

Российский Национальный комитет
по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Российский фонд фундаментальных исследований
Южный федеральный университет
Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
Южный научный центр РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
гг. Ростов-на-Дону, Азов

II

Содержание

Абрамович М.В., Углич П.С. Обратные коэффициентные задачи для поперечно-неоднородного упругого слоя	6
Айрапетян Г.С., Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных ортотропных упругих тонких пластин	11
Бабадеев И.С., Колесников И.В., Ляпин А.А., Чебаков М.И. Конечно-элементное моделирование и расчет преварительно напряженных железобетонных шпал	16
Багдасарян А.С., Багдасарян С.А., Богданов М.И., Днепровский В.Г., Карапетян Г.Я., Петин Г.П. Исследование коэффициента отражения поверхностных акустических волн в зависимости от типа жидкостей и их смесей	21
Бауэр С.М., Карамшина Л.А., Качанов А.Б., Корников В.В. Модели измерения внутриглазного давления после операций по коррекции зрения	26
Бекежанова В.Б. О режимах конвективных течений вязкой жидкости в вертикальном цилиндре	31
Белоконь А.В., Радченко М.Ю., Скалиух А.С. Использование ориентационной модели и модели запертой стенки для формулировки определяющих соотношений поликристаллических сегнетоэлектриков .	36
Бобылев Д.Е., Масько Л.В. Расчет поля напряжений в приконтурной зоне выработки, закрепленной анкерами	41
Бондарчук А.А., Мещеряков К.И. Применение генетического алгоритма к задаче оптимизации геометрии лопасти турбины ВЭУ	46
Бочарова О.В., Анджинович И.Е. Экспериментальное моделирование поверхностных волновых полей в средах с неоднородностями	51
Бычков А.А. Равновесие двухкомпонентного упругого слоя, содержащего дислокацию несоответствия	56
Галингер Н.В. Моделирование движения крови в сосудах со стенозом . .	61
Гончаренко А.А., Прозоров О.А.. Возникновение вторичных режимов в задаче вибрационной конвекции Марангони	66
Гукасян Л.С. Задача Коши в теории обратных задач	71
Гусаченко В.В., Ильичева Е.А., Левенштам В.Б. Линейная параболическая задача с вырождением. Высокочастотная асимптотика	74
Жеребко А.И. Автоматизированный анализ двумерных задач нелинейной теории упругости	79
Журавлев Г.А., Бабенко И.С. О влиянии кривизны контактирующих цилиндров на напряженное состояние в глубине их контакта	84

Зубов Л. М., Иванова А. С. Задача о двойном цилиндрическом изгибе в нелинейной теории упругости	89
Карпинский Д. Н., Санников С. В. Расчет эволюции пластической деформации у вершины затупленной трещины	94
Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Ковариантная форма уравнений совместности на поверхностях сильного разрыва в микрополярном термоупругом континууме: гиперболическая теория	99
Колесников В. И., Бардушкин В. В., Колесников И. В., Сычев А. П., Сычев А. А., Яковлев В. Б. Анизотропия упругих свойств трехкомпонентных антифрикционных композитов с ориентированными неизометричными включениями	104
Косенко Е. Е., Косенко В. В., Черпаков А. В. Исследование прочностных характеристик арматурных сталей	109
Костандов Ю. А., Медведев В. С. Зависимость характера разрушения и прочности хрупких тел при их сжатии от контактного трения и ориентации начальной трещины	114
Кругликов М. Г., Цибулин В. Г. Моделирование распределения неантагонистических популяций на пространственно-неоднородном ареале	119
Леви М. О. Влияние магнитных граничных условий на динамические свойства электромагнитоупругого слоя	124
Лыжов В. А., Тукодова О. М., Ворович Е. И., Агаян К. Л. Эффективный приближенный метод построения связанных полей многоэлектродных структур	129
Ляпин А. А., Козин С. В. Об идентификации характеристик неоднородной поропругой колонны	134
Макарова М. Е., Марчевский И. К. Сравнение результатов расчета обтекания профилей, полученных при помощи различных численных схем метода вихревых элементов	137
Мартынов Р. Э. Эволюция газового пузырька в слое стеклофазы при спекании порошков	142
Михин М. Н. Задача кручения растущего призматического тела с сечением в форме лемнискаты Бута	147
Моргулис А. Б. Неединственность и бифуркация сквозного течения	152
Моршнева И. В., Овчинникова С. Н. Суперпозиции азимутальных волн около точки $Res\ 2$ в задаче Куэтта–Тейлора	157
Надолин К. А., Жилияев И. В. Численное исследование редуцированной модели турбулентного руслового потока	162
Наседкин А. В., Наседкина А. А., Ремизов В. В. Моделирование поро- и термоупругих композитов методами эффективных модулей и конечных элементов	167

Норкин М. В., Яковенко А. А. Разгон эллиптического цилиндра в неоднородной жидкости со свободной поверхностью	172
Периг А. В., Голоденко Н. Н. О численном интегрировании уравнения переноса вихря	177
Петров А. Г. О точных решениях уравнений Навье–Стокса в слое жидкости между движущимися параллельно пластинами	182
Потапов И. И. Математическая модель развития донных волн в равнинных реках	187
Пузикова В. В. Использование метода LS-STAG для моделирования обтекания профиля потоком вязкой несжимаемой среды	190
Ревина С. В. Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений	195
Романов М. Н. Расчет трехчастотных квазипериодических режимов движения жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами	200
Сафроненко В. Г., Донченко Е. Н., Шутько В. М. Численный анализ виброакустических свойств композитных трехслойных оболочек вращения, колеблющихся в акустической среде	205
Сметанин Б. И., Тарасов А. Е. Гидродинамическое моделирование движителя в виде цилиндрической оболочки в потоке жидкости	210
Столяр А. М. О некоторых задачах статики и динамики узких тонкостенных конструкций	215
Суворова Г. Ю. О влиянии граничных условий на динамические характеристики термоупругого слоя	220
Трепачев В. В., Трепачева А. В. Длинные нелинейные волны, возбуждаемые приливом заданного спектрального состава	225
Усошина Е. А. Колебания штампа на составной гетерогенной полосе	230
Черпаков А. В., Каюмов Р. А., Косенко Е. Е., Косенко В. В., Демидова А. В., Зайцева М. М. Конечно-элементное моделирование балки с дефектами	234
Шведов Д. С. Колебания неоднородного пороупругого слоя с пустыми порами	239
Ширяева Е. В., Ширяева И. В. Управление ЭГД течением в жидкой пленке при помощи электрического поля	244

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

Абрамович М. В.^{*}, Углич П. С.^{**}

^{*}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

^{**}Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ

Рассмотрены прямая и обратная задачи об антиплоских колебаниях поперечно-неоднородного упругого слоя. Механические параметры слоя (плотность и модель сдвига) считаются функциями поперечной координаты. Построены алгоритмы численного решения задачи, позволяющие найти волновые поля в слое и исследовать дисперсионное множество в случае любого закона изменения механических параметров. Также рассмотрена обратная задача об определении плотности и модуля сдвига по известной информации о поле перемещений на поверхности слоя. Построены итерационные последовательности интегральных уравнений, позволяющие решить обратную задачу в случае, когда неизвестным является один из механических параметров.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся вынужденные антиплоские колебания упругого слоя, занимающего область $\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Поле перемещений имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0, \\ u_3 = u(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \end{cases} \quad (1)$$

где ω — частота колебаний.

Уравнения движения приобретают вид [1]:

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \rho\omega^2 u = 0. \quad (2)$$

Также выполняются определяющие соотношения вида:

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \mu u_{,1}, \\ \sigma_{23} = \mu u_{,2}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\rho = \rho(x_2)$ — плотность материала, $\mu = \mu(x_2)$ — модуль сдвига.

Будем считать, что на верхней поверхности слоя действует касательная нагрузка, а нижняя поверхность слоя жёстко закреплена. Это граничные условия записываются следующим образом:

$$u|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{23}|_{x_2=1} = p(x_1). \quad (4)$$

Замыкают постановку задачи условия излучения, которые формулируются на основе принципа предельного поглощения [2].

2. Решение прямой задачи. Для решения задачи (2)–(4) воспользуемся интегральным преобразованием Фурье:

$$\tilde{u}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1.$$

Преобразуя соотношения (2)–(3) и исключая из них σ_{13} , получаем:

$$\begin{cases} \tilde{u}' = \tilde{\sigma}_{23}/\mu, \\ \tilde{\sigma}'_{23} = (\alpha^2\mu - \rho\omega^2)\tilde{u}, \\ \tilde{u}|_{x_2=0} = 0, \\ \tilde{\sigma}_{23}|_{x_2=1} = \tilde{p}(\alpha), \tilde{p}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1)e^{i\alpha x_1}dx_1. \end{cases} \quad (5)$$

Краевая задача (5) может быть легко решена при помощи метода пристрелки. Обозначим через U_1 , Σ_1 и U_2 , Σ_2 решения задач Коши для уравнения задачи (5) при следующих начальных условиях:

$$\begin{cases} U_1(\alpha, 0) = 1, \\ \Sigma_1(\alpha, 0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} U_2(\alpha, 0) = 0, \\ \Sigma_2(\alpha, 0) = 1. \end{cases}$$

Решение задачи (5) имеет вид:

$$\tilde{u} = \tilde{p}(\alpha) \frac{U_2(\alpha, x_2)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{p}(\alpha) \frac{\Sigma_2(\alpha, x_2)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}. \quad (6)$$

Волновые поля строятся по формулам вида:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \tilde{p}(\alpha) \frac{U_2(\alpha, x_2)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (7)$$

где σ — контур, обходящий особенности подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения. Кроме того, рассматривая знаменатель подынтегрального выражения (5), можно найти значения параметров α и ω , при которых однородные задачи имеют нетривиальные решения и найти таким образом дисперсионную зависимость в неоднородном слое.

Для того, чтобы убедиться в достоверности получаемых результатов, было проведено сравнение дисперсионных кривых, построенных в случае однородного слоя по формуле

$$\alpha^2 - \alpha^2 = - \left(\frac{2n-1}{2} \pi \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \alpha^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} \quad (8)$$

с дисперсионными кривыми, полученными в результате решения задачи (5) при однородных краевых условиях. На рисунке 1 изображены дисперсионные кривые для однородного слоя. По оси абсцисс откладывается α , по оси ординат — ω . Точками изображены кривые, построенная с помощью решения задачи (5) при однородных краевых условиях, сплошная линия — гиперболы, построенные по формуле (6).

Волновое поле в слое может быть найдено по формуле (7). Также можно воспользоваться теорией вычетов. Особенности подынтегральной функции представляют из себя счетное множество однократных полюсов α_n , конечное число которых — вещественные, все остальные — чисто мнимые. Выражения для волнового поля при $p = \delta(x_1)$ приобретает вид

$$u(x_1, x_2) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{U_2(\alpha, x_2)}{[\Sigma_2(\alpha, 1)]'_{\alpha}} \right\} \Big|_{\alpha=\alpha_n} e^{i\alpha_n x_1}. \quad (9)$$

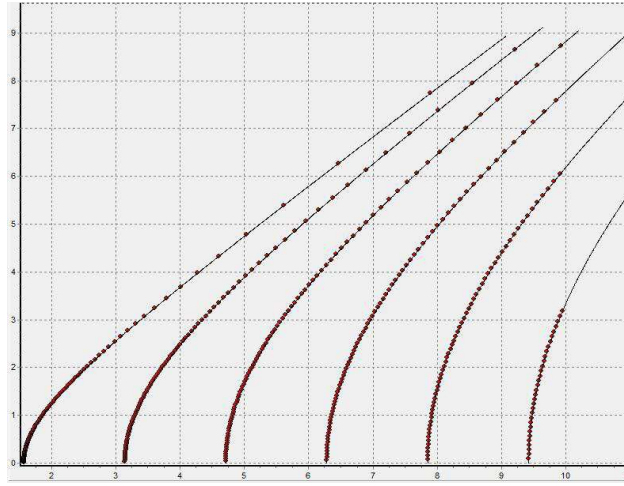


Рис. 1. Дисперсионные кривые для однородного слоя.

В частности, если слой — однородный, то при $x_2 = 1$ из формулы (9) следует:

$$u(x_1, 1) = \frac{i}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_n x_1}}{\alpha_n}, \quad \alpha_n = \sqrt{\varkappa_2^2 - \left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}. \quad (10)$$

Произведены расчёты волновых полей для различных законов неоднородности. На рис. 2 показана погрешность волнового поля, найденная для однородного слоя по формуле $\delta = \|u^I - u^{II}\|/\|u^I\| \cdot 100\%$, где u^I — волновое поле, найденное по формуле (7) путем численного интегрирования с использованием метода пристрелки для отыскания подынтегрального выражения на отрезке $[0, 1]$, а u^{II} — поле, найденное по формуле (10), под нормой подразумевается норма унитарного пространства. По оси абсцисс откладывается $\varkappa$, по оси ординат — погрешность в процентах.

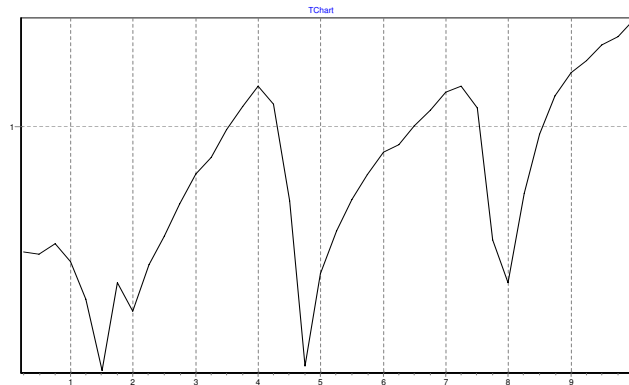


Рис. 2. Погрешность волнового поля для однородного слоя.

3. Обратная задача. Предположим, что на некотором участке верхней поверхности $[c, d]$ известно поле перемещений и требуется найти механические характеристики $\mu(x_2)$ или $\rho(x_2)$. Ранее подобная задача решалась в трансформантах в

работе [3]. Для решения обратной задачи в оригиналах с помощью метода возмущений построено уравнение вида

$$u_1(x_1, 1) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \mu_1(\xi) d\xi \int_{\sigma} \tilde{p}(\alpha) \left\{ \frac{1}{\mu_0^2(\xi)} \left[\frac{\Sigma_2(\alpha, \xi)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} \right]^2 + \right. \\ \left. + \alpha^2 \left[\frac{U_2(\alpha, \xi)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} \right]^2 \right\} e^{-i\alpha x_1} d\alpha + \frac{\omega^2}{2\pi} \int_0^1 \rho_1(\xi) d\xi \int_{\sigma} \tilde{p}(\alpha) \left[\frac{U_2(\alpha, \xi)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} \right]^2 e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (11)$$

где $\mu_0(x_2)$, $\rho_0(x_2)$ — приближения искомых функций; $\mu_1(x_2)$, $\rho_1(x_2)$ — поправки к нему, $u_1(x_1, 1)$ — разность между наблюдаемым полем перемещений и эталонным полем перемещений, найденным из решения (5) в случае $\mu = \mu_0(x_2)$, $\rho = \rho_0(x_2)$. На основе (11) построен итерационный процесс. Рассмотрим для примера случай, когда μ считается известным, а требуется определить ρ .

Выбираем некоторое начальное приближение ρ_0 . Решая систему (5) и обращая преобразование Фурье, находим u_0 , σ_0 . Затем, считая u_1 равным разности между наблюдаемым полем перемещений и полем u_0 , решаем уравнение (11) и находим ρ_1 . Полагаем $\rho_0 = \rho_0 + \rho_1$ и повторяем процедуру до тех пор, пока очередная поправка ρ_1 не станет пренебрежимо мала или количество итераций не превысит некоторое наперед заданное количество. Аналогично строится итерационный процесс для отыскания μ .

Далее приводятся результаты решения обратной задачи. В качестве исходных данных служила вещественная часть перемещения на отрезке $x_1 = [0, 1]$. По оси абсцисс отложена координата x_2 , по оси ординат — $\rho - \rho_0$ на рис. 3 и $\mu - \mu_0$ на рис. 4.

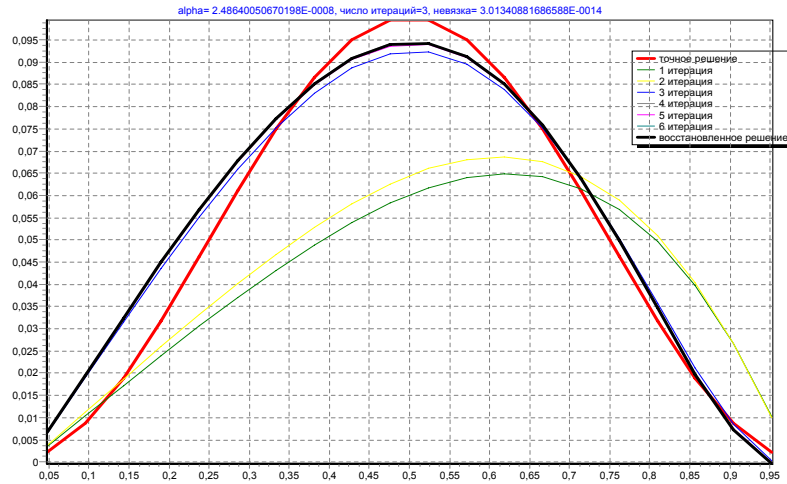


Рис. 3. Результаты решения обратной задачи при $\mu = \text{const}$, $\rho = \rho_0(1 + 0,1 \sin^2 \pi x_2)$, $\varkappa = \omega \sqrt{\rho(0)\mu^{-1}} = 1$.

4. Заключение. Таким образом, задачу о колебаниях поперечно неоднородного слоя удалось после преобразования Фурье свести к численному решению системы дифференциальных уравнений, что после обращения преобразования поз-

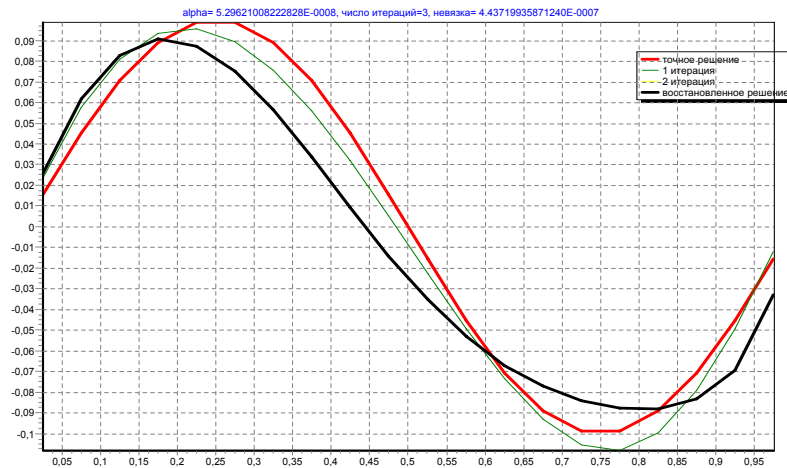


Рис. 4. Результаты решения обратной задачи при $\rho = \text{const}$, $\mu = \mu_0(1 + 0.2 \sin 2\pi x_2)$, $\varkappa = \omega \sqrt{\rho\mu(0)^{-1}} = 2$.

воляет построить волновое поле для любой (не обязательно непрерывной) зависимости характеристик от поперечной координаты. Путем сравнения с известными результатами показана эффективность и достоверность предложенной методики. Построены интегральные уравнения для решения обратных коэффициентных задач об определении неизвестных механических характеристик.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П-596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1980. 872 с.
- [2] *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [3] *Ватульян А. О., Сатуновский П. С.* Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Доклады РАН 2007. Т. 414. № 1. С. 36–38.

Abramovich M. V., Uglich P. S. *Inverse coefficient problems for the transversally inhomogeneous elastic layer.* Direct and inverse problems of antiplane vibrations of the transversally inhomogeneous elastic layer are considered. Elastic layer mechanical parameters are assumed as functions of the transversal coordinate. Numerical algorithms for the direct problem solving are developed. Displacement fields layer and dispersion curves for the layer are obtained. An inverse problem for mechanical parameters defining using displacement field data is also considered. Iterative integral equation sequences for the inverse problem solution are derived.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Айрапетян Г. С., Саркисян С. О.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

В данной работе развивается теория микрополярных тонких ортотропных оболочек. Математическая модель строится с помощью асимптотического метода интегрирования трехмерной задачи микрополярной теории упругости. Построена общая прикладная теория изгиба тонкой микрополярной пластины из ортотропного материала.

Введение. Микрополярная теория упругости является одной из современных направлений в механике деформируемых твердых тел. Построению моделей тонких пластин и оболочек на основе микрополярной теории упругости посвящены работы [1–4] и др. Обзор работ в этом направлении осуществлен в работе [5].

Основная проблема в теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерным. Для достижения этой цели уместно использование качественных результатов асимптотического метода интегрирования трехмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в области, представляющей собой тонкую пластинку или оболочку [6, 7].

В работах [8, 9], используя качественные стороны исходного приближения асимптотического метода интегрирования трехмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки и оболочки [6, 7], сформулированы гипотезы, на основе которых построены общие прикладные теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

В данной работе этот подход развивается с использованием результата асимптотического метода интегрирования трехмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки для ортотропного материала [10], утверждаются гипотезы, принятые в работе [8] для изотропного материала, и на этой основе построена общая прикладная теория изгиба микрополярных тонких пластин для ортотропного материала.

1. Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений и граничных условий пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений [11]. Будем использовать прямоугольные декартовы координаты x_1, x_2, x_3 , располагая оси x_1 и x_2 в срединной плоскости пластинки. Рассмотрим антисимметричную по x_3 задачу (т.е. задачу изгиба пластинки):

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \mu_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{31}}{\partial x_3} + \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_3} + \sigma_{31} - \sigma_{13} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{33}}{\partial x_3} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33}, & \chi_{11} &= b_{11}\mu_{11} + b_{12}\mu_{22} + b_{13}\mu_{33}, \\ \gamma_{22} &= a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33}, & \chi_{22} &= b_{12}\mu_{11} + b_{22}\mu_{22} + b_{23}\mu_{33}, \\ \gamma_{33} &= a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33}, & \chi_{33} &= b_{13}\mu_{11} + b_{23}\mu_{22} + b_{33}\mu_{33}, \\ \gamma_{23} &= a_{44}\sigma_{23} + a_{45}\sigma_{32}, & \chi_{23} &= b_{44}\mu_{23} + b_{45}\mu_{32}, \\ \gamma_{32} &= a_{45}\sigma_{23} + a_{55}\sigma_{32}, & \chi_{32} &= b_{45}\mu_{23} + b_{55}\mu_{32}, \\ \gamma_{31} &= \tilde{a}_{55}\sigma_{31} + a_{56}\sigma_{13}, & \chi_{31} &= \tilde{b}_{55}\mu_{31} + b_{56}\mu_{13}, \\ \gamma_{13} &= a_{56}\sigma_{31} + a_{66}\sigma_{13}, & \chi_{13} &= b_{56}\mu_{31} + b_{66}\mu_{13}, \\ \gamma_{12} &= a_{77}\sigma_{12} + a_{78}\sigma_{21}, & \chi_{12} &= b_{77}\mu_{12} + b_{78}\mu_{21}, \\ \gamma_{21} &= a_{78}\sigma_{12} + a_{88}\sigma_{21}, & \chi_{21} &= b_{78}\mu_{12} + b_{88}\mu_{21}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1}, & \gamma_{22} &= \frac{\partial U_2}{\partial x_2}, & \gamma_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_3}, & \chi_{11} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, & \chi_{22} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, & \chi_{33} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}, \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \omega_3, & \gamma_{21} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \omega_3, & \chi_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, & \chi_{21} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \omega_1, & \gamma_{32} &= \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \omega_1, & \chi_{23} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}, & \chi_{32} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}, \\ \gamma_{31} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \omega_2, & \gamma_{13} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \omega_2, & \chi_{31} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}, & \chi_{13} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_{nm}, \mu_{nm}, \gamma_{nm}, \chi_{nm}$ — компоненты несимметричных тензоров силового и моментного напряжений, деформаций и изгибов-кручений; U_n, ω_n — компоненты векторов перемещения и независимого поворота; $-h \leq x_3 \leq h$; $\hat{A}, \hat{B}$ — матрицы жесткостей, $\hat{a}, \hat{b}$ — матрицы податливостей микрополярного ортотропного упругого тела.

Если рассматривать задачу изгиба микрополярных упругих пластин (т.е. антисимметричную по x_3 задачу), то для граничных условий на лицевых плоскостях пластинки $x_3 = \pm h$ будем считать заданными силовые и моментные напряжения следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \frac{p_1^+ - p_1^-}{2}, & \sigma_{32} &= \frac{p_2^+ - p_2^-}{2}, & \sigma_{33} &= \pm \frac{p_3^+ - p_3^-}{2}, \\ \mu_{31} &= \frac{m_1^+ - m_1^-}{2}, & \mu_{32} &= \pm \frac{m_2^+ - m_2^-}{2}, & \mu_{33} &= \frac{m_3^+ - m_3^-}{2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пластинку будем считать тонкой, т. е. будем считать, что толщина пластинки $2h$ намного меньше характерных размеров пластинки в плане.

Теорию микрополярных ортотропных упругих тонких пластин будем строить на основе следующих достаточно общих гипотез.

Принимаемые ниже гипотезы по содержанию можно рассматривать как кинематические и статические.

Кинематическая гипотеза характеризует изменение компонентов вектора перемещения и вектора независимого поворота по координате x_3 вдоль нормали к срединной плоскости пластинки.

К статическим гипотезам главным образом относятся гипотезы, определяющие изменение по толщине пластинки касательных силовых напряжений σ_3 , нормального моментного напряжения μ_{33} и моментных напряжений μ_{i3} ($i = 1, 2$).

В соответствии с кинематической формулировкой вводятся предположения о линейном распределении компонентов векторов перемещения и независимого поворота по координате x_3 следующего характера:

$$U_1 = x_3 \psi_1(x_1, x_2), \quad U_3 = w(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2), \quad (1.5)$$

$$\omega_i = \Omega_i(x_1, x_2), \quad \omega_3 = x_3 i(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2). \quad (1.6)$$

Кинематическая гипотеза (1.1) относительно перемещений представляет собой известные гипотезы Тимошенко в классической теории упругих пластин. По этой гипотезе нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной плоскости, и свободно вращается под некоторым углом, не изменяя при этом своей длины.

Кинематическая гипотеза (1.5), (1.6) в целом в работах [8, 9] названа обобщенной гипотезой Тимошенко в микрополярной теории пластин.

К статическим относятся следующие гипотезы:

- 1) силовым напряжением σ_{33} в обобщенном законе Гука (1.2) для γ_{11}, γ_{22} можно пренебречь относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22} ;
- 2) для определения деформаций, изгибов–кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2); \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(x_1, x_2). \quad (1.7)$$

После определения указанных величин значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим, соответственно, как сумму значения (1.7) и результата интегрирования либо первых двух, либо шестого из (1.1) уравнений равновесия, для которых потребуем выполнение условия равенства нулю усредненных по толщине пластинки величин;

3) в обобщенном законе Гука (1.2) для χ_{i3} ($i = 1, 2$) моментным напряжением можно пренебречь относительно моментного напряжения μ_{3i}, μ_{i3} ($i = 1, 2$).

2. Математическая модель статической деформации изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких пластин. На основе принятых гипотез получим основные уравнения статики изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких пластин:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} &= -\tilde{p}_3, \quad N_{3i} - \left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} \right) = h\tilde{p}_i, \\
\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j(N_{j3} - N_3) &= -\tilde{m}_i, \\
L_{33} - \left[\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + (M_{12} - M_{21}) \right] &= h\tilde{m}_3;
\end{aligned} \tag{2.1}$$

физические соотношения

$$\begin{aligned}
N_{13} &= \tilde{C}_{55}\Gamma_{13} + C_{56}\Gamma_{31}, \quad N_{31} = C_{56}\Gamma_{31} + C_{66}\Gamma_{13}, \\
N_{23} &= \tilde{C}_{55}\Gamma_{23} + C_{45}\Gamma_{32}, \quad N_{32} = C_{44}\Gamma_{32} + C_{45}\Gamma_{23}, \\
M_{11} &= D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22}, \quad M_{22} = D_{22}K_{22} + D_{12}K_{11}, \\
M_{12} &= D_{88}K_{12} + D_{78}K_{21}, \quad M_{21} = D_{77}K_{21} + D_{78}K_{12}, \\
L_{11} &= d_{11}k_{11} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{33}, \quad L_{12} = d_{88}k_{12} + d_{78}k_{21}, \\
L_{22} &= d_{22}k_{22} + d_{21}k_{11} + d_{23}k_{33}, \quad L_{21} = d_{77}k_{21} + d_{78}k_{12}, \\
L_{33} &= d_{33}k_{33} + d_{31}k_{11} + d_{32}k_{22}, \\
\Lambda_{13} &= \lambda_{66}l_{13}, \quad \Lambda_{23} = \lambda_{44}l_{23};
\end{aligned} \tag{2.2}$$

здесь

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{55} &= 2h \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2}, \quad C_{66} = 2h \frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2}, \quad C_{56} = -2h \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2}, \quad \dots \\
D_{11} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad D_{22} = \frac{2h^3}{3} \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad D_{12} = -\frac{2h^3}{3} \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad \dots
\end{aligned} \tag{2.3}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad K_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad K_{12} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - i, \quad K_{21} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + i, \\
\Gamma_{31} &= \psi_1 - \Omega_2, \quad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1, \quad \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, \\
k_{11} &= \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \quad k_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, \quad k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \quad k_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, \quad k_{33} = i, \\
l_{13} &= \frac{\partial i}{\partial x_1}, \quad l_{23} = \frac{\partial i}{\partial x_2}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

К основной системе уравнений необходимо просоединить краевые условия на граничном контуре Γ срединной плоскости пластинки (например, при $x_1 = const$)

$$\begin{aligned}
M_{11} &= M_{11}^* \quad \text{или} \quad K_{11} = K_{11}^*, \quad M_{12} = M_{12}^* \quad \text{или} \quad K_{12} = K_{12}^*, \\
N_{13} &= N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$L_{11} = L_{11}^* \quad \text{или} \quad k_{11} = k_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \quad \text{или} \quad k_{12} = k_{12}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \quad \text{или} \quad l_{13} = l_{13}^*.$$

Уравнения (2.1)–(2.4) и граничные условия (2.5) составляют общую модель микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жилин П. А. Основные уравнения неклассических теорий упругих оболочек // Динамика и прочность машин / Тр. ЛПИ. № 386. Л.: Изд-во ЛПИ, 1982. С. 29–42.
- [2] Пальмов В. А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек // В сб.: Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1986. С. 106–112.
- [3] Еремеев В. А., Zubov Л. М. Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 280 с.
- [4] Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates // Z Angew. Math. Mech(ZAMM). 2009. V. 89. № 4. Pp. 242–256.
- [5] Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A. On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10.1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag. 2009.
- [6] Саркисян С. О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129–147.
- [7] Саркисян С. О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 325–343.
- [8] Саркисян С. О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 2. С. 148–155.
- [9] Саркисян С. О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55–66.
- [10] Айрапетян Г. С. Построение двумерных уравнений статической задачи изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких пластин асимптотическим методом // Сборник научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» Т. 1. Ереван. НАН Армении. 2010. С. 56–60.
- [11] Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders // ZAMM. V. 54. № 12. Pp. 773–779.

Ayrapetyan G. S., Sarkisyan S. O. *A mathematical model of orthotropic micropolar elastic thin plates.* In the paper the theory of micropolar orthotropic thin shells is developed. The mathematical model is constructed using the asymptotic method of integration of three-dimensional micropolar elasticity. A general applied theory of bending of a thin micropolar orthotropic plate is created.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ШПАЛ

Бабадеев И. С.^{*}, Колесников И. В.^{*}, Ляпин А. А.^{**},
Чебаков М. И.^{**}

^{*}Ростовский государственный университет путей сообщения

^{**}НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Изложены результаты математического моделирования и сравнительного анализа напряженно-деформированного состояния стандартной железобетонной шпалы (ГОСТ 10629-88) и модернизированной шпалы [1, 2] с учетом их взаимодействия с балластом, рельсами и при наличии предварительно напряженной арматуры. Анализ проведен на основе метода конечных элементов с использованием программного комплекса ANSYS. Рассматривается процесс статического нагружения шпал посредством приложения усилий к расположенным на них рельсам и анализируются поля напряжений и смещений в обеих конструкциях, которые сравниваются.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим две шпалы (рис. 1), одна из которых является стандартной и изготовлена по ГОСТу 10629-88, а другая является экспериментальной [1, 2]. Отличие экспериментальной шпалы от стандартной заключается в том, что в подрельсовой части шпалы на расстоянии в 1000 мм от торцов ее толщина со стороны основания уменьшена на 28 мм (на рис. 1 обозначено пунктиром) и убран нижний ряд предварительно напряженной арматуры.

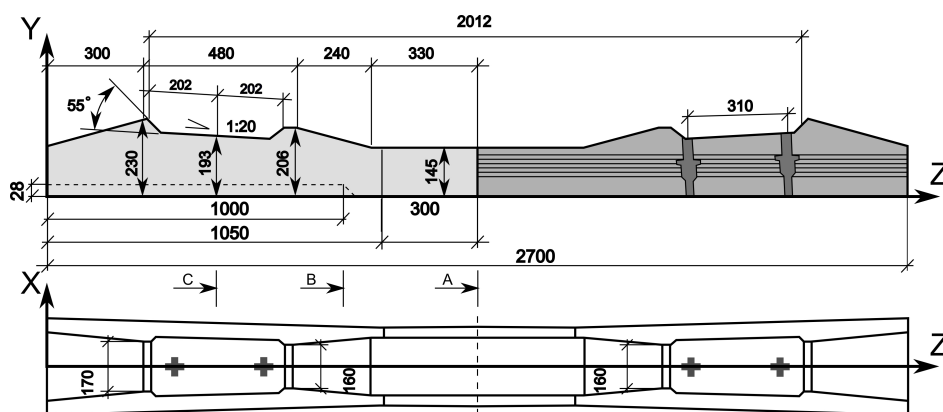


Рис. 1. Схема шпал.

Все размеры здесь и далее указываются в мм. Шпалы взаимодействуют с балластом с учетом трения, а усилие передается на шпалу через рельс и подрельсовую металлическую пластину (рис. 2). Схема расположения арматуры изображена на рис. 3 а и рис. 3 б в подрельсовом сечении.

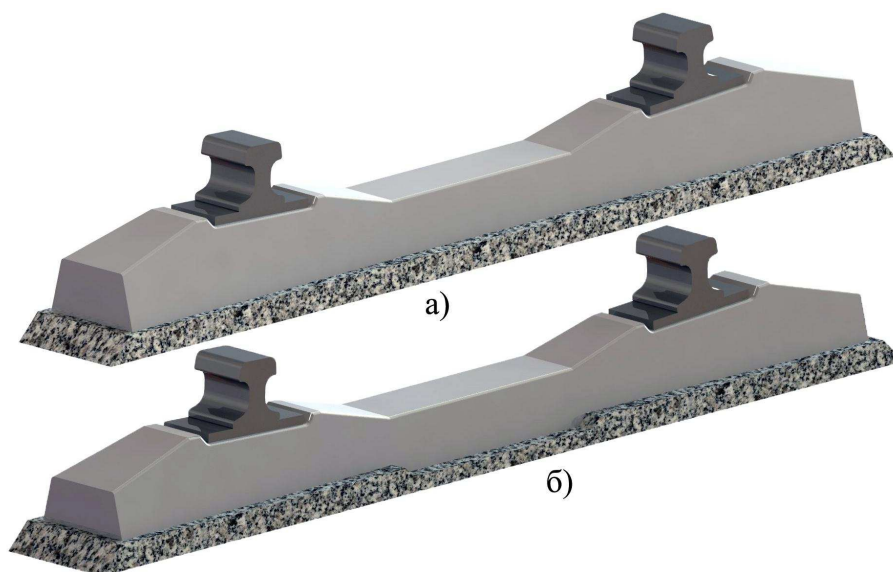


Рис. 2. Модели систем «рельс–шпала–балласт» (а — стандартная, б — экспериментальная).

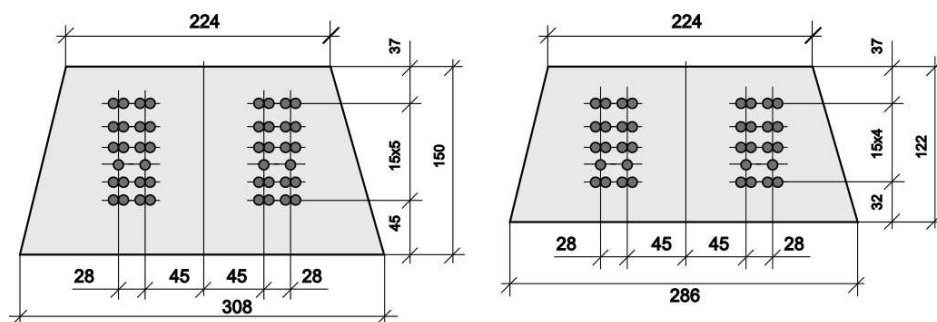


Рис. 3. Расположение арматуры по сечению на торце шпал (слева — стандартная, справа — экспериментальная).

При моделировании системы «рельс–шпала–балласт» будем исходить из предположения, что все близлежащие шпалы шпальной решетки нагружены одинаково и таким образом рассматриваемые системы имеют два семейства вертикальных плоскостей симметрии, перпендикулярных продольному направлению пути, одни из которых проходят через середину межшпального расстояния, другие совпадают с продольной плоскостью симметрии шпалы $x = 0$. Кроме этого существует плоскость симметрии, совпадающая с поперечной плоскостью симметрии шпал $y = 1350$. Здесь (x, y, z) — прямоугольная система координат (рис. 1).

Учитывая симметрию, для уменьшения времени расчета будем рассматривать четвертую часть шпалы, ограниченную плоскостями симметрии, и на этих плоскостях будем задавать граничные условия отсутствия нормальных перемещений и касательных напряжений. Контакт всех частей системы задается с учетом трения, а нижняя часть балласта жестко фиксирована, остальные поверхности свободны от напряжений.

Все объекты будем описывать линейными дифференциальными уравнениями

теории упругости, при этом каждый объект системы имеет различные упругие постоянные, которые представлены в таблице.

Материал	Свойства		
	E (КПа)	ν	ρ (т/м ³)
Рельсовая сталь	$2.05 \cdot 10^8$	0.3	7.85
Металл арматуры	$2 \cdot 10^8$	0.3	7.0
Бетон шпал	$3.25 \cdot 10^7$	0.2	2.5
Балласт	$6 \cdot 10^4$	0.35	1.71

2. Конечно-элементное моделирование.

Для решения поставленной задачи использовался метод конечных элементов, пакет ANSYS 11.0 и его командный язык APDL [3, 4]. Геометрия моделей была создана в инженерном пакете Solid Works и была импортирована в пакет Ansys. Для моделирования трехмерных тел был выбран 8-ми узловой объемный элемент Solid185. Наличие преднапряженной арматуры внутри бетона шпалы было реализовано с использованием элемента Link8, который позволяет задавать площадь сечения арматуры и предварительную относительную деформацию. По данным ГОСТа 10629-88 диаметр прутьев арматуры принимался равным 3 мм, а общая сила начального натяжения всей арматуры в пакете $P_{\text{предв}} = 358$ кН (36,4 тс).

3. Расчеты и анализ результатов.

Для расчетов нагрузка, приходящаяся на одну шпалу, считалась равной 80 кН, высота балласта предполагалась равной 600 мм. На основе расчета был проведен анализ вертикальных перемещений точек шпал, эквивалентных напряжений σ_e , касательных напряжений σ_{yz} и нормальных напряжений σ_z . В дальнейшем числовые значения всех напряжений на рисунках даны в МПа. На рис. 4 представлены графики перемещений (мм) прямой линии ($x = 0, y = 50$), отстоящей на 50 мм от средней части подошвы шпалы и лежащей в плоскости симметрии.

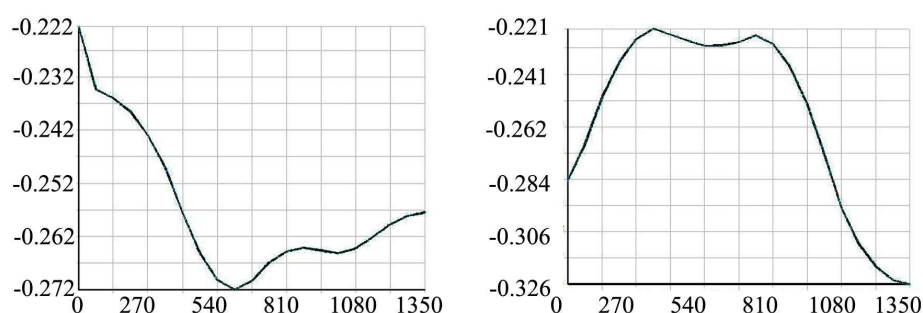


Рис. 4. Вертикальные смещения на линии симметрии подошвы шпалы (слева — стандартная, справа — экспериментальная).

Как можно видеть из данных результатов, существует заметная разница перемещений точек шпал при одной и той же нагрузке. В стандартной шпале максимум прогиба располагается под рельсом. В экспериментальной же шпале картина меняется, максимум прогиба теперь располагается в середине шпалы, а смещение зоны под рельсом относительно других зон заметно меньше.

На рис. 5 представлены диаграммы эквивалентных напряжений σ_e

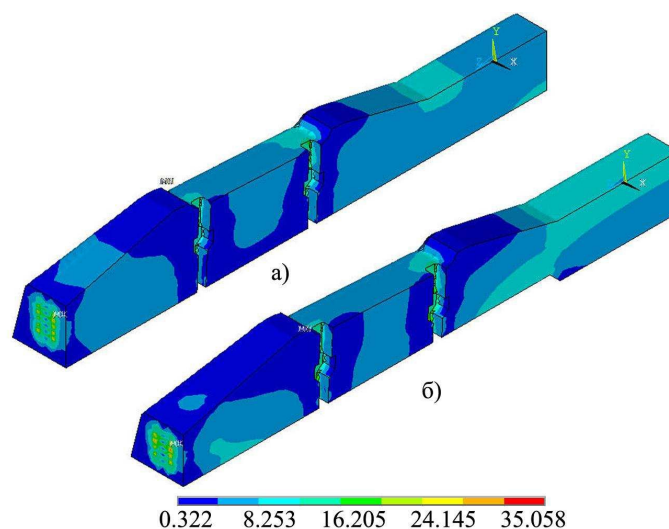


Рис. 5. Эквивалентные напряжения в шпалах (а — стандартная, б — экспериментальная).

На рис. 6 представлены картины распределения полей напряжений σ_z .

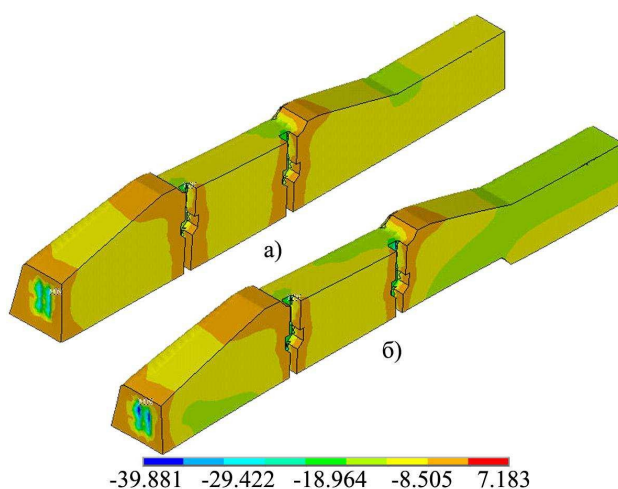


Рис. 6. Нормальные напряжения σ_z в шпалах (а — стандартная, б — экспериментальная).

Анализ результатов показывает, что почти во всем объеме шпал нормальные напряжения σ_z являются сжимающими и по абсолютному значению значительно превосходят растягивающие.

Заключение.

Проведенные исследования показали, что максимальные перемещения подошвы стандартной шпалы находятся в подрельсовой области, а в экспериментальной — в средней части шпалы ($z = 1350$) и максимум прогиба экспериментальной шпалы в 1.2 раза больше максимума прогиба стандартной шпалы. В соответствии с прогибами происходит и распределение напряжений в шпалах. Эквивалентные

напряжения в шпалах при $1000 \leq z \leq 1350$ отличаются значительно. В сечении $z = 1350$ (середина шпал) эквивалентные напряжения в стандартной шпале изменяются в диапазоне от 6.57 МПа на верхней грани до 8.7 МПа на нижней, в экспериментальной шпале это изменение заключено в диапазоне от 6.57 МПа на нижней грани до 11.2 МПа на верхней. Схожая картина наблюдается и в сечении $z = 1000$. При $z < 1000$ с приближением к краю шпал характер распределения напряжений становится более близким, однако величины напряжений в стандартной шпале меньше, при этом максимум эквивалентных напряжений находится в верхней части шпал. Например, в сечении под рельсом ($z = 546$) в стандартной шпале $3.85 \leq \sigma_e \leq 6.85$, а в экспериментальной $5.85 \leq \sigma_e \leq 8.34$. Расчеты σ_z показывают, что в сечениях $x = 0$ в стандартной шпале $-10.0 \leq \sigma_z \leq 0.52$, а в экспериментальной — $-13.6 \leq \sigma_z \leq 0.38$. Отметим, что максимальные сжимающие напряжения в стандартной шпале находятся в окрестности сечения $z = 1000$ в верхней части шпалы, в экспериментальной шпале в окрестности того же сечения, но в нижней части шпалы. Из приведенных выше диаграмм распределения нормальных напряжений σ_z видно, что бетон шпал работает преимущественно на сжатие.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабадеев И. С., Киреевнин А. А., Карпачевский В. В. Конструкция новой железобетонной шпалы // Путь и путевое хозяйство. № 5. 2010. С. 31.
- [2] Новакович В. И., Бабадеев И. С., Киреевнин А. А. Железобетонная шпала. Изобретение, патент №2433218 с приоритетом от 11.01.2009 г. по заявке № 2009100636/11(000772). Опубликовано 10.11.2011 г.
- [3] Басов К. А. ANSYS в примерах и задачах. М.: Компьютер пресс, 2002. 224 с.
- [4] Морозов А. Ю., Муйземнек А. С., Шадский Е. М. ANSYS в руках инженера: механика разрушения. М.: ЛЕНАНД, 2008. 456 с.

Babadeev I. S., Kolesnikov I. V., Lyapin A. A., Chebakov M. I. *Comparative analysis of the strength characteristics of standard and experimental sleepers based on three-dimensional finite element models.* The results of mathematical modelling and comparative analysis of the stress-strain state of the standard and upgraded reinforced concrete sleepers are described. Analysis is based on the finite element method with the use of software Ansys system. The process is considered static loading sleepers. Field stresses and displacements in both structures are analyzed

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТИПА ЖИДКОСТЕЙ И ИХ СМЕСЕЙ

Багдасарян А. С.^{*}, Багдасарян С. А.^{}, Богданов М. И.^{***},
Днепровский В. Г.^{****}, Карапетьян Г. Я.^{****}, Петин Г. П.^{***}**

^{}Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва*

*^{**}ООО «НПП «Технологии радиочастотной идентификации и связи», Москва*

*^{***}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

*^{****}НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.*

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Исследован коэффициент отражения поверхностных акустических волн от встречно-штыревого преобразователя, нагруженного на импеданс, в зависимости от типа жидкостей и их смесей (вода, спирт, вода–спирт, вода–бензин). Импеданс выполнен в виде плоского конденсатора с зазором, в который помещается исследуемая жидкость.

Для измерения коэффициента отражения в зависимости от типа жидкостей и их смесей был изготовлен измерительный стенд на основе датчика на поверхностных акустических волнах, описанного в [1]. В этом датчике конденсатор, представляющий собой две параллельные пластины из фольгированного стеклотекстолита длиной 30 мм и шириной 10 мм, которые повернуты друг к другу фольгированными поверхностями, образуя плоскопараллельный конденсатор с зазором шириной 1 мм. При погружении конденсатора в жидкость она заходит в его зазор, меняя емкость. Перед погружением измерительного конденсатора в жидкость с помощью подстроечного конденсатора, который подсоединен последовательно с измерительным конденсатором, устанавливается максимум отражений ПАВ от однонаправленного ВШП, а затем уже производится погружение измерительного конденсатора в жидкость. Для измерения глубины погружения на одной из внешних сторон конденсатора нанесены измерительные риски. Как показано на рис. 1, отражательный ВШП нагружен на индуктивно-емкостную нагрузку.

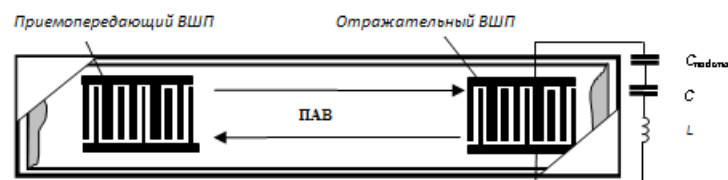


Рис. 1. Схема датчика для измерения коэффициента отражения в зависимости от типа жидкостей и их смесей.

На рис. 2, а показан импульсный отклик датчика с отражательным ВШП, соединенным с LC-нагрузкой, находящейся в резонансе. Как видно из этого рисунка, коэффициент отражения равен 0,4. Результаты измерений при погружении измерительного конденсатора $C = 3$ пФ в различные жидкости приведены в табл. 1–7.

На рис 2, б и в табл. 1 показана зависимость коэффициента отражения от глубины погружения измерительного конденсатора в фильтрованную воду (водопроводная вода пропущенная через фильтр «Аквафор»). Так как вода является полярной жидкостью, она имеет достаточно высокую диэлектрическую проницаемость. Поэтому для получения максимальной чувствительности необходимо, чтобы при резонансе непогруженная в жидкость емкость составляла бы небольшую часть от подстроенной емкости. Резонанс подбирается выставлением подстроечной емкости на максимум (25 пФ) и соответствующим подбором индуктивности с помощью ферромагнитного сердечника. В этом случае при погружении в воду происходит резкое увеличение общей емкости и уменьшение коэффициента отражения.

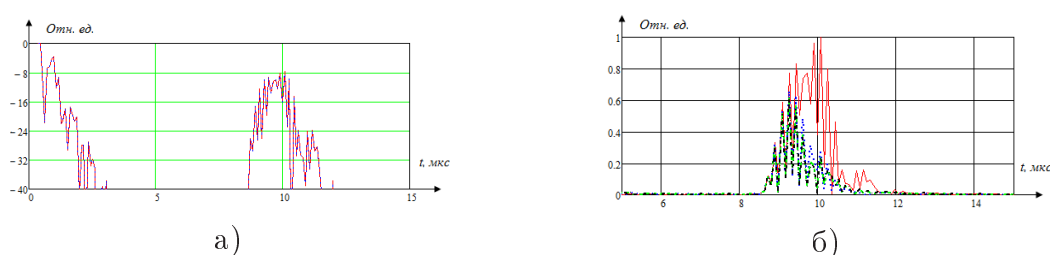


Рис. 2. Импульсные отклики датчика до и после погружения в воду:

— конденсатор не погружен (а,б); - - - - конденсатор погружен на 4 мм (б);
— конденсатор погружен на 8 мм (б); - - - - конденсатор погружен на 12 мм (б).

Глубина погружения, мм	0	4	8	12
Коэффициент отражения	0.4	0.28	0.25	0.25

Таблица 1. Вода.

При погружении сначала коэффициент отражения начинает убывать. При некоторой глубине погружения емкость измерительного конденсатора становится много больше емкости подстроечного конденсатора, и нагрузка носит индуктивный характер. Так как в полосе пропускания индуктивное сопротивление меняется незначительно, то коэффициент отражения при погружении более чем на 8 мм уже почти не изменяется. Уменьшение коэффициента отражения происходит из-за наличия активной составляющей в проводимости воды из-за наличия растворенных в ней солей.

На рис. 3 в табл. 2 приводится зависимость коэффициента отражения от глубины погружения измерительного конденсатора в спирт. Спирт, как и вода, представляет собой полярную жидкость с диэлектрической проницаемостью много больше единицы, следовательно, при погружении в жидкость коэффициент отражения быстро приходит к постоянному значению как в случае с водой. Уменьшение коэффициента отражения происходит, по-видимому, также из-за наличия активной составляющей в проводимости спирта из-за наличия небольшого количества воды.

На рис. 4 в таблице 3 показана зависимость коэффициента отражения от глубины погружения измерительного конденсатора в раствор воды со спиртом, где

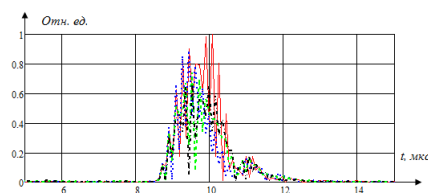


Рис. 3. Импульсные отклики датчика при погружении в спирт:

— конденсатор не погружен; --- конденсатор погружен на 4 мм;
 — конденсатор погружен на 8 мм; --- конденсатор погружен на 13 мм.

Глубина погружения, мм	0	4	8	13
Коэффициент отражения	0.4	0.38	0.325	0.275

Таблица 2. Спирт.

содержится 2 части спирта и одна часть воды. Так же, как и в предыдущих случаях, устанавливался максимум коэффициента отражения при непогруженном конденсаторе. Как видно из таблицы имеется минимум коэффициента отражения. В этом минимуме он равен 0,2. Это объясняется тем, что помимо наличия активной составляющей из-за наличия значительного количества фильтрованной воды, происходит согласование этой активной составляющей с импедансом ВШП за счет частичной компенсации реактивной составляющей импеданса ВШП. В этом случае значительная часть принятой ВШП энергии от ПАВ рассеивается на активной составляющей импеданса подключенного к ВШП, что и приводит к уменьшению коэффициента отражения.

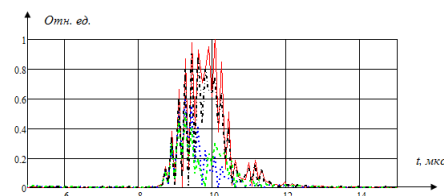


Рис. 4. Импульсные отклики датчика при погружении в раствор спирт-вода (2:1):

— конденсатор не погружен; --- конденсатор погружен на 4 мм;
 — конденсатор погружен на 8 мм; --- конденсатор погружен на 12 мм.

Глубина погружения, мм	0	4	8	12
Коэффициент отражения	0.4	0.25	0.2	0.38

Таблица 3. Раствор спирт-вода (2:1).

На рис. 5, а и в таблице 4 показана зависимость коэффициента отражения от глубины погружения измерительного конденсатора в бензин. Бензин является неполярной жидкостью и его диэлектрическая проницаемость равна 2. Поэтому при погружении измерительного конденсатора в бензин, когда при непогруженном конденсаторе наблюдается максимум коэффициента отражения, следует ожидать

слабого изменения коэффициента отражения. И действительно, как видно из этой таблицы коэффициент отражения незначительно меняется от 0,4 до 0,35.

На рис. 5,б и в таблице 5 показана зависимость коэффициента отражения от глубины погружения измерительного конденсатора в раствор бензина со спиртом, где содержится 2 части бензина и 1 часть спирта. Так как спирт имеет много большую диэлектрическую проницаемость, то влияние погружения измерительного конденсатора в раствор бензин–спирт (2:1) должно быть значительно сильнее, чем в предыдущем случае. В этом случае имеется хорошо выраженный минимум коэффициента отражения при глубине погружения измерительного конденсатора на 8 мм. Здесь коэффициент отражения равен 0,275 при погружении измерительного конденсатора на глубину 8 мм. Этот минимум можно объяснить также как и в случае раствора спирт–вода, где происходит частично согласование импеданса ВШП с подключаемой нагрузкой и часть энергии ПАВ, принятой отражательным ВШП, рассеивается на измерительном конденсаторе.



Рис. 5. Импульсные отклики датчика при погружении в бензин и раствор бензин–спирт (2:1):

— конденсатор не погружен; --- конденсатор погружен на 4 мм;
 --- конденсатор погружен на 8 мм; --- конденсатор погружен на 13 мм.

Глубина погружения, мм	0	4	8	13
Коэффициент отражения	0.4	0.4	0.275	0.425

Таблица 4. Бензин.

Глубина погружения, мм	0	5	9	13
Коэффициент отражения	0.4	0.35	0.425	0.45

Таблица 5. Раствор бензин-спирт (2:1).

На рис. 6 и в таблице 6 показана зависимость коэффициента отражения от глубины погружения измерительного конденсатора в раствор бензина со спиртом, где содержится 2 части бензина и 3 части спирта. Также как и в случае раствора бензина со спиртом в пропорции 2:1 при погружении конденсатора имеется минимум коэффициента отражения, причем в минимуме коэффициент отражения равен 0,35 при погружении измерительного конденсатора на глубину 5 мм. Это можно объяснить тем, что в данном растворе имеется большая часть спирта, что обуславливает значительное увеличение диэлектрической проницаемости. Поэтому минимум коэффициента отражения смещается в сторону уменьшения глубины погружения.

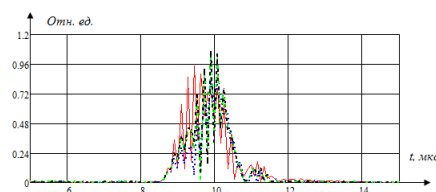


Рис. 6. Импульсные отклики датчика при погружении измерительного конденсатора в раствор бензин–спирт (2:3):

— конденсатор не погружен; --- конденсатор погружен на 4 мм;
 --- конденсатор погружен на 8 мм; --- конденсатор погружен на 13 мм.

Глубина погружения, мм	0	5	9	13
Коэффициент отражения	0.4	0.35	0.425	0.45

Таблица 6. Раствор бензин–спирт (2:3).

Таким образом, показано, что коэффициент отражения ПАВ от отражательно-го ВШП сильно зависит как от глубины погружения измерительного конденсатора в жидкость, так и от состава жидкости. Зная характер зависимостей коэффициента отражения от состава жидкостей, можно создать пассивные беспроводные датчики состава жидкости. Особенно это хорошо применять для обнаружения полярных примесей (с большой диэлектрической проницаемостью) в неполярных жидкостях (с диэлектрической проницаемостью близкой к единице). Для создания таких датчиков будут сняты калибровочные кривые, в которых приведена зависимость коэффициента отражения от состава жидкости при полном погружении измерительного конденсатора. По этим зависимостям можно вести непрерывный мониторинг состава прокалиброванных жидкостей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №10-08-00700-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Багдасарян А. С., Багдасарян С. А., Богданов М. И., Днепровский В. Г., Карпетян Г. Я., Петин Г. П. Беспроводный пассивный датчик на поверхностных акустических волнах для измерения физических величин // Труды XV международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. 2011. Т. 2, С. 21–25.

Bagdasaryan A. S., Bagdasaryan S. A., Bogdanov M. I., Dneprovskiy V. G., Karapetyan G. Ya., Petin G. P. *The study of the reflection coefficient of surface acoustic waves, depending on the type of liquids and their mixtures.* The reflectivity of surface acoustic waves of an interdigital transducer loaded by impedance is studied, depending on the type of liquids and their mixtures (water, alcohol, water–alcohol, water–gasoline). The impedance is designed as a parallel-plate capacitor with a gap in which the studied liquid is placed.

МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ ПОСЛЕ ОПЕРАЦИЙ ПО КОРРЕКЦИИ ЗРЕНИЯ

Бауэр С. М.* , Карамшина Л. А.* , Качанов А. Б. ,
Корников В. В.***

** Санкт-Петербургский государственный университет*

*** МНТК «Микрохирургия глаза», Москва*

В работах офтальмологов часто отмечается, что развитие рефракционной хирургии неизбежно приводит к необходимости создания новых физико-математических моделей роговицы.

В данной работе в программном пакете ANSYS моделируется измерение внутриглазного давления (ВГД) аппланационными тонометрами Гольдмана и Маклакова после операций по коррекции зрения. Роговица и склера представляются сопряженными трансверсально-изотропными оболочками с различными механическими свойствами. При этом роговица разбивается на несколько слоев, различных по толщине и упругим свойствам. Проводится сравнение показателей ВГД, получаемых после операций ЛАЗИК (LASIK) и ФРК (PRK). В обоих случаях используется один и тот же эксимерный лазер, но техники ФРК и ЛАЗИК существенно различаются. При фоторефракционной кератэктомии (ФРК) воздействию лазерного луча подвергается наружная поверхность роговицы. При операции ЛАЗИК передние слои роговицы после специального разреза приподнимаются, при этом обнажаются более глубокие слои, которые и моделируются эксимерным лазерным лучом. Таким образом, в результате операции ЛАЗИК образуется еще один дополнительный слой.

Расчеты показали, что после операций ЛАЗИК, наблюдаются более низкие показатели ВГД, чем показатели ВГД, получаемые после операции ФРК, что можно объяснить возникновением дополнительного слоя при операциях ЛАЗИК. Увеличение числа слоев в роговице снижает изгибную жесткость роговицы, и как следствие, снижает показатели ВГД, получаемые тонометрами Гольдмана и Маклакова.

Проведен также статистический анализ показателей ВГД, полученных для пациентов, которым были выполнены рефракционные операции ФРК и ЛАЗИК по коррекции миопии. Операция ФРК была выполнена на 50 глазах (I-я группа). ВГД измеряли до и через 3 месяца после ФРК. Данные ВГД для II-й группы выбирались из пациентов, перенесших операцию ЛАЗИК, таким образом, чтобы центральные толщины роговицы глаза и показатели ВГД до операции пациентов I-ой и II-ой групп были близки друг к другу. Статистический анализ показывает, что после рефракционных операций происходит снижение показателей ВГД, получаемых тонометрами Гольдмана и Маклакова. При этом после операций ЛАЗИК происходит большее снижение показателей ВГД, чем после операции ФРК.

Отметим, что при моделировании роговицы одним эквивалентным слоем, разницы в показателях ВГД после операций ФРК и ЛАЗИК не наблюдается.

1. Введение.

В настоящее время с развитием рефракционной хирургии установлено, что толщина роговицы в средней зоне и кривизна роговицы существенно влияют на показатели внутриглазного давления [1–3].

Вид операции	Показатель	До операций	После операций
ФРК	Центральная толщина роговицы глаза, мкм	$563 \pm 3,5$	$465 \pm 4,2$
	ВГД по Маклакову, мм рт. ст.	$19,4 \pm 1,4$	$19,3 \pm 3,4$
	ВГД по Гольдману, мм рт. ст.	$15,2 \pm 2,4$	$14,5 \pm 3,4$
ЛАЗИК	Центральная толщина роговицы глаза, мкм	$568 \pm 2,5$	$455 \pm 3,5$
	ВГД по Маклакову, мм рт. ст.	$19,3 \pm 1,5$	$18,5 \pm 2,5$
	ВГД по Гольдману, мм рт. ст.	$15,1 \pm 3,2$	$13,9 \pm 3,2$

Таблица 1. Показатели внутриглазного давления до и после рефракционных операций.

В табл. 1 представлены результаты статистического анализа показателей внутриглазного давления, полученных для пациентов I-ой и II-ой групп, которым были выполнены рефракционные операции ФРК и ЛАЗИК для коррекции миопии. Измерения внутриглазного давления проводились тонометрами Маклакова (10 г) и Гольдмана. Измерения срединной толщины роговицы, регистрируемые с систематической ошибкой прибора $\pm 5 \mu\text{м}$, были выполнены посредством ультразвукового пахиметра (Quantel medical BVI, France, карманная модель, тип BF, II класс). Средняя величина трех измерений срединной толщины роговицы ($\mu\text{м}$) использовалась для дальнейшего анализа.

Статистический анализ показывает, что после рефракционных операций происходит снижение показателей внутриглазного давления, измеренных тонометрами Гольдмана и Маклакова, при этом наблюдается различие данных показателей, получаемых после операций ЛАЗИК и ФРК, что может быть объяснено появлением дополнительного слоя, возникающего при срезе, так называемого лоскута (flap) при операциях ЛАЗИК.

Для того чтобы проанализировать влияние изменения толщины роговицы в центральной зоне на показатели внутриглазного давления при измерении тонометрами Гольдмана и Маклакова после операций по коррекции зрения ЛАЗИК и ФРК, рассматривается следующая модельная задача.

2. Постановка задачи.

Измерение внутриглазного давления тонометрами Маклакова и Гольдмана моделируется контактными задачами в программном пакете ANSYS.

Аналогично работам [4, 5] роговица и склера представляются сопряженными трансверсально-изотропными оболочками с разными диаметрами и с разными упругими свойствами (рис. 1). Роговица разбивается на четыре слоя: первый (внешний) слой отвечает механическим свойствам эпителия (L_1), второй — боуменовой мембране (L_2), третий — стромы (L_3), четвертый (внутренний) слой — свойствам десцементовой оболочки (L_4). Предполагается, что составная оболочка до нагружения заполнена несжимаемой жидкостью под давлением p .

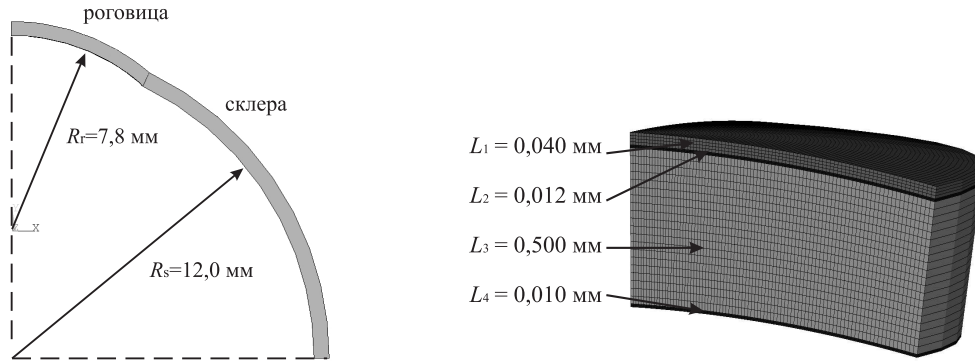


Рис. 1. Корнеосклеральная оболочка глаза моделируется сопряженными сферическими сегментами с разными диаметрами и с разными упругими свойствами.

Осредненные значения модулей упругости для всей роговицы в тангенциальном направлении E_i и в направлении толщины E'_i определяются из соотношений

$$E = \frac{(1 - \nu^2)}{\sum_{i=1}^n h_i} \left(\sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i \nu_i}{1 - \nu_i^2} \right), \quad E' = \frac{(1 - \nu'^2)}{\sum_{i=1}^n h_i} \left(\sum_{i=1}^n \frac{E'_i h_i \nu'_i}{1 - \nu_i'^2} \right), \quad (1)$$

где ν , ν' — осредненные коэффициенты Пуассона,

$$\nu = \sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i \nu_i}{1 - \nu_i^2} / \sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2}, \quad \nu' = \sum_{i=1}^n \frac{E'_i h_i \nu'_i}{1 - \nu_i'^2} / \sum_{i=1}^n \frac{E'_i h_i}{1 - \nu_i'^2}. \quad (2)$$

Соотношения (1), (2) позволяют оценить влияние многослойного строения роговицы на обобщенные параметры всей роговицы (толщину, модуль упругости и коэффициент Пуассона), следовательно, и на изменение показателей ВГД.

При измерении внутриглазного давления тонометрами Маклакова на роговицу глаза помещается груз с плоским основанием весом 5 — 10 г. Под действием груза роговица деформируется, при этом регистрируется диаметр площади контакта груза с роговицей.

Тонометр Гольдмана измеряет силу, которую необходимо приложить для сплющивания фиксированной центральной области роговой оболочки. Уплощенная область должна быть диаметром 3,06 мм, так как при такой зоне контакта нагрузка 0,1 г соответствует внутриглазному давлению, равному 1 мм рт. ст, таким образом, сила (г) умножается на десять и находится внутриглазное давление.

3. Результаты расчетов.

Чтобы оценить влияние дополнительного слоя, создаваемого при операциях ЛАЗИК, на показатели внутриглазного давления, роговица после операции ЛАЗИК моделируется пятью слоями, а после операции ФРК — четырьмя слоями. Предполагается, что изменение толщины роговицы в обоих случаях происходит на одну величину h . Для каждой серии расчетов проводилось сравнение полученных результатов с данными, полученными для однослойной роговицы с одним эквивалентным слоем.

На рис. 2, 3 представлены распределения контактных напряжений при измерении внутриглазного давления тонометрами Гольдмана и Маклакова (10 г) после операций ЛАЗИК и ФРК для корнеосклеральной оболочки, у которой модули упругости каждого слоя роговицы в направлении толщины оболочки в 20 раз меньше тангенциальных модулей. При этом модули упругости роговицы на порядок меньше, чем модули упругости склеры. Истинное внутреннее давление на представленных рисунках — 15 мм рт. ст. Глубина абляции лазера h составляет 172 мкм.

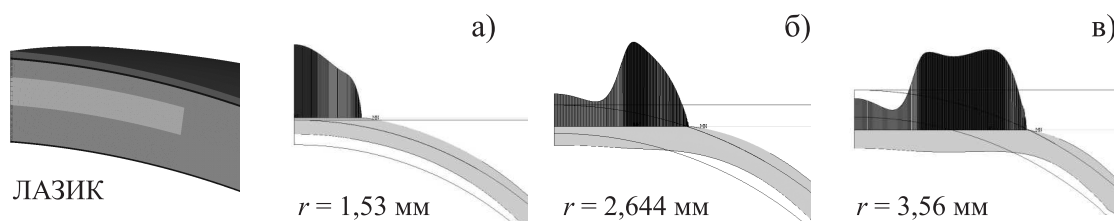


Рис. 2. Распределение контактных напряжений после операции ЛАЗИК при измерении внутриглазного давления: а — тонометром Гольдмана; б — тонометром Маклакова (груз 5 г); в — тонометром Маклакова (груз 10 г).

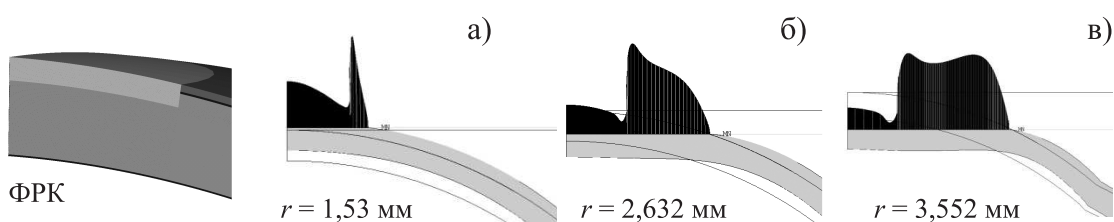


Рис. 3. Распределение контактных напряжений после операции ФРК при измерении внутриглазного давления: а — тонометром Гольдмана; б — тонометром Маклакова (груз 5 г); в — тонометром Маклакова (груз 10 г).

Численные результаты показали, что при моделировании роговицы одним эквивалентным слоем разница в показателях внутриглазного давления после операций ФРК и ЛАЗИК не наблюдается.

3. Выводы.

Проведенные исследования и результаты расчетов показывают, что после операций по коррекции зрения уменьшается изгибная жесткость роговицы и, как следствие, уменьшаются показатели внутриглазного давления, получаемые тонометрами Гольдмана и Маклакова.

Расчеты показали, что после операций ЛАЗИК наблюдаются более низкие показатели внутриглазного давления, чем после операции ФРК, что можно объяснить возникновением дополнительного слоя при операциях ЛАЗИК. Увеличение числа слоев в роговице снижает изгибную жесткость роговицы и, как следствие, показатели внутриглазного давления, измеренные тонометрами Гольдмана и Маклакова.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аветисов С. Э., Новиков И. А., Бубнова И. А., Антонов А. А. Исследование биомеханических свойств роговицы после эксимер-лазерных вмешательств // IV Российский общенациональный офтальмологический форум: сб. тр. (Москва, 5–7.10.2011). 2011. С. 22–25.
- [2] Лебедев И. О., Яворский А. Е. Влияние рефракционных операций на уровень офтальмотонуса у пациентов с миопией // Российский офтальмологический журнал. 2008. № 2. С. 23–25.
- [3] Тарута Е. П., Еричев В. П., Ларина Т. Ю. Контроль уровня ВГД после кераторефракционных операций // Биомеханика глаза–2004: сб. тр. IV семинара. М., 2004. С. 120–122.
- [4] Бауэр С. М., Качанов А. Б., Семенов В. Н., Слесорайтите Е. О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления при измерении ВГД аппланационными методами // Биомеханика глаза–2007: сб. тр. конф. М., 2007. С. 119–124.
- [5] Карамшина Л. А. Механические модели аппланационной тонометрии с учетом многослойности роговицы // Российский журнал биомеханики. 2011. № 3. С. 37–44.
- [6] Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. С. 49–51.
- [7] Иомдина Е. Н. Механические свойства тканей глаза человека // Современные проблемы биомеханики. 2006. Вып. 11. С. 183–200.
- [8] Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф. Прикладная теория пластин и оболочек. СПб.: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 1996. 278 с.

Bauer S. M., Karamshina L. A., Kachanov A. B., Kornikov V. V. *Intraocular pressure measurement models after refractive surgery.* The measurements of intraocular pressure (IOP) by Goldmann and Maklakov (weight 5, 10 g) applanation tonometers after refractive surgery are modeled in the software package ANSYS. The cornea is considered as multilayer structure. The IOP readings obtained by Goldmann and Maklakov tonometers after refractive surgery LASIK and PRK are compared. The cornea and sclera are modeled as transversely-isotropic conjectured spherical shells with different biomechanical properties. The cornea splits into several layers of different thickness and elastic properties.

О РЕЖИМАХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Бекежанова В. Б.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В рамках модели Обербека–Буссинеска построено точное решение, содержащее независимый параметр и описывающее стационарное течение жидкости в вертикальном цилиндре. В уравнениях свободной конвекции учтены объемные источники тепла и квадратичная зависимость плотности жидкости от температуры. Исходная задача сведена к операторному уравнению с сильно нелинейным оператором и доказана его разрешимость. Предложена итерационная процедура, позволяющая найти три класса решений, формирующих различные структуры течений в цилиндре, в зависимости от значений параметра. Исследована линейная устойчивость всех возникающих режимов.

1. Постановка задачи и вид решения. Пусть цилиндр радиуса R и высоты l (рис. 1) заполнен несжимаемой жидкостью с постоянными вязкостью ν , температуропроводностью χ и теплопроводностью k . Верхняя ($z = 0$) и нижняя ($z = l$) границы цилиндра предполагаются твердыми.

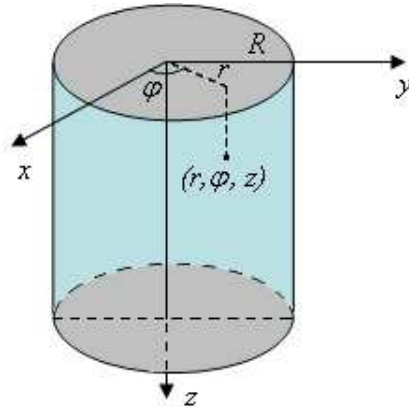


Рис. 1. Область течения.

Движение жидкости описывается уравнениями Обербека–Буссинеска [1]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \nabla \theta = \chi \Delta \theta + F_w(z, t), \\ \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} \right) &= - \nabla p + \operatorname{div} (2\mu D) + \rho \vec{g}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\vec{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости, θ — температура, p — давление, μ — динамическая вязкость, D — тензор скоростей деформации векторного поля $\vec{v}$, $F_w(z) = \sigma \varepsilon R_b \exp(-\varepsilon z)$ — общая энергетическая функция теплового источника.

В случае объемного поглощения (проникновения солнечной радиации в жидкую среду) F_w определяется параметрами: σ — отношение интенсивности солнечной радиации к радиационному балансу R_b на поверхности жидкости, $\varkappa$ — показатель поглощения [2]. В качестве уравнения состояния используется квадратичная зависимость $\rho = \rho_0(1 - \alpha(\theta - \theta_0)^2)$, где ρ_0 — максимальное значение плотности, которое достигается при температуре инверсии θ_0 (температура аномалии теплового расширения жидкости); α — коэффициент теплового расширения. В качестве входных данных выберем значения физических параметров задачи, характерные для озера Байкал: $l = 730$ м (средняя глубина озера), $\nu = 1.45 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\chi = 1.32 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $k = 0.558$ Вт/(м·К), $\rho_0 = 999.972$ кг/м³, $\theta_0 = 277.13$ К, $\alpha = 8.57 \cdot 10^{-6}$ К⁻².

Решение, описывающее стационарное течение жидкости в цилиндре большого радиуса будем искать в следующем виде

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u, v, w), \quad u = u(z)r, \quad v = 0, \quad w = w(z), \\ \theta &= \theta(z), \quad p = p(z) + \frac{a_1}{2} r^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где u — радиальная компонента скорости, v — азимутальная, w — осевая, параметр a_1 подлежит определению. Тогда в безразмерных переменных уравнения тепловой конвекции (1) в цилиндрических координатах примут вид

$$\begin{aligned} 2u + w_z &= 0, \quad u^2 + wu_z = u_{zz} + a, \\ ww_z &= p_z + w_{zz} + \text{Ga} - \text{Gr}(\theta - 1)^2, \\ \theta_z w &= \frac{1}{\text{Pr}} \theta_{zz} + f_1 F_1(z). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $a = a_1 l^4 / \nu^2$, $\text{Ga} = gl^3 / \nu^2$ — число Галилея, $\text{Gr} = g\alpha\theta_0^2 l^3 / \nu^2$ — число Грасгофа, $\text{Pr} = \nu / \chi$ — число Прандтля, $f_1 = \sigma \varkappa_1 R_b l / (k\theta_0)$ — параметр тепловыделения, $\varkappa_1 = \varkappa l$ и $F_1(z) = \exp(-\varkappa_1 z)$ — безразмерные показатель поглощения и функция теплового источника соответственно.

На твердых границах заданы условия:

$$\begin{aligned} z = 1 : \quad u(1) &= w(1) = 0, \quad \theta(1) = \theta_1, \\ z = 0 : \quad u(0) &= w(0) = 0, \quad \theta_z(0) = q_1 Q, \end{aligned} \quad (4)$$

где $q_1 = Q_0 l / k\theta_0$, Q_0 , Q — характерный и безразмерный потоки тепла. При расчетах учитываются средние значения потоков тепла Q и радиационного баланса в период, когда озеро имеет ледяной покров (декабрь–апрель) [3, 4].

2. Операторное уравнение и определение независимого параметра.

Задача (3), (4) разделяется на последовательно решаемые задачи для u , w , p , θ . Основной из них является краевая задача для функции $u(z)$:

$$u_{zz} + 2u_z \int_0^z u(z) dz - u^2 + a = 0, \quad 0 < z < 1, \quad (5)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \int_0^1 u(z) dz = 0. \quad (6)$$

Умножим уравнение (5) на $\exp\left(2 \int_0^z u(\tau) d\tau\right)$ и проинтегрируем, учитывая граничное условие $u(0) = 0$, получим

$$u(z) = \int_0^z \left[\int_0^\sigma (u^2(p) - a) \exp\left(2 \int_0^p u(\tau) d\tau\right) dp + D \right] \times \exp\left(-2 \int_0^\sigma u(\tau) d\tau\right) d\sigma. \quad (7)$$

Граничное условие $u(1) = 0$ позволяет определить D как нелинейный функционал от решения. Обозначим Au правую часть (7). Итак, краевая задача (5), (6) для функции $u(z)$ сведена к операторному уравнению с сильно нелинейным оператором A .

Замечание 1. Можно показать, что оператор A удовлетворяет теореме Шаудера в замкнутом шаре $\overline{S}(0, r_0)$ пространства $C[0, 1]$, откуда и следует разрешимость полученного уравнения.

Умножим уравнение (5) на u и проинтегрируем с учетом условий (6). Тогда очевидно, что любое решение задачи (5), (6) обладает свойством

$$2 \int_0^1 u^3(z) dz + \int_0^1 u_z^2(z) dz = 0. \quad (8)$$

С другой стороны, интегрируя (5) с учетом (6)

$$a = u_z(0) - u_z(1) + 3 \int_0^1 u^2(z) dz. \quad (9)$$

Построим следующую итерационную процедуру:

Шаг 1. Выбирается функция $u_0(z)$, удовлетворяющая условиям (6) и (8).

Шаг 2. Из (9) определяется нулевое приближение параметра a_0 .

Шаг 3. Из (5) находится приближение

$$u_{1zz} = u_0^2 - 2u_{0z} \int_0^z u_0(z) dz - a_0,$$

удовлетворяющее граничным условиям (6).

Далее шаги 2, 3 повторяются до достижения заданной точности.

В качестве нулевых приближений u_0 , позволяющих с помощью предложенной итерационной процедуры определить три различных значения параметра a , были выбраны функции

$$\begin{aligned} u_0^1(z) &= 0.216(-10z^4 + 10z^3 + 3z^2 - 3z), \\ u_0^2(z) &= -2z^5 + 5z^4 - 4.42z^3 + 1.63z^2 - 0.21z, \\ u_0^3(z) &= z^5 - 2.5z^4 + 4.1z^3 - 3.65z^2 + 1.05z. \end{aligned} \quad (10)$$

Соответствующие значения параметра $a^1 = -7.341 \cdot 10^{-6}$, $a^2 = 9.12 \cdot 10^{-7}$, $a^3 = 12.0168$.

Замечание 2. Проводились вычисления и на других классах начальных приближений $u_0(z)$, в частности, рассматривались полиномы более высоких порядков, тригонометрические и рациональные функции. Однако, решение всегда сходилось к одному из указанных значений a^j ($j = 1, 2, 3$).

Далее последовательно решаются задачи для функций $w(z)$, $\theta(z)$, $p(r, z)$. Распределения скоростей $u(z)$ и $w(z)$ приводятся на рис. 2.

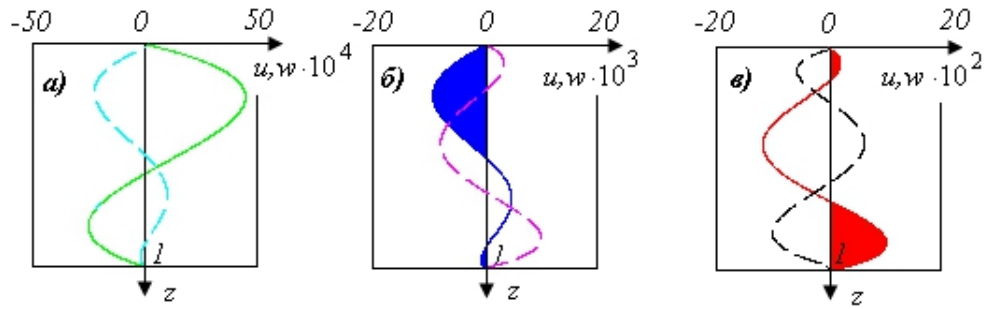


Рис. 2. Зависимость радиальной (u , сплошная линия) и осевой (w , штриховая) компонент скорости от z : а — $a^1 = -7.341 \cdot 10^{-6}$; б — $a^2 = 9.12 \cdot 10^{-7}$; в — $a^3 = 12.0168$.

Видно, что в зависимости от значений параметра меняется структура течения в радиальном направлении: при отрицательном $a = a^1$ течение состоит из двух встречных потоков; при положительных $a = a^2, a^3$ в основном течении появляются дополнительные потоки (на рис. 2 выделены закрашенными областями).

3. Задача об устойчивости. Для исследования устойчивости полученных классов течений рассмотрим малые возмущения скорости $\vec{U} = (U_j, V_j, W_j)$, температуры Θ_j и давления P_j , пропорциональные $\exp(i(\mu_1 r + \mu_2 \varphi - C\tau))$. Здесь $\mu_1 = 2\pi/\lambda$ — радиальное волновое число, λ — безразмерная длина волны возмущения, $\mu_2 = 0, 1, 2, \dots$ — азимутальное, $C = C_r + iC_i$ — комплексный декремент, показывающий затухает ($C_i < 0$) возмущение с волновым вектором (μ_1, μ_2) или растет ($C_i > 0$). Значения $C = 0$ соответствуют границе устойчивости течения. При $C_i = 0$ возникают монотонные возмущения, а при $C_i \neq 0$ — колебательные с безразмерной частотой C_i .

Линеаризация исходных уравнений вблизи стационарного решения (2) приводит к спектральной задаче для амплитуд. Расчеты показывают, что в рассмотренной задаче критической является плоская ($\mu_2 = 0$) колебательная ($C_i \neq 0$) мода. Нейтральные кривые $\text{Gr}(\mu_1)$ представлены на рис. 3. Кривые 1 и 3 соответствуют наиболее опасной моде, в этом случае неустойчивость связана с развитием тепловых волн. Кривые 2 и 4 отвечают гидродинамическим модам, кризис связан с нарастанием гидродинамических возмущений. При отрицательном значении параметра $a = a^1$ нейтральные кривые имеют вид 3, а и гидродинамическая неустойчивость проявляется в виде медленно дрейфующих вихрей на границе встречных потоков. При положительных $a = a^2, a^3$ происходит перестройка нейтральных кривых: ветви нейтральных кривых соединяются через замкнутую петлю, при этом имеют место оба механизма неустойчивости.

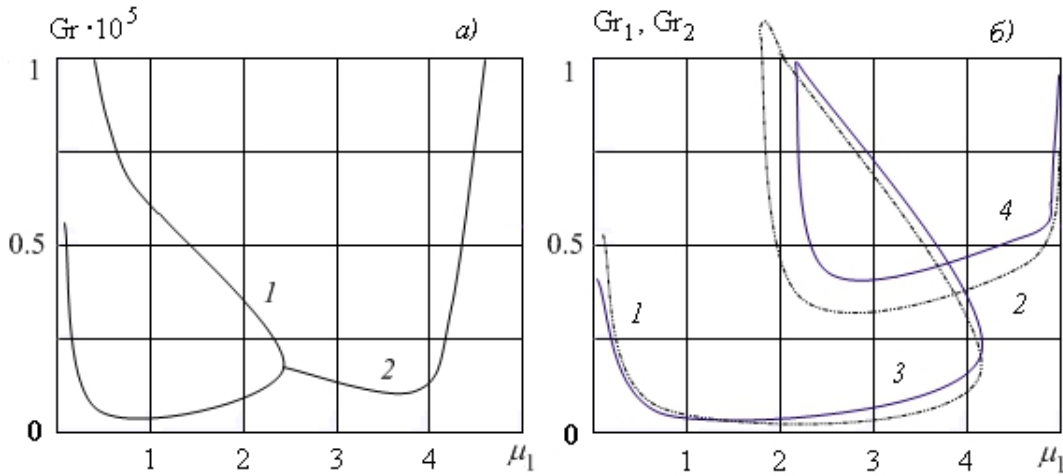


Рис. 3. Нейтральные кривые $Gr(\mu_1)$: а — $a^1 = -7.341 \cdot 10^{-6}$; б — кривые 1, 2 — $a^3 = 12.0168$, $Gr_1 = Gr \cdot 10^5$; 3, 4 — $a^2 = 9.12 \cdot 10^{-7}$, $Gr_2 = Gr \cdot 10^6$.

Автор благодарит Андреева В. К. за помощь в работе и полезные дискуссии.

Работа поддержана РФФИ, грант 11-01-00283 и СО РАН, интеграционный проект 38.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
- [2] Красс М. С., Мерзликин В. Г. Радиационная теплофизика снега и льда. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 261 с.
- [3] Shimaraev M. N., Verbolov V. I., Granin N. G., Sherstyankin P. P. Physical limnology of Lake Baikal: a review. Irkutsk–Okayama. 1994. 80 p.
- [4] Верболов В. И., Сокольников М. Н., Шимараев М. Н. Гидрометеорологический режим и тепловой баланс озера Байкал. М.–Л.: Наука, 1965. 373 с.

Bekezhanova V. B. *On regimes of the convective flows of viscous fluid in the vertical cylinder and stability of the streams.* Exact solution containing independent parameter and describing stationary fluid flow in the vertical cylinder in the framework of the Oberbeck–Boussinesq model was obtained. Volume heat sources and quadratic dependence of fluid density on temperature were taken into account in the free convection equations. The original problem was reduced to the operator equation with a strongly nonlinear operator and solvability of the equation was proved. The iterative procedure which allows to find three classes of solutions, forming different structures of flow in cylinder in dependence on parameter values, was suggested. Linear stability of all arising regimes was investigated.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОРИЕНТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ И МОДЕЛИ ЗАПЕРТОЙ СТЕНКИ ДЛЯ ФОРМУЛИРОВКИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

Белоконь А. В., Радченко М. Ю., Скалиух А. С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Представлена комбинированная модель, описывающая нелинейный отклик поликристаллических сегнетоэлектрических материалов на воздействие интенсивных электрических полей и механических напряжений в необратимых процессах поляризации и деформирования. Методами двухуровневой механики сплошной среды получены определяющие соотношения в инкрементальной форме. Предложен численный метод их решения. Построены деформационные и диэлектрические петли гистерезиса. Отмечены достоинства и недостатки предложенной модели.

1. Предмет исследования. Поликристаллические сегнетоэлектрики являются в настоящее время наиболее перспективными активными материалами и привлекают к себе внимание конструкторов и технологов с целью создания микроминиатюрных сенсоров и актуаторов для генерации и обнаружения широкого спектра сигналов. Многие из таких датчиков используют нелинейные свойства сегнетоэлектрических элементов, а моделирование протекающих в них процессов сопряжено с большими математическими сложностями. В связи с этим приходится применять численные методы и использовать конечно-элементные пакеты. А одним из основных пунктов конечно-элементного исследования, является формулировка определяющих соотношений, которые учитывают все тонкости нелинейного поведения. Данная работа посвящена проблеме построения нелинейных определяющих соотношений поликристаллических сегнетоэлектриков.

Отметим, что попытки математического моделирования нелинейных свойств осуществлялись неоднократно многими исследователями. Однако до сих пор не выработано общепринятой достаточно универсальной модели, способной описать в трехмерном случае возникающие проблемы. Так в работах Landis C. M., McMeeking R. C., Huber J. E., Kamlah M., Fleck N. A. используются модели теории пластического течения, применительно к процессам поляризации и деформирования. Показано, что этот подход лишь качественно описывает протекающие явления. Дудкевич В. П., Zhang Z. K., Hwang S. C., Chen X., Huo Y., Lynch C. S. предложили модификации моделей ориентационной поляризации. Их недостаток заключается в игнорировании взаимного влияния доменов друг на друга. Исследователи Турик А. В., Mayergoyz, Damjanovic D., Moroz Y. I., Zirka S. E., Fuzi J., Kadar G., Cardelli E. описывали процесс поляризации одномерными моделями Преисаха. Модель теории запертой стенки была разработана Jiles D. C., Atherton D. L. и перенесена в сегнетоэлектричество Smith R. C., Hom C. L., Ounies Z., Massad J. E. В настоящей работе нами развивается именно эта модель. Она переносится на трехмерный случай. А та часть модели, где используются статистические методы,

заменяется на модель ориентационной поляризации. Таким образом, исследование состоит из трех основных частей. В первой части выводится соотношение для предельно возможной поляризации и деформации на основе модели ориентационной поляризации с энергетическим критерием переключений. Затем выводится энергетическое соотношение, позволяющее учесть и механическое и электрическое влияние соседних доменов на процесс переключения доменов. В третьей части получены инкрементные уравнения и предложен численный метод их решения.

2. Ориентационная модель. Рассматривается частица исследуемого материала, содержащая в себе большое количество доменов, обозначим это число N . Выберем в пространстве произвольную точку и поставим в соответствие каждому домену единичный вектор, сонаправленный с вектором спонтанной поляризации домена, с началом в этой точке. Приложенное электрическое поле и механические напряжения могут переключить домен. Будем рассматривать керамику со структурой сегнетоэлектрика типа перовскита, тогда новое положение домена не может быть произвольным, а будет строго регламентировано его кристаллической структурой. Введем энергетический критерий переключения, согласно которому переключение наступает тогда, когда энергия домена $U = -\mathbf{p}_s \cdot \mathbf{E} - \epsilon_s : \boldsymbol{\sigma}$ в заданных полях $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ превышает некоторый пороговый уровень U_c . Новое положение осей домена такое, что его энергия в данных полях будет иметь наименьшее значение. Алгоритм процесса прост. Задается совокупность N троек единичных векторов, связанных с кристаллографическими осями каждого домена. Для неполяризованной керамики концы единичных векторов $\mathbf{c}$, соответствующих направлению спонтанной поляризации, равномерно расположены на сфере. Две другие оси $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ лежат в плоскости, перпендикулярной этому вектору, а их ориентация определяется с помощью датчика случайных чисел. Последовательно перебирая векторы на единичной сфере, и проверяя условие переключения, вычисляем новое положение осей домена. В итоге подсчитывается результирующая поляризация и деформация

$$\mathbf{P}_\infty = \frac{p_s}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{c}_k, \quad \epsilon_\infty = \frac{\epsilon_s}{2N} \sum_{k=1}^N (2\mathbf{c}_k \otimes \mathbf{c}_k - \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{a}_k - \mathbf{a}'_k \otimes \mathbf{a}'_k).$$

3. Обобщение модели Джилла–Атертона. Получение основных уравнений для сплошной среды первого уровня основано на методах усреднения уравнений второго уровня, которые получаются при выводе энергетического баланса. С этой целью подсчитывается энергия, необходимая для слома механизмов закрепления доменной стенки. Далее вычисляется работа механических напряжений и электрического поля в реальном процессе деформирования и поляризации. Устанавливается соотношение для работы механических напряжений и электрического поля в идеальном процессе деформирования и поляризации. Энергетический баланс формулируется следующим образом: работа, необходимая для слома механизмов закрепления доменной стенки в реальном процессе деформирования и поляризации равна работе в идеальном случае плюс энергия, необходимая для слома механизмов затухания. Этот вывод отдельно для сегнетоэлектриков и отдельно для сегнетоэластиков был рассмотрен в [1, 2]. Объединяя оба подхода, и опуская промежуточные математические выкладки, запишем энергетический баланс в виде

следующего равенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\varepsilon_0 : d\sigma^{ef} - \mathbf{P}_0 \cdot d\mathbf{E}^{ef}) d\Omega &= \int_{\Omega} (-\varepsilon_{\infty} : d\sigma^{ef} - \mathbf{P}_{\infty} \cdot d\mathbf{E}^{ef}) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{k_1 d\varepsilon_0 : d\sigma^{ef}}{d\sigma_3^{ef} - d\sigma_1^{ef}} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{k_2 d\mathbf{P}_0 \cdot d\mathbf{E}^{ef}}{|d\mathbf{E}^{ef}|} d\Omega, \end{aligned}$$

из которого следует

$$-\varepsilon_0 = -\varepsilon_{\infty} + k_1 \frac{d\varepsilon_0}{d\sigma_3^{ef} - d\sigma_1^{ef}}, \quad -\mathbf{P}_0 = -\mathbf{P}_{\infty} + k_2 \frac{d\mathbf{P}_0}{|d\mathbf{E}^{ef}|}.$$

Здесь Ω — произвольный объем; $\varepsilon_0, \mathbf{P}_0$ — остаточная поляризация и остаточная деформация; $\varepsilon_{\infty}, \mathbf{P}_{\infty}$ — предельная (наиболее достижимая) остаточная поляризация и остаточная деформация; $\sigma^{ef} = \sigma + \alpha\varepsilon_0, \mathbf{E}^{ef} = \mathbf{E} + \beta\mathbf{P}_0$ — эффективные поля механических напряжений и электрического поля; $\sigma, \mathbf{E}$ — тензор механических напряжений и электрического поля; $d\sigma_3^{ef}, d\sigma_1^{ef}$ — главные значения тензора приращений эффективных напряжений; α, β, k_1, k_2 — константы, подлежащие определению. Полученную систему уравнений можно рассматривать как систему определяющих соотношений в приращениях относительно остаточных деформаций и остаточной поляризации. Определим в дополнение к этому полную деформацию и полную поляризацию

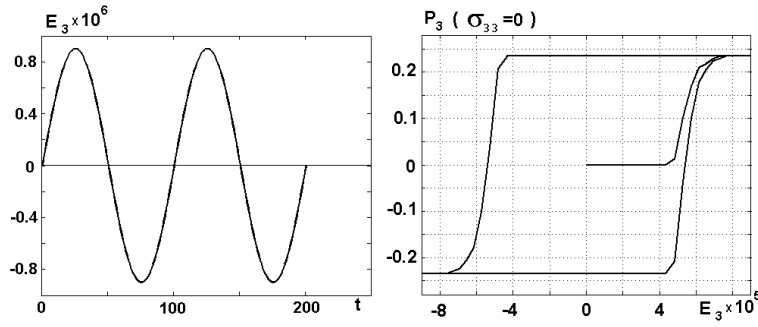
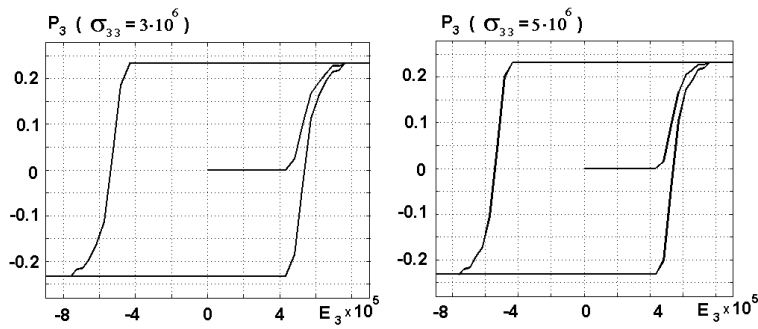
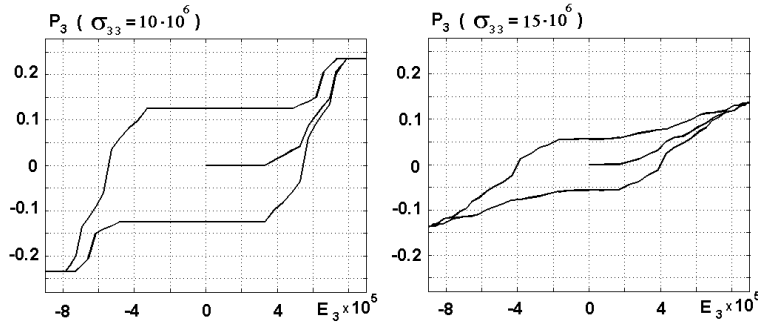
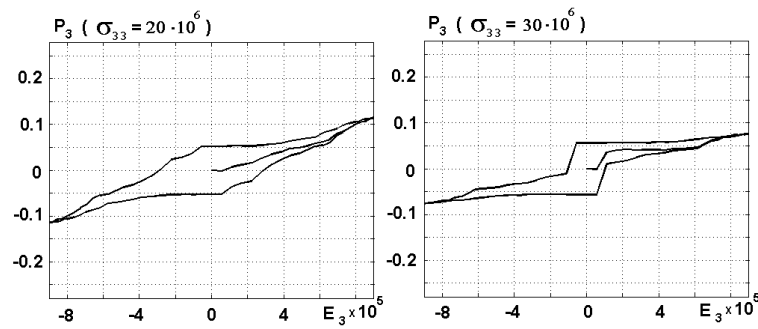
$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_e, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_e, \quad \varepsilon_e = \varepsilon_{\infty} - \varepsilon_0 + \gamma_1 \sigma, \quad \mathbf{P}_e = \mathbf{P}_{\infty} - \mathbf{P}_0 + \gamma_2 \mathbf{E},$$

где $\varepsilon_e, \mathbf{P}_e$ — упругая деформация и индуцированная поляризация. Все введенные в модель постоянные должны быть подобраны из условия совпадения рассчитанных и экспериментальных данных.

4. Численные эксперименты. Для вычисления приращений остаточных параметров воспользуемся итерационной схемой метода последовательных приближений. Пусть переход из одного состояния в другое определяется приращением $d\varepsilon_0^{(i-1)}, d\mathbf{P}_0^{(i-1)}$, которые определим указанным методом, номером m и следующей схемой:

$$\begin{aligned} (d\varepsilon_0^{(i-1)})_m &= \frac{(d\sigma_3^{ef(i-1)})_{m-1} - (d\sigma_1^{ef(i-1)})_{m-1}}{k_1} \left((\varepsilon_{\infty}^{(i-1)} - \varepsilon_0^{(i-1)}) \right)_{m-1}, \\ (\varepsilon_0^{(i-1)})_m &= (\varepsilon_0^{(i-1)})_{m-1} + (d\varepsilon_0^{(i-1)})_m, \\ (d\mathbf{P}_0^{(i-1)})_m &= \frac{|(d\mathbf{E}^{ef(i-1)})_{m-1}|}{k_2} \left(\mathbf{P}_{\infty}^{(i-1)} - \mathbf{P}_0^{(i-1)} \right)_{m-1}, \\ (\mathbf{P}_0^{(i-1)})_m &= (\mathbf{P}_0^{(i-1)})_{m-1} + (d\mathbf{P}_0^{(i-1)})_m. \end{aligned}$$

Рассмотрим одновременное воздействие электрического поля и механических напряжений. Электрическое поле имеет постоянное направление и изменяется по гармоническому закону, как показано на рис. 1. Механическое напряжение имеют постоянное значение осевого сжатия вдоль направления поля. Была проведена

Рис. 1. Электрическое поле и диэлектрическая петля гистерезиса при $\sigma = 0$ Н/м².Рис. 2. Диэлектрическая петля гистерезиса при $\sigma = 3 \cdot 10^6$ Н/м² и $\sigma = 5 \cdot 10^6$ Н/м².Рис. 3. Диэлектрическая петля гистерезиса при $\sigma = 10 \cdot 10^6$ Н/м² и $\sigma = 15 \cdot 10^6$ Н/м².Рис. 4. Диэлектрическая петля гистерезиса при $\sigma = 20 \cdot 10^6$ Н/м² и $\sigma = 30 \cdot 10^6$ Н/м².

серия 7 экспериментов, в которых механические напряжения сжатия увеличивались от 0 до $30 \cdot 10^6$ Н/м². На рис. 1 изображена диэлектрическая петля гистерезиса при отсутствии сжимающих напряжений. Далее, на рис. 2 изображена та же петля, но при воздействии малого сжимающего напряжения. Как видно, напряжения до $10 \cdot 10^6$ Н/м² не оказывают заметного влияния на эту петлю. Ситуация резко меняется как только механические напряжения увеличиваются до величины $15 \cdot 10^6$ Н/м² и выше. Это объясняется тем, что электрическое поле заставляет домены выстраиваться по полю, а механические напряжения их поворачивают перпендикулярно полю. Причем, чем больше сжимающие напряжения, тем меньшая часть доменов поворачивается по направлению электрического поля, что видно из рис. 3–4.

5. Итоги и выводы. В работе рассмотрена новая модель деформирования и поляризации поликристаллических сегнетоэлектрических материалов. В трехмерной постановке рассмотрены нелинейные процессы при одновременном воздействии электрического поля и механических напряжений. Численно установлено, что основной вклад в итоговую поляризацию и деформацию вносит модель ориентационной поляризации. Наблюдается качественный эффект уменьшения результирующей поляризации, когда на тело воздействуют механические сжимающие напряжения достаточной интенсивности. Модель может быть использована в конечно-элементных пакетах в качестве инкрементных определяющих соотношений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00829-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белоконь А. В., Скалиух А. С. Математическое моделирование необратимых процессов поляризации. М.: Физматлит, 2010. 328 с.
- [2] Skaliukh A. S. «Modeling of Polarization of the Polycrystalline Ferroelectrics» in Piezoceramic materials and devices. Ed. I. A. Parinov. NOVA Publishers, N.-Y., Chapter 2, 2012. Pp. 55–104.

Belokon A. V., Radchenko M. Y., Skaliukh A. S. *Using the orientation model and model of the locked wall for the formulation of constitutive relations polycrystalline ferroelectrics.* Combined model describing the nonlinear response of polycrystalline ferroelectric materials in strong electric fields and mechanical stresses in the irreversible processes of polarization and deformation is presented. The constitutive equations were obtained through the use of two-level methods of continuum mechanics and presented in incremental form. A numerical method was developed for solving them and dielectric and deformation hysteresis loops were built. The advantages and disadvantages of constructed model were noted.

РАСЧЕТ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРИКОНТУРНОЙ ЗОНЕ ВЫРАБОТКИ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ АНКЕРАМИ

Бобылев Д. Е., Масько Л. В.

Криворожский национальный университет

Разработаны методы расчета пространственного напряженно-деформированного состояния породного массива вокруг выработок, закрепленных анкерной крепью. Выявлены закономерности распределения пространственного напряженного состояния в закрепленном анкерами массиве. Установлены функциональные зависимости пространственного распределения коэффициента упрочнения приконтурного массива пород, определены размеры условных зон разрушения, образующихся вокруг выработок.

1. Введение. Анкерная крепь в настоящее время является одним из наиболее эффективных способов поддержания горных выработок. Особенность анкерной крепи состоит в том, что она позволяет максимально эффективно использовать несущую способность вмещающих пород, что значительно снижает материалоемкость и стоимость крепи. В настоящее время анкерная крепь широко применяется при строительстве подземных сооружений. Проектированию и расчету анкерной крепи посвящены работы ученых В. В. Васильева, В. М. Волжского, Р. Ю. Завьялова, Н. С. Конокотова, Г. И. Кравченко, Н. И. Мельникова, В. М. Рогинского, М. А. Розенбаума, В. Н. Семевского, О. В. Тимофеева, В. Л. Трушко, А. П. Широкова и многих других.

Основные методики определения параметров крепи являются результатами экспериментальных исследований и аналитических расчетов с помощью плоских геомеханических моделей. Эти модели не совсем адекватны реальным физическим процессам в массиве. Во первых, они не позволяют получить достоверную картину напряженного состояния в пространстве между анкерами, во вторых, учитывают только две компоненты напряжений, что в свою очередь вносит дополнительную неточность. Для преодоления этих недостатков необходимо разработать методику расчета параметров анкерной крепи на основе пространственной геомеханической модели. Имеющиеся исследования пространственного взаимодействия анкера и породного массива носят частный характер и не позволяют определить рациональные параметры крепи.

2. Постановка задачи. Для нахождения напряжений вызванных работой системы анкеров, с учетом их взаимного влияния, используется расчетная схема, приведенная на рис. 1. Напряжения от сил P_1 и P_2 (P_1 — сила действующая на контуре выработки; P_2 — сила действующая в глубине массива) — определены соответственно с использованием решения задач Буссинеска и Миндлина [1] для упругого изотропного линейно-деформируемого полупространства:

$$\sigma_x^{P_1} = \frac{3 P_1}{\pi} \left[\frac{zx^2}{R^5} + \frac{1 - 2\mu}{3} \left(\frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{x^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right) \right]; \quad (1)$$

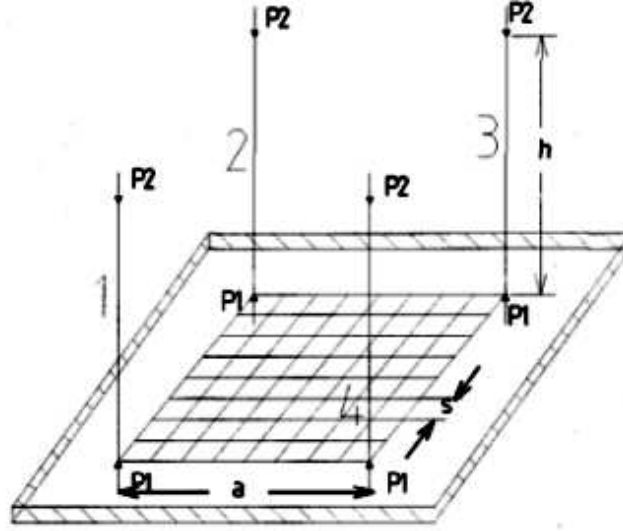


Рис. 1. Расчетная схема.

$$\sigma_y^{P1} = \frac{3 P1}{\pi} \left[\frac{zy^2}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left(\frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{y^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right) \right]; \quad (2)$$

$$\sigma_x^{P1} = \frac{3 P1}{\pi} \frac{z^3}{R^5}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{P2} = & \frac{P2}{8\pi(1-\mu)} \left[\frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_1^3} - \frac{3y^2(z-h)^3}{R_1^5} + \right. \\ & + \frac{(1+2\mu)3(z-h) - 4\mu(z+h)}{R_2^3} - \frac{3(3-4\mu)y^2(z-h)}{R_2^5} - \\ & - \frac{6h(z+h)(1-2\mu)z - 2\mu h}{R_2^5} - \frac{30hy^2z(z+h)}{R_2^7} - \\ & \left. - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+h)} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{x^2}{R_2^2} \right) \right]; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{P2} = & \frac{P2}{8\pi(1-\mu)} \left[\frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_1^3} - \frac{3y^2(z-h)^3}{R_1^5} + \right. \\ & + \frac{(1+2\mu)3(z-h) - 4\mu(z+h)}{R_2^3} - \frac{3(3-4\mu)x^2(z-h)}{R_2^5} - \\ & - \frac{6h(z+h)(1-2\mu)z - 2\mu h}{R_2^5} - \frac{30hx^2z(z+h)}{R_2^7} - \\ & \left. - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+h)} \left(1 - \frac{y^2}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{y^2}{R_2^2} \right) \right]; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{P2} = & \frac{P2}{8\pi(1-\mu)} \left(\frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_2^3} - \frac{3(z-h)^3}{R_1^5} - \right. \\ & \left. - \frac{3(3-4\mu)z(z+h)^2 - 3h(z+h)(5z-h)}{R_2^5} - \frac{30hz^2(z+h)}{R_2^7} \right). \quad (6) \end{aligned}$$

3. Методика решения задачи. Расчет компонентов напряжения производится в расчетных точках, расположенных с определенным шагом по горизонтали и вертикали, достаточным для прослеживания изменений значений компонентов напряжения в закрепленном анкерами объеме пород. Для определения значений напряжений, вызванных анкерами 2, 3, 4, необходимо заменить переменные xx и yy в выражениях (1)–(6), а также в выражениях для R , R_1 , R_2 следующим образом:

для анкера 2: $yy \rightarrow yy - aa$;

для анкера 3: $x \rightarrow x - aa$; $yy \rightarrow yy - aa$;

для анкера 4: $x \rightarrow x - aa$.

Для учета влияния соседних анкеров производится суперпозиция напряжений. Полученный при расчете трехмерный массив M_a значений компонентов напряжений от одного анкера имеет размерность $(h_a/s_h) \times (a/s) \times (a/s)$, где h_a — активная длина анкера (расстояние между точками приложения сил $P1$ и $P2$ на рис. 1), s_h — расстояние между расчетными точками массива по вертикали, вдоль оси Z , a — шаг сетки штангования, s — расстояние между расчетными точками по горизонтали, вдоль осей X и Y . Произведен расчет поля напряжений в области, ограниченной четырьмя соседними анкерами, (согласно расчетной схеме) при различных параметрах анкерной крепи. Значения напряжений, обусловленных натяжением одного анкера, рассчитаны в области $h_a \times a \times a$, обозначенной на расчетной схеме. Получив массивы M_i значений напряжений от каждого отдельного анкера для указанной области, производим их суммирование. Полученный массив значений $M = \sum M_i$ отражает напряженное состояние массива пород в области $h_a \times a \times a$, обусловленное натяжением четырех соседних анкеров. Полученные значения компонентов напряжений организуются в массив M_0 , размерность которого равна $h_a \times a \times a$. Полученный массив значений $M = M_a + M_0$ отражает напряженное состояние в области $h_a \times a \times a$, после установки анкерной крепи, а их поэлементное отношение M_0/M — изменение напряженного состояния после установки крепи, по сравнению с начальным. Напряженное состояние, возникающее вследствие образования полости в породном массиве определяется по разному, в зависимости от формы поперечного сечения выработки и принятой при расчете геомеханической модели пород [2, 3]. Напряженное состояние вокруг незакрепленной протяженной выработки, пройденной в изотропном, линейно деформируемом породном массиве, определяется при помощи решений задачи теории упругости о плоской деформации, для изотропного массива:

$$\sigma_r = \gamma h \left[\frac{1+\lambda}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1-\lambda}{2} \left(1 - \frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]; \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = \gamma h \left[\frac{1+\lambda}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1-\lambda}{2} \left(1 + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]; \quad (8)$$

$$\sigma_z = \gamma h \left[\lambda - \mu \frac{1-\lambda}{2} \frac{4}{r^2} \cos 2\theta \right]; \quad (9)$$

$$\tau_{r\theta} = -\gamma h \frac{1-\lambda}{2} \left(1 + \frac{4}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right) \sin 2\theta; \quad (10)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (11)$$

Пространственные задачи о действии сил на упругое полупространство не позволяют учитывать кривизну поверхности обнажения, имеющую место в горных выработках. Решений подобных задач для пространства ограниченного кривой поверхностью не существует в аналитическом виде. Для преодоления этого недостатка необходимо сделать допущение: часть поверхности обнажения, заключенную между соседними анкерами считаем плоской, а для каждой следующей системы из четырех анкеров, по направлению обхода контура поперечного сечения выработки, необходимо принимать свою систему координат, в которой ось x совпадает с направлением действия тангенциальных напряжений σ_θ , ось z совпадает с направлением действия радиальных напряжений σ_r , а ось y совпадает с направлением продольной оси выработки. С учетом этого, в локальной системе координат, $\sigma_r = \sigma_z^0$; $\sigma_\theta = \sigma_x^0$; $\sigma_z = \sigma_y^0$.

4. Вычислительный эксперимент. Результаты расчетов напряженного состояния до и после установки крепи показаны на рис. 2, 3, 4.

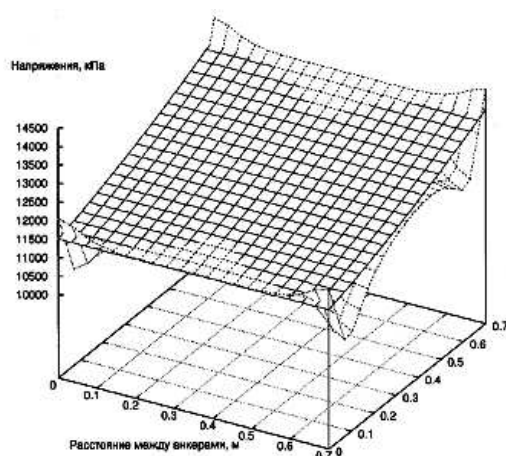


Рис. 2. Изменение напряжений σ_x вследствие натяжения анкеров.

При расчете начальных напряжений учитывается форма поперечного сечения выработки и коэффициент бокового распора. Расчет начинается от анкера в верхней точке кровли и проводится для нескольких систем из 4-х анкеров, отсчитываемых по часовой стрелке.

5. Выводы. На небольшом (0,1 – 0,4 м) расстоянии от контура выработки происходит значительное увеличение минимальных и снижение максимальных начальных напряжений. До отметки 1,3 – 1,5 м картина распределения напряжений меняется незначительно. При дальнейшем увеличении расстояния от контура выработки градиент изменения напряжений растет. На расстоянии, превышающем активную длину анкера, происходит некоторое разупрочнение, вызванное растягивающими напряжениями. На расстоянии 2,4 – 2,5 м влияние растягивающих напряжений незначительно.

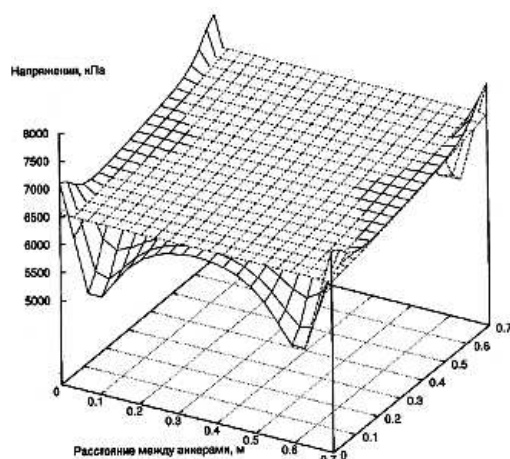


Рис. 3. Изменение напряжений σ_y вследствие натяжения анкеров.

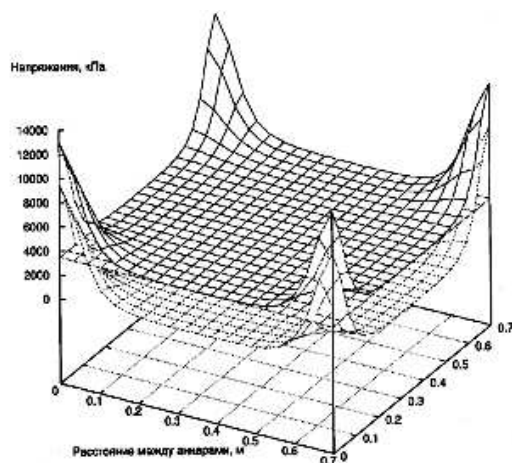


Рис. 4. Изменение напряжений σ_z вследствие натяжения анкеров.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Анисимов И. Ю. Геомеханическое обоснование упрочняющего эффекта анкерной крепи на основе решений пространственных задач теории упругости: дисс. кандидата тех. наук : 25.00.20. СПб., 2003. 128 с.
- [2] Булычев Н. С. Механика подземных сооружений. М.: Недра, 1982. 270 с.
- [3] Шейнин В. И. Руппенейт К. В. Некоторые статистические задачи расчета подземных сооружений. М.: Недра, 1969. 153 с.

Bobyliiev D., Masko L. *The residual stresses definition in the zone of excavation, fixed anchors.* In the article research formation of abutment overlapping in a roof with anchors of high bearing capacity. The influence of a roof-bolt strength setting on parameters of abutment overlapping surveyed. The analysis of obtained results is executed.

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИИ ЛОПАСТИ ТУРБИНЫ ВЭУ

Бондарчук А. А., Мещеряков К. И.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе дан метод нахождения оптимальной геометрии лопасти турбины ветро-энергетической установки. Каждое нормальное сечение лопасти по размаху является плоским аэродинамическим профилем одного и того же типа. Сечения могут отличаться между собой углом установки и длиной хорды. Угол атаки каждого нормального сечения определяется углом установки и углом, зависящим от скорости ветра. Задача решается с учетом следующих гипотез: 1) жидкость идеальная; 2) в каждом сечении задача плоская. Рассмотрены два различных способа задания генов и целевой функции генетического алгоритма, разработан генетический алгоритм, способный решить данную задачу в рамках принятых физических гипотез и геометрических ограничений.

1. Постановка задачи и основные гипотезы.

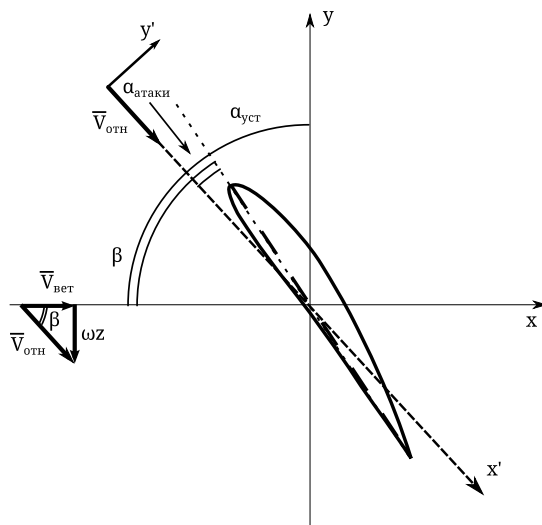


Рис. 1. Схема обтекания сечения лопасти однородным потоком ветра.

Вращающаяся лопасть ВЭУ моделируется двусторонней закрученной поверхностью, каждое сечение которой, ортогональное размаху, является плоским аэродинамическим профилем одного типа. В каждом сечении угол атаки зависит от угла установки и угла, зависящего от скорости ветра. Угол установки, изображенный на рисунке 1, отсчитывается от вертикальной оси y . Жидкость считаем идеальной, в каждом сечении задача считается двумерной.

На рисунке 1 изображен однородный набегающий поток, скорость которого равна скорости ветра. Этот поток приводит к вращательному движению лопасти. Размах лопасти направлен вдоль оси z , ортогонально плоскости xu , в которой

изображен рисунок. Ось вращения лопасти параллельна оси x . Вектор скорости сечения, отображенного на рисунке, направлен вверх.

$$v_{\text{отн}}^2 = v_{\text{в}}^2 + (\omega z)^2, \quad \text{tg} \beta = \frac{\omega z}{v_{\text{в}}}, \quad \alpha_{\text{ат}} = \pi/2 - \alpha_{\text{уст}} - \beta, \quad \alpha_{\text{уст}} = \alpha_{\text{уст}}(0) + \gamma(z). \quad (1)$$

2. Основные математические соотношения. Силы, действующие на лопасть в каждом сечении z , учитывая аэродинамическую гипотезу плоских сечений, раскладываются на составляющие вдоль набегающего потока (сила сопротивления) и ортогонально к нему (подъемная сила):

$$F_{x'} = C_x \rho b \frac{v_{\text{отн}}^2}{2}, \quad F_{y'} = C_y \rho b \frac{v_{\text{отн}}^2}{2}, \quad (2)$$

здесь $b = b(z)$ — длина хорды профиля, C_x — коэффициент сопротивления, C_y — коэффициент подъемной силы, полные размерные силы в (2) приведены на единицу длины вдоль размаха лопасти [1, 2].

Проекцию момента на ось вращения из двух сил дает только F_y . При этом

$$\begin{aligned} F_y &= F_{y'} \sin(\alpha_{\text{ат}} + \alpha_{\text{уст}}) - F_{x'} \cos(\alpha_{\text{ат}} + \alpha_{\text{уст}}) = F_{y'} \cos \beta - F_{x'} \sin \beta = \\ &= \frac{\rho b}{2} (v_{\text{в}}^2 + \omega^2 z^2) \left(\frac{C_y}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}} - \frac{C_x \text{tg} \beta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}} \right) = \frac{\rho b}{2} \sqrt{v_{\text{в}}^2 + \omega^2 z^2} (C_y v_{\text{в}} - C_x \omega z). \end{aligned} \quad (3)$$

Крутящий момент определяется по формуле:

$$M = \int_0^L R_y z dz = \frac{\rho}{2} \int_0^L b(z) \sqrt{v_{\text{в}}^2 + \omega^2 z^2} (C_y v_{\text{в}} - C_x \omega z) z dz, \quad (4)$$

где L — длина лопасти.

Мощность определяется по следующей формуле:

$$N = M \omega = \frac{\rho \omega}{2} \int_0^L b(z) \sqrt{v_{\text{в}}^2 + \omega^2 z^2} (C_y v_{\text{в}} - C_x \omega z) z dz. \quad (5)$$

Для рассматриваемого в данной работе профиля НАСА 4412 в [3] даны следующие аналитические аппроксимации коэффициентов C_x и C_y :

$$\begin{aligned} C_x(\alpha_{\text{ат}}) &= 0.0143 + 4.46 \cdot 10^{-5} \alpha_{\text{ат}} + 4.35 \cdot 10^{-8} \alpha_{\text{ат}}^2, \\ C_y(\alpha_{\text{ат}}) &= 0.444 + 1.58 \cdot 10^{-3} \alpha_{\text{ат}} - 7.67 \cdot 10^{-7} \alpha_{\text{ат}}^2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C_x(\alpha_{\text{ат}}) &= 0.0324 + 0.0117 \sin(3.9 \cdot 10^{-3} \alpha_{\text{ат}}) - 0.0229 \cos(3.9 \cdot 10^{-3} \alpha_{\text{ат}}), \\ C_y(\alpha_{\text{ат}}) &= 0.606 + 0.442 \sin(3.9 \cdot 10^{-3} \alpha_{\text{ат}}) - 0.257 \cos(3.9 \cdot 10^{-3} \alpha_{\text{ат}}); \end{aligned} \quad (7)$$

где угол $\alpha_{\text{ат}}$ — в радианах.

Обратная задача об оптимальной геометрии лопасти турбины ВЭУ заключается в максимизации выражения для мощности (5). Решение данной оптимизационной задачи проводится при помощи генетического алгоритма.

3. Выбор генов генетического алгоритма и построение целевой функции. Будем считать, что v_B и ω постоянны, таким образом оптимизация производится по функциям $\alpha_{уст}(z)$ и $b(z)$. Для использования генетического алгоритма необходимо определить некоторое количество переменных (генов), которые будут определять оптимизируемые функции. Для этого могут быть использованы различные подходы. Первым рассмотренным подходом является представление оптимизируемых функций в виде многочленов с неизвестными коэффициентами, которые играют роль генов.

$$\alpha_{уст}(z) = \sum_{i=0}^M \alpha_i z^i, \quad b(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^i. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (1), а затем полученные соотношения в (6), попутно переводя градусы в радианы, получим выражения для коэффициентов подъемной силы и сопротивления:

$$\begin{aligned} C_x = C_x(z, \alpha_i) &= 0.0143 + 0.46080 \left(\pi/2 - \sum_{i=0}^N \alpha_i z^i - \arctan \left(\frac{\omega z}{v_B} \right) \right) \pi^{-1} + \\ &+ 4.633200 \left(\pi/2 - \sum_{i=0}^N \alpha_i z^i - \arctan \left(\frac{\omega z}{v_B} \right) \right)^2 \pi^{-2}, \\ C_y = C_y(z, \alpha_i) &= 0.444 + 16.380 \left(\pi/2 - \sum_{i=0}^N \alpha_i z^i - \arctan \left(\frac{\omega z}{v_B} \right) \right) \pi^{-1} - \\ &- 81.64800 \left(\pi/2 - \sum_{i=0}^N \alpha_i z^i - \arctan \left(\frac{\omega z}{v_B} \right) \right)^2 \pi^{-2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Несложно заметить, что при подстановке (9) в (5), выражение под интегралом можно привести к сумме, в которой каждое зависящее от неизвестных коэффициентов слагаемое будет являться произведением комбинации этих коэффициентов на некоторую функцию $I_k(z)$, не зависящую от них. Таким образом, можно разбить интеграл в (5) на сумму интегралов, вынести из каждого интеграла неизвестные коэффициенты, и вычислить интегралы $\int_0^L I_k(z) dz$ на этапе построения целевой функции, что существенно сократит время работы алгоритма.

Если вместо (6) использовать (7), данную оптимизацию произвести не удастся, и интеграл из (5) придется находить численно при каждом вычислении целевой функции. Недостатком данного подхода является сложность оценки попадания особи в допустимую область, так как необходимо при каждой итерации восстанавливать оптимизируемые функции и проверять их значения по всей длине лопасти, что сильно увеличивает время работы генетического алгоритма.

Вторым рассмотренным подходом является использование в качестве генов значений оптимизируемых функций на нескольких ортогональных размаху сечениях лопасти. В этом случае (5) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} N = \frac{\rho \omega}{2} \sum_{i=0}^{M-1} (z_{i+1} - z_i) / 2 \Big(&b_i \sqrt{v_B^2 + \omega^2 z_i^2} (C_y(z_i, \alpha_i) v_B - C_x(z_i, \alpha_i)) \omega z_i z_i + \\ &+ b_{i+1} \sqrt{v_B^2 + \omega^2 z_{i+1}^2} (C_y(z_{i+1}, \alpha_{i+1}) v_B - C_x(z_{i+1}, \alpha_{i+1})) \omega z_{i+1} z_{i+1} \Big), \end{aligned} \quad (10)$$

где z_i — координаты сечений лопасти, M — количество сечений.

Данная целевая функция обладает низкой вычислительной стоимостью, и позволяет использовать как приближения C_x и C_y из (6) и (7), так и более сложные аппроксимации. Данный подход обладает также тем достоинством, что в нем не представляет сложности определить, попадает ли особь в допустимый диапазон. Для этого достаточно проверить попадание в пределы допуска всех коэффициентов. Для расчетов будет применяться именно этот подход.

4. Построение генетического алгоритма. Генетические алгоритмы относятся к стохастическим методам оптимизации, и, по сравнению с регулярными методами, обладают высокой вероятностью нахождения глобального экстремума. Описание различных генетических алгоритмов приведено в [5].

Отличия между различными генетическими алгоритмами состоят в выборе типов генов и стратегий отбора, скрещивания, мутации и проверки на сходимость.

В данной работе в качестве критерия отбора используется следующая стратегия: на этапе задания алгоритма выбирается значение p_b , которое задает долю допущенных к скрещиванию лучших особей на каждом шаге. Каждая из отобранных особей имеет одинаковый шанс участвовать в скрещивании. Стратегия скрещивания: в данном алгоритме реализована стратегия элитизма. Согласно ей, некоторый процент лучших особей p_e переходит в следующее поколение без изменений. Остальная популяция набирается по следующему алгоритму: выбираются два случайных родителя из отобранных, для каждого гена потомка случайным образом выбирается число $\alpha \in [-1; 2]$, после чего ген задается как:

$$\text{ген потомка} = \begin{cases} \text{ген родителя 1,} & \alpha < 0.25, \\ \alpha \cdot \text{ген родителя 1} + (1 - \alpha) \cdot \text{ген родителя 2,} & \alpha \in [-0.25; 1.25], \\ \text{ген родителя 2,} & \alpha > 1.25. \end{cases}$$

В случае, если полученный ген не удовлетворяет ограничениям, число α выбирается заново. Приведенный алгоритм является смесью дискретной рекомбинации и промежуточной рекомбинации. При использовании этой формулы, количество поколений, необходимых для схождения данной задачи, уменьшается в среднем на 28% по сравнению с чистой промежуточной рекомбинацией, данной в [4] (в среднем с 280 поколений до 200 поколений).

В качестве стратегии мутации была взята стратегия, данная в [4].

Сходимость: в случае, если за 10% от максимального числа поколений значение целевой функции для лучшей особи изменилось не более, чем на 1%, алгоритм считается сошедшимся.

5. Результаты вычислительного эксперимента. С применением данного генетического алгоритма была проведена условная оптимизация трехлопастной ветроэнергетической установки с высотой мачты, равной 40 м, со следующими наложенными ограничениями: $-4^\circ < \alpha_{\text{ат}} < 12^\circ$, $0.05 \text{ м} < b < 0.25 \text{ м}$. Опрокидывающий момент был ограничен сверху значением 24000 Н·м. Скорость набегающего потока v_b взята равной 8 м/с, $\omega = 146.6$ рад/с. Полученная в результате расчета результирующая мощность ветроустановки составила 2970 Вт. Значения полученных углов установки и длин хорды приведены в таблице 1.

Коорд. сечения, м	0.08	0.17	0.27	0.36	0.46	0.56	0.65	0.75	0.8
Длина хорды, м	0.25	0.17	0.14	0.11	0.11	0.10	0.099	0.085	0.082
Угол установки, °	22.3	6.3	1.77	0.546	0.258	0.118	0.316	0.382	0.440

Таблица 1. Форма лопасти, полученной в результате работы генетического алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1996. 448 с.
- [2] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
- [3] Сумбатян М. А., Бондарчук А. А. Обратная задача об оптимальной геометрии лопасти турбины ВЭУ // Труды XIV международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», Т. 1. Издательство ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2010.
- [4] Mühlenbein, H., Schlierkamp-Voosen, D. Predictive Models for the Breeder Genetic Algorithm: I. Continuous Parameter Optimization // Evolutionary Computation, 1, 1993.
- [5] Панченко Т. В. Генетические алгоритмы. Астрахань: ИД «Астраханский университет», 2007. 87 с.

Bondarchuk A. A., Meshcheryakov K. I. *Application of genetic algorithm to the problem of blade geometry optimization of a wind turbine.* The paper presents a method of finding the optimal geometry of the rotating blade of a wind turbine. Every normal section is a plane airfoil of the same class. The sections may differ from each other by their sizes and by angles of incidence. The attack angle for every normal section is defined by the incidence angle as well as by the angle which depends upon the wind speed. The problem is solved with the following assumptions: 1) the fluid is nonviscous; 2) at every section the problem is plane i.e. 2D. The paper examines two different kind of setting of genes and fitness. The genetic algorithm that can solve this problem in the framework of the accepted physical hypotheses and geometric constraints was developed.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Бочарова О. В. *, Анджинович И. Е. **

** Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

*** НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.*

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

В настоящей работе предложен метод оценки прочности структурно-неоднородных тел, основанный на контроле изменения динамических свойств системы датчик - контролируемый объект. Представлены результаты натурного и вычислительного экспериментов, показывающие влияние размера и расположения дефекта на спектр отклика системы.

Проблема разработки методов неразрушающего контроля состояния и прочностного ресурса узлов и деталей инженерных конструкций является ключевой для повышения надежности их эксплуатации и предотвращения аварийных ситуаций, особенно для изделий выполненных из композиционных материалов. На стадии производства для контроля качества изготовления деталей широко используются методы акустического контроля. Обзор этих методов их достоинств и недостатков приведен в работах [1–3]. Однако использование ультразвука накладывает определенные ограничения на структуру композиционных материалов (исключаются, например, сотовые материалы, волокнистые, зернистые), а использование низкочастотных акустических методов [3] — на форму изделий.

В настоящей работе предложен метод оценки напряженного состояния и прочности структурно-неоднородных тел, основанный на контроле изменения их динамических спектральных и резонансных свойств. Важную роль в интегральной оценке динамических свойств системы играет система датчик - контролируемый объект, за счет создания режима колебаний, обеспечивающего четкий контроль за изменением динамических свойств среды. Одним из достоинств данного метода является отсутствие каких-либо принципиальных ограничений, как на структуру материала, так и на форму изделия.

Проведено исследование по определению размера и расположения дефекта по поверхностному волновому полю. Данное исследование проведено двумя способами: первый — экспериментальный, второй — вычислительный эксперимент, основанный на использовании метода конечного элемента.

В качестве образца был выбран параллелепипед из экструдированного пенополистирола размерами $50 \times 70 \times 580$ мм, в котором были сделаны сквозные поперечные цилиндрические полости различных размеров. Блок-схема эксперимента представлена на рис 1.

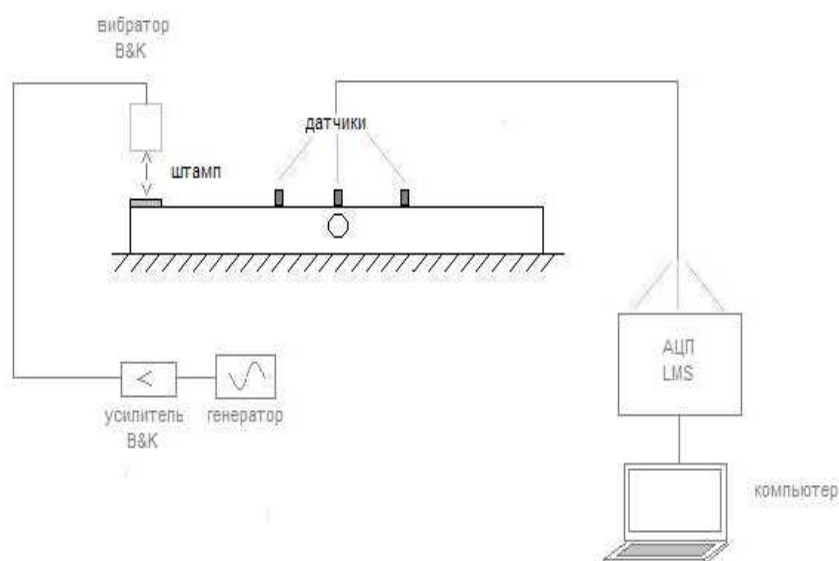


Рис. 1. Блок-схема эксперимента.

В образце, расположенном на твердой поверхности возбуждались поверхностные колебания через легкий алюминиевый штамп, посредством генератора специальных сигналов. На поверхности образца колебания регистрировались миниатюрными акселерометрами РСВ, расположенными над, перед и после неоднородности на расстоянии 100 мм друг от друга. Сигналы с акселерометров поступали на многоканальный АЦП Scadas фирмы LMS, программно обрабатывались и представлялись в виде спектров.

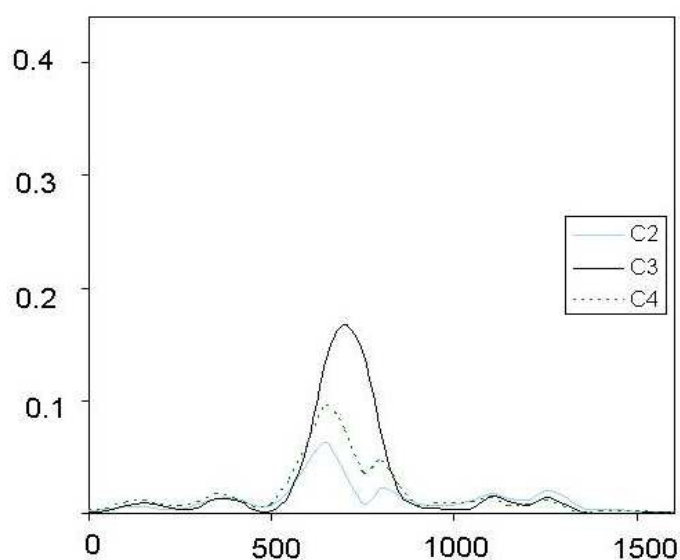


Рис. 2. Спектральный отклик системы для образца без дефектов.

На рисунке 2 показан спектральный отклик системы для образца без дефектов (С2 — датчик перед полостью, С3 — над полостью, С4 — после полости). По оси абсцисс отложена частота (Гц), по оси ординат — вертикальная компонента ускорения.

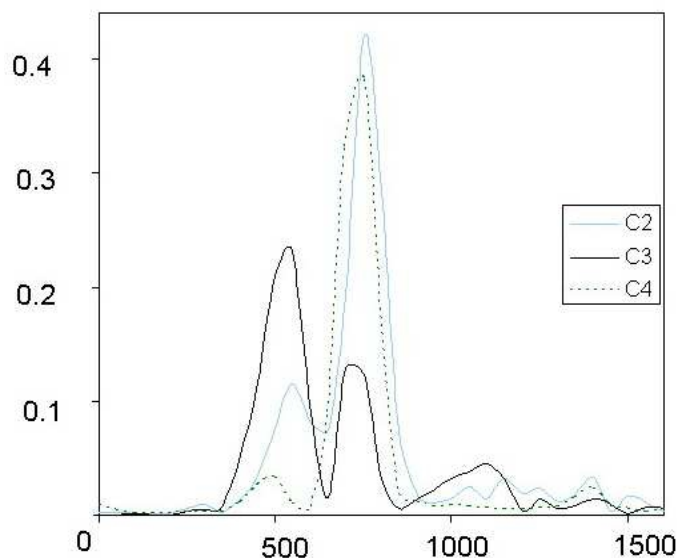


Рис. 3. Спектральный отклик системы для образца, ослабленного полостью.

На рисунке 3 показан спектральный отклик системы для образца, ослабленного симметричной полостью диаметром 30 мм.

Также был проведен вычислительный эксперимент. Волновое поле на поверхности параллелепипеда, ослабленного полостью, рассчитывалось в конечно-элементном пакете Ansys 11 с использованием командного языка APDL [4, 5]. Для решения задачи использовался плоский восьмиузловой элемент PLANE 82 с опцией плоского деформирования. При расчетах принимались следующие значения: модуль Юнга $E = 22$ МПа, плотность $\rho = 50$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

На рисунке 4 показано поверхностное волновое поле, измеренное тремя датчиками для образца, ослабленного полостью диаметром 20 мм, расположенной на расстоянии 10 мм от верхней границы. По оси абсцисс отложено время (в секундах), по оси ординат — вертикальная компонента ускорения (м/с²).

Далее с помощью пакета Origin Pro 7 на основе полученных данных вычислялся спектральный отклик системы.

На рисунке 5 показан спектральный отклик системы, измеренный датчиком, находящимся над полостью, для следующих образцов: 1 — образец без дефектов, 2 — образец с полостью диаметром 20 мм, расположенной на расстоянии 10 мм от верхней границы, 3 — образец с полостью диаметром 30 мм, расположенной на расстоянии 5 мм от верхней границы.

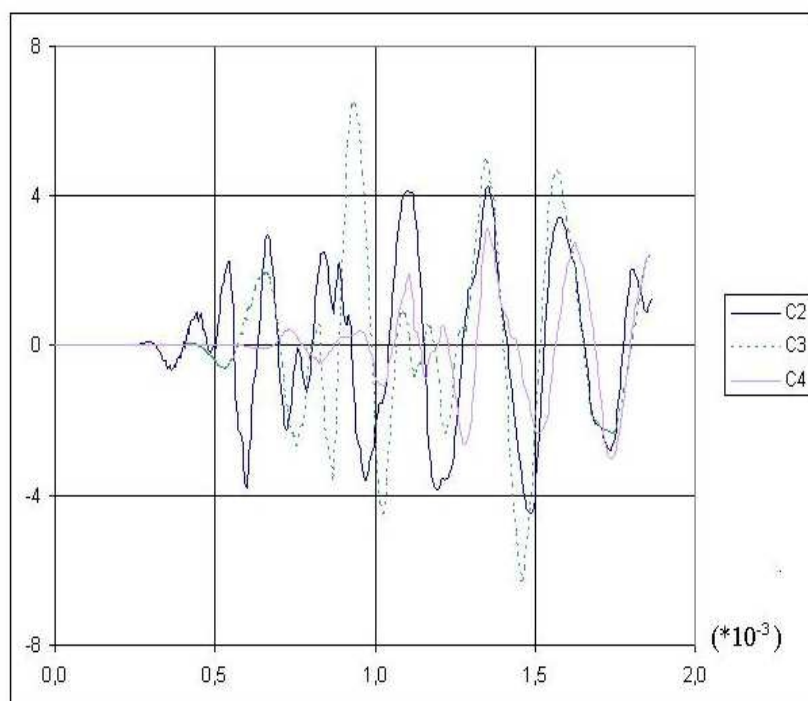


Рис. 4. Поверхностное волновое поле.

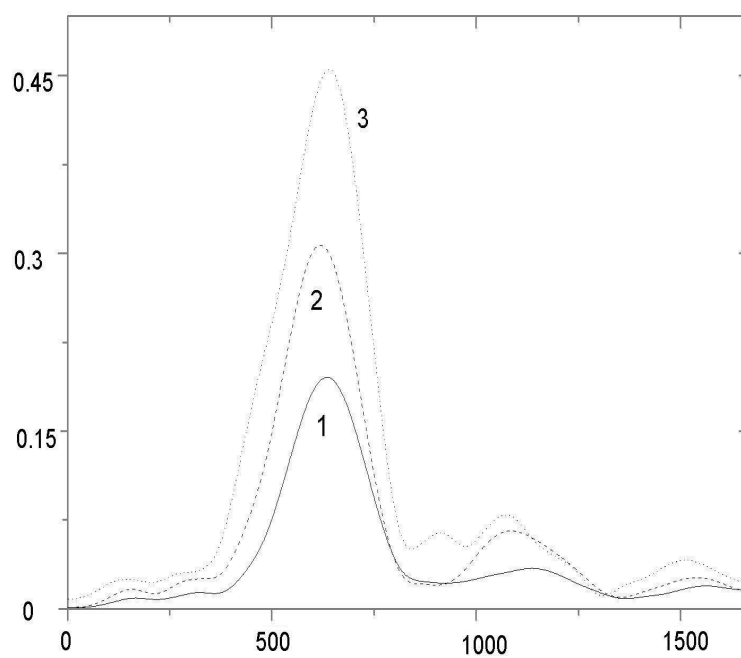


Рис. 5. Спектральный отклик системы для трех различных образцов.

Результаты вычислительных экспериментов показали, размер полости и ее расположение влияют на спектральный отклик системы. Наблюдается рост максимума амплитуды на резонансной частоте порядка 600 Гц при увеличении размера полости и при смещении ее положения к верхней границе образца. Этот результат коррелирует с результатами натурального эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (МК-6213.2012.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Неразрушающие методы контроля. М., 1992. 254 с.
- [2] Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. И., Лебедев В. К. Основы ультразвукового неразрушающего метода определения напряжений в твердых телах. Киев: Наукова думка, 1974. 106 с.
- [3] Глазовский Б. А., Московенко И. Б. Низкочастотные акустические методы контроля в машиностроении. Л.: Машиностроение, 1977. 208 с.
- [4] Чигарев А. В., Кравчук А. С., Смалюк А. Ф. ANSYS для инженеров: Справ. пособие. М.: Машиностроение, 2004. 512 с.
- [5] Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.

Bocharova O. V., Andzhikovich I. E. *Experimental modeling of surface wave fields in inhomogeneous media.* In this work, a method for estimate the strength of heterogeneous bodies, based on monitoring changes in the dynamic properties of the sensor-controlled object is proposed. The results of natural and computational experiments showing the influence of size and location of the defect on the spectrum of the response of the system are presented.

РАВНОВЕСИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО УПРУГОГО СЛОЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДИСЛОКАЦИЮ НЕСООТВЕТСТВИЯ

Бычков А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследованы условия равновесия двухкомпонентного упругого слоя содержащего дислокацию несоответствия. Рассматривается плоская пленка SiGe нанометровой толщины на Si подложке. Учитывается неравномерное распределение Ge в объеме пленки. Построена трехмерная модель плоской пленки с дислокацией. Расчет упругих деформаций выполнен с использованием метода конечных элементов. Для расчета распределения Ge в пленке, использованы аппроксимирующие формулы и итерационный алгоритм. Полученные результаты сравниваются с известными аналитическими оценками.

Известно [1], что на границе раздела напыленной полупроводниковой $Si_{1-\eta}Ge_\eta$ пленки на Si подложке возникает деформация несовместности $\varepsilon_0 = (a_f - a_s) / a_s$ за счет различия постоянных решетки и подложки: для Si постоянная решетки $a_s = 0,5431$ нм, а для пленки $Si_{1-\eta}Ge_\eta$ постоянная решетки $a_f = 0,5431 + 0,01992\eta + 0,002733\eta^2$, $0 \leq \eta \leq 1$. Согласно [2], релаксация напряжения в пленке при малой деформации несовместности $\varepsilon_0 < 1,5\%$ ($\eta < 0,4$) происходит: 1) с помощью образования волнистой поверхности (выпуклости, разделенные узкими канавками) на первоначально плоской пленке в процессе ее отжига (неустойчивость Азаро–Тиллера–Гринфельда); 2) путем зарождения дислокаций несоответствия (ДН) на границе раздела пленки и подложки. В первом случае неустойчивость первоначально плоской пленки связана с тем, что волнистая поверхность напряженной пленки имеет меньшую суммарную энергию (энергия деформирования + поверхностная энергия) вследствие упругой релаксации напряжения в вершинах выступов. С увеличением толщины пленки последовательно возникают первый, а затем второй механизмы релаксации. Механизмом образования плоской или волнистой поверхности пленки является поверхностная диффузия, которая обеспечивает перенос материала вдоль возмущенной поверхности, которая постепенно переходит в состояние равновесия. Причем установление плоской или волнистой равновесной поверхности зависит от типа возмущения, величины деформации несоответствия, толщины пленки и свойств ее материала.

Третьим механизмом релаксации упругой энергии за счет уменьшения упругой энергии $Si_{1-\eta}Ge_\eta$ полупроводниковой пленки является неоднородное перераспределение атомов Ge и Si вблизи волнистой поверхности пленки, которые равномерно распределены в случае ее плоской поверхности [2]. Атомы Ge «предпочитают» выступы пленки, а Si впадины между ними [3, 4]. Расчеты в рамках плоской задачи [4] дают 9% снижение средней плотности упругой энергии за счет механодиффузии в пленке. Однако расчет [4] не учитывал ряд факторов, влияющих на процесс формирования неоднородности состава пленки с волнистой свободной поверхностью: зависимости упругих модулей пленки от состава и собственную деформацию за счет разноразмерности атомов Si и Ge. Последнее обстоятельство учитывалось в расчете [5].

В продолжение [3, 5] в [6] выполнен расчет упругих напряжений в пленке с поверхностными наноостровками пирамидальной формы. При этом в расчете не учитывалось образование дислокаций несоответствия на границе раздела пленка-подложка и внутри пленки.

Как показывают аналитические оценки [7], первоначальные дислокации несоответствия могут образовываться не на границе раздела пленка-подложка, а в глубине пленки на некотором расстоянии от границы. Этот фактор может оказывать существенное влияние на значение критических параметров пленки. В [7] исследуется положение дислокаций несоответствия при неоднородном распределении компонент сплава в полупроводниковой пленке $Si_{1-\eta}Ge_{\eta}(001)$ с плоской поверхностью. В работе принята упрощенная, линейная по высоте z , модель распределения Ge в пленке. Несоответствие кристаллических решеток вычисляется по формуле $f = C_f z$, где C_f — коэффициент распределения компонент сплава. С помощью линейной аппроксимации получены приближенные формулы для расчета расстояния от границы раздела пленка-подложка, на котором возникают дислокации несоответствия в слое. Однако модель не учитывает существенно нелинейного характера распределения компонент пленки. Нелинейность связана как со сложной формой свободной поверхности пленки, так и с дефектами структуры, в частности дислокациями несоответствия.

В данной работе приведены результаты расчетов, продолжающих исследования [3, 6] для полупроводниковой пленки с учетом дислокации несоответствия, расположенной в глубине слоя, и существенно нелинейного характера распределения компонент сплава в образце.

Упругая задача для исследуемой модели в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0, & \Omega, \\ u_i &= 0, & \Gamma_D, \\ \sigma_{ij}n_j &= 0, & \Gamma_N,\end{aligned}$$

где Ω — область занятая телом, $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ — граница тела, Γ_D — граница пленка-подложка, Γ_N — свободная граница пленки. Будем, аналогично [5], рассматривать деформацию несовместности пленки как собственную деформацию $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_m c(x, y, z)\delta_{ij}$, $\varepsilon_m = 0,04$. Тогда, закон Гука можно записать следующим образом $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*)$.

Потеря устойчивости равновесия плоской пленки определяется, аналогично [2], сменой знака у приращения свободной энергии δF участка поверхности пленки при наложении возмущения на плоскую пленку

$$\delta F = \int_{\Gamma_N} \gamma dS + \int_{\Omega} w dV - \gamma_0 S_0 - W_0, \quad (1)$$

где удельная поверхностная энергия γ определена формулой $\gamma = c\gamma_{Ge} + (1 - c)\gamma_{Si}$, γ_{Ge} и γ_{Si} — удельная поверхностная энергия для Ge и Si, соответственно, $c = c(x, y, z)$ — доля Ge в сплаве, γ_0 — удельная поверхностная энергия невозмущенной пленки, S_0 — площадь свободной поверхности невозмущенной пленки, W_0 —

упругая энергия невозмущенной пленки, плотность упругой энергии на поверхности пленки w имеет вид

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}.$$

Первое и третье слагаемое в (1) определяют приращение поверхностной энергии, второе и четвертое — приращение упругой энергии в пленке.

Расчет упругих напряжений во втором слагаемом (1) выполнен методом конечных элементов (пакет FlexPDE5). Во всех расчетах подложка предполагалась недеформируемой. Упругие перемещения заданной области малы по сравнению с амплитудами возмущений и не учитывались для определения формы свободной поверхности пленки.

Связь между неоднородностью распределения Δc атомов Ge и деформацией ε определялась согласно [5]:

$$\Delta c = \frac{1}{3\varepsilon_m} (Tr \varepsilon - \overline{Tr \varepsilon}) + (\bar{c} - c). \quad (2)$$

При этом предполагалось постоянство количества атомов Ge $\frac{1}{V} \int_{\Omega} \Delta c(x, y, z) dV = 0$, $\bar{c} = \eta$ — средняя доля атомов Ge , а $\overline{Tr \varepsilon} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} Tr \varepsilon dV$ — средняя деформация дилатации.

Для вычисления $c = c(x, y, z)$ использовалась процедура, состоящая из набора последовательных итераций. На первом шаге задавалось начальное распределение $c = c_0$ и вычислялась величина упругой энергии в пленке $W = W_0$. Далее, из (2), вычислялось $c_1 = c_0 + \Delta c$ и новое значение $W = W_1$ и т. д. В итоге, было получено значение $c = c_{\min}$ соответствующее минимальной упругой энергии в пленке.

Использовалась следующая расчетная формула для $c = c(x, y, z)$

$$c_{i+1,j} = c_{i,j} + \Gamma \left[\frac{1}{3\varepsilon_0} (Tr \varepsilon_i - \overline{Tr \varepsilon_i}) - (\bar{c} - c_{i,j}) \right],$$

где $c_{i,0} = c_i$, Γ — малый положительный параметр ($\Gamma \leq 10^{-2}$), $c_{i,j}$ сходится при $j \rightarrow \infty$ к некоторому $c_{i,\infty} = c_{i+1}$, т. е.

$$\frac{1}{3\varepsilon_0} (Tr \varepsilon_i - \overline{Tr \varepsilon_i}) + (\bar{c} - c_{i,\infty}) = 0.$$

При расчете распределения $c = c(x, y, z)$, учитывалось выполнение условия $0 \leq c(x, y, z) \leq 1$.

Результаты расчетов представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показано распределение доли Ge в сплаве $c = c(x, y, z)$ в сечении образца вдоль оси Ox (c изменяется от 0,322 до 0,34, при среднем значении $\eta=0,33$). Длина и ширина образца составляют 400 нм, высота — 22 нм. Распределение Ge определяется полем упругих напряжений дислокации несоответствия. Дислокация проходит посередине образца, при $x = 0,5$, относительная высота расположения дислокации $d/h = 0,1$ (d — высота расположения дислокации, h — высота пленки). Ge концентрируется в областях с низкой плотностью упругой энергии, при увеличении плотности упругой энергии его доля в сплаве уменьшается.

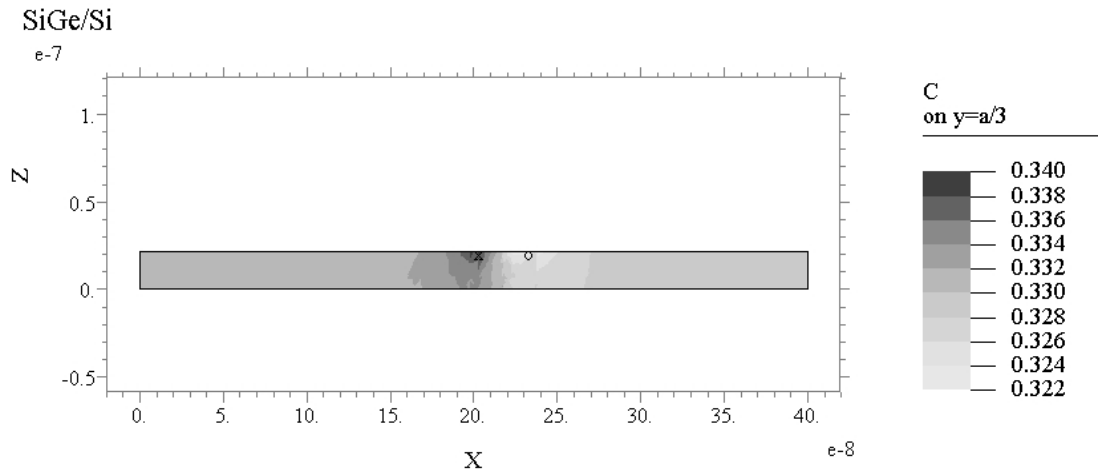


Рис. 1. Распределение $c = c(x, y, z)$ (доли Ge в сплаве) в сечении образца вдоль оси Ox . Длина и ширина образца составляют 400 нм, высота — 22 нм; c изменяется от 0,322 до 0,34 при среднем значении $\eta=0,33$.

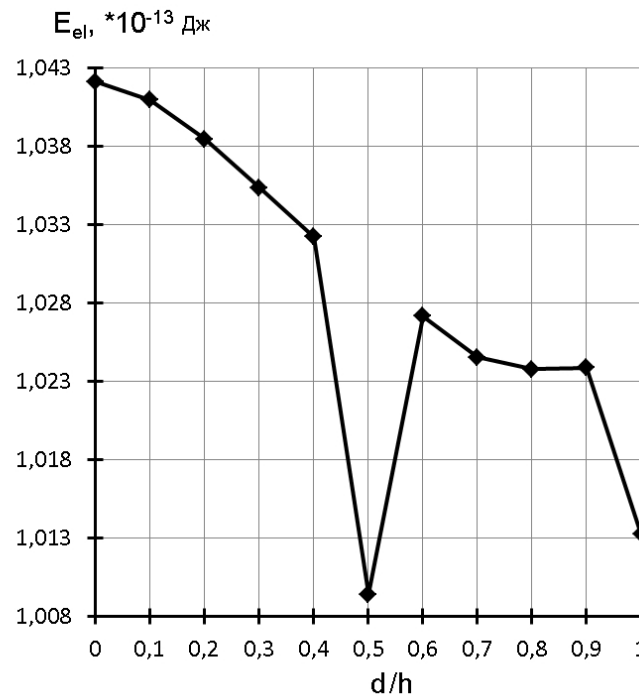


Рис. 2. Зависимость упругой энергии E_{el} образца $Si_{1-\eta}Ge_{\eta}$ пленки с плоской свободной поверхностью от относительной высоты расположения дислокации d/h от границы раздела пленка-подложка (d — высота расположения дислокации, h — высота пленки, $\eta = 0,33$, $c = \text{const}$, $h = 22$ нм).

На рис. 2 показаны результаты расчета зависимости упругой энергии образца от высоты расположения краевой дислокации от границы раздела пленка-подложка. Как видно из полученных результатов, упругая энергия убывает по

мере увеличения высоты расположения дислокации. При высоте 11 нм имеется минимум упругой энергии, что соответствует аналитическим оценкам, полученным в [7].

Результаты выполненных расчетов показали: 1) равновесное положение дислокации несоответствия в двухкомпонентном упругом слое *SiGe* находится не на границе раздела пленка-подложка, а в глубине слоя; 2) из-за различия упругих модулей *Ge* и *Si* происходит дополнительная релаксация упругой энергии в пленке; 3) учет влияния перераспределения компонент пленки не приводит к существенному изменению упругой энергии образца и критического значения высоты дислокации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Berbezier I., Ronda A.* SiGe nanostructures // Surface Science Report. 2009. V. 54. Pp. 47–98.
- [2] *Paul D. J.* Si/SiGe heterostructures: from material and physics to devices and circuits // Semicond. Sci. Technol. 2004. V. 19. R75–R108.
- [3] *Бычков А. А., Карпинский Д. Н.* Влияние процессов релаксации на форму поверхности полупроводниковой пленки на подложке // Актуальные проблемы прочности: сборник трудов XLVIII Международной конференции, посвященной памяти М. А. Криштала. Тольятти, 2009. С. 220–221.
- [4] *Wu C. C., Hull R.* Composition and stress fields in undulated thin films // J. Appl. Phys., 2006. V. 100. 083510.
- [5] *Digiuni D., Gatti R., Montalenti F.* Aspect-ratio-dependent driving force for nonuniform alloying in Stranski-Krastanow islands // Physical review, 2009. V. 80. 155436.
- [6] *Бычков А. А.* Расчет упругих деформаций в неоднородной наноразмерной полупроводниковой пленке на подложке // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, № 4, ч. 2. С. 405–406.
- [7] *Sidoti H. J. D., Xhurxhi S., Kujofsa T., Cheruku S. et al.* Initial misfit dislocations in a graded heteroepitaxial layer // Journal of Applied Physics, N. 109, 2011, 023510.

Bychkov A. A. *Equilibrium of a two-component elastic layer of containing a misfit dislocation.* Equilibrium conditions of a two-component elastic layer of containing a misfit dislocation are researched. Plane SiGe film of nano-metre thickness on Si substrate is investigated. Non-uniform distribution Ge in film volume is investigated. The three-dimensional model of a plane film with a dislocation is constructed. Calculation of elastic deformations has been executed with use of a finite elements method. For calculation of distribution Ge the approximating formulas and iterative algorithm are used. The gained results are compared to known analytical estimates.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В СОСУДАХ СО СТЕНОЗОМ

Галингер Н. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках одномерной теории смоделировано движение вязкой жидкости в трубке с переменным радиусом (со стенозом). Задача была решена в линеаризованной постановке с помощью идей проекционного метода Галеркина. Путем осреднения по длине трубки построена задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Проанализировано изменение скорости распространения волн в сосудах и возмущения радиуса стенки сосуда при различных формах стеноза, приведены соответствующие графические зависимости.

Изучение линейных и нелинейных волновых процессов в трубках с упругими стенками представляет интерес в связи с возможностью прогнозирования и диагностики ранних стадий некоторых сердечно-сосудистых заболеваний. В этом направлении был получен ряд аналитических и численных результатов. Так, работа [1] посвящена исследованию распространения слабо нелинейных волн в тонкостенных предварительно напряженных упругих трубках с переменным радиусом (со стенозом), заполненных идеальной жидкостью. В рамках такой модели было составлено уравнение Кортвега-де-Фриза с переменными коэффициентами и найдены его аналитические решения. В работе [2] с помощью упрощенного метода возмущений было получено эволюционное уравнение для трубки с упругими стенками и переменным радиусом и найдены его решения в виде бегущих волн. Макирташ и Демирай исследовали распространение волн в заполненных жидкостью конических трубках; было установлено, что скорость волны уменьшается с увеличением расстояния для расширяющихся трубок и соответственно увеличивается для сужающихся трубок.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим течение жидкости в аксиально-симметричной эластичной трубке при следующих допущениях [3]: жидкость несжимаема, плотность стенки трубки постоянна, деформация трубки характеризуется изменением её радиуса, радиус трубки зависит от координаты и времени; деформации стенки трубки и её толщина малы по сравнению с радиусом, а характерные длины волновых процессов много больше равновесного радиуса; давление жидкости в потоке одинаково по всему сечению трубки и зависит от координаты и времени.

Рассмотрим систему уравнений, описывающих движение вязкой жидкости в аксиально-симметричной вязко-эластичной трубке при наличии стеноза. Предположим дополнительно, что давление в потоке жидкости прямо пропорционально возмущениям радиуса и ограничимся анализом нелинейных волн в длинноволновом приближении и при больших числах Рейнольдса. Такое приближение является справедливым для средних и крупных артерий. В безразмерных переменных

система имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Su)}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial x} &= \chi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
 S &= \left(R_0(x) + \frac{\eta}{2} \right)^2, \\
 P &= 1 + \alpha \eta; \\
 \alpha &= \frac{\rho c_0^2}{P_e}, \quad \chi = \frac{\nu_0}{l c_0}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее использованы следующие обозначения: $P = P(x, t)$ — давление в жидкости, $\eta = \eta(x, t)$ — возмущения радиуса стенки трубки, $u = u(x, t)$ — средняя по сечению осевая компонента скорости, $S = S(x, t)$ — площадь поперечного сечения трубки, P_e — постоянное давление, действующее на внешнюю поверхность трубки, h_0 — толщина невозмущенной стенки, r_0 — равновесный радиус трубки, α — коэффициент линейной упругости, характеризующий растяжение элемента трубки, ν_0 — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность жидкости, l — длина трубки, c_0 — скорость Моемса и Кортевега.

Произведем линеаризацию системы. После некоторых преобразований система примет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -2uR'_0 - R_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \\
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \eta}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

2. Решение задачи.

Решение системы (2) будем искать с помощью модификации проекционного метода Галеркина. В рамках такого подхода решение представляется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты, а вторая — только от времени:

$$\begin{aligned}
 \eta(x, t) &= X_1(x)Y_1(t), \\
 u(x, t) &= X_2(x)\dot{Y}_1(t).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя эти представления в первое уравнение канонической системы (2), получим

$$X_1(x) = -R_0(x)X'_1(x) - 2X_2(x)R'_0(x). \tag{4}$$

Аналогично, второе уравнение системы (2) примет вид:

$$X_2(x)\ddot{Y}_1(t) = \chi X_2''(x)\dot{Y}_1(t) - X_1'(x)Y_1(t). \tag{5}$$

Проинтегрируем последнее уравнение по отрезку:

$$\int_0^l X_2(x)dx\ddot{Y}_1(t) = \chi \int_0^l X_2''(x)dx\dot{Y}_1(t) - \int_0^l X_1'(x)dxY_1(t). \tag{6}$$

Получено однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\dot{Y}_1(t)$. Коэффициенты уравнения (6) пока неизвестны. Поставим для уравнения (6) задачу Коши. Из условия

$$\eta(x, 0) = 0 \quad (7)$$

получим условие

$$Y_1(0) = 0. \quad (8)$$

Из условия

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (9)$$

получим

$$X_2(x)\dot{Y}_1(0) = 0. \quad (10)$$

Проинтегрируем последнее выражение по отрезку и получим условие на производную функции в нуле:

$$\dot{Y}_1(0) = \frac{\int_0^l u_0(x) dx}{\int_0^l X_2(x) dx}. \quad (11)$$

Чтобы определить неизвестные коэффициенты в уравнении (6), вернемся к уравнению (4). Функция $X_1(x)$ удовлетворяет граничным условиям на давление в жидкости и имеет вид

$$X_1(x) = -\frac{P_e}{\alpha l}x + \frac{P_e - 1}{\alpha} \quad (12)$$

или, для удобства записи,

$$X_1 = ax + b. \quad (13)$$

Тогда уравнение (4) можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$X_2' + \frac{2R_0'}{R_0}X_2 + \frac{(ax + b)}{R_0} = 0. \quad (14)$$

Зная $X_2(x)$, вернемся к задаче Коши (6), (8), (11). Решив её, найдем по формуле (3) выражения для скорости и возмущений радиуса.

3. Численные эксперименты.

Ниже приведены результаты численного исследования при различных формах стеноза. В рамках одномерного подхода предполагалось, что радиус трубки зависит от координаты и задается формулой

$$R_0 = r_0 + r_1 e^{-\lambda(x-\beta)}. \quad (15)$$

Подобная геометрия сосуда со стенозом встречается в работе [4].

Рассмотрим вначале стеноз, при котором проходимость кровеносного сосуда составляет 90 процентов. На рис. 1 изображены графики скорости при различных значениях координаты.

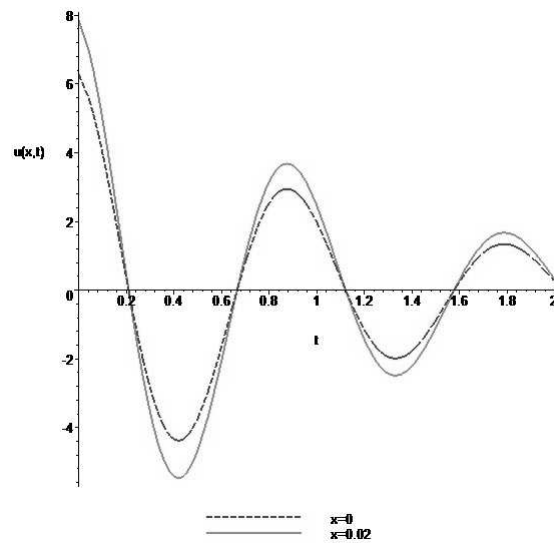


Рис. 1. Графики скорости при различных значениях координаты.

Из рис. 1 видно, что на пике стеноза амплитуда колебаний резко увеличивается. Данные результаты согласуются с результатами, полученными ранее другими исследователями [1].

Рассмотрим случай менее выраженного стеноза, при котором проходимость сосуда составляет 95 процентов. Сравним графики возмущений радиуса стенки трубки на пике стеноза при различных формах стеноза (рис. 2).

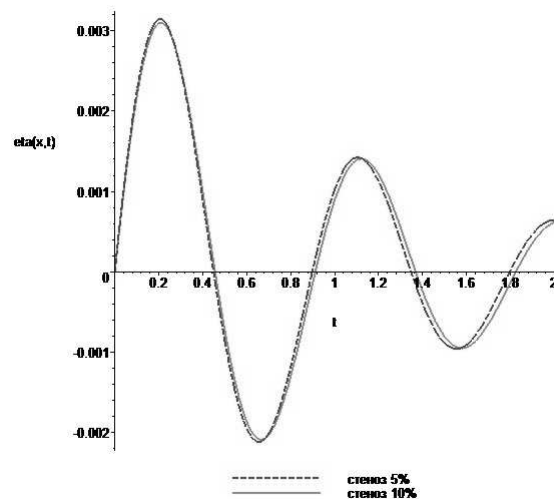


Рис. 2. Графики возмущений радиуса стенки трубки на пике стеноза при различных формах стеноза.

Из рис. 2 видно, что чем сильнее выражен стеноз сосуда, тем меньше амплитуда и больше период колебаний функции возмущений радиуса стенки сосуда.

Проведем сравнение профиля скорости на пике стеноза при различных формах стеноза (рис. 3).

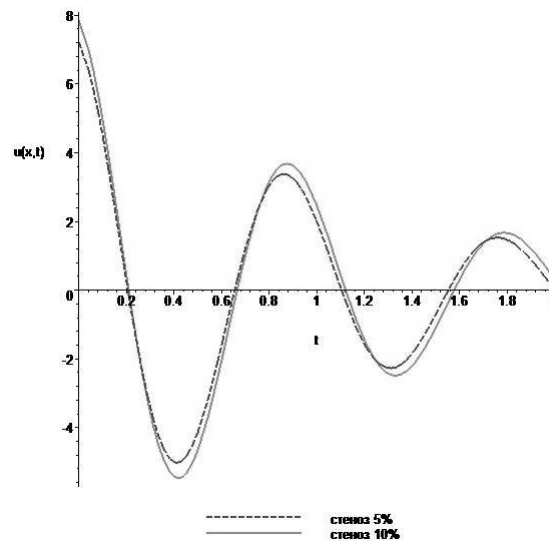


Рис. 3. Сравнение профиля скорости на пике стеноза при различных формах.

Из рис. 3 видно, что амплитуда колебаний функции скорости прямо пропорциональна размерам стеноза.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абдель Латиф М. С. Симметричный анализ и некоторые точные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами, возникающего в артериальной механике // Известия СГУ. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2011. № 11. С. 42–48.
- [2] Demiray H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves // Chaos Soliton Fract. 2009. Vol. 42. № 1. Pp. 358–364.
- [3] Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
- [4] Misra J. C. Ghosh S. K. A Mathematical model for the study of interstitial fluid movement vis-a-vis the non-newtonian behaviour of blood in a constricted artery // Comput. Math. Appl. 2001. Vol. 41. Pp. 783–811.

Galinger N. V. *Simulation of blood flow with stenosis.* On the basis of the one-dimensional model the nonlinear second order differential equation describing the perturbations of the radius of blood vessel walls is studied. A solution of this equation, expressed in terms of Jacobi elliptic functions, is presented. The study of solutions depending on the speed of the wave; the corresponding graphical dependences are presented. The linearization of the problem is implemented and the comparative analysis of linear and nonlinear models is given.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВТОРИЧНЫХ РЕЖИМОВ В ЗАДАЧЕ ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ МАРАНГони

Гончаренко А. А., Прозоров О. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о возникновении конвекции жидкости в невесомости во внешнем высокочастотном поле с учетом термокапиллярного эффекта. Решается линейная задача, строится зависимость критического параметра амплитуды вибрации от волнового числа при фиксированном градиенте температуры. Средствами слабо-нелинейного анализа строятся амплитудные уравнения, которые являются уравнениями Гинзбурга-Ландау. Для различных значений числа Марангони находятся соответствующие амплитуды вторичного режима.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о возникновении конвекции в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости, ограниченном твердой стенкой и свободной поверхностью, на которой действует поверхностное натяжение с коэффициентом $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$. Над слоем находится газ. Предполагается, что слой как целое совершает поступательные колебания вдоль вектора $\mathbf{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$ по закону $a/\omega f(\omega t)$, где f — периодическая функция с нулевым средним по быстро времени $\tau = \omega t$.

$$(1 - \varepsilon T') \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\nabla p' + \Delta \mathbf{v}' + (1 - \varepsilon T')(Ga\boldsymbol{\gamma} - \omega Re f(\omega t)\mathbf{s}), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \mathbf{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi), \quad \frac{dT'}{dt} = Pr^{-1} \Delta T'. \quad (2)$$

Уравнения (1)–(2) были предложены в [1] для описания вибрационной конвекции в областях со свободной границей. На деформирующейся свободной границе $x_3 = \zeta'(x_1, x_2, t)$ выполняются кинематическое условие, условие теплообмена и динамическое. На твердой стенке $x_3 = 1$ заданы условия теплообмена и прилипания.

Безразмерные параметры задачи: $\varepsilon = A\beta h$ — параметр Буссинеска, $\omega = \frac{\tilde{\omega} h^2}{\nu}$ — безразмерная частота вибрации, $Re = \frac{ah}{\nu}$ — вибрационное число Рейнольдса, $Ga = \frac{gh^3}{\nu^2}$ — число Галилея, $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ — число Прандтля.

Для расчетов использовались параметры для силиконового масла АК 10 Silicone Fluid при температуре $25^\circ C$.

Далее рассматривается случай $Gr = 0$, т. е. отсутствие силы тяжести, $\varphi \neq 0$, и на твердой стенке задан постоянный тепловой поток. При заданных значениях параметров колебательная неустойчивость обнаружена не была, исследуется монотонная потеря устойчивости.

2. Осредненная задача. В предположении, что $w \gg 1$ и $\frac{2\pi}{\omega} \ll \min \left(\frac{L^2}{\nu}, \frac{L^2}{\chi} \right)$ к задаче (1)–(2) применяется метод осреднения [2]. Осредненная система выведена

в [3] и имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) &= -\nabla q + \Delta \mathbf{v} - GrT\gamma + \mu(\mathbf{w}_1, \nabla) \nabla \Phi_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla T) &= \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad \mathbf{w}_1 + \nabla \Phi_1 = -\gamma \sin \varphi T, \quad \operatorname{div} \mathbf{w}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $q = p - Gaz$ — конвективное давление, $\mathbf{w}_1$ и Φ_1 — первые члены разложения амплитуд пульсационной скорости и давления, влияние вибрации характеризуется $\mu = \langle f'^2 \rangle \left(\frac{ah \sin \varphi \varepsilon}{\nu} \right)^2$, где $\langle f'^2 \rangle$ — среднее по периоду функции f'^2 . Краевые условия:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} &= \frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \Phi_1 = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} - BiT = \delta_1, \quad v_3 = 0, \\ z = 1 : \quad \mathbf{v} &= 0, \quad B_1 \frac{\partial T}{\partial z} + B_0 T = \delta_2, \quad w_{13} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Задача (3)–(4) имеет решение, отвечающее состоянию покоя. В плоском случае, переходя к уравнениям для возмущений, получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - K(\psi, \Delta \psi) &= -\Delta^2 \psi - Gr \frac{\partial T}{\partial x} + \mu K\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}, T\right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(T + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + K(\psi, T) - \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad \Delta \Phi = -\frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь ψ — функция тока, а оператор $K(u, v) = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}$. Краевые условия:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \Phi &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} - BiT = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ z = 1 : \quad \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad B_1 \frac{\partial T}{\partial z} + B_0 T = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + T = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

3. Описание метода. Будем решать нелинейную задачу (5)–(6) методом многомасштабных разложений [4–6]. Введем безразмерный параметр r^2 как $r^2 = \frac{Ma^2}{\mu} = \frac{\sigma_T \chi^2 \rho^2 \beta^2}{a^2 \sin^2 \varphi}$, он не содержит градиента температуры. Разложим r^2 в ряд Тейлора в окрестности точки минимума нейтральной кривой. Перейдем к «медленным» времени и пространству: $t_m = \varepsilon^m t$, $x_m = \varepsilon^m x$ ($m = 1, 2, \dots$). Решение системы $\varphi = (\psi, T, \Phi)$ будем искать в виде ряда по степеням ε :

$$r^2 = r_c + \frac{1}{2} \varepsilon^2 r_{c2} + \dots, \quad \varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3 + \dots$$

Выражения для производных в соответствующих переменных принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t_3} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \dots$$

Ma	α_{min}	r_c	Ma	α_{min}	r_c	Ma	α_{min}	r_c
1500	0.08149	122.67631	1000	0.10071	126.82329	500	0.1465	140.62426
1400	0.08446	123.25605	900	0.10648	128.25291	400	0.16623	148.39579
1300	0.08778	123.93016	800	0.11338	130.07453	300	0.19692	162.87898
1200	0.09152	124.7237	700	0.12181	132.47482	200	0.25491	199.14012
1100	0.09579	125.67148	600	0.13246	135.78109	100	0.45	433.15633

Таблица 1. Зависимость критических α и r от Ma .

Подставим эти разложения в (5)–(6). При $O(\varepsilon)$ получаем линейную систему $L\varphi_1 = 0$, которая при фиксированном μ была численно и асимптотически исследована в [7]. Вещественное решение нелинейной задачи (5)–(6) запишем в виде:

$$\varphi = A(x_1, t_1, x_2, t_2)e^{i\alpha x}\tilde{\varphi} + \overline{A}(x_1, t_1, x_2, t_2)e^{-i\alpha x}\overline{\tilde{\varphi}}, \quad (7)$$

здесь черта означает комплексное сопряжение.

Следуя процедуре слабо-нелинейного анализа, выпишем уравнения для определения амплитуды из условий разрешимости следующих приближений. В $O(\varepsilon^2)$ -системе удаляем секулярные слагаемые — пропорциональные $e^{i\alpha x}$:

$$L\varphi_{21} = F_{21}(z)e^{i\alpha x}.$$

Выпишем условие разрешимости в виде:

$$\int_0^1 (F_{21}, \mathbf{u}^*) dz = 0,$$

где $\mathbf{u}^* = (u, v, w)$ решение сопряженной задачи. Из условия разрешимости получается уравнение для амплитуды A вида:

$$\Lambda \frac{\partial A}{\partial t_1} + \Gamma \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0.$$

Далее будем считать, что амплитуда A зависит от переменной $\tilde{x}_1 = \Gamma t_1 - \Lambda x_1$. Окончательно решения задачи для второго приближения имеет вид

$$\varphi_2 = \frac{\partial A}{\partial x_1} \varphi_{21} e^{i\alpha x} + A \overline{A} \varphi_{20} + A^2 \varphi_{22} e^{i2\alpha x} + B(x_1, x_2, t_1, t_2) \varphi_{11} e^{i\alpha x},$$

где $B(x_1, x_2, t_1, t_2) \varphi_{11} e^{i\alpha x}$ — произвольное решение однородной задачи.

Подставляя найденные решения первого и второго приближения в правые части системы $O(\varepsilon^3)$, выделим секулярные слагаемые и, аналогично второму приближению, запишем условие разрешимости.

4. Результаты. Линейная задача решалась аналитически (с помощью Maple) и численно (с помощью стрельбы, реализованной в пакете MATLAB).

Были построены нейтральные кривые $r^2(\alpha)$. Вид нейтральных кривых в зависимости от параметра Ma приведен на рис. 1. Параметр Ma можно изменять за счет изменения градиента температуры.

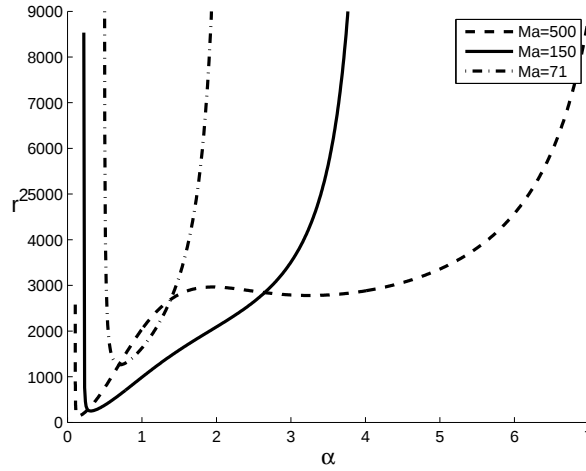


Рис. 1. Нейтральные кривые при разных Ma .

Из рис. 1 видно, что нейтральная кривая монотонной устойчивости может иметь несколько локальных минимумов. В качестве критического волнового числа α выберем то, при котором нейтральная кривая имеет глобальный минимум. Вычисления показывают, что критическое значение α находится вблизи нуля, что соответствует длинноволновой неустойчивости.

Было исследовано поведение точек минимума в зависимости от параметра Ma (рис. 2). Числовые значения приведены в таблице 1, из которой видно, что с увеличением Ma уменьшается критическое значение r_c , а, значит, требуется все большая амплитуда вибрации, чтобы подавить конвекцию.

Условие разрешимости $O(\varepsilon^3)$ -системы дает уравнение вида:

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} = \tilde{c}_1 \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}_1^2} + \tilde{c}_2 A + \tilde{c}_3 A |A|^2. \quad (8)$$

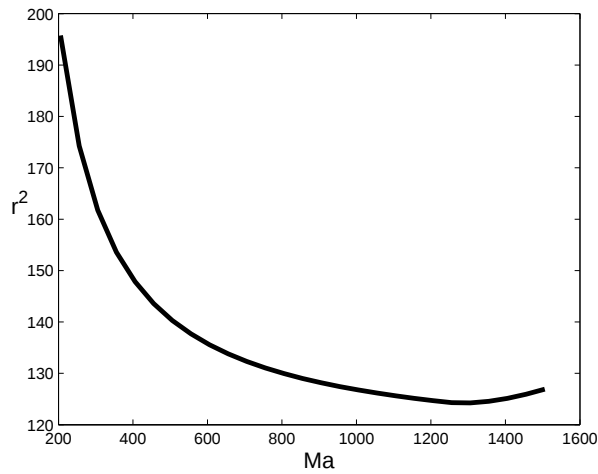


Рис. 2. Зависимость критического значения r^2 от Ma .

Ma	α_{min}	$\tilde{c}_1$	$\tilde{c}_2$	$\tilde{c}_3$
800	0.1134	2.9531e-001	1.2474e-001	-7.4015e+002
500	0.1465	1.7708e-001	1.3530e-001	-6.8266e+002
200	0.2549	5.9196e-002	1.9446e-001	-5.5531e+002

Таблица 2. Коэффициенты $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$.

где коэффициенты $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$ считаются численно и приведены в таблице 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-00582-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Lyubimov D. V.* Thermovibrational flows in a fluid with a free surface // Microgravity Quarterly. 1994. V. 4. Pp. 117–122.
- [2] *Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.* О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР, МЖГ. 1966. № 5. С. 51–55.
- [3] *Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л.* Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. 2002. Т. 66. С. 573–583.
- [4] *Newell A. C.* Finite bandwidth, finite amplitude convection // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 38, part 2. Pp. 279–303.
- [5] *Gibbon J. D., McGuinness M. J.* Amplitude equations at the critical points of unstable dispersive physical systems // Proc. R. Soc. Lond. A. 1981. № 377. pp. 185–219.
- [6] *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
- [7] *Зеньковская С. М., Прозоров О. А.* Возникновение конвекции в горизонтальном слое со свободной поверхностью // Известия ВУЗов, Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск «Актуальные проблемы математической гидродинамики». 2009. С. 87–91.

Goncharenko A. A., Prozorov O. A. *Nonlinear vibrational Marangoni convection.* Onset of vibrational convection in a layer of fluid with Marangoni effect is studied. Neutral stability curves of vibration amplitude versus wave number are calculated. Marangoni number is held fixed. Nonlinear amplitude equations with the use of weakly nonlinear analysis are derived.

ЗАДАЧА КОШИ В ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Гукасян Л. С.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

В настоящей работе предложен метод решения обратной коэффициентной задачи на основе исследования задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.

Введение. Значительное число задач физики и техники приводит к линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных (уравнения математической физики). Установившиеся процессы различной физической природы описываются уравнениями эллиптического типа.

Точные решения краевых задач для эллиптических уравнений удается получить лишь в частных случаях. Поэтому в большинстве своем решение эллиптических уравнений можно построить приближенно. Одним из наиболее универсальных и эффективных методов, получивших в настоящее время широкое распространение для приближенного решения уравнения математической физики, является метод конечных разностей или метод сеток [1, 2].

1. Постановка задачи. В данной рассмотрим установившиеся крутильные колебания стержня с переменным модулем сдвига с поперечным сечением S [3, 4]. Уравнение установившихся колебаний в безразмерном виде имеет следующий вид:

$$(gu_{,x_1})_{,x_1} + (gu_{,x_2})_{,x_2} + \varkappa^2 u = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим задачу решения дифференциального уравнения (1) с переменными коэффициентами в области $S = [0, 1] \times [-c, c]$ со следующими граничными условиями

$$g \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=1} = p_0(x_2), \quad g \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\pm c} = 0, \quad u|_{x_1=0} = 0. \quad (2)$$

К сожалению, решение как прямой, так и обратной задачи даже в простой области типа прямоугольника может быть построено лишь численно, на основе либо конечноэлементного подхода, либо разностных аппроксимаций.

2. Построение решения на основе разностной трактовки

2.1. Исследование прямой задачи. Прямая задача состоит в нахождении функции $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющей краевым условиям (2) при заданном законе изменения $g(x_1, x_2)$ в некотором диапазоне изменения $\varkappa$.

В методе разностных аппроксимаций применен пятиточечный шаблон для вторых производных и двухточечный для первых производных (левая разностная производная) [5]. Введем прямоугольную сетку с шагами h_1, h_2 по координатным осям x_1, x_2 соответственно. Тогда обозначим узловые переменные $u_{i,j} = u(ih_1, -c + jh_2)$ и $g_{i,j} = g(ih_1, -c + jh_2)$.

После использования разностных аппроксимаций получим следующие граничные условия

$$u_{N,j} = p_{0j}/g_{i,j} + u_{N-h_1,j}, \quad u_{i,-c} = u_{i,-c+h_2}, \quad u_{i,M} = u_{i,M-h_2}, \quad u_{0,j} = 0. \quad (3)$$

Далее составим систему линейных алгебраических уравнений. Положим шаг аппроксимации по обеим осям одинаковый. Учитывая граничные условия (1.2), которые позволяют исключить граничные узловые точки, получим

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} g_{i+h,j} (u_{i+h,j} - u_{i,j}) + g_{i,j} (u_{i-h,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j-h}) + g_{i,j+h} (u_{i-h,j} - u_{i,j}) + h^2 \mathfrak{x}^2 u_{i,j} = 0. \quad (4)$$

Система (4) имеет решение, причем единственное. Решая систему (4), находим узловые значения функции $u_{i,j}$.

2.2. Исследование обратной задачи. Целью обратной задачи является восстановление неизвестной функции $g(x_1, x_2)$ по известным узловым значениям функции $u(x_1, x_2)$, полученным в результате решения прямой задачи методом разностных аппроксимаций, описанным в разделе 2.1. Основной проблемой на этом пути является некорректная задача вычисления производной от функции, заданной таблично.

Для оценки точности разностного подхода введем в рассмотрение относительную погрешность

$$\nu = \max_{\substack{i \in [1, N-1] \\ j \in [1, M-1]}} \left| \frac{g''_{i,j} - g_{i,j}}{g''_{i,j}} \right| \cdot 100\%,$$

где $g''_{i,j}$ — точное решение, $g_{i,j}$ — полученное.

Для аналогии с реальными экспериментами функция $u(x_1, x_2)$, используемая как входная информация для восстановления $g(x_1, x_2)$, была зашумлена [6].

На рис. 1, 2 представлены результаты восстановления функции $g(x_1, x_2)$ с зашумленными входными данными $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$, $\mathfrak{x} = 1$.

При увеличении величины δ наблюдается сильный рост погрешности определяемой функции, что связано с некорректностью изучаемой задачи. Для улучшения

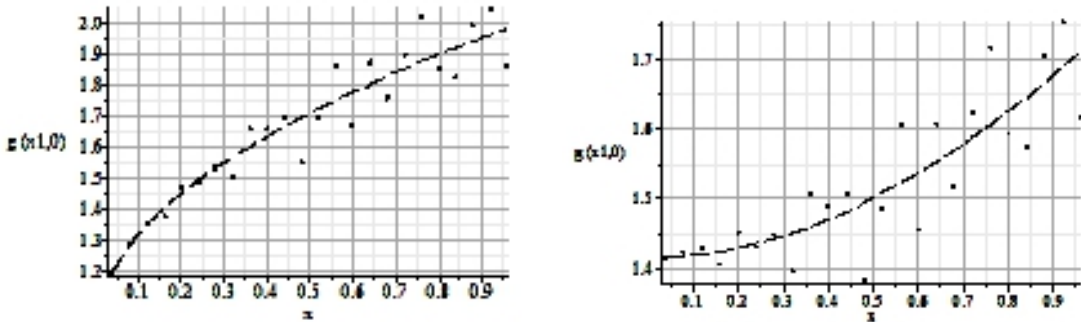


Рис. 1. Слева — $g(x_1, x_2) = 1 + x_1^{(2+x_2^2)^{-1}}$, $\nu = 8.22\%$; справа — $g(x_1, x_2) = \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2}$, $\nu = 7.38\%$.

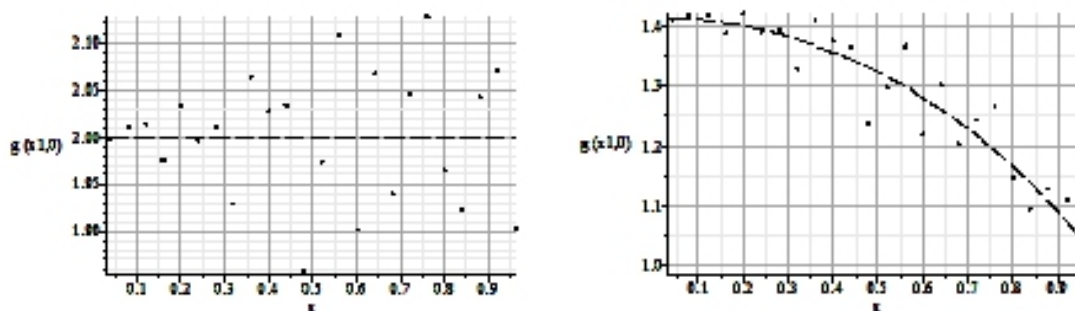


Рис. 2. Слева — $g(x_1, x_2) = 2 + \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$, $\nu = 8.91\%$; справа — $g(x_1, x_2) = \sqrt{2 - x_1^2 + x_2^2}$, $\nu = 7.01\%$.

качества реконструкции необходимо использовать регуляризующие процедуры, например сплайн аппроксимации при вычислении производных [7].

Заключение. Предложен способ решения обратной задачи о восстановлении неизвестной функции, характеризующей распределение модуля сдвига в плоской области. Решение построено на основе разностных аппроксимаций и анализе дискретной задачи Коши. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции переменного модуля сдвига различных типов, проанализирована точность решения в зависимости от степени зашумления входных данных.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
- [2] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
- [3] Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
- [4] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [5] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
- [6] Ватульян А. О., Бурьян А. Ю., Осипов А. В. Об идентификации переменной жесткости при анализе поперечных колебаний балки // Вестник Донского гос. техн. ун-та. 2010. Т. 10. № 6. С. 825–833.
- [7] Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир. 1972. 316 с.

Gukasyan L. S. *The Cauchy problem in the theory of inverse problems.* A method for solving the inverse problem based on a study of the Cauchy problem for first order differential equation with variable coefficients.

ЛИНЕЙНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С ВЫРОЖДЕНИЕМ. ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА

Гусаченко В. В.^{*}, Ильичева Е. А.^{*}, Левенштам В. Б.^{*,**}

^{*}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

^{**}Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ

Математическими моделями многих процессов в механике сплошных сред служат параболические задачи. Данная работа посвящена анализу одного класса таких задач.

1. Отсутствие обобщенной присоединенной функции.

Постановка задачи.

В цилиндре $Q = \overline{\Omega} \times R$ рассмотрим задачу о классических $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодических по времени t решениях линейного параболического уравнения второго порядка с большим параметром ω и граничным условием Дирихле

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left(L_0 + \frac{1}{\omega} L_1 \right) u(x, t) + \sum_{1 \leq |k| \leq m} \left(M_k u(x, t) + d_k(x) \right) e^{ik\omega t} + d_0(x), \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in N$, с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$; $\Gamma = \partial\Omega \times R$; L_0 и L_1 — дифференциальные выражения второго порядка, а M_k — первого порядка; $d_0(x)$, $d_k(x)$ — бесконечно дифференцируемые на $\overline{\Omega}$ функции, $1 \leq |k| \leq m$. Дифференциальные выражения L_0 и L_1 имеют вид:

$$L_0 u(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^0(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c^0(x) u(x),$$

$$L_1 u(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^1(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^1(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c^1(x) u(x),$$

где $a_{ij}^k(x)$, $b_i^k(x)$, $c^k(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — вещественные функции, $i, j = \overline{1, n}$, $k = 0, 1$. Выражение L_0 при этом эллиптическое, то есть для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \xi_i \xi_j > 0. \quad (3)$$

Выражения M_k имеют вид

$$M_k u(x) = \sum_{i=1}^n d_{ki}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + g_k(x) u(x),$$

где $g_k(x), d_{ki}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, причем $d_{ki}(x)$ и $d_{-ki}(x)$, $g_k(x)$ и $g_{-k}(x)$, $d_k(x)$ и $d_{-k}(x)$ — комплексно сопряжены, $i = \overline{1, n}$, $1 \leq |k| \leq m$, $d_0(x)$ — вещественно.

С дифференциальным выражением L_0 и граничным условием (2) свяжем обычным образом действующий в $L_2(\Omega)$ эллиптический оператор A с областью определения $D(A) = \{v \in W_2^2(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\} : Av = L_0v, v \in D(A)$. Будем считать, что $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A , которому отвечает собственная функция $a_0(x)$. Как известно, в этом случае оператор A^* , сопряженный с A , так же имеет простое собственное значение $\mu = 0$, которому отвечает некоторая собственная функция $z_0(x)$.

Введем в рассмотрение дифференциальное выражение

$$Mu(x) \equiv L_1u(x) + \sum_{1 \leq |k| \leq m} \frac{M_{-k}M_k u(x)}{ik} \quad (4)$$

и оператор B , действующий в $L_2(\Omega)$ по правилу $Bv = Mv$, $v \in D(B) = D(A)$. Сделаем следующее предположение, которое для удобства ссылки обозначим через (П). Предположим, что $a_0(x)$ не имеет присоединенных функций относительно пары операторов A, B (см. [8]), то есть уравнение $Av = -Ba_0$ не разрешимо.

Основной результат. В некоторой погранполоске области Ω перейдем к криволинейной системе координат

$$x = (\psi, r), \quad \rho = r\sqrt{\omega}.$$

Полное формальное асимптотическое разложение $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодического по времени t решения (более кратко: "формальное $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодическое по t решение") задачи (1), (2) будем строить в виде:

$$u_\omega(x, t) = \omega c_{-2}a_0(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \left(u_k(x) + w_k(\psi, \rho) + c_k a_0(x) + y_k(x, \tau) + z_k(\psi, \rho, \tau) \right). \quad (5)$$

Здесь $\tau = \omega t$; $c_k \in R$; $u_k : \bar{\Omega} \rightarrow R$ и $y_k : \bar{\Omega} \times R \rightarrow R$ — регулярные функции, а $w_k(\psi, \rho)$ и $z_k(\psi, \rho, \tau)$ — погранслоиные, то есть $w_k(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0$, $z_k(\psi, \rho, \tau)|_{\rho=\infty} = 0$. При этом функции $y_k(x, \tau)$, $z_k(\psi, \rho, \tau)$ — 2π -периодичны по τ с нулевым по τ средним, то есть

$$\langle y_k(x, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_k(x, \tau) d\tau = 0, \quad \langle z_k(\psi, \rho, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_k(\psi, \rho, \tau) d\tau = 0.$$

Прежде чем сформулировать основной результат определим четыре типа линейных задач:

$$1) \begin{cases} L_0 u(x) = P(x), \\ (P(x), z_0(x)) = 0, \\ (u(x), z_0(x)) = 0, \\ u(x)|_{\partial\Omega} = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{\partial y(x, \tau)}{\partial \tau} = \sum_{1 \leq |k| \leq ml} f_k(x) e^{ik\tau}, \\ \langle y(x, \tau) \rangle = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{\partial^2 w(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} = B(\psi, \rho), \\ w(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} l_0(\psi) \frac{\partial^2 g(\psi, \rho)}{\partial^2 \rho} - ik g(\psi, \rho) = C(\psi, \rho), \\ g(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus 0, \quad \rho \in [0, \infty).$$

Здесь $\psi \in \partial\Omega$ играет роль параметра; $P(x)$, $f_k(x)$ — известные бесконечно гладкие на $\overline{\Omega}$ функции, $1 \leq |k| \leq ml$, $l \in \mathbb{N} \setminus 0$; $l_0(\psi) > 0$ — коэффициент при второй производной по ρ в представлении L_0 в криволинейных координатах; $F(\psi, \rho)$ и $C(\psi, \rho)$ — известные погранслойные квазимногочлены по ρ , коэффициенты которых зависят от ψ .

Введем обозначения частичных сумм ряда (5):

$$u_\omega^k(x, t) = \omega c_{-2} a_0(x) + \sum_{s=-1}^k \omega^{-\frac{s}{2}} \left(u_s(x) + w_s(\psi, \rho) + c_s a_0(x) + y_s(x, \tau) + z_s(\psi, \rho, \tau) \right),$$

где $k \geq -1$.

Теорема 1. *Формальное асимптотическое $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическое по времени t решение задачи (1), (2) в условиях п. 1 может быть представлено рядом (5) с вещественными коэффициентами, построение каждого из которых сводится к решению конечного числа задач типа 1)–4).*

Замечание 1. *В формулировке теоремы говорится о задачах 1)–4), поскольку этот список вполне характеризует используемый алгоритм построения коэффициентов ряда (5). Однако, поскольку задачи 2)–4) решаются с помощью конечного числа арифметических действий, то можно было бы говорить, что построение коэффициентов (5) сводится к решению конечного числа задач вида 1).*

2. Построение формальной асимптотики в условиях существования одной присоединенной функции.

Постановка задачи. Вернемся к задаче о $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодических по t решениях системы (1), (2). Будем считать, что для нее выполнены требования п. 1, исключая предположение (П), при дополнительном условии

$$d_{ki} \equiv 0, \quad (i = \overline{1, n}, \quad 1 \leq |k| \leq m).$$

Таким образом, в п. 2 M_k — гладкие функции. Наряду с дифференциальным выражением M (см. (4)) введем в рассмотрение дифференциальное выражение N :

$$Nu = - \sum_{1 \leq |k| \leq m} \frac{M_k L_0}{k^2} (M_{-k} u) - \sum_{\substack{1 \leq |k|, |l|, |s| \leq m, \\ k+l+s=0}} \frac{M_k M_l M_s u}{s(s+l)}, \quad u \in W_2^2(\Omega).$$

Предположим, что справедливо равенство $Aa_1(x) + Ma_0(x) = 0$, а уравнение $Az(x) + Ma_1(x) + Na_0(x) = 0$ не имеет решений.

Основной результат. Асимптотическое разложение $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодического по времени t решения задачи (1), (2) будем строить в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \omega^2 C_{-4} a_0(x) + \omega^{\frac{3}{2}} D_{-4} a_0(x) + \\ & + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-k} [u_{2k+1}(x) + w_{2k+1}(\psi, \rho) + C_{k-2} a_0(x) + \\ & + C_{k-3} a_1(x) + y_{2k+1}(x, \tau) + z_{2k+1}(\psi, \rho, \tau)] + \\ & + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{\frac{-2k-1}{2}} [u_{2k+2}(x) + w_{2k+2}(\psi, \rho) + D_{k-2} a_0(x) + \\ & + D_{k-3} a_1(x) + y_{2k+2}(x, \tau) + z_{2k+2}(\psi, \rho, \tau)], \quad \tau = \omega t. \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 2. Формальное асимптотическое $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическое по времени t решение задачи (1), (2) в условиях п. 2 может быть представлено рядом (6) с вещественными коэффициентами, построение каждого из которых сводится к решению конечного числа задач 1)–4).

В этом случае также справедливо замечание 1 с заменой в его формулировке (3) на (6).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№ 12-01-00402-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (заявки: 2012-1.1-12-000-1003-1775, 2012-1.2.1-12-000-1001-4594).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [2] Симоненко В. Б. Обоснование метода усреднения для абстрактных параболических уравнений // Матем. сб. 1970. Т. 81 (123), № 1. С. 53–61.
- [3] Левенштам И. Б. Метод усреднения и эффективное построение старших приближений метода усреднения // Изв. вузов. Математика. 1978. № 3. С. 48–55.
- [4] Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции // Сиб. мат. журнал. 1993. Т. 34. № 2. С. 92–109.
- [5] Левенштам В. Б. Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Журн. выч. матем. и мат. физ. 2000. Т. 40, № 9. С. 1416–1424.
- [6] До Н. Т., Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае // Журн. выч. матем. и мат. физ. 2011. Т. 51, № 6. С. 1043–1055.
- [7] До Н. Т., Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Диф. уравн. 2012. Т. 48, № 8. С. 1190–1192.
- [8] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений // УМН. 1960. Т. 15, № 3. С. 3–80.

Gusachenko V. V., Ilicheva E. A., Levenshtam V. B. *Linear parabolic problem with degeneration. High-frequency asymptotic.* We considered the linear parabolic problem with a second-order high-frequency terms. Elliptic operator of its appropriate limit (averaged) of the is assumed degenerate. For the perturbed built complete formal asymptotic solution periodic in time.

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Жеребко А. И.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

С помощью программной оболочки анализа задач нелинейной теории упругости решена двумерная задача об одноосном растяжении прямоугольника с круглым отверстием из гиперупругого материала Блейтца и Ко. Проанализировано влияние размеров и положения неоднородности (круглого отверстия) на диаграмму растяжения. Исследовано влияние положения отверстия на диаграмму растяжения и на параметр «утонения» образца для случая сдвига отверстия вдоль замкнутого контура (в форме квадрата и окружности).

1. Введение. Важной проблемой современной механики сплошной среды является вопрос идентификации параметров модели материала. Одним из наиболее простых и доступных методов решения этой проблемы является анализ, основанный на исследовании классических диаграмм растяжения. При этом стоит отметить, что реальные материалы, как правило, являются не идеальными и содержат дефекты в виде различных неоднородностей. В этой связи возникает вопрос о степени влияния наличия и размеров дефекта, а также его местоположения на свойства диаграммы растяжения. Для многих постановок задач ответ на этот вопрос не может быть получен аналитически — его решение требует организации и проведения цикла вычислительных экспериментов. Для решения обозначенных выше проблем, с помощью системы компьютерной алгебры Maple разработана программная оболочка [1], позволяющая пользователю интерактивно решать и анализировать некоторые типы задач нелинейной теории упругости. Возможности использования разработанной системы, в том числе для решения некоторых типов обратных задач, продемонстрированы на примере задачи о растяжении прямоугольника с отверстием из гиперупругого материала Блейтца и Ко.

2. Постановка задачи. В отсчетной конфигурации образец имеет форму прямоугольника высоты h и ширины w . Нижняя грань прямоугольника жестко закреплена, к верхней прикладывается нагрузка заданной интенсивности, P , боковые грани свободны от нагрузок. В центре прямоугольника имеется круглое отверстие радиуса r (рис. 1). Необходимо с помощью программной оболочки анализа задач нелинейной теории упругости провести сравнительный анализ двух параметров образца в актуальной конфигурации — удлинения и «утонения», для случаев линейной и нелинейной теории упругости; с помощью смещения отверстия вдоль замкнутого контура необходимо оценить влияние положения отверстия на исследуемые характеристики, сравнить полученные результаты для прямоугольника с отверстием с соответствующими данными для прямоугольника без отверстия.

В рамках цикла вычислительных экспериментов в разработанной программной оболочке оценим влияние положения отверстия на диаграмму растяжения, смещая центр отверстия вдоль замкнутого контура в форме квадрата (рис. 1а) и окружности (рис. 1б)

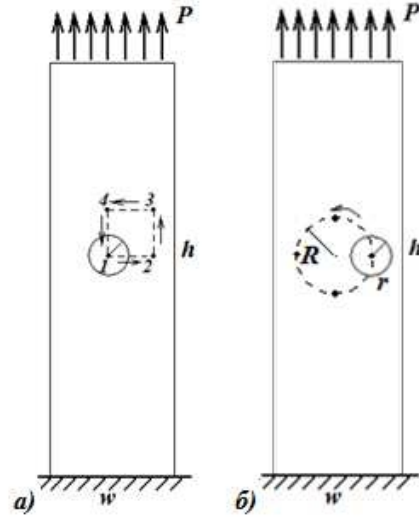


Рис. 1. Моделирование эксперимента со смещением отверстия: а) вдоль квадратного контура; б) вдоль окружности.

Деформационный закон для данной задачи задается следующими соотношениями:

$$X_1 = X_1(x_1, x_2), \quad X_2 = X_2(x_1, x_2), \quad X_3 = x_3, \quad (1)$$

где x_i , X_j — координаты точек прямоугольника в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно. В случае нелинейной теории упругости и с учетом (1), уравнения равновесия формально имеют вид:

$$\frac{\partial D_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{i2}}{\partial x_2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где D_{ij} — компоненты тензора Пиолы. Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\mathbf{u}|_{S_1} = 0, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_{S_2} = 0, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_{S_3} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_{S_4} = 0; \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_{S_5} = 0; \quad (3)$$

где $\mathbf{u}$ — перемещение, S_1 — нижняя сторона, S_3 — верхняя сторона, S_2, S_4 — боковые стороны, и S_5 — граница отверстия, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к соответствующим сторонам [2]. В качестве выражения упругого потенциала для решения этой задачи была выбрана функция энергии материала Блейтца и Ко (в упрощенном варианте) [2]:

$$W = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right), \quad (4)$$

где I_k — главные инварианты меры деформации Коши. Подробно процесс решения нелинейной задачи рассмотрен в [1].

В случае линейной теории упругости в выражениях (1)–(3) тензор Пиолы $\mathbf{D}$ заменится тензором Коши $\mathbf{T}$, а в автоматическом генерировании краевой задачи равновесия с помощью разработанной программной оболочки [1] не будет острой

необходимости ввиду наглядности и относительной простоты определяющих соотношений для данной задачи.

3. Влияние размеров и положения отверстия на исследуемые характеристики. Влияние расположения отверстия на диаграммы растяжения исследовано с помощью смещения центра отверстия относительно центрального положения вдоль замкнутого контура в форме квадрата (рис. 1а) и окружности (рис. 1б), в рамках цикла вычислительных экспериментов в разработанной программной оболочке. Рассматриваемые задачи решены в линейной и нелинейной постановках и для двух случаев нагрузок: в первом случае нагрузка P подобрана таким образом, что величина относительного удлинения прямоугольника DL после ее приложения находится в пределах линейной теории (составляет около 1%); во втором — соответствует нелинейной теории (составляет почти 12%). В данной задаче прямоугольник имеет высоту $h = 10$ и ширину $w = 2$, радиус отверстия $r = 0,25$. Далее приведем полученные результаты.

1) $P = 0.02\mu$ (относительное удлинение образца 1%):

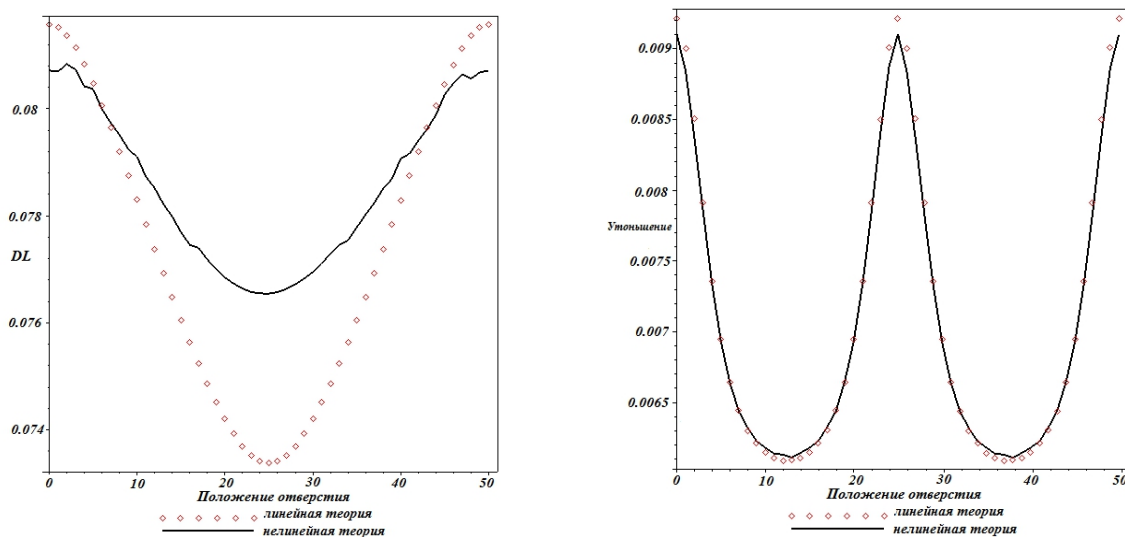


Рис. 2.

На рис. 2 представлены диаграммы растяжения и графики зависимости величины параметра «утоньшения» прямоугольника от положения отверстия при его смещении вдоль замкнутого контура в форме окружности (рис. 1б) для случаев линейной теории упругости (пунктирная линия) и нелинейной теории (сплошная). Как видно из этих рисунков: линейная и нелинейная теории в данном случае приводят к незначительным расхождениям в результатах, что вполне объясняется тем фактом, что прикладываемая нагрузка приводит к удлинению образца не более 3%.

2) $P = 0.25\mu$ (относительное удлинение образца — 12%):

Иначе дело обстоит в случае, когда приложенная нагрузка ведет к удлинению прямоугольника на величину 12%.

Из рис. 3 видно, что разница в величине параметров удлинения и «утоньшения» образца более значительная, чем в первом случае. Общим фактом для обоих

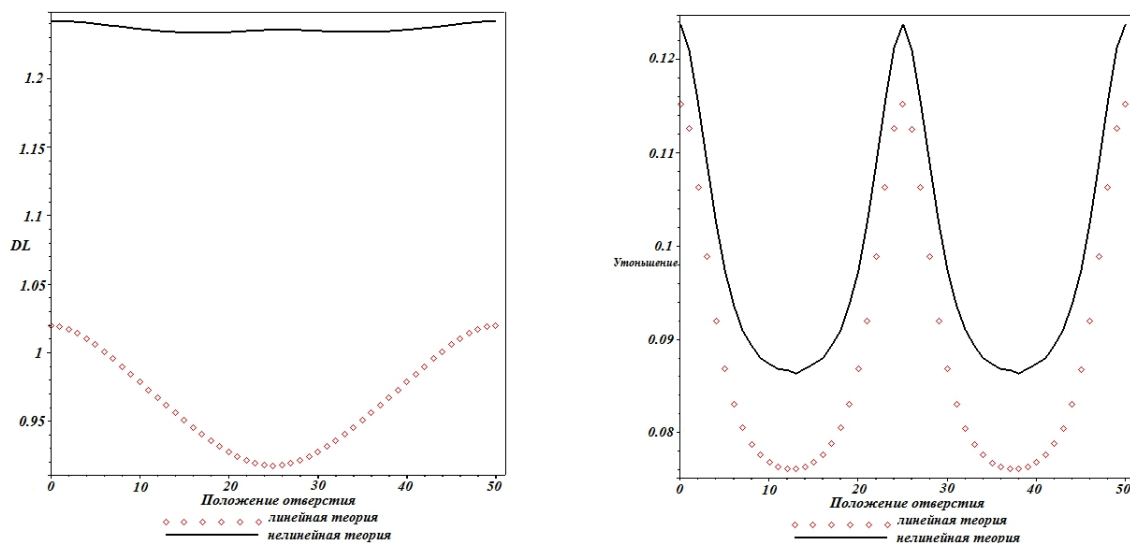


Рис. 3.

случаев является схожесть формы полученных кривых, свидетельствующая о достаточно весомом влиянии положения отверстия на величину исследуемых параметров. Для обоих случаев максимальная разница величин удлинения и «утоньшения» при различных положениях отверстия (в пределах рассматриваемого контура) и фиксированной величине нагрузки составила почти 10%. К похожим результатам можно прийти и в случае смещения отверстия вдоль контура квадратной формы.

На рис. 4 представлены обобщенные диаграммы растяжения для прямоугольника с отверстием в центре (сплошная линия) и без него (пунктирная линия) в случаях линейной и нелинейной теории упругости.

Все результаты получены с помощью интеграции возможностей пакета компьютерной алгебры Maple и пакета конечно-элементного моделирования FlexPDE [3].

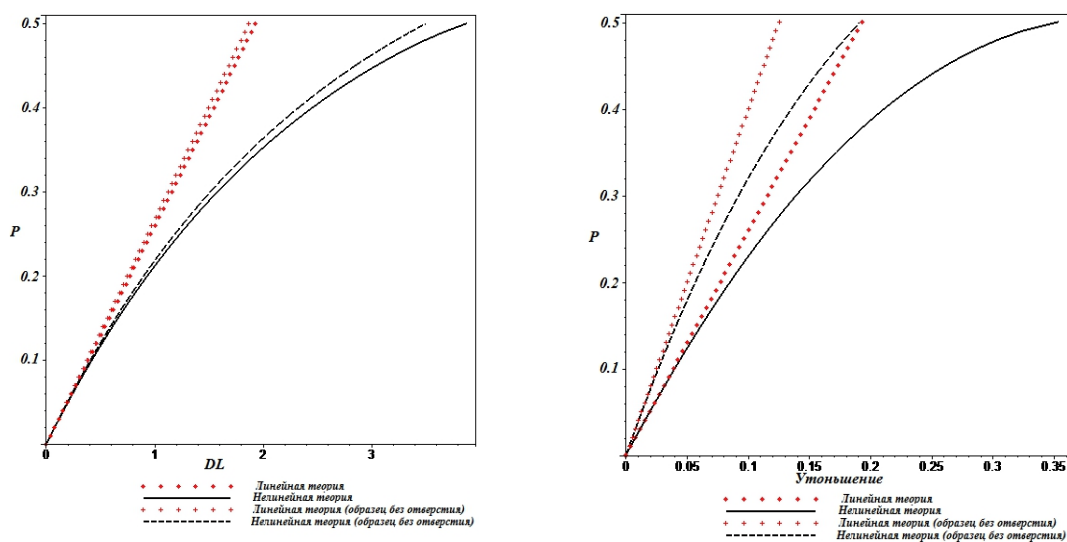


Рис. 4.

3. Заключение. С учетом полученных результатов можно заключить: рассмотренная модель является «чувствительной» к наличию некоторых типов неоднородностей материала, в частности, к присутствию круглого отверстия, его положению и размерам. С помощью же разработанной программной оболочки можно провести численный анализ этого влияния, тем самым упростив подбор параметров модели, с поправками на неоднородность структуры исследуемого материала.

На примере решения задачи об одноосном растяжении прямоугольника продемонстрированы основные достоинства разработанной программной оболочки: интеграция методов компьютерной алгебры и конечно-элементного моделирования, автоматизированный процесс решения задач, возможность интерактивной работы с получаемыми данными (непрерывная обработка, визуализация, анализ). Резюмируя все сказанное, можно сделать вывод о достаточно широких возможностях разработанного интерфейса в области идентификации параметров моделей материалов и корректного выбора самих моделей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жеребко А. И., Карякин М. И. Программная оболочка анализа задач нелинейной теории упругости // Сборник трудов XV международной конференции: Современные проблемы механики сплошной среды, 4–7 декабря. Ростов-на-Дону, 2011. Т. 2. С. 76–80.
- [2] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 320 с.
- [3] Backstrom G. Fields of Physics by Finite Element Analysis // FlexPDE: finite element model builder for Partial Differential Equations. (<http://www.pdesolutions.com/cgi-bin/getbook50>).

Zherebko A. I. *Computer-aided analysis of two-dimensional nonlinear elastic problems.* The problem on the uniaxial extension of a rectangle of hyperelastic Blatz-and-Ko material containing a round hole has been solved using the programm shell for the nonlinear elastic problems analysis. The influence of size and location of the inhomogeneity (a round hole) on the stretch diagram is examined. The influence of the hole location on the «thinning» parameter of the sample is investigated. Cases of shifting the hole along a square-shaped curve and a round-shaped curve are considered. The comparison of the results obtained for linear and nonlinear theories is presented.

О ВЛИЯНИИ КРИВИЗНЫ КОНТАКТИРУЮЩИХ ЦИЛИНДРОВ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ГЛУБИНЕ ИХ КОНТАКТА

Журавлев Г. А., Бабенко И. С.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Предложен уточненный метод определения эффективных глубинных напряжений в области контакта упругих круговых цилиндров. Показано, что использование решений Буссинеска–Черутти (с моделированием анализируемого цилиндра полупространством) приводит к существенному искажению роли кривизны контактирующих тел и к значительным погрешностям контактных расчетов.

Цель настоящей работы — дать уточненное решение задачи определения эффективных (характеризующих прочностные свойства контактирующих тел) напряжений для нагруженных контактным давлением упругих цилиндров. Для примера рассмотрены октаэдрические напряжения, которые, в частности, позволяют лучше (нежели нормальные или касательные напряжения) учесть изменение объемного напряженного состояния материала.

На базе классического решения задачи Н. М. Беляева [1] об определении глубинных напряжений при эллиптической площадке контакта упругих круговых цилиндров бесконечной длины Б. С. Ковальским [2] дан анализ октаэдрических глубинных напряжений. В основу исследований [1, 2] положены решения плоской и пространственной контактных задач Герца и решение Буссинеска–Черутти с заменой исследуемого цилиндра полупространством.

Результаты [1, 2] получили универсальное применение в теории и практике контактных расчетов. Считается, что относительные величины максимальных напряжений (например, октаэдрических или касательных, отнесенных к максимальному контактному напряжению) и глубины их залегания (отнесенной к малой полуоси эллиптической площадки контакта) в области контакта упругих круговых цилиндров не зависят непосредственно от кривизны контактирующих тел. Более того, до сих пор не ставились под сомнение выводы [1, 2] и о том, что эти относительные величины полностью определены параметром a/b (a и b — размеры большой и малой полуосей эллиптической площадки контакта, соответственно), характеризующим только форму эллиптической площадки их контакта. А характеристики напряженного состояния и уровни относительных (в том числе — максимальных) глубинных напряжений для контактирующих цилиндров считались одинаковыми даже если они имели существенно разные радиусы.

С другой стороны, работами [3–5] были выявлены эффекты контактного взаимодействия упругих тел с локализованной областью контакта (традиционно моделируемых упругими цилиндрами), показывающие существенное занижение роли кривизны контактирующих тел традиционными ее оценками. Такое сложное влияние (возрастающее с увеличением локализации контакта) кривизны контактирующих тел на эффективные контактные [3, 4] и глубинные [5] напряжения

проявляется в результате эффекта роста уровня компенсационных деформаций этих тел при снижении их кривизны.

Столь явная противоречивость показателей роли кривизны контактирующих тел, моделируемых упругими цилиндрами, привела к необходимости детальной оценки традиционных условий моделирования контакта упругих тел. Как результат, исследованием [6], наоборот, выявлено заметное завышение роли кривизны контактирующих тел традиционными ее оценками. Причиной такого искажения роли кривизны оказалось нарушение граничных условий для цилиндра при использовании приема Буссинеска–Черутти с заменой цилиндра полупространством. Уровень такого завышения роли кривизны возрастает по мере снижения радиуса цилиндра.

В настоящей статье поставлена задача выявления и оценки уровня зависимости основных параметров действия максимальных октаэдрических напряжений (их величины и глубины залегания) от радиуса цилиндра и ширины площадки контакта без использования решений Буссинеска–Черутти с заменой исследуемого цилиндра полупространством. В основу настоящего исследования нами положено точное решение задачи Н.И. Мухелишвили [7] о сжатии отдельно взятого цилиндра противоположно направленными сосредоточенными силами:

$$\sigma_x(r_1, \omega_1, r_2, \omega_2) = -\frac{\sigma_H(x)}{\pi}(2A_1 + 2A_2 - L_{p\alpha});$$

$$\sigma_z(r_1, \omega_1, r_2, \omega_2) = -\frac{\sigma_H(x)}{\pi}(2B_1 + 2B_2 - L_{p\alpha}),$$

где $A_k = 2 \frac{\sin(\omega_k)^2 \cos(\omega_k)}{r_k}$, $B_k = 2 \frac{\cos(\omega_k)^3}{r_k}$, $k = 1, 2$; $\sigma_x(x, z)$ и $\sigma_z(x, z)$ — компоненты тензора напряжений (рис. 1).

Октаэдрические напряжения [2] определены как:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2},$$

где $\sigma_y = \mu(\sigma_x + \sigma_z)$.

Для сравнения полученных результатов с решением [2] полуширина площадки контакта b_H и закон распределения контактного давления $\sigma_H(x)$ здесь соответствуют формулам плоской контактной задачи Герца. При этом контактное давление распределено по поверхности исследуемого цилиндра. В расчетах параметров контакта приняты одинаковые упругие свойства материалов (модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и коэффициент Пуассона $\mu = 0,28$) контактирующих цилиндров — исследуемого с варьируемым радиусом R_c и некоего базового, с радиусом R_b .

Величины $r_1, \omega_1, r_2, \omega_2$ (рис. 1) вычисляются для каждой расчетной точки (x, z) по формулам:

$$\begin{aligned} L_{p1} &= R_c \sin \alpha; & \omega_1 &= \arctan\left(\frac{x - L_{p1}}{z - L_{p2}}\right); & r_1 &= \frac{x - L_{p1}}{\sin \omega_1}; \\ L_{p2} &= R_c(1 - \cos \alpha); & \omega_2 &= \arctan\left(\frac{x - L_{p1}}{L_{p3} - z}\right); & r_2 &= \sqrt{(x - L_{p1})^2 + (L_{p3} - z)^2}; \\ L_{pp} &= 2R_c \cos \alpha; & L_{p3} &= L_{pp} + L_{p2}. \end{aligned}$$

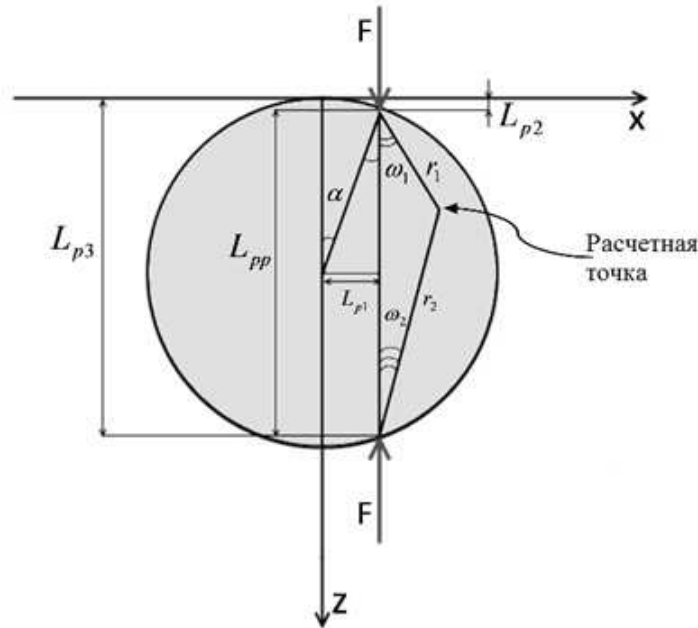


Рис. 1. Исследуемый цилиндр (нагруженный противоположно направленными силами F , смещенными относительно оси z).

Аналогично решению задачи о действии на цилиндр герцевского контактного давления [6] запишем:

$$\sigma_x = - \int_{\alpha_b} -\alpha_b \frac{\sigma_H(\alpha)}{\pi} (2A_1(\alpha) + 2A_2(\alpha) - L_{p\alpha}(\alpha)) R_c d\alpha;$$

$$\sigma_z = - \int_{\alpha_b} -\alpha_b \frac{\sigma_H(\alpha)}{\pi} (2B_1(\alpha) + 2B_2(\alpha) - L_{p\alpha}(\alpha)) R_c d\alpha,$$

где $A_k(\alpha) = 2 \frac{\sin(\omega_k(\alpha))^2 \cos(\omega_k(\alpha))}{r_k(\alpha)}$, $B_k = 2 \frac{\cos(\omega_k(\alpha))^3}{r_k(\alpha)}$, $k = 1, 2$; α_b — центральный угол сектора окружности радиуса R_c , охватывающий дугу этой окружности длиной b_H ; $\sigma_H(\alpha)$ — давление, соответствующее герцевскому закону $\sigma_H(\alpha R_c)$.

Результаты расчетов (рис. 2) показывают, что значения σ_e/σ_{zmax} и $h_{\sigma_{emax}}/b_h$ не остаются постоянными при изменении R_c , а их отклонения от величин $\sigma_e = 0,566\sigma_{zmax}$ и $h_{\sigma_{emax}} = 0,686b_H$ [2] имеют ярко выраженные закономерности. Например, для $b_H/R_c = 0,14$ занижение результатов по методу [2] достигает 7,5% и 8,2% для величин σ_e/σ_{zmax} и $h_{\sigma_{emax}}/b_h$, соответственно.

Результаты выполненного исследования показывают, что традиционные представления о зависимости относительной величины максимальных глубинных напряжений и глубины их залегания только от формы площадки контакта применимы лишь для параметров, приблизительно ограниченных областью $b_H/R_c \leq 2 \cdot 10^{-4}$, например — для тел с большим радиусом кривизны R_c и/или с малыми контактными напряжениями σ_{zmax} .

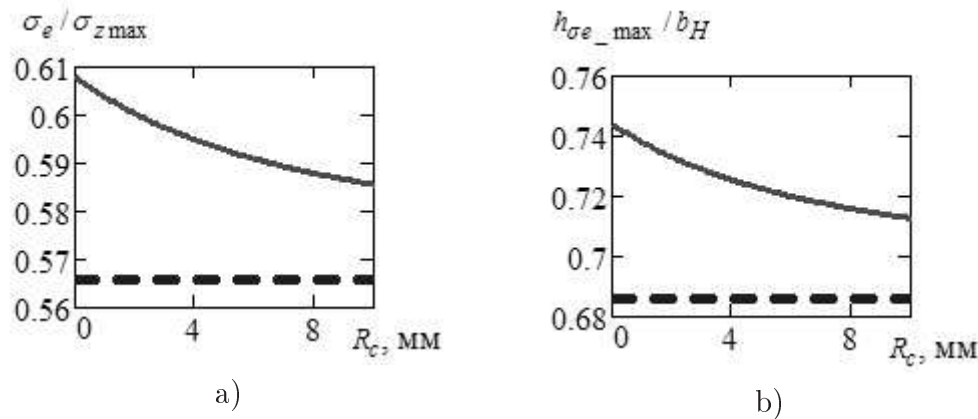


Рис. 2. Значения максимальных октаэдрических напряжений (а) и глубины залегания (б) в зависимости от радиуса исследуемого цилиндра R_c (пунктирная линия — решение [2]; сплошная линия — уточненный результат).

Несмотря на то обстоятельство, что в настоящей работе рассмотрена плоская задача, есть все основания для обобщения качественной стороны изложенных результатов на условия начально-точечного касания контактирующих цилиндров. В частности, характер влияния уменьшения радиуса цилиндра на рост относительной величины максимальных октаэдрических напряжений и глубины их залегания имеет вполне определенное физическое объяснение. Как здесь показано, оно заключается в монотонно возрастающем (по мере уменьшения радиуса цилиндра) искажении граничных условий поставленной задачи в случае использования приема моделирования контактирующих тел полупространством. А это искажение, в свою очередь, качественно одинаково влияет на изменение величины и места расположения максимальных октаэдрических напряжений при любом соотношении размеров полуосей эллиптической площадки контакта упругих цилиндров.

ВЫВОДЫ

1. Традиционные представления о независимости относительных величин максимальных глубинных напряжений и глубины их залегания от радиуса цилиндра не являются универсальными, дают заниженную оценку этих величин и носят частный характер.

2. Показано, что характеристики напряженного состояния и уровни глубинных (в том числе максимальных) напряжений (а также и глубины их залегания) различны для двух контактирующих цилиндров, имеющих разные радиусы.

3. Универсальное использование в теории и практике контактных расчетов решений Буссинеска–Черутти (с моделированием контактирующих тел полупространством) может приводить к значительным погрешностям при расчетах глубинных напряжений в зоне контакта.

4. Предложенный уточненный метод определения эффективных глубинных напряжений может найти применение в расчетах различных ограниченных тел, моделируемых упругими круговыми цилиндрами, при использовании разных гипотез прочности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Беляев Н. М.* Труды по теории упругости и пластичности. М: ГИТТЛ, 1957.
- [2] *Ковальский Б. С.* Расчет деталей на местное сжатие. Харьков: ХВКИУ, 1967. 222 с.
- [3] *Журавлев Г. А.* Оценка применимости решения Герца в задачах о контакте зубьев // Техника машиностроения. 2001. № 2, С. 82–90.
- [4] *Zhuravlev G. A.* Conditions of Teeth Triboccontact and Ways of Improving Gear Pairs // Journal of Friction and Wear, Vol. 20, 1999. № 2. Pp. 57–69.
- [5] *Журавлев Г. А.* Влияние кривизны реальных упругих тел на изменение вида их контактного отказа // Доклады 17-й Всероссийской научно-технической конференции «Неразрушающий контроль и диагностика», 5 ноября 2005 г., Уральское отделение РАН. Екатеринбург. 2005.
- [6] *Азаров А. Д. Бабенко И. С. Журавлев Г. А.* Анализ влияния кривизны упругих тел на напряженно-деформированное состояние в зоне их контакта // Совр. пробл. мех. сплош. среды. Тр. XV Межд. конф., г. Ростов-на-Дону, 4–7 декабря 2011 г. Т. I. С. 6–10.
- [7] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Zhuravlev G. A., Babenko I. S. *On Influence of Curvature of Contacting Cylinders upon the Stress State in a Deep of their Contact.* The specified method of determination of effective deep stresses in the field of contact of the elastic circular cylinders is offered. It is shown that using of Bussinesk–Cherutti solution (with modeling of the analyzed cylinder by semispace) leads to essential distortion of a role of curvature of contacting bodies and to considerable errors of contact calculations.

ЗАДАЧА О ДВОЙНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Зубов Л. М., Иванова А. С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена новая задача о больших деформациях трехмерного упругого тела, приводимая к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Задача описывает деформацию, при которой разрезанная цилиндрическая труба выпрямляется в прямоугольный блок, который затем изгибается в другой плоскости, превращаясь в полый цилиндр с осью, ортогональной оси первоначального цилиндра. Особенность задачи состоит в том, что в деформированном состоянии тела напряжения существуют даже при отсутствии внешних нагрузок. Для решения задачи применяется полуобратный метод. Возникающая при этом краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения решается численно. В случаях несжимаемого неогуковского и сжимаемого полуматериала найдено точное решение задачи о двойном цилиндрическом изгибе.

1. Постановка задачи. Пусть r, φ, z — цилиндрические координаты точек тела до деформации, а R, Φ, Z — цилиндрические эйлеровы координаты, т. е. координаты деформированной конфигурации материального тела. Рассмотрим упругое тело, имеющее в отсчетной конфигурации форму круговой цилиндрической трубы длины l с внешним и внутренним радиусами r_0 и r_1 соответственно. Следуя полуобратному методу [1–4], деформацию трубы задаем следующими соотношениями

$$R = R(r), \quad \Phi = sz, \quad Z = t\varphi \quad (s, t = \text{const}). \quad (1)$$

Формулы (1) описывают конечную деформацию, при которой разрезанный полуплоскостью $\varphi = 0$ цилиндр с вертикальной осью выпрямляется в прямоугольный блок, который затем изгибается в другой плоскости, превращаясь в цилиндр с горизонтальной осью. Далее полученный цилиндр поворачивается как абсолютно твердое тело и принимает вертикальное положение (рис. 1).

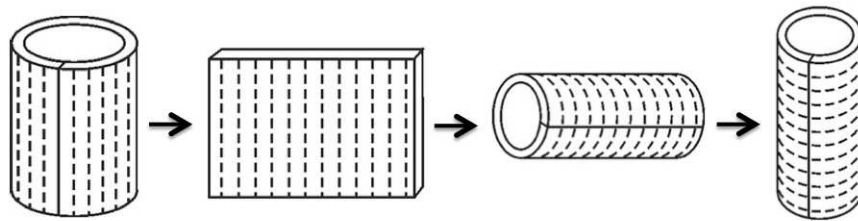


Рис. 1. Деформация двойного нелинейного изгиба.

Градиент деформации $\mathbf{C}$ и мера деформации Коши $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$, отвечающие преобразованию (1), имеют вид ($R' = dR/dr$)

$$\mathbf{C} = R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{t}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_Z + s R \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\Phi, \quad (2)$$

$$\mathbf{G} = R'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{t^2}{r^2} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + s^2 R^2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R &= \mathbf{e}_r \cos(\Phi - \varphi) + \mathbf{e}_\varphi \sin(\Phi - \varphi), \\ \mathbf{e}_\Phi &= -\mathbf{e}_r \sin(\Phi - \varphi) + \mathbf{e}_\varphi \cos(\Phi - \varphi), \quad \mathbf{e}_Z = \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы, касательные к координатным линиям цилиндрических координат отсчетной конфигурации. Из (2) имеем

$$\det \mathbf{C} = -\frac{stR}{r} R'. \quad (4)$$

Физически реализуемая деформация сплошной среды в каждой точке должна удовлетворять условию $\det \mathbf{C} > 0$. Величины r и R положительны по определению. Поэтому в силу (2) возможны четыре варианта: 1) $s > 0$, $t < 0$, $R' > 0$; 2) $s < 0$, $t > 0$, $R' > 0$; 3) $s > 0$, $t > 0$, $R' < 0$; 4) $s < 0$, $t < 0$, $R' < 0$. Варианты 3) и 4), в которых $R' < 0$, описывают деформацию двойного цилиндрического изгиба в сочетании с выворачиванием трубы наизнанку. Это означает, что внутренняя поверхность полого цилиндра после деформации превращается во внешнюю цилиндрическую поверхность и наоборот. Абсолютная величина параметра s в (1) определяется длиной трубы в отсчетной конфигурации. В самом деле, так как $0 \leq \Phi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq l$, имеем $|s| = 2\pi/l$.

2. Приведение задачи к обыкновенному дифференциальному уравнению. Предположим, что материал цилиндра изотропен и воспользуемся общим представлением уравнения состояния изотропного тела для несимметричного тензора напряжений Пиолы [2]

$$\mathbf{D} = a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{C} + a_3 \mathbf{C}^{-T}, \quad a_k = a_k(I_1, I_2, I_3), \quad k = 1, 2, 3; \quad (5)$$

$$I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{G}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2 \mathbf{G} - \operatorname{tr} \mathbf{G}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{G}.$$

Из (2), (3) и (5) вытекает, что тензоры напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ и Коши $\mathbf{T}$ в задаче двойного изгиба для произвольного изотропного материала имеют представления

$$\mathbf{D} = D_{11}(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + D_{23}(r) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_Z + D_{32}(r) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\Phi, \quad (6)$$

$$\mathbf{T} = (\det(\mathbf{C}))^{-1} \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D} = \sigma_R(r) \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \sigma_\Phi(r) \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \sigma_Z(r) \mathbf{e}_Z \mathbf{e}_Z, \quad (7)$$

$$\sigma_R = \frac{r D_{11}}{stR}, \quad \sigma_\Phi = \frac{r D_{32}}{tR'}, \quad \sigma_Z = \frac{D_{23}}{sRR'}.$$

Уравнения равновесия упругой среды [2] при отсутствии массовых сил $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ в данном случае в силу (1), (6) сводятся к одному скалярному уравнению

$$\frac{1}{r}(r D_{11})' - s D_{32} = 0, \quad (8)$$

Выразив напряжения при помощи уравнения состояния (5), формул (2), (3) и подставив в (8), получим для заданного материала обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $R(r)$. Это уравнение в

общем случае будет нелинейным. К нему следует присоединить граничные условия, выражающие отсутствие внешней нагрузки на цилиндрических поверхностях трубы

$$D_{11}(r_0) = 0, \quad D_{11}(r_1) = 0. \quad (9)$$

3. Полулинейный материал. Рассмотрим распространенную модель сжимаемого полулинейного (гармонического) материала, уравнение состояния которого имеет вид [2]

$$\mathbf{D} = \frac{2\mu}{1-2\nu}(\nu \operatorname{tr} \mathbf{U} - 1 - \nu)\mathbf{A} + 2\mu\mathbf{C}, \quad (10)$$

Здесь μ, ν — постоянные, $\mathbf{U}$ — левый тензор растяжения, $\mathbf{A}$ — тензор поворота. В области малых деформаций постоянные μ и ν имеют смысл модуля сдвига и коэффициента Пуассона соответственно. На основании (2), (3), (6), (10) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{1/2}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C}, \\ D_{11} &= \frac{2\mu}{1-2\nu}[\nu(|R'| + \frac{|t|}{r} + |s|R) - 1 - \nu] + 2\mu R', \\ D_{23} &= \frac{2\mu}{1-2\nu}[\nu(|R'| + \frac{|t|}{r} + |s|R) - 1 - \nu] \operatorname{sgn} t + 2\mu \frac{t}{r}, \\ D_{32} &= \frac{2\mu}{1-2\nu}[\nu(|R'| + \frac{|t|}{r} + |s|R) - s - \nu] + 2\mu s R. \end{aligned} \quad (11)$$

Особенность модели полулинейного материала состоит в том, что согласно (11) дифференциальное уравнение (8) относительно функции $R(r)$ оказывается линейным. В частности, для варианта 1), когда $s > 0, t < 0$ оно имеет вид

$$r^2 R'' + rR' + \left(\frac{\nu sr}{1-\nu} - s^2 r^2 \right) R + \frac{(\nu ts - 1 - \nu)r + s(1 + \nu)r^2}{1-\nu}. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) при всех $r_1 \leq r \leq r_0$ должно удовлетворять условиям $R > 0, R' > 0$. Эти условия могут нарушаться при некоторых значениях s и t . Такие решения не имеют физического смысла.

В частном случае $\nu = 0$ уравнение (12) становится уравнением Бесселя

$$r^2 R'' + rR' - s^2 r^2 R^2 = r - sr^2. \quad (13)$$

При $\nu \neq 0$ краевая задача (9), (12) решалась численным методом. При заданном значении s величину параметра t можно определить, считая заданным значение продольной результирующей силы, действующей в сечениях деформированной трубы

$$P = 2\pi \int_{R(r_1)}^{R(r_0)} \sigma_Z R dR.$$

Заметим, что случай $P = 0$ соответствует задаче о собственных напряжениях в упругом теле, т. е. о внутренних напряжениях, существующих при отсутствии внешних сил.

4. Случай несжимаемого материала. В этом случае функция $R(r)$ определяется из условия несжимаемости $\det \mathbf{C} = 1$, что согласно (4) приводит к уравнению $RR' = -(st)^{-1}r$, решение которого имеет вид

$$R = \sqrt{R_0^2 + s^{-1}t^{-1}(r_0^2 - r^2)}, \quad R_0 = R(r_0). \quad (14)$$

Из (14) находим

$$R_1 = \sqrt{R_0^2 + s^{-1}t^{-1}(r_0^2 - r_1^2)}, \quad R_1 = R(r_1). \quad (15)$$

Согласно (15) при $st > 0$ имеем $R_1 > R_0$, т. е. внутренняя поверхность трубы после деформации становится внешней, происходит выворачивание. Если $st < 0$, то $R_1 < R_0$, т. е. деформация не сопровождается выворачиванием. В случае несжимаемого материала за независимую переменную удобно принять эйлерову координату R , сделав замену переменных $r = \sqrt{r_0^2 + st(R_0^2 - R^2)}$ согласно (14).

Применим известное [2] общее представление уравнения состояния изотропного несжимаемого тела

$$\mathbf{T} = \alpha_1(I_1, I_2)\mathbf{g}^{-1} - \alpha_2(I_1, I_2)\mathbf{g} - p\mathbf{E}, \quad (16)$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\mathbf{g}$ — мера деформаций Альманзи, $\mathbf{g}^{-1}$ — мера деформаций Фингера, p — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию. В рассматриваемой здесь задаче указанные меры деформации согласно (2), (4) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{-1} &= \frac{r^2}{s^2t^2R^2}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + s^2R^2\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + \frac{t^2}{r^2}\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z, \\ \mathbf{g} &= \frac{s^2t^2R^2}{r^2}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{1}{s^2R^2}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + \frac{r^2}{t^2}\mathbf{e}_Z\mathbf{e}_Z, \quad I_1 = \text{tr} \mathbf{g}^{-1}, \quad I_2 = \text{tr} \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16), (17) следует, что уравнение равновесия в эйлеровых координатах $d\sigma_R/dR + (\sigma_R - \sigma_\Phi)R^{-1} = 0$ для любого изотропного несжимаемого тела решается в квадратурах

$$\sigma_R = \int_R^{R_0} \left[\alpha_1(R) \left(\frac{r^2}{s^2t^2R^2} - s^2R^2 \right) - \alpha_2(R) \left(\frac{s^2t^2R^2}{r^2} - \frac{1}{s^2R^2} \right) \right] \frac{dR}{R}. \quad (18)$$

Постоянные R_0 и R_1 находятся из условия $\sigma_R(R_1) = 0$ и соотношения (15).

На рис. 2 представлено распределение напряжений, отнесенных к модулю сдвига μ в случае неогукковского материала ($\alpha_1 = \text{const} = \mu$, $\alpha_2 = 0$) по толщине стенки цилиндра при $r_0 = 1$, $r_1 = 0.8$, $s = 0.9$, $t = -0.95$. Размеры деформированного цилиндра при этих значениях параметров оказались равными $R_1 = 0.995$, $R_0 = 1.17$.

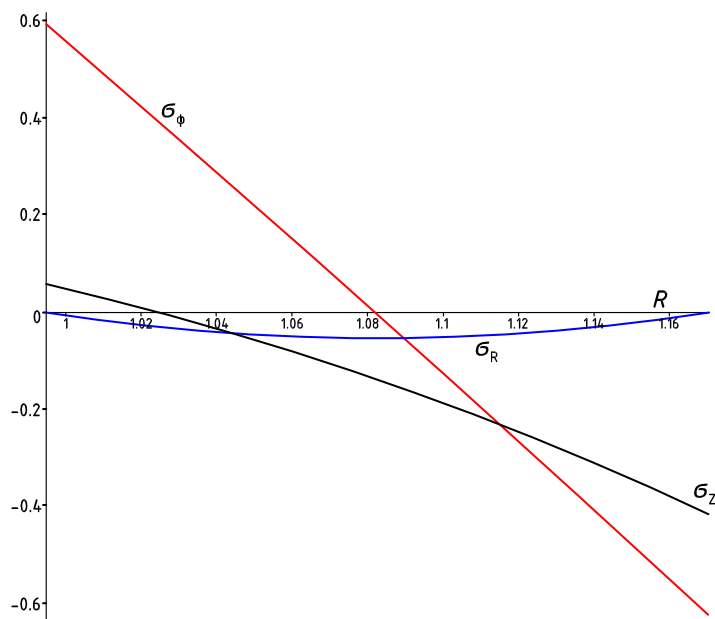


Рис. 2. Распределение напряжений.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 12-01-00038) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 гг.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
- [2] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [3] Zubov L. M. Полуобратный метод в квазистатических задачах нелинейной термо-вязкоупругости // Доклады АН СССР. 1981. Т. 256. № 3. С. 556–559.
- [4] Zubov L. M. Универсальные решения для изотропных несжимаемых микрополярных тел // Доклады РАН. 2010. Т. 435. № 1. С. 35–39.

Zubov L. M., Ivanova A. S. *The problem of double cylindrical bending in nonlinear elasticity.* We consider a new problem of large deformations of three-dimensional elastic body, driven by ordinary differential equations. The problem describes the deformation at which cut cylindrical tube straightened rectangular block, which is then bent in the other plane, becoming a hollow cylinder with an axis orthogonal to the axis of the original cylinder. Feature of the problem is that in the deformed state of the body stresses exist even in the absence of external loads. To solve the problem of semi-inverse method is applied. The resultant value problem for an ordinary differential equation is solved numerically. In the case of an incompressible neo-Hookean and the compressed material of half an exact solution of the problem of double cylindrical bending.

РАСЧЕТ ЭВОЛЮЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ У ВЕРШИНЫ ЗАТУПЛЕННОЙ ТРЕЩИНЫ

Карпинский Д. Н., Санников С. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В данном сообщении представлены результаты расчетов эволюции распределений пластической деформации и коэффициентов интенсивности напряжения (КИН) у вершины трещины в кристалле в условиях плоской деформации и смешанного типа нагружения (моды I и II). Расчеты учитывают взаимное влияние пластической деформации и формы вершины трещины, а также T -напряжения. Пластическая деформация обусловлена движением дислокаций по плоскостям легкого скольжения при совместном действии тепловых флуктуаций и сдвигового напряжения. Расчеты выполнены для различных плоскостей скола, систем легкого скольжения и соотношений внешних нагрузок растяжения и сдвига. В результате расчета получены временные распределения пластической деформации, эффективного сдвигового напряжения и КИН при монотонном нагружении кристалла до заданного предела и дальнейшего процесса релаксации до установления равновесия распределений при постоянной величине внешней нагрузки. Обнаружены явления экранирования и антиэкранирования вершины трещины дислокациями в зависимости от системы скольжения кристалла. Численные расчеты выполнены для кристалла α -Fe.

1. Введение.

Оценивание влияния формы вершины трещины на характеристики разрушения является актуальной задачей физики прочности и механики разрушения. В большинстве исследований вершину трещины с параллельными берегами представляют в виде полуокружности радиуса ρ , а если трещина имеет форму эллипса с полуосями a и b , то полагают радиус вершины трещины $\rho = b^2/a$. Экспериментальные исследования (см, например, [1–3]) показали, что чем острее трещина, тем ниже вязкость разрушения K_c квазихрупких материалов: при малых величинах ρ не зависит от радиуса кривизны вершины, а при ее затуплении K_c растет.

Пластическая деформация у вершины трещины вносит существенные изменения в форму вершины и распределение напряжений в ее окрестности. Ряд расчетов, учитывающих пластическую деформацию, выполнен в рамках представлений механики сплошной среды [4, 5], но эти представления недостаточно точно отражают сложный процесс перестройки структуры материала у вершины трещины в нагруженном образце.

В последние десятилетия обозначился значительный прогресс в создании дислокационных моделей для пластической деформации у вершины трещины (см. обзор в [6]). Расчеты взаимодействия дислокации с трещиной эллиптического сечения обнаружили явления экранирования для моды I и антиэкранирования для моды II дислокацией ее упругого поля, которое характеризуется снижением и увеличением КИН по сравнению с КИН трещины без дислокаций. При этом эффекты

экранирования и антиэкранирования уменьшаются с увеличением ρ и увеличиваются при приближении дислокации к вершине трещины. В последние годы также используется метод молекулярной динамики для моделирования взаимодействия трещины с дислокациями, двойниками и другими дефектами в ОЦК кристаллах. Важный результат, полученный данным методом связан с зависимостью механизмов разрушения и деформации у вершины трещины от соотношения мод I и II. При достижении эффективным КИН $K_{eff} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ своего критического значения $K_{eff,c}$ происходят либо рост трещины, либо растет из вершины двойник или испускается дислокация.

Целью настоящей работы является сравнение эволюции пластической деформации у затупленной вершины трещины в ОЦК кристалле в условиях смешанной моды нагружения (моды I и II) для различных систем дислокационного скольжения в пластической зоне. В дальнейшем ограничимся расчетами для кристалла α -железа при плоской деформации, которые не учитывают эмиссию дислокаций и двойников из вершины трещины.

2. Постановка задачи и метод решения.

Рассмотрим плоские задачи об эволюции пластической деформации у вершины трещины длиной $2l$, расположенной в плоскостях скола бесконечного ОЦК кристалла с постоянной решетки a . В кристалле равномерно распределены источники дислокаций, испускающие прямоугольные петли, лежащие в плоскостях легкого скольжения. В расчете учитываются только отрезки петель, перпендикулярные плоскости oxy (рис. 1). Возможны следующие кристаллографические ориентации трещины: 1) плоскость скола (100), направление линии фронта трещины $[001]$; 2) плоскость скола (110), направление линии фронта трещины $[001]$; 3) плоскость скола (011), направление линии фронта трещины $[0\bar{1}1]$; 4) плоскость скола (001), направление линии фронта трещины $[110]$. Пластическая деформация осуществляется путем термоактивированного движения с вектором Бюргерса $\vec{b} = a/2 <111>$. Углы между плоскостями скола и системами легкого скольжения $<111> \{110\}$ и $<111> \{112\}$ принимают значения: для ориентации 1) 45° , 2) 45° , 3) $54, 73^\circ$, 4) $35, 26^\circ$. Линии дислокаций во всех случаях параллельны фронтам трещины, причем для случаев 1) — 2) это смешанные дислокации, а для случаев 3), 4) — чисто краевые. В расчетах учитываются только краевые компоненты смешанных дислокаций. Это упрощение связано с видом приложенной нагрузки, действующей только на данные компоненты дислокаций.

К плоскостям кристалла $y = \pm\infty$ приложено однородные напряжения растяжения $\sigma_{yy}(t) = \sigma_a(t)$ (мода I) и сдвига $\tau_{xy}(t) = \tau_a(t)$ (мода II), монотонно возрастающие до некоторых значений σ_{max} , τ_{max} достаточных для пластического деформирования кристалла, но недостаточных для роста трещины. После достижения нагрузками $\sigma_a(t)$ и $\tau_a(t)$ своих максимальных значений расчет проводился в режиме релаксации напряжения у вершины трещины, которому соответствует постоянные внешние напряжения. В данном расчете принята пропорциональность двух типов внешних нагрузок $\sigma_a(t) = p \tau_a(t)$, постоянная p является параметром задачи. В расчетах были выбраны те значения постоянной p , для которых максимальные величины сдвиговых напряжений $\Sigma_{r\varphi}$ соответствуют направлениям легких плоскостей скольжения. В нашем случае кристаллографическим ориентациям 1) и 2) со-

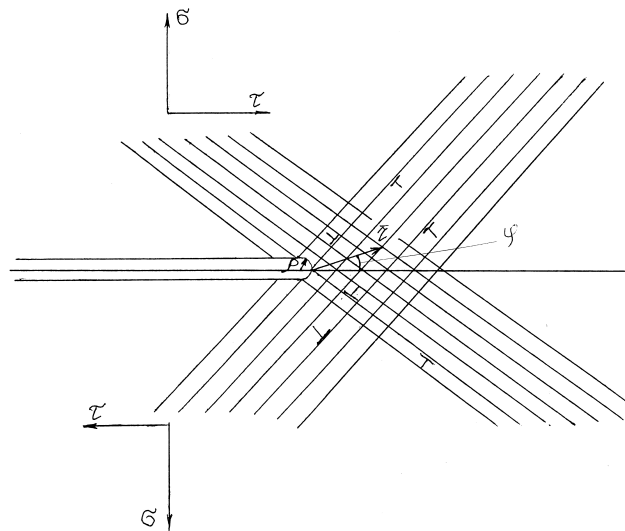


Рис. 1. Кристаллографическая схема плоскостей легкого скольжения у вершины трещины.

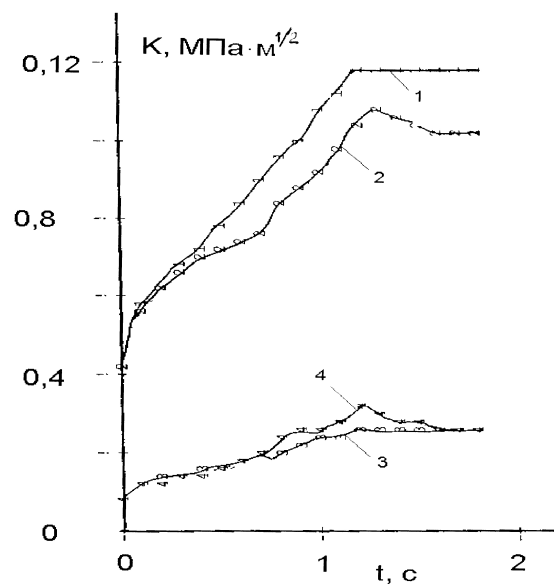


Рис. 2. Временная зависимость коэффициентов интенсивности напряжения для трещины, расположенной в плоскости скола (100) (направление линии фронта трещины [001] или в плоскости скола (110) (направление линии фронта трещины [001]) с учетом T -напряжений. Кривые 1 и 2 определяют эволюцию K_I соответственно без учета 1 пластической деформации и с ее учетом 2 (экранирование вершины дислокациями). Кривые 3 и 4 определяют эволюцию K_{II} соответственно без учета 3 пластической деформации и с ее учетом 4 (антиэкранирование вершины дислокациями).

ответствует значение $p = 4,5$; ориентации 3) — $p = 8,05$; ориентации 4) — $p = 2,85$. Выбор значений p обусловлен возможностью расчета эволюции пластической деформации при скольжении дислокаций только в одной из кристаллографических ориентаций. Упомянутый выше отказ от учета эмиссии дислокаций и двойников из вершины ограничивает выбор величин $\sigma_{\max}$ и $\tau_{\max}$ неравенством $K_{eff} < K_{eff,c}$.

В расчетах на этапе нагружения выбиралась скорость нагружения $\dot{\sigma}_a(t)$, $\dot{\tau}_a(t)$, которая учитывает ограничение на максимальную скорость сдвиговой деформации в пластической зоне $\max(\dot{\epsilon}(r, t)) \leq 0,1 \text{ A}^{-1}$. Это ограничение соответствует термоактивированному механизму движения дислокаций, который предполагает совместное действие концентрации напряжения у вершины трещины и их тепловых флуктуаций. Скольжение дислокаций приводит к релаксации напряжения и вблизи вершины возникают значительные плотности эффективных дислокаций (избыточные дислокации одного знака среди дислокаций с параллельными векторами Бюргерса) и, следовательно, возникает упругое поле, существенно влияющее на эволюцию пластической деформации. В отличие от [6] расчеты эволюции пластической деформации в данной работе учитывают изменение радиуса кривизны вершины трещины $\rho(t)$ за счет совместного действия внешней нагрузки и дальнедействующего напряжения, создаваемого распределением эффективных дислокаций у вершины трещины $2\rho(t) \approx CK_{Ip}^2$, где C — постоянная, а $K_{Ip}(t)$ — КИН трещины, учитывающий влияние дислокаций в пластической зоне [6].

3. Результаты расчетов и их обсуждение.

В данной работе предложена математическая модель эволюции пластической деформации, которая в отличие от [6], учитывает временную зависимость радиуса кривизны и специальные соотношения между компонентами мод при смешанном нагружении. Выбор этих соотношений позволяет выделять при расчете различные системы легкого скольжения. Результаты расчетов распределения пластической деформации и КИН при указанных дополнениях подтвердили результаты [6] о том, что дислокационная пластичность в ОЦК кристалле обладает свойством дальнего действия за счет образования «дислокационного заряда» у вершины трещины. Это обстоятельство обуславливает эволюцию пластической зоны, размер которой значительно превышает ρ . Подтвердились также (для вариантов расчета 1)–4)) результаты о том, что затупление трещины и T -напряжения приводят к укорочению времени достижения равновесного распределения пластической деформации у вершины трещины в кристалле. Среди других результатов расчета следует отметить явления экранирования и антиэкранирования вершины трещины дислокациями в зависимости от соотношения мод смешанного разрушения. Для варианта 3) дислокации антиэкранируют вершину как для моды I так и для моды II, для вариантов 1), 2) дислокации экранируют моду I и антиэкранируют моду II, для варианта 4) дислокации экранируют вершину в обоих модах. Кривые 1 и 2 на рис. 2 (варианты 1), 2)), демонстрируют эффект экранирования вершины трещины для моды I, а кривые 3 и 4 на рис. 2 подтверждают существование «аномальной» эволюции K_{II} . Явления экранирования и антиэкранирования не исчезают при учете T -напряжения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 10-08-00839-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mourad A. -H. I., El-Domiatty A. Notch radius and specimen size effects on fracture toughness of low allow steel // Procedia Engineering. 2011. V. 10. Pp. 1348–1353.
- [2] Li H. -M., Wang G. -F. Wang T. J. Effect of crack-tip shape on the near-tip field in glassy polymer // International Journal of the Solids and Structure. 2008. V. 45. Pp. 1087–1100.
- [3] Carolan A., Alveen P., Ivankovich A., Murphy N. Effect of notch root radius on fracture toughness of polycrystalline cubic boron nitride // Engineering Fracture Mechanics. 2011. V. 78. Pp. 2885–2895.
- [4] Saka M., Abe H., Tanaka S. Blunting of a crack tip under small-scale yielding and mixed mode loading // Computational Mechanics. 1986. V. 1. Pp. 11–19.
- [5] Кислова С. Ю., Шлянников В. Н. Параметры смешанных форм разрушения с учетом конечной кривизны вершины трещины // Деформация и разрушение. 2008. № 6. С. 2–8.
- [6] Карпинский Д. Н., Санников С. В. Эволюция пластической деформации у вершины трещины в кристалле // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 5. С. 52–59.

Karpinsky D. N., Sannikov S. V. *Calculation of the plastic deformation evolution at the blunted crack tip.* In that communication it is presented the results of calculations for the plastic deformation and stress intensity factor (SIF) evolutions at the crack tip in crystal by the plane deformation and mixed loading (mode I and II). The calculations take into account the interdependent influence of plastic deformation and crack tip shape, and also T -stress. The plastic deformation is determined by the dislocation slipping along the light slip planes by the joint action of the thermal fluctuations and shear stress. The calculation is fulfilled for the different cleavage planes, light slipping systems and relationship of external tension and shear loads. In the result of calculation it is obtained the temporal distributions of plastic deformation, effective shear stress and SIF by the monotonous loading of crystal until the given limit and the subsequent relaxed process to the equilibrium distributions by the constant value of external load. It is revealed the shielding and antishielding phenomenon of the crack tip by dislocations depending on the crystal slipping system. The computer calculations are realized for α -Fe crystal.

КОВАРИАНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТИНОСТИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА В МИКРОПОЛЯРНОМ ТЕРМОУПРУГОМ КОНТИНУУМЕ: ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Ковалев В. А.* , Радаев Ю. Н.**

**Московский городской университет управления Правительства Москвы*

***Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

Работа посвящена выводу ковариантных уравнений совместности для сильных разрывов деформации, микродеформации и температурного смещения на соответствующих волновых поверхностях в нелинейных микрополярных термоупругих средах. Приоритет отдается гиперболической теории термоупругости второго типа (GNII). Репер локальных поворотов, ассоциированный с элементом микрополярного континуума, предполагается «нежестким». С целью полевой формулировки теории указана естественная плотность термоупругого действия и сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. Приводится вывод ковариантных уравнений термоупругого поля как уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала действия. Уравнения поля гиперболической микрополярной термоупругости позволяют получить уравнение транспорта тепла гиперболического аналитического типа. Специальная форма первой вариации интегрального функционала применяется для определения 4-ковариантных условий совместности сильных разрывов деформаций и температурного смещения при переходе через волновые поверхности. Указанные условия содержат 4-тензоры Пиола–Кирхгофа и энергии–импульса. Трехмерные условия на поверхности сильного разрыва, общепринятые в механике континуума, без труда получаются из 4-ковариантных форм.

1. Вводные замечания. Теплопроводность в твердых деформируемых телах, обладающих дополнительными степенями свободы, проявляющимися, в частности, как совместные локальные вращения элементов, составляющих тело, представляет собой важную задачу современной теории и механики сплошных сред. Исследование возможной волновой природы транспорта тепла требует привлечения принципов и формализма теории поля [1]. Понятие о физическом поле в отчетливой форме встречается в научных работах Дж. К. Максвелла и с тех пор теория поля развивается как одно из важнейших направлений теоретической и математической физики. Физическое поле математически описывается с помощью интегрального функционала действия, из которого потом можно извлечь стандартными методами физически приемлемые дифференциальные уравнения поля, сохраняющиеся величины и токи. Вариационное задание поля и развитый аппарат вариационного исчисления позволяют также без особых проблем получить уравнения для скачков при переходе через волновые поверхности сильных разрывов поля сразу же в ковариантной четырехмерной форме. Эти уравнения, известные под общим термином «уравнения Ренкина–Гюгонио», чрезвычайно важны и традиционно используются при решении прикладных задач.

Теория континуума с дополнительными помимо трансляционных ротационными степенями свободы и моментными напряжениями была создана в 1909 г. Э. и

Ф. Коссера [2]. Исторически теоретико-полевой метод оказался весьма важным и эффективным инструментом вывода уравнений микрополярного упругого континуума, поскольку обеспечивал возможность отхода от традиционного пути представления внутренних напряжений симметричным тензором напряжений Коши. Указанный подход, благодаря своим очевидным преимуществам, использовался, например, в классической работе [3]. В статье [4] методами теории поля в рамках схемы «конечных» деформаций и локальных поворотов формулируется связанная модель микрополярного термоупругого континуума с «жестким» трехгранником, ассоциированным с элементом.

Далее будет существенно использоваться терминология и обозначения, принятые в монографиях [1, 5].

2. Действие. Уравнения поля. Ток. Законы сохранения. Фундаментальное положение теории поля состоит в том, что физическое поле математически описывается интегральным функционалом действия $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad (1)$$

где $\mathcal{L}$ — плотность действия; φ^k — физические поля; X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — пространственно-временные координаты; $X^4 = ct$; $d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$ — «естественный» элемент объема пространства—времени; через ∂_β в представлении действия (1) и далее обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β .

Принцип наименьшего действия устанавливает, что действительное поле реализуется в пространстве—времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. для всех допустимых вариаций физических полей φ^k и неварьируемых координатах X^β

$$\delta \mathfrak{S} = 0. \quad (2)$$

Из принципа наименьшего действия получаются дифференциальные уравнения поля в форме классических уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0. \quad (3)$$

Дивергентный закон сохранения всегда имеет форму дивергентного дифференциального соотношения

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \quad (4)$$

где $J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\mu)$ — 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля (3). В теории поля вектор J^β обычно называется вектором тока.

3. Микрополярный континуум. Действие. Уравнения поля. В микрополярных теориях «конечная» деформация тела, представляемая геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (5)$$

положения $\mathbf{X}$ отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место $\mathbf{x}$, сопровождается дополнительной деформацией, описываемой искажениями геометрии системы трех директоров $\mathbf{d}_a$ ($a = 1, 2, 3$), связанных с микроэлементом:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a(\mathbf{X}, t). \quad (6)$$

Основной термической переменной в GN-теориях выступает температурное смещение ϑ , которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных Лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ .

В лагранжевых X^α ($\alpha = 1, 2, 3$) и эйлеровых координатах x^j ($j = 1, 2, 3$) естественную плотность действия зададим в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_R(X^\alpha)g_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j + \frac{1}{2}\rho_R(X^\alpha)g_{ij}\overset{ab}{\mathfrak{J}}_{\underset{a}{\mathfrak{d}}\underset{b}{\mathfrak{d}}}^{\dot{i}\dot{j}} - \psi(X^\alpha, x^j, \underset{a}{d}^j, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{a}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta). \quad (7)$$

Здесь точкой над символом обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах X^α , ρ_R — референциальная плотность, $\overset{ab}{\mathfrak{J}}$ — тензор инерции микрополярного поля.

Вариационный интеграл микрополярного термоупругого действия

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, \underset{a}{d}^j, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{a}{\dot{d}}^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{a}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta) dX^1 dX^2 dX^3 dt \quad (8)$$

($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$)

позволяет получить дифференциальные уравнения поля:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_{\cdot j}^\alpha - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{a}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^\alpha + \overset{a}{\mathcal{A}}_j - (\overset{a}{\mathcal{Q}}_j)^\cdot &= 0 \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (9)$$

которые дополняются определяющими уравнениями:

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{a}{\mathcal{Q}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{a}{\dot{d}}^j}, \\ S_{\cdot j}^\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{a}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \underset{a}{d}^j)}, \quad \overset{a}{\mathcal{A}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{a}{d}^j}, \\ s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad j_R^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}. \end{aligned} \quad (10)$$

В данных выше определяющих уравнениях приняты следующие обозначения: P_j — линейный обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы; $\overset{a}{\mathcal{Q}}_j$ — обобщенные импульсы, соответствующие дополнительным (в том числе ротационным) степеням свободы; $S_{\cdot j}^\alpha$ — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа; $\overset{a}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^\alpha$ — тензоры экстранапряжений; $\overset{a}{\mathcal{A}}_j$ — обобщенные моменты, сопряженные локальным вращениям триэдра $\underset{a}{\mathfrak{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$); s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии); j_R^α — референциальный вектор потока энтропии.

4. Уравнения совместности сильных разрывов микрополярного термоупругого поля. Вводя 1-контравариантный отсчетный четырехмерный вектор

$$J^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \delta' \varphi^k + \left(\mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) \delta' X^\alpha, \quad (11)$$

вариацию действия, отвечающую *конечным* вариациям пространственно-временных координат и физических полей можно представить в форме (см. [5])

$$\delta\mathfrak{S} = \int (\partial_\beta J^\beta) d^4X. \quad (12)$$

Будем предполагать, что при переходе через некоторую двустороннюю поверхность $\Sigma^\pm$ с вектором нормали ν_β в 4-пространстве — времени термоупругое поле непрерывно, а его первые градиенты по пространственно-временным переменным могут быть разрывными. Квадратными скобками будем обозначать скачки заключенных в них величин при переходе через поверхность Σ .

В формуле (12) заменим интеграл по 4-объему на сумму поверхностных. Закрепляя вариации $\delta\varphi^k$ и δX^β на внешней границе поля, можно сохранить лишь два поверхностных интеграла по дважды проходимой поверхности Σ :

$$\delta\mathfrak{S} = \int_{\Sigma^+} (J^\beta \nu_\beta) d\Sigma - \int_{\Sigma^-} (J^\beta \nu_\beta) d\Sigma. \quad (13)$$

Поскольку для действительного поля $\delta\mathfrak{S} = 0$, а вариации $\delta\varphi^k$ и δX^β непрерывны при переходе через поверхность Σ , то из уравнения (13) получаются следующие ковариантные соотношения совместности сильных разрывов поля:

$$\nu_\beta \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right] = 0, \quad \nu_\beta \left[\mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right] = 0. \quad (14)$$

Видно, что в уравнениях совместности на поверхности сильного разрыва присутствуют скачки 4-тензора Пиола–Кирхгофа и тензора энергии–импульса поля

$$S^{\beta \cdot}_k = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}, \quad T^{\beta \cdot}_\alpha = \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}. \quad (15)$$

Последний из них является током, соответствующим группам трансляций вдоль прямолинейных образующих плоского четырехмерного пространства–времени.

Опираясь на формулу (15), определим компоненты канонического тензора энергии–импульса микрополярного термоупругого поля:

$$T^\mu_{\cdot\lambda} = \mathcal{L} \delta_\lambda^\mu + S^\mu_{\cdot l} (\partial_\lambda x^l) + \mathcal{M}^{\mu \cdot}_{\cdot l} (\partial_\lambda d^l) - j^\mu_{\text{R}} (\partial_\lambda \vartheta) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3), \quad (16)$$

$$T^\mu_{\cdot 4} = S^\mu_{\cdot l} \dot{x}^l + \mathcal{M}^{\mu \cdot}_{\cdot l} \dot{d}^l - j^\mu_{\text{R}} \dot{\vartheta} \quad (\lambda = 4; \mu = 1, 2, 3), \quad (17)$$

$$T^4_{\cdot\lambda} = -(\partial_\lambda x^l) P_l - (\partial_\lambda d^l) \mathcal{Q}_l - s (\partial_\lambda \vartheta) \quad (\lambda = 1, 2, 3; \mu = 4), \quad (18)$$

$$T^4_{\cdot 4} = \mathcal{L} - \dot{x}^l P_l - \dot{d}^l \mathcal{Q}_l - s \dot{\vartheta} \quad (\lambda = 4; \mu = 4). \quad (19)$$

Трехмерные формы условий на поверхности сильного разрыва поля находятся из полученной ковариантной четырехмерной формы с помощью стандартных схем и их вывод уже не представляет сколько-нибудь серьезных затруднений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00184-а «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости»).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 156 с.
- [2] Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
- [3] Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17. № 5. Pp. 85–112.
- [4] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Вывод тензоров энергии—импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 58–77.
- [5] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

Kovalev V. A., Radayev Y. N. *Covariant jump conditions across a strong discontinuities surface in micropolar thermoelastic media: a hyperbolic theory.* The paper is devoted to the covariant formulation of jump conditions across a surface of strong discontinuities of strains, micropolar strains and thermal displacements in four-dimensional space–time for a micropolar thermoelastic field. First, hyperbolic micropolar type-II thermoelastic continuum is considered as a physical field theory with the action taking account of wave nature of heat transport (the second sound phenomenon in solids) according to the Green&Naghdi type-II model. The case of deformable micropolar directors is considered. The canonical field equations are derived from the principle of least action. A special form of the first variation of action integral is used in order to formulate jump conditions across a surface of strong discontinuities. As it enters the jump conditions, explicit covariant formulae for the canonical energy-momentum tensor are obtained.

АНИЗОТРОПИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ АНТИФРИКЦИОННЫХ КОМПОЗИТОВ С ОРИЕНТИРОВАННЫМИ НЕИЗОМЕТРИЧНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Колесников В. И.^{*}, Бардушкин В. В.^{}, Колесников И. В.^{*},
Сычев А. П.^{***}, Сычев А. А.^{***}, Яковлев В. Б.^{**}**

^{}Ростовский государственный университет путей сообщения*

*^{**}Национальный исследовательский университет МИЭТ, Москва*

*^{***}Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Решена задача вычисления эффективных упругих свойств трехкомпонентных матричных композитов с эллипсоидальными включениями одинаковой формы, ориентированными параллельно некоторой плоскости в двух взаимно перпендикулярных направлениях. При этом материал включений, расположенных в одном из направлений, отличается от материала включений в перпендикулярном направлении. Для антифрикционных композитов на основе эпоксидного связующего ЭПАФ, армированного волокнами ПТФЭ и БШ-стекла, проведены модельные расчеты параметров упругой анизотропии в различных направлениях, учитывающие изменения концентрации изотропных компонентов.

При разработке новых износостойких антифрикционных композитов наряду с экспериментальными подходами важную роль играют теоретические методы моделирования и расчета их физико-механических (в частности, упругих) свойств. Вопросы, связанные с прогнозированием эффективных упругих характеристик двухкомпонентных композитов в зависимости от состава и концентрации элементов неоднородности рассматривались многими авторами [1]. Однако использование двухкомпонентных антифрикционных материалов в тяжелонагруженных узлах трения ограничено ввиду их малой удельной прочности и несущей способности. Поэтому для таких узлов целесообразно создавать многокомпонентные композиты, исходя из синтеза конструкционного материала с антифрикционным. На практике армирование антифрикционных композитных материалов часто производится неизометричными включениями. Так, в узлах трибосопряжений (например, в скользунах боковых опор электровозов) применяются композиты, армированные тканями, у которых по основе и по утку используются различные материалы. Широкое распространение в тяжелонагруженных узлах трения получили композиции на основе полимерного связующего и арматуры — волокон из политетрафторэтилена (ПТФЭ), ортогональных стекловолокон. Подобное армирование приводит к появлению анизотропии физико-механических свойств создаваемых композитов. Эта анизотропия может быть усилена или ослаблена в зависимости от требований, предъявляемых к материалу [1].

Построение моделей прогнозирования эффективных упругих свойств композитных материалов базируется на представлении их структуры в виде статистически однородных матричных композитов, армирование которых производится

включениями эллипсоидальной формы. При этом необходимо учитывать текстуру формы, ориентацию и концентрацию включений [1, 2]. Эффективные упругие характеристики определяются с помощью тензора четвертого ранга c^* , связывающего средние значения напряжений $\langle \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \rangle$ и деформаций $\langle \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) \rangle$ в материале ($i, j, k, l = 1, 2, 3$): $\langle \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \rangle = c_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) \rangle$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор случайной точки среды, угловые скобки здесь и далее определяют процедуру усреднения по ансамблю, которое для статистически однородных композитов, т. е. при выполнении гипотезы эргодичности, совпадает с усреднением по объему [2].

Общая схема расчета эффективных упругих свойств матричных композитов в рамках теории случайных полей выглядит следующим образом. Представим тензоры напряжений σ , деформаций ε и модулей упругости c в виде суммы средних значений и флуктуаций (индексы опущены) [2]: $\sigma(\mathbf{r}) = \langle \sigma(\mathbf{r}) \rangle + \sigma'(\mathbf{r})$, $\varepsilon(\mathbf{r}) = \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle + \varepsilon'(\mathbf{r})$, $c(\mathbf{r}) = \langle c(\mathbf{r}) \rangle + c'(\mathbf{r})$. Полагая, что флуктуации линейно зависят от средних значений, получим: $\sigma'(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})\langle \sigma(\mathbf{r}) \rangle$, $\varepsilon'(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r})\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle$. Тензоры $P(\mathbf{r})$ и $Q(\mathbf{r})$ являются интегральными операторами, описывающими взаимодействие между включениями. Таким образом, связь между локальными и средними напряжениями и деформациями в материале может быть представлена в виде: $\sigma(\mathbf{r}) = (I + P(\mathbf{r}))\langle \sigma(\mathbf{r}) \rangle$, $\varepsilon(\mathbf{r}) = (I + Q(\mathbf{r}))\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle$, где I — единичный тензор четвертого ранга.

Эффективные упругие характеристики получаются из решения системы стохастических дифференциальных уравнений 2-го порядка (уравнений равновесия) $L_{ij}(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r}) = -f_i(\mathbf{r})$, где $L_{ij}(\mathbf{r}) = \nabla_k c_{ijkl}(\mathbf{r}) \nabla_l$ — дифференциальный оператор, а $f_i(\mathbf{r})$ и $u_j(\mathbf{r})$ — компоненты соответственно вектора объемных сил и вектора смещения. Для бесконечной среды решение этой системы можно отыскать, используя метод функций Грина с помощью специально вводимого однородного тела сравнения. Тогда выражение для расчета тензора эффективных модулей упругости представляется в следующем виде: $c^* = \langle c(\mathbf{r})(I - Q(\mathbf{r})c''(\mathbf{r}))^{-1} \rangle \langle (I - Q(\mathbf{r})c''(\mathbf{r}))^{-1} \rangle^{-1}$, где двумя штрихами здесь и далее обозначена разность между величинами неоднородной среды и однородного тела сравнения [2].

В работе используется обобщенное сингулярное приближение теории случайных полей, предполагающее наложение некоторых ограничений на ядро интегрального оператора Q [2]. В рамках данного подхода для вычислений эффективных модулей упругости необходимо воспользоваться только сингулярной составляющей тензора Грина уравнений равновесия, зависящей лишь от дельта-функции Дирака. В этом случае интегральная свертка дельта-функции переводит оператор Q в постоянный функционал g , который можно вычислить с помощью Фурье-образа сингулярной составляющей второй производной тензора Грина уравнений равновесия, что физически означает предположение однородности полей напряжений и деформаций в пределах отдельного элемента неоднородности. Расчетной формулой обобщенного сингулярного приближения теории случайных полей является выражение

$$c^* = \langle c(\mathbf{r})(I - g(\mathbf{r})c''(\mathbf{r}))^{-1} \rangle \langle (I - g(\mathbf{r})c''(\mathbf{r}))^{-1} \rangle^{-1}, \quad (1)$$

где g — интеграл от сингулярной составляющей второй производной тензора Грина уравнений равновесия [2], являющийся тензором четвертого ранга с компонентами

$g_{ijkl} = a_i(kl)(j)$, где $a_{ijkl} = -\frac{1}{4\pi} \int n_k n_j t_{il}^{-1} d\Omega$, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, t_{il}^{-1} — элементы матрицы, обратной матрице T с элементами $t_{il} = c_{ijkl}^c n_k n_j$, а n_k и n_j ($k, j = 1, 2, 3$) — компоненты вектора внешней нормали к поверхности включения. Для эллипсоидальных включений с главными полуосями l_1, l_2 и l_3 компоненты вектора нормали определяются соотношениями $n_1 = \frac{1}{l_1} \sin \theta \cos \varphi$, $n_2 = \frac{1}{l_2} \sin \theta \sin \varphi$, $n_3 = \frac{1}{l_3} \cos \theta$. По парам индексов i и j , k и l , заключенным в выражении для компонент g_{ijkl} тензора g в круглые скобки, осуществляется операция симметризации. Верхний индекс «с» в записи компонент c_{ijkl}^c тензора модулей упругости обозначает, что рассматриваются упругие характеристики однородного тела сравнения. Соотношение (1) может быть использовано для расчета эффективных характеристик статистически однородных матричных композитов с включениями неизометричной формы, ориентированными друг относительно друга [1].

Остановимся подробнее на процедуре усреднения. В случае выполнения условия эргодичности можно, как указывалось, использовать усреднение по объему (для каждого компонента неоднородного материала). Тогда операция усреднения по всему объему материала для некоторой случайной величины $a(\mathbf{r})$ сводится к суммированию

$$\langle a(\mathbf{r}) \rangle = \sum_s \nu_s \langle a_s(\mathbf{r}) \rangle_{V_s}, \quad (2)$$

где ν_s — объемная концентрация компонента s -го типа, $\sum_s \nu_s = 1$; а $a_s(\mathbf{r})$ и V_s — соответствующие ему случайная величина и объем [1, 2].

Рассмотрим далее трехкомпонентный матричный композит с эллипсоидальными включениями одинаковой формы (l_1, l_2 и l_3 — главные полуоси этих эллипсоидов) в предположении, что армирование производится только в направлениях осей x и y лабораторной системы координат. При этом материал включений, ориентированных в направлении оси x , отличается от материала включений, ориентированных в направлении оси y . Положим, что включения представляют собой эллипсоиды вращения. Причем $l_1 = L$, $l_2 = l_3 = 1$ для включений, ориентированных в направлении оси x ; $l_2 = L$, $l_1 = l_3 = 1$ для включений, ориентированных в направлении оси y . Пусть ν_1, ν_2, ν_3 ($\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1$) — объемные концентрации компонентов рассматриваемого композитного материала, где индексы «1» и «2» относятся к включениям, а «3» — к матрице. Упругие модули эллипсоидальных включений, ориентированных в направлении оси x , соответствуют ПТФЭ (антифрикционная фаза, $E_1 = 0,15$ ГПа — модуль Юнга, $\gamma_1 = 0,33$ — коэффициент Пуассона, $\rho_1 = 2,20$ г/см³ — плотность), а модули упрочняющей фазы в направлении оси y — бесщелочному (БЩ) стеклу ($E_2 = 76,2$ ГПа, $\gamma_2 = 0,22$, $\rho_2 = 2,54$ г/см³). Свойства матрицы соответствуют полимерному связующему ЭПАФ (эпоксидный материал на основе триглицидилпарааминофенола, $E_3 = 5,4$ ГПа, $\gamma_3 = 0,46$, $\rho_3 = 1,30$ г/см³) [3–5].

Положим далее, что компоненты модельного композита изотропны. Тогда, с учетом (2), из (1) получается окончательное выражение для вычисления эффективных упругих характеристик трехкомпонентных композитов:

$$\begin{aligned} c^* = & (\nu_1 \langle c_1(I - g_1 c_1'')^{-1} \rangle_{V_1} + \nu_2 \langle c_2(I - g_2 c_2'')^{-1} \rangle_{V_2} + \nu_3 \langle c_3 \rangle_{V_3}) \times \\ & \times (\nu_1 \langle (I - g_1 c_1'')^{-1} \rangle_{V_1} + \nu_2 \langle (I - g_2 c_2'')^{-1} \rangle_{V_2} + \nu_3 I)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь g_1 и g_2 — это тензор g с компонентами, соответствующими эллипсоидальным включениям, ориентированным своей главной полуосью L в направлениях осей x и y соответственно; c_s ($s = 1, 2, 3$) — тензоры модулей упругости s -го компонента.

Для проведения по соотношению (3) модельных расчетов при операциях над тензорами использовалась их матричная форма записи. Эффективные упругие характеристики композитов вычислялись в приближении самосогласования [2]. С этой целью была организована итерационная процедура, в которой в качестве параметров тела сравнения брались значения тензора модулей упругости, полученные на предыдущем шаге итерации. В качестве начальных значений параметров тела сравнения выбирались упругие характеристики в приближении Хилла (среднего арифметического между значениями, полученными в приближениях Ройсса $c_{\text{Reuss}} = (\sum_{s=1}^3 \nu_s (c_s)^{-1})^{-1}$ и Фойгта $c_{\text{Voight}} = \sum_{s=1}^3 \nu_s c_s$) [2]. Выход из итерационной процедуры осуществлялся, когда максимальная разница между эффективными модулями составляла менее 0,01. Отметим, что для каждого значения концентрации компонентов материала требовалось проводить порядка 10–15 итераций.

Были проведены расчеты коэффициентов упругой анизотропии A_1 , A_2 и A_3 в направлениях соответственно осей x , y и z лабораторной системы координат. Параметры анизотропии A_1 и A_3 вычислялись по следующим формулам: $A_1 = \frac{c_{11}^* - c_{12}^*}{2c_{44}^*}$, $A_3 = \frac{c_{33}^* - c_{23}^*}{2c_{66}^*}$. Параметр анизотропии A_2 вычислялся по формуле для коэффициента A_1 , но для этого при проведении модельных расчетов производилась переориентация между собой включений 1-го и 2-го типов (т.е. включения из ПТФЭ ориентировались в направлении оси y , а включения из БЩ-стекла в направлении оси x).

На практике используют не объемные концентрации элементов неоднородности, а их концентрации по массе (в процентах). Поэтому все расчеты приведены далее относительно процентной концентрации элементов неоднородности по массе. На рис. 1 для рассматриваемых композитов представлены результаты модельных вычислений параметров анизотропии A_s ($s = 1, 2, 3$) от изменения концентрации их компонентов при $L \rightarrow \infty$, что соответствует антифрикционным материалам, армированным тканью. На рис. 1а приведены зависимости A_s от изменения концентрации волокон ПТФЭ в используемом на практике диапазоне (до 15%) при 60%-й концентрации волокон БЩ-стекла. На рис. 1б приведены зависимости A_s от изменения концентрации волокон БЩ-стекла в важном для практики диапазоне (от 40 до 70%) при 10%-й концентрации волокон ПТФЭ.

Отметим, что точка $\mu_1 = 0\%$ на рис. 1а определяет отсутствие включений ПТФЭ, т.е. получается двухкомпонентный однонаправленно армированный вдоль оси y композитный материал (с волокнами из БЩ-стекла). Поэтому в данной точке параметры анизотропии A_1 и A_3 равны друг другу.

Кроме того, увеличение концентрации волокон ПТФЭ при сохранении массовой доли волокон БЩ-стекла приводит к увеличению анизотропии в направлениях осей x и y (при этом наиболее сильная вариация анизотропии происходит в направлении x). Увеличение же концентрации волокон БЩ-стекла при сохранении массовой доли волокон ПТФЭ приводит к уменьшению анизотропии в направлениях осей x и y (наиболее сильная вариация анизотропии происходит при этом в

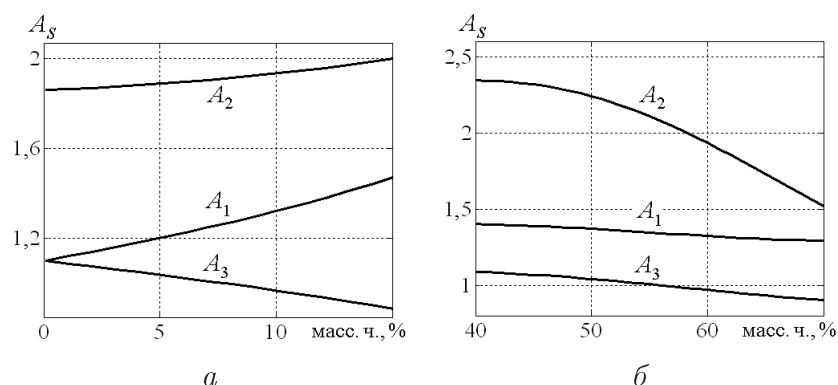


Рис. 1. Зависимости параметров анизотропии модельных композитов от изменения процентной концентрации (по массе) их компонентов.

направлении y). В направлении z вариация A_3 незначительна.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-08-01163-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бардушкин В., Яковлев В. Механика микроструктур. Саарбрюккен: LAP, 2011. 164 с.
- [2] Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
- [3] Лапицкий А. В. Эпоксидные полимерные матрицы для высокопрочных и теплостойких композитов // Клеи. Герметики. Технологии. 2010. № 2. С. 12–15.
- [4] Физические величины: Справочник // Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
- [5] Гутников С. И., Лазоряк Б. И., Селезнев А. Н. Стекланные волокна. М.: Изд-во МГУ, 2010. 53 с.

Kolesnikov V. I., Bardushkin V. V., Kolesnikov I. V., Sychev A. P., Sychev A. A., Yakovlev V. B. *Anisotropy of elastic characteristics of the three-component antifriction composites with oriented non-isometric inclusions.* The problem of calculation of effective elastic characteristics for three-component matrix composites with the ellipsoidal inclusions of an identical shape, which oriented parallel to some plane in two mutually perpendicular directions, is solved. Thus the material of the inclusions located in one of the specified directions is distinct from a material of inclusions in the perpendicular direction. For antifriction composites based on epoxy matrix (EPAF) with PTFE and E-glass fibers modeling calculations of elastic anisotropy parameters in the various directions, considering changes of concentration of isotropic components, are carried out.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АРМАТУРНЫХ СТАЛЕЙ

Косенко Е. Е.^{*}, Косенко В. В.^{*}, Черпаков А. В.^{**}

^{*}Ростовский государственный строительный университет

^{**}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены эксперименты о возможности применения арматурной стали при напряжениях превышающих значения предела текучести. Анализ проведенных исследований показал, что при напряжениях, превышающих значения предела текучести, эффективно использовать термомеханически упрочненные арматурные стали классов А500С и Ат800 из-за постоянной доли вязкой составляющей в изломе практически до значений предела прочности.

Способность железобетонных конструкций выполнять требуемые функции в течение длительного времени при эксплуатации в разных условиях определяет сочетание свойств арматуры и бетона. Определение прочностных свойств железобетонных конструкций, каким либо одним методом невозможно, поэтому при расчетах, помимо общих факторов, влияющих на образцы, пользуются вероятностными методами с использованием расчетных характеристик арматуры и бетона. В основу таких расчетов ложится изменчивость свойств материалов и обобщается изменчивость свойств остальных факторов (усилие преднапряжения стержней, геометрические характеристики сечений, условия работы конструкций и т. д.). Значительный запас прочности железобетонных конструкций определяет свойства материалов, заложенные ещё на стадии производства, приобретающие в итоге количественное расчетное значение.

Ранее проведенные работы [1–3] показали, что при исследовании механических характеристик арматурных сталей руководствуются показателями натуральных образцов. Значения механических характеристик определены в сечении арматурных сталей классов А500С и Ат800, с использованием стандартных методов контроля (измерение твердости по Виккерсу) и методом ударного вдавливания индентора. Эти исследования показали, что у образцов арматуры, находящихся в состоянии поставки и упрочненных одноосным растяжением до различных уровней выше значений предела текучести (уровни упрочнения выражены коэффициентом упрочнения K_y , представляющим собой отношение действующего напряжения к физическому или условному пределу текучести) отмечается значительное рассеивание значений твердости, что объясняется неоднородной структурой сечения арматуры классов А500С и Ат800 [4, 5].

Такое распределение твердости характерно для арматурных сталей, прошедших термомеханическое упрочнение и получивших, в результате этого комбинированную структуру сечения, на формирование которой оказывают влияние химический состав и способ изготовления. Ввиду того, что нас интересует арматура классов А500С и Ат800, рекомендуемая СТО АСЧМ 7–93, ТУ 14–1–5254–94 и ГОСТ 10884–94 для использования в железобетонных конструкциях в качестве

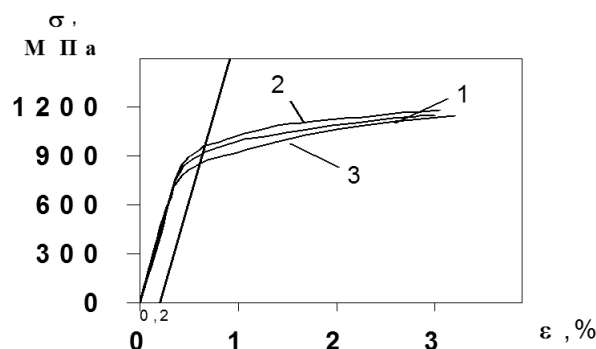


Рис. 1. Диаграммы растяжения арматурных сталей классов А500С (а) и Ат800 (б) в состоянии поставки: 1 — натурные образцы; 2 — с выточкой диаметром 10 мм; 3 — с выточкой диаметром 6 мм.

преднапрягаемой, основное внимание в проведенных исследованиях уделено именно этим классам арматуры.

Учитывая то, что в составе железобетонной конструкции арматура испытывает растягивающие воздействия, при исследовании упругопластической области необходимо определить диаграммы растяжения различных зон в сечении арматуры. Эти исследования легли в основу экспериментов, для которых изготовили образцы с выточкой на токарном станке, из арматуры в состоянии поставки и упрочненной одноосным растяжением до различных уровней, двух типов. Таким образом, у первого типа образцов диаметр в месте выточки составил 10 мм (образцы для определения диаграммы растяжения арматуры без влияния концентраторов напряжений в виде периодического профиля), у второго — 6 мм (образцы для определения диаграмм растяжения центрального слоя арматуры). Выточку производили по центру образцов длиной 100 мм. Разрушали образцы на разрывной машине ИР-200. Результаты эксперимента представлены на рис. 1. У образцов с выточкой диаметром 10 мм значение механических характеристик несколько выше в сравнении с натурными образцами, что видно из расположения диаграмм (рис. 1). Это указывает

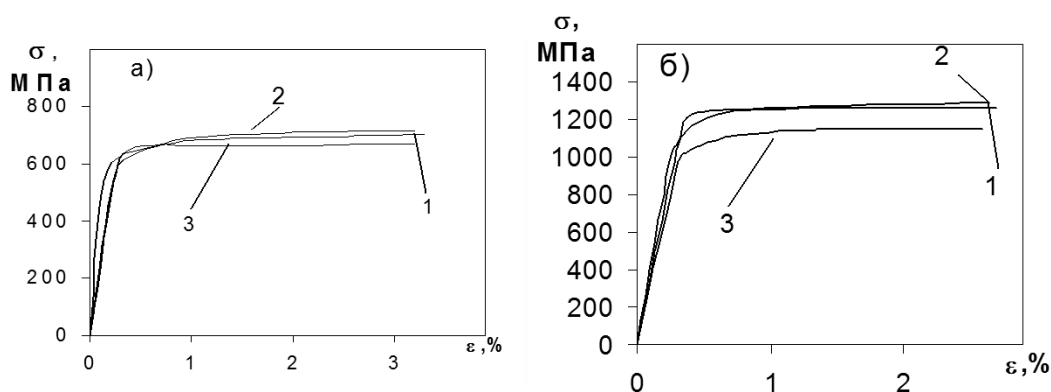


Рис. 2. Диаграммы растяжения арматурных сталей классов А500С (а) и Ат800 (б) после упрочнения до $K_y = 1.15$: 1 — натурные образцы; 2 — с выточкой диаметром 10 мм; 3 — с выточкой диаметром 6 мм.

на то, что концентраторы напряжения в виде периодического профиля оказывают определенное влияние на свойства арматуры, незначительно снижая их при растяжении. Образцы с выточкой диаметром 6 мм выявили более низкие значения предела текучести в сравнении с натурными образцами. После упрочнения одноосным растяжением (рис. 2) повышаются значения пределов текучести у натурных образцов: арматуры класса А500С на 6 %, у арматуры класса Ат800 — на 9 %, и снижаются деформативные характеристики арматуры: для А500С — до 3,2 %, для Ат800 — до 2,6 %. Таким образом, после упрочняющего воздействия характер диаграмм рассматриваемых зон сечения не изменился, указывая на постоянство механизма распределения напряжений. Исследования показали наличие более высоких значений предела текучести поверхностного слоя арматуры в сравнении со значениями предела текучести натурных образцов, что позволяет упрочнять эти классы арматуры одноосным растяжением.

На базе проведенных экспериментов определены предельные уровни упрочнения одноосным растяжением арматурных сталей классов А500С и Ат800, исходя из условия вязкого разрушения. Склонность к охрупчиванию оценивали по виду излома арматуры (волокнистый, кристаллический или смешанный) после ударного разрушения на маятниковом копре в соответствии с методикой, описанной в ГОСТ 4543–71. Допустимой величиной вязкой составляющей в изломе арматуры, исходя из инженерной практики, приняли 80 %. Результаты представлены на рис. 3 в виде зависимости доли вязкой составляющей от коэффициента упрочнения. По результатам фрактографического анализа после разрушающих испытаний установлено, что термомеханически упрочненные арматурные стали классов Ат800 и А500С склонности к охрупчиванию не обнаружили независимо от коэффициента упрочнения. Арматура классов А500С и Ат800 имеют в изломе около 95 % вязкой составляющей.

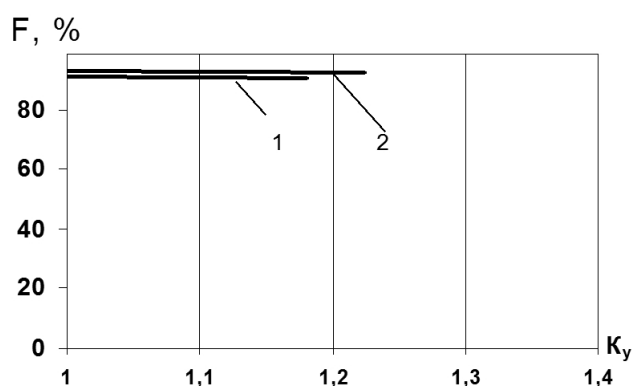


Рис. 3. Влияние упрочнения одноосным растяжением на долю вязкой составляющей в изломе арматурных сталей: 1 — А500С; 2 — Ат800.

Исследованиями, проведенными в последние годы, установлено, что стали можно характеризовать как склонные к хрупкому разрушению в случае сочетания низких значений пластических свойств (δ и KCU) и доли вязкой составляющей в изломе. В связи с этим арматурные стали классов А500С и Ат800 в рассмотренных условиях склонными к охрупчиванию не являются. Такое поведение можно объяснить технологией производства арматуры, в результате которой создана сложная

структура сечения, являющаяся бейнитной, с различным соотношением отпущенного мартенсита, цементита и остаточного аустенита — в поверхностном слое и феррито-перлитной — в сердцевине, что позволяет этим классам арматуры выдерживать значительные деформации без опасения перехода в хрупкое состояние.

Значения прочностных и пластических свойств арматуры, соответствующих предельным значениям нагрузки, в виде упрочнения одноосным растяжением, и достаточная доля вязкой составляющей в изломе позволяют определить предельное напряжение, исходя из условия вязкого разрушения ($\sigma_{\text{пред}}$) по формуле:

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}} K_{\text{у.пред}}, \quad (1)$$

где $K_{\text{у.пред}}$ — коэффициент упрочнения, при котором приложенное напряжение имеет предельное значение.

Для контроля значений $\sigma_{\text{пред}}$ используем предельные значения ударной вязкости $KCU_{\text{пред}}$ и относительного удлинения $\delta_{\text{пред}}$, соответствующие величине $K_{\text{у.пред}}$. Ввиду рассеивания механических характеристик арматурных сталей необходимо руководствоваться их минимальными значениями. Минимальную величину ($\sigma_{\text{пред}}$) определим из выражения:

$$\sigma_{\text{пред.min}} = \sigma_{\text{т.min}} K_{\text{у.пред}}, \quad (2)$$

где $\sigma_{\text{т.min}}$ — минимальное значение предела текучести.

Класс арматуры	Данные измер. на разрывной машине ИР-200 $\sigma_{\text{т}}/\sigma_{\text{в}}$, МПа	Проц. вязкой составляющей в изломе арматуры, %	$K_{\text{у.пред}}$	Значения деформ. ε , %	$\sigma_{\text{пред.min}}$, МПа
A500C	580/764	95	1,15	6	667
At800	902/1149	95	1,15	2,5	1037

Таблица 1. Прочностные характеристики арматурных сталей.

Результаты расчета предельных уровней упрочнения одноосным растяжением, исходя из условия вязкого разрушения и соответствующие им напряжения для исследуемых классов арматуры, представлены в табл. 1. Анализ проведенных исследований показал, что при напряжениях, превышающих значения предела текучести, эффективно использовать термомеханически упрочненные арматурные стали классов A500C и At800 из-за неизменной доли вязкой составляющей в изломе практически до значений предела прочности.

Вышеуказанные эксперименты показали возможность применения арматурной стали при напряжениях превышающих значения предела текучести, однако следует учесть, что при проведении экспериментов использовались образцы длиной 200 мм в соответствии с гостом. При переходе на стержни длиной 6 м, применяемые при изготовлении железобетонных конструкций, большое влияние оказывают геометрические размеры арматурных профилей, а именно диаметр арматуры, значения которого имеют значительное рассеивание. По причине различия диаметров по длине арматурных стержней весь эффект упрочнения одноосным растяжением может ограничиться областями с наименьшими значениями диаметра.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 12-08-90815-мол_рф_нр, 12-08-31306 мол_а, 12-08-31397 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мещеряков В. М., Косенко Е. Е. Влияние упрочнения одноосным растяжением на механические характеристики в сечении арматурных сталей // Рост. гос. строит. ун-т, 2004. 9 с. Деп. в ВИНТИ, 10.12.04 № 1690–2004.
- [2] Косенко Е. Е., Косенко В. В., Черпаков А. В. Прочностные резервы арматурных сталей для обеспечения эксплуатационных свойств железобетонных конструкций // «Строительство-2011»: материалы Международной научно-практической конференции. Ростов н/Д. 2011. С.125–126.
- [3] Бурцева О. А., Нефедов В. В., Косенко Е. Е., Косенко В. В., Черпаков А. В. Статистическая оценка механических характеристик арматурных сталей // Тр. XV Междунар. конф «Соврем. пробл. механики сплош. среды», Ростов н/Д. 2011. Т. II. С.47–51.
- [4] Косенко Е. Е., Косенко В. В., Черпаков А. В. К вопросу о влиянии геометрических размеров на прочностные характеристики арматурных сталей // Инженерный вестник Дона. 2010. № 4. Электрон. ресурс. <http://ivdon.ru/magazine/archive/n4y2010/>
- [5] Бурцева О. А., Косенко Е. Е., Косенко В. В., Нефедов В. В., Черпаков А. В. Моделирование напряженного состояния арматурных стержней, применяемых при производстве преднапряженных железобетонных конструкций. Инженерный Вестник Дона. № 4. 2011. Электрон. ресурс. <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4y2011/page/3/>

Kosenko E. E., Kosenko V. V., Cherpakov A. V. *The research of reinforcing steel strength characteristics.* Experiments about possibility of application of reinforcing steel are considered at tension exceeding values of a limit of fluidity. The analysis of the carried-out researches showed that at the tension exceeding values of a limit of fluidity, effectively to use thermomechanical strengthened reinforcing steel of the classes A500C and A_T800 because of a constant share of a viscous component in a break practically to values of strength.

ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРА РАЗРУШЕНИЯ И ПРОЧНОСТИ ХРУПКИХ ТЕЛ ПРИ ИХ СЖАТИИ ОТ КОНТАКТНОГО ТРЕНИЯ И ОРИЕНТАЦИИ НАЧАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ

Костандов Ю. А., Медведев В. С.

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

Проведено экспериментальное исследование влияние контактного трения и ориентации начальной трещины на характер разрушения и прочность содержащих ее образцов при одноосном сжатии. Предложено объяснение установленного характера разрушения таких образцов и нетривиальных зависимостей их прочности от ориентации начальной трещины.

При решении ряда проблем, связанных с технологией подземных работ, устойчивостью как подземных, так и иных сооружений или их элементов, возникают задачи определения параметров предельного состояния образцов, выполненных из хрупких материалов и ослабленных начальными трещинами, в зависимости от величины контактного трения на поверхностях образцов, воспринимающих нагрузку.

Исследование влияния ориентации начальной трещины на характер разрушения и прочность содержащих ее образцов проводилось при одноосном сжатии образцов, изготовленных из песчано-цементной смеси по методике [1]. Образцы представляли собой прямоугольные параллелепипеды размером $\{x \cdot y \cdot z\} = \{a \cdot h \cdot b\} = \{55 \cdot 55 \cdot 20\}$ мм с центральным сквозным разрезом длиной $2l = 18$ мм и шириной 0,2 мм, имитирующем начальную трещину. Разрезы ориентировались под углами α , равными $\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ к направлению действующей нагрузки.

Песчано-цементная смесь для изготовления образцов затворялась при значениях водно-цементного отношения 0,35, а отношение весовых частей цемента и песка при этом составляло 1:2. Полученные образцы были разделены на две серии S1 и S3, испытания которых проводили через 3 и 9 месяцев после их изготовления, соответственно. Нагружение образцов одноосным сжатием вдоль оси ОУ проводилось на испытательной машине УМЭ-10М со скоростью 0,5...1,5 кН/с в двух вариантах. В первом — при непосредственном контакте нагружаемых торцов образцов со стальными плитами пресса, что обеспечивало коэффициент контактного трения $f_S = 0,24$. Во втором варианте — между нагружаемыми торцами образцов и плитами пресса размещались фторопластовые пластины. При этом коэффициент контактного трения снижался до значения $f_F = 0,035$.

Регистрация нагрузки и продольной деформации проводилась с помощью аппаратно-программного комплекса [1], который предусматривает использование тензодатчиков и аналогово-цифрового преобразователя АДА1292В.

Зависимости прочности σ_v образцов серий S1 и S3, рассчитанной на их действующее сечение S_d ($S_d = (a - 2l \sin \alpha)b$, a — ширина образца, b — его толщина), от угла наклона трещины α при $f_F = 0,035$ и $f_S = 0,24$ приведены на рис. 1а и рис. 1б соответственно.

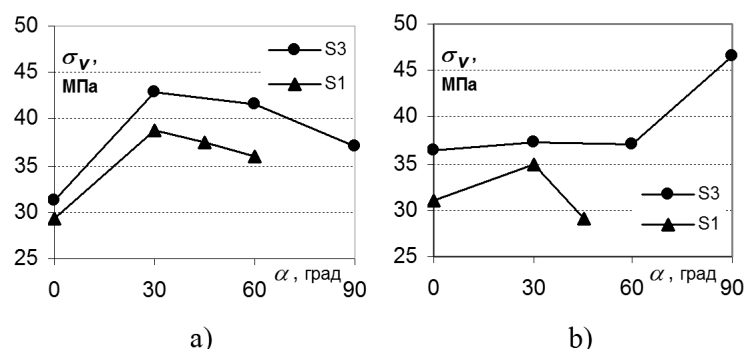


Рис. 1.

Для установления последовательности стадий процесса разрушения проводилась его видеорегистрация со скоростью 30 кадров в секунду. Из ее результатов следует, что при сжатии образца в первую очередь образуются трещины между вершинами разреза и наиболее удаленными от них нагружаемыми гранями образца или их углов, которые будем называть противоположными. Затем образуются поверхностные трещины и отслоения материала, происходит смыкание берегов разреза и выброс разрушенного в пыль материала. При дальнейшем нагружении образца могут образовываться трещины вдоль его свободных граней.

Однако результаты видеорегистрации позволяют судить только о проявлении процесса разрушения на поверхности образца, а потому не являются достаточно информативными для полного представления о процессе разрушения, протекающего во всем объеме образца. Поэтому после проведения экспериментов проводился анализ образовавшихся в разрушенных образцах трещин и отслоений. Это, в частности, позволило выявлять приповерхностные трещины (отслоения материала).

На рис. 2 приведены фотографии некоторых разрушенных одноосным сжатием образцов серии S1 при различных углах α ориентации разреза и значениях коэффициентов контактного трения $f_F = 0,035$ и $f_S = 0,24$.

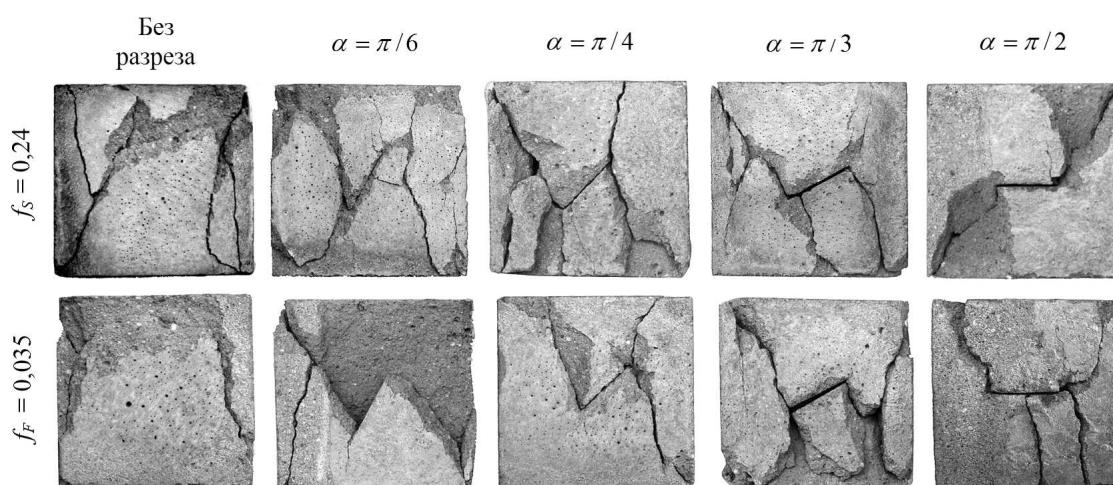


Рис. 2.

Анализ картин разрушения, образовавшихся в разрушенных образцах трещин и отдельностей, позволяет сделать вывод о преобладании продольного характера разрушения, когда образование и развитие трещин происходит преимущественно в направлении действия нагрузки.

Из описания картин разрушения можно сделать два основных вывода относительно разрушения образцов с начальным разрезом, имитирующем трещину: 1) увеличение трения между контактирующими поверхностями образцов и плитами пресса приводит к развитию диагонального разрушения образцов в сечении YOZ ; 2) разрушение начинается с образования трещин между вершинами разреза и противоположными гранями образцов или их углов.

Первый вывод можно объяснить тем, что при наличии трения между контактирующими поверхностями затрудняется поперечная деформация образца в плоскости XOZ вблизи нагруженных граней.

Вместе с этим проявляется известная зависимость призмочной прочности от соотношения h/a [2], состоящая в том, что прочность высокого образца ниже прочности широкого. Это приводит к тому, что разрушить образец по диагональным или близким к ним плоскостям в сечении YOZ легче, чем в сечении XOY .

Для объяснения второго вывода рассмотрим нижнюю часть образца с разрезом, ориентированным под некоторым углом α , как показано на рис. 3а. В этой части образца $ABCDEF$ имеется участок поверхности CD , свободный от нагрузки, что позволяет условно выделить две части образца, подверженных сжатию нагрузкой $\sigma(x)$: $ABCH$ высотой h_1 и $GDEFG$ высотой h_2 , ($h_1 < h_2$), у которых кроме угловых точек A и F , граничащих со свободными поверхностями, имеются еще такие же точки C и D . Однако, поскольку эти точки являются вершинами разреза CD , концентрация напряжений в них выше, чем в точках A и F . Кроме того, $h_1 < h_2$, поэтому прочность части $GDEFG$ ниже прочности части $ABCH$ [2]. При условии, что трещина развивается из угловой точки образца по траектории максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) [3, 4], это приводит к развитию трещины из точки D по траектории DF' .

Рассмотрим также нижнюю часть образца с разрезом, ориентированным под углом $\alpha = \pi/2$, как показано на рис. 3б. В этой части образца $ABCC'F'FGHA$ также имеется участок поверхности $C'F'$, свободный от нагрузки, что позволяет условно выделить две одинаковых части образца, подверженных сжатию нагруз-

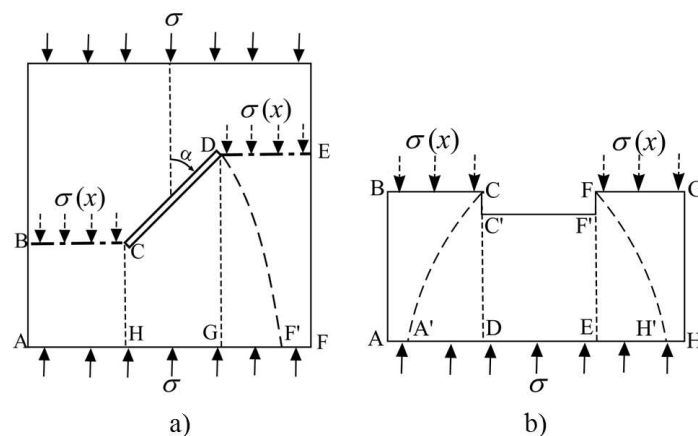


Рис. 3.

кой $\sigma(x)$: ABCDA и FGHEF, у которых кроме угловых точек А и Н, граничащих со свободными поверхностями, имеются еще такие же точки С и F. Однако, поскольку эти точки являются вершинами разреза CC'F'F, концентрация напряжений в них выше, чем в точках А и Н. Поэтому, считая по прежнему, что трещина развивается из угловой точки образца по ТМЭКН, это приведет к равновероятному развитию трещин из точек С и F по траекториям СА' и FH', соответственно.

Предложенное объяснение того, что при одноосном сжатии разрушение образцов с начальным разрезом начинается с образования трещин между вершинами разреза и противоположными гранями образцов или их углов, находится в полном соответствии с экспериментальными данными. Их отличие от результатов, полученных в работе [5] численным моделированием для углов ориентации трещины $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/3$, обусловлено, по-видимому, в первую очередь отсутствием в используемой численной модели зависимости призматической прочности от соотношения h/a .

Основываясь на приведенных выше рассуждениях, можно дать качественное объяснение нетривиальных зависимостей прочности σ_v образцов серий Р1 и Р3, рассчитанной на их действующее сечение, от угла наклона трещины α и коэффициента трения f , приведенных на рис. 1. Сразу отметим, что прочность образцов серии Р3 выше, чем прочность образцов серии Р1, по причине большей выдержки их во времени до проведения испытаний (хорошо известно возрастание со временем прочности материалов на основе цементных растворов).

Рассмотрим зависимости прочности σ_v образцов серий Р1 и Р3 от угла наклона трещины α при коэффициенте трения $f_F = 0,035$ (рис. 1а). При введении в образцы разреза под углом $\alpha = \pi/6$ становится затруднительным разрушение по диагоналям вертикальных сечений YOZ, параллельных свободным боковым граням образца (диагональное разрушение). Разрушение таких образцов происходит, прежде всего, по схеме, представленной на рис. 3а. При этом, во-первых, уменьшается высота воспринимающей нагрузку части образца ($h_2 < h$), что приводит к росту разрушающей нагрузки, и, во-вторых, уменьшается действующее сечение S_d образца. В результате прочность образцов при введении в них разреза под углом $\alpha = \pi/6$ увеличивается от 29,3 МПа до 38,8 МПа для серии Р1 и от 31,2 МПа до 42,8 МПа для серии Р3.

При дальнейшем увеличении угла наклона трещины α неизменной длины происходит уменьшение величин h_2 и S_d , однако, при $\alpha > \pi/4$ действующее сечение S_d уменьшается медленнее, чем высота воспринимающей нагрузку части образца h_2 . Вместе с тем, с уменьшением S_d растет концентрация напряжений в вершине разреза, что в итоге приводит к снижению прочности образца с увеличением α .

Теперь рассмотрим зависимости прочности σ_v образцов серий Р1 и Р3 от угла наклона разреза α при коэффициенте трения $f_S = 0,24$ (рис. 1б).

Для сплошных образцов серий Р1 и Р3 увеличение коэффициента контактного трения повышает прочность образцов, причем тем больше, чем выше прочность образцов.

Для образцов серии Р1 зависимость σ_v от угла наклона разреза α качественно повторяет аналогичные зависимости для образцов серий Р1 и Р3 при коэффициенте трения $f_F = 0,035$. Для ее объяснения также можно применить рассуждения,

приведенные выше, относительно зависимости σ_v от α при коэффициенте трения $f_F = 0,035$, добавив, что снижение значений σ_v при $f_S = 0,24$ относительно значений σ_v при $f_F = 0,035$ происходит за счет реализации диагонального разрушения вследствие, как было сказано выше, сдерживания контактным трением поперечной деформации образца в плоскости XOZ вблизи нагруженных граней и проявлением зависимости призмочной прочности от соотношения h/a .

Для образцов серии РЗ их прочность σ_v при коэффициенте трения $f_S = 0,24$ с увеличением угла наклона трещины α до $\pi/3$ практически остается постоянной (рис.1б). Причина этого состоит в том, что прочность образцов серии РЗ выше, чем прочность образцов серии Р1, и реализация диагонального разрушения в этом случае оказывается менее чувствительной к ориентации начального разреза при углах $\alpha < \pi/3$. При $\alpha = \pi/2$ первоначально образуются трещины между вершинами разреза и противоположными углами образцов, и только после смыкания берегов разреза происходит диагональное разрушение образовавшихся отдельных частей, что и является причиной значительного возрастания прочности образцов серии РЗ при $\alpha = \pi/2$.

В заключение следует отметить, что зависимость прочности и характера разрушения образцов с начальной трещиной от ее ориентации при одноосном сжатии в значительной степени зависят от величины контактного трения, прочности материала образцов, соотношения их размеров с длиной трещины и зависимости призмочной прочности от соотношения размеров образцов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Костандов Ю. А., Медведев В. С. Исследование предельного состояния хрупких тел с трещинами при одноосном сжатии // Заводская лаборатория. 2011. № 3. С. 54–57.
- [2] Баженов Ю. М. Технология бетона: Учеб. пособие для технол. спец. строит. вузов. М.: Высшая школа, 1987. 415 с.
- [3] Васильев Л. М., Васильев Д. Л. Дифференциальное уравнение предельного состояния деформируемого твердого материала с учетом внутреннего и внешнего трения // Геотехническая механика. 2003. Вып. 41. С. 145–152.
- [4] Костандов Ю. А., Локшина Л. Я. Влияние контактного трения на предельное напряжение в образце горной породы и вид траектории разрушения при сжатии // Физико-технические проблемы горного производства. 2010. № 13. С. 42–47.
- [5] Костандов Ю. А., Шиповский И. Е. Компьютерное моделирование разрушения хрупких образцов при сжатии // Материалы XXII Межд. науч. школы им. С. А. Христиановича «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках». Симферополь: ТНУ, 2012. С. 163–169.

Kostandov Yu. A., Medvedev V. S. *Dependence of destruction character and strength of brittle bodies at their compression from the contact friction and orientation of initial crack.* The experimental research of influencing of contact friction and orientation of initial crack on the destruction character and strength of samples containing her at the uniaxial compression is carried out. The explanation of the established destruction character of such samples and nontrivial dependences of their strength from orientation of initial crack is offered.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОМ АРЕАЛЕ

Кругликов М. Г., Цибулин В. Г.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Процесс распространения неантагонистических популяций в кольцевой области моделируется на основе системы нелинейных параболических уравнений и метода прямых. Проанализировано формирование стационарных распределений плотностей популяций в случае коэффициентов линейного роста и функции ресурса, зависящих от пространственной координаты, и указаны соотношения на параметры, при которых система имеет непрерывное семейство стационарных решений. Для пространственно-периодических коэффициентов роста найдена область значений параметров, при которых наблюдается сосуществование популяций.

Введение. В математической биологии уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера и его обобщения применяются для описания динамики популяций на однородных ареалах с учетом ограниченного ресурса [1]. В последнее время растет интерес к изучению эффектов неоднородности жизненных условий, влияющих на выживание популяций и способствующих сосуществованию различных видов [2, 3].

Целью настоящей работы является моделирование формирования стационарных распределений неантагонистических близкородственных популяций на неоднородном ареале. Рассматривается система параболических уравнений с нелинейностью логистического типа и коэффициентами линейного роста, зависящими от пространственной переменной. В численном эксперименте для кольцевого интервала проанализированы стационарные распределения плотностей двух близкородственных популяций в зависимости от параметров линейного роста и пространственной неоднородности ресурса.

1. Математическая модель роста и миграции близкородственных популяций описывается системой нелинейных уравнений параболического типа относительно плотностей $w_i = w_i(x, t)$, $i = 1, \dots, M$:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x} + \eta_i w_i f, \quad q_i = -k_i \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad f = 1 - \frac{1}{P} \sum_{j=1}^M w_j. \quad (1)$$

Коэффициенты диффузии k_i , роста η_i и обобщенный ресурс P зависят от x .

Уравнения (1) рассматриваются в кольцевой области $x \in [0, a]$, условия периодичности имеют вид:

$$w_i(0, t) = w_i(a, t), \quad k_i(0) \frac{\partial w_i(0, t)}{\partial x} = k_i(a) \frac{\partial w_i(a, t)}{\partial x}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (2)$$

В начальный момент времени заданы распределения популяций:

$$w_i|_{t=0} = w_{i0}(x), \quad i = 1, \dots, M. \quad (3)$$

При постоянном на ареале ресурсе $P(x) = \text{const}$ и при произвольных функциях $k_i(x)$, $\eta_i(x)$ система (1)–(2) имеет бесконечное число не зависящих от x решений, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^M \tilde{w}_i = P_0$. Это связано со свойством трансляционной инвариантности системы. Помимо симметрии возникновение семейства решений может быть вызвано косимметрией задачи [4]. Для определения соответствующих дополнительных условий на управляющие параметры рассматривается система двух популяций

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= [k_1 w_1']' + \eta_1 w_1 f \equiv F_1, & (\cdot)' &= \partial_t(\cdot), \\ \dot{w}_2 &= [k_2 w_2']' + \eta_2 w_2 f \equiv F_2, & (\cdot)' &= \partial_x(\cdot), \end{aligned} \quad (4)$$

и анализируется случай линейной косимметрии

$$L = (\xi_1 w_2, \xi_2 w_1). \quad (5)$$

По определению косимметрия L ортогональна правой части системы (4), т. е. при любых функциях w_1 и w_2 должно выполняться интегральное тождество:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a [F_1 \xi_1 w_2 + F_2 \xi_2 w_1] dx = I_1 + I_2 = 0, \\ I_1 &= \int_0^a [(k_1 w_1')' \xi_1 w_2 + (k_2 w_2')' \xi_2 w_1] dx, & I_2 &= - \int_0^a (\eta_1 \xi_1 + \eta_2 \xi_2) w_1 w_2 f dx. \end{aligned}$$

Интеграл I_2 обращается в нуль, если $\xi_1 = \eta_2$, $\xi_2 = -\eta_1$. Тогда с использованием интегрирования по частям и условия периодичности для I_1 получается

$$I_1 = - \int_0^a \varkappa dx, \quad \varkappa = k_1 \eta_2' w_1' w_2 - k_2 \eta_1' w_1 w_2' - (k_2 \eta_1 - k_1 \eta_2) w_1' w_2'. \quad (6)$$

Векторное поле L будет косимметрией при $\varkappa = 0$. Для этого можно потребовать дополнительно

$$k_2 \eta_1 - k_1 \eta_2 = 0. \quad (7)$$

После исключения k_1 и учета (7) выражение для $\varkappa$ имеет вид:

$$\varkappa = \frac{k_2 \eta_1 \eta_2'}{\eta_2} w_1' w_2 - k_2 \eta_1' w_1 w_2'.$$

Специфика рассматриваемой задачи такова, что (5) будет косимметрией только при постоянных коэффициентах диффузии и роста. Это устанавливается следующим образом. Для выполнения равенства $I_1 = 0$ подынтегральное выражение (6) должно быть полным дифференциалом, то есть $\varkappa = (\chi w_1 w_2)'$. Неизвестная функция χ должна удовлетворять условию $\chi' = 0$. Отсюда получается система уравнений относительно η_1 , η_2 :

$$\eta_1' = -\frac{\chi}{k_2}, \quad \eta_2' = \frac{\chi \eta_2}{k_2 \eta_1}.$$

Функция η_1 находится следующим образом:

$$\eta_1(x) = -\chi \int_0^x \frac{d\tau}{k_2(\tau)} d\tau + \eta_1(0).$$

В силу периодичности, $\eta_1(0) = \eta_1(a)$, но это возможно только для знакопеременных k_2 . Из положительности коэффициентов диффузии и роста следует, что ко-симметрия L (5) имеется только при постоянных по ареалу коэффициентах диффузии и роста.

Далее анализируется случай периодических по x коэффициентов линейного роста и проводится анализ возможных распределений популяций, когда условие (5) выполнено «в среднем». Для модели популяционной кинетики с нелинейностью специального вида в [3] вычислено и проанализировано семейство стационарных решений. В [2] показано, что для уравнений с нелинейностью логистического типа, описывающих динамику близкородственных популяций, также имеется семейство равновесий.

3. Численные результаты. Для интегрирования системы (1)–(3) применяется метод прямых с аппроксимацией правой части уравнений на равномерной сетке $x_k = hk$, $k = 0, \dots, n$ ($h = a/n$). В узлах определяются переменные $w_{i,k}$, $i = 1, \dots, M$, а производные аппроксимируются разностными операторами на трехточечном шаблоне. Дискретный аналог (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{w}_{i,k} &= k_i \frac{w_{i,k-1} - 2w_{i,k} + w_{i,k+1}}{h^2} + \eta_i w_{i,k} f_k, \quad i = 1, \dots, M. \\ f_k &= 1 - \frac{1}{P(x_k)} \sum_{s=1}^M w_{s,k}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Из условий периодичности получаются соотношения $w_{i,n+1} = w_{i,1}$, $w_{i,0} = w_{i,n}$. Для интегрирования по времени применяется метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

Расчеты стационарных распределений двух популяций $w_1 = u(x, t)$, $w_2 = v(x, t)$ проведены для кольцевого ареала с постоянными коэффициентами диффузии k_i , коэффициентами роста $\eta_i = \eta_{i0} + \eta_{i1} \sin(2\pi x/a)$ и функцией обобщенного ресурса $P(x) = 1 - \mu \sin 2\pi x$. Если параметры роста постоянны на всем ареале ($\eta_{11} = \eta_{21} = 0$) и функция обобщенного ресурса $P(x) = 1$ ($\mu = 0$), то установление приводит к постоянным по ареалу плотностям популяций. При этом неоднородность начальных данных не влияет на финальные распределения. При постоянных η_1 , η_2 , $\mu \neq 0$, и $k_1 \eta_2 \neq k_2 \eta_1$, выживает только одна популяция. Если $k_1 \eta_2 = k_2 \eta_1$, то существует семейство решений, когда в зависимости от начальных данных реализуются разные финальные распределения $\tilde{u}(x)$, $\tilde{v}(x)$, такие, что $\tilde{u}(x) + \tilde{v}(x) = P(x)$.

Далее рассматривается случай переменного параметра роста для популяции v : $\eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21} \sin(2\pi x/a)$, расчеты проводились при следующих значениях параметров: $k_1 = 0.02$, $k_2 = 0.04$, $\mu = 0.4$, $\eta_{10} \in [1, 8]$, $\eta_{21} \in [0, 16]$, $\eta_{11} = 0$. В зависимости от значений коэффициентов роста η_{10} и величины модуляции η_{21} возможны разные сценарии выживания популяций. На плоскости параметров η_{10} , η_{21} (см. рис. 1) имеются три области. Цифрой 1 отмечена область значений параметров η_{10} и η_{21} , при которых происходит гибель популяции v . Цифрой 2 обозначена

область, соответствующая гибели популяции u . Между ними находится область значений параметров, при которых сосуществуют обе популяции. При уменьшении параметра модуляции и стремлении η_{10} к значению $\eta_{20}k_1/k_2$ (условие косимметрии) происходит сокращение «области сосуществования», стягивается к точке.

На рис. 1 буквами А, В, С и D обозначены точки, отвечающие значениям параметров, для которых получено сосуществование популяций, соответствующие финальные распределения плотностей приведены на рис. 2. В зависимости от зна-

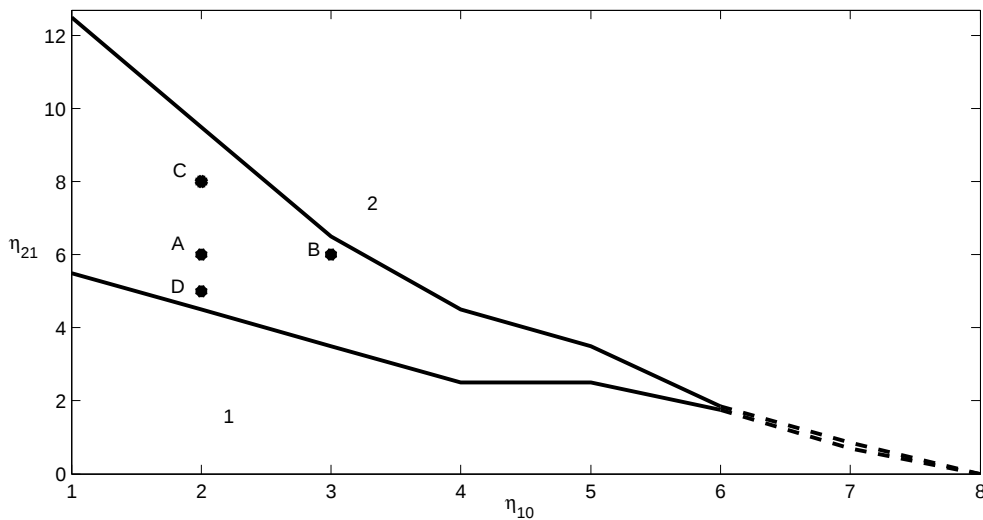


Рис. 1. Карта параметров, отвечающих выживанию популяции u (область 1), v (2), сосуществованию популяций (3). Буквы соответствуют комбинациям параметров, профили которых даны на рис. 3.

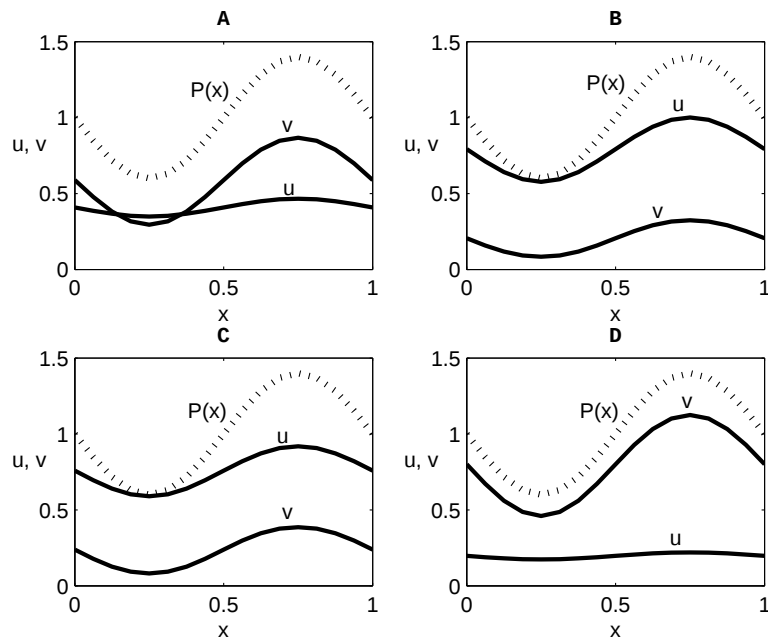


Рис. 2. Профили распределения популяций u , v , соответствующие точкам А, В, С и D на рис. 1. Пунктир — функция ресурса $P(x)$.

чений параметров η_{10} , η_{21} получаются разные финальные уровни плотностей популяций. При малых значениях параметра модуляции η_{21} (случай D) уровень популяции u значительно уступает уровню v . С увеличением η_{21} происходит сближение уровней популяций (A). При дальнейшем увеличении параметра модуляции (C) преимущественное развитие получает популяция u . Для распределений B и C наблюдается подобие финальных профилей популяций.

Работа поддержана грантом РФФИ №11-01-00708.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Murray J. D.* Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. New York: Springer, 2003. 811 p.
- [2] *Будянский А. В., Цибулин В. Г.* Моделирование пространственно-временной миграции близкородственных популяций // Компьют. исследования и моделирование. 2011, Т. 3. № 4. С. 477—488.
- [3] *Korobenko L., Braverman E.* On logistic models with a carrying capacity dependent diffusion: Stability of equilibria and coexistence with a regularly diffusing population // Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012. Vol. 13. Pp. 2648—2658.
- [4] *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Математ. заметки. 1991, Т. 49. Вып. 5. С. 142—148.
- [5] *Ковалева Е. С., Цибулин В. Г., Фришмут К.* Семейство стационарных режимов в модели динамики популяций // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. XII. № 1(37). С. 98—107.

Kruglikov M. G., Tsybulin V. G. *The modelling of distribution of non-antagonistic species in the non-homogeneous habitat.* The distribution of non-antagonistic populations on circle is modelled by the system of nonlinear parabolic equations. The formation of stationary distributions of species in the case of linear growth and resource function which depending on the spatial coordinate is analyzed. The relations on the parameters for which the system has a continuous family of stationary solutions are specified. The coexistence of species is found in the case of spatially periodic growth.

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СЛОЯ

Леви М. О.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

1. Введение. В [1] приведен достаточно подробный обзор работ, посвященных динамике электромагнитоупругих сред в связанной постановке. В [2] построена функция Грина для среды с фиксированным типом нагрузки для сред с различной кратностью собственных чисел. В [3] исследованы дисперсионные свойства, а также смещения среды и распределения электрических и магнитных потенциалов двухслойной электромагнитоупругой среды для разных значений электромагнитного коэффициента g . Влияние различных типов граничных условий на динамические свойства электромагнитоупругой среды не рассматривалось. В данной работе рассмотрена возможность управления волновым процессом за счет изменения магнитных условий на границе среды, представляющей из себя слой из материала ромбической симметрии.

2. Уравнения движения электромагнитоупругой среды. Краевая задача о колебаниях электромагнитоупругой среды описывается уравнениями движения и квазистатическими уравнениями Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещений среды, ρ — плотность материала, $\mathbf{T}$ — тензор механических напряжений, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — векторы индукции электрического и магнитного полей соответственно.

В матричном представлении уравнения движения (1)–(3), следуя подходам изложенным в [4], можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{e} & -\mathbf{f} \\ \mathbf{e}^T & \epsilon & \mathbf{g} \\ \mathbf{f}^T & \mathbf{g} & \mu \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В уравнении (4) $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ и $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$ — компоненты тензоров напряжения и деформации второго порядка в свернутом виде при использовании обозначений Фойгта, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — векторы электрической и магнитной индукции, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, ϵ , μ , $\mathbf{g}$ — соответственно тензоры упругих, пьезоэлектрических и пьезомагнитных констант, коэффициентов диэлектрической и магнитной проницаемости, а также магнитоэлектрических коэффициентов, имеющие размерность c_{ij} [Н/м²], e_{ij} [Кл/м²], f_{ij} [Н/Ам], ϵ_{ij} [Кл²/Н·м²], μ_{ij} [Н·с²/Кл²],

g_{ij} [Н·с/В·Кл] ($i, j = 1..3$). Поскольку колебания предполагаются установившимися, происходящими по гармоническому закону, все функции представляются в виде $F = F_0 e^{-i\omega' t'}$. Далее экспоненты и штрихи опущены.

3. Краевые задачи о движении электромагнитоупругого слоя.

Введем в рассмотрение расширенные векторы перемещений и напряжений

$$\mathbf{u}^e = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, \quad \mathbf{q}^e = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\},$$

где u_k, q_k ($k = 1, 2, 3$) — компоненты векторов механических перемещений и напряжений, u_4, q_4 — электрический потенциал и плотность распределения электрического заряда, u_5, q_5 — магнитный потенциал и плотность распределения магнитного заряда. Будем полагать, что электромагнитоупругий слой, занимающий область $|x_1| \leq \infty, |x_3| \leq \infty, 0 \leq x_2 \leq h$, колеблется под действием обобщенной нагрузки $\mathbf{q}^e(x_1, x_3, t)$, распределенной в области Ω на поверхности среды. Вне этой области поверхность среды свободна от механических напряжений, свободные заряды отсутствуют ($\mathbf{n}$ — вектор нормали):

$$x_2 = h : \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \begin{cases} \{q_1, q_2, q_3\}, & x_1, x_3 \in \Omega, \\ 0, & x_1, x_3 \notin \Omega, \end{cases} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \begin{cases} q_4, & x_1, x_3 \in \Omega, \\ 0, & x_1, x_3 \notin \Omega, \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

$$x_2 = 0 : u_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (6)$$

Рассмотрим следующие задачи:

1. МО/МО $\rightarrow \begin{cases} x_2 = h : u_5 = 0, & |x_1|, |x_3| \leq \infty, \\ x_2 = 0 : u_5 = 0, & |x_1|, |x_3| \leq \infty. \end{cases}$
2. МС/МС $\rightarrow \begin{cases} x_2 = h : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, & |x_1|, |x_3| \leq \infty, \\ x_2 = 0 : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, & |x_1|, |x_3| \leq \infty. \end{cases}$
3. МО/МС $\rightarrow \begin{cases} x_2 = h : u_5 = 0, & |x_1|, |x_3| \leq \infty, \\ x_2 = 0 : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, & |x_1|, |x_3| \leq \infty. \end{cases}$
4. МС/МО $\rightarrow \begin{cases} x_2 = h : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, & |x_1|, |x_3| \leq \infty, \\ x_2 = 0 : u_5 = 0, & |x_1|, |x_3| \leq \infty. \end{cases}$

Обозначения МО и МС соответствуют магнито-закрытой и магнито-открытой задачам на верхней/нижней гранях.

4. Решение краевой задачи о колебаниях магнитоэлектроупругой среды. Перемещение произвольной точки среды под действием распределенной на ее поверхности нагрузки определяется формулой ($s = 1 \dots 5$):

$$u_n(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^5 Q_j K_{sj}(\alpha_1, \alpha_3, x_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3)} d\alpha_1 d\alpha_3. \quad (7)$$

Здесь:

$$K_{1j}(\alpha_1, \alpha_3, x_2) = \frac{-i\alpha_1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^5 f_{1k}(\Delta_{j,k} ch(\sigma_k x_2) + \Delta_{j,k+5} sh(\sigma_k x_2)), \quad (8)$$

$$K_{2j}(\alpha_1, \alpha_3, x_2) = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^5 f_{2k}(\Delta_{j,k} sh(\sigma_k x_2) + \Delta_{j,k+5} ch(\sigma_k x_2)), \quad (9)$$

$$K_{zj}(\alpha_1, \alpha_3, x_2) = \frac{-i\alpha_3}{\Delta_0} \sum_{k=1}^5 f_{zk}(\Delta_{j,k} ch(\sigma_k x_2) + \Delta_{j,k+5} sh(\sigma_k x_2)), \quad z = 3, 4, 5. \quad (10)$$

Участвующие в представления (8)–(10) параметры σ_k определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} A_{1k} & -i\alpha_1\sigma_k c_1 & -\alpha_1\alpha_3 c_2 & -\alpha_1\alpha_3 e_1 & -\alpha_1\alpha_3 f_1 \\ -i\alpha_1\sigma_k c_1 & A_{2k} & -i\alpha_3\sigma_k c_3 & -i\alpha_3\sigma_k e_2 & -i\alpha_3\sigma_k f_2 \\ -\alpha_1\alpha_3 c_2 & -i\alpha_3\sigma_k c_3 & A_{3k} & A_{4k} & A_{6k} \\ -\alpha_1\alpha_3 e_1 & -i\alpha_3\sigma_k e_2 & A_{4k} & A_{5k} & A_{7k} \\ -\alpha_1\alpha_3 f_1 & -i\alpha_3\sigma_k f_2 & A_{6k} & A_{7k} & A_{8k} \end{vmatrix} = 0; \quad (11)$$

$$c_1 = c_{12} + c_{66}, \quad c_2 = c_{13} + c_{55}, \quad c_3 = c_{23} + c_{44},$$

$$e_1 = e_{15} + e_{31}, \quad e_2 = e_{24} + e_{32},$$

$$f_1 = f_{15} + f_{31}, \quad f_2 = f_{24} + f_{32},$$

$$A_{1k} = -c_{11}\alpha_1^2 - c_{55}\alpha_3^2 + c_{66}\sigma_k^2 + \rho\omega^2,$$

$$A_{1k} = -c_{11}\alpha_1^2 - c_{55}\alpha_3^2 + c_{66}\sigma_k^2 + \rho\omega^2,$$

$$A_{2k} = -c_{66}\alpha_1^2 - c_{44}\alpha_3^2 + c_{22}\sigma_k^2 + \rho\omega^2,$$

$$A_{3k} = -c_{33}\alpha_3^2 + c_{44}\sigma_k^2 - c_{55}\alpha_1^2 + \rho\omega^2,$$

$$A_{4k} = -e_{15}\alpha_1^2 + e_{24}\sigma_k^2 - e_{33}\alpha_3^2,$$

$$A_{5k} = \varepsilon_{11}\alpha_1^2 - \varepsilon_{22}\sigma_k^2 + \varepsilon_{33}\alpha_3^2, \quad A_{6k} = -f_{15}\alpha_1^2 + f_{24}\sigma_k^2 - f_{33}\alpha_3^2,$$

$$A_{7k} = g_{11}\alpha_1^2 - g_{22}\sigma_k^2 + g_{33}\alpha_3^2, \quad A_{8k} = \mu_{11}\alpha_1^2 - \mu_{22}\sigma_k^2 + \mu_{33}\alpha_3^2,$$

$$A_{1k} = -c_{11}\alpha_1^2 - c_{55}\alpha_3^2 + c_{66}\sigma_k^2 + \rho\omega^2.$$

Формула (7) описывает перемещения, электрический и магнитный потенциалы в произвольной точке среды и позволяют проводить полное исследование динамического процесса в электромагнитоупругой среде. Рассмотрим частный случай краевой задачи ($u_1 = u_2 = 0$; $\partial/\partial x_3 = 0$; $\alpha_3 = 0$). Среда представляет из себя слой из композита BaTiO₃ и CoFe₂O₄ в соотношении 30% и 70% соответственно.

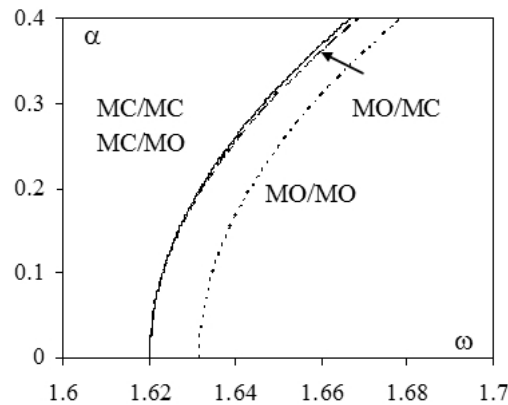


Рис. 1. Точки выхода полюсов первой моды.

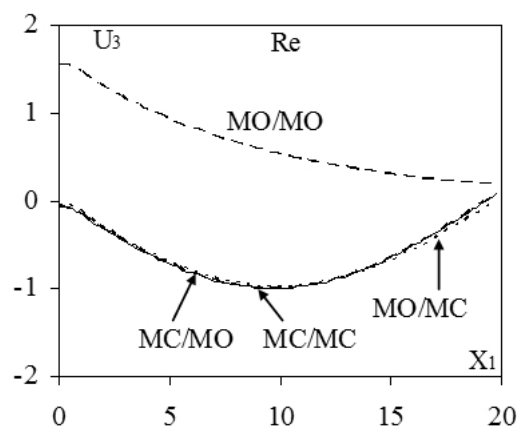
Все исследования проводились при фиксированных электрических открытых на верхней грани и электрически закрытых на нижней грани условиях.

Важным критерием для распространения акустических волн являются точки выхода полюсов (рис. 1).

Из рис. 1 видно, что задача МО/МО имеет отличную от любой другой магнитной задачи частоту выхода полюса, при этом характер полюсов для задач МС/МС и МС/МО в точке выхода совпадает. В задаче МО/МС частота выхода полюса с увеличением частоты отклоняется от частоты выхода полюса задач МС/МС и МС/МО. Такая тенденция сохраняется и других полюсов на более высоких частотах.

Рассмотрим возможность управления динамическим процессом в среде с помощью изменения магнитных условий на ее границах. Для первого полюса функции Грина графики механических смещений при $\omega = 1.628$ и заданной в области $[-1, 1]$ электрической нагрузке q_4 .

В случае задачи МО/МО волна под действием нагрузки не распространяется. Колебания в среде достаточно быстро затухают, это видно из графиков реальной и мнимой величин смещений u_3 (рис. 2 и рис. 3). Мнимая часть для задачи

Рис. 2. Реальная часть смещений U_3 на частоте $\omega = 1.628$.

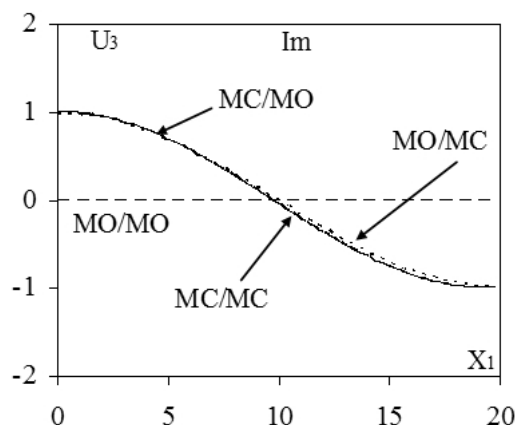


Рис. 3. Мнимая часть смещений U_3 на частоте $\omega=1.628$.

МО/МО на данной частоте равна нулю. Для всех других граничных условий колебания имеют устоявшуюся амплитуду, различную по величине в зависимости от граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах / Пер. с польского В.А. Шачнева. М.: Мир, 1986. 126 с.
- [2] *Peng-Fei Hou, Hao-Jiang Ding, Jiang-Ying Chen.* Green's functions for transversely isotropic magneto-electroelastic media // International Journal of Engineering Science. 2005. V. 43 № 10. Pp. 826–858.
- [3] *Calas H., Otero J.A., Rodriguez-Ramos R., Monsivais G., Stern C.* Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures // International Journal of Solids and Structures V. 45. 2008. Pp. 5356–5367.
- [4] *Леви М. О.* Динамическая задача для электромагнитоупругого слоя // Вестник ЮНЦ РАН. 2011. Т. 7. № 4. С. 5–9.

Levi O. M. *The influence of magnetic boundary conditions on the dynamic properties of semibounded electromagnetoelasticity media.* The dynamic problem of the steady harmonic vibrations of electromagnetoelasticity layer is considered. Displacements are occurs under the influence of various types oscillating load on the surface. Three-dimensional Green's function electromagnetoelasticity is constructed and its properties are investigated. The effects of different boundary conditions on the dynamics of electromagnetoelasticity layer are studied. Ability to control the wave process by changing the magnetic conditions at the layer boundaries is shown.

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ПОЛЕЙ МНОГОЭЛЕКТРОДНЫХ СТРУКТУР

Лыжов В. А. *, Тукодова О. М. *, Ворович Е. И. **, Агаян К. Л. ***

* Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

** Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

*** Институт механики Армянской Академии наук, Ереван

Развитие элементной базы акустоэлектроники, проблемы создания и использования современных искусственных композитных материалов, работающих в экстремальных условиях под действием постоянных динамических нагрузок, предъявляют повышенные требования к применяемым методам расчета и математическим моделям. Интерес представляет рассмотрение связанных смешанных задач в строгой математической постановке. Однако разработка точных методов решения краевых задач о колебаниях неоднородной пьезоактивной подложки при возбуждении планарными многоэлектродными системами сопряжено с высокими вычислительными затратами. В ряде случаев можно предложить эффективный метод построения приближенного решения указанной задачи на основании решения вспомогательной задачи для небольшого количества электродов и закономерностей распределения полей в многоэлектродных системах. Данная методика позволяет существенно уменьшить время построения решения и учесть как краевые эффекты, так и распределение поверхностных зарядов под внутренними электродами. Область применения упрощенной модели — расчет электроакустических устройств в установившихся режимах работы в области низких частот или частот, близких к частоте акустического синхронизма.

1. Постановка задачи.

Рассматривается задача об установившихся колебаниях пьезоактивной подложки, представляющей собой слоисто неоднородное полупространство. В качестве пьезоэлектрика рассматриваются кристаллы класса 2mm, поляризация слоя направлена вдоль оси x_3 , поляризация полупространства — противоположно направлена. Система возбуждения представляет собой структуру из N тонких протяженных электродов $a_k \leq x_1 \leq b_k$, $x_2 = h$, $|x_3| \leq \infty$, $k = 1, 2, \dots, N$, весом и жесткостью которых можно пренебречь (рис. 1).

Смещение точек среды $\mathbf{u}^{(n)}$ описывается уравнениями движения электроупругости и квазиэлектростатики:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{(n)} = \rho^{(n)} \ddot{\mathbf{u}}^{(n)}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0. \quad (2)$$

Здесь индекс $^{(n)}$ указывает, к какому слою относятся величины, ρ — плотность материала среды, $\mathbf{T}$ — линейризованный тензор напряжений, $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции, имеющие следующий вид:

$$T_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}^{(n)} \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_l} + e_{ijk}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_k}, \quad (3)$$

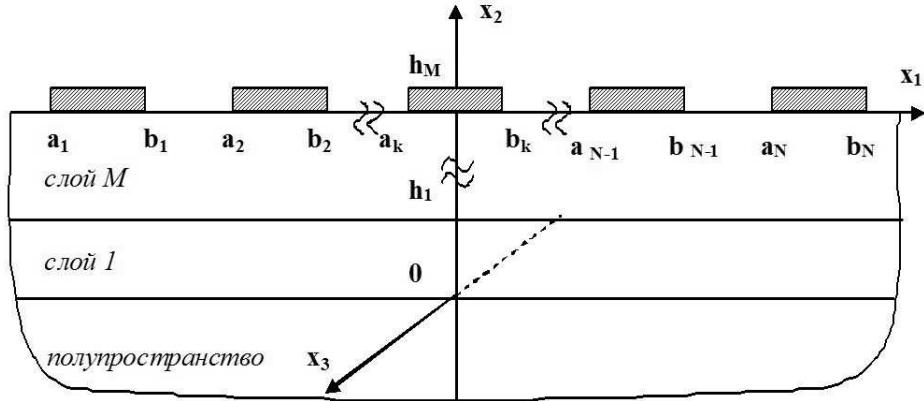


Рис. 1. Геометрия задачи для системы электродов на поверхности пьезоэлектрического слоя на диэлектрическом полупространстве.

$$D_i^{(n)} = e_{ijk}^{(n)} \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_k} - \varepsilon_{ij}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_j}, \quad (4)$$

где φ — электрический потенциал, C_{ijkl} , e_{ijk} , ε_{ij} — соответственно упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические константы, зависящие от вида и величины начальных напряжений.

На поверхности $x_2 = h_M$ заданы механические напряжения $\mathbf{T}^{(*)}$ и потенциалы на электродах φ_k :

$$\varphi^{(M)} = \varphi_k, \quad x_2 = h_M, \quad x_1 \in [a_k, b_k], \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

$$\mathbf{T}^{(M)} = \mathbf{T}^{(*)}, \quad x_2 = h_M. \quad (6)$$

На внутренних границах между слоями предполагается непрерывность полей смещений и напряжений, потенциала и нормальной компоненты электрической индукции:

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}^{(n+1)}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(n+1)}, \quad x_2 = h_n, \quad n = 0, 1, \dots, M-1, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}^{(n+1)}, \quad \varphi^{(n)} = \varphi^{(n+1)}, \quad x_2 = h_n, \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (8)$$

Индексом $^{(0)}$ отмечены величины в полупространстве. На бесконечности необходимо выполнение условий излучения Зоммерфельда:

$$\mathbf{u}^{(0)} \rightarrow 0, \quad \varphi^{(0)} \rightarrow 0, \quad x_2 \rightarrow -\infty. \quad (9)$$

2. Решение краевой задачи в случае сдвиговых колебаний.

Обычно можно считать продольные размеры электродов значительно превосходящими поперечные, а свойства подложки однородными вдоль оси x_3 . Применяя преобразование Фурье по координате x_1 к системе уравнений (1)–(2) и граничным условиям (3)–(9), задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой строится традиционными методами. Общее решение в любой точке подложки выражается через механические напряжения $T_{32}^*(x_1)$ и

электрическую индукцию $D_2^*(x_1)$ на поверхности $x_2 = h_M$. В случае сдвиговых колебаний указанные выражения имеют вид:

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{32}^*(\alpha) K_{31}(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_2^*(\alpha) K_{32}(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (10)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{32}^*(\alpha) K_{41}(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_2^*(\alpha) K_{42}(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha. \quad (11)$$

Здесь α — параметр преобразования Фурье по координате x_1 , K_{nm} — символы ядер соответствующих интегральных преобразований, описывающие структуру и свойства материала подложки.

Считая потенциалы на электродах известными, а поверхность — свободной от механических напряжений, можно записать интегральное уравнение относительно электрической индукции под электродами:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_2^*(\alpha) K_{42}(\alpha, 0) e^{-i\alpha x_1} d\alpha = \varphi(x_1, 0). \quad (12)$$

Для решения интегрального уравнения (12) применяется обобщение предложенного в [1] метода. Для поверхностных зарядов под электродами выполняется следующее условие:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(*)} = -q(x_1) = -\sum_{n=1}^N q_n(x_1), \quad (13)$$

где $q_n(x_1)$ — распределение заряда под электродом с номером n . Представим $q_n(x_1)$ в виде разложения по ортонормированной системе функций $\{\varphi_k(x_1), k = 1, 2, \dots, M\}$, определенных на отрезке $[a_n, b_n]$:

$$q_n(x_1) = \sum_{k=1}^M C_{nk} \varphi_k(x_1). \quad (14)$$

Используя представление (14), интегральное уравнение (12) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M C_{nk} \int_{-\infty}^{\infty} K_{42}(\alpha, 0) \Phi_k^+(\alpha) \Phi_n^-(\alpha) d\alpha = \int_{a_n}^{b_n} u_4(x_1) \varphi_n(x_1) dx_1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (15)$$

где

$$\Phi_k^+(\alpha) = \int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1, \quad \Phi_n^-(\alpha) = \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x_1) e^{-i\alpha x_1} dx_1.$$

Из (15) видно, что при решении интегрального уравнения (12) основная вычислительная нагрузка заключается в определении значений $N * M$ контурных интегралов.

3. Построение приближенного решения контактной задачи.

В случае установившихся колебаний может быть предложен эффективный метод построения приближенного решения краевой задачи, учитывающий закономерности распределения полей в многоэлектродных системах и основанный на решении вспомогательной задачи для небольшого количества электродов. Действительное распределение поверхностных зарядов под электродами представляется в виде распределения под несколькими крайними электродами и некоторой периодической системой между ними. При этом допускается, что форма распределения зарядов под внутренними электродами совпадает с распределением под центральным электродом. Форма распределения зарядов под всей электродной системой должна совпадать с некоторой функцией $w(x_1)$, являющейся решением контактной задачи для одного электрода.

Анализ точных решений для различных электродных систем показал, что учет 3-х крайних электродов позволяет достаточно хорошо описать краевые эффекты (рис. 2). Указанные допущения накладывают следующие условия на коэффициенты C_{nk} из (14):

$$w(c_4)C_{4k} = w(c_5)C_{5k} = \dots = w(c_{N-4})C_{N-4k} = w(c_{N-3})C_{N-3k}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (16)$$

где $c_n = (a_n + b_n)/2$ — середина электрода с номером n . С учетом (16) система уравнений (15) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^M C_{nk} \int_{-\infty}^{\infty} K_{42}(\alpha, 0) \Phi_k^+(\alpha) \Phi_n^-(\alpha) d\alpha + \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M C_{4k} \int_{-\infty}^{\infty} K_{42}(\alpha, 0) \Phi_k^+(\alpha) \left(\sum_{n=4}^{N-3} w(c_n) \Phi_n^-(\alpha) \right) d\alpha + \end{aligned} \quad (17)$$

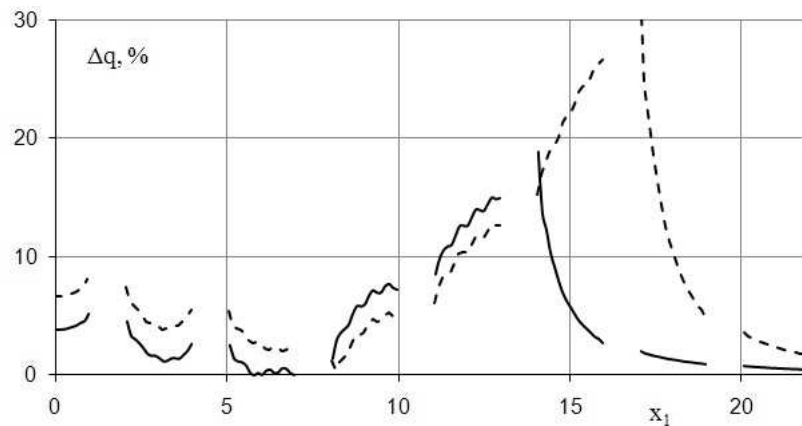


Рис. 2. Ошибка расчета по упрощенной схеме по сравнению с точным решением для 15-электродной системы на подложке ZnO. Сплошная линия соответствует учету 3-х крайних электродов, пунктирная — 2-х электродов.

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=N-2}^N\sum_{k=1}^MC_{nk}\int_{-\infty}^{\infty}K_{42}(\alpha,0)\Phi_k^+(\alpha)\Phi_n^-(\alpha)d\alpha=\int_{a_n}^{b_n}u_4(x_1)\varphi_n(x_1)dx_1, n=1,\dots,N.$$

Ошибка расчета по такой упрощенной схеме обусловлена в основном несимметричностью влияния электродной системы на нецентральные электроды. Количество неизвестных при таком подходе редуцируется с $N * M$, где N — число поверхностных электродов, до $7 * M$. При этом вычислительные затраты на построение решения могут быть уменьшены в десятки раз в зависимости от количества электродов в моделируемой системе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Президиума РАН №25, Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-00811, 12-08-01040).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белянкова Т. И., Калинин В. В., Лыжов В. А. Связанная смещанная задача для системы электродов на поверхности преднапряженного электроупругого структурно неоднородного полупространства // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 895–908.
- [2] Белянкова Т. И., Лыжов В. А. Некоторые особенности динамики слабо неоднородных пьезоактивных структур // Вестник Южного научного центра РАН. 2010. Т. 6. С. 3–10.
- [3] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
- [4] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
- [5] Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
- [6] Акустические кристаллы. Под ред. Шаскольской М. П. М.: Наука, 1982. 632 с.

Lyzhov V. A., Tukodova O. M., Vorovich E. I., Agayan K. L. *Effective approximate method for calculating mechanical and electrical fields multi-electrode structures.* This paper presents an approximate method for calculating electrical and mechanical fields multi-electrode systems on heterogeneous piezoactive halfspace. Surface or internal layers of the substrate may be in the initial stress state. The exact distribution of surface charges under the electrodes is represented by a distribution under a few external electrodes and a periodic system between them. Error compared to the exact solution of boundary value problem is a few percent.

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНОЙ ПОРОУПРУГОЙ КОЛОННЫ

Ляпин А. А., Козин С. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Представлен способ идентификации характеристик неоднородной пороупругой колонны на основе решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода и минимизации функционала невязки. Построено решения прямой задачи при помощи метода стрельбы для линейных систем дифференциальных уравнений. Приведено соотношение взаимности для произвольных областей и произвольной анизотропии материала, на основе которого выведены интегральные уравнения Фредгольма для определения неизвестных коэффициентов.

В настоящей работе основное внимание уделено модели неоднородной пороупругости, для которой коэффициенты являются функциями координат. При этом основной интерес представляет вопрос определения некоторых коэффициентов по данным частотного зондирования путем решения обратных коэффициентных задач. В качестве примера была реализована задача о реконструкции характеристик неоднородной пороупругой колонны. В такой постановке полученные результаты могут быть применены для решения задач о реконструкции костной ткани или пороупругого слоя в режиме толщинных колебаний. Для описания поведения была использована модель среды Био [4] с учетом высокочастотных слагаемых, что делает многие параметры зависимыми от частоты:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \sigma_{el} + \omega^2(\rho E - \rho_f \Gamma) \cdot u - (A - \Gamma) \nabla p + f_s &= 0, \\ \nabla \cdot (\tilde{K} \cdot \nabla p) + i\omega \frac{\phi}{R} p + i\omega(A - \Gamma) \cdot \epsilon + f_f &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Определяющие соотношения:

$$\sigma = \sigma_{el} - Ap, \quad \Theta = \theta - \frac{1}{\phi} A \cdot \epsilon - \frac{\phi}{R} p,\tag{2}$$

где $\Gamma = -i\omega\rho_f\tilde{K}$, $\tilde{A} = A - \Gamma$, $\tilde{K} = -i\omega K \cdot [-i\omega E - Km_f\omega^2]^{-1}$, $m_f = \tau \frac{\rho_f}{\phi}$.

Здесь σ_{el} — тензор упругости, A — тензор констант Био, K — тензор проницаемости среды, ρ, ρ_f — плотности среды, и плотность жидкости соответственно, ω — частота колебаний среды, u — вектор смещений среды, p — давление жидкости в порах, ϕ — пористость среды, R — гидростатическая константа.

Колонна жестко закреплена на нижнем конце и подвергается нагружению продольной силой в режиме установившихся колебаний на верхнем. Приведены амплитудно-частотные характеристики задачи при различных значениях параметра пористости среды.

Выведено операторное соотношение, на основе которого решение обратной задачи сведено к последовательности решений интегральных уравнений Фредгольма

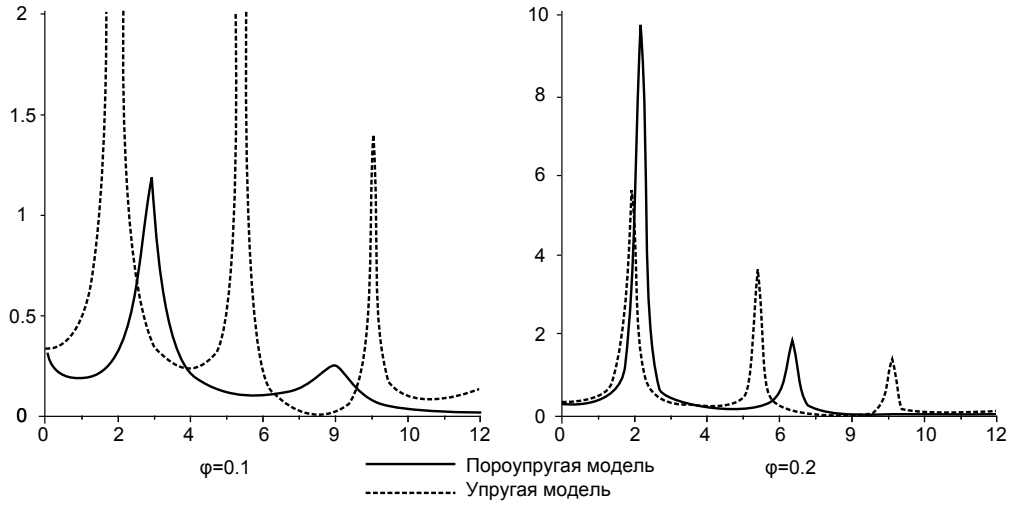


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики.

1-го рода [5, 6] методом Тихонова [7] с автоматическим выбором параметра регуляризации.

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_C(s) U_0'(\varkappa, s) \bar{U}_0'(\varkappa, s) ds &= F(f(\varkappa) - U_0(\varkappa, 1)), \\ \int_0^1 R_A(s) (U_0'(\varkappa, s) \bar{P}_0(\varkappa, s) - \bar{U}_0'(\varkappa, s) P_0(\varkappa, s)) ds &= F(f(\varkappa) - U_0(\varkappa, 1)), \end{aligned} \quad (3)$$

где R_C, R_A — поправки упругого модуля и модуля Био, U_0, P_0 — решение линеаризованной задачи, F — сила, действующая на верхнем конце колонны, $U_0(\varkappa, 1)$ — априорная информация о смещениях верхнего конца колонны в некотором наборе частот.

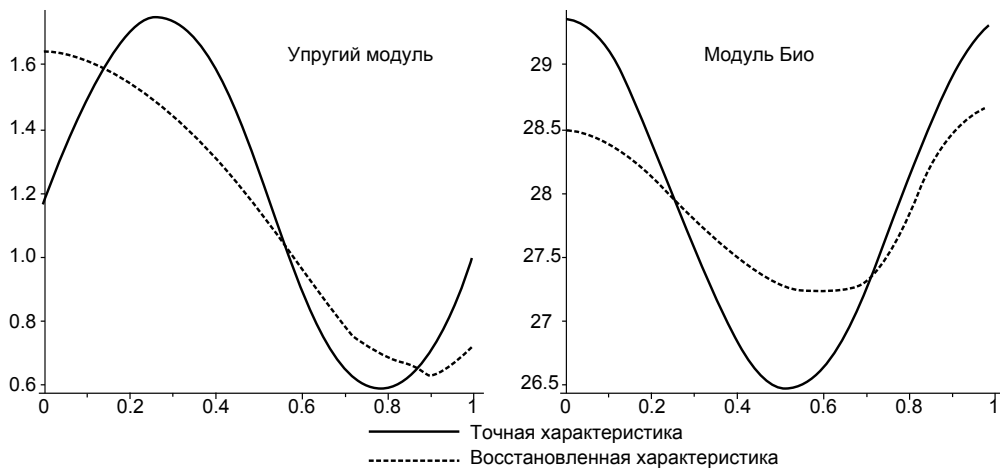


Рис. 2. Результаты реконструкции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП « Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракт П596, соглашение №14.132.21.1360).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Fillunger P.* Der Auftrieb von Talsperren, Teil I-III // Osterr. Wochenschrift fur den offentlicen Baudients. 1913. 7. S. 510–532.
- [2] *Терцаги К.* Строительная механика грунта на основе его физических свойств. М., 1933.
- [3] *Cowin S. C. and Nunziato J. W.* Linear elastic materials with voids // J. Elast., 1983, vol.13, Pp 125–147.
- [4] *Бюо М. А.* Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // В кн: Механика. М., 1963. № 6, С. 103–134.
- [5] *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
- [6] *Ватульян А. О.* Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Доклады РАН 2005. Т. 405. № 3, С. 343–345.
- [7] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.

Lyapin A. A., Kozin S. V. *Reconstruction of the characteristics of an inhomogeneous poroelastic column.* The way of characteristics identifying for inhomogenous poroelastic column, based on solving of the Fredholm integral equation and minimizing of residual functional, is presented. The solving of direct problem is constructed using the shooting method for linear systems of differential equations. Reciprocity ratio for common geometry and anisotropy is shown. Using that ratio the Fredholm integral equations for determining of unknow coefficients are constructed.

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ МЕТОДА ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Макарова М. Е., Марчевский И. К.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Произведено сравнение результатов решения задачи о моделировании обтекания профиля, полученных с использованием классического и модифицированного метода вихревых элементов. Рассмотрены профили простейших форм, для которых методами ТФКП можно найти точное аналитическое решение задачи в случае безвихревого внешнего течения и при наличии вблизи профиля изолированной вихревой особенности поля скоростей. Полученные результаты показывают, что модифицированный метод вихревых элементов позволяет находить решение существенно точнее по сравнению с классическим подходом.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о моделировании плоского стационарного обтекания неподвижного профиля, занимающего область $C \subset \mathbb{R}^2$, в которой расположены изолированные особенности поля скоростей (типа вихря), плоскопараллельным потоком несжимаемой среды. Тогда поле скоростей среды $\vec{v}$ в области $\mathbb{R}^2 \setminus C$ будет удовлетворять следующим условиям

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) = 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_{0j}, \quad j = \overline{1, m}, \\ \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}|_{\partial C} = v_n|_{\partial C} = 0, \\ \vec{v}(\vec{r}) \rightarrow \vec{v}_\infty, |\vec{r}| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

где $\vec{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе профиля ∂C , $\vec{r}_{0j}$ — положение j -й изолированной особенности поля скоростей.

2. Решение методом вихревых элементов. Расчет внешнего обтекания профиля, в случае, когда в области течения присутствуют изолированные вихри, необходимо проводить на каждом шаге моделирования нестационарного обтекания с использованием бессеточных лагранжевых методов вихревых элементов. Поэтому от точности решения рассматриваемой задачи зависит точность метода.

Скорость в точке $(x; y)$ области течения определяется по интенсивности вихревого слоя $\gamma(p_0) = \gamma(x_0, y_0)$ [1, 2], моделирующего профиль, и интенсивности особенностей поля скоростей $\vec{G}_j = (0, 0, G_j)^T$, присутствующих в области течения.

Пусть поле скоростей среды $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)^T$; $\vec{v}_\infty = (\cos \beta, \sin \beta, 0)^T$ — скорость невозмущенного потока; точка вычисления скорости задается радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, 0)^T$; точка на границе профиля, по координатам которой ведется интегрирование, задается радиус-вектором $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)^T$, тогда $\vec{\gamma}(\vec{r}_0) = (0, 0, \gamma(\vec{r}_0))^T$,

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_\infty + \sum_{j=1}^m \vec{W}(\vec{r}, \vec{G}_j) + \oint_{\partial C} \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0}, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus C, \quad (1)$$

где $\vec{W}(\vec{r}, \vec{G}_j)$ — скорость, индуцируемая в точке $\vec{r}$ j -й особенностью поля скоростей.

Предельное значение скорости потока $\vec{v}_-$ на границе со стороны профиля определяется с помощью уравнения (1) следующим образом [2]

$$\vec{v}_-(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) - \left(\frac{\vec{\gamma}(\vec{r})}{2} \times \vec{n}(\vec{r}) \right), \quad r \in \partial C, \quad (2)$$

где $\vec{n}(\vec{r})$ — единичная внешняя нормаль к профилю.

Для нахождения неизвестной интенсивности вихревого слоя $\gamma(\vec{r})$ используется условие равенства нулю вектора скорости $\vec{v}_-(\vec{r})$, которое обеспечивается обнулением либо нормальной, либо касательной компоненты $\vec{v}_-(\vec{r})$ [2, 3].

Классический подход соответствует обнулению нормальной компоненты вектора $\vec{v}_-(\vec{r})$ и приводит к сингулярному интегральному уравнению [2].

$$\oint_{\partial C} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0} = -\vec{n}(\vec{r}) \cdot \left(\vec{v}_\infty + \sum_{j=1}^m \vec{W}(\vec{r}, \vec{G}_j) \right), \quad r \in \partial C. \quad (3)$$

Такой подход будем сокращенно называть НМВЭ (метод вихревых элементов с нормальными компонентами скоростей).

Модифицированный подход предполагает скалярное умножение уравнения (2) на касательную $\vec{\tau}(\vec{r})$ к границе профиля [2, 3]. Причем $\vec{\tau}(\vec{r}) : \vec{n}(\vec{r}) \times \vec{\tau}(\vec{r}) = \vec{k}$, $|\vec{\tau}(\vec{r})| = 1$, где $\vec{k}$ — орт оси Oz , тогда получим

$$\oint_{\partial C} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}(\vec{r})}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \gamma(\vec{r}_0) dl_{r_0} - \frac{\gamma(\vec{r})}{2} = -\vec{\tau}(\vec{r}) \cdot \left(\vec{v}_\infty + \sum_{j=1}^m \vec{W}(\vec{r}, \vec{G}_j) \right), \quad r \in \partial C. \quad (4)$$

Этот подход будем сокращенно называть КМВЭ (метод вихревых элементов с касательными компонентами скоростей).

Численное решение уравнений (3), (4) осуществляется так же, как и в случае безвихревого внешнего обтекания профилей [4]. Свойства соответствующих уравнений в случае безвихревого внешнего течения и в рассматриваемом случае тоже совпадают, поскольку наличие изолированных особенностей поля скоростей влияет лишь на правую часть, а ядра интегральных уравнений остаются теми же.

3. Результаты расчетов. Для оценки точности решений результаты расчетов сравниваются с точным аналитическим решением, получаемым методами ТФКП. Однако в общем случае даже для профилей простейших форм (для которых легко построить конформное отображение на круг) при наличии точечных изолированных вихрей получить точное решение затруднительно. Поэтому вместо исходной рассмотрим задачу по расчету обтекания профиля при наличии таких особенностей поля скоростей, которые в результате конформного отображения, отображающего внешность профиля на внешность круга, переводятся в точечные изолированные вихри. Решение этой задачи легко построить методом отражений.

Ниже на графиках приведены вычисленные методами НМВЭ и КМВЭ величины интенсивностей вихревых слоев на профиле; в таблицах — погрешности численных решений $\|\Delta\|_{l_1} = \sum_{i=1}^N |\gamma_i - \gamma_i^0| l_i$, где N — количество элементов расчетной

схемы, γ_i — найденное в расчетах среднее значение интенсивности вихревого слоя на i -й панели, γ_i^0 — среднее значение точной величины интенсивности на рассматриваемом элементе, l_i — длина панели, $\text{Cond } A$ — число обусловленности матрицы.

На рис. 1 показаны результаты расчета обтекания кругового профиля в случае, когда точечный изолированный вихрь единичной интенсивности расположен на расстоянии $d_3 = 0,01$ от границы профиля, число панелей $N = 50$.

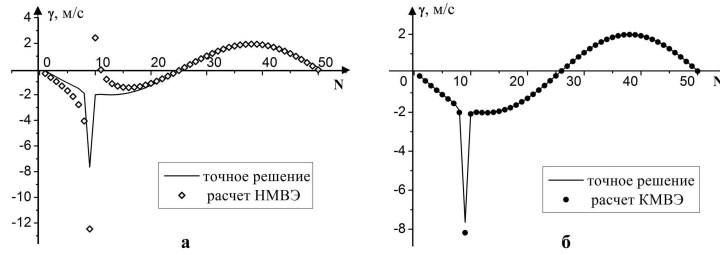


Рис. 1. Интенсивность вихревого слоя при обтекании кругового профиля, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б) в сравнении с точным решением.

При $N = 50$ погрешность численного решения, полученная методом НМВЭ велика, однако при увеличении числа панелей этот метод позволяет получить качественно верное решение на границе профиля вблизи изолированного вихря.

В табл. 1 приведены погрешности в норме $\|\Delta\|_1$ при расчете методами НМВЭ и КМВЭ безвихревого обтекания эллипса и несимметричного профиля Жуковского с относительными толщинами 10 % под углом атаки $\beta = \pi/6$.

	НМВЭ			КМВЭ		
$\ \Delta\ _1(N)$	50	200	500	50	200	500
Эллиптический профиль	0,52	0,14	0,06	0,06	0,006	0,0015
Профиль Жуковского	45,80	22,26	15,07	0,10	0,010	0,0025

Таблица 1. Сравнение классического и модифицированного подходов.

Из табл. 1 видно, что метод КМВЭ во всех случаях обеспечивает меньшую по сравнению с НМВЭ погрешность, порой отличающуюся на порядок.

Результаты моделирования обтекания несимметричного крылового профиля относительной толщины 10 %, установленного под углом атаки $\beta = \pi/18$, при расположении особенности единичной интенсивности во внешнем течении на расстоянии $d_3 = 0,05$ от границы профиля показаны на рис. 2. При использовании метода НМВЭ ошибка численного решения вблизи острой кромки растет катастрофически и становится неприемлемо большой даже при небольших N .

Теперь рассмотрим обтекание профиля с тремя угловыми точками, $\alpha = \pi/6$, $\psi = 3\pi/4$, поверхность которого разбита на $N = 140$ панелей, существенно различающихся по длине (рис. 3). На рис. 4 показаны результаты расчета обтекания данного профиля под нулевым углом атаки. Видно, что в угловых точках профиля, где расчетная схема неравномерна, решение, полученное методом КМВЭ, качественно лучше полученного методом НМВЭ, поскольку известно [2], что в этих точках решение должно стремиться к нулю.

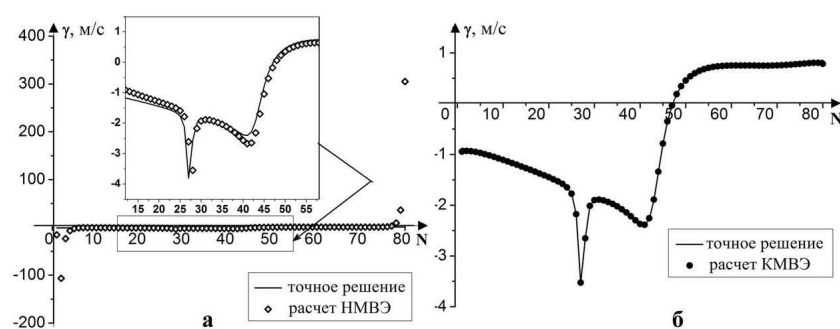


Рис. 2. Интенсивность вихревого слоя при обтекании несимметричного профиля Жуковского, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б) в сравнении с точным решением.

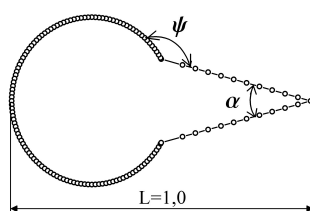


Рис. 3. Профиль с угловыми точками.

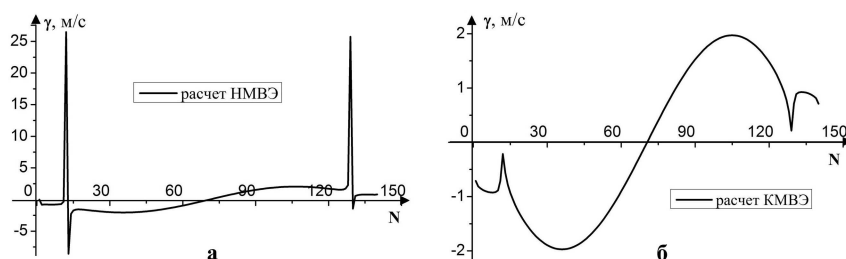


Рис. 4. Интенсивность вихревого слоя при обтекании профиля с угловыми точками, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б) на неравномерной схеме.

Отметим, что при равномерном разбиении поверхности этого профиля на панели результаты, полученные обоими методами, практически совпадают (рис. 5).

Таким образом, метод НМВЭ позволяет найти решение лишь на равномерных схемах, тогда как метод КМВЭ дает возможность получить качественно правиль-

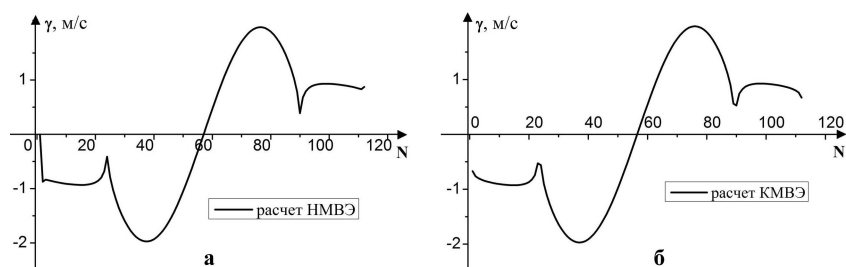


Рис. 5. Интенсивность вихревого слоя при обтекании профиля с угловыми точками, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б) на равномерной схеме.

ное решение как на равномерных, так и на неравномерных схемах.

Рассмотрим обтекание аналогичного профиля с тремя угловыми точками, но с $\psi = 7\pi/6$ и $\alpha = \pi/6$ на равномерной схеме (рис. 6).

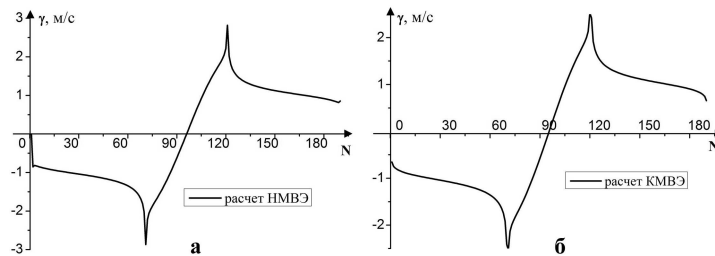


Рис. 6. Интенсивность вихревого слоя при обтекании профиля с угловыми точками, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б).

Согласно [2] в угловых точках с внешним углом $\psi > \pi$ решение имеет особенность вида $\frac{1}{\rho^{1-\pi/\psi}}$, где ρ — расстояние от границы профиля до начала координат. Анализ найденных численных решений показывает, что результаты расчетов методами НМВЭ и КМВЭ с высокой точностью соответствуют указанной асимптотике.

4. Заключение. Результаты тестовых расчетов показывают, что предложенная модификация метода вихревых элементов позволяет получить намного более точное решение по сравнению с классической схемой, при этом число обусловленности матрицы системы, аппроксимирующей соответствующее интегральное уравнение, существенно ниже, чем при использовании стандартного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андронов П. Р., Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.
- [2] Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.
- [3] Kempka S. N., Glass M. W. et al. Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations // SANDIA REP. SAND96-0583, 1996.
- [4] Макарова М. Е. Расчет стационарного безотрывного обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. 2011. Спец. выпуск «Прикладная математика». С. 124–133.

Makarova M. E., Marchevsky I. K. *Comparison of airfoil in the flow simulation results for two numerical schemes of vortex elements method.* The comparison of the results numerical simulations using the classical and modified vortex elements method for the airfoil in the flow is presented. Airfoils of such simple shapes for which exact analytical solution could be obtained using complex analysis are considered. The results obtained show that the modified numerical scheme allows to find more accurate solution in comparison with classical approach.

ЭВОЛЮЦИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В СЛОЕ СТЕКЛОФАЗЫ ПРИ СПЕКАНИИ ПОРОШКОВ

Мартынов Р. Э.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В настоящем сообщении представлены результаты расчета кинетики роста газового пузырька при остывании образца керамики от 1000 К до температуры стеклования 478 К. В данном интервале температур стекломасса прослойки представлена в виде вязкоупругого тела. Предполагается, что толщина слоя стеклорасплава в начальный момент данной стадии расчета равна толщине слоя по окончании первого этапа охлаждения, тогда задача решается с учетом напряжения дилатации, которое обусловлено внутренними термовязкоупругими напряжениями. Результаты расчетов показали, что условия формирования газового пузырька на низкотемпературном этапе остывания керамического образца значительно отличаются от высокотемпературного этапа.

Введение.

Известно [1], что при спекании керамики в жидкой фазе (стеклофаза), заполняющей пространство между крупинками порошка при высокой температуре, образуются несплошности (пузырьки). Обычно стеклофаза образует межзеренную пленку толщиной ≈ 10 нм, в которой критический размер пузырька превышает данный размер. По этой причине пузырек всегда образуется на границе кристаллит–стеклофаза и подчиняется условиям зарождения.

Ранее автором [2] были установлены условия роста газового пузырька в стеклофазной прослойке за счёт переноса растворенного газа через массив стекломассы при остывании образца керамики от 1500 К до 1000 К.

В настоящем сообщении представлены результаты расчета кинетики роста газового пузырька при остывании образца керамики от 1000 К до температуры стеклования 478 К. В данном интервале температур стекломасса прослойки представлена в виде вязкоупругого тела [3]. Будем предполагать, что толщина слоя стеклорасплава в начальный момент данной стадии расчета равна толщине слоя по окончании первого этапа охлаждения, тогда задача решается с учетом напряжения дилатации, которое обусловлено внутренними термовязкоупругими напряжениями.

Рассмотрим диффузию газа в этом слое с учетом распределения давления $p(r, t)$ в нем. Уравнение термомеханодиффузии газа (эффект Конобеевского–Горского [1]) вдоль слоя имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \left(\frac{Dc}{k_B T} \nabla \mu \right), \quad (1)$$

где химический потенциал слабого раствора газа $\mu = k_B T \ln(c/c_0) - \Omega p(r, t)$, где $\Omega = N^{-1}$, $D(T) = D_0 T \exp\left(-\frac{E_D}{k_B T}\right)$ — коэффициент диффузии газа в стеклофазе, D_0 — постоянная, E_D — энергия активации процесса диффузии, N — число

мест возможного расположения атомов газа в единице объема стеклофазы. Вид $D(T)$ выбран для стеклорасплава B_2O_3 . Граничные условия для (1) аналогичны соответствующим условиям в [2], [4–9].

Постановка задачи. Исследуем теперь процесс растворения газа в стеклофазе при $T < 1000K$, когда она обладает свойствами вязкоупругого тела. Аналогично [2], будем предполагать в этом случае постоянство толщины слоя стеклорасплава (равное толщине слоя по окончании первого этапа охлаждения), тогда задача (1–7) в [2] решается с учетом замены напряжения дилатации первого этапа на напряжением дилатации $p(r, t)$, которое возникает при остывании дискообразного слоя от температуры $T(r, 0) = 1000K$ до температуры стеклования T_g . Начальные условия для концентрации c и размеров R и δ соответствуют значениям этих величин по окончании первого этапа остывания стеклорасплава в межзеренном слое.

Оценим напряжение дилатации $p(r, t)$ на втором этапе остывания стеклофазы аналогично [10]. Единственной ненулевой компонентой вектора перемещений является радиальная компонента u_r , а соответствующие компоненты тензора деформации имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = 0; \quad \varepsilon_{ij} = 0 (i \neq j), \quad \varepsilon = \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r}. \quad (2)$$

Тогда компоненты тензора напряжений термовязкоупругого диска

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{K} &= n \left[G, 2 \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right] + \varepsilon - 3\alpha(T - T_0), \\ \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{K} &= n \left[G, -\frac{du_r}{dr} + \frac{2u_r}{r} \right] + \varepsilon - 3\alpha(T - T_0), \\ \frac{\sigma_{zz}}{K} &= n \left[G, -\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right] + \varepsilon - 3\alpha(T - T_0) \end{aligned} \quad (3)$$

удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (4)$$

В (3) $n = \frac{2}{3}(\mu/K) = \frac{(1-2\nu)}{1+\nu}$, μ — модуль сдвига, K — модуль всестороннего растяжения и сжатия, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент теплового расширения, $[G, f]$ обозначает свертку

$$[G, f] = \int_0^t G(r, t, t') \frac{\partial f(r, t')}{\partial t'} dt'. \quad (5)$$

В (5) $G(r, t, t')$ — функция релаксации выбрана в виде [10]

$$G(r, t, t') = \exp \left\{ - \left[t_b^{-1} \int_{t'}^t m(T(r, t'')) dt'' \right]^\beta \right\}. \quad (6)$$

В (6) t_b и β — постоянные, $m = \eta(T_b)/\eta(T)$, $T_b = 1000$ К — начальная температура. Распределение температуры вдоль слоя стеклофазы определяется аналогично [2].

Граничные условия для (4) и ограничение выбраны в следующем виде

$$\sigma_{rr}(R, t) = 0, \quad \int_0^R \sigma_{zz} r dr = 0. \quad (7)$$

Напряжения дилатации $p(r, t)$ связано с компонентами тензора объемной деформации ε

$$p(r, t) = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) = 3K[\varepsilon - 3\alpha(T - T_0)], \quad (8)$$

где ε определена в (2). Подставляя значения внутренних напряжений $p(r, t)$ в (1), получим эволюцию распределения концентрации растворенного газа в вязкоупругом слое стеклофазы.

Результаты расчётов и выводы.

На рис. 1 показаны начальные распределения концентрации и температуры для второго этапа остывания. На рис. 2 видно что на промежуточной стадии второго этапа, концентрация газа становится неоднородной возле пузырька. На рис. 3 видно что по окончании второго этапа концентрация так же остаётся неоднородной, при этом возле пузырька концентрация падает. На рис. 2,3 можно заметить что при остывании образца от 1000 К до 478 К концентрация газа возле пузырька становится неоднородной. Происходит это за счет внутренних напряжений, возникающих при остывании. Так же возле пузырька с течением времени концентрация постепенно падает, а возле мениска начинает расти. Температура как и на первом этапе возрастает от мениска до пузырька вдоль стеклофазы и максимальна возле пузырька.

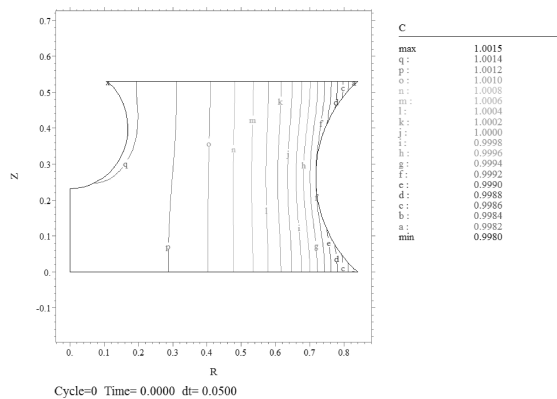


Рис. 1,а. Начальное распределение концентрации газа C .

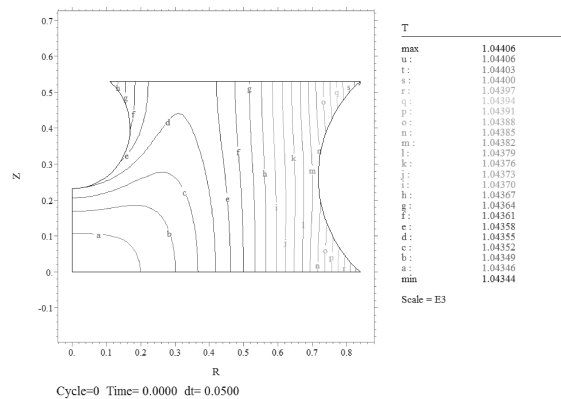


Рис. 1,б. Начальное распределение температуры T .

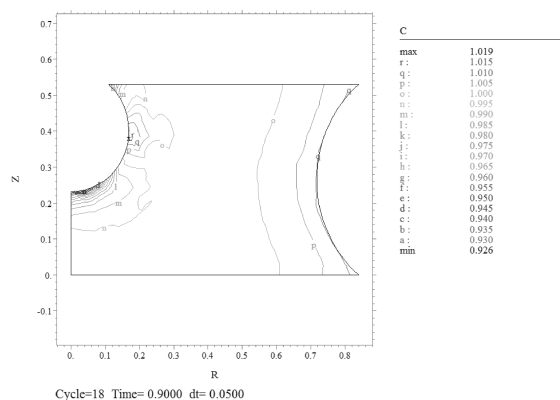


Рис. 2,а. Распределение концентрации газа C на промежуточной стадии.

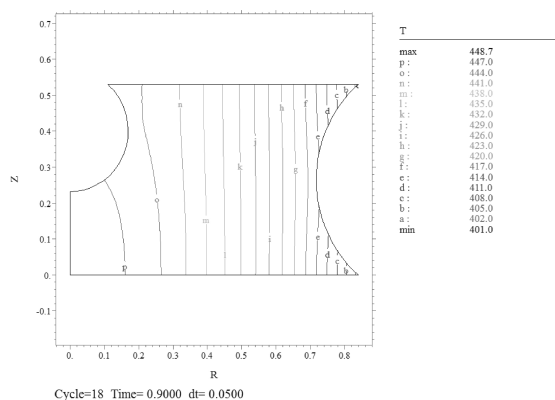


Рис. 2,б. Распределение температуры T на промежуточной стадии.

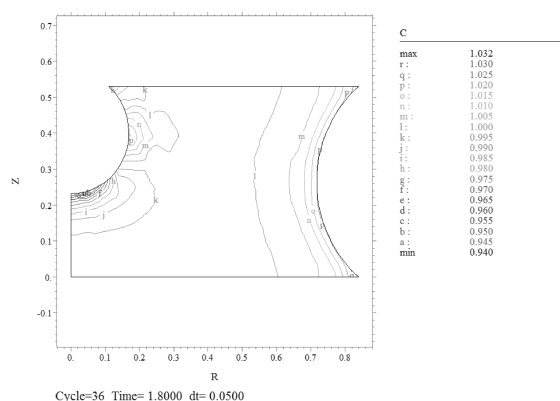


Рис. 3,а. Распределение концентрации газа C на конечной стадии.

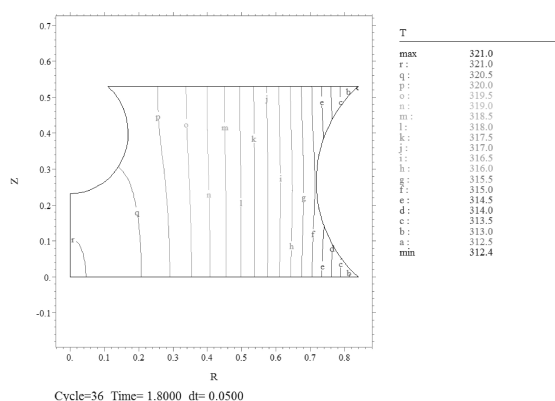


Рис. 3,б. Распределение температуры T на конечной стадии.

Автор выражает благодарность профессору Карпинскому Д. Н. за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Карпинский Д. Н., Панчихина Г. И. Термодинамика и кинетика декогезии межзеренной газонасыщенной пленки при спекании керамики // Материаловедение. 2006. № 5. С. 25–28.
- [2] Мартынов Р. Э. Кинетика роста газового пузырька в межзеренной пленке стеклофазы при спекании керамики // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XV Международной конференции. Ростов-на-Дону. 2011. С. 163–166.

- [3] Карпинский Д. Н., Панчихина Г. И. Расчет образования несплошностей в межзеренной пленке стеклофазы с учетом растворения в ней газа из окружающей среды. Вестник Тамбовского университета. 2003. Т. 8. № 4. С. 729–732.
- [4] Mishin Y., Sofronis P., Bassani J. L. Thermodynamic and kinetic aspects of interfacial decohesion // *Acta Materialia*. 2002. V. 50. Pp. 3609–3622.
- [5] Мазурин О. В., Стрельцина М. В., Швайко-Швайковская Т. П. // Свойства стекол и стеклообразующих расплавов. Л.: Наука. Т. 1–5. 1973–1987.
- [6] Кунин Л. Л., Головин А. М., Суровой Ю. Н., Хохрин В. М. // Проблемы дегазации металлов (Феноменологическая теория). М.: Наука, 1972. 327 с.
- [7] Левзнер Б. З. // Влияние кривизны поверхности на газообмен в системе «стекло–газ». Физика и химия стекла. 2000. Т. 26. № 1. С. 146–153.
- [8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. // Статистическая физика. М.: Наука. 1964. 567 с.
- [9] Кукушкин С. А., Слезов В. В. // Дисперсные системы на поверхности твердых тел: механизмы образования тонких пленок (эволюционный подход). СПб.: Наука, 1996. 304 с.
- [10] Антонов А. С., Борисов В. Т., Борисов О. В., Поздняков В. А., Прокошин А. Ф., Усов Н. А. Расчет остаточных напряжений в аморфных проволоках // Физика и химия стекла. 2000. Т. 26. № 4. С. 353–358.

Martynov R. E. *The evolution of a gas bubble in a layer glass phase during sintering powders.* In this report the results of computation of growth kinetics of the gas bubble during the cooling-down of ceramic sample from 1000 K to the temperature of glass transition 478 K are shown. In this range of temperatures the liquid glass layer is represented as viscoelastic body. It is supposed that thickness of layer glassmelt in the initial time of the present stage of computation is equal to the thickness of the layer in the end of the first stage of cooling-down, then the problem is solved with dilation strain, which is caused by internal thermoviscoelastic strains. The results of computation showed that conditions of forming of the gas bubble at low-temperature stage of cooling-down of ceramic sample are significantly different from high-temperature stage.

ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ РАСТУЩЕГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ТЕЛА С СЕЧЕНИЕМ В ФОРМЕ ЛЕМНИСКАТЫ БУТА

Михин М. Н.

Московский государственный университет приборостроения и информатики

В работе исследована задача кручения растущего призматического тела с сечением в форме лемнискаты Бута. Исследуются три основных этапа деформирования тела: до начала наращивания, в процессе и после остановки роста. Рассмотрены возникающие классические и неклассические начально-краевые задачи механики деформируемого твердого тела. Предложены методы решения с использованием подходов, развитых на основе теории функций комплексного переменного. Истинная картина напряженно-деформируемого состояния восстанавливаются затем с помощью предлагаемых формул обращения.

Рассмотрим однородное вязкоупругое стареющее тело, изготовленное в нулевой момент времени, занимающее некоторую цилиндрическую область Π_1 с поперечным сечением Ω_1 , имеющим границу L_1 , в форме лемнискаты Бута.

В момент приложения нагрузки $\tau_0 \geq 0$ к торцам цилиндрического тела прикладываются усилия, статически эквивалентные паре с моментом $M(t)$. Боковая поверхность тела Π_1 свободна от напряжений.

В момент времени $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним. При этом новые приращиваемые элементы не напряжены. Будем считать, что наращивание осуществляется так, что поперечным сечением всегда является лемнискаты Бута. Обозначим через границу поперечного сечения, которая изменяется с течением времени, при этом $L(\tau_1) = L_1$ и $\Omega(\tau_1) = \Omega_1$. Граница поперечного сечения задается уравнением

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = B^2(t)x^2 + A^2(t)y^2 \quad (A^2(t) > B^2(t)).$$

Будем считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^*(x_1, x_2)$.

В момент $\tau_2 \geq \tau_1$ наращивание тела прекращается, и с этого момента оно занимает область $\Pi_2 = \Pi(\tau_2)$ с поперечным сечением $\Omega_2 = \Omega(\tau_2)$, имеющим границу $L_2 = L(\tau_2)$. Его боковая поверхность свободна от воздействий и при $t \geq \tau_2$.

Краевая задача для основного (нерастущего) вязкоупругого стареющего тела на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$ представляет собой традиционную задачу кручения теории вязкоупругости.

Начально-краевую задачу для $t \in [\tau_1, \tau_2]$ составляют [1–5]:
уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0; \quad (1)$$

соотношения Коши между скоростями деформации $D_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial t$ и скоростями перемещений $v_i = \partial u_i / \partial t$

$$\begin{aligned} D_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad D_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad D_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \\ D_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0, \quad D_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

уравнения состояния

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = 2G(\mathcal{J} + \mathcal{N}_{\tau_0(x_1, x_2)})\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G(\mathcal{J} + \mathcal{N}_{\tau_0(x_1, x_2)})\varepsilon_{23}, \\ \tau_0(x_1, x_2) = \begin{cases} \tau_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_1, \\ \tau^*(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega^*(t), \end{cases} \\ (\mathcal{J} + \mathcal{N}_{\tau_0(x_1, x_2)})^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{L}_{\tau_0(x_1, x_2)}), \quad \mathcal{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \\ K_1(t, \tau) = G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [G^{-1}(\tau) + \omega(t, \tau)] ; \end{aligned} \quad (3)$$

на границе роста $L(t)$ задается условие контакта профессора Манжирова А. В.

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \sigma_{ij}^*(x_1, x_2) = \sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau^*(x_1, x_2)), \quad (4)$$

которое согласовано с нулевыми внешними силами, т. е.

$$(x_1, x_2) \in L^*(t) : \sigma_{13} = \sigma_{13}^*, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^*, \quad \sigma_{13}^* n_1 + \sigma_{23}^* n_2 = 0 \quad (t = \tau^*(x_1, x_2)); \quad (5)$$

условия равновесия торцевых сечений $\Omega(t)$

$$M(t) = \iint_{\Omega_1} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2; \quad (6)$$

где $\mathbf{n} = \{n_1, n_2\}$ — единичный вектор внешней нормали боковой поверхности тела, $\Omega^*(t) = \Omega(t) \setminus \Omega_1$ — образовавшаяся в процессе наращивания часть тела (дополнительное тело), $G = G(t)$ — модуль упруго мгновенной деформации при сдвиге; $K_1(t, \tau)$ — ядро ползучести; $\mathcal{J}$ — тождественный оператор.

Значения всех функций в момент времени $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$ известны из решения задачи для основного тела. Выше в ряде очевидных случаев аргументы опущены. Будем опускать их и далее, воспроизводя лишь в случаях, когда их отсутствие может затруднить понимание.

Учитывая обозначения $\sigma_{ij}^0 = (\mathcal{J} - \mathcal{L}_{\tau_0(x_1, x_2)})\sigma_{ij}G^{-1}$, преобразуем задачу наращивания вязкоупругого тела с определяющими соотношениями (1)–(6) к задаче

наращивания упругого тела, описываемого законом Гука

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^0}{\partial x_2} = 0, \\
& D_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), \\
& \sigma_{13}^0 = 2\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23}^0 = 2\varepsilon_{23} \\
& (x_1, x_2) \in L_\sigma(t) : \quad \sigma_{13}^0 n_1 + \sigma_{23}^0 n_2 = 0; \\
& (x_1, x_2) \in L(t) : \quad \sigma_{13}^0 = \sigma_{13}^{0*} = \sigma_{13}^* G^{-1}, \quad \sigma_{23}^0 = \sigma_{23}^{0*} = \sigma_{23}^* G^{-1}, \\
& \quad \sigma_{13}^* n_1 + \sigma_{23}^* n_2 = 0 \quad (t = \tau^*(x_1, x_2)), \\
& M^\circ(t) = \iint_{\Omega(t)} (x_1 \sigma_{23}^0 - x_2 \sigma_{13}^0) dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Преобразуем начально-краевую задачу (7) к краевой задаче относительно скоростей деформации, скоростей перемещений и скоростей операторных напряжений. Для этого продифференцируем по t уравнение равновесия и уравнения состояния. Для вывода граничного условия на $L(t)$ подействуем оператором дивергенции на начально-краевое условие на поверхности роста. В итоге получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial S_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{23}}{\partial x_2} = 0, \\
& D_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), \\
& S_{13} = 2D_{13}, \quad S_{23} = 2D_{23}, \quad S_{ij} = \partial \sigma_{ij}^0 / \partial t. \\
& (x_1, x_2) \in L(t) : \quad S_{13} n_1 + S_{23} n_2 = 0, \\
& \frac{dM^0(t)}{dt} = \iint_{\Omega(t)} (x_1 S_{23} - x_2 S_{13}) dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{8}$$

Дополненные начальными условиями для основного тела при $t = \tau_1$ соотношения (8), содержащие и начально-краевое условие на границе роста, образуют начально-краевую задачу с параметром времени t .

Для величин S_{ij} и v_i справедливы формулы:

$$\begin{aligned}
& v_1 = -\theta'_t(t) x_2 x_3, \quad v_2 = \theta'_t(t) x_1 x_3, \quad v_3 = \theta'(t) \varphi(x_1, x_2, t), \\
& S_{13} = \theta'_t(t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad S_{23} = \theta'_t(t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right),
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\varphi(x_1, x_2, t)$ — функция кручения, подлежащая определению, $\theta(t)$ — угол закручивания (крутка).

Для нахождения функции кручения применим метод конформного отображения. Конформное отображение области, ограниченной лемнискатой Бута на круг $|\varsigma| < 1$ дается формулой

$$z = \omega(\varsigma, t) = \frac{a(t)\varsigma}{b(t) + \varsigma^2} \quad \left(a(t) = \frac{2A(t)B(t)}{A(t) - B(t)} > 0, \quad b(t) = \frac{A(t) + B(t)}{A(t) - B(t)} > 1 \right)$$

Решение задачи сводится к определению по формуле функции [6]:

$$f(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma, t) \overline{\omega(\sigma, t)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = i \frac{a^2(t)b(t)}{(b^2(t) - 1)(b(t) + \zeta^2)}.$$

Для нахождения компонент S_{31} и S_{32} воспользуемся формулой [6]

$$S_{31} - iS_{32} = \theta'_t(t) \left(\frac{f'_\zeta(\zeta, t)}{\omega'_\zeta(\zeta, t)} - i \overline{\omega(\zeta, t)} \right), \quad (10)$$

в которой достаточно действительную и мнимую части соответственно.

По формуле (10), найдем

$$S_{31} - iS_{32} = -\theta'_t(t) a(t) \left(\frac{2b(t)}{b^2(t) - 1} \frac{\zeta}{b(t) - \zeta^2} + \frac{\rho^2 \zeta}{\rho^4 + b(t)\zeta^2} \right).$$

Учитывая, что $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, и отделяя действительную и мнимую части в предыдущем равенстве, получаем

$$S_{31} = \theta'_t(t) a \left(\frac{2b}{b^2 - 1} \frac{b + \rho^2}{b^2 + \rho^4 - 2\rho b \cos 2\vartheta} + \frac{\rho^5 (\rho^2 - b)}{\rho^8 + \rho^4 b^2 + 2\rho^6 b \cos 2\vartheta} \right) \sin \vartheta,$$

$$S_{32} = \theta'_t(t) a \left(\frac{2b}{b^2 - 1} \frac{b - \rho^2}{b^2 + \rho^4 - 2\rho b \cos 2\vartheta} + \frac{\rho^5 (\rho^2 + b)}{\rho^8 + \rho^4 b^2 + 2\rho^6 b \cos 2\vartheta} \right) \cos \vartheta,$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$.

Скорость крутки $\theta'_t(t)$ находим по формуле

$$\theta'_t(t) = \frac{1}{D(t)} \frac{dM^0(t)}{dt}, \quad D(t) = \frac{\pi a^4(t) (b^4(t) + 1)}{2 (b^2(t) - 1)^4}.$$

Истинные характеристики восстанавливаются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_1, x_2, t) = G(t) \left\{ \sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau_0) G^{-1}(\tau_0) \left[1 + \int_{\tau_0}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ \left. + \int_{\tau_0}^t \left[S_{ij}(x_1, x_2, \tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} S_{ij}(x_1, x_2, \varsigma) d\varsigma R_{ij}(t, \tau) \right] d\tau \right\}, \\ u(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, \tau_0) + \int_{\tau_0}^t v(x_1, x_2, \tau) d\tau, \quad \theta(t) = \theta(\tau_0) + \int_{\tau_0}^t \theta'_t(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_1(t, \tau)$.

Для получения решений на этапах до и после наращивания достаточно в функции кручения принять $t = \tau_1$ и $t = \tau_2$ соответственно.

Основной вывод состоит в том, что если в готовом теле без учета наращивания максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе тела, то при наращивании максимум интенсивности касательных напряжений может

достигаться: на границе раздела основного и дополнительного тел, на границе готового тела, в произвольной точке дополнительного тела.

В случае постоянного крутящего момента получены следующие результаты:

- в готовом теле максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе раздела основного и дополнительного тел;
- при большой скорости наращивания распределение интенсивности касательных напряжений в дополнительном теле более равномерно;
- при медленном наращивании получаем быстро убывающее распределение интенсивности касательных напряжений в дополнительном теле;
- если момент наращивания сильно отличается от момента загрузки, то основное тело практически не разгружается.

Существуют распределение интенсивности касательных напряжений, максимум которых может превосходить максимум предельного распределение интенсивности касательных напряжений основного тела в несколько раз.

Автор благодарит А. В. Манжирова за постановку задачи и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд во НАН РА, 1999. 320 с.
- [2] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М: Наука, 1991. 176 с.
- [3] Манжиров А. В. О кручении растущего цилиндра жестким штампом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. Рр. 842–850.
- [4] Манжиров А. В. Общая безинерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
- [5] Манжиров А. В., Михин М. Н. Методы теории функций комплексного переменного в механике растущих тел // Вестник СамГУ. Естественная серия. 2004. №4(34). С. 82–98.
- [6] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Изд во АН СССР, 1954. 647 с.

Mikhin M. N. *The problem on torsion of a growing prismatic body which cross-section has the shape of a lemniscate of Booth.* The theory of torsion problems of growing solids mechanics is considered in this paper. A section is a growing body of Booth's lemniscate. Arising classical and non-classical initial boundary-value problems of solid mechanics are considered. Methods for solving problems of growing solids mechanics are proposed. These methods are based on the reduction of non-classical problems of accretion of viscoelastic aging solids to the problems of elasticity with a parameter, utilizing the theory of analytic functions for solving the latter problems, and reconstruction of true characteristics of stress-strain state with the aid of obtained decoding formulas.

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ И БИФУРКАЦИЯ СКВОЗНОГО ТЕЧЕНИЯ

Моргулис А. Б.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ*

Рассматриваются плоские вихревые течения идеальной однородной и несжимаемой жидкости в конечных каналах. Такие течения открыты в том смысле, что имеют вход и выход, сквозь которые жидкость втекает в канал и, соответственно, вытекает из неё. Особое внимание уделяется сквозным течениям — течениям без критических точек. Обсуждаются условия единственности таких течений, приводятся примеры бифуркации и неединственности.

1. Предварительные замечания. Данная заметка продолжает сообщение автора «Вариационные принципы для открытых течений», также представленное на этой конференции. Обсуждавшиеся в нём понятия, результаты и обозначения далее используются без особых комментариев.

Речь идёт о течениях идеальной жидкости в каналах. Формально, канал — криволинейный четырёхугольник, где пара несмежных сторон (дуг) представляют вход и выход потока. Они обозначаются S^+ и S^- , соответственно. Пара оставшихся дуг — непроницаемые стенки. Их объединение обозначается S^0 .

Стационарное течение называется *сквозным (безотрывным)*, если поле скорости жидкости всюду отлично от нуля (как внутри канала, так и на его границе, включая твёрдые стенки). Так как вихрь стационарного течения постоянен на линиях тока, в безотрывном потоке $\Omega = f(\Psi)$ всюду в канале, с однозначной функцией f . Удобно считать, что f определена на интервале $(0, 1)$. Это соглашение сводится к нормировке расхода жидкости, что не приводит к потере общности.

Если f монотонна, так что обратная функция $\Psi = F(\Omega)$ однозначна, то стационарный поток — А-течение. А-течения (открытые — в том числе) с C^1 -гладкой убывающей функцией F глобально минимизируют функционал Арнольда

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}) = \int_D (\mathbf{v}^2/2 - F_0(\omega)) \, dx + \oint_S \Psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}; \quad S = \partial D, \quad \omega = \text{rot } \mathbf{v}, \quad F_0 = \int F(r) dr. \quad (1)$$

При этом нет необходимости в каких-либо граничных условиях для возмущений. Отсюда следует единственность А-течения с убывающей F .

А-течения с возрастающей F глобально максимизируют функционал Арнольда лишь при дополнительном условии; например, в случае течений в канале, достаточно неравенства

$$\inf_r F'(r) > \sup \left\{ \int_D \mathbf{u}^2 \, dz \left(\int_D \xi^2 \, dz \right)^{-1} \right\}, \quad \xi = \text{rot } \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_S = 0.$$

При этом максимум $\mathcal{W}$ разыскивается в классе полей с общими нормальными компонентами на S . В этом классе максимальное А-течение единственно (при заданной F).

Таким образом, сквозное течение в канале однозначно определяется «функциональным параметром» f , если f монотонно убывает и имеет C^1 -гладкую обратную. Мы покажем, что в случае *возрастающей* f такая однозначность, вообще говоря, не имеет места. Неоднозначность обусловлена существованием не максимального течения, которое обнаруживается при ветвлении вырожденной критической точки. Это ветвление трактуется как бифуркация стационарного решения задачи Юдовича [2], при которой пара близких стационаров сталкиваясь, обменивается максимальной и устойчивостью.

Заметим, что сквозное течение, пусть даже А-течение, может сосуществовать с множеством отрывных (несквозных) потоков при одних и тех же граничных условиях Юдовича, см. [5, 6]. Отрывные течения разделяются на застойную и проточную зоны, причём в последней сохраняется та же зависимость $\Omega = f(\Psi)$, что и безотрывном потоке.

2. Дополнительный вариационный принцип. Равенство $\Omega = f(\Psi)$ (где $\Omega = -\Delta\Psi$) можно трактовать как уравнение Эйлера для функционала

$$\mathcal{J}(\psi) = \int_D [(\nabla\psi)^2/2 - \tilde{F}_0(\psi)] dz, \quad \tilde{F}_0'(\psi) = \tilde{f}(\psi), \quad (2)$$

где $\tilde{f}$ есть продолжение функции f с $[0, 1]$ на $\mathbb{R}$; при этом рассматриваются функции тока ψ , соответствующие течениям с заданной нормальной скоростью на границе канала. Верно и обратное: критические точки Ψ точки функционала (2) — стационарные течения. Если такое течение безотрывно, то оно не зависит от продолжения f на $\mathbb{R}$, и $\Omega = f(\Psi)$ всюду в D .

Зависимость $\Omega = f(\Psi)$ в безотрывном потоке можно определить, зная нормальную скорость и вихрь на входе потока. Эти величины задаются в граничных условиях Юдовича [2].

3. Вторые вариации. Положим $\varkappa(z) = F'(\Omega(z)) = \nabla\Psi/\nabla\Omega$, и

$$\mathcal{A}_\varkappa(\xi) = -2\delta^2\mathcal{W} = \int_D (\varkappa\xi^2 - \mathbf{u}^2) dz, \quad \xi = \text{rot } \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_S = 0. \quad (3)$$

Первоначально квадратичная форма (3) была введена в [1] как вторая вариация кинетической энергии жидкости (выраженной через вихрь) на листе равноизмеримых функций.

Линеаризуем уравнения движения около А-течения при граничных условиях Юдовича [2]. Тогда $\dot{\mathcal{A}}_\varkappa(\xi) = -\int_{S^-} \gamma \varkappa \xi^2 dS$ в силу линеаризованной задачи. Отсюда вытекает линейная устойчивость по Ляпунову основного А-течения, если $\mathcal{A}_\varkappa$ знакоопределена (она порождает метрику устойчивости). Для сквозных течений это утверждение значительно усиливается: происходит затухание и сглаживание возмущений, см. [3–7].

Пока А-течение глобально максимально, (и потому единственно), кв. форма $\mathcal{A}_\varkappa$ положительна. Следовательно, неединственность возможна лишь при нарушении её знакоопределённости.

Пусть $\nu = \kappa^{-1} = \nabla\Omega/\nabla\Psi = f'(\Psi)$. Рассмотрим квадратичную форму

$$\mathcal{B}_\nu(\varphi) = 2\delta^2 \mathcal{J} = \int_D [(\nabla\varphi)^2 - \nu\varphi^2] dz, \quad \varphi|_S = 0 \quad (4)$$

Лемма 1. Если $\kappa(z) > 0$ в D , и $\mathcal{B}_\nu(\varphi) > 0$ для всех $\varphi \neq 0 : -\Delta\varphi = \xi \in L_2(D)$, то $\mathcal{A}_\kappa(\xi) > 0$ для всех $\xi \in L_2(D)$, $\xi \neq 0$.

Лемма 2. Пусть φ обращается в нуль на границе канала и вблизи критических точек основного течения. Тогда

$$\mathcal{B}_\nu(\varphi) = \int_D (|\nabla\varphi \times \nabla\Psi|^2 + ((\nabla\Psi \cdot \nabla\varphi) + \Omega\varphi)^2 + 2\kappa\Omega\varphi^2|\nabla\Psi|) |\nabla\Psi|^{-2} dz, \quad (5)$$

где κ — кривизна линии тока с полем нормалей, сонаправленным $\nabla\Psi$.

Как видно из (5), искривление линий тока необходимо для вырождения и потери положительности $\mathcal{B}_\nu$. Отсюда следует, что $\mathcal{B}_\nu$ положительна для любого сквозного сдвигового течения в прямом канале (не прямоугольном, вообще говоря). Сказанное распространяется на однонаправленные сдвиговые течения, удовлетворяющие условию прилипания, такие например, как плоское течение Пуайзеля с профилем $U(y) = 6y(1-y)$ (расход нормирован).

4. Вращательные течения. Пусть r, θ — радиальная и азимутальная координаты, $r_0 \in (0, 1)$, и $D = \{g_1(r) < \theta < g_2(r), r \in (r_0, 1)\}$. Рассмотрим вращательное течение с полем скорости $U(r)\mathbf{e}_\theta$, где орт $\mathbf{e}_\theta$ направлен против часовой стрелки. В таком случае $\nu(r) = -\Omega_r(r)/U(r)$, $\Omega = r^{-1}(rU(r))_r$, $U = -\Psi_r$, и

$$\mathcal{B}_\nu(\varphi) = \int_{r_0}^1 \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} U^2 \left(\frac{\varphi}{U} \right)_r^2 d\theta r dr + \int_{r_0}^1 \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} (\varphi_\theta^2 - \varphi^2) d\theta r^{-1} dr. \quad (6)$$

Отсюда следует положительность $\mathcal{B}_\nu$ при условии $g_2(r) - g_1(r) \leq \pi$.

Рассмотрим вращательное течение в кольцевом секторе раствора больше π ($g_2 \equiv \theta_0 > \pi$, $g_1 \equiv 0$). Выберем гладкую функцию $\eta = \eta(r)$, такую, что $\eta(r) > 0$ при $r \in [r_0, 1]$. Определим функцию $V = V(r)$ как решение задачи

$$-(r^{-1}(rV)_r)_r = \eta; \quad V(r_0) = V(1) = 0$$

Функция Грина этой задачи положительна, а потому $V(r) > 0$ при $r \in (r_0, 1)$. Не нарушая общности, считаем, что $\int_{r_0}^1 V(r) dr = 1$. Пусть $\beta \in (0, 1)$. Определим профили

$$U_\beta(r) = -\beta(r \ln r_0)^{-1} + (1 - \beta)V(r), \quad r \in (r_0, 1). \quad (7)$$

Профили U_β при всех $\beta > 0$ определяют сквозные течения, а при $\beta = 0$ — однонаправленное течение, удовлетворяющее условиям прилипания при $r = r_0, 1$. Во всех этих течениях функция тока монотонно возрастает относительно вихря, так как $\nu_\beta = (1 - \beta)\eta U_\beta^{-1} > 0$. При этом $\nu_\beta(r) = O(1 - \beta)$, $\beta \rightarrow 1 - 0$. Поэтому форма $\mathcal{B}_\beta = \mathcal{B}_{\nu_\beta}$ положительно определена, когда $\beta \rightarrow 1 - 0$. Пусть $\varphi(r, \theta) = \hat{\varphi}(r) \sin \alpha\theta$, $\hat{\varphi}(r_0) = \hat{\varphi}(1) = 0$, $\alpha = \pi/\theta_0$, где $\theta_0 > \pi$ — раствор сектора. Подставив это выражение φ в (6), заметим, что $\mathcal{B}_\beta(\varphi) = 0$ при $\beta = 0$, $\alpha = 1$ и $\hat{\varphi} = U_0 = V$. Отсюда

выводится, что при каждом $\alpha \in (1/2, 1)$ существует $\beta_0 \in (0, 1)$, такое что $\mathcal{B}_\beta$ положительна определена при $\beta > \beta_0$, неопределённого знака при $\beta < \beta_0$, неотрицательна и вырождена при $\beta = \beta_0$, причём вырождение происходит на одномерном подпространстве, натянутом на *положительную* функцию φ_0 (этим спектральным свойством обладает минимальное собственное значение задачи Дирихле для симметричного эллиптического оператора, см. [8, гл. 8]).

Пусть $\varepsilon = \beta_0 - \beta$, и Ψ_ε — функция тока вращательного течения (7) при $\beta = \beta_0 - \varepsilon$. Рассмотрим линеаризацию задачи Юдовича на этом течении. Ассоциированный с ней оператор обозначим L_ε . Он допускает факторизацию

$$L_\varepsilon \xi = \{B_\varepsilon \varphi, \Psi_\varepsilon\}, \quad \xi = -\Delta \varphi, \quad \varphi|_S = 0,$$

где фигурные скобки обозначают скобки Пуассона: $\{a, b\} = \nabla b \times \nabla a$, и B_ε — оператор квадратичной формы $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}_{\beta_0 - \varepsilon}$. Выше мы установили, что оператор B_0 вырожден, его ядро одномерно и натянуто на положительную функцию φ_0 . В силу указанной факторизации, ядро оператора L_0 тоже одномерно, и натянуто на функцию $\xi_0 = -\Delta \varphi_0 = \nu_0 \varphi_0$, которая также положительна. Отсюда выводится простота нулевого собственного значения, и существование ветви вещественных собственных значений λ_ε операторов L_ε , трансверсально пересекающей мнимую ось в нуле при $\varepsilon = 0$, слева направо при смене знака ε с минуса на плюс. Таким образом, при $\beta < \beta_0$ вращательное течение (7) становится неустойчивым, причём неустойчивая мода растёт экспоненциально. Отсюда следует, что ассоциированная с ним кв. форма $\mathcal{A}_{\mathcal{H}_\beta}$ не определена по знаку при $\beta < \beta_0$, и потому течение (7) более не максимально.

Рассмотрим ответвление вторичных режимов от течения (7) при переходе параметра β через критическое значение β_0 . В соответствии с вариационным принципом (2), функция тока Ψ_ε ($\varepsilon = \beta_0 - \beta$) — решение задачи

$$-\Delta \Psi = \tilde{f}(\Psi, \varepsilon); \quad \Psi(x) = \psi_0(x, \varepsilon), \quad x \in S. \quad (8)$$

где ψ_0 и f определяются основным течением, и $\tilde{f}$ — продолжение f (его роль несущественна). Линеаризация задачи (8) при $\varepsilon = 0$ около $\Psi_0 = \Psi_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ приводит к оператору B_0 , который, как уже говорилось, вырожден, и его ядро одномерно. В таком случае применимы стандартные результаты теории ветвления решений операторных уравнений. Из них следует, что при выполнении некоторых условий невырожденности, задача (8) имеет единственное непрерывное семейство решений $\varepsilon \mapsto \tilde{\Psi}_\varepsilon$, отличное от Ψ_ε и такое, что $\tilde{\Psi}_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \Psi_0$. Здесь непрерывность понимается по метрике $C^1(\bar{D})$, а потому функции тока $\tilde{\Psi}_\varepsilon$ определяют безотрывные течения по крайней мере, когда ε достаточно близко к нулю, что и делает все наши построения независимыми от продолжения функции f .

Исследуем устойчивость вторичных течений $\tilde{\Psi}_\varepsilon$. Рассмотрим квадратичную форму (4), ассоциированную со вторичным течением, и её оператор. Последний обозначим через $\tilde{B}_\varepsilon$. Стандартные результаты теории возмущений линейных операторов приводят к выводу о том, что минимальное собственное значение $\tilde{\mu}_\varepsilon$ оператора $\tilde{B}_\varepsilon$ положительно при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, отрицательно при $\varepsilon < 0$, и обращается в нуль при $\varepsilon = 0$, и пересечение ветви $\tilde{\mu}_\varepsilon$ с мнимой осью при $\varepsilon = 0$ трансверсально. Отсюда вытекает, что при $\varepsilon = 0$ происходит обмен

устойчивостью между основным и вторичным течениями: вторичные течения $\tilde{\Psi}_\varepsilon$ устойчивы при $\varepsilon > 0$, и неустойчивы — при $\varepsilon < 0$, тогда как основное течение Ψ_ε устойчиво при $\varepsilon < 0$, и неустойчиво — при $\varepsilon > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Arnold V. I.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier. 1966. Vol. 16. №. 1. Pp. 319–361.
- [2] *Юдович В. И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область // Матем. сб. 1964. Т. 64(106). № 4. С. 562–588.
- [3] *Моргулис А. Б., Юдович В. И.* Асимптотическая устойчивость стационарного режима протекания идеальной несжимаемой жидкости // СМЖ. 2002. Т. 43. № 4. С. 840–857.
- [4] *Morgulis A. and Yudovich V.* Arnold's method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary // Chaos. 2002. Vol. 12. № 2. Pp. 356–371.
- [5] *Govorukhin V. N., Morgulis A. B., Vladimirov V. A.* Planar inviscid flows in a channel of finite length: washout, trapping and self-oscillations of vorticity // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 659. Pp. 420–472.
- [6] *Моргулис А. Б., Говорухин В. Н., Владимиров В. А.* Динамика течений идеальной несжимаемой жидкости с граничными условиями Юдовича // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск «Актуальные проблемы математической гидродинамики». С. 51–72.
- [7] *Morgulis A. B.* Non-linear Asymptotic Stability for the Through-Passing Flows of Inviscid Incompressible Fluid // Asymptotic Analysis. 2010. Vol. 66. Pp. 229–247.
- [8] *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

Morgulis A. B. *Non-uniqueness and bifurcation of non-separated flow.* We consider 2D vortical fluid flows through a finite channel. The fluid is supposed to be inviscid incompressible and homogeneous. Such flows are naturally referred to as open ones since there are an inlet and an outlet through which the fluid is coming in and out of the channel. We make focus upon nonseparated flows with no critical points. Regarding such flows, we discuss the uniqueness problem, the onset of instability and bifurcations.

СУПЕРПОЗИЦИЯ АЗИМУТАЛЬНЫХ ВОЛН ОКОЛО ТОЧКИ RES 2 В ЗАДАЧЕ КУЭТТА–ТЕЙЛОРА

Моршнева И. В., Овчинникова С. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Данная статья продолжает исследование бифуркации коразмерности 2 в случае резонансной ситуации Res 2 в задаче Куэтта–Тейлора о течении жидкости между соосными бесконечными вращающимися цилиндрами, начатое в [1, 2]. Проведено изучение одного из равновесий моторной системы, у которого попарно равны ненулевые вещественные амплитуды. Ему отвечает суперпозиция азимутальных волн. Выписаны выражения для амплитуд. Они зависят от фазового инварианта. Для него получено уравнение, которое может иметь до четырех решений. Это означает, что возможно существование до четырех различных суперпозиций азимутальных волн. Проведено численное исследование существования суперпозиции азимутальных волн и количества таких режимов для различных значений параметров задачи.

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя бесконечно длинными соосными твердыми цилиндрами радиусов r_1, r_2 , вращающимися с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 . Поля скорости и давления предполагаются периодическими вдоль общей оси цилиндров с заданным периодом $2\pi/\alpha$ (α — безразмерное осевое волновое число).

Безразмерные уравнения движения (уравнения Навье–Стокса) имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + A\mathbf{v} &= -\nabla p - R_1 L(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \\ \nabla \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ — скорость течения, p — давление, r, θ, z — цилиндрические координаты, ось z направлена вдоль оси цилиндров, $R_1 = \Omega_1 r_1^2 d^2 / \nu$ — число Рейнольдса, ν — кинематический коэффициент вязкости, $d = \eta - 1$ — зазор между цилиндрами, $\eta = r_2 / r_1$ — отношение радиусов цилиндров, а выражения для дифференциальных операторов A и L приведены в [3] (см. формулы (0.2) в [3]).

При любых значениях параметров система (1) имеет точное стационарное решение — течение Куэтта, удовлетворяющее условиям прилипания на стенках цилиндров, с вектором скорости $\mathbf{v}_0(r) = (0, v_{0\theta}(r), 0)$, где

$$v_{0\theta} = ar + \frac{b}{r}, \quad a = \frac{R_2 - R_1}{R_1(\eta^2 - 1)}, \quad b = -\frac{R_2 - R_1\eta^2}{R_1(\eta^2 - 1)d^2},$$

$R_2 = \frac{\Omega_2 r_2^2}{\nu} d^2$ — второе число Рейнольдса.

Нелинейная задача (1) и линеаризованная на течении Куэтта система Навье–Стокса обладают группой симметрии $\mathcal{G} = SO(2) \times O(2)$ — инвариантны относительно вращений вокруг и сдвигов вдоль оси z и преобразования инверсии, которые действуют на поле скоростей $\mathbf{u}$ по правилам

$$\begin{aligned}(L_\theta^\delta \mathbf{u})(t, r, \theta, z) &= \mathbf{u}(t, r, \theta + \delta, z), \quad (L_z^h \mathbf{u})(t, r, \theta, z) = \mathbf{u}(t, r, \theta, z + h), \\ (\mathbf{J}\mathbf{u})(t, r, \theta, z) &= (u_r(t, r, \theta, -z), u_\theta(t, r, \theta, -z), -u_z(t, r, \theta, -z)).\end{aligned}$$

для любых вещественных δ, h .

Симметрия задачи позволяет разыскивать решения линеаризованной на течении Куэтта задачи с вектором скорости

$$\Phi(r, \theta, z, t) = e^{i\omega t - i(m\theta + k\alpha z)} \varphi(r),$$

где m (целое) — азимутальное, k (целое) — осевое квантовые числа.

Нейтральные кривые $R_1 = R_{1*}(m, k, \eta, R_2, \alpha)$ и $R_1 = R_{1*}(n, l, \eta, R_2, \alpha)$, отвечающие различным квантовым числам (m, k) и (n, l) , могут пересекаться. В точке пересечения нейтральных кривых (R_{1*}, R_{2*}) колебательной потери устойчивости линеаризованная задача в силу симметрии имеет четыре независимые нейтральные моды с различными квантовыми числами

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_m t} \Phi_{0k}(r, \theta, z), & \Phi_2(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_m t} \Phi_{1k}(r, \theta, z), \\ \Phi_3(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_n t} \Phi_{0l}(r, \theta, z), & \Phi_4(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_n t} \Phi_{1l}(r, \theta, z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{0k}(r, \theta, z) &= e^{-i(m\theta + k\alpha z)} \varphi_{0k}(r), & \Phi_{1k}(r, \theta, z) &= e^{-i(m\theta - k\alpha z)} \varphi_{1k}(r), \\ \Phi_{0l}(r, \theta, z) &= e^{-i(n\theta + l\alpha z)} \varphi_{0l}(r), & \Phi_{1l}(r, \theta, z) &= e^{-i(n\theta - l\alpha z)} \varphi_{1l}(r), \end{aligned}$$

$$\varphi_{1s} = j(\varphi_{0s}) = (\varphi_{0sr}, \varphi_{0s\theta}, -\varphi_{0sz}), \quad s = k, l.$$

В пространстве параметров существует однопараметрическое семейство точек пересечения, в которых выполняются резонансные соотношения $\omega_n = \omega_m, n = m, l \neq k (l \neq 3k)$ — точек резонанса Res 2. Каждому значению отношения радиусов цилиндров η и выбранным числам m, k, l отвечает точка Res 2. Результаты расчетов точек Res 2 приведены в [2].

В малой окрестности (R_{1*}, R_{2*}) , состоящей из точек $R_1 = R_{1*} + k_1 \varepsilon^2, R_2 = R_{2*} + k_2 \varepsilon^2$ (ε — вещественный малый параметр), разыскивается асимптотическое решение нелинейной системы (1), вектор скорости которого имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{00} + \varepsilon(\Phi + \Phi^*) + \dots \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}_{00}$ — вектор скорости течения Куэтта, символ $*$ означает комплексное сопряжение, коэффициенты k_1, k_2 — параметры надкритичности ($k_1^2 + k_2^2 = 1$). Слагаемые более высокого порядка по параметру ε опущены. Вектор-функция Φ — линейная комбинация нейтральных мод

$$\Phi = \xi_{0k}(\tau) \Phi_1 + \xi_{1k}(\tau) \Phi_2 + \xi_{0l}(\tau) \Phi_3 + \xi_{1l}(\tau) \Phi_4$$

с неизвестными комплексными амплитудами $\xi_{0k}(\tau), \xi_{1k}(\tau), \xi_{0l}(\tau), \xi_{1l}(\tau)$, зависящими от медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$.

При малых ε с помощью метода осреднения по быстрому времени [3, 4] строится система комплексных дифференциальных уравнений для амплитуд $\xi_{0k}, \xi_{1k}, \xi_{0l}$ и ξ_{1l} . В случае резонанса Res 2 такая амплитудная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \xi'_{0k} &= \xi_{0m}(\sigma + A|\xi_{0k}|^2 + B|\xi_{1k}|^2 + C|\xi_{0l}|^2 + D|\xi_{1l}|^2) + Q\xi_{1k}^* \xi_{0l} \xi_{1l}, \\ \xi'_{1k} &= \xi_{1k}(\sigma + B|\xi_{0k}|^2 + A|\xi_{1k}|^2 + D|\xi_{0l}|^2 + C|\xi_{1l}|^2) + Q\xi_{0k}^* \xi_{0l} \xi_{1l}, \\ \xi'_{0l} &= \xi_{0l}(\mu + P|\xi_{0k}|^2 + S|\xi_{1k}|^2 + U|\xi_{0l}|^2 + V|\xi_{1l}|^2) + F\xi_{0k} \xi_{1k} \xi_{1l}^*, \\ \xi'_{1l} &= \xi_{1l}(\mu + S|\xi_{0k}|^2 + P|\xi_{1k}|^2 + V|\xi_{0l}|^2 + U|\xi_{1l}|^2) + F\xi_{0k} \xi_{1k} \xi_{0l}^*, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma = \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2$, $\mu = \mu_1 k_1 + \mu_2 k_2$. Коэффициенты этой системы выражаются через нейтральные моды Φ_{jp} ($j = 0, 1$; $p = k, l$), собственные решения сопряженной задачи и решения неоднородных систем, правые части которых зависят от тех же нейтральных мод (выражения для них см. в [3, 6]).

Если перейти в (3) к полярным координатам, полагая

$$\xi_{0k} = r_0(\tau)e^{i\varphi_0(\tau)}, \quad \xi_{1k} = r_1(\tau)e^{i\varphi_1(\tau)}, \quad \xi_{0l} = \rho_0(\tau)e^{i\phi_0(\tau)}, \quad \xi_{1l} = \rho_1(\tau)e^{i\phi_1(\tau)},$$

то для модулей комплексных амплитуд r_0, r_1, ρ_0, ρ_1 (вещественных амплитуд), которые являются инвариантами группы симметрии $\mathcal{G}$, и фазового инварианта $\beta = -\varphi_0 - \varphi_1 + \phi_0 + \phi_1$ получается замкнутая система уравнений пятого порядка (фактор-система или моторная система)

$$\begin{aligned} r'_0 &= r_0(\sigma_r + A_r r_0^2 + B_r r_1^2 + C_r \rho_0^2 + D_r \rho_1^2) + (Q_r \cos \beta - Q_i \sin \beta) r_1 \rho_0 \rho_1, \\ r'_1 &= r_1(\sigma_r + B_r r_0^2 + A_r r_1^2 + D_r \rho_0^2 + C_r \rho_1^2) + (Q_r \cos \beta - Q_i \sin \beta) r_0 \rho_0 \rho_1, \\ \rho'_0 &= \rho_0(\mu_r + P_r r_0^2 + S_r r_1^2 + U_r \rho_0^2 + V_r \rho_1^2) + (F_r \cos \beta + F_i \sin \beta) r_0 r_1 \rho_1, \\ \rho'_1 &= \rho_1(\mu_r + S_r r_0^2 + P_r r_1^2 + V_r \rho_0^2 + U_r \rho_1^2) + (F_r \cos \beta + F_i \sin \beta) r_0 r_1 \rho_0, \\ r_0 r_1 \rho_0 \rho_1 \beta' &= (-2(\sigma_i - \mu_i) + X(r_0^2 + r_1^2) + Y(\rho_0^2 + \rho_1^2)) r_0 r_1 \rho_0 \rho_1 - \\ &\quad - (Q_i \cos \beta + Q_r \sin \beta) \rho_0^2 \rho_1^2 (r_0^2 + r_1^2) - (F_i \cos \beta - F_r \sin \beta) r_0^2 r_1^2 (\rho_0^2 + \rho_1^2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $X = -A_i - B_i + P_i + S_i$, $Y = -C_i - D_i + U_i + V_i$, нижний индекс r означает действительную часть, а индекс i — мнимую часть комплексного числа.

Если найдено некоторое решение моторной системы (4), то соответствующие вещественным амплитудам фазы легко вычисляются.

Всякое равновесие моторной системы (4) вместе с проходящей через него орбитой действия группы симметрии порождает периодическое или квазипериодическое движение амплитудной системы.

В [1] были перечислены решения, отвечающие равновесиям моторной системы (4), в малой окрестности точки резонанса Res 2, даны условия существования и устойчивости некоторых из них. Моторная система может иметь равновесия, у которых все амплитуды отличны от 0, в общем случае для них нет простых аналитических выражений, их приходится находить численно. В данной работе проведено изучение равновесия, у которого попарно равны ненулевые вещественные амплитуды. Ему отвечает суперпозиция азимутальных волн.

Если попарно равны вещественные амплитуды ($|\xi_{0k}| = |\xi_{1k}| = r_0$, $|\xi_{0l}| = |\xi_{1l}| = \rho_0$), то моторная система для вещественных амплитуд r_0, ρ_0 и фазового инварианта $\beta = -2(\varphi_0 - \phi_0)$ принимает вид

$$\begin{aligned} r'_0 &= r_0(\sigma_r + (A_r + B_r)r_0^2 + (C_r + D_r + Q_r \cos \beta - Q_i \sin \beta)\rho_0^2), \\ \rho'_0 &= \rho_0(\mu_r + (P_r + S_r + F_r \cos \beta + F_i \sin \beta)r_0^2 + (U_r + V_r)\rho_0^2), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \beta' &= 2((\mu_i - \sigma_i) + (X - F_i \cos \beta + F_r \sin \beta)r_0^2 + \\ &\quad + (Y - Q_i \cos \beta - Q_r \sin \beta)\rho_0^2). \end{aligned} \quad (6)$$

В случае равновесия из уравнений (5) выражаем квадраты амплитуд через фазовый инвариант β в виде

$$\begin{aligned} r_0^2 &= \frac{\mu_r X_1(\beta) - \sigma_r(U_r + V_r)}{(U_r + V_r)(A_r + B_r) - X_1(\beta)Y_1(\beta)}, \\ \rho_0^2 &= \frac{\sigma_r Y_1(\beta) - \mu_r(A_r + B_r)}{(U_r + V_r)(A_r + B_r) - X_1(\beta)Y_1(\beta)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $X_1(\beta) = C_r + D_r + Q_r \cos \beta - Q_i \sin \beta$, $Y_1(\beta) = P_r + S_r + F_r \cos \beta + F_i \sin \beta$.

Подставив (7) в (6), получим уравнение для β

$$\alpha_1 \cos^2 \beta + \alpha_2 \cos \beta \sin \beta + \alpha_3 \cos \beta + \alpha_4 \sin \beta + \alpha_5 = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (Q_i F_r - Q_r F_i)(\sigma_r - \mu_r) - (Q_r F_r + Q_i F_i)(\sigma_i - \mu_i), \\ \alpha_2 &= (Q_r F_r + Q_i F_i)(\sigma_r - \mu_r) - (Q_r F_i - Q_i F_r)(\sigma_i - \mu_i), \\ \alpha_3 &= (Q_i(P_r + S_r) - Y F_r - F_i(U_r + V_r))\sigma_r + (F_i(C_r + D_r) - \\ &\quad - X Q_r - Q_i(A_r + B_r))\mu_r - (\sigma_i - \mu_i)(Q_r(P_r + S_r) + F_r(C_r + D_r)), \\ \alpha_4 &= (Q_r(P_r + S_r) + F_r(U_r + V_r) - Y F_i)\sigma_r + (X Q_i - F_r(C_r + D_r) - \\ &\quad - Q_r(A_r + B_r))\mu_r + (\sigma_i - \mu_i)(Q_i(P_r + S_r) - F_i(C_r + D_r)), \\ \alpha_5 &= (X(U_r + V_r) - Y(P_r + S_r) + Q_r F_i)\sigma_r + (Y(A_r + B_r) - X(C_r + D_r) + \\ &\quad + Q_i F_r)\mu_r + (\sigma_i - \mu_i)((A_r + B_r)(U_r + V_r) - (P_r + S_r)(C_r + D_r) + Q_i F_i). \end{aligned}$$

Это уравнение может иметь до четырех вещественных решений. Если уравнение (8) имеет решение, и ему соответствуют положительные правые части выражений (7), то у системы (3) существует решение. Ему отвечает асимптотическое решение системы Навье–Стокса, представляющее собой нелинейную смесь бегущих вдоль оси z азимутальных m -волн с различными осевыми квантовыми числами k и l , с вектором скорости $\mathbf{u}(t, r, \theta, z) = U(r, \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, где U есть 2π -периодическая вектор-функция по переменным $\zeta = \omega_m t - m\theta - k\alpha z$, $\zeta_1 = \omega_m t - m\theta + k\alpha z$, $\zeta_2 = \omega_m t - m\theta - l\alpha z$ и $\zeta_3 = \omega_m t - m\theta + l\alpha z$.

Проводились расчеты коэффициентов системы амплитудных уравнений (3) в точках Res 2 для различных зазоров ($\eta = 1.1326, 1.5, 1.7, 2.0$), разных значений азимутальных квантовых чисел ($m = n = 1, 2, 3$) и отношений осевых квантовых чисел ($k/l = 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 9/10$). Вычисления показывают, что существуют наборы параметров, при которых возникает одна или две суперпозиции азимутальных волн в некоторой области на плоскости параметров надкритичности (k_1, k_2) , а есть такие наборы параметров, при которых вообще не возникают такие режимы. Например, для набора параметров: $m = n = 1$, $k = 1$, $l = 2$, $R_1 = 27.134$, $\eta = 1.1326$, $\omega_m = \omega_n = 0.3894099$, $\Omega = \Omega_2/\Omega_1 = -0.82140$, $\alpha = 2.660219$ уравнение (8) для фазового инварианта β имеет два вещественных решения в достаточно широкой области на плоскости надкритичности, но только одному из них соответствуют положительные правые части выражений (7). Следовательно, возникает только

одна суперпозиция азимутальных волн. В случае набора параметров: $m = n = 1$, $k = 2$, $l = 3$, $R_1 = 118.77$, $\omega_m = \omega_n = 0.3140736$, $\Omega = -0.53093$, $\alpha = 1.71277$, $\eta = 2.0$ уравнение (8) также имеет два вещественных решения, и каждому из них соответствуют положительные правые части (7). Это означает, что в окрестности такой точки Res 2 возникают две суперпозиции азимутальных волн. А для набора: $\eta = 1.1326$, $m = n = 1$, $k = 2$, $l = 3$, $R_1 = 25.603$, $\omega_m = \omega_n = 0.387395$, $\Omega = -0.80940$, $\alpha = 1.537150$ ни одному из двух вещественных решений (8) не соответствуют положительные правые части (7). Поэтому в этом случае не возникают суперпозиции азимутальных волн.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Овчинникова С. Н., Моршнева И. В. Режимы течения около точки резонанса Res 2 в задаче Куэтта–Тейлора // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV Международной конференции, Ростов-на-Дону, Азов, 19–24 июня 2010 г., Т. 1. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. С. 245–249.
- [2] Моршнева И. В., Овчинникова С. Н. Численный анализ режимов около точки резонанса Res 2 в задаче Куэтта–Тейлора // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XV Международной конференции, Ростов-на-Дону, 4–7 декабря 2011 г., Т. 2. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2011. С. 181–185.
- [3] Юдович В. И., Овчинникова С. Н. Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта — Тейлора. I. Нерезонансный случай // Деп. в ВИНТИ 5.04.2005, № 458-B2005, 33 с.
- [4] Юдович В. И. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Шестой все-союзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24–30 сентября 1986 г. Аннотации докладов. С. 661.
- [5] Chossat P., Demay Y., Iooss G. Interaction de modes azimuthaux dans le probleme de Couette–Taylor // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. Pp. 213–248.
- [6] Юдович В. И., Овчинникова С. Н. Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта — Тейлора. II. Резонансы Res 1, Res 2 // Деп. в ВИНТИ 17.01.2006, № 47-B2006, 32 с.

Morshneva I. V., Ovchinnikova S. N. *Superposition of azimuthal waves near point of Res 2 resonance in the Couette–Taylor problem.* Res 2 situation (there are seven possible resonances) occurs in the point of intersection of bifurcations when the ratio of neutral modes' frequencies and azimuthal quantum numbers equals and axial quantum numbers are not equal. Superpositions of azimuthal waves are studied. Results of calculation of these flow regimes for different values of parameters are presented.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕДУЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО РУСЛОВОГО ПОТОКА

Надолин К. А., Жилиев И. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследование продолжает цикл работ по изучению различных аспектов моделирования гидродинамики и массопереноса в мелководных протяженных и слабо искривленных русловых потоках на основе редуцированных трехмерных уравнений [1]. В докладе представлены данные вычислительных экспериментов с редуцированной математической моделью мелкого протяженного слабо искривленного руслового потока. Для верификации модели были проведены расчеты в конечно-элементном программном комплексе COMSOL. Сравнивались значения продольной скорости потока, полученные по формулам редуцированной модели после численного решения начально-краевой задачи для функции возвышения свободной поверхности, и данные прямого численного моделирования на основе полных гидродинамических моделей COMSOL для ламинарных и турбулентных течений вязкой жидкости. Основное внимание уделено учету турбулентности течения, что является одним из ключевых вопросов адекватного моделирования природных водотоков. Полученные результаты позволяют утверждать, что предлагаемая модель адекватно описывает гидродинамику руслового течения.

Введение. Для расчетов гидрологических характеристик водотоков применяются математические модели разных типов. Наиболее простыми в использовании являются формульные («нульмерные») и балансовые (камерные) модели. Широко используются также одномерные модели, полученные, например, осреднением по живому сечению потока. Однако применение таких моделей весьма ограничено, поскольку они позволяют вычислять лишь интегральные и усредненные характеристики потоков (расход воды, средняя скорость течения и т. п.). Во многих случаях требуется более детальное описание течения, например, учет его поперечной структуры при возникновении в верхнем слое противотока, вызванного действием ветра. Строго говоря, такой анализ требует привлечения трехмерных моделей, точно описывающих исследуемые процессы и основанных на полных уравнениях гидродинамики турбулентных течений. Однако на практике получить высокую точность моделирования не удастся, поскольку имеющиеся данные гидрологических измерений обычно не имеют достаточно высокой точности, необходимой для задания гидрофизических параметров, а также начальных и граничных условий для трехмерных уравнений в частных производных. Кроме того, сложность и трудоемкость вычислительных экспериментов на основе трехмерных математических моделей усугубляется спецификой геометрии расчетной области, сильно вытянутой в продольном направлении: отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла колеблется в пределах от 0.1 до 0.005. Все вышесказанное объясняет интерес к двумерным и редуцированным трехмерным математическим моделям русловых потоков, сложность которых адекватна точности имеющихся гидрологических данных.

В работе [1] представлен подход, позволяющий конструировать математические модели русловых потоках пониженной размерности. Ключевым моментом предлагаемого подхода является учет того, что размеры поперечного сечения русла в вертикальном и горизонтальном направлениях существенно различаются и протяженность потока весьма велика. Данная работа посвящена тестированию одной из предложенных в [1] редуцированных математических моделей, а именно модели мелкого протяженного потока. Верификация модели проводится путем сравнения данных прямого численного моделирования на основе полных уравнений гидродинамики потока вязкой жидкости и результатов, полученных на основе редуцированной модели. Расчеты проводились с использованием конечно-элементного комплекса COMSOL Multiphysics (Femlab), а также программных пакетов Matlab и Maple.

1. Постановка задачи. Уравнения базовой математической модели гидродинамики мелкого протяженного потока (согласно классификации [1]) в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -ReGI, & u|_{z=h} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\xi} &= -F_x, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= Re \frac{\partial p}{\partial y}, & v|_{z=h} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\xi} &= -F_y, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), & w|_{z=h} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial z} &= G & p|_{z=\xi} &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + u|_{z=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + v|_{z=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - w|_{z=\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u , v , w и x , y , z — продольная, поперечная и вертикальная компонента скорости потока и координаты, соответственно; p — давление; Re — число Рейнольдса; G и I — гравитационный параметр и параметр уклона соответственно; ν — безразмерная функция вязкости, учитывающая турбулентность течения. Декартовы прямоугольные координаты ориентированы таким образом, что плоскость xOy располагается на поверхности потока, а оси x , y и z направлены вдоль, поперек и по глубине потока соответственно. Известная функция $h(x, y)$ и неизвестная функция $\xi(x, y)$ задают форму русла и возвышение свободной поверхности потока, соответственно. Параметры F_x и F_y определяют величину и направление постоянного ветрового воздействия.

Поскольку в определение числа Рейнольдса входит значение коэффициента турбулентной вязкости, вычисленное на поверхности потока, то значение функции ν там должно быть равно единице: $\nu|_{z=\xi} = 1$.

Из уравнений (1) компоненты скорости и давление могут быть явно выражены через функцию возвышения свободной поверхности $\xi(x, y)$

$$\begin{aligned} u &= ReGI (J_2 - \xi J_1) + F_x(h - z), & v &= ReG \frac{\partial \xi}{\partial y} (J_2 - \xi J_1) + F_y(h - z), \\ w &= ReG \left(I \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) + \frac{\partial}{\partial y} \left((J_4 - \xi J_3) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right) + (h - z) \left(F_x \frac{\partial h}{\partial x} + F_y \frac{\partial h}{\partial y} \right), & (3) \\ p &= G(z - \xi), \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$J_1 = \int_z^h \frac{d\tau}{\nu}, \quad J_2 = \int_z^h \frac{\tau d\tau}{\nu}, \quad J_3 = \int_z^h J_1(x, y, \tau) d\tau, \quad J_4 = \int_z^h J_2(x, y, \tau) d\tau. \quad (4)$$

Функция возвышения свободной поверхности $\xi(x, y, t)$ определяется из кинематического краевого условия (2) с учетом выражений (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} = & ReG \left(I \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \right. \\ & + (J_4 - \xi J_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \Big) + \\ & + (h - \xi) \left(F_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + F_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

где функционалы (4) и их производные вычислены на свободной границе (т. е. при $z = \xi$).

Для уравнения (5) требуется задать условие Коши (начальную форму свободной поверхности), а также граничные условия во входном створе $x = 0$ и на берегах потока. Например, если предполагать, что в начальный момент времени свободная поверхность плоская, то условие Коши имеет вид

$$\xi(x, y, 0) = 0. \quad (6)$$

2. Вычислительный эксперимент. Для вычисления функции $\xi(x, y, t)$ возвышения свободной поверхности уравнение (5) решалось при начальном условии (6) и граничных условиях

$$\xi(0, y, t) = 0, \quad \xi(x, \pm b, t) - h(x, \pm b) = 0, \quad (7)$$

где b — полуширина потока.

Численное решение начально-краевой задачи (5)–(7) осуществлялось средствами конечно-элементного программного комплекса COMSOL [2]. Использовались следующие значения параметров безразмерной задачи: $G = 9800$, $I = 0.008$, $b = 0.5$, $F_x = F_y = 0$. Выбранные значения параметров соответствуют водотоку глубиной 1 м и отношением глубины к ширине и к длине, как 1 : 10 : 100 при уклоне 1° и отсутствии внешних ветровых воздействий. Дно потока задавалось функцией вида $h(x, y) = (1 - a \sin \omega x) \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)$ при $a = 0.01$ и $\omega = 10$.

Скорость течения, вычисленная в соответствии с редуцированной трехмерной математической моделью мелкого протяженного потока, сравнивалась с результатами прямого численного моделирования, проведенного на основе полных трехмерных уравнений гидродинамики программного комплекса COMSOL Multiphysics.

При тестировании ламинарного течения вычисления проводились для числа Рейнольдса $Re = 125$, что соответствует характерной скоростью течения 1 м/с. При расчетах турбулентных потоков рассматривались числа Рейнольдса от $3 \cdot 10^5$ до $9 \cdot 10^5$.

Для моделирования в COMSOL была выбрана $k - \epsilon$ модель турбулентности. Скорость потока в редуцированной модели определялась формулами (3), (4) и численным решением задачи (5)–(7). Функциональный параметр турбулентной вязкости ν был выбран в виде квадратичной функции, коэффициенты которой находились из условия корреляции значений скорости для модельного и эталонного потоков.

На рис. 1 приведены эпюры изменения продольной скорости по глубине потока. Дно потока соответствует значению $z = 1$, а поверхность — $z = 0$ преобразованной безразмерной координаты. Сплошными линиями нанесены значения скорости, полученные по формулам (3), (4), а точечными и пунктирными — рассчитанные по полной модели программного комплекса COMSOL. Точечные линии соответствуют адаптивному режиму расчета с измельчением конечно-элементной сетки в придонном пограничном слое. Пунктирные линии получены на сетке без придонного измельчения. В последнем случае расчет происходит существенно быстрее.

На рис. 1а приведены данные расчета турбулентного потока, по которому была проведена калибровка модели. Для коэффициентов функционального параметра турбулентной вязкости вида $\nu(z) = c_1 + c_2 z + c_3 z^2$ были получены значения $c_1 = 1.45$, $c_2 = -10^{-3}$, $c_3 = 0.83$.

На рис. 1б и рис. 1в приведены данные вычислительных экспериментов для турбулентных потоков, значение максимальной продольной скорости которых отличается от аналогичного значения для эталонного потока в меньшую (рис. 1б) или большую (рис. 1в) сторону примерно на 50%.

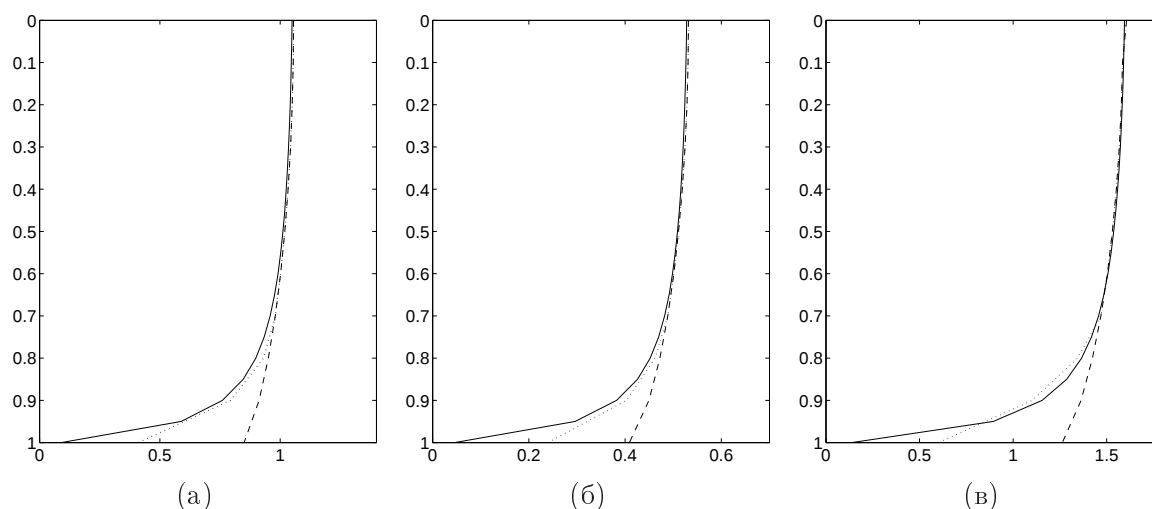


Рис. 1. Изменение продольной скорости по глубине потока: (а) — эталонный поток; (б) — медленное течение; (в) — быстрое течение.

В табл. 1 приведены данные о продольной скорости течения, полученные при различных значениях числа Рейнольдса на разных глубинах. В каждом случае колонка I соответствует расчетам по полным уравнениям гидродинамики, реализованным в пакете COMSOL, а колонка II — модельным уравнениям (3).

Заметим, что рис. 1а соответствуют данные колонок табл. 1 при $Re = 5952 \cdot 10^2$, рис. 1б — при $Re = 2976 \cdot 10^2$, и рис. 1в — при $Re = 8928 \cdot 10^2$.

z	Число Рейнольдса $\cdot 10^2$									
	$Re = 2976$		$Re = 4761$		$Re = 5952$		$Re = 7142$		$Re = 8928$	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
0	.532	.533	.863	.861	1.056	1.058	1.290	1.287	1.587	1.589
0.3	.525	.516	.842	.849	1.043	1.044	1.261	1.269	1.567	1.565
0.5	.511	.502	.813	.817	1.019	1.012	1.219	1.228	1.530	1.521
0.7	.489	.478	.775	.786	.979	.968	1.164	1.175	1.469	1.449
0.9	.422	.386	.603	.629	.793	.774	.970	.942	1.103	1.159

Таблица 1. Продольная скорость u на разных глубинах при различных Re .

Закключение. Представленные результаты численного моделирования позволяют утверждать, что предложенная в [1] редуцированная трехмерная модель мелкого протяженного руслового потока адекватно описывает его гидродинамику. Задача фактически расщепляется по пространственным переменным и сводится к решению двумерных уравнений для функции свободной поверхности (5)–(7), а зависимость скорости течения от вертикальной координаты явно выражается формулами (3) с учетом функционалов (4), определяемых по эмпирически выбранной зависимости $\nu(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Надолин К. А. Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Матем. моделирование. 2009. Т. 21. № 2. С. 14–28.
- [2] Жилиев И. В., Надолин К. А. Численное моделирование гидродинамики мелкого протяженного руслового потока // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 6 (131). С. 10–14.

Nadolin K. A., Zhilyaev I. V. *Numerical study of the reduced model for the turbulent bed-stream flow.* This study proceeds to a series of publications that deal with different problems of the mathematical modelling of hydrodynamics and mass transfer in the weakly meandering shallow and lengthy bed-stream flows on the base of reduced 3D equations are proposed in [1]. The results of numerical experiments with the reduced 3D model of the weakly meandering shallow and lengthy bed-stream flow is presented. This mathematical model is one of several that proposed in [1]. For it verification a number of calculations with finite-element package COMSOL was done. The values of longitudinal velocity were calculated in the framework of reduced model formulas through numerical solution of the initial-boundary value problem for the free surface displacement function. These values were compared with data of laminar and turbulent CFD COMSOL calculations. We concentrated on taking into account the flow turbulence phenomenon that is one of the key problem for accurate modelling the natural waterways The obtaining results demonstrate that the hydrodynamics of the shallow and lengthy bed-stream flow is described adequately by proposed reduced model.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРО- И ТЕРМОУПРУГИХ КОМПОЗИТОВ МЕТОДАМИ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Наседкин А. В., Наседкина А. А., Ремизов В. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Обсуждаются подходы к определению эффективных модулей пороупругих и термоупругих композитных материалов со связностью физико-механических полей, основанные на методе эффективных модулей механики композитов, моделировании представительных объемов с учетом микроструктуры и на конечно-элементных технологиях решений задач для представительных объемов.

1. Модели пороупругих и термоупругих материалов. Пусть Ω — представительный объем многофазного композитного неоднородного тела, $\Gamma = \partial\Omega$ — его граница, $\mathbf{n}$ — вектор внешней единичной нормали к Γ , $\mathbf{x}$ — вектор пространственных координат. Рассмотрим в объеме Ω неоднородный пороупругий материал. Тогда в рамках статической теории пороупругости Био имеем систему дифференциальных уравнений вида

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}p, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)/2, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0, \quad \mathbf{v}_f = -\tilde{\mathbf{k}}_f \cdot \nabla p, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\mathbf{c}$ — тензор четвертого ранга упругих жесткостей, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций, $\mathbf{b}$ — тензор Био, p — поровое давление, $\mathbf{v}_f$ — вектор скорости фильтрации, $\tilde{\mathbf{k}}_f = \mathbf{k}_f/\mu_f$, $\mathbf{k}_f$ — тензор коэффициентов проницаемости, μ_f — вязкость жидкости.

Как известно, имеется поротермоупругая аналогия, согласно которой задачи пороупругости (1), (2) можно рассматривать как задачи термоупругости, и наоборот. Действительно, термоупругая статическая задача определяется уравнениями

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\theta, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)/2, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla \theta, \quad (4)$$

где $\mathbf{q}$ — вектор потока тепла, θ — приращение температуры от естественного состояния, $\boldsymbol{\beta}$ — тензор коэффициентов температурных напряжений, $\mathbf{k}$ — тензор коэффициентов теплопроводности.

Очевидно, что системы (1), (2) и (3), (4) совпадают при заменах $p \leftrightarrow \theta$, $\mathbf{b} \leftrightarrow \boldsymbol{\beta}$, $\tilde{\mathbf{k}}_f \leftrightarrow \mathbf{k}$. Таким образом, пороупругие и термоупругие композиты в рамках моделей (1), (2) и (3), (4) можно рассматривать как идентичные материалы, особенно в безразмерных постановках.

2. Методология моделирования свойств пороупругих и термоупругих композитов. Приняв соответствующие граничные условия на $\Gamma = \partial\Omega$, можно найти решения задач (1), (2) или (3), (4) для неоднородной среды в представительном объеме Ω . Тогда сравнение осредненных по Ω характеристик решения (напряжений, скоростей фильтрации и др.) с аналогичными величинами для однородной среды (среды сравнения) позволит определить эффективные модули композитного материала. Заметим, что при этом для анизотропных сред для определения полного набора эффективных модулей необходимо решать несколько задач рассматриваемых типов для различных граничных условий. Здесь основными проблемами являются выбор представительного объема и граничных задач для

неоднородной среды и среды сравнения, а также технологии решения задач для неоднородных сред. Следуя разработанным ранее методам моделирования пьезоактивных материалов [1, 2], рассмотрим аналогичные подходы для задач поро- или термоупругости. В силу отмеченной аналогии, будем рассматривать пороупругие композиты с моделью (1), (2). Заметим, что эти модели отличаются по структуре тем, что в них кроме градиентов полей $\mathbf{u}$ и p присутствует и сама функция p . Кроме того, задача фильтрации (2) в стационарном случае не связана с механическими полями. Данные особенности будут вызывать и некоторые отличия в методологии определения эффективных модулей пороупругих композитов.

Для пороупругой однородной среды сравнения примем, что выполняются те же уравнения (1), (2), но с постоянными модулями $\mathbf{c}^{eff}$, $\mathbf{b}^{eff}$, $\tilde{\mathbf{k}}_f^{eff}$, которые и требуется определить.

Предположим, что на границе Γ выполняются следующие краевые условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad p = p_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0^*$, p_0 — некоторые не зависящие от $\mathbf{x}$ величины. Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $p = p_0$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{c}^{eff} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{b}^{eff} p_0$ будут давать решение задачи (1), (2), (5) в объеме Ω для однородной среды сравнения. Заметим, что при $p = p_0$ уравнения (2) удовлетворяются с $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{f0} = 0$, но данная чисто фильтрационная задача здесь фактически не используется.

Решим теперь ту же задачу (1), (2), (5) для неоднородной среды, и примем, что для нее и среды сравнения равны осредненные напряжения $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle$, где здесь и далее в угловых скобках обозначается средняя по объему величина $\langle \dots \rangle = 1/\Omega \int_{\Omega} (\dots) d\Omega$. Таким образом, получаем, что для эффективных модулей композита выполняется уравнение $\mathbf{c}^{eff} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{b}^{eff} p_0 = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, где $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и p_0 — заданные величины из граничных условий (5). Тогда, даже в предположении анизотропии общего вида для среды сравнения, можно вычислить все модули жесткости c_{ijlm}^{eff} и коэффициенты Био b_{ij}^{eff} . Действительно, полагая в (5) $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0(\mathbf{e}_l \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l)/2$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, $p_0 = 0$ для фиксированных индексов l и m ($\mathbf{e}_l$, $\mathbf{e}_m$ — орты декартовой системы координат), получаем расчетные формулы для упругих модулей c_{ijlm}^{eff} : $c_{ijlm}^{eff} = \langle \sigma_{ij} \rangle / \varepsilon_0$. Если же в (5) положить $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0$, $p_0 \neq 0$, то из такой краевой задачи (1), (2), (5) можно найти эффективные модули Био: $b_{ij}^{eff} = \langle \sigma_{ij} \rangle / p_0$. Важным обоснованием выбора краевого условия $\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma$ является то, что именно при нем между полями напряжений и деформаций неоднородной среды и среды сравнения имеют место также равенства $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle$, $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle$. Таким образом, при таком краевом условии для двух рассматриваемых сред оказываются одинаковыми и их механические потенциальные энергии. Отметим, что доказательство этого факта полностью повторяет известное из классической теории упругости [3].

Для определения эффективных коэффициентов тензора $\tilde{\mathbf{k}}_f$ достаточно рассмотреть уравнения фильтрации (2). Для формулировки соответствующей краевой задачи примем граничные условия вида

$$p = \mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (6)$$

где $\mathbf{G}_0$ — некоторый не зависящий от $\mathbf{x}$ постоянный вектор. Очевидно, что $p = \mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0$, $\mathbf{G} = \nabla p$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0$, $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{f0} = -\tilde{\mathbf{k}}_f^{eff} \cdot \mathbf{G}_0$ будут давать решение задачи

(2), (6) в объеме Ω для однородной среды сравнения. Тогда, решив задачу (2), (6) для неоднородной среды, можно принять, что для нее и среды сравнения равны осредненные скорости фильтрации $\langle \mathbf{v}_f \rangle = \langle \mathbf{v}_{f0} \rangle$. В результате получаем уравнение для эффективных модулей композита $\tilde{\mathbf{k}}_f^{eff} \cdot \mathbf{G}_0 = -\langle \mathbf{v}_f \rangle$, где $\mathbf{G}_0$ — заданный из граничных условий (6) вектор. Тогда для среды сравнения с анизотропией общего вида несложно получить расчетные формулы для фильтрационных модулей $\tilde{k}_{fil}^{eff}$. Именно, полагая в (6) $\mathbf{G}_0 = G_0 \mathbf{e}_l$, $G_0 = \text{const}$ для фиксированного индекса l , имеем формулы для модулей $\tilde{k}_{fil}^{eff}: \tilde{k}_{fil}^{eff} = -\langle v_{fi} \rangle / G_0$. Обоснованием выбора краевого условия $p = \mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0$ в (6) является то обстоятельство, что тогда между полями скоростей фильтрации и градиента порового давления неоднородной среды и среды сравнения имеют место равенства $\langle \mathbf{G} \rangle = \langle \mathbf{G}_0 \rangle$, $\langle \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}_f \rangle = \langle \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{v}_{f0} \rangle$. Таким образом, при краевом условии (6) для двух сред оказываются одинаковыми их потенциальные энергии фильтрационных процессов.

Описанные выше подходы связаны с осреднением модулей $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\tilde{\mathbf{k}}_f$. Поэтому по аналогии с классической механикой композитов назовем такой способ аналогом осреднения по Фойхту (Voight), и будем помечать находимые при этом эффективные модули верхним индексом «V»: $\mathbf{c}^{eff} = \mathbf{c}^{Veff}$, $\mathbf{b}^{eff} = \mathbf{b}^{Veff}$, $\tilde{\mathbf{k}}_f^{eff} = \tilde{\mathbf{k}}_f^{Veff}$.

Второй способ определения эффективных модулей связан с другими граничными условиями при формулировке статических задач для уравнений пороупругости (1), (2). При этом оказывается удобным изменить форму определяющих соотношений

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha} p, \quad \mathbf{G} = -\tilde{\mathbf{r}}_f \cdot \mathbf{v}_f, \quad \mathbf{G} = \nabla p, \quad (7)$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{c}^{-1}$ — тензор упругих податливостей, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{b}$, $\tilde{\mathbf{r}}_f = \tilde{\mathbf{k}}_f^{-1}$ — тензор приведенных коэффициентов непроницаемости.

Предположим, что на границе Γ выполняются следующие краевые условия

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0, \quad p = p_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0^*$, p_0 — некоторые не зависящие от $\mathbf{x}$ величины. Тогда для однородной среды сравнения поля $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{s}^{eff} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\alpha}^{eff} p_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $p = p_0$ в Ω удовлетворяют уравнению равновесия из (1) и определяющему соотношению из (7) с $\mathbf{s} = \mathbf{s}^{eff}$, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{eff}$. Уравнение фильтрации (2) при этом удовлетворяется тождественно с $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{f0}$.

Для решения задачи (1), (2), (8) для неоднородной среды будет справедливо соотношение $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle$ [6], и для определения эффективных модулей логично потребовать выполнение равенства $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{s}^{eff} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\alpha}^{eff} p_0$. Это условие позволяет определить податливости s_{ijlm}^{eff} и коэффициенты связности α_{ij}^{eff} для анизотропной среды сравнения. Так, полагая в (12) $\boldsymbol{\sigma}_0 = \sigma_0 (\mathbf{e}_l \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l) / 2$, $\sigma_0 = \text{const}$, $p_0 = 0$ для фиксированных индексов l и m , получаем расчетные формулы для эффективных упругих податливостей: $s_{ijlm}^{eff} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle / \sigma_0$. А решения задач (1), (2), (8) с $\boldsymbol{\sigma}_0 = 0$, $p \neq 0$ позволяют определить эффективные коэффициенты пороупругой связности $\alpha_{ij}^{eff} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle / \sigma_0$. При этом для решений задач (1), (2), (8) для неоднородной среды и однородного материала сравнения будут одинаковыми и механические энергии $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle$, что дополнительно обосновывает выбор граничного условия (8).

Для определения эффективных приведенных коэффициентов непроницаемости $\tilde{r}_{fil}^{eff}$ примем для уравнения фильтрации (2) граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{f0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (9)$$

где $\mathbf{v}_{f0}$ — некоторый не зависящий от $\mathbf{x}$ постоянный вектор. Тогда $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{f0}$, $p = \mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0$, $\mathbf{G} = \nabla p$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0$, $\mathbf{G}_0 = -\tilde{\mathbf{r}}_f^{eff} \cdot \mathbf{G}_0$ дают решение задачи (2), (9) для однородной среды сравнения, причем для любого решения задачи (2), (9) с неоднородными коэффициентами $\tilde{\mathbf{k}}_f = \tilde{\mathbf{r}}_f^{-1}$ справедливо равенство $\langle \mathbf{v}_f \rangle = \langle \mathbf{v}_{f0} \rangle$. Поэтому для определения эффективных коэффициентов $\tilde{\mathbf{r}}_{fil}^{eff}$ можно принять: $\langle \mathbf{G} \rangle = \langle \mathbf{G}_0 \rangle$, где $\mathbf{G}$ — градиент поля порового давления, вычисленный для неоднородной среды. Это условие приводит к соотношению $\tilde{\mathbf{r}}_f^{eff} \cdot \mathbf{v}_{f0} = -\langle \mathbf{G} \rangle$, из которого, полагая в (9) $\mathbf{v}_{f0} = v_{f0} \mathbf{e}_l$, $v_{f0} = \text{const}$, получаем расчетные формулы для эффективных приведенных коэффициентов непроницаемостей: $\tilde{\mathbf{r}}_{fil}^{eff} = -\langle G_i \rangle / v_{f0}$. Как и для первого варианта, обоснованием выбора краевого условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{f0}$ в (9) является равенство потенциальных энергий для фильтрационных процессов в неоднородной среде и в среде сравнения: $\langle \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}_f \rangle = \langle \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{v}_{f0} \rangle$.

Как видно, второй подход связан с осреднением модулей $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\tilde{\mathbf{r}}_f$. Поэтому по аналогии с классической механикой композитов такой способ будем называть аналогом осреднения по Рейссу (Reuss) и помечать находимые при этом эффективные модули верхним индексом «R»: $\mathbf{s}^{eff} = \mathbf{s}^{Reff}$, $\boldsymbol{\alpha}^{eff} = \boldsymbol{\alpha}^{Reff}$, $\tilde{\mathbf{r}}^{eff} = \tilde{\mathbf{r}}^{Reff}$.

Оба подхода (Фойхта и Рейсса) позволяют определить полные наборы эффективных модулей для пороупругих сред произвольного класса анизотропии: $\mathbf{c}^{Veff}$, $\mathbf{b}^{Veff}$, $\tilde{\mathbf{k}}_f^{Veff}$, и затем, при необходимости, $\mathbf{s}^{Veff} = (\mathbf{c}^{Veff})^{-1}$, $\boldsymbol{\alpha}^{Veff} = \mathbf{s}^{Veff} \cdot \mathbf{b}^{Veff}$, $\tilde{\mathbf{r}}_f^{Veff} = (\tilde{\mathbf{k}}_f^{Veff})^{-1}$; $\mathbf{s}^{Reff}$, $\boldsymbol{\alpha}^{Reff}$, $\tilde{\mathbf{r}}_f^{Reff}$, и затем, при необходимости, $\mathbf{c}^{Reff} = (\mathbf{s}^{Reff})^{-1}$, $\mathbf{b}^{Reff} = \mathbf{c}^{Reff} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{Reff}$, $\tilde{\mathbf{k}}_f^{Reff} = (\tilde{\mathbf{r}}_f^{Reff})^{-1}$. Полученные наборы будут, вообще говоря, отличаться, и в принципе, можно ограничиться только одним из представленных подходов. Польза от использования двух подходов может состоять в том, что при этом будет получена вилка между значениями эффективных модулей, позволяющая уточнить их величины аналогично классической механике композитов теории упругости.

3. Моделирование представительных объемов бинарных композитов.

Приведенные формулы расчета эффективных модулей предполагают решение соответствующих краевых задач пороупругости или термоупругости в областях Ω , которые должны являться представительными объемами композитных материалов. В качестве таких объемов в идеале следует выбрать области, достаточно большие по сравнению с размерами неоднородностей, но малые по сравнению с расстояниями, на которых существенно меняются медленные переменные.

Рассмотрим бинарный композит, первой фазой которого является связный структурный каркас, а второй фазой — изолированные или связанные друг с другом включения или поры достаточно больших размеров на микроуровне. Первый случай по классификации Р. Э. Ньюмена отвечает связности 3-0, а второй — связности 3-3 (закрытые и открытые включения или поры, соответственно). При небольшом проценте вхождения второй фазы достаточно простой, но адекватной наблюдаемой на практике микроструктуре такого композитного материала представляется модель кубической решетки, состоящей из одинаковых ячеек — кубиков, часть из которых случайным образом объявляется материалом второй фазы. Отметим, что такая модель для пористого композита при большом числе пор может потерять связность каркаса, а также не поддерживает структуру связности композита (3-0 или 3-3). Для построения связанных структур в кубиче-

ской решетке можно использовать алгоритмы теории перколяции, позволяющие получать протекающие кластеры. При малой доле второй фазы можно строить кластеры из включений или пор, а при большой пористости — кластеры из материала структурного каркаса. Ряд таких методов был программно реализован и проанализирован в [4] применительно к пористым пьезокompозитным материалам. Один из наиболее подходящих методов моделирования 3-0 и 3-3 бинарных композитов — метод ограниченной диффузией агрегации Виттена–Сандера — может также с успехом использоваться при расчетах пороупругих композитов.

4. Конечно-элементное решение задач для представительных объемов. Для решения задач пороупругости (1), (2) с соответствующими граничными условиями для неоднородного двухфазного композитного материала в представительном объеме Ω можно перейти к их слабым постановкам и использовать классическую технику конечно-элементных аппроксимаций. При этом задачи определения модулей проницаемостей (2), (6) или (9) оказываются несвязанными, т. е. для них достаточно решать только конечно-элементные уравнения задач фильтрации.

Для реализации описанного подхода были разработаны компьютерные конечно-элементные модели представительных объемов композитных сред различного типа связности, в том числе структуры высокопористых материалов, учитывающие неоднородности свойств для отдельных конечных элементов. Полученные задачи для поро- и термоупругих композитных сред решались численно с использованием специально разработанных программ для конечно-элементного пакета ANSYS. По результатам расчетов проанализировано влияние различных структур представительных объемов и учета локальных неоднородностей на эффективные модули.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Nasedkin A. V., Shevtsova M. S.* Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity / *Ferroelectrics and Superconductors: Properties and Applications.*, Ed. I. A. Parinov. Nova Science Publishers: N.-Y., 2011. Ch.7. Pp. 231–254.
- [2] *Наседкин А. В.* Метод эффективных модулей для определения характеристик магнитоэлектрических композитов // Совр. пробл. мех. спл. среды. Тр. XV межд. конф., Ростов н/Д., 4–7 дек. 2011. Т. 1. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2011. С. 169–173.
- [3] *Победра Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
- [4] *Domashenkina T. V., Nasedkin A. V., Remizov V. V., Shevtsova M. S.* Finite element modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity and applications for analysis of ultrasonic transducers // *Proc. 7th GRACM Int. Congr. Comput. Mechanics*, Athens, Greece, June 30 – July 2, 2011. CD. Paper 141.

Nasedkin A. V., Nasedkina A. A., Remizov V. V. *Simulation of poro- and thermo-elastic composites by the methods of effective modules and finite elements.* The work discusses the approaches to the determination the effective modules of poro- and thermoelastic composite materials with the coupling of physic-mechanical fields based on the effective moduli method for the mechanics of composites, modeling of the representative volumes with account for microstructure and the finite element technologies.

РАЗГОН ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Норкин М. В., Яковенко А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается совместное движение идеальной, несжимаемой, неоднородной жидкости и полностью погруженного в нее эллиптического цилиндра на малых временах. Предполагается, что цилиндр движется из состояния покоя в горизонтальном направлении с постоянным ускорением. Исследуется влияние начального распределения плотности жидкости и числа Фруда на форму свободной границы жидкости.

Начальный этап движения тела в жидкости в большинстве случаев сопровождается сильной деформацией ее свободной границы. Как правило форма свободной границы заранее неизвестна и подлежит определению в ходе решения задачи. Большой интерес представляют задачи, в которых необходимо учитывать стратификацию жидкости по плотности, считая ее неоднородной. В работах [1–2] для решения задачи о начальном этапе движения кругового цилиндра в однородной жидкости был применен асимптотический анализ на малых временах. В настоящей работе этот подход обобщается на случай движения эллиптического цилиндра в неоднородной жидкости.

1. Постановка задачи. Рассматривается эллиптический цилиндр, полностью погруженный в идеальную, несжимаемую, неоднородную жидкость, наполняющую ограниченный бассейн прямоугольной формы. Предполагается, что цилиндр начинает свое движение из состояния покоя и движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - t \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + (\bar{v}, \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{Fr^2} \bar{k}, \quad R \in \Omega(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - t \frac{\partial \rho}{\partial x} + (\bar{v}, \nabla) \rho = 0, \quad \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (2)$$

$$p = 0, \quad v_y = \xi_x[v_x - t] + \xi_t, \quad R \in S_2(t), \quad (3)$$

$$\bar{v}_n = t n_x, \quad R \in S_1, \quad (4)$$

$$v_x = (\bar{v}, \bar{i}) = 0, \quad x = H_R - 0.5t^2; \quad x = -H_L - 0.5t^2, \quad (5)$$

$$v_y = (\bar{v}, \bar{k}) = 0, \quad y = -H_b, \quad (6)$$

$$\bar{v}(x, y, 0) = 0, \quad \xi(x, 0) = 0, \quad \rho(x, y, 0) = \rho_0(y), \quad (7)$$

$$Fr = \sqrt{\frac{\omega_0}{g}}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}. \quad (8)$$

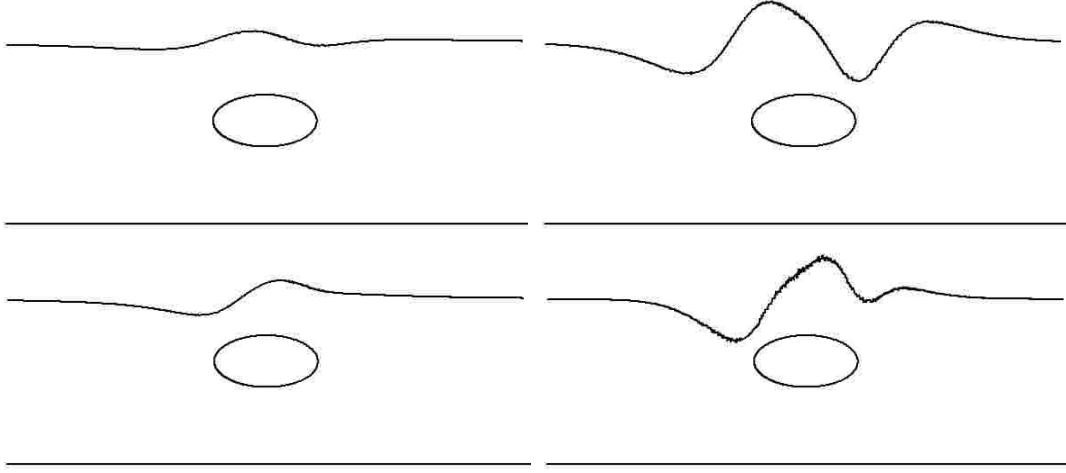


Рис. 1. Влияние показателя стратификации на форму свободной границы жидкости: $Fr = 0.4$; $k = 0; 3$ (верхние фигуры), $Fr = 1$; $k = 0; 5$ (нижние фигуры).

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам:

$$t' = \sqrt{\frac{a}{w_0}} \cdot t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad p' - p_a = \rho_d w_0 a p, \quad \bar{v}' = \sqrt{w_0 a} \cdot \bar{v}, \quad \rho' = \rho_d \rho, \quad (9)$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y соотношениями: $X = x + h(t)$, $Y = y$, $h(t) = 0.5t^2$.

Здесь $\bar{v} = \bar{v}(x, y, t)$, $p = p(x, y, t)$, $\rho = \rho(x, y, t)$ — скорость движения жидкости, давление и плотность, записанные относительно подвижной системы координат; $\Omega(t)$ — область, занятая жидкостью; S_1 — граница плавающего тела; $S_2(t)$ — свободная поверхность жидкости; ρ_d — характерное значение плотности жидкости; p_a — атмосферное давление; w_0 — ускорение цилиндра; Fr — число Фруда; g — ускорение свободного падения; a и b — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса; R — радиус вектор с координатами (x, y) .

Функция $\xi = \xi(x, t)$ определяет возмущение свободной границы жидкости, уравнение которой относительно подвижной системы координат имеет вид:

$$y = H + \xi(x, t), \quad (10)$$

где H — глубина погружения цилиндра.

На свободной поверхности необходимо удовлетворить динамическому и кинематическому условиям (формулы (3)).

В состоянии покоя ($\bar{v} = \bar{0}$, $\xi = 0$) плотность жидкости зависит только от координаты y ($\rho_0 = \rho_0(y)$). Далее рассматривается экспоненциальное начальное распределение плотности

$$\rho_0(y) = e^{k(H-y)}, \quad (11)$$

где k — показатель стратификации.

2. Асимптотическое решение задачи на малых временах. Решение задачи (1)–(8) на малых временах будем искать в виде следующих разложений ($t \rightarrow 0$):

$$\bar{v}(x, y, t) = t\bar{v}_0(x, y) + t^2\bar{v}_1(x, y) + t^3\bar{v}_2(x, y) + o(t^3), \quad (12)$$

$$p(x, y, t) = p_0(x, y) + tp_1(x, y) + t^2p_2(x, y) + o(t^2), \quad (13)$$

$$\rho(x, y, t) = \rho_0(y) + t\rho_1(x, y) + t^2\rho_2(x, y) + o(t^2), \quad (14)$$

$$\xi(x, t) = t^2\xi_0(x) + t^3\xi_1(x) + t^4\xi_2(x) + o(t^4). \quad (15)$$

Подставляя разложения (12)–(15) в уравнения, граничные и начальные условия задачи (1)–(8), перенося граничные условия с возмущенных участков границы области $\Omega(t)$ на первоначально невозмущенные уровни с помощью соответствующих разложений в ряды на малых временах, получим для определения функций $p_0(x, y)$, $p_1(x, y)$ и $p_2(x, y)$ смешанные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в первоначально невозмущенной области (прямоугольнике с выброшенным эллипсом). В главном приближении придем к следующей задаче:

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla q \right) = 0, \quad (16)$$

$$q = 0, \quad y = H, \quad (17)$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial n} = n_x, \quad R \in S_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad x = H_R, -H_L; \quad \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b, \quad (19)$$

$$p_0 = -Fr^{-2} \int_H^y \rho_0(y) dy + q. \quad (20)$$

На основании решения задачи (16)–(19) находятся компоненты вектора $\bar{v}_0(x, y)$ и функция $\xi_0(x)$:

$$v_{0x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad v_{0y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial y}, \quad v_{0y}(x, H) = 2\xi_0(x). \quad (21)$$

Функция $p_1(x, y)$ оказывается равной нулю, так как она определяется на основе решения смешанной краевой задачи для однородного дифференциального уравнения вида (16) с нулевыми граничными условиями. Вследствие этого функция $\xi_1(x)$ обращается в ноль. Отметим, что функция $\rho_1(x, y)$ и компоненты вектора $\bar{v}_1(x, y)$ также будут равны нулю.

Функция $p_2 = p_2(x, y)$ находится в результате решения следующей задачи:

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p_2 \right) = \operatorname{div} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0^2} \nabla p_0 \right) - \operatorname{div}(\bar{v}_0, \nabla) \bar{v}_0, \quad (22)$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0^2} \nabla p_0 \right) = \frac{1}{\rho_0^2} \left[\frac{\partial \rho_2}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial y} - \frac{\rho_2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial q}{\partial y} - Fr^{-2} \rho_0 \right) \right], \quad (23)$$

$$2\rho_2 = (1 - v_{0x}) \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - v_{0y} \frac{\partial \rho_0}{\partial y}, \quad (24)$$

$$\operatorname{div}(\bar{v}_0, \nabla) \bar{v}_0 = 2 \frac{\partial v_{0y}}{\partial x} \frac{\partial v_{0x}}{\partial y} - 2 \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \frac{\partial v_{0y}}{\partial y}, \quad (25)$$

$$p_2 = - \left[\frac{\partial q}{\partial y} - Fr^{-2} \rho_0 \right] \xi_0(x), \quad y = H, \quad (26)$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_2}{\partial n} = \frac{\rho_2}{\rho_0} [Fr^{-2} n_y + n_x] - \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} - (\bar{v}_0, \nabla) \bar{v}_0, \bar{n} \right), \quad R \in S_1, \quad (27)$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0.5 \frac{v_{0x}}{\partial x} + (\bar{v}_0, \nabla) v_{0x}, \quad x = H_R, \quad x = -H_L, \quad (28)$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_2}{\partial y} = -\frac{\partial v_{0y}}{\partial x} + (\bar{v}_0, \nabla) v_{0y}, \quad y = -H_b. \quad (29)$$

После решения задачи (22)–(29) функция $\xi_2(x)$ определяется из равенства:

$$\frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \xi_0(x) + v_{2y} = \xi'_0(x) [v_{0x} - 1] + 4\xi_2(x), \quad y = H, \quad (30)$$

$$3v_{2y} = \frac{\partial v_{0y}}{\partial x} - (\bar{v}_0, \nabla) v_{0y} - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial p_2}{\partial y} - \frac{\rho_2}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} \right], \quad y = H. \quad (31)$$

Обратим внимание на то, что главное приближение для возмущения свободной границы жидкости не зависит от числа Фруда. Это число учитывается только во втором приближении.

Главное приближение (16)–(19) будет справедливо и для плавающего на поверхности жидкости цилиндра. Однако на его основе не удастся определить возмущение свободной границы жидкости, так как вертикальная компонента вектора скорости имеет в точках пересечения цилиндра и жидкости особенности.

3. Численная реализация. Линейные смешанные краевые задачи (16)–(19), (22)–(29) решаются численно методом конечных элементов с использованием пакета FreeFem++ [3]. На основании их решения определяются коэффициенты разложения (15) $\xi_0(x)$ и $\xi_2(x)$ (функция $\xi_1(x) = 0$). Основное внимание при исследовании задачи уделяется изучению влияния показателя стратификации k и числа Фруда на форму свободной границы жидкости. Численные расчеты проводились при следующих фиксированных значениях параметров задачи: $t = 1.5$, $\varepsilon = 0.5$, $H_b = 2$, $H_R = 10$, $H_L = 10$. На рисунке 1 (верхние фигуры) показана конфигурация свободной границы жидкости при $Fr = 0.4$, $H = 1.5$. Фигура слева соответствует случаю однородной жидкости ($k = 0$), а справа неоднородной с показателем стратификации $k = 3$. Нижние фигуры отвечают случаю $Fr = 1$, $H = 1.2$, $k = 0$ и $k = 5$.

На основании проведенных исследований можно сделать вывод о том, что разгон тела в экспоненциально-стратифицированной жидкости приводит к значительным деформациям ее свободной границы. Возмущение свободной границы усиливается при увеличении показателя стратификации k . Отметим также, что фигуры, соответствующие случаям $Fr = 0.4$ и $Fr = 1$ качественно различны. В рассмотренных примерах цилиндр находился вблизи свободной границы жидкости. Интересно отметить, что при более глубоком погружении эллиптического цилиндра увеличение показателя стратификации может привести к образованию на поверхности жидкости большой впадины.

Построенное решение справедливо только для небольших чисел Фруда, при которых не происходит отрыва частиц жидкости от поверхности цилиндра. При больших числах Фруда наблюдается отрыв жидкости от тела, в результате которого вблизи цилиндра образуется каверна и появляется новая внутренняя свободная граница. Отметим, что вопросы, связанные с образованием каверн, а также брызговых струй для плавающих на поверхности жидкости тел, являются наиболее интересными и мало изученными. Задача об отрывном разгоне кругового цилиндра в однородной жидкости исследована в статье [4].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Tyvand P. A., Miloh T. Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // J. Fluid Mech. 1995. 286. Pp. 67–101.
- [2] Tyvand P. A., Landrini M. Free-surface flow of a fluid body with an inner circular cylinder in impulsive motion // J. Eng. Math. 2001. 40. Pp. 109–140.
- [3] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.
- [4] Норкин М. В. Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82.

Norkin M. V., Yakovenko A. A. *Dispersal of the elliptic cylinder in non-uniform liquid with a free surface.* Joint movement of ideal incompressible non-uniform liquid and the elliptic cylinder completely shipped in it on small times is considered. It is supposed that the cylinder moves from a rest condition in a horizontal direction with constant acceleration. Influence of initial distribution of density of liquid and Frud's number on a form of free border of liquid is investigated.

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ВИХРЯ ДЛЯ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В РАВНОКАНАЛЬНЫХ МНОГОУГЛОВЫХ ШТАМПАХ

Периг А. В.^{*}, Голоденко Н. Н.^{**}

^{*}Донбасская государственная машиностроительная академия, Краматорск

^{**}Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка

В рамках численного математического моделирования процессов равноканального многоугольного прессования аморфных полимеров реализовано численное конечно-разностное интегрирование уравнения переноса вихря для вязких ньютоновских течений несжимаемых сплошных сред через равноканальные многоугольные штампы.

1. Введение. За последние 20 лет из классических схем деформирования, осуществляемых в рамках реализации технологических процессов кузнечно-штамповочного производства, выделились новые процессы интенсивного пластического деформирования (ИПД) к которым относится равноканальное многоугольное прессование (РКМУП) [1, 2]. В настоящее время технология РКМУП применяется для получения субмикроструктурных (СМК) и нанокристаллических (НК) структур в объемах заготовок из металлов, сплавов, порошковых полуфабрикатов и металлических композитов [1, 2]. При деформировании аморфно-кристаллических и аморфных полимеров технология РКМУП обеспечивает существенные структурные изменения исходного материала обрабатываемой заготовки, связанные с разрушением сферолитов и их трансформаций в пакеты кристаллических ламелей [1, 3]. Как показывают современные экспериментально-теоретические исследования Бейгельзимера Я. Е. и др. [1], Белошенко В. А. и др. [1], Спусканюка В. З. и др., а также Утяшева Ф. З. и др. протекание процессов РКМУП характеризуется отсутствием единой кривой течения деформируемого материала, т. е. динамика процессов РКМУП существенно чувствительна к реологии деформируемых материалов, что и обуславливает актуальность настоящего исследования, посвященного гидродинамическому моделированию процессов РКМУП в многоугольных штампах обобщенной сегаловской геометрии.

2. Математическая постановка задачи. В рамках построения математической модели задачи обратимся к уравнению переноса вихря в безразмерных величинах, запись которого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = (-\mathbf{Re}) \left(\frac{\partial (u \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial (v \zeta)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

где безразмерная функция вихря определяется как

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

Отметим, что в соотношения (1), (2) входят следующие величины: $\mathbf{Re}$ — число Рейнольдса, где $\mathbf{Re} = \bar{U}_0 \bar{a} \bar{\rho} / \bar{\eta}_{vis}$, а все размерные величины дополнительно выделяются верхним подчёркиванием, причем $\bar{U}_0$ — характерная скорость пресования, [м/с]; $\bar{a}$ — ширина каждого из каналов штампа, [м]; $\bar{\rho}$ — плотность вязкой физической модели полимерного материала, [кг/м³]; $\bar{\eta}_{vis}$ — динамическая вязкость, [Па·с], где $\bar{\eta}_{vis} = \bar{\nu}_{vis} \bar{\rho}$, причем $\bar{\nu}_{vis}$ — кинематическая вязкость, [м²/с²]; ζ — безразмерная функция вихря; x, y — безразмерные декартовы координаты, причем $x = \bar{x} / \bar{a}$, $y = \bar{y} / \bar{a}$ или $x = \mathbf{Re} u t$, $y = \mathbf{Re} v t$; u — безразмерная x -проекция скорости; v — безразмерная y -проекция скорости; $\bar{x}, \bar{y}$ — декартовы координаты, [м]; t — безразмерное время, причем $t = \bar{t} \bar{\eta}_{vis} / (\bar{\rho} \bar{a}^2)$ или $t = \bar{t} \bar{\nu}_{vis} / (\bar{a}^2)$, где $\bar{t}$ — время, [с].

Для численного интегрирования задача (1)–(2) записывается в конечных разностях по методу перемежающихся направлений. В данной работе дополнительно рассмотрим установившийся режим вязкого течения физической модели полимерного материала через многоугольный штамп $ABCD - EFGH$ (рис. 1) с входной подвижной стенкой EF . В таком случае начальные условия могут приниматься в виде грубого приближения к стационарному решению: $u_{i,j}^0 = 0$; $v_{i,j}^0 = 0$; $\zeta_{i,j}^0 = 0$; $\psi_{i,j}^0 = 0$, где ψ — безразмерная функция тока, причем $\psi = \bar{\psi} / (\bar{U}_0 \bar{a})$, а $\bar{\psi}$ — размерная функция тока, [м²/с]. Граничные условия для стенок многоугольного штампа запишем как условия для полного прилипания вязкого материала (рис. 1).

Для верхней правой границы ($ABCD$) вязкого потока имеем $\psi_{i,j} = 0$.

Для нижней левой границы ($EFGH$) вязкого потока записываем $\psi_{i,j} = 1$.

Для вертикальных участков (AB) и (CD) $\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j}) / \eta^2$, где η — безразмерный шаг координаты вдоль оси y .

Для переходного участка (BC) имеем $\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) / \xi^2$, где ξ — безразмерный шаг координаты вдоль оси x .

Учет наличия подвижной вертикальной левой входной стенки (EF) многоугольного штампа, движущейся параллельно направлению экструзии с безразмерной скоростью U_b , обеспечивается следующим граничным условием для безразмерной функции вихря ζ , записанной для узлов, относящихся к подвижной входной стенке (EF) на (рис. 1): $\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j} + U_b \eta) / \eta^2$.

Для неподвижной стенки (GH) записываем $\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}) / \eta^2$.

Для переходного участка (FG) имеем $\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j}) / \xi^2$.

Для угловых точек, лежащих в вершинах «вогнутых» углов C и F , $\zeta_{i,j} = 0$.

Для угловой точки B в разностном уравнении, записанном для узла $(i, j - 1)$, имеем $\zeta_{i,j} = 2\psi_{i,j-1} / \eta^2$.

Для угловой точки B в разностном уравнении, записанном для узла $(i + 1, j)$, записываем $\zeta_{i,j} = 2\psi_{i+1,j} / \xi^2$.

Для угловой точки G в разностном уравнении, записанном для узла $(i - 1, j)$, имеем $\zeta_{i,j} = 2\psi_{i-1,j} / \xi^2$.

Для угловой точки G в разностном уравнении, записанном для узла $(i, j + 1)$, записываем $\zeta_{i,j} = 2\psi_{i,j+1} / \xi^2$.

На входе (AE) в многоугольный штамп на (рис. 1): $\psi_{0,j} = \psi_{1,j}$; $u_{0,j} = 1$; $v_{0,j} = 0$.

На выходе (DH) из многоугольного штампа на (рис. 1): $\psi_{n,j} = \psi_{n-4,j} - 2\psi_{n-3,j} + \psi_{n-1,j}$; $\zeta_{n,j} = \zeta_{n-4,j} - 2\zeta_{n-3,j} + \zeta_{n-1,j}$; $v_{n,j} = 0$.

В рамках учета подвижности стенки EF штампа были выполнены численные

расчеты для двух выбранных режимов вязкого течения при осуществлении РКМУП: а) стенка EF неподвижна, т. е. $\mathbf{V}_{\text{wall } EF} = 0$, а характерная скорость $U_b = 0$, время установления течения 49.926 с; б) подвижная стенка EF движется навстречу вязкому потоку, т. е. $\mathbf{V}_{\text{wall } EF} \uparrow \downarrow \mathbf{U}_0$, а характерная скорость $U_b/U_0 = -2$, время установления течения 104.632 с.

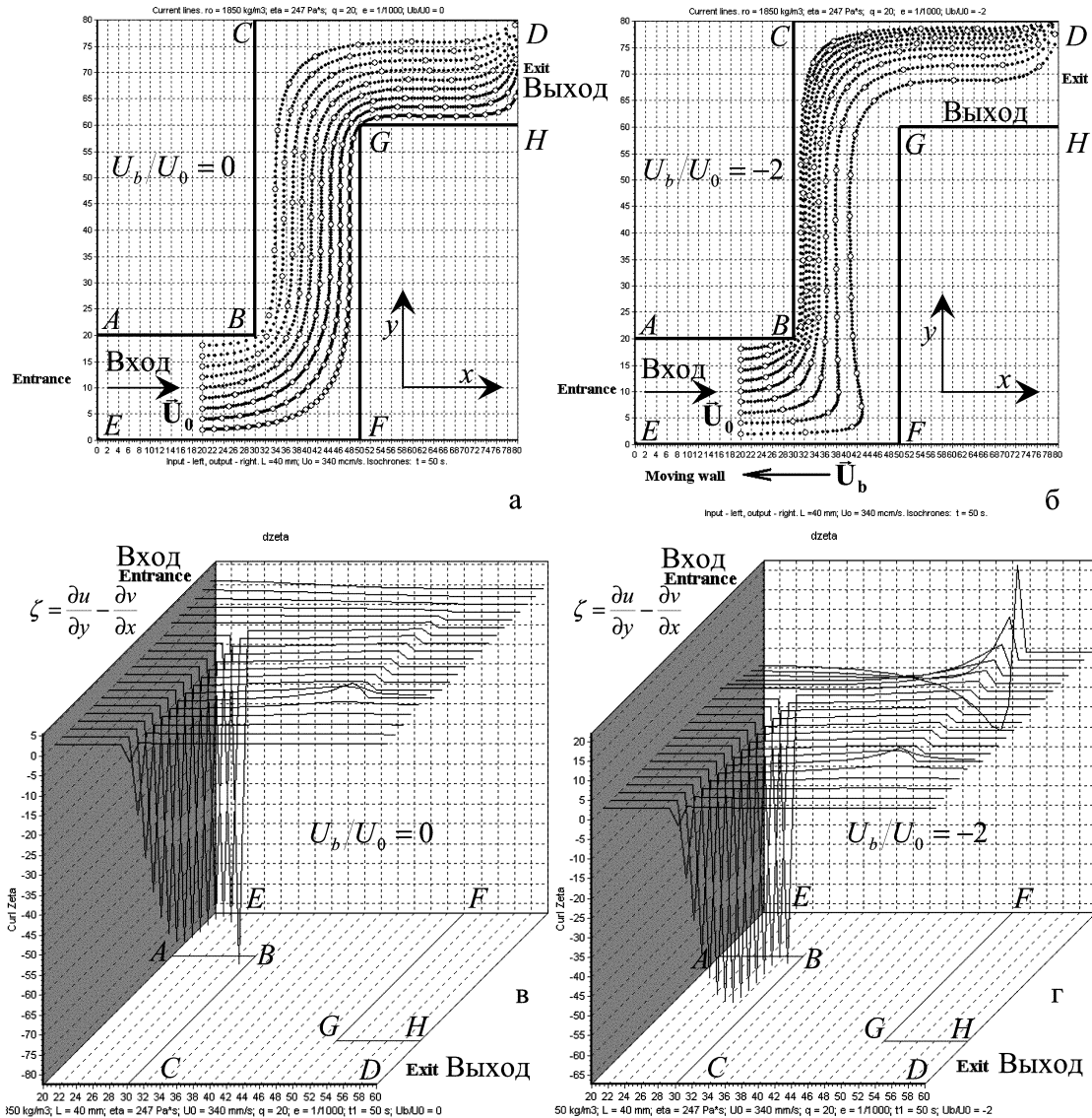


Рис. 1. Сопоставление режимов вязкого течения при РКМУП для следующих случаев: (а), (в) — неподвижная входная стенка EF , т. е. $\mathbf{V}_{\text{wall } EF} = 0$ и $U_b/U_0 = 0$; (б), (г) — подвижная стенка EF движется навстречу потоку, т. е. $\mathbf{V}_{\text{wall } EF} \uparrow \downarrow \mathbf{U}_0$ и $U_b/U_0 = -2$; (а), (б) — расчетные линии тока с соответствующими изохронами при РКМУП; (в), (г) — расчетная функция вихря $\zeta = \partial u / \partial y - \partial v / \partial x$; где вход — слева, выход — справа.

3. Результаты численного моделирования. Численные решения задачи (1)–(2) на (рис. 1) показывают, что наличие подвижной входной стенки EF штампа, задающей переносное движение со скоростью U_b в системе многоугольной штамп — вязкая заготовка, оказывает существенное влияние на характер вязкого течения деформируемого материала не только в окрестности подвижной стенки EF , но и во всей области $ABCD-EFGH$ многоугольного штампа. Установлено, что в случае, когда подвижная стенка EF движется навстречу вязкому потоку (рис. 1б, рис. 1г), т. е. $V_{\text{wall } EF} \uparrow \downarrow U_0$, где U_0 — скорость прессования, то ближайшая к подвижной стенке линия тока «ускоряется» (рис. 1б) по сравнению со случаем неподвижной стенки $V_{\text{wall } EF} = 0$ (рис. 1а). Гидродинамически наблюдаемый эффект на рис. 1б, рис. 1г объясняется тем, что расход вязкого потока остаётся неизменным, поскольку средняя скорость угловой экструзии U_0 одна и та же. Прилегающий к подвижной стенке EF слой вязкого материала движется со скоростью $V^* \approx V_{\text{wall } EF}$ навстречу экструдированному потоку $V^* \uparrow \downarrow U_0$. Поэтому площадь живого сечения потока уменьшается, а значит, скорость потока возрастает. Ротационная трактовка состоит в том, что в прилегающем к движущейся стенке EF слое вязкого материала образуется отрицательный (по часовой стрелке) макроскопический вихрь, сужающий живое сечение вязкого потока.

4. Выводы. Отметим очевидные технологические преимущества реализации подвижной стенки EF многоугольного штампа в рамках реализации различных технологических режимов процессов РКМУП. Сравнительный анализ расчетных линий тока на рис. 1а и рис. 1б показывает, что наличие подвижной стенки EF , движущейся навстречу вязкому потоку, т. е. $V_{\text{wall } EF} \uparrow \downarrow U_0$ и $U_b/U_0 = -2$, приводит к уменьшению размеров застойной зоны EFG вязкого течения. Указанный факт показывает технологическую привлекательность реализации данного режима прессования полимера в штампе с подвижной стенкой EF . Обратим внимание на характер влияния неустойчивостей численного решения краевой задачи (1)–(2) на входе AE и на выходе DH вязкого потока на корректность результатов численного интегрирования (рис. 1). Проанализируем расчетные линии тока, полученные для неподвижной $U_b/U_0 = 0$ (рис. 1а) и для движущейся навстречу потоку $U_b/U_0 = -2$ (рис. 1б) стенки EF штампа. Неустойчивости численного конечно-разностного решения задачи (1)–(2), зарождающиеся на входной границе (AE) штампа, распространяются по направлению многоугольного прессования вдоль U_0 , т. е. «вниз по потоку», а неустойчивости, зарождающиеся на выходной границе (DH) движутся навстречу к направлению течения материала, т. е. «вверх по потоку». Численное решение (рис. 1) даёт корректные результаты, согласующиеся с физическим экспериментом, лишь в том случае, когда вход (AE) и выход (DH) потока находятся достаточно далеко от интересующей нас области ($BCFG$) переходного канала штампа, в идеале на бесконечности. Поэтому с целью устранения искажений, вызванных неустойчивостями на входе (AE), пространственные эпюры энергосиловых параметров РКМУП (рис. 1в–рис. 1г) получены при условии, что начальные точки взяты не у границы координатной сетки, соответствующей входу (AE) вязкого потока ($i = 0$), а на удалении 20 ячеек от неё. Аналогично на всех указанных пространственных эпюрах полученные расчетные поля были обрезаны на расстоянии 20 ячеек от границы конечно-разностной сетки, соответству-

ющей выходу (DH) потока ($i = 80$), чтобы в поле зрения не попадали расчетные искажения, вызванные неустойчивостями на выходе (DH).

В рамках проведенного гидродинамического моделирования необходимо дополнительно рассмотреть вопрос об обтекании внутренних углов EFG , BCD внутри закрытого русла внутренней полости равноканального многоугольного штампа $ABCD-EFGH$ сегаловской геометрии на (рис. 1). При ламинарном движении сплошной среды имеет место формирование застойных зон EFG и BCD (рис. 1а–рис. 1б). При турбулентном движении вязкой сплошной среды в зонах EFG и BCD возникают вихревые потоки — макротурбулентности. Численные методы, пригодные для анализа макротурбулентностей, пока не вполне разработаны. Из-за ограниченного числа ячеек разностной сетки расчётные линии тока в вихревых зонах EFG и BCD не замыкаются. Полученные в процессе численного решения линии тока огибают застойные зоны EFG и BCD (рис. 1а–рис. 1б) подобно тому, как они огибают застойные зоны EFG и BCD (рис. 1а–рис. 1б) при ламинарном движении. Однако то, что линии тока в вихревых зонах EFG и BCD замкнуты, можно видеть на диаграмме распределения функции тока ψ . Линиям тока соответствует постоянство функции тока $\psi = const$. Таким образом, в рамках проведенного гидродинамического анализа установлено, что повышение корректности численного интегрирования краевой задачи (1)–(2) и более точное определение пространственных эпюр энергосиловых параметров для ламинарных ньютоновских течений физических моделей полимерных материалов при различных режимах реализации РКМУП возможно посредством устранения влияния входных и выходных неустойчивостей на границах вязкого потока.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белошенко В. А., Бейгельзимер Я. Е., Варюхин В. Н. Твердофазная экструзия полимеров. К.: Наукова думка, 2008. 207 с.
- [2] Perig A. V., Laptev A. M., Golodenko N. N., Erfort Yu. A., Bondarenko E. A. Equal channel angular extrusion of soft solids // Materials Science and Engineering: A. 2010. № 16–17. Pp. 3769–3776.
- [3] Нечаева Е. С., Трусев П. В. Конститутивная модель частично кристаллического полимерного материала. Алгоритм реализации модели мезоуровня // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. № 1. С. 74–89.
- [4] Roache P. J. Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Albuquerque, New Mexico: Hermosa Publishers, 1998. 648 p.

Perig A. V., Golodenko N. N. *Numerical integration of a curl transfer equation for viscous flows of Newtonian fluids in equal channel multiple angular dies.* The paper is focused on the numerical finite-difference integration of a curl transfer equation for viscous newtonian flows of incompressible continuum through equal-channel multiple angular dies within the numerical mathematical simulation of technological processes for forming amorphous polymers.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В СЛОЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВИЖУЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНО ПЛАСТИНАМИ

Петров А. Г.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Исследуются точные решения уравнений Навье–Стокса в слое между параллельными пластинами, расстояние между которыми меняется пропорционально квадратному корню из времени. На границе пластин ставится условие прилипания. При сближении пластин получено семейство решений непрерывно зависящие от числа Рейнольдса. Профиль продольной скорости выпуклый и изменяется от параболического при малых числах Рейнольдса до прямоугольного при числе Рейнольдса стремящегося к бесконечности. Коэффициент давления монотонно изменяется с изменением числа Рейнольдса от нуля до бесконечности.

При разъединении пластин получено счетное множество точных решений в элементарных функциях с синусоидальными профилями скорости. Эти решения порождают счетный набор непрерывных, несвязанных друг с другом семейств точных решений. Указаны области значений числа Рейнольдса, в которых существует единственное решение, области, в которых решений нет, и области с неединственным решением. При достаточно большом числе Рейнольдса вблизи границы образуется противотечение: скорость направлена в противоположном направлении по отношению к средней скорости.

На основе найденного точного решения проанализированы относительные погрешности асимптотических теорий смазочного слоя Рейнольдса и пограничного слоя Прандтля.

1. Введение. Точные решения уравнений Навье–Стокса отражены во многих учебниках и монографиях по гидродинамике [1, 2]. Обзор точных решений и методов их построения приведен в [3]. Наиболее близкой к данной работе является группа точных решений Хименца. Решение Хименца описывает натекание жидкости из бесконечности на плоскость с условием прилипания на плоскости. Построенные ниже автомодельные решения этих уравнений описывают плоскопараллельное течение между движущимися параллельными пластинами с условием прилипания на них. Они позволяют продемонстрировать важные свойства краевых задач для уравнений Навье–Стокса, связанные с существованием и единственностью решений.

2. Постановка краевой задачи. Рассматривается двумерное течение вязкой жидкости с компонентами скоростей $v_x(t, x, y)$, $v_y(t, x, y)$ и давлением $p(t, x, y)$ в слое жидкости $0 < y < h$, $-\infty < x < \infty$ между двумя параллельными пластинами. Пластина $y = 0$ — неподвижна, а вторая пластина $y = h$ движется по закону $h(t)$. Схема течения изображена на рис. 1. При сближении пластин профиль скорости всегда имеет одно направление (рис. 1а). При раздвижении пластин при достаточно большом значении числа Рейнольдса в тонком пограничном слое возникает противотечение (рис. 1б).

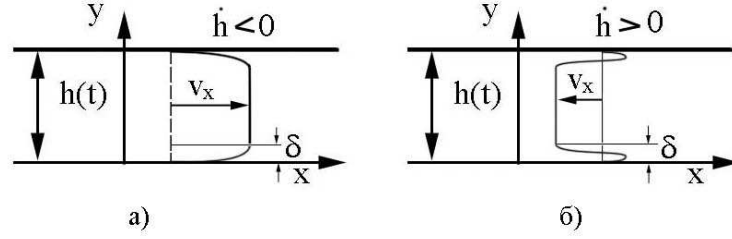


Рис. 1. Схема течения: а) — при сближении пластин, б) — при их разведении.

Краевая задача с условиями прилипания на пластинах имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\
 \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\
 v_x(t, x, 0) = v_x(t, x, h) &= 0, \quad v_y(t, x, 0) = 0, \quad v_y(t, x, h) = \dot{h},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости, плотность жидкости принимаем за единицу.

Замена

$$v_x = \frac{\dot{h}}{h} x U(\eta), \quad v_y = \dot{h} V(\eta), \quad p = \dot{h}^2 \left[b \frac{x^2}{2h^2} + P(t, \eta) \right] + p_0(t), \quad \eta = \frac{y}{h}$$

приводит уравнения Навье–Стокса к обыкновенной системе дифференциальных уравнений. После подстановки замены в первые два уравнения Навье–Стокса для функций $U(\eta)$, $V(\eta)$ получаем следующую краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U + V' = 0, \quad -aU - \eta U' + U^2 + VU' + b - \frac{1}{\text{Re}} U'' = 0, \quad \eta \in (0, 1)$$

$$U(0) = V(0) = 0, \quad U(1) = 0, \quad V(1) = 1,$$

$$a(t) = 1 - \frac{\ddot{h}h}{\dot{h}^2}, \quad \text{Re}(t) = \frac{h\dot{h}}{\nu}.$$

Если параметры системы a и Re не зависят от времени, то решение системы для $U(\eta)$, $V(\eta)$ определит автомодельное решение уравнений Навье–Стокса. Это возможно лишь в случае следующего закона движения пластин $h = k\sqrt{|t - t_0|}$, при котором параметры a и Re принимают значения

$$a = 2, \quad \text{Re} = \frac{k^2}{\nu} \text{sign}(t - t_0).$$

На отрезке времени $t_1 < t < t_2 < t_0$ параметр Re имеет произвольное постоянное отрицательное значение, а на отрезке $t_0 < t_1 < t < t_2$ — произвольное положительное значение. На этих отрезках времени строятся автомодельные решения уравнений Навье–Стокса. Отрицательное значение параметра Рейнольдса соответствует

сближению пластин, а положительное — их раздвижению. Для этих двух случаев решения качественно различаются.

Система уравнений имеет третий порядок, поэтому 4 краевые условия позволяют при заданном числе Re найти функции $U(\eta)$, $V(\eta)$ и входящий в давление параметр b .

Третье уравнение Навье–Стокса приведет к виду

$$3V - \eta V' + VV' - \frac{1}{\text{Re}}V'' + \frac{dP(t, \eta)}{d\eta} = 0.$$

Из него найдется определяющая давление функция $P(\eta, \text{Re})$

$$P = \eta V - \frac{V^2}{2} + \frac{1}{\text{Re}}V'(\eta).$$

Систему уравнений можно упростить, сведя ее к автономному виду с помощью замен

$$\eta = \frac{1}{2}(Y + 1), \quad U = -1 + u, \quad V = \eta + \frac{1}{2}v.$$

Для функций $u(Y), v(Y)$ на отрезке $Y \in (-1, 1)$ получим систему уравнений

$$u + v' = 0, \quad vu' + u^2 - 4u + 3 + b - (4/\text{Re})u'' = 0$$

с краевыми условиями

$$u(-1) = u(1) = 1, \quad v(-1) = v(1) = 0.$$

В исходных размерных переменных компоненты скорости выражаются через функции $u(Y)$ и $v(Y)$ так

$$v_x = \frac{\dot{h}}{h}x(u(Y) - 1), \quad v_y = \dot{h}\left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2}v(Y)\right), \quad Y = \frac{2y}{h} - 1.$$

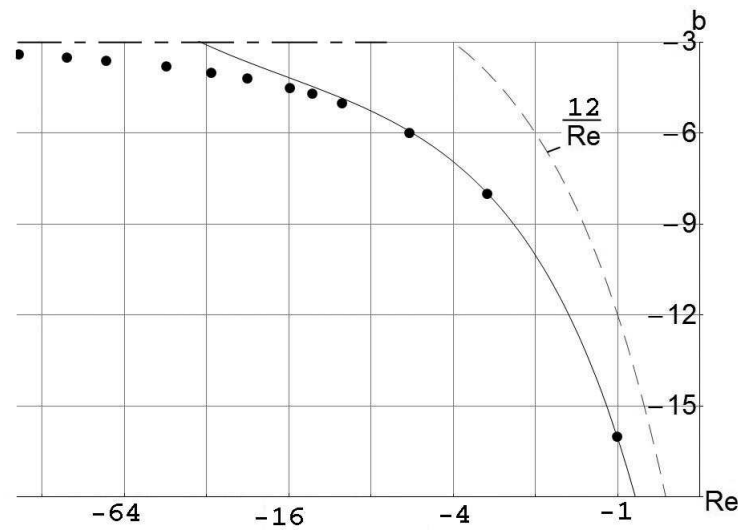
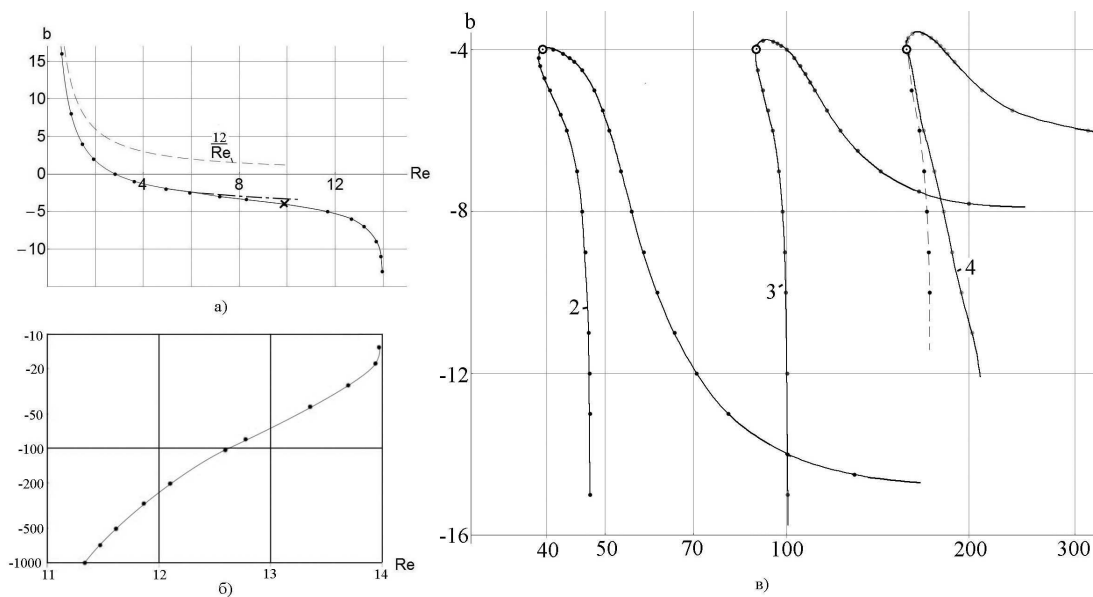
3. Точные решения в элементарных функциях. Можно убедиться проверкой, что для случая раздвижения пластин ($\text{Re} < 0$) простейшими точными решениями сформулированной краевой задачи для уравнений Навье–Стокса является следующее счетное множество решений

$$u = (-1)^n \cos n\pi Y, \quad v = -\frac{1}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi Y, \\ b = -4, \quad \text{Re} = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

В исходных переменных размерные компоненты скорости таковы

$$v_x = \frac{\dot{h}}{h}x \left[\cos \left(2n\pi \frac{y}{h} \right) - 1 \right], \quad v_y = \dot{h} \left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2n\pi} \sin \left(2n\pi \frac{y}{h} \right) \right].$$

Каждое n -ое решение порождает n -ое непрерывное однопараметрическое семейство решений $u_n(Y, \text{Re})$, $v_n(Y, \text{Re})$, $b_n(\text{Re})$. Эти семейства не могут быть получены друг через друга непрерывным продолжением.

Рис. 2. Точная и приближенные зависимости $b(\text{Re})$ при сближении пластин.Рис. 3. Точная и приближенные зависимости $b(\text{Re})$ при сближении пластин.

Таким образом, получим одно непрерывное семейство точных решений для отрицательных чисел Рейнольдса и счетное множество непрерывных, но не связных друг с другом, семейств при положительных числах Рейнольдса.

4. Зависимость $b(\text{Re})$. Точки зависимости $b(\text{Re})$, $\text{Re} > 0$ для сближения пластин изображены на рис. 2. Точные решения изображены точками, штриховой линией — приближенное решение Рейнольдса при малом числе Рейнольдса, сплошная линия — решение, полученное с помощью степенного разложения по числу Рейнольдса. Как видно из рисунка коэффициент $b(\text{Re})$ монотонно изменяется от $-\infty$ при $\text{Re} = 0$ до $b \rightarrow -3$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$.

Продольная скорость при сближении пластин $u(Y)$ плавно изменяется от пара-

болического профиля при малом значении $|\text{Re}|$ до почти прямоугольного профиля при большом значении $|\text{Re}|$ с резким изменением скорости в пограничном слое.

Точки точной зависимости $b(\text{Re})$, $\text{Re} > 0$ для раздвижения пластин изображены на рис. 3: а) и б) — первая серия решений, в) вторая, третья и четвертая серии.

Работа выполнена при финансовой поддержке ведомственной целевой аналитической программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.2/3604) и Российского фонда фундаментальных исследований 11-01-00535.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродимеханика. Ч. 2. М.: ГИМФЛ, 1963. 728 с.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [3] Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, С. 6–76.

Petrov A. G. *On exact solutions of Navier–Stokes equations in fluid layer between plates moving in parallel.* Precise solutions of Navier–Stokes equations are studied in layer between parallel plates, with distance between them changing proportionally to the square root of time. At plates the sticking boundary condition is satisfied. For the case of approaching plates a family of solutions continuously depending on Reynolds number is found. The longitudinal velocity profile is convex and changes from parabolic at small Reynolds numbers to rectangular at Reynolds number tending to infinity. The pressure coefficient changes monotonically with changing of the Reynolds number from zero to infinity.

For the case of plates moving apart a countable set of precise solutions in elementary functions with sinusoidal profiles was found. Those solutions generate a countable set of continuous separated families of precise solutions. Domains of Reynolds number where a unique solution exists, where no solution exists, and where non-unique solution exists were specified. For large enough Reynolds number a counterflow arises close to the boundaries: velocity is directed in the opposite direction to the average velocity.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ДОННЫХ ВОЛН В РАВНИННЫХ РЕКАХ

Потапов И. И.

Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН, Хабаровск

Предложена математическая модель эволюции донных форм, возникающих при движении наносов, увлекаемых потоком жидкости. Морфологическая часть модели замыкается с помощью формулы для расхода наносов, учитывающей влияние динамического давления в придонном слое. Численно исследована значимость градиента придонного давления, как фактора, определяющего процесс роста дюн.

1. Введение. Предложена двумерная математическая модель развития донных волн в глубоком потоке жидкости. Гидродинамическая часть модели строится на основе двумерных уравнений Рейнольдса, с замыканием модели в форме $k - \omega$ [1], такая форма замыкания позволяет точнее описывать поля скоростей и давления над вершиной дюн и в зонах обратного течения [2]. Известно [3], что использование стандартных моделей движения влекаемых наносов, например классической модели Петера–Мейера, без дополнительных гипотез не позволяет исследовать донную неустойчивость, приводящую к развитию донных форм. Поэтому с работы Кенеди [4] основным из механизмов возникновения донной неустойчивости является гипотеза запаздывания придонных касательных напряжений относительно характеристик потока. В работах [3, 5] была выполнена ревизия аналитической модели [6] и учтено влияние движения свободной поверхности потока и градиента придонного динамического давления как механизмов, приводящих к возникновению неустойчивых донных возмущений при транспорте влекаемых наносов. Исследование влияния движения свободной поверхности потока на процесс формирования донных волн выполнено в работах [6, 7].

В данной работе для рассмотрения вопроса о значимости динамического давления на различных стадиях развития донных волн сформулирована математическая модель процесса формирования донных волн и проведена оценка его вклада в процесс генерации и развития донных волн.

2. Математическая модель задачи. Гидродинамическая модель потока строится на основе следующих уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + G_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma^1 \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - P - \beta^1 k \omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma^2 \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) - \gamma \omega \frac{P}{k} - \beta^2 k \omega^2, \quad (3)$$

где

$$\nu_t = \gamma \frac{k}{\omega}, \quad P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \tau_{ij} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

константы модели: $\sigma^1 = 0.5$, $\beta^1 = 9/100$, $\sigma^2 = 0.5$, $\beta^2 = 3/40$, $\gamma = 5/9$.

Уравнения модели замыкаются периодическими граничными условиями на границах втекания и вытекания из расчетной области.

На поверхности потока принимаются предположения о подвижной крышке, с нулевой вертикальной скоростью на поверхности потока.

На дне потока принимается условие прилипания $u_i = 0$, что с включением в модель вязкого подслоя приводит к условию $k = 0$ на дне потока. Значения для ω на дне потока определяются по следующей зависимости

$$\omega = \frac{u_f}{\nu} \begin{cases} \left(\frac{50}{n}\right)^2, & n < 25, \\ \frac{100}{n}, & n \geq 25, \end{cases}$$

где t — время, x_i — компоненты пространственных координат, u_i — компоненты скорости потока, p — давление, k , ω — функции турбулентной энергии и диссипации, ρ_w, ν — плотность и вязкость воды, ν_t — турбулентная вязкость, u_f — придонная скорость трения, n — шероховатость дна по Никурадзе.

Деформация донной поверхности определяется уравнением сохранения массы

$$\rho_s(1 - e)\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial l} = 0 \quad (4)$$

и уравнением расхода влекомых наносов [5]

$$q = C_0 \tau_b^{3/2} \left(1 - \chi - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma} \left((1 - 0.5\chi) \frac{\partial \zeta}{\partial l} + \frac{(1 - \chi)}{s} \frac{\partial p_0}{\partial l} \right) \right), \quad (5)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\tau_c}{\tau}}, \quad \tau_c = \frac{9}{8} \frac{\varpi^2 F_a d}{c_x}, \quad F_a = (\rho_s - \rho_w) g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma, \quad s = \frac{(\rho_s - \rho_w) f}{\rho_w},$$

$$C_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s}{\sqrt{\rho_w} \varpi F_a} \times \begin{cases} 1, & \chi < 1, \\ 0, & \chi \geq 1. \end{cases}$$

Здесь ρ_s , e — плотность и пористость песка, l — координата в касательной плоскости донной поверхности ζ , q — массовый расход влекомых наносов, τ_b — придонное касательное напряжение, τ_c — критическое придонное касательное напряжение, φ — угол естественного откоса песка, ϖ — постоянная Кармана, c_x — коэффициент лобового сопротивления частиц, d — диаметр частиц, γ — угол между вертикальной осью и нормалью n_i к поверхности дна, g — ускорение свободного падения, $f \approx 0.1$ — концентрация частиц в придонном слое.

Транспортное уравнение для влекомых наносов (5) обладает рядом существенных особенностей [5]. Оно не содержит в себе феноменологических параметров, выполняет учет влияние геометрии дна ζ на транспорт наносов, и учитывает влияние градиента от функции придонного давления $p_0 = p(l)$ на данный процесс. Для ровного дна когда градиентами от функций ζ и p_0 можно пренебречь, уравнение (5) совпадает с точностью до константы с известной формулой Петера–Мейера.

Результаты исследований. Решение задачи в постановке (1)–(5) выполнялось методом контрольных объемов [9]. При расчетах донной поверхности, была

сделана относительно успешная попытка отказа от методики фильтрационного сглаживания дна [1, 9], путем использования при решении морфологической задачи (4)–(5) метода коррекции потоков [10], позволившего получить эффект, близкий к фильтрации, при соответствующем выборе параметров метода.

Исследование влияния относительной высоты дюны на характер распределения придонного градиента динамического давления на поверхности дюны показало, что вклад градиента динамического давления в транспорт влекомых наносов достигает от 15 до 25% от общей массы расхода, при этом градиент давления оказывается определяющим в процессе определения точки отрыва пограничного слоя на вершине дюны, остановки транспорта наносов и появления зоны их лавинного обрушения. Поскольку согласно работе [1] поведение пограничного слоя на напорной стороне дюны является основополагающим в процессе развития дюн, можно сделать заключение, о том что учет градиента динамического давления в уравнении расхода является значимым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-98518 р-восток-а) и фонда фундаментальных исследований ДВО РАН (код проекта 12-I-0-03-018).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Sanne L. Niemann*. Modeling of sand dunes in steady and tidal flow // PhD thesis. MEK-DTU, Coastal and River Engineering Section. Technical University of Copenhagen, Denmark October 24, 2003. 185 p.
- [2] *Wilcox D. C.* Formulation of the k-omega Turbulence Model Revisited // AIAA Journal. 2008. Vol. 46, № 11. pp. 2823–2838.
- [3] *Петров А. Г., Потапов И. И.* Постановка и решение задачи об устойчивости несвязного дна канала // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 1. С. 62–74.
- [4] *Гришанин К. В.* Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 143 с.
- [5] *Потапов И. И.* Уравнение русловых деформаций для несвязного дна: препринт № 168. Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2011. 20 с.
- [6] *Петров А. Г., Петров П. Г.* Вектор расходов наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 102–112.
- [7] *Петров А. Г., Потапов И. И.* О развитии возмущений песчаного дна канала // ДАН. 2010. Т. 431, № 2. С. 191–195.
- [8] *Петров А. Г., Потапов И. И.* О механизмах развития донных волн в канале с песчаным дном // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 2. С. 81–91.
- [9] *Tjerry S.* Morphological Calculation of dunes in alluvial rivers // PhD thesis, The Danish Technical University. 1995. 193 p.
- [10] *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.

Potapov I. I. *Mathematical model of bottom waves in lowland rivers*. Mathematical model for the evolution of sand dunes arising from the movement of sediment entrained liquid. Morphologic part of the model is closed with a formula for the flow of sediment, taking into account the effect of the dynamic pressure in the bottom layer. The importance of the bottom pressure gradient as a factor in determining the growth process of dunes was numerically investigated.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА LS-STAG ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Пузикова В. В.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Рассматривается обтекание профиля равномерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности. Задача решается численно методом LS-STAG. Необходимую для LS-STAG-дискретизации функцию уровня предлагается строить численно по аппроксимированной кривой Безье границе профиля. Приведённые расчёты для кругового, квадратного, эллиптического и крылового профилей показывают, что даже на сравнительно грубых сетках метод LS-STAG с аппроксимированной функцией уровня позволяет получить качественно и количественно верное решение.

Для численного решения задач математической физики чаще всего применяются различные сеточные методы. Использование структурированных сеток (по сравнению с неструктурированными) позволяет, как правило, уменьшить время счёта и необходимый объём оперативной памяти. В то же время, построение регулярной криволинейной сетки в областях сложной формы часто оказывается затруднительным, поэтому представляют интерес методы погруженных границ [1, 2], которые не требуют совпадения границ ячеек с границами расчетной области и позволяют решать задачи на прямоугольных сетках.

Использование методов погруженных границ даёт возможность решать задачи с изменяющейся в процессе счета областью течения (задачи аэроупругости, нестационарной аэродинамики, сопряженные задачи тепломассообмена и др.) без перестроения сетки на каждом шаге расчёта.

Один из наиболее эффективных методов данного класса — метод LS-STAG, предложенный в статье [3]. Как показывают расчеты, метод обладает вторым порядком точности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим внешнее обтекание профиля равномерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности $\bar{\rho}$ (здесь и далее: $\bar{A}$ — размерная физическая величина, A — соответствующая ей безразмерная комбинация) в области $\Omega = [0, 23\bar{D}] \times [0, 24\bar{D}]$ (см. рис. 1) с внешней границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ ($\bar{D}$ — характерный размер профиля, K — его граница, в общем случае заданная набором точек).

Математическая постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} = 0, \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{0}, \quad x \in [0, 23D], \quad y \in [0, 12D], \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{V}_\infty, \quad x \in [0, 23D], \quad y \in [12D, 24D], \\ \vec{v}|_{\Gamma_1} = \vec{v}|_{\Gamma_2} = \vec{v}|_{\Gamma_3} = \vec{V}_\infty, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \quad \vec{v}|_K = \vec{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma \cup K} = 0, \end{cases}$$

где $x = \bar{x}/\bar{D}$, $y = \bar{y}/\bar{D}$ — безразмерные координаты, $t = \bar{t} \bar{V}_\infty/\bar{D}$ — безразмерное время, $p = p(x, y, t) = \bar{p}/(\bar{\rho} \bar{V}_\infty^2)$ — безразмерное давление, $\text{Re} = \bar{V}_\infty \bar{D}/\bar{\nu}$ — число Рейнольдса, $D = 1$, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, t) = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y$ — безразмерная скорость ($u = \bar{u}/\bar{V}_\infty$, $v = \bar{v}/\bar{V}_\infty$, $V_\infty = 1$), $\vec{n}$ — внешняя нормаль.

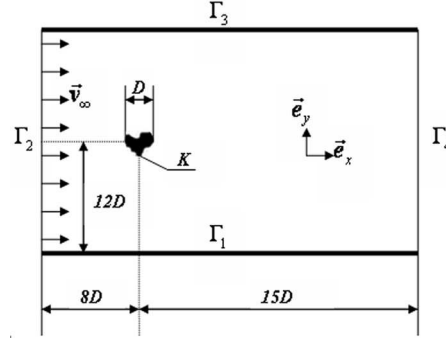


Рис. 1. Расчётная область.

2. Представление погруженной границы. Для описания положения погруженной границы $\Gamma^{ib} = K$ профиля Ω^{ib} введём знакопеременную функцию расстояния $\varphi(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y)$, такую что

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}) < 0, & \vec{r} \in \Omega^f = \Omega \setminus \{\Omega^{ib} \cup \Gamma^{ib}\}, \\ \varphi(\vec{r}) = 0, & \vec{r} \in \Gamma^{ib}, \\ \varphi(\vec{r}) > 0, & \vec{r} \in \Omega^{ib}. \end{cases}$$

В некоторых простейших случаях такая функция уровня может быть задана аналитически: например, для кругового профиля диаметра D с центром в точке $(8D, 12D)$ функция уровня имеет вид

$$\varphi(x, y) = 0,5 D - \sqrt{(x - 8D)^2 + (y - 12D)^2}. \quad (1)$$

В общем случае функцию уровня предлагается строить численно, определяя расстояние от узлов сетки до аппроксимированной границы профиля.

Пусть граница профиля задана набором точек. Поскольку координаты точек могут быть заданы с некоторой погрешностью, аппроксимировать границу профиля интерполяцией нецелесообразно. Предпочтительнее использование аппроксимации кривой Безье, поскольку она позволяет моделировать как гладкое сопряжение участков границы профиля, так и острые кромки, и при этом аппроксимирует не только исходную функцию, но и её производные.

3. Результаты расчётов. В тестовых расчетах моделировалось обтекание профилей и вычислялись их безразмерные стационарные аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления C_{xa} и подъёмной силы C_{ya} , а также безразмерная частота схода вихрей — число Струхала Sh . Результаты сравнивались с известными в литературе экспериментальными и расчетными данными.

Круговой профиль. Поскольку для кругового профиля функция уровня может быть задана аналитически (формулой (1)), на его примере покажем, что использование функции уровня, построенной численно по аппроксимированной границе

Re	C_{xa}			Sh		
	100	200	1000	100	200	1000
Эксперимент						
Zdravkovich [4]	1.21–1.41	—	—	0.16–0.17	—	—
Расчёт						
LS-STAG-a, 120×148	1.310	1.330	1.187	0.172	0.200	0.259
LS-STAG-b, 120×148	1.308	1.322	1.178	0.175	0.212	0.235
LS-STAG-a, 240×204	1.320	1.331	1.405	0.170	0.200	0.249
LS-STAG-b, 240×204	1.319	1.330	1.392	0.171	0.202	0.251
Cheny [3], 300×260	1.322	1.332	1.493	0.170	0.200	0.247
Cheny [3], 550×350	1.317	1.327	1.530	0.170	0.200	0.241
Henderson [5]	1.350	1.341	1.509	0.164	0.197	0.237
He [6]	1.353	1.355	1.519	0.167	0.198	0.239

Таблица 1. Обтекание кругового профиля: значения C_{xa} и Sh.

Re	Расчёт								Эксперимент
	Данная работа		Saha [7]		Davis [8]		Franke [9]		Okaјima [10]
	C_{xa}	Sh	C_{xa}	Sh	C_{xa}	Sh	C_{xa}	Sh	Sh
100	1.55	0.154	1.51	0.159	1.55	0.154	—	—	0.141–0.145
200	1.54	0.147	1.67	0.163	—	—	1.65	0.157	0.138–0.145
250	1.65	0.141	1.77	0.142	1.77	0.165	1.72	0.141	0.139–0.143
300	1.82	0.138	1.89	0.146	—	—	1.89	0.130	0.137–0.139
400	1.85	0.128	2.21	0.167	1.88	0.159	—	—	0.129–0.135

Таблица 2. Обтекание квадратного профиля: значения C_{xa} и Sh.

профиля (LS-STAG-b, 20 точек на профиле), позволяет получить результаты, достаточно близкие к тем, что были получены при аналитическом задании функции уровня (LS-STAG-a), а также к расчётам из работ [3–6] (см. табл. 1).

Квадратный профиль. Если управляющие точки находятся на одной прямой, кривая Безье, построенная по ним, вырождается в отрезок. Благодаря этому граница квадратного профиля аппроксимируется точно. Полученные значения C_{xa} и Sh хорошо согласуются с результатами работ [7–10] даже при расчёте на самой грубой из используемых сеток — 120×148 (см. табл. 2).

Эллиптический профиль. В качестве характерного размера для эллиптического профиля, как и в работе [11], была выбрана проекция длины L_x большой полуоси эллипса K на ось Ox , т.е. $D = L_x \cdot \cos \alpha$ (α — угол атаки). Форма профиля задаётся отношением L_y/L_x , где L_y — длина малой полуоси эллипса K . Результаты расчётов представлены на рис. 2, 3 и в табл. 3. Для всех расчётов использовалась сетка 240×204 .

Крыловой профиль. В атласах аэродинамических характеристик крыловых профилей, например [12], форма профиля задаётся набором точек, поэтому функцию уровня можно построить вышеописанным способом. Рис. 4 иллюстрирует обтекание симметричного крылового профиля ЦАГИ серии В (20%) при $Re = 200$ (сетка 240×204).

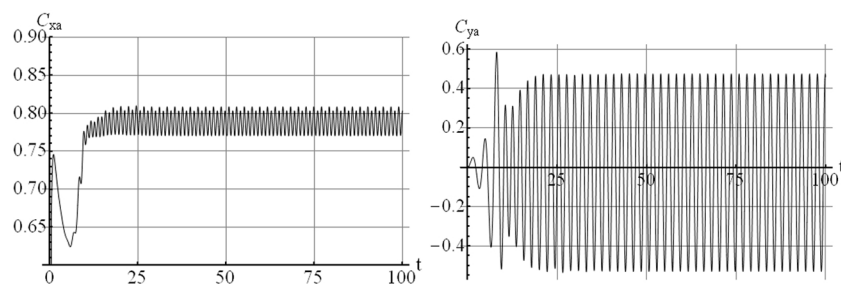


Рис. 2. Обтекание эллиптического профиля при $L_y/L_x = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 525$: $C_{xa}(t)$ (слева) и $C_{ya}(t)$ (справа).

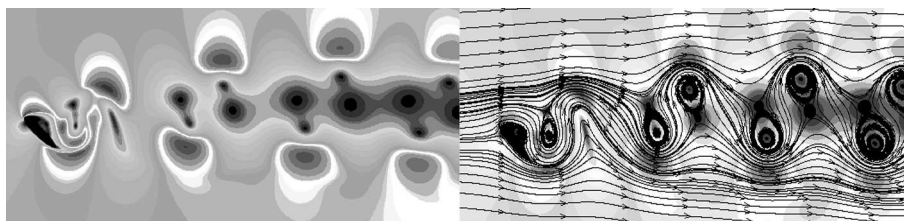


Рис. 3. Обтекание эллиптического профиля при $L_y/L_x = 0.2$, $\alpha = 45^\circ$, $Re = 163$: распределение модуля скорости (слева) и линии тока (справа).

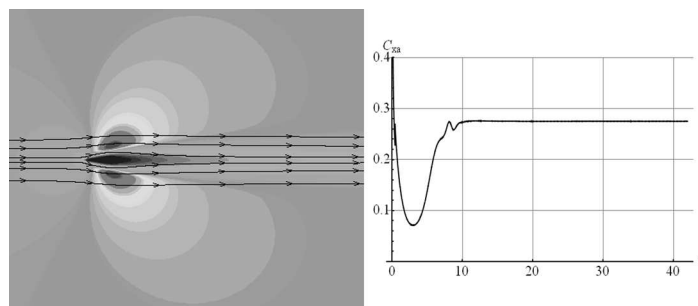


Рис. 4. Стационарное безотрывное обтекание крылового профиля ($Re = 200$).

4. Заключение. Аппроксимация границы профиля кривой Безье позволяет достаточно просто строить функцию уровня, необходимую для LS-STAG дискретизации. Приведённые расчёты для кругового, квадратного, эллиптического и крылового профилей показывают, что даже на сравнительно грубых сетках метод LS-STAG с аппроксимированной функцией уровня позволяет получить каче-

Параметры расчёта			C_{xa}		Sh	
L_y/L_x	α	Re	Данная работа	Mittal [11]	Данная работа	Mittal [11]
0.5	0°	525	0.79	0.78	0.22	0.21
0.5	45°	525	2.53	2.52	0.25	0.23
0.5	0°	1000	0.61	0.61	0.21	0.20
0.2	45°	163	3.76	3.71	0.16	0.19

Таблица 3. Обтекание эллиптического профиля: значения C_{xa} и Sh.

ственно и количественно верное решение. Предложенный подход можно использовать и для более сложной задачи — моделирования обтекания системы профилей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Iaccarino G., Verzicco R.* Immersed boundary technique for turbulent flow simulations // Appl. Mech. Rev. 2003. № 56. P. 331–347.
- [2] *Jameson A.* The construction of discretely conservative finite volume schemes that also globally conserve energy or entropy // J. Sci. Comput. 2008. № 34. P. 152–187.
- [3] *Chen Y., Botella O.* The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties // J. Comp. Phys. 2010. № 229. P. 1043–1076.
- [4] *Zdravkovich M. M.* Flow around circular cylinders. Vol. 1. Oxford: OUP, 1997. 694 p.
- [5] *Henderson R. D.* Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition // J. Fluid Mech. 1997. № 352. P. 65–112.
- [6] *He J. W. et al.* Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder. Part I: Oscillatory cylinder rotation // J. Comput. Phys. 2000. № 163. P. 87–117.
- [7] *Saha A. K., Huralidhar K., Biswas G.* Transition and chaos in two-dimensional flow past a square cylinder // J. Eng. Mech. 2000. № 126. P. 523–532.
- [8] *Davis R. W., Moore E. F., Purtell L. P.* A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders // Phys. Fluid. 1984. № 27. P. 46–59.
- [9] *Franke R., Rodi W., Schonung B.* Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders // J. Wind Engr. Indust. Aero. 1990. № 35. P. 237–257.
- [10] *Okajima A.* Strouhal numbers of rectangular cylinders // J. Fluid Mech. 1982. № 128. P. 379–398.
- [11] *Mittal R., Balachandar S.* Direct numerical simulation of flow past elliptic cylinders // J. Comput. Phys. 1996. № 124. P. 351–367.
- [12] *Ушаков Б. В. и др.* Атлас аэродинамических характеристик профилей крыльев. М.: Издание БНТ НКАП при ЦАГИ, 1940. 340 с.

Puzikova V. V. *Simulation of viscous incompressible flow past airfoil using LS-STAG method.* Viscous incompressible flow past airfoil of arbitrary shape is considered. The task is solved numerically by method LS-STAG. A periphery of an airfoil is approximated by Bezier curve.

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛИННОВОЛНОВОЙ АСИМПТОТИКИ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ревина С. В.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ*

Построена длинноволновая асимптотика задачи устойчивости двумерных сдвиговых течений с ненулевым средним. Получены рекуррентные формулы для k -го члена асимптотики. Показано, что критические собственные значения являются нечетными функциями волнового числа, а критические значения вязкости - четными функциями. Если отклонение скорости от ее среднего по периоду значения является нечетной функцией пространственной переменной, то собственные значения находятся точно.

1. Введение. Рассматривается двумерное $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами ℓ_1 и ℓ_2 соответственно, описываемое системой уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где ν — безразмерная вязкость. Через $\langle f \rangle$ будем обозначать среднее по x_1 , а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ — среднее по прямоугольнику периодов $\Omega = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\ell_1} \int_0^{\ell_1} f(\mathbf{x}, t) dx_1, \quad \langle\langle f \rangle\rangle(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2.$$

Средняя по пространству скорость считается заданной $\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}$. Предполагается, что поле скорости $\mathbf{v}$ периодически по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами ℓ_1, ℓ_2 соответственно, причем $\ell_2 = 2\pi/\alpha, \alpha \rightarrow 0$.

Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарного течения, когда основное поле скорости принадлежит классу сдвиговых течений:

$$\mathbf{V} = (0, V)(x_1, \alpha x_2). \quad (1)$$

К рассматриваемому классу принадлежит течение Колмогорова $\mathbf{V} = (0, \gamma \sin x_1)$, имеющее важные геофизические приложения.

Впервые длинноволновая асимптотика ($\alpha \rightarrow 0$) задачи устойчивости двумерных параллельных течений (1) рассмотрена в [1]. Исследованию автоколебаний, возникающих при потере устойчивости параллельных течений относительно длинноволновых возмущений, посвящена работа [2]. Линейная задача устойчивости трехмерных стационарных течений вида

$$\mathbf{V} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3) \quad (2)$$

рассмотрена в [3] в предположениях, что один из пространственных периодов стремится к бесконечности, когда два остальных фиксированы. В частности, показано, что если среднее продольной компоненты скорости отлично от нуля $\langle V_3 \rangle \neq 0$, то при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости.

В [4] явно построены главные члены асимптотики автоколебательного режима, отвечающего от основного течения (2) при малых α , когда число Рейнольдса переходит критическое значение, найденное в [3]. Изучение автоколебаний, возникающих при потере устойчивости двумерных и трехмерных стационарных течений относительно длинноволновых возмущений было продолжено в [5]–[9]. Найде-ны главные члены асимптотики вторичных режимов для основного течения вида $\mathbf{V} = (\alpha V_1, V_2)(\mathbf{x})$ в предположении $\langle V_2 \rangle \neq 0$, а также для основного течения, близкого к параллельному $\mathbf{V} = (\alpha V_1(x_2), V_2(x_1))$ в предположении $\langle V_2 \rangle = 0$. На основе асимптотических формул проведено компьютерное моделирование движения пассивной примеси в основных и вторичных потоках жидкости [7].

2. Рекуррентные формулы. Через H обозначим подпространство функций из $L_2(0, \ell_1)$, ортогональных единице: $H = \{f \in L_2(0, \ell_1) | \langle f \rangle = 0\}$. Определим интегральный оператор $I : H \rightarrow H$ по правилу

$$If = \int_0^x f(s)ds - \left\langle \int_0^x f(s)ds \right\rangle.$$

Оператор I — обратный к оператору дифференцирования и вполне непрерывный.

Через $W(f, g)$ обозначим вронскиан функций f и g : $W(f, g) = f \frac{dg}{dx} - g \frac{df}{dx}$. Фигурными скобками будем обозначать отклонение периодической функции от ее среднего значения по периоду: $\{F\} = F(x) - \langle F \rangle$. Функция θ характеризует отклонение скорости от ее среднего значения: $\theta'' = V - \langle V \rangle$, $\langle \theta \rangle = 0$.

Разыскивая решение линеаризованного на основном течении (1) уравнения возмущений в виде нормальных колебаний (здесь и в дальнейшем $x = x_1$, $z = \alpha x_2$), приходим к линейной спектральной задаче:

$$\begin{aligned} \sigma \varphi_1 - \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) + \alpha V \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ \sigma \varphi_2 - \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) + \alpha V \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varphi_1 \frac{\partial V}{\partial x} &= -\alpha \frac{\partial P}{\partial z}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0, \quad \langle \varphi_2 \rangle = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_1 dz = 0. \end{aligned}$$

Критическим назовем значение параметра ν , при котором одно или несколько собственных значений σ выходят на мнимую ось. Неизвестные собственные значения σ , вектор-функцию $\varphi(x, z)$ и функцию $P(x, z)$, а также критическое значение вязкости ν , будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра α :

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \alpha^k, \quad \nu = \nu_* + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha^k, \\ \varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k \alpha^k, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \alpha^k. \end{aligned}$$

Первые члены асимптотики найдены в [6]. В настоящей работе получены рекуррентные формулы для k -х членов асимптотики. Приведем основные результаты. Подробное изложение проведено в [10].

В порядке α^k , $k \geq 1$ приходим к следующей системе уравнений:

$$\nu_* \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial x^2} = \frac{\partial P^k}{\partial x} + \sum_{j=1}^k \sigma_j \varphi_1^{k-j} + V \frac{\partial \varphi_1^{k-1}}{\partial z} - \sum_{j=1}^{k-1} \nu_j \frac{\partial^2 \varphi_1^{k-j}}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{k-2} \nu_j \frac{\partial^2 \varphi_1^{k-2-j}}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nu_* \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial x^2} &= \frac{\partial P^{k-1}}{\partial z} + \sum_{j=1}^k \sigma_j \varphi_2^{k-j} + V \frac{\partial \varphi_2^{k-1}}{\partial z} - \sum_{j=1}^k \nu_j \frac{\partial^2 \varphi_2^{k-j}}{\partial x^2} - \\ &- \sum_{j=0}^{k-2} \nu_j \frac{\partial^2 \varphi_2^{k-2-j}}{\partial z^2} + \varphi_1^k \frac{dV}{dx}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{k-1}}{\partial z} = 0, \quad \langle \varphi_2^k \rangle = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_1^k dz = 0. \quad (5)$$

Условием разрешимости уравнения (3) является равенство нулю среднего правой части по переменной x . На k -ом шаге известно, что первые $k-2$ средних значений равны нулю

$$\langle \varphi_1^1 \rangle = \dots = \langle \varphi_1^{n-3} \rangle = \langle \varphi_1^{k-2} \rangle = 0,$$

тогда из (3) выводим осредненные уравнения при α^k :

$$\langle V \rangle \left(im \langle \varphi_1^{k-1} \rangle + \frac{d}{dz} \langle \varphi_1^{k-1} \rangle \right) = \nu_{k-2} \frac{d^2 \varphi_1^0}{dz^2} - \frac{d}{dz} \langle \theta'' \varphi_1^{k-1} \rangle - \sigma_k \varphi_1^0(z).$$

Приведем коэффициенты разложений по степеням α собственных функций линейной спектральной задачи для k — четного:

$$\begin{aligned} \varphi_1^k &= -\frac{1}{\nu_*^k} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} I(a_{k-1}(\theta)); \quad \varphi_2^k = \frac{1}{\nu_*^{k+1}} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} a_k(\theta) - \frac{\nu_k}{\nu_*} \varphi_2^0; \\ P^k &= \frac{1}{\nu_*^{k-1}} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} q_k(\theta) - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*} \{P^2\} + \langle P^k \rangle, \end{aligned}$$

где a_k , q_k выражаются через a_j , q_j при $j \leq k-1$. Слагаемое, содержащее ν_{k-2} в выражении коэффициентов давления P^k , появляется при $k \geq 4$.

Более подробные выражения коэффициентов разложений собственных функций по степеням α при k — четном имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1^k &= -\frac{1}{\nu_*^k} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} I(b_{k-1}) - \sum_{j=2}^{k-4} \frac{\nu_j}{\nu_*} (\varphi_1^{k-j} + I^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{k-2-j}}{\partial z^2}) - \frac{2\nu_{k-2}}{\nu_*} \varphi_1^2 + \sum_{j=3}^{k-1} \frac{\sigma_j}{\nu_*} I^2(\varphi_1^{k-j}) \\ \varphi_2^k &= -\frac{1}{\nu_*^{k+1}} \frac{d^k \varphi_1^0}{dz^k} b_k(\theta) - \sum_{j=2}^k \frac{\nu_j}{\nu_*} \varphi_2^{k-j} - \sum_{j=2}^{k-4} \frac{\nu_j}{\nu_*} I^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{k-2-j}}{\partial z^2} + \sum_{j=3}^{k-1} \frac{\sigma_j}{\nu_*} I^2(\varphi_2^{k-j}) \end{aligned}$$

Здесь $b_m(\theta)$ при m — четном находятся по формуле:

$$b_m(\theta) = I^2[\{W(\theta'', I a_{m-1})\} + \nu_*^2 (q_{m-1}(\theta) - a_{m-2}(\theta))],$$

при m — нечетном

$$b_m(\theta) = I^2[\{W(\theta'', I a_{m-1})\} + \nu_*^2(q_{m-1}(\theta) - a_{m-2}(\theta)) - \frac{1}{2}\langle\theta' a_{m-3}\rangle q_2(\theta)],$$

а $q_m(\theta)$ для любого m имеют вид:

$$q_m(\theta) = I\{\theta'' I a_{m-2}\} - b_{m-1}(\theta) - \nu_*^2 I^2(a_{m-3}).$$

Из осредненных уравнений при α^{k+2} вытекает, что коэффициенты разложений собственных значений и критического значения вязкости при четном k выражаются по формулам:

$$\sigma_k = \sigma_{k+2} = 0; \quad \nu_k = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{m^k}{2\nu_*^{k+1}} \langle\theta' a_k(\theta)\rangle.$$

Для нечетного k :

$$\sigma_{k+2} = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{im^{k+2}}{\nu_*^{k+1}} \langle\theta' a_k(\theta)\rangle; \quad \nu_k = 0.$$

Для всех k средние значения равны нулю

$$\langle\varphi_1^1\rangle = \dots = \langle\varphi_1^k\rangle = \langle\varphi_1^{k+1}\rangle = 0.$$

Пусть $\theta(x)$ — нечетная функция. Тогда из рекуррентных формул следует, что $a_k(\theta)$; $b_k(\theta)$; $\varphi_j^k(\theta)$ четные при k — четном и нечетные при k — нечетном, а $q_k(\theta)$; $P_k(\theta)$ нечетные при k — четном и четные при k — нечетном.

В качестве следствия этого утверждения получаем, что при нечетном в указанном смысле профиле скорости $\sigma_k = 0$ для любых $k = 2; 3; 4 \dots$

3. Заключение. В настоящей работе выведены рекуррентные формулы для нахождения k -го члена длинноволновой асимптотики задачи устойчивости стационарных сдвиговых течений с ненулевым средним $\langle V \rangle \neq 0$. Показано, что критические собственные значения линейной спектральной задачи являются нечетными функциями волнового числа, а критические значения вязкости — четными функциями. Если отклонение скорости от ее среднего по периоду значения является нечетной функцией, то собственные значения линейной спектральной задачи находятся точно и равны $\sigma_{1,2} = \pm im\alpha\langle V \rangle$, где $m \neq 0$ — волновое число.

Полученные результаты можно применить для обоснования монотонной потери устойчивости и нахождения рекуррентных формул k -го члена длинноволновой асимптотики задачи устойчивости течений с нулевым средним, обобщающих течение Колмогорова. Возможность обоснования монотонной потери устойчивости играет ключевую роль при рассмотрении основных течений, периодически зависящих от времени [9].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М., Наука. 1966. С. 242–249.
- [2] Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32–35.
- [3] Юдович В. И. Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 31–35.
- [4] Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 29–41.
- [5] Мелехов А. П., Ревина С. В. Неустойчивость двумерных стационарных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. 2004. С. 170–173.
- [6] Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 2. С. 41–56.
- [7] Мелехов А. П., Ревина С. В. Моделирование движения пассивной примеси в двумерных потоках вязкой жидкости // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 2009. Спецвыпуск, посвященный 75-летию В. И. Юдовича. С. 135–140.
- [8] Ревина С. В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости сдвиговых течений // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2011. Т. 5. С. 212–215.
- [9] Ревина С. В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости периодических по времени течений // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XV междунар. конф. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2011. Т. 1. С. 204–208.
- [10] Ревина С. В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости двумерных сдвиговых течений вязкой жидкости с ненулевым средним // М., 2012. 46 с. — Деп. в ВИНТИ 20.07.12. № 316-B2012.

Revina S.V. *Recurrence formulas of the stability problem of shear flows.* We consider the stability problem of shear stream $\mathbf{v} = (0, V(x))$, $\langle V \rangle \neq 0$ with respect to long-wave length disturbances, when one of the spatial periods goes to infinity (the wave number α goes to zero). The explicit formulas for the k -th asymptotic terms are obtained. It is shown that the critical eigenvalues are even functions of wave number, and the critical values of viscosity are odd functions. If the speed deviation of its mean value is the odd function, then eigenvalues do not depend on wave number.

РАСЧЕТ ВТОРИЧНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Романов М. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Излагаются результаты расчета стационарных, периодических, двух и трехчастотных квазипериодических режимов движения вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми концентрическими цилиндрами, возникающих вблизи пересечения бифуркаций рождения вторичного стационарного течения и азимутальных волн.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая однородная несжимаемая жидкость заполняет полость между двумя твердыми бесконечными проницаемыми концентрическими цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), вращающимися с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 . Будем считать, что внешние массовые силы отсутствуют.

В безразмерных цилиндрических координатах r, φ, z (ось z направлена вдоль оси цилиндров) исходная задача для вектора скорости $\mathbf{V}$ и давления Π состоит из уравнений Навье–Стокса, уравнения неразрывности и краевых условий. При этом краевые условия соответствуют случаю, когда количество жидкости, втекающей через поверхность одного цилиндра, совпадает с количеством жидкости, вытекающей через поверхность другого цилиндра.

Исходная задача допускает точное решение с вектором скорости $\mathbf{V}_0$ и давлением Π_0 [1, 2]

$$\mathbf{V}_0 = \{v_{0r}, v_{0\varphi}, 0\}, \quad v_{0r} = \frac{\chi_0}{r}, \quad v_{0\varphi} = \begin{cases} ar^{\chi+1} + \frac{b}{r}, & \chi \neq -2, \\ \frac{a_1 \ln r + 1}{r}, & \chi = -2, \end{cases}$$
$$\Pi_0 = \int_1^r \left(\frac{v_{0\varphi}^2}{s} + \frac{\chi_0^2}{s^3} \right) ds + \text{const}, \quad R = \frac{R_2}{R_1}, \quad \Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \quad (1)$$
$$a = \frac{\Omega R^2 - 1}{R^{\chi+2} - 1}, \quad b = 1 - a, \quad a_1 = \frac{\Omega R^2 - 1}{\ln R}, \quad \chi_0 = \chi/\lambda.$$

Здесь $\chi = S/\nu$ — радиальное число Рейнольдса, S — коэффициент, определяющий интенсивность поступления жидкости через поверхность одного цилиндра и вытекания ее через поверхность другого цилиндра, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\lambda = \Omega_1 R_1^2/\nu$ — число Рейнольдса.

Компоненты поля скорости и давления будем считать периодическими по φ и z с известными периодами соответственно $2\pi/m$ и $2\pi/\alpha$, где m, α — азимутальное и аксиальное волновые числа.

Выполненные в [1–4] вычисления показали, что с ростом числа Рейнольдса λ основной режим (1) может потерять устойчивость двумя способами. В результате его монотонной вращательно-симметричной неустойчивости возникает вторичное стационарное течение (расчет путем прямого численного интегрирования

нелинейной задачи для возмущений выполнен в [5]). Колебательная трехмерная неустойчивость порождает автоколебательный режим с бегущими в азимутальном направлении волнами. Соответствующие нейтральные кривые при определенных значениях параметров задачи могут пересекаться. Вблизи таких бикритических точек нелинейное взаимодействие монотонной и колебательной мод может приводить к образованию различных режимов движения жидкости [6]. Цель данной работы — отыскание таких режимов, а также исследование их устойчивости и бифуркаций.

2. Амплитудная система. Пусть (Ω_*, λ_*) — точка на плоскости параметров (Ω, λ) , отвечающая пересечению нейтральных кривых монотонной вращательно-симметричной и колебательной трехмерной потери устойчивости течения (1). Предположим, что λ близко к λ_* , а Ω — к Ω_* , так что $\delta_1 = \lambda - \lambda_*$, $\delta_2 = \Omega - \Omega_*$ — малые параметры одного порядка.

Следуя [6], будем искать решение нелинейной задачи для возмущений в виде

$$\mathbf{V} = \sqrt{|\delta_1|} (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^*), \quad \Pi = \sqrt{|\delta_2|} (p + p^*), \quad (2)$$

$$\mathbf{\Phi} = \eta_0(\xi) \mathbf{\Phi}_0(r, z) + e^{ic_*t} [\eta_1(\xi) \mathbf{\Phi}_1(r, \varphi, z) + \eta_2(\xi) \mathbf{\Phi}_2(r, \varphi, z)] + \dots,$$

$$p = \eta_0(\xi) p_0(r, z) + e^{ic_*t} [\eta_1(\xi) p_1(r, \varphi, z) + \eta_2(\xi) p_2(r, \varphi, z)] + \dots$$

Здесь η_0, η_1, η_2 — неизвестные комплексные амплитуды — функции «медленного» времени $\xi = |\delta_1|t$; c_* — неизвестная циклическая частота (фазовая скорость) азимутальных волн при $\lambda = \lambda_*$ и $\Omega = \Omega_*$; $\mathbf{\Phi}_0, p_0$ — собственное решение линеаризованной задачи устойчивости для монотонных вращательно-симметричных возмущений; $\mathbf{\Phi}_1, p_1$ и $\mathbf{\Phi}_2, p_2$ — независимые собственные решения линеаризованной задачи устойчивости для колебательных трехмерных возмущений. При этом вектор $\mathbf{\Phi}_2$ получается инверсией из вектора $\mathbf{\Phi}_1$, так что $\mathbf{\Phi}_2 = J\mathbf{\Phi}_1$. Здесь инверсия J представляет собой зеркальную симметрию относительно отражений в плоскости поперечного сечения цилиндров. Величины порядков δ_1, δ_2 и выше в (2) опущены.

Амплитуды η_0, η_1, η_2 разложений (2) удовлетворяют следующей системе с кубическими ведущими нелинейными членами [6, 7]

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_0}{d\xi} &= (\sigma + A|\eta_0|^2 + B|\eta_1|^2 + B^*|\eta_2|^2)\eta_0 + D\eta_0^*\eta_1^*\eta_2, \\ \frac{d\eta_1}{d\xi} &= (\mu + P|\eta_0|^2 + Q|\eta_1|^2 + R|\eta_2|^2)\eta_1 + S\eta_0^{*2}\eta_2, \\ \frac{d\eta_2}{d\xi} &= (\mu + P|\eta_0|^2 + R|\eta_1|^2 + Q|\eta_2|^2)\eta_2 + S\eta_0^2\eta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты системы (3) выражаются явно через решения серии линейных краевых задач. При этом коэффициенты A, D являются вещественными, а B, P, Q, R, S — комплексными. Величины σ и μ являются свободными параметрами задачи. Алгоритм и результаты расчета коэффициентов амплитудной системы (3) приводятся в работе [8].

Представим комплексные амплитуды η_0, η_1, η_2 в полярной форме: $\eta_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}$, $\eta_1 = \rho_1 e^{i\psi_1}$, $\eta_2 = \rho_2 e^{i\psi_2}$. Тогда для модулей амплитуд ρ_0, ρ_1, ρ_2 , и фазового инварианта $\beta = 2\psi_0 + \psi_1 - \psi_2$ получается замкнутая система, называемая моторной

подсистемой амплитудной системы [6]

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho_0}{d\xi} &= [\sigma + A\rho_0^2 + B_r(\rho_1^2 + \rho_2^2)]\rho_0 + D\rho_0\rho_1\rho_2 \cos \beta, \\
 \frac{d\rho_1}{d\xi} &= (\mu_r + P_r\rho_0^2 + Q_r\rho_1^2 + R_r\rho_2^2)\rho_1 + (S_r \cos \beta + S_i \sin \beta)\rho_0^2\rho_2, \\
 \frac{d\rho_2}{d\xi} &= (\mu_r + P_r\rho_0^2 + R_r\rho_1^2 + Q_r\rho_2^2)\rho_2 + (S_r \cos \beta - S_i \sin \beta)\rho_0^2\rho_1, \\
 \frac{d\beta}{d\xi} &= C(\rho_1^2 - \rho_2^2) - 2D\rho_1\rho_2 \sin \beta - \\
 &\quad - [S_i(\rho_1^2 - \rho_2^2) \cos \beta + S_r(\rho_1^2 + \rho_2^2) \sin \beta] \frac{\rho_0^2}{\rho_1\rho_2}, \quad C = 2B_i + Q_i - R_i.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь учтено, что σ , A , и D — вещественные; индекс r означает вещественную, а i — мнимую часть комплексной величины.

Фазовые переменные ψ_0 , ψ_1 , ψ_2 находятся из соответствующей системы простым интегрированием, причем одну из них можно выразить через две другие и β .

Система (4) инвариантна относительно преобразования $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$, $\beta \rightarrow -\beta$, что является следствием инвариантности исходной задачи относительно инверсии J [6]. Отсюда, в частности, вытекает, что решения системы (4) либо являются J -симметричными (переводятся в себя преобразованием $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$, $\beta \rightarrow -\beta$), либо образуют J -связанные пары (переводятся этим преобразованием друг в друга).

3. Расчет равновесий моторной подсистемы. У моторной подсистемы (4) существуют следующие равновесия, которые находятся аналитически [6, 7]: основной режим MF , вторичное стационарное течение SF , пара спиральных волн SW , чистые азимутальные волны AW , смешанные азимутальные волны первого MW^+ и второго MW^- родов, а также до четырех пар равновесий QPF , которым соответствуют двухчастотные квазипериодические движения жидкости. Последние находятся путем отыскания корней полинома 4-й степени.

На рис. 1 для $R = 2$, $\chi = 1$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$ изображена схема переходов, связанных с бифуркациями равновесий моторной подсистемы (4) при изменении свободного параметра μ_r .

В рассматриваемом случае в диапазоне $\mu_r^4 < \mu_r < \mu_r^6$ нет ни одного устойчивого равновесия моторной подсистемы (4). Это означает, что в данном интервале изменения свободного параметра μ_r в экспериментах могут реализоваться достаточно сложные режимы движения жидкости.

4. Расчет циклов моторной подсистемы. Помимо равновесий, у моторной подсистемы (4) могут существовать предельные циклы. В общем случае каждому циклу соответствует трехчастотный квазипериодический режим движения жидкости.

Для вычисления предельных циклов используются методы отыскания неподвижной точки эволюционного оператора или отображения последования Пуанкаре. Устойчивость циклов и их бифуркации исследовались путем расчета мультипликаторов Флоке (собственных значений матрицы монодромии).

В случае, когда значения параметров $R = 2$, $\chi = 1$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$, единственный устойчивый J -симметричный предельный цикл A_0 ответвляется при

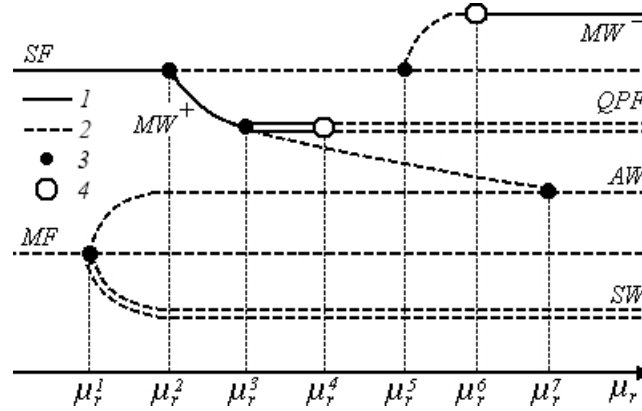


Рис. 1. Схема переходов при $\chi = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$. Одинарные кривые — J -симметричные режимы, двойные — J -связанные пары режимов; 1, 2 — устойчивые и неустойчивые режимы, 3 — бифуркации равновесий моторной подсистемы, 4 — точки, в которых от равновесий ответвляются циклы моторной подсистемы. Бифуркационные значения: $\mu_r^1 = 0$, $\mu_r^2 = 4.39$, $\mu_r^3 = 6.68$, $\mu_r^4 = 7.35$, $\mu_r^5 = 8.91$, $\mu_r^6 = 22.35$, $\mu_r^7 = 47.76$.

$\mu_r = \mu_r^6$ от смешанных азимутальных волн второго рода MW^- (рис. 1). Проекция его фазовых траекторий на координатные плоскости показаны на рис. 2. Цикл A_0 существует для $\mu_r < 22.35$ и устойчив в интервале $8.183 < \mu_r < 22.35$.

При $\mu_r = 8.183$ цикл A_0 теряет устойчивость в результате бифуркации потери симметрии: от цикла ответвляется устойчивая J -связанная пара циклов $A_{\pm 1}^1$. Она существует и устойчива в интервале $8.178 < \mu_r < 8.183$. В точке $\mu_r = 8.178$ пара циклов $A_{\pm 1}^1$ одновременно гибнет с неустойчивой J -связанной парой циклов $B_{\pm 1}$, которая существует для $\mu_r > 8.178$.

Закключение. Анализ устойчивости основного режима движения жидкости между вращающимися пронизаемыми цилиндрами при наличии радиального потока в случае, когда его спектр устойчивости содержит ноль и пару чисто мнимых собственных значений, сводится к исследованию нелинейной системы трех комплексных амплитудных уравнений.

Обнаружено, что при определенных значениях параметров задачи образуются режимы, имеющие достаточно сложную природу. В частности, рассчитаны J -симметричный предельный цикл и J -связанная пара циклов амплитудной системы, которым соответствуют трехчастотные квазипериодические режимы движения жидкости.

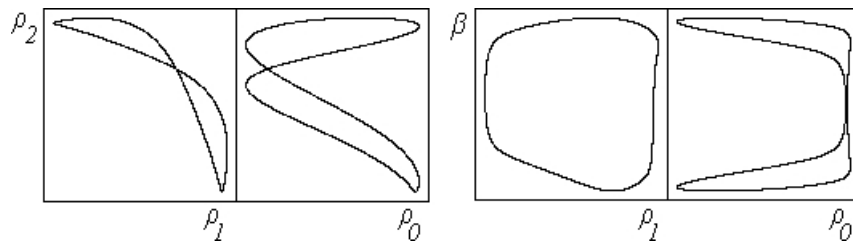


Рис. 2. Устойчивый J -симметричный цикл A_0 при $\mu_r = 12$ в случае $\chi = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$. Координаты точки на цикле: $\rho_0 = 0.1882$, $\rho_1 = 0.1353$, $\rho_2 = 0.1353$, $\beta = 3.1416$. Период цикла $T = 0.3680$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 11-05-01138, № 12-01-31262) и Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., гос. контракт № 14.A18.21.0873.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Шапакидзе Л. Д.* Устойчивость вязкого течения между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Сообщ. АН Груз. ССР. 1968. Т. 49. № 1. С. 19–24.
- [2] *Jain N. C., Bansal J. L.* On the flow of a viscous incompressible fluid between two coaxial rotating porous cylinders // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 1973. V. 78. № 5. P. 187–201.
- [3] *Shapakidze L.* On the stability of flows between two rotating cylinders // Proc. Int. Conf. Appl. Mech. 1. Beijing, China. 1989. P. 450–454.
- [4] *Kolesov V., Shapakidze L.* On oscillatory modes in viscous incompressible liquid flows between two counter-rotating permeable cylinders // Trends in App. Math. to Mech. Boca Ration: Chapman and Hall, CRC. 2000. V. 106. P. 221–227.
- [5] *Serre E., Sprague M. A., Lueptow R. M.* Stability of Taylor–Couette flow in a finite-length cavity with radial throughflow // Phys. Fluids. 2008. V. 20. № 3. P. 034106-1–034106-10.
- [6] *Колесов В. В., Юдович В. И.* Расчет колебательных режимов в течении Куэтта вблизи точки пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 81–93.
- [7] *Chossat P., Iooss G.* The Couette–Taylor problem. N. Y.: Springer, 1994. 233 p.
- [8] *Колесов В. В., Романов М. Н.* Расчет стационарных, периодических и квазипериодических движений вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 6. С. 53–62.

Romanov M. N. *The calculation of secondary regimes in a fluid between two rotating permeable cylinders.* The results of calculation of stationary, periodic, and quasi-periodic viscous fluid motions between two rotating permeable concentric cylinders arising near the intersection of bifurcation a secondary steady flow and azimuthal waves are presented.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВИБРОАКУСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, КОЛЕБЛЮЩИХСЯ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Сафроненко В. Г., Донченко Е. Н., Шутько В. М.

НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Рассмотрены вынужденные гармонические колебания композитной оболочки вращения с полимерным связующим в акустической среде. Физико-механические свойства полимера описываются в рамках теории термовязкоупругости. Дальнее поле акустического давления в окружающей среде определяется с помощью интеграла Гельмгольца. Реализуется численный подход, связанный с использованием метода разложения в ряды Фурье с последующим применением метода прогонки. В качестве численного примера определяются амплитудно-частотные, и диссипативные характеристики цилиндрической оболочки, а также дальнее поле звукового давления.

1. Рассматриваются гармонические вынужденные колебания непологой оболочки вращения трехслойной структуры, погруженной в линейную акустическую среду. При этом считаем, что оболочка отнесена к ортогональной системе координат $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, причем координатная поверхность $\alpha_3 = 0$ совпадает со срединной поверхностью заполнителя. Примем в дальнейшем гипотезу о ломаной линии для пакета [1], в соответствии с которой кинематические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_i + [1 + k_i(\alpha_3 - c)]c\varphi_i + \alpha_3\vartheta_i, \quad c \leq \alpha_3 \leq c + h_1, \\ u_i^{(2)} &= u_i - [1 + k_i(\alpha_3 + c)]c\varphi_i + \alpha_3\vartheta_i, \quad -c - h_2 \leq \alpha_3 \leq -c, \\ u_i^{(3)} &= u_i + \alpha_3(\alpha_i + \vartheta_i), \quad -c \leq \alpha_3 \leq c, \quad i = 1, 2, \\ u_3^{(j)} &= w, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Приняты следующие обозначения: k_i, A_i — главные кривизны и коэффициенты Ляме; u_i, w — перемещения точек отсчетной поверхности; φ_1, φ_2 — углы поворота нормали в заполнителе, дополнительные к углам поворота ϑ_1 и ϑ_2 ; $h_1, h_2, 2c$ — толщины внешних слоев и заполнителя.

Деформации отсчетной поверхности $E_{i,j}$, изменения кривизн и кручение $K_{i,j}$, соответствующие принятой теории были рассмотрены в работе [2].

Уравнения движения оболочки в обозначениях [2], соответствующие (1) имеют вид:

$$\begin{aligned} L_1(T_{11}, T_{22}, S) + k_1 Q_{11} + X_1 &= a_1 \ddot{u}_1 + a_2 \ddot{\vartheta}_1 + a_3 \ddot{\varphi}_1, \\ L_2(T_{22}, S) + k_2 Q_{22} + X_2 &= a_1 \ddot{u}_2 + a_2 \ddot{\vartheta}_2 + a_4 \ddot{\varphi}_2, \\ L_3(Q_{11}, Q_{22}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + X_3 + p &= a_1 \ddot{w}, \\ L_1(M_{11}, M_{22}, H) - Q_{11} &= 0; \quad L_2(H, M_{22}) - Q_{22} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

$$L_1(m_{11} + \overline{M}_{11}ck_1; m_{22} + \overline{M}_{22}ck_1; m_{12} + 2\overline{H}_{11}ck_1) - Q_{13} = 0,$$

$$L_2(m_{12} + 2\overline{H}_{11}ck_2; m_{22} + \overline{M}_{22}ck_2) - Q_{23} = 0.$$

Здесь введены в рассмотрение дифференциальные операторы

$$L_1(f_1, f_2, \varphi) = f_1' + \varphi^\bullet + \psi(f_1 - f_2),$$

$$L_2(f_1, f_2) = f_1' + f_2^\bullet + 2f_1f_2,$$

$$L_3(f_1, f_2) = f_1' + f_2^\bullet + \psi f_1; \quad \ddot{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

$$\{\dots\}' = \frac{1}{A_1} \frac{\partial(\dots)}{\partial \alpha_1}, \quad \{\dots\}^\bullet = \frac{1}{A_2} \frac{\partial(\dots)}{\partial \alpha_2}. \quad (3)$$

X_r ($r = 1, 2, 3$), p — компоненты внешней нагрузки и нормальной реакции со стороны жидкости. В (2) введены обобщенные усилия, моменты и перерезывающие силы, осредненные по пакету оболочки.

Пусть оболочка находится под воздействием поверхностной нагрузки, циклически изменяющейся во времени:

$$X_k(\alpha_1, \alpha_2, t) = q_k(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i\omega t),$$

где q_k — интенсивность нагрузки, ω — частота. В аналогичной форме представим все кинематические, деформационные и силовые факторы. В отношении определяющих соотношений для материалов слоев примем, что они могут быть описаны с позиций ортотропной термовязкоупругости [3]. Связь между амплитудами обобщенных усилий, моментов и деформационных характеристик

$$T_{11} = B_{11}^* E_{11} + B_{12}^* E_{22} + A_{11}^* K_{11} + A_{12}^* K_{22} + F_{11}^* \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + F_{12}^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2} + F_{13}^* \varphi_1,$$

$$M_{11} = A_{11}^* E_{11} + A_{12}^* E_{22} + D_{11}^* K_{11} + D_{12}^* K_{22} + N_{11}^* \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + N_{12}^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2} + N_{13}^* \varphi_1,$$

$$H = A_{33}^* E_{12} + 2D_{33}^* K_{12} + N_{33}^* \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} + N_{44}^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1} + N_{55}^* \varphi_2, \quad (4)$$

$$Q_{i3} = G_{i3}^* \varphi_i$$

и т. д.

Для замыкания соотношений (1)–(4) необходимо определить динамическую реакцию на оболочку со стороны жидкости, в которую она погружена. Это может быть произведено с помощью метода моделирования локального импеданса [4]. После нахождения полей перемещений и давления на поверхности оболочки можно определить поле динамического давления в жидкости с помощью интеграла Гельмгольца

$$p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[p(\vec{r}_1) \frac{\partial}{\partial n} (e^{ikR_1}/R_1) - \frac{\partial p(\vec{r}_1)}{\partial n} (e^{ikR_1}/R_1) \right] dS, \quad (5)$$

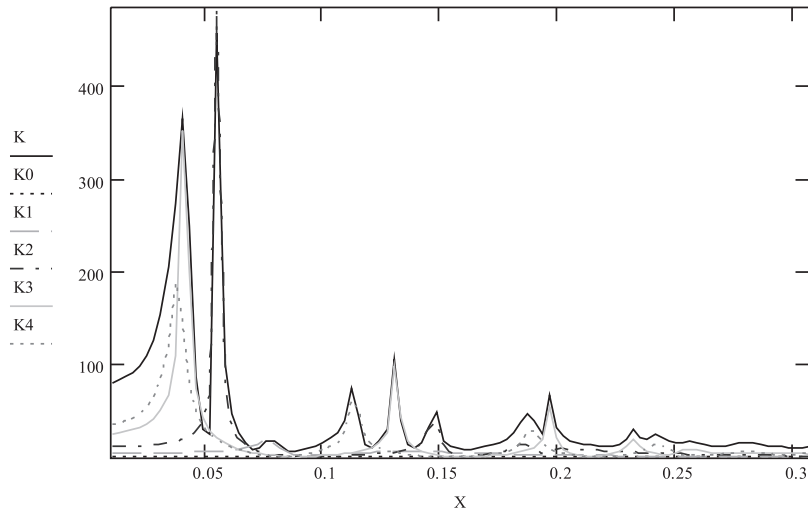


Рис. 1.

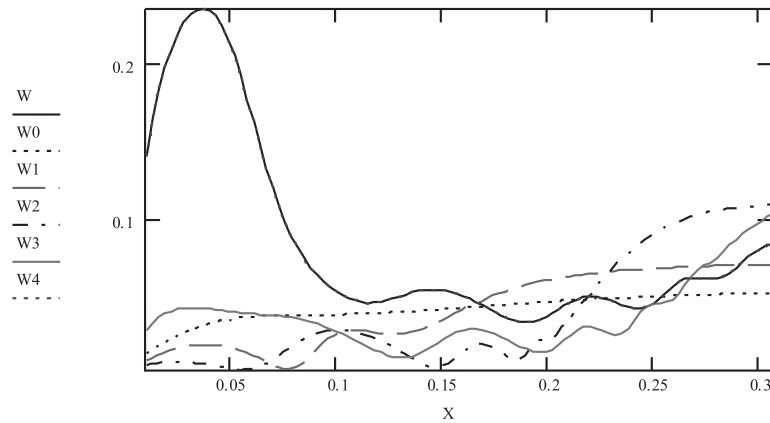


Рис. 2.

где S — срединная поверхность оболочки, k_1 — волновое число, $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ — радиус-векторы точек в жидкости и на оболочке; $R_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}|$. Для численного исследования используется подход, связанный с модальным представлением искомых функций в виде разложений в комплекснозначные ряды Фурье.

После отделения координаты α_2 и приведения всех соотношений к безразмерному виду формируется квазиодномерная система нормального вида 12 порядка, решаемая методом ортогональной прогонки:

$$\frac{dy_l}{d\alpha_i} = A_i f_1(\alpha_1, \bar{m}, y); \quad \underline{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_{12}\},$$

$$l = 1, 2, \dots, 12.$$

Для оценки диссипативных свойств оболочки введем в рассмотрение коэффициент

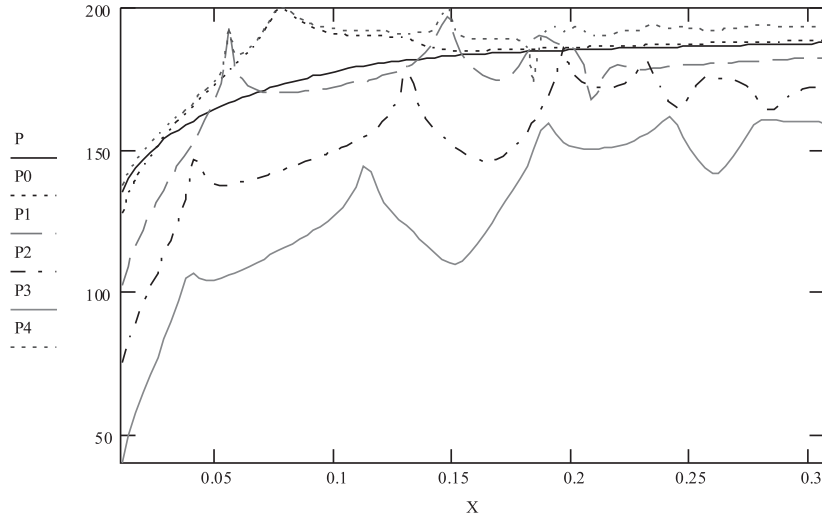


Рис. 3.

поглощения энергии, определяемый как

$$k = \frac{\hat{D}}{\hat{\Pi}}, \quad (6)$$

где $\hat{D}$ — энергия, поглощаемая в теле оболочки за период колебаний, $\hat{\Pi}$ — среднее значение за период колебаний полной механической энергии. Используемый метод модального анализа позволяет определять коэффициенты поглощения, соответствующие различным модам, а также его суммарное значение.

2. В качестве примера рассмотрим цилиндрическую трехслойную оболочку, колеблющейся в сжимаемой жидкости. Физико-механические характеристики внешних слоев соответствуют стали:

$$E^{(1)} = E^{(2)} = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; \quad \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3, \\ \rho = 7.8 \text{ г/см}^3.$$

Уравнения состояния полимерного заполнителя соответствуют модели термовязкоупругого тела [5]. Компоненты комплексной податливости при сдвиге I' , I'' в обозначениях [5] имеют вид:

$$I'(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)}{G(r, v, T)} \left[1 - H(r) \frac{\omega^2}{[\varphi(r, v, T)]^2 + \omega^2} \right] dr, \\ I''(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)H(r)}{G(r, u, T)} \frac{\varphi(r, v, T)\omega}{[\varphi(r, v, T)]^2 + \omega^2} dr.$$

Модель предполагает отсутствие объемной релаксации. Граничные условия соответствуют жесткому закреплению торцов. Для определения реакции жидкости на

колебания оболочки используется импеданс на бесконечно длинной цилиндрической оболочке. Численные расчеты проводились при следующих геометрических параметрах: $L = 400$ мм; $R = 100$ мм; $h_1 = h_2 = 0.2$ мм; $2c = 2$ мм; $T = 22^\circ\text{C}$. Нагрузка единичной интенсивности распределена на цилиндрической панели, расположенной в середине образующей. На рис. 1–3 представлены результаты расчетов поперечных и суммарных значений АЧХ нормального перемещения в центре площадки нагружения, коэффициента поглощения энергии и поля акустического давления в жидкости на расстоянии 50 радиусов оболочки от ее оси вращения на прямой, проходящей через центр площадки нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Наука, 1973. 172 с.
- [2] Сафроненко В. Г., Шепелева В. Г. Вынужденные колебания трехслойных оболочек вращения в сжимаемой жидкости // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. Научные труды. Вып. 1. Н.Новгород: ННГУ, 1993. С. 144–149.
- [3] Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
- [4] Юдин А. С., Яценко М. Н. Виброакустика оболочки с кольцевыми ребрами переменной жесткости // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. 1995. Вып. 2. С. 97–105.
- [5] Степаненко Ю. П., Исаев К. В., Азаров А. Д. Моделирование термомеханического поведения полимерных материалов // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды II Международной конференции. Ростов-на-Дону. 19–20 сентября 1996 г. Т. 1. С. 118–123.

Safronenko V. G., Donchenko E. N., Shutko V. M. *Numerical analysis of vibro-acoustic properties of composite three-layered shells of rotation under their vibration in acoustic medium.* Forced harmonic vibrations of a three-layered shell of rotation with the polymer binding in the acoustic media are considered. Constitutive equations of the polymer matrix are confirmed with the thermoviscoelasticity theory. To describe the propagation of acoustic waves the Helmholtz integral is used. Numerical approach that uses the method of expansion in Fourier series with the subsequent application of the sweep method is implemented. The amplitude-frequency and dissipation characteristics of the shell, as well as the far of sound pressure are investigated.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖИТЕЛЯ В ВИДЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Сметанин Б. И., Тарасов А. Е.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена осесимметричная задача о вынужденных колебаниях круговой цилиндрической оболочки в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Данная задача может рассматриваться как математическая модель волнового движителя в виде цилиндрической оболочки, взаимодействующей с жидкостью. Аналогичная плоская задача рассмотрена в [1]. Разработан алгоритм построения решения этой задачи, реализация которого позволяет определить основные механические характеристики. В соответствии с этим алгоритмом задача сведена к решению системы двух уравнений: дифференциального и интегрального. Линейность рассматриваемых уравнений позволила разделить решение этих уравнений. Для решения дифференциального уравнения применен метод разложения искомой функции по функциям Крылова. Для решения интегрального уравнения применен метод ортогональных многочленов. Оба эти метода привели решения указанных уравнений к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Пусть упругая цилиндрическая оболочка длины $2a$, радиуса R находится в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Жидкость занимает безграничную область. Невозмущенная скорость потока равна U . Ось Oz цилиндрической системы координат r, θ, z направлена вдоль оси оболочки. Уравнение движения оболочки, взаимодействующей с жидкостью, для случая осевой симметрии будем брать в виде [2]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{R^2} w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(R+0, z, t) - p(R-0, z, t), \quad (|z| \leq a), \quad (1)$$

здесь $D = Eh^3[12(1-\nu^2)]^{-1}$ — изгибная жесткость оболочки, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $w = w(z, t)$ — радиальное перемещение точек оболочки, h — толщина оболочки, ρ_0 — плотность оболочки, $p = p(r, z, t)$ — гидродинамическое давление, t — время. Перемещения, направленные к оси оболочки, считаются положительными. Граничные условия на торцах оболочки имеют вид

$$w = ay_0 e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = y_1 e^{-i\omega t} \quad \text{при } z = -a, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0 \quad \text{при } z = a,$$

ω — круговая частота, y_0, y_1 — const.

При $r = R, |z| > a$ будем считать непрерывным давление p , а радиальную скорость $v_r = \partial \varphi / \partial r$ — непрерывной при $r = R, |z| < \infty$.

$$\begin{aligned} p|_{r=R-0} &= p|_{r=R+0} & (|z| > a), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R-0} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R+0} & (|z| < \infty), \end{aligned} \quad (3)$$

φ — потенциал скоростей возмущенного движения.

Перед оболочкой, при $z \rightarrow -\infty$, должно выполняться условие

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

При удалении от оболочки должны выполняться условия затухания возмущения скоростей жидких частиц

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Функция $\varphi = \varphi(r, z, t)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа [3]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Возмущения основного потока, вносимые оболочкой, считаются малыми величинами. Отсюда следует, что

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| \ll U. \quad (6)$$

Условия (6) позволяют получить линеаризованный интеграл Лагранжа–Коши и линейное граничное условие

$$p = p_\infty - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (r = R, |z| \leq a), \quad (8)$$

здесь p_∞ — давление на бесконечности, ρ — плотность жидкости.

В соответствии с граничными условиями (2) функции w и φ представимы в виде

$$w(z, t) = w_*(z) e^{-i\omega t}, \quad \varphi(r, z, t) = \varphi_*(r, z) e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

В этом случае из уравнения (1) может быть получено следующее уравнение относительно функции $w_*(z)$

$$Dw_*^{IV}(z) + (EhR^{-2} - \rho_0 h \omega^2) w_* = \gamma(z) \quad (|z| \leq a), \quad (10)$$

$$\gamma(\eta) = \rho \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial z} \right) [\varphi_*(R+0, z) - \varphi_*(R-0, z)]. \quad (11)$$

Аналогично преобразуются остальные соотношения (2)–(8). Использование обобщенного интегрального преобразования Фурье позволяет получить следующие представления функции $\varphi_*(r, z)$

$$\begin{aligned}\varphi_*(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_l A(\xi) I_0(|\xi|r) e^{-i\xi z} d\xi \quad (0 \leq r \leq R), \\ \varphi_*(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_l B(\xi) K_0(|\xi|r) e^{-i\xi z} d\xi \quad (R \leq r < \infty).\end{aligned}\quad (12)$$

Здесь $A(\xi)$, $B(\xi)$ — достаточно произвольные гладкие функции, $I_n(z)$ и $K_n(z)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента. Контур интегрирования l в плоскости комплексного переменного ξ необходимо выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие (4). Использование (3), (8), (11) и (12) приводит к следующему интегральному уравнению

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \gamma(\eta) H(\eta - z) d\eta &= -4\pi i \rho U^2 [icw_*(z) - w'_*(z)] \quad (|z| \leq a), \\ H(t) &= \int_l \frac{|\xi|}{\xi + c} L(|\xi|R) e^{i\xi t} d\xi, \quad L(u) = 2u I_1(u) K_1(u), \quad c = \frac{\omega}{U}.\end{aligned}\quad (13)$$

Можно доказать, что условие (4) будет выполняться, если контур l обходит точку $(-c)$ действительной оси сверху. Деформируя такой контур на действительную ось, получим

$$H(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{|\xi| L(|\xi|R)}{\xi + c} e^{i\xi t} d\xi - \pi ic L(cR) e^{-ct}.$$

Решение уравнения (10) (в безразмерных величинах) будем искать в виде

$$\begin{aligned}w(z) &= \Psi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \Psi_n(z) \quad (|z| \leq 1), \\ \Psi_0(z) &= y_0 + y_1(1 + z).\end{aligned}\quad (14)$$

Здесь $\Psi_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) — функции Крылова, которые в рассматриваемой задаче определяются формулами

$$\Psi_{2n-1}(z) = \frac{\sin \varepsilon_{2n-1} z}{\sin(\varepsilon_{2n-1})} + \frac{\operatorname{ch}(\varepsilon_{2n-1} z)}{\operatorname{ch}(\varepsilon_{2n-1})} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Параметр ε_{2n-1} — положительный корень уравнения

$$\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \operatorname{th} \varepsilon = 0.$$

При больших значениях n

$$\varepsilon_{2n-1} \approx \frac{\pi}{4}(4n + 1) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\Psi_{2n}(z) = \frac{\cos(\varepsilon_{2n}z)}{\cos(\varepsilon_{2n})} + \frac{\operatorname{sh}(\varepsilon_{2n}z)}{\operatorname{sh}(\varepsilon_{2n})} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Здесь параметр ε_{2n} — положительный корень уравнения

$$\sin \varepsilon + \cos \varepsilon \operatorname{cth} \varepsilon = 0.$$

При больших значениях n

$$\varepsilon_{2n} \approx \frac{\pi}{4}(4n - 1) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Легко убедиться, что функции $\Psi_n(z)$ удовлетворяют условиям

$$\Psi_n(-1) = \Psi'_n(-1) = \Psi''_n(1) = \Psi'''_n(1) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-1}^1 \Psi_n(z) \Psi_m(z) dz = C_n \delta_{mn} \quad (n, m = 1, 2, \dots),$$

где δ_{mn} — символ Кронекера, C_n — const.

Решение интегрального уравнения ищется в форме, аналогичной (14)

$$\gamma(z) = \gamma_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \gamma_n(z) \quad (|z| \leq 1). \quad (15)$$

Функции $\gamma_n(z)$ ($n = 0, 1, \dots$) определяются из интегрального уравнения (в безразмерных величинах)

$$\int_{-1}^1 \gamma_n(\eta) H(\eta - z) d\eta = d_1 \Psi_n(z) + d_2 \Psi'_n(z) \quad (|z| \leq 1) \quad n = 0, 1, \dots; \quad d_1, d_2 — \text{const.} \quad (16)$$

Ядро интегрального уравнения (16) имеет сингулярную особенность, поэтому его решение целесообразно строить методом ортогональных многочленов. В этом случае

$$\gamma_n(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{nm} T_m(z) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (17)$$

$T_m(z)$ — многочлены Чебышева первого рода. В (17) учтено, что

$$\int_{-1}^1 \gamma_n(z) dz = 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Реализация процедуры метода ортогональных многочленов приводит интегральное уравнение (16) для каждого значения n к системе линейных алгебраических уравнений, которую следует решать методом редукции. После определения функций $\gamma_n(z)$ ($n = 0, 1, \dots$) разложения (14) и (15) нужно внести в дифференциальное уравнение (10) (записанное в безразмерной форме). Затем, после почленного умножения этого уравнения на $\Psi_m(z)$ ($m = 1, 2, \dots$) и интегрирования каждого

слагаемого по z от -1 до 1 , уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно X_n . Эту систему также следует решать методом редукции. После нахождения коэффициентов X_n приближенные представления искомых функций в аналитическом виде будут определены.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Беляев В. В., Грунтфест Р. А. Волновой движитель как пропульсивная система // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естественных наук. 1974. № 4. С. 18–23.
- [2] Тимошенко С. П. Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
- [3] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.

Smetanin B. I., Tarasov A. E. *Hydrodynamic modeling of propulsion as a cylindrical shell in a fluid flow.* We consider the axisymmetric problem of forced oscillations of the circular cylindrical shell in the flow of an ideal incompressible fluid. This problem can be considered as a mathematical model of wave propulsion as a cylindrical shell interacting with the liquid. A similar plane problem is considered in [1]. The algorithm of solving this problem is developed, its implementation allows us to determine the basic mechanical characteristics. According to the algorithm the problem is reduced to solving a system of two equations: differential and integral. The linearity of the equations allows us to split the solution to these equations. To solve the differential equation we use the method of expansion of the unknown function by Krylov functions. In order to solve the integral equation we use the method of orthogonal polynomials. Both this methods lead to the solution of systems of linear algebraic equations.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ УЗКИХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Столяр А. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе проводится предельный переход от уравнений статики и динамики пластин и панелей к соответствующим уравнениям балки или арки. Применяется метод асимптотического интегрирования в сочетании с методом пограничного слоя Вишика-Люстерника. При этом решение исходной задачи сводится к решению последовательно линейных или нелинейных задач меньшей размерности. В качестве малого параметра δ выбирается отношение длин двух смежных сторон пластины. Решение строится в виде рядов по параметру δ . Коэффициенты первого ряда получаются в результате первого итерационного процесса прямой подстановкой рядов в уравнения и граничные и начальные условия. Главные члены разложения удовлетворяют известным линейным или нелинейным уравнениям меньшей размерности. В ходе первого итерационного процесса возникают невязки при попытке удовлетворить граничным условиям; они компенсируются в ходе второго итерационного процесса функциями пограничного слоя, которые являются решениями соответствующей задачи для обобщённого бигармонического оператора в полуполосе.

Предельный переход от трёхмерных уравнений линейной теории упругости к двумерным в случае тонких областей исследовался в работах И. И. Воровича, А. Л. Гольденвейзера, Л. А. Агаловяна, Ю. А. Устинова; для нелинейных задач — в работах В. В. Кучеренко и В. А. Попова, Н. Сугимото. Нелинейные задачи колебаний и динамической устойчивости узких цилиндрических панелей исследовались в работе [1]. Уравнения типа Миндлина–Тимошенко рассматривались в работах [2, 3].

1. Уравнения колебаний узкой ортотропной прямоугольной пластины на упругом основании. Рассмотрим соответствующую начально-краевую задачу, записанную ниже в безразмерных величинах (используем уравнения типа Кармана [4, 5]):

$$c_2 \partial_y^4 w + 2c_3 \delta^2 \partial_y^2 \partial_x^2 w + \delta^4 \partial_x^4 w + k_1 \delta^4 w + \delta^4 \partial_t^2 w = \delta^2 L(w, \Phi) + \delta^4 q(x, t), \quad (1)$$

$$c_2 \partial_y^4 \Phi + 2c_1 \delta^2 \partial_y^2 \partial_x^2 \Phi + \delta^4 \partial_x^4 \Phi = -\alpha c_2 \delta^2 L(w, w), \quad (2)$$

$$[w, \partial_t w]_{t=0} = 0, \quad \left(\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \delta = \frac{a}{l} \right),$$

$$L(w, \Phi) = \partial_x^2 w \partial_y^2 \Phi + \partial_y^2 w \partial_x^2 \Phi - 2 \partial_x \partial_y w \partial_x \partial_y \Phi, \quad (3)$$

$$[\partial_x^2 \Phi, \partial_x \partial_y \Phi, \partial_y^2 w + \nu_1 \delta^2 \partial_x^2 w, \partial_y^3 w + c_4 \delta^2 \partial_y \partial_x^2 w]_{y=\pm 1} = 0 \quad (4)$$

$$[w, \partial_x^2 w, \delta^2 \partial_x^2 \Phi - \nu_2 \partial_y^2 \Phi, \delta^2 \partial_x^3 \Phi + c_5 \partial_x \partial_y^2 \Phi]_{x=0,1} = 0. \quad (5)$$

Здесь константы $c_1, \dots, c_5$ выражаются через физические параметры задачи, ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона.

Кроме того, применяем известное тождество, также в безразмерном виде:

$$\int_0^1 (\partial_y^2 \Phi - \nu_1 \delta^2 \partial_x^2 \Phi) dx = \alpha \delta^2 \int_0^1 (\partial_x w)^2 dx. \quad (6)$$

Проведя первые три шага итераций, найдём соотношения, в качестве условий разрешимости которых получим начально-краевую задачу для главного члена разложения. Запишем её в размерном виде:

$$\frac{E_1 h^3}{12} \partial_{x_1}^4 W + KW + \rho h \partial_\tau^2 W = \frac{1}{2} \frac{E_1 h}{l} \partial_{x_1}^2 W \int_0^l (\partial_{x_1} W)^2 dx_1 + Q, \quad (7)$$

$$[W, \partial_{x_1}^2 W]_{x=0,l} = 0, \quad [W, \partial_\tau W]_{\tau=0} = 0.$$

Как известно, задача (7) описывает колебание балки на упругом основании.

Однако, при попытке удовлетворить краевые условия на торцах пластины возникают невязки, для устранения которых проводим второй итерационный процесс.

2. Второй итерационный процесс. Для компенсации невязок, возникших в ходе первого итерационного процесса, применим функции погранслоя. Для этого решение задачи (1)–(6) построим в виде:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{2k} \{w_{2k}(x, y, t) + u_{2k}(\xi, y, t) + \nu_{2k}(\eta, y, t)\}, \quad (8)$$

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{2k} \{\Phi_{2k}(x, y, t) + \varphi_{2k}(\xi, y, t) + \psi_{2k}(\eta, y, t)\}.$$

Здесь $\xi = x/\delta$, $\eta = (1-x)/\delta$ — так называемые «растянутые» переменные, u_{2k} , φ_{2k} и ν_{2k} , ψ_{2k} — функции пограничного слоя, сосредоточенные у границ $x = 0$ и $x = 1$, соответственно.

Подставим (8) в (1)–(6), учтём результаты первого итерационного процесса и получим соотношения для определения функций пограничного слоя. На первых шагах второго итерационного процесса получаем тривиальные решения. Рассмотрим первые нетривиальные краевые задачи.

3. Решение обобщённой бигармонической задачи. Функция u_4 удовлетворяет задаче:

$$c_2 \partial_y^4 u_4 + 2c_3 \partial_y^2 \partial_\xi^2 u_4 + \partial_\xi^4 u_4 = 0, \quad [u_4, \partial_\xi^2 u_4]_{\xi=\frac{1}{\delta}} = 0, \quad (9)$$

$$[\partial_y^2 u_4 + \nu_1 \partial_\xi^2 u_4, \partial_y^3 u_4 + c_4 \partial_y \partial_\xi^2 u_4]_{y=\pm 1} = 0, \quad (10)$$

$$u_4|_{\xi=0} = -w_4|_{x=0}, \quad \partial_\xi^2 u_4|_{\xi=0} = -\partial_x^2 w_2|_{x=0}.$$

Переменная t здесь играет роль параметра.

Если имеет место неравенство

$$\frac{G}{E_1} < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}}, \quad (11)$$

то решение (9), (10) даётся рядом:

$$u_4 = \sum_{k=-j+1}^0 E_k e^{-s_k \xi} F_k(y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} E_k e^{-s_k \xi} F_k(y).$$

Так называемые функции П.Ф. Папковича $F_k(y)$ удовлетворяют граничной задаче:

$$c_2 F_k^{IV} + 2c_1 s_k^2 F_k^{II} + s_k^4 F_k = 0, \quad [F_k^{II} + \nu_1 s_k^2 F_k, F_k^{III} + c_4 s_k^2 F_k^I]_{y=\pm 1} = 0, \quad (12)$$

где s_k — «приведённые» корни уравнения

$$\wp \operatorname{sh} z - \sin \omega z = 0, \quad (13)$$

$z = 2\beta s_k$, j — количество его вещественных корней; $\wp$, ω и β — константы, которые выражаются через механические параметры пластины; можно получить асимптотические представления для действительной и мнимой части корней уравнения (13) в виде:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\omega \pi}{1 + \omega^2} \frac{4k + 1}{2} - \frac{\ln k}{1 + \omega^2} + O\left(e^{-\frac{4\pi\omega}{1+\omega^2}k}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{1 + \omega^2} \frac{4k + 1}{2} - \frac{\omega \ln k}{1 + \omega^2} + O\left(e^{-\frac{4\pi\omega}{1+\omega^2}k}\right).$$

Коэффициенты E_k получены с использованием тождества

$$\int_{-1}^1 (F_k^{II} F_n^{II} - p s_k^2 s_n^2 F_k F_n) dx = 0, \quad k \neq n, \quad p = \frac{c_1}{c_2},$$

и тождества

$$\int_{-1}^1 (F_k^{II} \bar{F}_n^{II} - p s_k^2 \bar{s}_n^2 F_k \bar{F}_n) dx = 0, \quad \forall k, n,$$

где линия сверху символа означает комплексное сопряжение, в виде:

$$E_k = \int_{-1}^1 (F_k^{II} f_1^{II} - s_k^2 F_k f_2) dy \bigg/ \int_{-1}^1 [(F_k^{II})^2 - s_k^4 F_k^2] dy.$$

В связи с вычислением E_k рассматривается задача представления двух вещественных функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ в виде рядов по функциям П.Ф. Папковича [7]:

$$f_1(y) = \sum_{k=-j+1}^{\infty} E_k F_k(y), \quad f_2(y) = \sum_{k=-j+1}^{\infty} s_k^2 E_k F_k(y). \quad (14)$$

Различные проблемы этого типа исследовались в [6, 8–10], в том числе и задача полноты системы элементарных решений П.Ф. Папковича для бигармонического

оператора в полуполосе. Сформулируем условия возможности разложений (14) (теорема 1 доказана в [7], доказательство теоремы 2 аналогично).

Теорема 1. Пусть чётная функция $f_1(y)$ непрерывно дифференцируема, а её вторая производная абсолютно интегрируема на отрезке $[0, 1]$. Тогда при $y \in [0, 1)$ сумма первого ряда в (14) сходится к функции $f_1(y)$ при выполнении условий

$$\nu_2 f_1^I(1) + \int_0^1 f_2(y) dy = 0, \quad (15)$$

$$c_1 \nu_1 \nu_2 f_1^I(1) - 2\nu_1 c_4 f_1(1) + 2(2c_3 \nu_1 - c_1) \int_0^1 f_1(y) dy + c_1 \nu_1 \int_0^1 f_2(y) y^2 dy = 0.$$

Теорема 2. Пусть чётная функция $f_2(y)$ непрерывно дифференцируема, а её вторая производная абсолютно интегрируема на отрезке $[0, 1]$. Пусть тем же условиям удовлетворяет функция $f_1^{II}(y)$. Тогда при $y \in [0, 1)$ сумма второго ряда в (14) сходится к функции $f_2(y)$ при выполнении первого условия (15).

Равенства (15) могут считаться условиями сходимости рядов (14). Они имеют и практический смысл: они применяются для вычисления граничных значений функций первого итерационного процесса.

4. Заключительные замечания.

Замечание 1. Пусть теперь продольные стороны пластины не свободны, а нагружены изгибающим моментом $M(x_1, \tau)$ (на сторонах $x_2 = \pm a$). Это означает, что вместо третьего равенства в (4) мы имеем следующее условие:

$$[\partial_y^2 w + \nu_1 \delta^2 \partial_x^2 w]_{y=\pm 1} = -\delta^2 m(x, t), \quad m(x, t) = \frac{M(x_1, \tau)}{D_1 h} l^2.$$

Оказывается, что в этом случае также возможен переход от уравнений колебаний пластины к уравнениям колебаний балки, но под действием «приведённой» нагрузки $Q(x_1, \tau) + \nu_1 \partial_{x_1}^2 M(x_1, \tau)$.

Замечание 2. Заменяем теперь третье условие в (4) на условие $[\partial_y w]_{y=\pm 1} = 0$. Это означает, что имеет место свободное защемление продольных сторон пластины. В этом случае также можно свести задачу о колебаниях пластины к задаче о колебаниях балки, но с «приведённым» модулем упругости. Получим:

$$D_1 \partial_{x_1}^4 W + KW + \rho h \partial_\tau^2 W = Q(x_1, \tau).$$

Если модули упругости связаны отношением $E_1/E_2 = O(\delta^2)$ (т.е. жёсткость материала в направлении Ox_2 «существенно» превосходит таковую в направлении Ox_1), то в этом случае асимптотическое интегрирование не приводит к предельному переходу.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Срубцик Л. С., Столяр А. М., Цибулин В. Г.* Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений колебаний цилиндрической панели // ПММ. 1998. Т. 52, вып. 4. С. 657–665.
- [2] *Russell D. L., White L. W.* Formulation and Validation of Dynamical Models for Narrow Plate Motion // Applied Mathematics and Computation. 1993. 58. Pp. 103–141.
- [3] *Russell D. L., White L. W.* The bowed narrow plate model // Electronic Journal of Differential Equations. 2000. 27. Pp. 1–19.
- [4] *Столяр А. М.* Асимптотический анализ задач статики и динамики узких прямоугольных пластин // Изв. вузов Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки. Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. 2005. С. 107–111.
- [5] *Сьярле Ф., Рабье П.* Уравнения Кармана. М.: Мир, 1983. 172 с.
- [6] *Столяр А. М.* Асимптотическое интегрирование уравнения колебаний длинной прямоугольной пластины // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. Науки. 1986. № 4. С. 46–50.
- [7] *Столяр А. М.* Представление двух действительных функций в виде рядов по функциям П. Ф. Папковича в одной задаче предельного перехода // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. Науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы математической гидродинамики. 2009. С. 203–206.
- [8] *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой пластины с двумя закреплёнными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17, вып. 2. С. 211–228.
- [9] *Устинов Ю. А., Юдович В. И.* О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // ПММ. 1973. Т. 37, вып. 4. С. 706–714.
- [10] *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М., 1966. С. 116–136.

Stolyar A. M. *Some static and dynamic problems of narrow thin-walled structures.* Derivation of narrow plates and shells model is carried out in the paper. It has been based on the method of asymptotic integration in connection with boundary layer method and applied to one non-linear dynamic problem. It allows to reduce solution of the given problem to a sequence of linear or nonlinear one-dimensional initial boundary-value problems (as a result of the first iteration process) and a sequence of two-dimensional linear problems (second order process) and get the solution of a given problem with high accuracy.

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОУПРУГОГО СЛОЯ

Суворова Г. Ю.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Рассматривается объемная связанная динамическая задача о распространении термоупругих волн в преднапряженном слое, возникающих под действием осциллирующей нагрузки. Поверхность слоя предполагается свободной от механических напряжений, на нижней грани слоя 3 режима граничных условий. Построена трехмерная функция Грина термоупругой среды, исследованы ее дисперсионные свойства для разных граничных условий. Решена контактная задача, проанализировано влияние условий на нижней грани на тепловой поток при начальной деформации.

1. Постановка краевой задачи. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат Лагранжа x_1, x_2, x_3 , связанную с естественным состоянием среды. Полагаем, что термоупругий слой $0 \leq x_3 \leq h$, $|x_1|, |x_2| < \infty$ при температуре $\tau = \tau_1 = \text{const}$ подвергнут действию однородных начальных напряжений, наводящих в среде однородную начальную деформацию. Материал среды ортотропный, в естественном состоянии относящийся к материалам гексагональной симметрии класса 6mm. Колебания слоя вызваны либо действием распределенной в области Ω на поверхности среды смещением, либо температурой $\mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$ (ω — круговая частота колебаний). На нижней грани предполагаются условия:

задача 1: жесткое сцепление с недеформируемым основанием и теплоизоляция,

задача 2: отсутствие трения и теплоизоляция,

задачи 3: жесткое сцепление и фиксированная температура.

Движение термоупругого слоя описывается уравнениями [4] ($i, j = 1, 2, 3$):

$$\nabla_0 \cdot \Theta = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \theta_{ij} = c_{ijkl}^* u_{k,l} - \beta_{ij}^* u_4, \quad (1)$$

$$K_{ik} u_{4,ik} = \varkappa \frac{\partial u_4}{\partial t} + \tau_1 \beta_{ik}^* \frac{\partial u_{k,i}}{\partial t}, \quad \varkappa = \frac{c_\varepsilon \rho_0 \tau_1}{\tau_0}. \quad (2)$$

Здесь ρ_0 — плотность материала среды в естественном состоянии u_i^τ — компоненты расширенного вектора смещений $\mathbf{u}^\tau = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, где $u_4 = \tau = \tau_1 - \tau_0$ — изменение температуры среды в НДС, τ_0 — температура среды в естественном состоянии, τ_1 — температура среды в начально-деформированном состоянии λ_{ij} — компоненты тензора коэффициентов теплопроводности, c_ε — теплоемкость при постоянной деформации, β_{ij}^* — компоненты тензора термоупругих констант в деформированном состоянии, нижними индексами после запятой отмечены производные по соответствующим координатам. Далее, поскольку рассматривается установившийся режим колебаний, экспоненциальный множитель опускаем.

Следуя [1, 2] для приведения к безразмерному виду используем следующие нормализованные параметры:

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{\omega^* x_i}{V_p}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega^*}, \quad t' = \omega^* t, \quad \tau' = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau'_1 = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \omega^* = \frac{c_\varepsilon c_{11}}{\lambda_{11}}, \quad E = \frac{\tau_0 \beta_{11}^2}{\rho c_\varepsilon c_{11}}, \\ u'_i &= \frac{u_i \rho \omega^* V_p}{\beta_{11} \tau_0}, \quad c_{ijkl}^* = \frac{c_{ijkl}^*}{c_{11}}, \quad \beta_{ij}^* = \frac{\beta_{ij}^*}{\beta_{11}}, \quad \lambda'_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{11}}, \quad \theta'_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{\beta_{11} \tau_0}, \quad f = \frac{f}{\tau_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь E — постоянная термоупругой связи, ω^* — нормализованная частоты среды, V_p — скорость продольной волны недеформированного материала.

Для удобства изложения введем расширенный вектор напряжений

$$\mathbf{q}^\tau = \{ \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}, \theta_{34} \},$$

где $\theta_{34} = u_{4,3}$ нормальная к поверхности среды компонента вектора теплового потока. С учетом введенных обозначений граничные условия имеют вид:

$$x_3 = h :$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad x_1 \in \Omega \quad (4)$$

$$\mathbf{q}^\tau = 0, \quad x_1 \notin \Omega \quad (5)$$

$$x_3 = 0 :$$

задача 1.

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad q_4 = 0; \quad (6)$$

задача 2.

$$\theta_{31} = \theta_{32} = u_3 = 0, \quad q_4 = 0; \quad (7)$$

задача 3.

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad u_4 = 0. \quad (8)$$

2. Решение краевой задачи. Для решения смешанной задачи рассмотрим вспомогательную краевую задачу: будем полагать, что на всей поверхности задана механическая нагрузка или тепловой поток $\mathbf{q}^\tau$. Тогда после применения преобразования Фурье к системе уравнений движения, теплопроводности и новым граничным условиям по координатам x_1, x_2 их решение будем искать в виде [3, 4]:

$$\begin{aligned} U_p &= -i\alpha_p \sum_{k=1}^4 f_{pk} [d_k sh \sigma_k x_3 + d_{k+4} ch \sigma_k x_3], \quad p = 1, 2, \\ U_3 &= \sum_{k=1}^4 f_{3k} [d_k ch \sigma_k x_3 + d_{k+4} sh \sigma_k x_3], \quad U_4 = \sum_{k=1}^4 f_{4k} [d_k sh \sigma_k x_3 + d_{k+4} ch \sigma_k x_3]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь σ_k — корни характеристического уравнения [3].

Неизвестные d_k , $k = 1, 2, \dots, 8$ определяются из удовлетворения решением (9) граничных условий (4), (5) и одной из трех задач (6)–(8), т.е. для нахождения d_k получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{Q}, \quad (10)$$

где $\mathbf{Q} = \{ Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}$ — образ Фурье $\mathbf{q}^T$. Дисперсионное уравнение задачи: $\det \mathbf{A} = 0$.

Найдя d_k из (10), решение вспомогательной краевой задачи можем представить в виде [4]:

$$\mathbf{u}^T(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3, \omega) \mathbf{q}^T(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (11)$$

где $\mathbf{k}$ — матрица-функция Грина,

$$\mathbf{k}(s, t, x_3, \omega) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega) e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (12)$$

Таким образом, решение смешанной контактной задачи сведено к решению интегрального уравнения:

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, h, \omega) \mathbf{q}^T(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mathbf{u}_0(x_1, x_2). \quad (13)$$

3. Влияние граничных условий на функцию Грина среды. Особенность рассматриваемого класса задач — наличие у элементов функции $\mathbf{K}$ счетного множества комплексных нулей и полюсов, часть из которых обладает малой мнимой частью, что обуславливает осцилляцию ядра интегрального уравнения. Анализ показал, что наряду с комплексными полюсами с малой мнимой частью, функция $\mathbf{K}$ имеет конечное множество существенно комплексных полюсов с большой мнимой частью. Для численных расчетов использовался селенид кадмия, обладающий большой теплоемкостью и ярко выраженными теплопроводящими свойствами. Расчеты проведены при следующих значениях параметров [2] $\tau_0 = 298 \text{ K}$, $\rho_0 = 5.504 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $A_{11} = 7.41 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $A_{12} = 4.52 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $A_{13} = 3.93 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $A_{33} = 8.36 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $A_{44} = 1.32 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\beta_{11} = 0.621 \cdot 10^6 \text{ Н/К/м}^2$, $\beta_{33} = 0.551 \cdot 10^6 \text{ Н/К/м}^2$, $\lambda_{11} = 9 \text{ Вт/м/К}$, $\lambda_{33} = 9 \text{ Вт/м/К}$, $c_\varepsilon = 260 \text{ Дж/кг/К}$.

На рис. 1, 2, 3 представлены графики распределения полюсов функции $\mathbf{K}$, рассчитанные для частного случая — плоской задачи о колебаниях слоя под действием заданной на поверхности среды механической или тепловой нагрузки при граничных условиях задачи (6), (7), (8) соответственно. На рисунках слева приведены комплексные полюса с малой мнимой частью, справа — с существенно большой мнимой частью. Как следует из графиков, если не учитывать наличие существенно комплексных мод, вид дисперсионной диаграммы термоупругой среды незначительно отличается от дисперсионной диаграммы чисто упругой среды. Также видно, что изменение теплового условия на вещественные полюса не влияет, в то время как при изменении механических условий их поведение значительно отличается.

4. Влияние граничных условий на распределение теплового потока в преднапряженном слое. Рассмотрим частный случай контактной задачи — плоскую задачу о возбуждении колебаний на поверхности предварительно растянутого слоя воздействием температуры. Тогда решив одномерный аналог интегрального уравнения (13), получим тепловой поток в зоне контакта. На рис. 4 представлены графики, иллюстрирующие влияние граничных условий (4)–(8) на

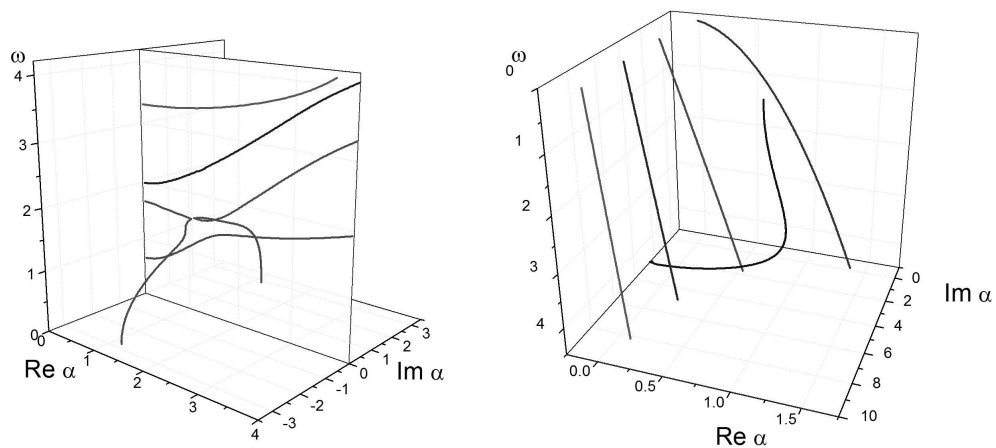


Рис. 1. Полюса функции Грина задачи 1.

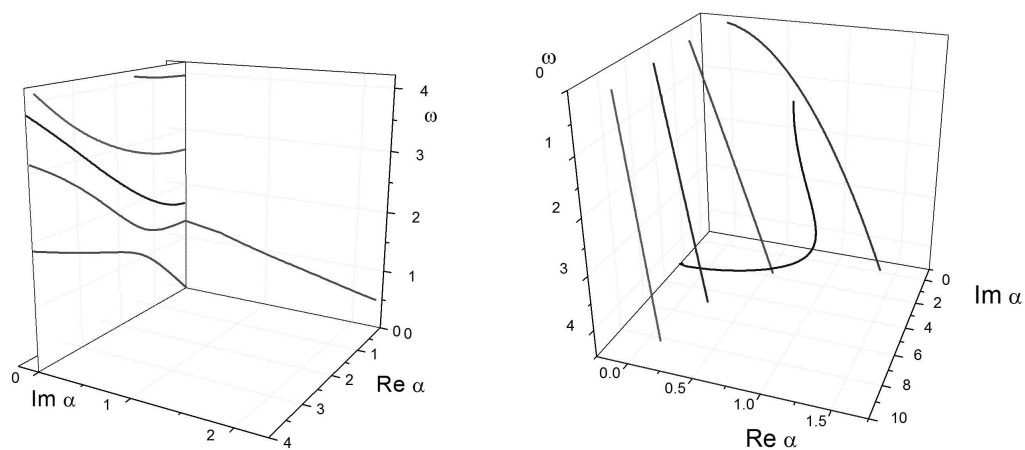


Рис. 2. Полюса функции Грина задачи 2.

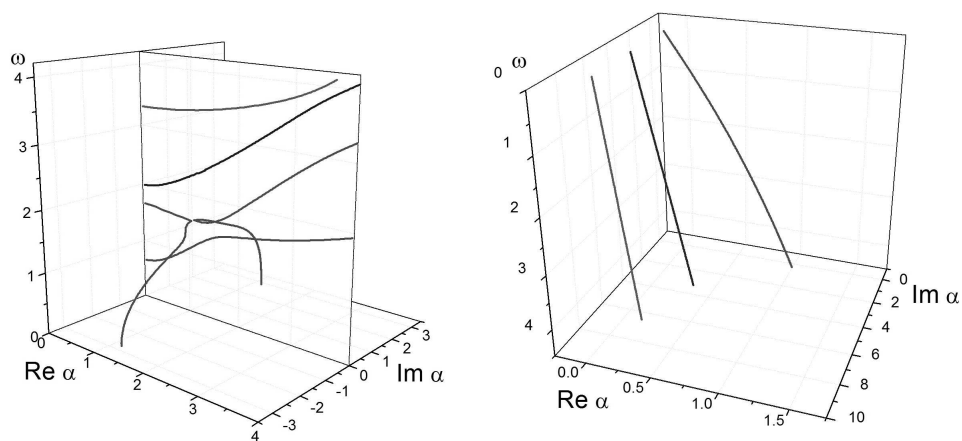


Рис. 3. Полюса функции Грина задачи 3.

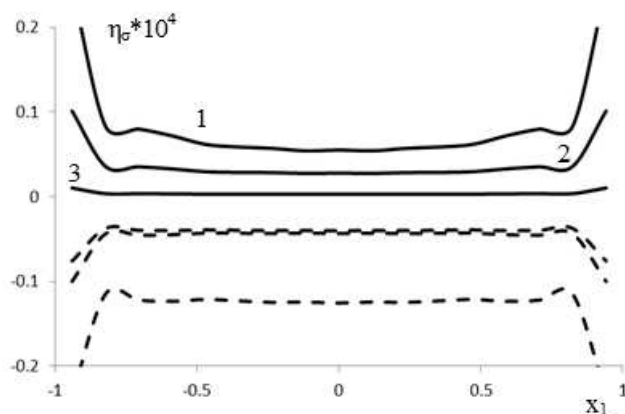


Рис. 4. Влияние граничных условий на распределение теплового потока в преднапряженном слое.

распределение теплового потока $\eta_\sigma = q_{4\sigma} - q_4$ при частоте $\omega = 0.5$. Цифрами 1, 2 и 3 отмечены кривые, рассчитанные для соответствующих задач, сплошными линиями обозначены вещественные составляющие, прерывистыми — мнимые. Как следует из графиков, фиксирование температуры на нижней грани слоя значительно уменьшает тепловой поток на поверхности. Изменение механических условий же такого сильного влияния на него не оказывает.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Al-Qahtani H. N. Dattaa S. K.* Thermoelastic waves in an anisotropic infinite plate // Journal of Appl. Phys. 2004. № 7. Pp. 3645–3657.
- [2] *Sharma J. N. Mohinder Pal, Dayal Chand* Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials // Journal of Sound and Vibration. 2005. № 284. Pp. 227–248.
- [3] *Суворова Г. Ю.* Влияние начальных тепловых и механических воздействий на дисперсионные свойства термоупругого слоя // Вестник ЮНЦ РАН. 2011. № 4. С. 11–17.
- [4] *Шейдаков Д. Н. Белянкова Т. И. Шейдаков Н. Е. Калинин В. В.* Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды // Вестник ЮНЦ РАН. 2008. № 3. С. 9–15.

Suvorova G. Yu. *The effect of boundary conditions on the dynamic characteristics of the thermoelastic layer.* The three-dimensional coupled dynamic problem of the propagation of thermoelastic waves in prestressed layer, arising by the influence of the oscillating load in prestressed layer is considered. The surface layer is assumed to be free of mechanical stress, on the bottom layer 3 modes of boundary conditions are assumed. Three-dimensional Green function of the thermoelastic medium is constructed, its dispersion properties are investigated for different boundary conditions. Contact problem is solved, the influence conditions on the bottom of the heat flow at the initial deformation is analyzed.

ДЛИННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПРИЛИВОМ ЗАДАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО СОСТАВА

Трепачев В. В.^{*}, Трепачева А. В.^{**}

^{*}Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

^{**}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследуется краевая задача для нелинейной системы уравнений теории длинных плоских волн, бегущих в заданном направлении на поверхности идеальной тяжелой несжимаемой жидкости над ровным твердым дном. Влияние дисперсии на волновое движение здесь не учитывается. Безвихревое волновое движение жидкости в канале постоянной глубины вызвано периодическим колебанием во времени уровня поверхности жидкости, имеющим произвольный заданный спектральный состав в устье канала. Предложенная теория более полно соответствует данным наблюдений возбуждения волн приливом, т. к. позволяет учитывать состав спектра приливных волн, приходящих из открытого моря. Из полученных результатов теория Г. Ламба, развитая им для гармонических приливных волн, возбуждающих устье канала, вытекает в виде частного случая.

В линейной теории волн полностью отсутствуют эффекты опрокидывания и образования разрывов, кроме того, такое линеаризованное приближение часто не является равномерным на больших временах [1]. Наиболее простой способ для исследования систем нелинейных уравнений теории волн — метод последовательных приближений [2, 3]. При этом в линейном приближении амплитуда первой гармоники постоянна, а амплитуда второй гармоники растет вместе с расстоянием по линейному закону [4, 5]. Подробный анализ модельных уравнений показал, что в самой точке возникновения разрыва амплитуда второй гармоники принимает значения примерно одной второй от амплитуды первой гармоники [2]. Однокомпонентное гармоническое приливное колебание, возбуждающее бегущую волну на мелководье прибрежного района рассматривалось в монографиях [4, 5]. В данной работе предложена такая теория, в которой спектральный состав приливного колебания, возбуждающего волну на мелководье, может быть достаточно произвольным.

1. Постановка задачи. Рассматривается система нелинейных уравнений теории длинных волн, состоящая из уравнения движения в проекции на горизонтальную ось и уравнения неразрывности движения жидкости, преобразованного с помощью кинематического условия на её свободной поверхности

$$\partial u / \partial t + u(\partial u / \partial x) = -g(\partial \eta / \partial x), \quad x > 0;$$

$$\partial \eta / \partial t + u(\partial \eta / \partial x) = -(h + \eta)(\partial u / \partial x), \quad x > 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — горизонтальная скорость движения частиц жидкости над ровным дном, h — глубина слоя жидкости в невозмущенном состоянии, $\eta = \eta(x, t)$ — возвышение свободной поверхности жидкости над её невозмущенным уровнем, t — временная координата, g — ускорение свободного падения. Канал одним своим

неподвижным концом $x = 0$ соединяется с открытым морем. Возвышение поверхности жидкости в устье канала изменяется непрерывно по горизонтали

$$\eta(x, t) = f_0(\sigma t), \quad x = 0. \quad (2)$$

В краевой задаче (1), (2) неизвестны две функции $u(x, t)$, $\eta(x, t)$ в самой области распространения волны $x > 0$.

2. Линейное приближение. Решение рассматриваемой краевой задачи (1), (2) для каждой из неизвестных функций приближенно отыскиваем в виде суммы

$$u = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad \eta = \eta_0(x, t) + \eta_1(x, t), \quad (3)$$

где первое слагаемое описывает решение задачи в рамках линейной постановки, а второе слагаемое представляет собой первую поправку на нелинейность.

Отбросим в системе уравнений (1) только нелинейные слагаемые, учтем условие (2), получим постановку задачи в линейном приближении

$$\begin{aligned} \partial u_0 / \partial t &= -g(\partial \eta_0 / \partial x), \quad x > 0; \\ \partial \eta_0 / \partial t &= -h(\partial u_0 / \partial x), \quad x > 0; \\ \eta_0(x, t) &= f_0(\sigma t), \quad x = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение задачи первого приближения согласно (4) удовлетворяет однородной системе дифференциальных уравнений в частных производных и неоднородному краевому условию, которое выполняется на неподвижной границе $x = 0$. Оно имеет вид бегущих волн в положительном направлении оси x с постоянной скоростью

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \eta_0(\sigma t - \sigma x/c) \equiv f_0(\sigma t - \sigma x/c), \quad c = \sqrt{gh}; \\ u_0 &= (g/c) \eta_0(\sigma t - \sigma x/c) \equiv (g/c) f_0(\sigma t - \sigma x/c). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) видно, что спектральный состав решения линейной задачи для возвышения поверхности и скорости частиц жидкости в горизонтальном направлении определяется всего одной функцией f_0 .

3. Первая поправка на нелинейность. Применим метод итераций к краевой задаче (1), (2). Подставим решение линейной задачи (5), в нелинейные слагаемые системы уравнений (1), учтем, что краевое условие (2) уже удовлетворено при решении задачи линейного приближения. Получаем неоднородную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и однородное краевое условие для расчета функций η_1, u_1 , входящих во второе приближение

$$\partial u_1 / \partial t + g(\partial \eta_1 / \partial x) = -(g^2/(2c^2))(\partial \eta_0^2 / \partial x), \quad x > 0; \quad (6)$$

$$\partial \eta_1 / \partial t + h(\partial u_1 / \partial x) = -(g/c)(\partial(\eta_0^2) / \partial x), \quad x > 0; \quad (7)$$

$$\partial \eta_1(x, t) = 0, \quad x = 0. \quad (8)$$

Найдем первую поправку на нелинейность вначале для возвышения свободной поверхности жидкости. Исключим из системы уравнений в частных производных (6) и (7) функцию $u_1(x, t)$. Дифференцируем уравнение (6) по переменной

x , а уравнение (7) по временной переменной t , имеем преобразованную систему дифференциальных уравнений второго приближения

$$\partial^2 u_1 / \partial x \partial t + g(\partial^2 \eta_1 / \partial x^2) = -(g^2 / (2c^2))(\partial^2(\eta_0^2) / \partial x^2), \quad x > 0. \quad (9)$$

$$\partial^2 \eta_1 / \partial t^2 + h(\partial^2 u_1 / \partial x \partial t) = -(g/c)(\partial^2(\eta_0^2) / \partial x \partial t), \quad x > 0. \quad (10)$$

Умножим уравнение (9) на величину h и вычтем из полученного таким образом уравнения уравнение (10). Выводим волновое уравнение, содержащее всего одну неизвестную функцию $\eta_1(x, t)$, в следующем виде

$$c^2(\partial^2 \eta_1 / \partial x^2) - \partial^2 \eta_1 / \partial t^2 = -(g/2)(\partial^2(\eta_0^2) / \partial x^2) + (g/c)(\partial^2(\eta_0^2) / \partial x \partial t). \quad (11)$$

Возвышение поверхности в первом приближении является бегущей волной, и поэтому удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению переноса первого порядка в частных производных

$$\partial \eta / \partial t = -c(\partial \eta / \partial x). \quad (12)$$

Преобразуем теперь последнее слагаемое в правой части волнового уравнения (11) с помощью соотношения (12). Получаем неоднородное волновое уравнение

$$c^2(\partial^2 \eta_1 / \partial x^2) - \partial^2 \eta_1 / \partial t^2 = -(3g/2)(\partial^2(\eta_0^2) / \partial x^2). \quad (13)$$

Общее решение неоднородного уравнения (13) будем отыскивать в виде суммы общего решения однородного уравнения, полученного из (13), и частного решения (13). В дальнейшем отыскиваем частное решение, которое удовлетворяет условию (8). Тогда общее решение однородного уравнения представляет собой волну, бегущую вправо, и также удовлетворяющую однородному условию (8). Следовательно, общее решение однородного уравнения обращается в ноль, а общее решение неоднородного уравнения состоит только из частного решения, которое удовлетворяет условию (8). Положим

$$\eta_1 = x f(2\sigma t - 2\sigma x/c), \quad (14)$$

где функция f неизвестна. Подставим решение (14) в неоднородное уравнение, получим уравнение для определения неизвестной функции f в следующем виде

$$\partial f / \partial x = -(3g/(4c^2))\partial^2(\eta_0^2) / \partial x^2, \quad x > 0. \quad (15)$$

Функция f определяется из уравнения (15) с точностью до произвольной функции от времени, поскольку произвольная функция времени не является общим решением однородного волнового уравнения, то такую функцию времени следует положить равной нулю. Решая уравнение (15), учитывая сказанное насчет произвола, находим функцию f , а вместе с ней и η_1 по формуле (14)

$$\eta_1(x, t) = -(3gx/(4c^2))\partial^2(\eta_0^2) / \partial x^2, \quad x > 0, \quad (16)$$

где η_0 — возвышение поверхности жидкости в линейном приближении (5). Для сопоставления положим, что возвышение поверхности жидкости в линейном приближении, как и в [4] состоит только из одной гармоник

$$\eta_0 = a \cos(\sigma t - \sigma x/c). \quad (17)$$

Подставим функцию η_0 , заданную в частном виде (17) в формулу первой поправки на нелинейность для возвышения поверхности жидкости общего вида (16), имеем результат, представленный в монографии [4] в случае однокомпонентного гармонического приливное колебания, возбуждающее бегущую нелинейную волну

$$\eta_1(x, t) = -(3a^2 g \sigma x / (4c^3)) \sin(2\sigma t - 2\sigma x/c) / \partial x, \quad x > 0. \quad (18)$$

Формула (16) имеет более широкую область применимости, чем (18), т.к. она позволяет учитывать практически любой гармонический состав приливного колебания. Оценим приближенно расстояния на которых можно использовать формулу (18). Пусть амплитуда первой поправки на нелинейность (18) не превосходит половины амплитуды гармоники первого приближения (17), тогда расстояние x должно удовлетворять

$$x \leq 2c^3 / (3ag\sigma). \quad (19)$$

При нарушении неравенства (19) возможно образование разрыва за счет нелинейности [2]. Подставим в сумму (3) формулы (5) и (16), получим формулу для расчета возвышения поверхности жидкости, вызванного приливыми колебаниями заданного спектрального состава (2) в виде соотношения

$$\eta(x, t) = f_0(\sigma t - \sigma x/c) - (3gx/(4c^2))\partial(f_0^2)/\partial x, \quad x > 0, \quad c = \sqrt{gh}. \quad (20)$$

Из формулы (20) видно, чем выше скорость длинных волн, тем меньше эффект от нелинейной поправки в заданной точке наблюдения волны на мелководье.

Найдем первую поправку на нелинейность теперь для скорости частиц жидкого слоя в горизонтальном направлении. Исключим из уравнения в частных производных (6) функцию $\eta_1(x, t)$. Для этого функцию η_1 , определенную соотношением (16), подставим непосредственно в дифференциальное уравнение (6), выводим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\partial u_1 / \partial t = (3g^2 x / (4c^2)) \partial^2(\eta_0^2) / \partial x^2 + (g^2 / (4c^2)) \partial(\eta_0^2) / \partial x, \quad x > 0. \quad (21)$$

Представим неизвестную функцию $u_1(x, t)$ суммой, включающей две неизвестные функции f_1, f_2 , согласно формуле

$$u_1 = x f_1(2\sigma t - 2\sigma x/c) + f_2(2\sigma t - 2\sigma x/c). \quad (22)$$

Отметим, что каждая неизвестная функция, входящая в формулу (22), удовлетворяет линейному уравнению переноса

$$\partial f_k / \partial t = -c \partial f_k / \partial x, \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

Подставим решение в виде (22) в дифференциальное уравнение (21)

$$\begin{aligned} & -(xc) \partial f_1 / \partial x - c \partial f_2 / \partial x = \\ & = (3g^2 x / (4c^2)) \partial^2(\eta_0^2) / \partial x^2 + (g^2 / (4c^2)) \partial(\eta_0^2) / \partial x, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношения переноса (23) позволяют уравнение (21) преобразовать

$$-(xc) \partial f_1 / \partial t - c \partial f_2 / \partial t =$$

$$= (3g^2x/(4c^2))\partial^2(\eta_0^2)/\partial x\partial t + (g^2/(4c^2))\partial(\eta_0^2)/\partial t, \quad x > 0. \quad (25)$$

Решая систему уравнений (24), (25), находим две неизвестные функции f_1 , f_2 с помощью соотношений

$$f_1 = -(3g^2/(4c^3))\partial(\eta_0^2)/\partial x, \quad x > 0. \quad (26)$$

$$f_2 = -(g^2/(4c^3))(\eta_0^2 + \gamma), \quad x > 0, \quad \gamma = \text{const}, \quad (27)$$

где произвольная постоянная γ не зависит от значений координат x , t . Подставим формулы (26), (27) в (22), находим соотношение, определяющее величину первой поправки на нелинейность для горизонтальной скорости частиц жидкости, подставим эту первую поправку и формулу (5) в сумму (3), выводим формулу для расчета горизонтальной скорости частиц жидкости, вызванной приливными колебаниями заданного спектрального состава (2) в виде соотношения

$$u = (g/c)\eta_0 - (3g^2x/(4c^3))\partial(\eta_0^2)/\partial x - (g^2/4c^3)(\eta_0^2 + \gamma), \quad \gamma = \text{const}, \quad (28)$$

где η_0 — волновое возвышение свободной поверхности в линейном приближении, постоянная γ в случае периодического приливного колебания, имеющего общий период τ , находится с помощью интегрального условия

$$\int_0^2 f_2 dt = 0, \quad x = 0. \quad (29)$$

Для примера из [4] постоянная, найденная с помощью (29), равна $\gamma = -a^2/2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977. 622 с.
- [2] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
- [3] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982, 335 с.
- [4] Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.
- [5] Бухтеев В. Г., Доронин Ю. П., Зубов М. М. и др. Динамика океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 304 с.

Trepachev V. V., Trepacheva A. V. *Long nonlinear waves which are forced high tide with definite spectrum.* The boundary problem for nonlinear system equations of the theory for the long waves on surface in heavy incompressible fluid which are forced oscillations free surface with definite spectrum of high tide is investigated. We obtained the solution which contains the very well-known Lamb's solution as a particular case prepared theory (for the case of one harmonic oscillations free surface of high tide in canal mouth). There is good qualitative agreement with this theory and observable data on shallow water since real high tide have wide spectrum with many harmonics.

КОЛЕБАНИЯ ШТАМПА НА СОСТАВНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ ПОЛОСЕ

Усошина Е. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о гармонических колебаниях штампа на поверхности неоднородного по глубине гетерогенного основания, представляющего пакет пористоупругого и жидкого слоев. Контактная задача сводится к системе парных интегральных уравнений, для решения которой используется метод ортогональных многочленов. В численном эксперименте анализируется влияние водонасыщенности, неоднородности строения среды на контактные напряжения под штампом.

Введение. Динамические воздействия массивных объектов на пористоупругие основания, моделируемые контактными задачами, привлекают неизменный интерес, что объясняется многочисленными приложениями в сейсморазведке, геофизике, строительстве. Наименее изученными в настоящее время являются вопросы влияния неоднородности слоистой пористой среды, ее водонасыщенности на распределение контактных напряжений. Учет обводненности и водонасыщенности, неоднородности основания позволяет с большей точностью моделировать динамические процессы в реальных, в том числе, грунтовых средах.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о гармонических колебаниях массивного штампа на поверхности составной гетерогенной полосы под действием приложенной к нему силы. Составная гетерогенная полоса содержит заглубленный слой идеальной жидкости, который расположен на недеформируемом основании. В декартовой системе координат жидкий и гетерогенный слой соответственно занимают области

$$-\infty < x < \infty, -h_2 \leq y \leq 0, -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h_1.$$

На лицевой границе полосы под действием приложенной силы $\overline{P}e^{-i\omega t}$ колеблется непроницаемый штамп, занимающий область $-a \leq x \leq a$, $y = h_1$ приложена нагрузка. Вне области контакта лицевая поверхность свободна от напряжений. Силы трения между штампом и поверхностью основания отсутствуют.

Движение пористоупругой гетерогенной полосы, состоящей из упругого скелета и пор, заполненных вязкой аэрированной жидкостью, описывается уравнениями Био [1]:

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) &= \sigma_{ij,j}^s, \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - b \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) &= \sigma_{,i}^f, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_i(x, y, t)$, $v_i(x, y, t)$, $i = 1, 2$ — компоненты векторов перемещений твердой и жидкой фаз. Связь между тензором полных напряжений Γ_{ij} и деформациями

твердой e_{ij} и жидкой ε_{ij} фаз выражается в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^s &= A e \delta_{ij} + 2N e_{ij} + Q \varepsilon \delta_{ij}, \quad \sigma^f = Q \vartheta + R \varepsilon, \\ \vartheta &= \operatorname{div} \bar{u}, \quad \varepsilon = \operatorname{div} \bar{v}, \\ \Gamma_{ij} &= \sigma_{ij}^s + \delta_{ij} \sigma^f.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, σ_{ij}^s — тензор напряжений, действующих в упругом скелете, σ^f — давления, действующие на жидкость в порах, A , N , Q , R — механические характеристики гетерогенной среды, которые выражаются через модули объемной сжимаемости упругой, жидкой и газообразной фазы [2], $\rho_{12} < 0$ — коэффициент динамической связи упругого скелета и жидкости, ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} — коэффициенты динамической плотности, выражаемые через плотности сред упругого скелета ρ_s и жидкости ρ_f , коэффициент b зависит от пористости среды m , коэффициента вязкости жидкости в порах и коэффициента проницаемости.

Вектор перемещений $\bar{w}\{w_i(x, y, t)\}$, $i = 1, 2$ и давление $p_0(x, y, t)$ в идеальной жидкости нижнего слоя выражается через волновой потенциал. На нижней границе жидкого слоя и недеформируемого основания нормальные перемещения равны нулю. На границе жидкости и пористоупругой среды при $y = 0$ предполагается свободная фильтрация жидкости через границу, при этом требуется равенство нормальных напряжений в пористой среде давлению в жидкости, равенства нулю тангенциальной составляющей напряжений пористой среды, непрерывность движения жидкости в и вне пористой среды [2]. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечность [3].

2. Построение решения. Применим преобразование Фурье к соотношениям (1), (2), граничным условиям. Необходимым этапом решения является построение матрицы Грина для составной полосы, этот процесс подробно описан [3], ввиду громоздкости формул здесь не приводится. Для нормальных колебаний штампа элемент матрицы Грина $K_{22}(\alpha)$ является ядром интегрального уравнения. Эта функция осциллирующая, убывающая на бесконечности степенным образом, мероморфная в комплексной плоскости, имеет комплексные полюса с малой мнимой частью. При $\alpha \rightarrow \infty$, $K_{22}(\alpha) = O(\alpha^{-1})$

Контактная задача сводится к системе парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \int_{R_1} K_{22}(\alpha) e^{i\alpha(x-\xi)} q(\xi) d\alpha d\xi &= f(x), \quad |x| \leq a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a q(\xi) e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha d\xi &= 0, \quad |x| > a.\end{aligned}\tag{3}$$

Контур интегрирования R_1 выбирается в соответствии с принципом излучения [3], обходя регулярные особенности α_k подынтегральной функции с положительной действительной частью и малой комплексной в нижней комплексной полуплоскости. Такой выбор контура интегрирования в соответствии с принципом излучения ускоряет сходимость численного интегрирования.

Функция $f(x)$ описывает форму штампа. Для плоского штампа осадка и угол поворота определяются из уравнения движения штампа как твердого тела.

Будем разыскивать контактные напряжения в виде ряда по многочленам Чебышева с выделенной особенностью на краях штампа [2]:

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_k T_k\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (4)$$

Подставим представление (4) в систему интегральных уравнений (3), оставив конечное число слагаемых. При этом второе уравнение тождественно удовлетворяется. Далее для решения интегрального уравнения используется метод коллокации. Узлы коллокации выберем совпадающими с узлами Чебышева на отрезке $[-0.95, 0.95]$. В результате тождественного удовлетворения уравнения (3) в узлах коллокации приходим к системе линейных алгебраических уравнений, при этом интеграл по конечному отрезку вычисляется в явном виде. Через решения конечной системы алгебраических уравнений определяются напряжения под штампом, а также связь между воздействующей на штамп силой и осадкой штампа.

3. Результаты численного анализа и выводы. В соответствии с [5] приняты следующие значения механических характеристик, отвечающих насыщенному смеси воды и воздуха песчанику:

$$\begin{aligned} K_s &= 3,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad K_b = 0,43 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ K_f &= 2,25 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad K_g = 0,145 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\ \rho_s &= 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_f = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_g &= 1,1 \text{ кг/м}^3, \quad m = 0,3, \quad m_g = 0,1, \quad h_1/h_2 = 5. \end{aligned}$$

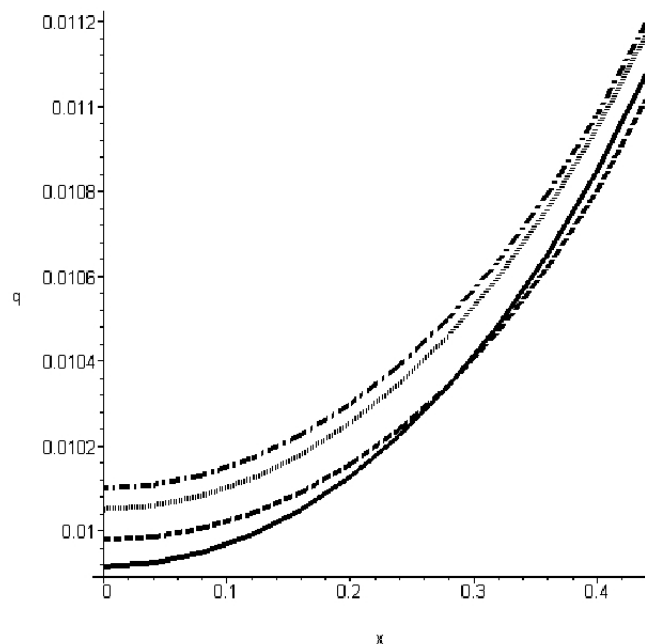


Рис. 1. Распределение контактных напряжений при увеличении количества точек коллокации.

Ядро интегрального уравнения (3) имеет комплексные полюса, расположенные вблизи вещественной оси. Проведенный численный эксперимент позволил сделать следующие выводы. Учет корневой особенности в напряжениях для среды со слабой дисперсией также ускоряет сходимость вычислительного процесса, как и в случае упругих оснований. Выбор полиномов Чебышева, ортогональных на отрезке, позволяет избежать дополнительного интегрирования при вычислении коэффициентов линейных систем. Выбор точек коллокации, совпадающих с узлами Чебышева ускоряет сходимость метода, выяснено оптимальное количество точек коллокации. Как правило, достаточно брать 16 узлов коллокации для центрально приложенной силы, при этом погрешность при увеличении числа точек коллокации не превышает 2,5 процента. На рис. 1 приведены модули контактных напряжений, вычисленные при $N = 12$, $N = 14$, $N = 16$, $N = 18$.

Изучено влияние водонасыщенности, неоднородности строения среды, частоты колебаний на контактные напряжения под штампом. Показано, что учет этих параметров приводит к существенному уточнению значений контактных напряжений.

Автор выражает благодарность проф. Сумбатьяну М. А. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
- [2] Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наукова думка, 1990. 224 с.
- [3] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1976. 319 с.
- [4] Суворова Т. В., Усошина Е. А. Колебания составного гетерогенного слоя // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2010. № 2. С. 74–79.
- [5] Chao-Lung Y., Wei-Cheng L. An assessment of characteristics of acoustic wave propagation and attenuation through eleven different saturated soils // J. Acoust. Soc. 2005. № 2. Pp. 127–136.

Usoshina H. A. *Oscillation punch on the non-homogenous heterogenous layer*. The contact problem for the harmonic oscillating punch on the surface of non-homogenous heterogenous foundation is considered. The foundation consists of the porous and liquid layers. The contact problem reduced to system of dual integral equation, solved with method of orthogonal polynomials. The numerical analysis is done in dependencies contact stresses on saturation and non-homogenous foundation.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БАЛКИ С ДЕФЕКТАМИ

Черпаков А. В.^{*}, Каюмов Р. А.^{}, Косенко Е. Е.^{***},
Косенко В. В.^{***}, Демидова А. В.^{***}, Зайцева М. М.^{***}**

^{}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

*^{**}Казанский государственный архитектурно-строительный университет*

*^{***}Ростовский государственный строительный университет*

В работе рассмотрены результаты моделирования колебаний стержневой конструкции с дефектами с помощью конечно-элементного метода. Задачей являлось определение величины отклонения параметров колебаний в зависимости от расположения дефекта по величине сечения. Анализ результатов показывает, что возможно применение упрощенной балочной модели при расчете параметров колебаний.

При моделировании конструкции с помощью упрощенных моделей возникает вопрос о степени зависимости различных параметров колебаний от формы дефекта. При этом рассматриваются дефекты, имеющие раскрытие с одной и с двух сторон стержня, располагающиеся в одном месте по длине стержня.

Задачей является определение величин параметров колебаний в зависимости от вида дефекта по величине сечения.

Рассмотрен кантилевер с дефектами в виде надрезов, выполненных согласно схеме, представленной на рис. 1. Стержень имел габариты: $L \times h \times a = 0.250 \times 0.008 \times 0.004$ (м³). Ширина надрезов принималась равной $b = 1$ мм. Надрезы с различными вариантами размеров с одной или с двух сторон (h_1, h_2) располагались в одной точке с координатой по горизонтальной оси $L_d = 0.0625$ м (относительная величина расположения надрезов к длине стержня $\bar{L}_d = L_d/L = 0.25$).

Рассматривалась относительная характеристика степени надреза — величины надрезов относились к полной высоте стержня:

$$\bar{h}_1 = \frac{h_1}{h}; \quad \bar{h}_2 = \frac{h_2}{h}; \quad \bar{h} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2.$$

Принимались варианты надрезов: $\bar{h} = 0.50$ и $\bar{h} = 0.70$.

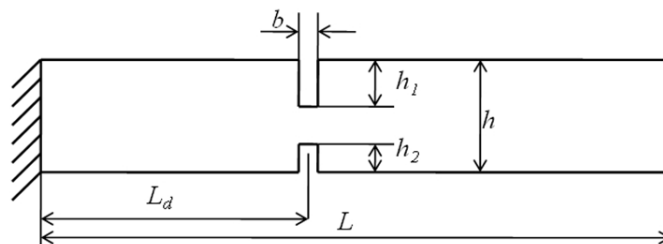


Рис. 1. Схема кантилевера с расположением надрезов.

Моделирование проводилось в КЭ комплексе *Ansys*. Рассматривалась 3-мерная модель на основе применения трехмерного элемента *Solid92*. Предварительно был проведен анализ изменения собственных частот при различной степени размеров конечных элементов как по всему стержню, так и в окрестности надреза. Разбивка модели на узлы по длине производилась кратной $1/30$ от длины стержня. По высоте и ширине стержня производилась разбивка на узлы, кратная $1/3$ соответствующей грани. В месте моделирования надрезов конечно-элементная сетка сгущалась (рис. 2, б). Модель обладает механическими свойствами, эквивалентными натурной модели: модуль Юнга $E = 2.1$ МПа; плотность $\rho = 7700$ кг/м³.

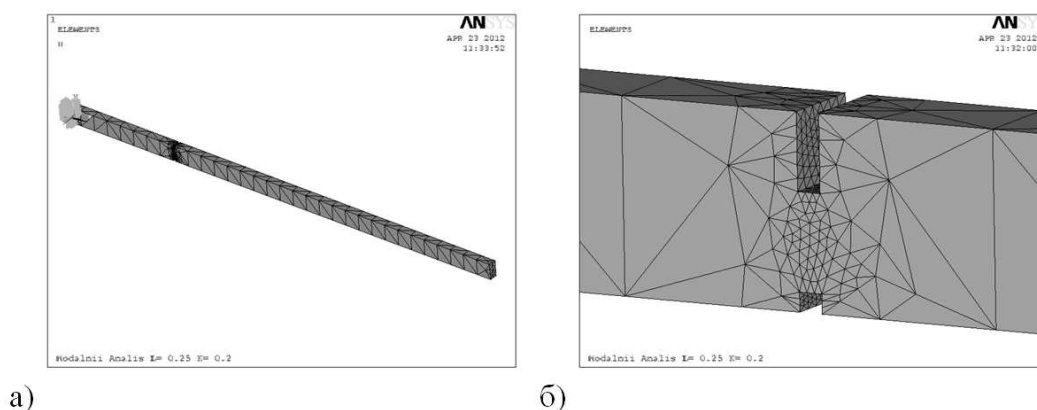


Рис. 2. Пример конечно-элементной модели стержня моделирования надрезов для величины $\bar{h}_1 = 0.4$, $\bar{h}_2 = 0.1$.

Результаты КЭ расчета. Проведен модальный расчет колебаний стержня. Рассмотрены формы колебаний и собственные частоты КЭ моделей кантилевера с дефектами, с местоположением в точке $\bar{L}_d = 0.25$. Принимались следующие размеры полного надреза: а) $\bar{h} = 0.5$; б) $\bar{h} = 0.7$. На рис. 3 представлены кривые форм поперечных колебаний первой моды в плоскости наибольшей жесткости (вертикальная плоскость) КЭ модели в окрестности дефекта. В таблице 1 представлены значения собственных частот первой моды поперечных колебаний модели в плоскости наибольшей жесткости, условные амплитуды колебаний и угол излома формы колебаний в точке расположения надреза при различных его вариантах ($\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$). Варианты параметров сравнивались с надрезом, имеющим симметричное расположение по высоте стержня. Анализ полученных параметров резонансов показывает, что наибольшее отклонение имеют как собственные частоты, так и амплитуды колебаний для дефекта, имеющего одностороннее исполнение — при величине надреза $\bar{h} = 0.5$: $\bar{h}_1 = 0$, $\bar{h}_2 = 0.5$ и при величине надреза $\bar{h} = 0.7$: $\bar{h}_1 = 0$, $\bar{h}_2 = 0.7$. Соответственно, относительные отклонения амплитуды формы колебаний в точке расположения надрезов (таблица 1) на рисунках 3а и 3б характеризуются соответствующим изломом форм колебаний и составляет -3.27% для величины надреза $\bar{h} = 0.5$ и -7.44% для величины надреза $\bar{h} = 0.7$. Относительные отклонения собственных частот первой моды колебаний (таблица 1) стержня составляют -6.5% для величины надреза $\bar{h} = 0.5$ и -14.3% для величины надреза $\bar{h} = 0.7$.

Хар. колебаний	Варианты величин надрезов стержня $\bar{h} = 0.5$						
	$\bar{h}_1 = 0.25$	$\bar{h}_1 = 0.00$	$\Delta, \%$	$\bar{h}_1 = 0.10$	$\Delta, \%$	$\bar{h}_1 = 0.20$	$\Delta, \%$
	$\bar{h}_2 = 0.25$	$\bar{h}_2 = 0.50$		$\bar{h}_2 = 0.40$		$\bar{h}_2 = 0.30$	
Рез. частоты ω_1	100,9	97,6	-3,27	100,1	-0,80	100,7	-0,16
Усл. амплитуды	0,680	0,636	-6,5	0,669	-1,7	0,678	-0,4
Угол излома	176.8	175.7	-0.6	176.5	-0.17	176.7	-0.05
Хар. колебаний	$\bar{h} = 0.7$						
	$\bar{h}_1 = 0.35$	$\bar{h}_1 = 0.00$	$\Delta, \%$	$\bar{h}_1 = 0.10$	$\Delta, \%$	$\bar{h}_1 = 0.20$	$\Delta, \%$
	$\bar{h}_2 = 0.35$	$\bar{h}_2 = 0.70$		$\bar{h}_2 = 0.60$		$\bar{h}_2 = 0.50$	
Рез. частоты ω_1	84,81	78,50	-7.44	83,19	-1.92	84,83	0.02
Усл. амплитуды	0,480	0,411	-14,3	0,462	-3,8	0,480	0,01
Угол излома	171.1	168.3	-1.64	170.3	-0.46	170.9	-0.12

Таблица 1. Собственные частоты, условные амплитуды и углы излома первой формы колебаний в точке расположения надреза при различных вариантах полного надреза $\bar{h} = 0.5$ и их относительные отклонения от соответствующих параметров при варианте надрезов ($\bar{h}_1 = 0.25$, $\bar{h}_2 = 0.25$).

Проведен расчет напряженного состояния стержня, нагруженного на свободном конце статической силой, направленной в направлении ОУ, в пакете Ansys. НДС стержня в окрестностях надреза приведено на рис. 4.

Анализ напряженного состояния трехмерной балки с односторонним и двусторонними надрезами показывает, что в окрестности расположения дефекта в пределах двух размеров высоты балки напряженное состояние отличается от напряженного состояния области основной балки. Поврежденная область мала по сравнению со всей длине балки. Вследствие этого предполагается, что гипотезы балочной теории Эйлера–Бернулли могут не выполняться в области локализации дефекта, и необходимо учитывать данную область путем моделирования дефекта в виде отдельного эквивалентного элемента. Примером такого элемента может служить упругая пружина, обладающая изгибной жесткостью.

Выводы. Таким образом, при сравнении собственных частот и форм колебаний моделей стержня с надрезами различной величины, расположенных в точке $\bar{L}_d = 0.25$, были получены максимальные отклонения при анализе 1-й собственной частоты при величинах надреза $\bar{h} = 0.5$ -3,27% и при $\bar{h} = 0.7$ -7,44%. Сравнительный анализ форм первой моды колебаний показал, что наибольшее отклонение амплитуды колебаний данного варианта расположения в точке надреза имеется при величинах надреза $\bar{h} = 0.5$ $\Delta A = 6.5\%$ и при $\bar{h} = 0.7$ $\Delta A = 14.3\%$, угла излома формы колебаний при $\bar{h} = 0.5$ $\Delta \alpha = -0.6\%$ и при $\bar{h} = 0.7$ $\Delta \alpha = -1.64\%$.

При рассмотрении различных вариантов надреза, расположенного в точке $\bar{L}_d = 0.25$, анализ показывает, что характер напряженного состояния и параметры

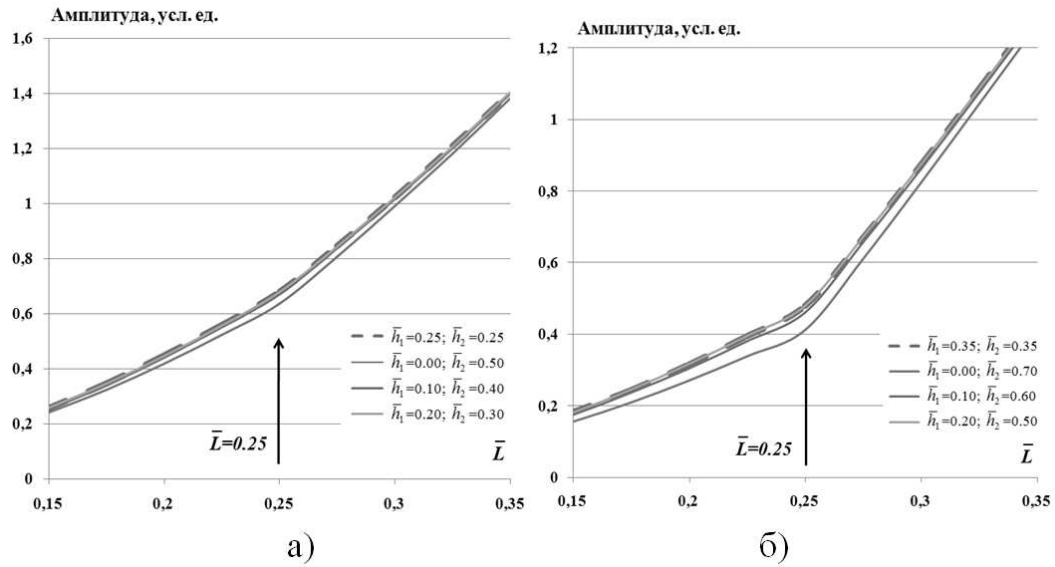


Рис. 3. Кривые форм первой моды поперечных колебаний в плоскости наибольшей жесткости модели в окрестности дефекта при его соответствующих размерах: а) $\bar{h} = 0.5$; б) $\bar{h} = 0.7$.

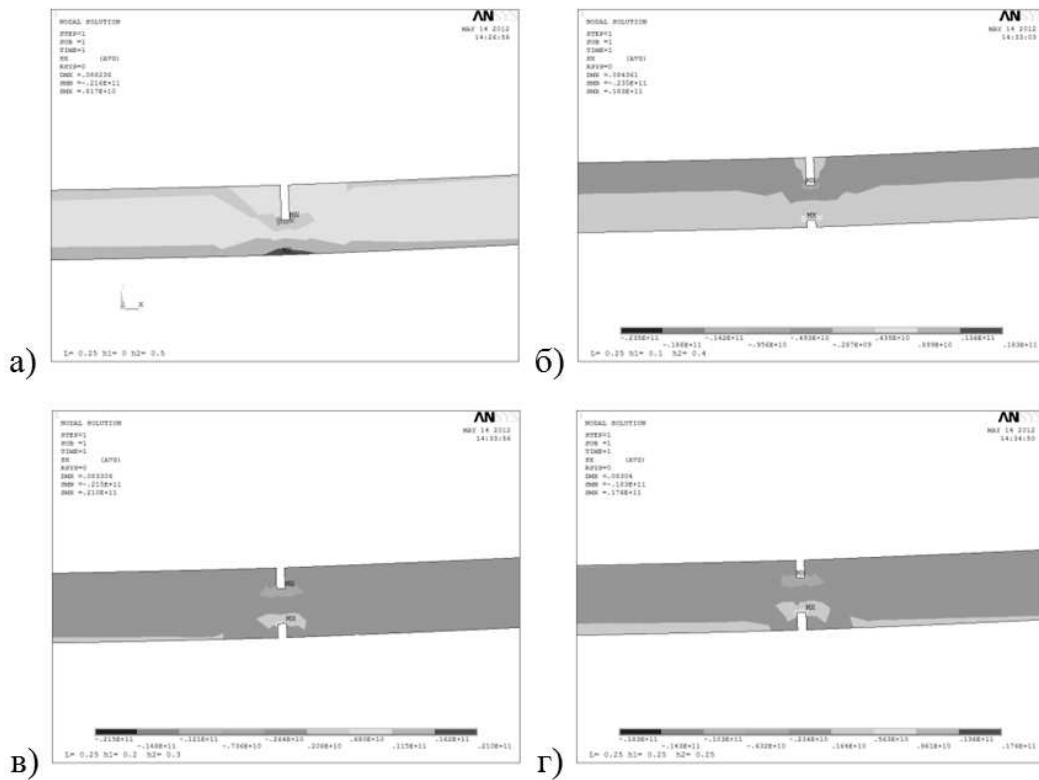


Рис. 4. Напряженное состояние стержня в окрестностях надреза при различных его размерах: а) $\bar{h}_1 = 0.00$, $\bar{h}_2 = 0.50$; б) $\bar{h}_1 = 0.10$, $\bar{h}_2 = 0.40$; в) $\bar{h}_1 = 0.20$, $\bar{h}_2 = 0.30$; г) $\bar{h}_1 = 0.25$, $\bar{h}_2 = 0.25$.

форм колебаний отличаются лишь в окрестности местоположения дефекта. При этом резонансные частоты отличаются в малых отклонениях от среднего расположения дефекта, что может говорить о применимости упрощенной балочной модели при расчете параметров колебаний.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 12-08-90815-мол_рф_нр, 12-08-31306 мол_а, 12-08-31397 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Краснощечков А. А., Соболев Б. В., Соловьев А. Н., Черпаков А. В. Идентификация трещиноподобных дефектов в упругих элементах конструкций на основе эволюционных алгоритмов // Дефектоскопия. 2011, № 6. С. 67–75.
- [2] Черпаков А. В., Акопьян В. А., Соловьев А. Н., Рожков Е. В., Шевцов С. Н. Идентификация параметров поврежденности в упругом стержне с использованием конечно-элементного и экспериментального анализа мод изгибных колебаний // Вестник Донского государственного технического университета. 2011. Т. 11. № 3(54). С. 312–318.

Cherpakov A. V., Kayumov R. A., Kosenko E. E., Kosenko V. V., Demidova A. V., Zaitseva M. M. *Finite element modeling of rod with defects*. In work parameters of fluctuations of a rod design with defects by means of final and element modeling are considered. A task is determination of size of a deviation of parameters of fluctuations depending on a damage arrangement on section size. The analysis of results shows that application of the simplified model at calculation of parameters of fluctuations is possible.

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОРОУПРУГОГО СЛОЯ С ПУСТЫМИ ПОРАМИ

Шведов Д. С.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается двумерная задача об установившихся колебаниях неоднородного изотропного пороупругого слоя с пустыми порами. С помощью преобразования Фурье задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Строится численный метод нахождения трансформант. С помощью численного обращения преобразования Фурье осуществляется расчет вектора смещения и функции относительного объема.

Введение Теория пористых линейно упругих материалов с пустотами первоначально была разработана Коуином и Нунциато [1]. Она предназначена для моделирования упругих материалов, содержащих распределение малых пустот. Главной особенностью данной теории является введение в определяющие соотношения новой переменной, характеризующей относительный объем пор, который берется в качестве независимой кинематической переменной. Включение новой переменной требует дополнительных сил для обеспечения равновесия объема пор. Если объем пор обращается в ноль, поведение материала описывается классической теорией упругости.

Настоящая работа посвящена исследованию колебаний неоднородного по толщине пороупругого слоя с пустыми порами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерную задачу об установившихся колебаниях с частотой Ω неоднородного изотропного пористого упругого слоя $0 \leq y \leq h$, $|x| < \infty$. Нижняя грань слоя горизонтальна и сцеплена с абсолютно жестким основанием.

Необходимо найти поля перемещений в слое $\bar{u}(x, y) = \{u, v\}e^{-i\Omega t}$ и функцию относительного объема $\Phi(x, y, t) = \Phi(x, y)e^{-i\Omega t}$ при известных законах неоднородности под действием нагрузок, приложенных к верхней границе слоя.

Считая режим колебаний установившимся, отделим временной множитель $e^{-i\Omega t}$. Будем рассматривать амплитудные значения функций.

Уравнения движения имеют вид [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \rho\Omega^2 u = 0, \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \rho\Omega^2 v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Компоненты тензора напряжений находятся из следующих определяющих соотношений [2]:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{xx}}{\lambda + 2\mu} = u'_x + (1 - 2c^2) v'_y + H\Phi, \\ \frac{\sigma_{yy}}{\lambda + 2\mu} = (1 - 2c^2) u'_x + v'_y + H\Phi, \\ \sigma_{xy} = \mu(u'_y + v'_x). \end{cases} \quad (2)$$

Полевые характеристики задачи должны быть подчинены следующему уравнению [2]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{i\omega\Omega + \rho k\Omega^2 - \xi}{\alpha} \Phi - \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

Соответствующие граничные условия для слоя могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ v(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{xy}(x, h) = \tau(x), \\ \sigma_{yy}(x, h) = \sigma(x), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, h) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\lambda = \lambda(y)$, $\mu = \mu(y)$ положительные функции координаты y , являющиеся аналогами параметров Ляме, ρ — массовая плотность материала, $\alpha, \beta, \xi, \omega, k$ — положительные физические параметры, связанные с пористостью [1].

2. Система интегральных уравнений Фредгольма 2 рода. В представленной постановке колебания описываются системой уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Наиболее эффективным средством анализа колебаний в слое является использование преобразование Фурье по переменной x и сведение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [3].

После применения к (1)–(4) преобразования Фурье, элементарных преобразований, а также операции обезразмеривания получается следующая каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} Q_1 = -hs \frac{\lambda 1}{\gamma} Q_2 + \left[4s^2 h^2 \frac{\mu 1 (\lambda 1 + \mu 1)}{\gamma} - \frac{\rho \Omega^2 h^2}{\mu_0} \right] U_1 - 2hs \mu 1 H 1 \varphi, \\ \frac{d}{dz} Q_2 = hs Q_1 - \frac{\rho \Omega^2 h^2}{\mu_0} V, \\ \frac{d}{dz} U_1 = \frac{1}{\mu 1} Q_1 - hs V, \\ \frac{d}{dz} V = \frac{1}{\gamma} Q_2 + hs \frac{\lambda 1}{\gamma} U_1 - H 1 \varphi, \\ \frac{d}{dz} \varphi = \psi, \\ \frac{d}{dz} \psi = \frac{\beta h^2}{\alpha \gamma} Q_2 - 2s \frac{\beta h^3}{\alpha} \frac{\mu 1}{\gamma} U_1 - \left(h^2 \frac{i\omega\Omega + \rho k\Omega^2 - \xi}{\alpha} - h^2 s^2 + \frac{\beta h^2}{\alpha} H 1 \right) \varphi, \end{cases} \quad (5)$$

где $\gamma = \lambda 1 + 2\mu 1$.

Граничные условия:

$$\begin{cases} U_1(s, 0) = 0, \\ V(s, 0) = 0, \\ \psi(s, 0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Q_1(s, 1) = i\tau_0(s), \\ Q_2(s, 1) = \sigma_0(s), \\ \psi(s, 1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

В общем случае построение решения канонической системы дифференциальных уравнений (5) с переменными коэффициентами в аналитической форме невозможно, поэтому осуществляется ее сведение к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Интегрируя систему (5), учитывая граничные условия (6) и осуществляя элементарные преобразования, получим систему уравнений Фредгольма 2 рода с непрерывными ядрами (отметим, что все неизвестные функции зависят от параметра преобразования Фурье):

$$\begin{cases} Q_2 = \int_0^1 (G_1 Q_2(\eta) + G_2 U_1(\eta) + G_3 \varphi(\eta)) d\eta - ihs\tau_0(1-z) + \sigma_0, \\ U_1 = - \int_0^1 (G_4 Q_2(\eta) + G_5 U_1(\eta) + G_6 \varphi(\eta)) d\eta + i\tau_0 w(z), \\ \varphi = \int_0^1 (G_7 Q_2(\eta) + G_8 U_1(\eta) + G_9 \varphi(\eta)) d\eta, \end{cases} \quad (7)$$

$$G_i = G_i(z, \eta), \quad i = 1..9.$$

3. Численный метод решения системы интегральных уравнений и обращения преобразования Фурье. Осуществим дискретизацию системы интегральных уравнений Фредгольма 2 рода (7), используя квадратурную формулу трапеций [4, 5] и метод коллокаций. Придем к следующей алгебраической системе

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{1}{n-1}, \quad x_i = st(i-1), \quad i = 1, \dots, n, \\ A_1 &= A_n = \frac{\Delta x}{2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = \Delta x, \\ \begin{cases} Q_{2i} - \sum_{j=1}^n A_j (G_{1ij} Q_{2j} + G_{2ij} U_{1j} + G_{3ij} \varphi_j) = \sigma_0 - ihs\tau_0(1-z_i), \\ U_{1i} + \sum_{j=1}^n A_j (G_{4ij} Q_{2j} + G_{5ij} U_{1j} + G_{6ij} \varphi_j) = i\tau_0 w_i, \\ \varphi_i - \sum_{j=1}^n A_j (G_{7ij} Q_{2j} + G_{8ij} U_{1j} + G_{9ij} \varphi_j) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, для любых значений параметра преобразования можно найти узловые значения переменных, и далее требуется построение обратного преобразования Фурье. Для численного осуществления обратного преобразования Фурье, т.е. для вычисления интеграла

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} ds$$

используем интерполяционную формулу третьей степени, являющуюся аналогом «правила трёх восьмых» Ньютона–Котеса [5, 6].

4. Расчет полей смещений и функции относительного объема при некоторых законах неоднородности. В качестве примеров реализации предложенной схемы рассмотрим возрастающие и убывающие функции, характеризующие законы неоднородности в случае сосредоточенной и распределенной нагрузки.

Для сосредоточенной нагрузки находим:

$$\sigma_0(x) = \delta(x) \quad , \quad \sigma_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{isx} dx = 1 \quad ,$$

$$\tau_0(x) = \delta(x) \quad , \quad \tau_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{isx} dx = 1 \quad .$$

Для равномерно распределенной на отрезке нагрузки получим:

$$\begin{cases} \sigma_0(x) = \sigma_0 \quad , \quad |x| \leq a \quad , \\ \sigma_0(x) = 0 \quad , \quad |x| > a \quad , \end{cases} \quad \sigma_0(s) = \sigma_0 \frac{\sin(as)}{s} \quad ,$$

$$\begin{cases} \tau_0(x) = \tau_0 \quad , \quad |x| \leq a \quad , \\ \tau_0(x) = 0 \quad , \quad |x| > a \quad , \end{cases} \quad \tau_0(s) = \tau_0 \frac{\sin(as)}{s} \quad ,$$

где a — полудлина области приложения нагрузки.

Будем рассматривать законы неоднородностей, для которых выполняются следующие равенства

$$\int_0^1 \lambda_1(z) dz = 1 \quad , \quad \int_0^1 \mu_1(z) dz = 1 \quad , \quad \rho(z) = 1 \quad . \quad (9)$$

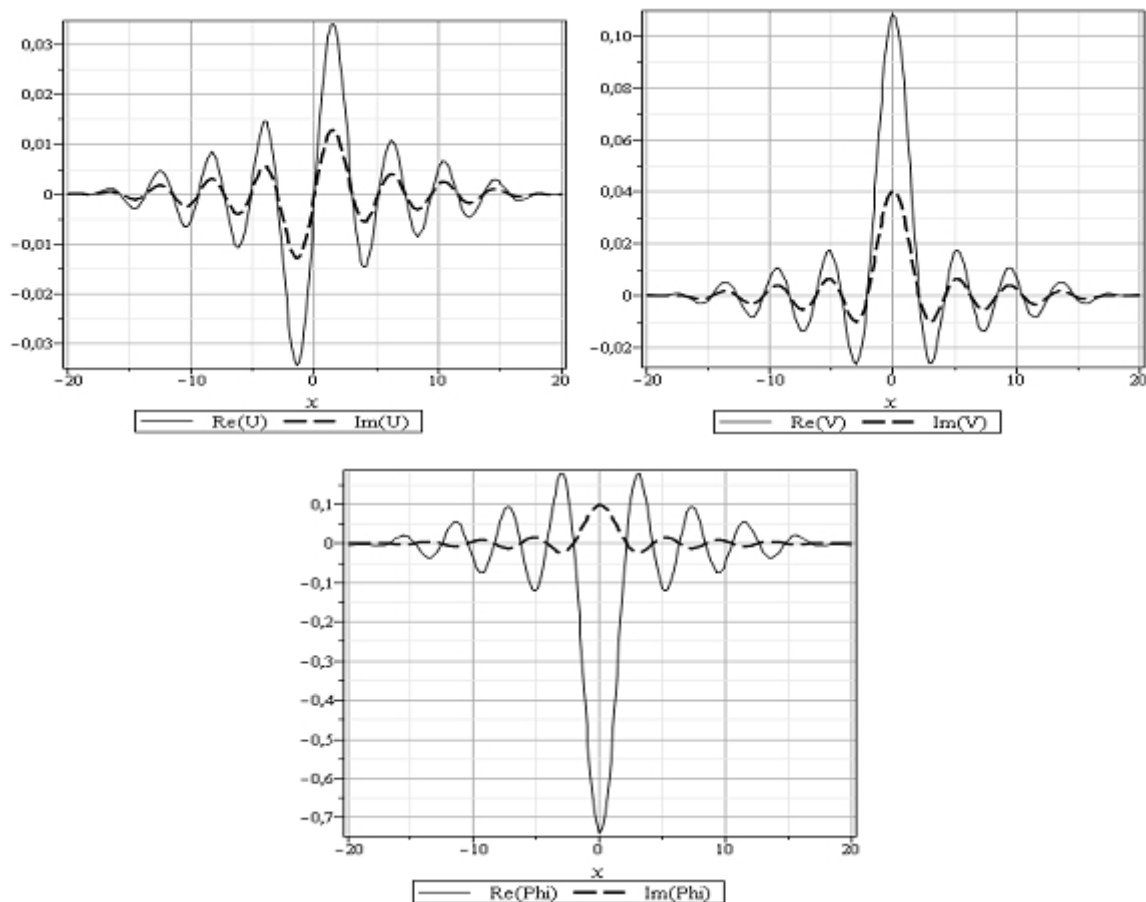


Рис. 1.

Согласно физическому смыслу, параметры Ляме должны удовлетворять условию:

$$0 < \frac{\lambda_1(z)}{2(\lambda_1(z) + \mu_1(z))} < \frac{1}{2}, \quad \forall z \in [0; 1]. \quad (10)$$

Рассмотрим некоторый закон, удовлетворяющий условиям (9), (10):

$$\lambda_1(z) = z + 0.5, \quad \mu_1(z) = 1.5 - z.$$

Пусть $h = 0.5$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 10$, $\omega = 0.01$, $\xi = 15$, $k = 0.01$, $\Omega = 100$, а также $\sigma_0(s) = 1$, $\tau_0(s) = 0$.

На рис. 1 приведены графики полей перемещения и функции относительного объема. Сплошной линией обозначена действительная часть, пунктирной — мнимая часть.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cowin S. C. Nunziato J. W. Linear elastic materials with voids // J. Elasticity 1983. V. 13. № 2. Pp. 125–147.
- [2] Скалия А. Гармонические колебания жесткого штампа на пористо упругом слое // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. № 3. С. 484–491.
- [3] Бабешко В. А. Глушков Е. В. Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
- [4] Манжиров А. В. Полянин А. Д. Методы решения интегральных уравнений: Справочник. М.: Факториал, 1999. 272 с.
- [5] Крылов В. И. Приближённое вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
- [6] Крылов В. И. Скобля Н. С. Методы приближённого преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.

Schvedov D. S. *Oscillations in inhomogeneous poroelastic layer with voids.* The two-dimensional problem of steady oscillations of an inhomogeneous isotropic poroelastic layer with voids. Using the Fourier problem is reduced to a system of integral equations of the second kind. Built a numerical method to find the Fourier transform. By means of numerical inverse Fourier transform is calculated displacement vector function of the relative volume.

УПРАВЛЕНИЕ ЭГД ТЕЧЕНИЕМ В ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Ширяева Е. В., Ширяева И. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Для квазидвумерного ЭГД течения в тонкой подвешенной жидкой пленке приведены результаты расчетов, показывающие возможность управления структурой течения при помощи внешнего электрического поля. Для расчетов использовался метод конечных элементов.

Введение. В работах [1, 2] получены уравнения, описывающие электрогидродинамические течения в тонких жидких подвешенных пленках, на основе которых теоретически объяснены причины возникновения вращательного течения, экспериментально обнаруженного в [3], так называемый liquid film motor. Расчеты, приведенные в [1, 2], были ориентированы непосредственно на результаты экспериментов — на описание течения квадратной в плане тонкой подвешенной пленке, через которую в одном направлении протекал электрический ток, а в перпендикулярном направлении было приложено внешнее электрическое поле, создаваемое конденсатором [3].

Основная цель настоящей работы — численное исследование ЭГД течений в прямоугольных подвешенных пленках для различных внешних электрических полей. Использование модулированных по пространству внешних полей позволяет создавать в пленках сложные вихревые структуры течения жидкости.

Постановка задачи. 2D-уравнения, описывающие ЭГД течение многокомпонентной жидкости в тонкой свободно подвешенной пленке, после осреднения по толщине пленки получены в [1, 2] (см. также [4–7]). В [1, 2] обоснована применимость для расчетов асимптотической модели

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}|_{x=0, X} = 0, \quad v|_{y=0, Y} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{y=0, Y} = -\mathcal{R}_3 \varphi_x|_{y=0, Y}, \quad (4)$$

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=X} = \varphi_0, \quad \varphi_y|_{y=0, Y} = E_0, \quad (5)$$

$$\mathcal{R}_3 \approx \pm \frac{\varepsilon^3}{135\nu^3\lambda} E_0^3, \quad \varepsilon E_0 = \varepsilon_{\text{out}} |\mathbf{E}_{\text{out}}| \cos \alpha. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v)$ — скорость течения в плоскости пленки; p — давление; φ — потенциал электрического поля; ν, ε — вязкость и диэлектрическая проницаемость жидкости; ε_{out} — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей пленку; $\mathbf{E}_{\text{out}}$ — поле внешнего конденсатора, действующего в направлении y ; φ_0 — разность потенциалов, приложенная в направлении x ; α — угол наклона поля $\mathbf{E}_{\text{out}}$ к нормали границ $y = 0, y = Y$; X, Y — размеры прямоугольной области; $\mathcal{R}_3$ —

коэффициент влияния интенсивности средних напряжений Рейнольдса и толщины двойного пограничного слоя на скорость течения жидкости на границах (аналог электроосмотического ζ -потенциала); λ — дебаевская длина экранирования, в частности, зависящая от максимальной концентрации бoльцмановского распределения c_B : $\lambda^2 = \varepsilon/(2\gamma c_B)$; γ — коэффициент, характеризующий интенсивность переноса компонент жидкости (например, ионов воды) электрическим полем.

Обратим внимание, что толщина пленки не входит в окончательные уравнения асимптотической модели (1)–(6) [1, 2].

Вычислительный эксперимент. Задача (1)–(6) решалась численно методом конечных элементов при помощи пакета FreeFem++ [8]. Для решения уравнений (1) использовался метод проекций Чорина (см., в частности, [8]). Результаты расчетов представлены для значений параметров $\varphi = -1$, $\nu = 7,8 \cdot 10^{-4}$, $\mathcal{R}_3 = 0,229$. Величина E_0 (фактически напряженность внешнего электрического поля конденсатора) задавалась пространственно модулированной.

В работах [1, 2] показано, что в квадратной области ($X = Y = 1$) при постоянном значении $E_0 = 0,19$ достаточно быстро ($t \gtrsim 30$) возникает почти стационарное вращательное течение, приведенное на рис. 1.

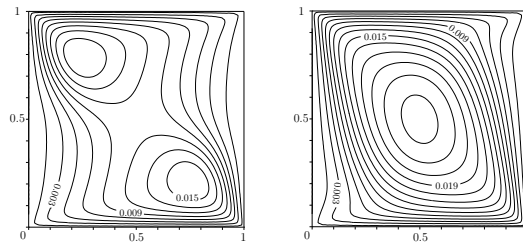


Рис. 1. Функция тока $\psi(x, y, t)$ при $t = 10$ ($\approx 0,77$ с) и $t = 30$ ($\approx 2,31$ с).

На рис. 2 приведена функция тока для различных моментов времени для прямоугольной области ($X = 2$, $Y = 1$) в случае, когда имеется простейшая модуляция внешнего электрического поля — в левой половине области знак поля положительный, а в правой — отрицательный

$$E_0 = \{(0.19, x < 1); \quad (-0.19, (x \geq 1))\}.$$

Течение становится почти стационарным, начиная с $t \geq 30$. Как и следовало ожидать, образуются два вихря, вращающихся в разные стороны. Обратим внимание на то, что вихри на рис. 1 и 2 при достижении стационарного состояния достаточно сильно похожи друг на друга.

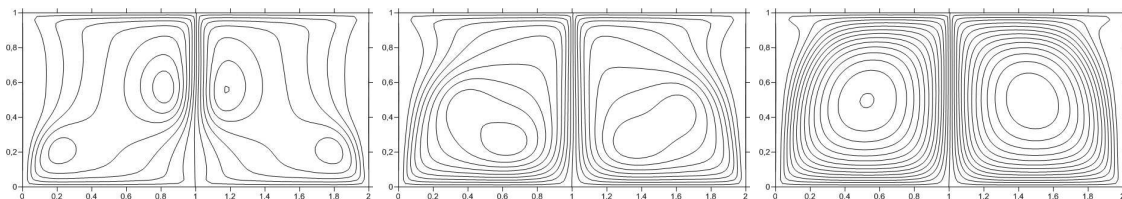


Рис. 2. Функция тока $\psi(x, y, t)$ при $t = 5; 10; 30$.

Также просто задать течение в прямоугольнике ($X = 2, Y = 1$), состоящее из трех вихрей, задавая следующую модуляцию (см. рис. 3)

$$E_0 = \{(0.19, x < 0.67); \quad (-0.19, 0.67 \leq x < 1.34); \quad (0.19, x \geq 1.34)\}.$$

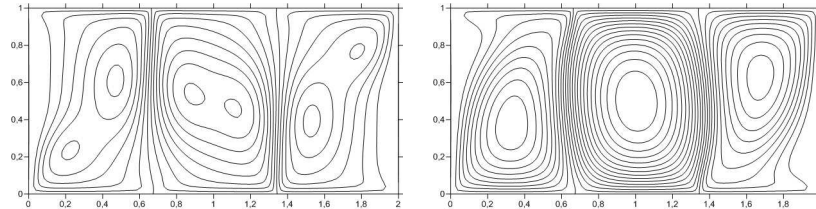


Рис. 3. Функция тока $\psi(x, y, t)$ при $t = 7,5; 30$.

Задавая более сложную пространственную модуляцию для прямоугольника ($X = 2, Y = 1$)

$$E_0 = \{(0.19, x < 0.33); \quad (-0.19, 0.33 \leq x < 1.67); \quad (0.19, x \geq 1.67)\},$$

получим иную картину распределения вихрей (см. рис. 4). В начальные моменты времени в пленке в соответствии с пространственной модуляцией образуются три области с различной структурой течений. В дальнейшем, несмотря на то, что имеются смены знаков напряженности электрического поля, в пленке возникает по существу один интенсивный вихрь и лишь в угловых точках области — слабо интенсивные мелкие вихри. Иными словами, выбранная модуляция поля в основном сохраняет структуру течения, свойственную квадратной пленке.

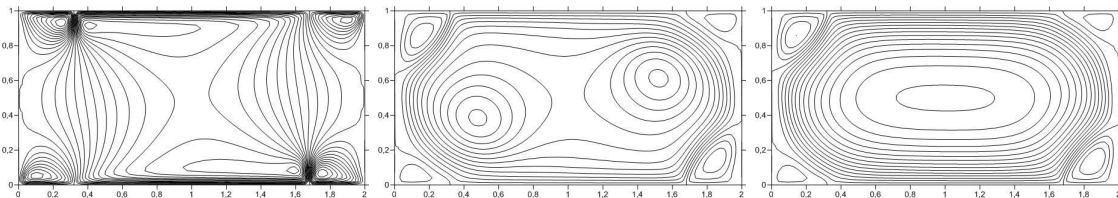
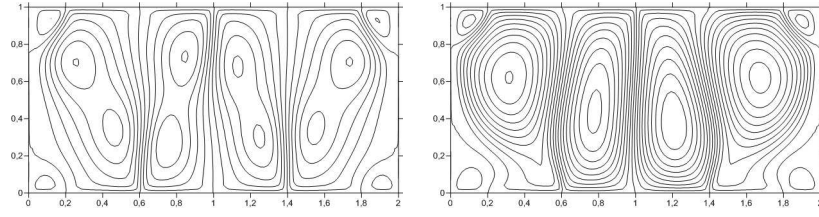


Рис. 4. Функция тока $\psi(x, y, t)$ при $t = 1; 10; 30$.

В прямоугольнике ($X = 2, Y = 1$) можно создать структуру из четырех вихрей. Для этого следует задавать, например, следующую модуляцию внешнего электрического поля

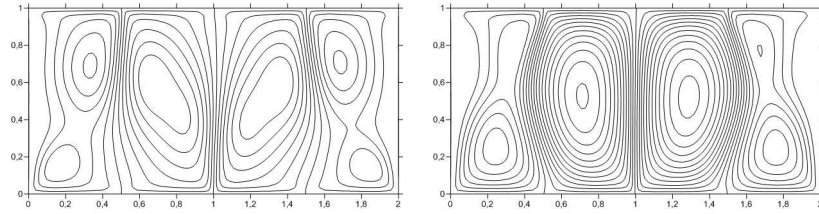
$$E_0 = \{(0.19, x < 0.2); \quad (-0.19, 0.2 \leq x < 0.6); \quad (0.19, 0.6 \leq x < 1.0); \\ (-0.19, 1.0 \leq x < 1.4); \quad (0.19, 1.4 \leq x < 1.8); \quad (-0.19, x \geq 1.8)\}.$$

Структура течения показана на рис. 5. Обратим внимание, что в области образуется не шесть вихрей, как этого можно было бы ожидать из вида модуляции. Дело в том, что крайние вихри, сосредоточенные первоначально в областях $x < 0.2$ и $x > 1.8$, практически исчезают, частично сохраняясь в виде мелких вихрей в угловых точках области.

Рис. 5. Функция тока $\psi(x, y, t)$ при $t = 7,5; 30$.

Впрочем, структура из четырех вихрей может быть создана и при более простой модуляции поля (см. рис. 6)

$$E_0 = \left\{ (0.19, x < 0.5); \quad (-0.19, 0.5 \leq x < 1.0); \right. \\ \left. (0.19, 1.0 \leq x < 1.5); \quad (-0.19, x \geq 1.5) \right\}.$$

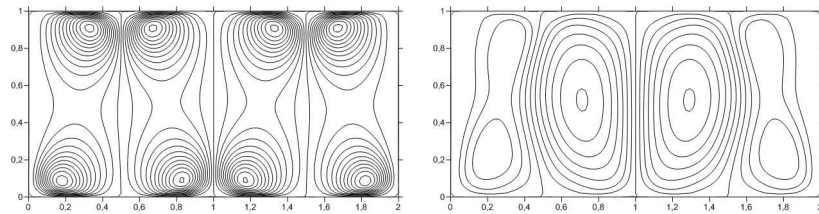
Рис. 6. Функция тока $\psi(x, y, t)$ при $t = 7,5; 30$.

Обратим внимание, что в рассматриваемом случае угловые вихри не образуются.

Все продемонстрированные выше модуляции внешнего электрического поля являлись кусочно-постоянными. Можно создавать структуры из заданного количества вихрей, используя гладкую модуляцию электрического поля. Например, для создания четырех вихрей в прямоугольной области ($X = 2, Y = 1$) можно использовать синусоидальную модуляцию, которая легко создается на практике:

$$E_0 = 0.19 \sin(2\pi x).$$

Картина течения показана на рис. 7.

Рис. 7. Функция тока $\psi(x, y, t)$ при $t = 2,5; 30$.

Результаты расчетов показывают, что пространственная модуляция внешнего электрического поля позволяет создавать вращательные течения в пленке практически с любым заданным количеством вихрей. Используемая для расчетов

асимптотическая модель описывает не только течение в пленке, но и течение в плоских микроканалах. Течения с вихревой структурой на практике используются для перемешивания растворов. Достаточно очевидно что наиболее качественное перемешивание смеси достигается при наличии большого количества вихрей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракты 14.740.11.0877, 14.А18.21.0873 и грантов РФФИ 10-05-00646, 10-01-00452.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Вращательное ЭГД течение в подвешенной жидкой пленке // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2009. № 5. С. 18–23.
- [2] Shiryayeva E. V., Zhukov M. Yu., Vladimirov V. A. Theory of rotating electrohydrodynamic flows in a liquid film // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80. Pp. 041603–(1–15).
- [3] Amjadi A. et al. A Liquid Film Motor // Microfluid. Nanofluid. 2009. Vol. 6. Pp. 711–715.
- [4] Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip // Annu. Rev. Fluid Mech. 2004. 36. Pp. 381–411.
- [5] Squires T. M., Quake S. R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale // Rev. Mod. Phys. 2005. Vol. 77, No. 3. 2005. Pp. 977–1026.
- [6] Oddy M. H., Santiago J. G. Multiple-species model for electrokinetic instability // Phys. Fluids. 2005. Vol. 17. Pp. 064108–(1–17).
- [7] Lin H., Storey B. D., Santiago J. G. A depth-averaged electrokinetic flow model for shallow microchannels // J. Fluid Mech. 2008. Vol. 608. Pp. 43–70.
- [8] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

Shiryayeva E. V., Shiryayeva I. V. *Control of EHD flow in a liquid film by an electric field.* The results of calculations for quasi-two-dimensional EHD flow are presented. These results demonstrate possibility of control flow structure by external electric field in the thin suspended liquid film. For calculations the method of finite elements is used.