho \frac{e^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + \left(\frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial z} - 1 \right)^2 \right) - C_T \frac{\langle \rho'^2 \rangle \epsilon}{e},\end{aligned}$$

где $u(x, y, z)$ — осредненный дефект скорости, $e(x, y, z)$ — кинетическая энергия турбулентности, $\epsilon(x, y, z)$ — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, $\langle \rho_1 \rangle(x, y, z)$ — осредненный дефект плотности и $\langle \rho'^2 \rangle(x, y, z)$ — дисперсия флуктуаций плотности. Величины $C_e = 0.136$, $C_\epsilon = 0.105$, $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$, $C_\rho = 0.208$, $C_{1\rho} = 0.087$, $C_T = 1.25$ — общепринятые эмпирические константы.

С помощью теоретико-группового подхода и метода B -определяющих уравнений [2] найдено представление для решений, позволяющее свести исходную модель к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющая естественным краевым условиям, решалась численными методами. Дополнительные трудности представляло то обстоятельство, что коэффициенты системы имеют особенности. Был использован модифицированный метод стрельбы и асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки. Полученные решения согласуются с экспериментальными данными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00435) и Сибирского отделения РАН (проект 103).

Список литературы

- [1] Chernykh G. G., Fomina A. V., Moshkin N. P. *Numerical models of turbulent wake dynamics behind a towed body in a linearly stratified medium* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2006. V. 21. P. 395–424.
- [2] Andreev V. K., Kaptsov O. V., Pukhnachov V. V., Rodionov, A. A. *Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics* Dordrecht: Kluwer, 1998.

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА СТРУКТУРУ ТЕЧЕНИЯ ПРИ СЛАБОМ ОТРАЖЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ПАРАДОКСА НЕЙМАНА

Г. В. Шоев, Д. В. Хотяновский, Е. А. Бондарь, А. Н. Кудрявцев, М. С. Иванов

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО
РАН, Новосибирск*

Четырехволновая модель Гудерлея для отражения слабых ударных волн — это наиболее известный путь для разрешения парадокса Неймана в рамках газовой динамики. Численное моделирование, проведенное в [1] с использованием техники выделения скачков, подтвердило основные положения теории Гудерлея. В окрестности тройной точки за отраженной волной обнаружены волна разрежения и локальная сверхзвуковая область.

Другой путь для разрешения парадокса Неймана — это попытаться учесть эффекты вязкости и теплопроводности в окрестности тройной точки. Согласно модели Штернберга [2], вместо тройной точки в вязком потоке существует зона, где условия Рэнкина — Гюгонио не применимы. Численное моделирование [3] при низких числах Рейнольдса подтвердило справедливость этой модели, при этом локальных сверхзвуковых областей в окрестности пересечения ударных волн обнаружено не было. В настоящий момент не ясно, может ли “вязкая” структура течения при числе Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$ непрерывным образом перейти в четырехволновую структуру с локальной сверхзвуковой зоной. Для полного понимания структуры течения в окрестности пересечения ударных волн необходимо провести численное моделирование при максимально высоких числах Рейнольдса.

В настоящей работе проведено численное исследование стационарного нерегулярного отражения слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана. При численном моделировании в рамках уравнений Эйлера, с использованием схем сквозного счета, обнаружена четырехволновая конфигурация Гудерлея со сверхзвуковой областью за отраженной волной. В вязком случае подобные сверхзвуковые области при числах Рейнольдса $Re < 10^9$ обнаружены не были. При увеличении числа Рейнольдса обнаружен прообраз четырехволновой конфигурации со сверхзвуковой областью за отраженной волной.

Список литературы

- [1] Васильев Г. Е., Крайко А. Н. *Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана* // 1999. Т. 39, № 8. С. 1393–1404.
- [2] Sternberg J. *Triple-shock-wave intersections* // Physics of Fluids, 1959, Т. 2, № 2. С. 179–206.
- [3] Ivanov M., Bondar Ye., Khotyanovsky D., Kudryavtsev A., Shoev G. *Viscosity Effects on Weak Irregular Reflection of Shock Waves in Steady Flow* // Progress in Aerospace Sciences, 2010, № 49. P. 89–105.

ПОДМОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

Ю. В. Юлмухаметова

Уфимский государственный авиационный технический университет

Для модели газовой динамики разыскиваются уравнения состояния $p = f(\rho, S)$, где S – энтропия, с которыми уравнения газовой динамики имеют решение с линейным полем скоростей: $\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t)$, где A – матрица, $\vec{u}_0$ – вектор. Удобно ввести вспомогательные величины: $S + \Omega = A' + A^2$, $S^T = S = \|s_{ij}\|$, $\Omega = -\Omega^T = E < \vec{\omega} >$, $\vec{v} = \vec{u}'_0 + A\vec{u}_0$. Из уравнений газовой динамики следует переопределенная система для давления p и плотности ρ [1]. Условия совместности при $\nabla\rho \neq 0$ таковы $S\vec{\omega} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0$. При этом для p и ρ найдены определенные представления. С помощью этих представлений из переопределенной системы функциональных уравнений получена полная классификация решений.

При $\rho = \rho(t)$ получены дифференциальные уравнения для матрицы S , вектора $\vec{\omega}$, вектора $\vec{v}$, которые назовем подмоделью.

При $\vec{\omega} = 0$ имеются две подмодели, когда выражение $(\rho a^2)_{\rho\rho}$ равно нулю и не равно нулю.

При $\vec{\omega} \neq 0$, $S = 0$ получено две подмодели, когда выражение $(\rho(\rho a^2)_\rho)_\rho$ равно нулю и не равно нулю.

При $\vec{\omega} \neq 0$ (например $\omega^1 \neq 0$) и ранге матрицы S равном 1 или 2 получено пять подмоделей:

а) $\Delta + (\omega^1)^2 \neq 0$, $\Delta = s_{22}s_{33} - s_{23}^2$;

б) $\Delta = 0$, $\omega^1 \neq 0$;

При $\Delta + (\omega^1)^2 = 0$ плотность имеет вид $\rho = R(t, J_1)(2\omega^1 I_1 + \lambda s_{22}v^3 - s_{33}v^2)^{-1}$, где $I_1 = \alpha s_{22}\lambda + \beta s_{33}$, $\alpha = x^2 - \frac{\omega^2}{\omega^1}x^1$, $\beta = x^3 - \frac{\omega^3}{\omega^1}x^1$, $J_1 = 2\omega^1(\alpha + \beta\lambda) - (v^3 - \lambda v^2)\ln|n|$,

$\lambda \equiv \frac{s_{23} + \omega^1}{s_{22}} = \frac{s_{33}}{s_{23} - \omega^1}$

в) $R_{J_1} \neq 0$, $v^3 \neq \lambda v^2$;

г) $R_{J_1} \neq 0$, $v^3 = \lambda v^2$;

д) $R_{J_1} = 0$.

Таким образом, получено 10 подмоделей. Все подмодели получены при условии, что $\text{tr}A \neq 0$, так как при $\text{tr}A = 0$ все подмодели перечислены в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной научно-технической программы Республики Башкортостан, госконтракт 13/3-ФМ.

Список литературы

- [1] Тарасова Ю. В. *Классификация подмоделей с линейным полем скоростей в газовой динамике* // СибЖИМ. 2009. Т. 12. № 4.
- [2] Хабиров С. В. *Движения газа без расхождения с линейным полем скоростей* // Труды института математики с ВЦ УНЦ РАН. 2008. Вып. 1.

NONLINEAR ROSSBY WAVE TRAINS IN POLAR AREAS AND VARIABILITY OF THE ANTARCTIC CIRCUMPOLAR CURRENT

O. G. Derzho

Institute of Thermophysics, SB RAS, 1 Lavrentyev Ave., Novosibirsk, Russia

In this contribution a simple analytical model for low frequency and large scale variability of the Antarctic Circumpolar Current (ACC) is presented. The physical mechanism of the variability is related to temporal and spatial variations of the mean flow (ACC) due to circularly propagating nonlinear barotropic Rossby wave trains. It is shown that the Rossby wave train is a fundamental mode, trapped between the major fronts in the ACC [1]. The Rossby wave trains are predicted to rotate around the Antarctica. The angular velocity of rotation of the vortical Rossby wave pattern is not arbitrary, but is predicted to be at a specific rate, which is independent of the zonal number but rather depends on the distance between the Sub Antarctic Front (SAFjet) and Polar Front (PF jet), and the strength of the mean current. The pattern propagates against the ACC for large distances between the SAF and PF and collateral to the ACC when this distance is short. Once the vorticity-stream function relation is prescribed, our model predicts that there is a unique nonlinear vortex pattern for each zonal mode number. Various modes are allowed to exist, however they have reasonable amplitudes (those leading to the observed velocities) in different range of parameters in the stream function-vorticity relation, perhaps indicating that they are driven by different physical mechanisms. This conclusion is consistent with observations reported by [2]. Reasonable values for the distance between the SAF and PF and the magnitude of the average mean current lead to reasonable agreement for the period of rotation and the velocity field characteristics. The theory also predicts that the Rossby wave patterns include patches of trapped fluid that could carry fluid from the inner (colder) and outer (warmer) boundaries of the ACC thus explaining the sequence of the warm and cool patches carried by the ACW. A more detailed examination of importance of the bathymetry and coastal configuration features would require a spatially explicit numerical model, which is beyond the scope of the present study. The spatial structure of the rotating pattern, including its zonal wave number, is defined by the specific form of the stream function-vorticity relation. The similarity between the simulated patterns and the Antarctic Circumpolar Wave (ACW) is highlighted. The model can predict the observed sequence of warm and cold patches in the ACW as well as its zonal number.

Список литературы

- [1] Derzho O. G. and B. de Young *Rotating nonlinear vortical patterns on a gamma plane* // Studies in Applied Mathematics., DOI 10.1111/j.1467-9590.2010.00502.x.
- [2] Venegas S. A. *The Antarctic Circumpolar Wave: A Combination of Two Signals* // J. of Climate, N 16, 2509–2525.

ROLL WAVES IN SHEARED FLOW ON AN INCLINED PLANE

G. Richard, S. L. Gavriluk

Aix-Marseille University, UMR CNRS 6595, IUSTI, 5 rue E. Fermi, 13453 Marseille Cedex 13, France

Roll waves is a periodic system of smooth profiles separated by hydraulic jumps. The existence of roll waves has been proved by Dressler (1949) by using classical shallow water equations on an inclined plane with friction. V. Yu. Lyapidevsky has studied the modulational stability of such waves (Lyapidevsky, Teshukov, 2000).

However, the experimental wave profiles (Brock, 1967) do not correspond to Dressler's profiles which are too "sharp". We adapted the model proposed by V. M. Teshukov (2007) for description of sheared shallow water flows. This model is analogous to the model of turbulent flows of compressible fluids supplemented by some "production-dissipation" terms. The roll waves solutions have been obtained. A very good agreement of theoretical and experimental profiles has been observed.

Авторский указатель

Derzho O. G., 76

Gavrilyuk S. L., 77

Richard G., 77

Алексеев Г. В., 7, 9

Алексеев С. В., 8

Андреев В. К., 10

Архипов Д. Г., 11

Батяев Е. А., 61

Баутин С. П., 12

Бейзель С. А., 69

Белоносов В. С., 13

Белых В. Н., 14

Богданов А. Н., 15

Бондарь Е. А., 74

Борщ В. Л., 17

Бочаров А. А., 66

Ваганова Н. А., 18

Васильев А. А., 19

Веревкин И. В., 19

Воропаева О. Ф., 20

Гальцев О. В., 21

Ганжа Е. И., 22

Гербер Е. А., 23

Головин С. В., 25, 26

Голубкина И. В., 51

Грек Г. Р., 44

Григорьев Ю. Н., 27

Давыдов А. А., 28

Данилов Д. С., 29

Диесперов В. Н., 15

Елюхина И. В., 29

Ершов И. В., 27

Жибер А. В., 31

Иванов М. С., 74

Иванова А. В., 32

Иванова Ю. Е., 56

Ильичев А. Т., 32

Казаков А. Л., 33

Казакова М. Ю., 25

Капцов О. В., 34

Карабут П. Е., 52

Катасонов М. М., 35

Качулин Д. И., 11

Кедринский В. К., 36

Князева А. Г., 37

Ковтуненко П. В., 38

Козлов В. В., 39

Козлов Г. В., 44

Костиков В. К., 40

Костригина О. С., 31

Крайко А. Н., 41

Крупчатников В. Н., 42

Крутиков М. К., 26

Кудрявцев А. Н., 74

Куликовский А. Г., 43

Кутрунов В. Н., 23

Липатов И. И., 29

Литвиненко А. А., 45

Литвиненко М. В., 44

Литвиненко Ю. А., 44

Ляпидевский В. Ю., 46

Макаренко Н. И., 47

Мальцева Ж. Л., 47

Маркович Д. М., 8

Медведев С. Б., 48

Мейрманов А. М., 21

Мотырев П. А., 35

Муртазина Р. Д., 48

Никулин В. В., 49

Осищев А. Н., 51

Остапенко В. В., 32, 52

Пененко В. В., 52

Плотников П. И., 53

Пономарева М. А., 54

Прохоров В. Е., 68

Пухначев В. В., 55

Рагозина В. Е., 56

Романьков А. С., 57

Роменский Е. И., 57

Садовская О. В., 58

Садовский В. М., 58

Саженов С. А., 59

Сафарова Н. С., 45

Сбоев Д. С., 35

Снытников В. Н., 60

Терешко Д. А., 9

Терсенов Ар. С., 60

Толкачев Г. Ю., 29

Филимонов М. Ю., 18

Хабахпашев Г. А., 45

Хабахпашева Т. И., 61

Хабиров С. В., 62

Хе А. К., 63

Хлуднев А. М., 64

Хотяновский Д. В., 74

Худякова В. К., 69

Царев С. П., 65

Цвелодуб О. Ю., 11, 66

Цветова Е. А., 67

Чашечкин Ю. Д., 68

Черданцев А. В., 8

Черевко А. А., 32

Чернорай В. Г., 39

Черных Г. Г., 20

Чесноков А. А., 38, 63

Чинь Тхи Зиен Линь, 28

Чиркунов Ю. А., 68

Чубаров Л. Б., 69

Чугайнова А. П., 70

Чупахин А. П., 32

Шанько Ю. В., 71

Шелухин В. В., 72

Шмидт А. В., 73

Шоев Г. В., 74

Шрагер Г. Р., 54

Юлмухаметова Ю. В., 75

Якутенок В. А., 54

Подписано в печать 10.02.2011.	Формат 60×84 1/8.	Офсетная печать.
Усл. печ. л. 8,2.	Уч.-изд. л. 7,5.	Тираж 100 экз.
		Заказ № 67.

Лицензия ПД N 12-0143 от 22.10.2001
Отпечатано на полиграфическом участке ИГиЛ СО РАН
630090, Новосибирск, проспект акад. Лаврентьева, 15.