

Российский Национальный комитет
по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Российский фонд фундаментальных исследований
Южный федеральный университет
Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
Южный научный центр РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
гг. Ростов-на-Дону, Азов

I

Содержание

Азаров А. Д., Бабенко И. С., Журавлев Г. А. Анализ влияния кривизны упругих тел на напряженно-деформированное состояние в зоне их контакта	6
Азаров Д. А. Нелинейно-деформируемая трехмерная механическая модель несжимаемых упругих материалов	11
Аникина Т. А., Углич П. С. Обратная задача об определении переменной жесткости пластины при изгибных колебаниях	16
Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Горшкова Е. М., Бабешко О. М., Иванов П. Б. К проблеме исследования и упреждения некоторых типов оползней	21
Белоконь А. В., Наседкин А. В., Скалиух А. С. Моделирование пьезоэлектрических материалов и устройств в программном комплексе ACELAN: опыт разработки и перспективы	25
Боев Н. В., Вдовин В. А., Зотов В. М. Многократные отражения ультразвуковых волн на дефектах: явные результаты и тестирование на лабораторном макете	30
Будянский А. В., Цибулин В. Г. Моделирование сосуществования и конкуренции близкородственных популяций с учетом миграции	35
Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Окорочков Е. П., Павлова Л. Н. Физико-механические свойства золобетонов	40
Бычков А. А., Карпинский Д. Н. Расчет равновесного распределения компонент сплава $SiGe$ в островках Странского–Крастанова	45
Ватульян А. О., Богачев И. В., Явруян О. В. Об одном подходе к восстановлению свойств неоднородного по толщине электроупругого слоя	50
Ватульян А. О., Дударев В. В. Об обратных задачах электроупругости	55
Ватульян К. А. Задача изгиба поперечной силой для цилиндра с ромбоэдрической анизотропией	60
Вихтенко Э. М., Намм Р. В. Модифицированные функционалы Лагранжа для решения полукоэрцитивной контактной задачи с трением	64
Волокитин Г. И., Моисеев Д. В. Условия бифуркации равновесия сферы	69
Говорухин В. Н., Шевченко И. В. Селекция устойчивых стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции	74
Горбашова Е. А., Углич П. С. Решение обратной коэффициентной задачи для двумерной области	79
Голуб М. В., Молл Й., Глушкова Н. В., Глушков Е. В., Фритцен К.-П. Неосесимметричное излучение волн Лэмба круговым пьезоактуатором	84
Греков М. А., Еремеев В. А., Каштанова С. В., Морозов Н. Ф., Язовская А. А. Прикладные задачи наномеханики	89

Джанибеков М. В. Быстрый метод граничных элементов в задаче обтекания профиля потоком идеальной жидкости	94
Ерофеев В. И., Виноградова Ю. В. Братья Коссера и механика обобщенных континуумов	98
Жуков М. Ю. Уравнения электрофореза в нормальной форме	103
Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Инварианты Римана для многомерной модели зонального электрофореза	108
Зеленина А. А., Зубов Л. М. Обобщенная задача Ламе для упругого шара	113
Зубов Л. М. Нелинейное деформирование упругих оболочек с распределенными дислокациями	118
Игумнов Л. А., Карелин И. С., Петров А. Н. Гранично-элементный расчет динамики составного пороупругого тела	123
Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Марков И. П., Пазин В. П. Матрица Грина трехмерной теории магнитоэластичности	127
Клевчишкина Н. В. Об особенностях одномерного моделирования движения крови	132
Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Определяющие уравнения термодинамической ортогональности в обобщенной связанной термоупругости третьего типа (GNIII)	137
Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Таранова М. В. Азимутальные числа Матье, ассоциированные с элементарными волновыми функциями эллиптического цилиндра	142
Колесников А. М. Цилиндрическая оболочка с жесткой цилиндрической вставкой	147
Куракин Л. Г. Об устойчивости правильной системы точечных вихрей внутри круга	152
Левенштам В. Б. Усреднение квазилинейных параболических задач с высокочастотной главной частью	156
Ляпин А. А. Фундаментальные решения для трансверсально изотропной пороупругой плоскости	159
Надолин К. А. Пример точного решения для уравнений сверхмелкого потока с нестационарной свободной границей	164
Наседкин А. В. Метод эффективных модулей для определения характеристик магнитоэлектрических композитов	169
Недин Р. Д. Прямые и обратные задачи для предварительно напряженных упругих пластин	174
Нескороев Р. Н. Численное определение резольвент интегральных уравнений состояния среды при решении задач вязкоупругости	179
Норкин М. В. Образование каверны на начальном этапе движения эллиптического цилиндра в вязкой жидкости	184

Овчинникова С.Н. Точки пересечения бифуркаций в задаче Куэтта–Тейлора	189
Поддубный А.А., Устинов Ю.А. Анализ энергетических потерь при распространении гармонических волн в сосуде с переменным диаметром	194
Радионых А.А. Об образовании пузырей в бингамовской жидкости	199
Ревина С.В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости периодических по времени течений	204
Сазонов Л.И. Оценки старших производных решений линеаризованной системы Озеена во всем пространстве	209
Сафроненко В.Г., Трифонов В.В., Шутько В.М. Виброакустические свойства трехслойной цилиндрической оболочки с полимерным заполнителем	214
Соболь Б.В., Краснощёков А.А. Равновесная поперечная трещина в полуплоскости, усиленной тонкой гибкой накладкой	219
Соловьев А.Н., Спожакин А.С., Напрасников В.В. Реконструкция дефектов в многослойных композиционных материалах	224
Сумбатьян М.А. Явные аналитические оценки частот вихревых пульсаций для высокоскоростного турбулентного потока в канале	229
Цывенкова О.А. Конвекция при электрофорезе, вызванная движением границы между зонами	234
Чебаков М.И., Газзаев Д.А., Колосова Е.М. Контактная задача для цилиндрического слоя с продольными протекторными вставками в виде спиралей	239
Чебаков М.И., Колосова Е.М. Плоские и пространственные контактные задачи для трехслойных оснований	244
Шейдаков Д.Н., Шейдаков Н.Е. Выпучивание круглой пористой трехслойной плиты при радиальном сжатии	249
Юдин С.А., Юдин А.С., Беликов Н.В. Об идентификации диаграммы свойств листового материала при формовке купола из круглой пластины	254
Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P. On eigen-frequencies of an elastic body with surface stresses	258
Morgulis A.B., Ilin K.I. Steady streaming between two vibrating planes at high Reynolds numbers	263

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КРИВИЗНЫ УПРУГИХ ТЕЛ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЗОНЕ ИХ КОНТАКТА

Азаров А. Д., Бабенко И. С., Журавлев Г. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Выполнен сравнительный анализ решений задач для полупространства и цилиндра (в плоской постановке), нагруженных контактным давлением. Получены оценки влияния кривизны на напряжения в цилиндре.

Предварительный анализ проблемы показывает, что для использования скрытых резервов контактной прочности необходимо развитие методов расчета, более точно учитывающих влияние кривизны на напряженно-деформированное состояние (НДС) контактирующих тел, нежели традиционный аппарат расчета. Ниже в основу сравнительного анализа НДС положены точные решения и принцип суперпозиции для учета влияния распределенной контактной нагрузки. Для цилиндра использовано точное решение Мусхелишвили [1] при его сжатии противоположно направленными силами (рис. 1), а для полупространства — точное решение при точечной нагрузке в поперечном сечении, изложенное Новацким [2].

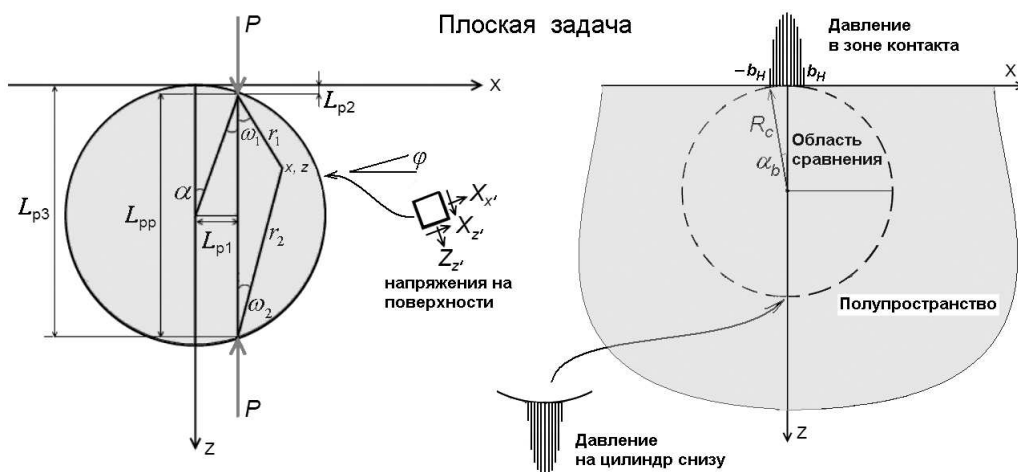


Рис. 1.

Сформированы и отлажены алгоритмы расчета НДС средствами пакета MathCAD при достаточно произвольных распределениях контактного давления. В условиях плоской задачи и герцевского распределения контактной нагрузки анализируются:

- для полупространства — нормальные напряжения, направленные параллельно оси Ox и оси Oz (рис. 1); $\sigma_{xx}(x, z)$, $\sigma_{zz}(x, z)$, соответственно, и касательные напряжения $\sigma_{xz}(x, z)$, а также (для плоско-деформированного случая) нормальные напряжения $\sigma_{yy}(x, z) = \nu(\sigma_{xx}(x, z) + \sigma_{zz}(x, z))$, где ν — коэффициент Пуассона.

- характеристики для оценки прочностных свойств — среднее давление (шаровая часть тензора напряжений) $\sigma = (\sigma_{xx}(x, z) + \sigma_{yy}(x, z) + \sigma_{zz}(x, z))/3$, интенсивность касательных напряжений:

$$K_\sigma = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6\sigma_{xz}^2}.$$

- для цилиндра соответствующие напряжения $X_x(r_1, \omega_1, r_2, \omega_2)$, $Z_z(r_1, \omega_1, r_2, \omega_2)$, $X_z(r_1, \omega_1, r_2, \omega_2)$, и характеристики σ_{cyl} , K_{cyl} .

Величины $r_1, \omega_1, r_2, \omega_2$, фигурирующие в задаче Мусхелишвили (смысл которых и характер нагружения ясны из рис. 1), вычисляются для каждой расчетной точки (x, z) и каждого значения α по формулам:

$$\begin{aligned} L_{p1} &= R_c \sin \alpha, & \omega_1 &= \arctan \left(\frac{x - L_{p1}}{z - L_{p2}} \right), & r_1 &= \frac{x - L_{p1}}{\sin \omega_1}, \\ L_{p2} &= R_c (1 - \cos \alpha), & \omega_2 &= \arctan \left(\frac{x - L_{p1}}{L_{p3} - z} \right), & r_2 &= \sqrt{(x - L_{p1})^2 + (L_{p3} - z)^2}, \\ L_{pp} &= 2R_c \cos \alpha, & L_{p3} &= L_{pp} + L_{p2}. \end{aligned}$$

В исходных формулах для напряжений рассматривается точечная сила P , имеющая смысл удельной (нормированной по образующей цилиндра) нагрузки, которая в поперечном сечении (рис. 1) распределяется по закону $q(x)$:

$$q(x) = P \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_H^2}}, \quad \frac{b_H}{R} = 2\sqrt{\frac{P\eta}{R\pi}}, \quad \eta = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad q_{max} = \sqrt{\frac{P}{R\eta\pi}},$$

где: b_H — полуширина площадки контакта, E — модуль упругости, q_{max} — максимальное давление в зоне контакта, R — приведенный радиус кривизны, ниже равный радиусу цилиндра R_c [3]. Для расчетов выбран материал — сталь: $E_1 = E_2 = 200$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,28$.

В случае кругового цилиндра и в случае полупространства в исходных формулах точка приложения силы и величины $r_1, \omega_1, r_2, \omega_2$ определяются углом α (рис. 1). В соответствии с принципом суперпозиции, суммируя напряжения (по α в круговом цилиндре и по координате x в полупространстве), порождаемые каждой силой, получаем результирующие значения:

$$\begin{aligned} X_x &= - \int_{-\alpha_b}^{\alpha_b} \frac{q(\alpha)}{\pi} \left(2 \frac{(\sin \omega_1(\alpha))^2 \cos \omega_1(\alpha)}{r_1(\alpha)} + 2 \frac{(\sin \omega_2(\alpha))^2 \cos \omega_2(\alpha)}{r_2(\alpha)} - L_{p\alpha}(\alpha) \right) R_c d\alpha; \\ Z_z &= - \int_{-\alpha_b}^{\alpha_b} \frac{q(\alpha)}{\pi} \left(2 \frac{(\cos \omega_1(\alpha))^3}{r_1(\alpha)} + 2 \frac{(\cos \omega_2(\alpha))^3}{r_2(\alpha)} - L_{p\alpha}(\alpha) \right) R_c d\alpha; \\ X_z &= - \int_{-\alpha_b}^{\alpha_b} \frac{2q(\alpha)}{\pi} \left(2 \frac{\sin \omega_1(\alpha) \cdot (\cos \omega_1(\alpha))^2}{r_1(\alpha)} + 2 \frac{\sin \omega_2(\alpha) (\cos \omega_2(\alpha))^2}{r_2(\alpha)} \right) R_c d\alpha. \end{aligned}$$

Здесь α_b — угол, соответствующий положению b_H на оси x , $q(\alpha)$ — давление соответствующее закону $q(x)$. Для учета смещения точки приложения силы в случае полупространства использовали величину L_{p1} , так как она по своему значению практически равна x_p (где $(x_p, 0)$ — точка приложения силы). В соответствии

с принципом суперпозиции и с учетом того, что α зависит от x :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, z) &= - \int_{-b_H}^{b_H} \frac{2q(x)}{\pi} \frac{z(x - L_{p1}(\alpha))^2}{z^2 + (x - L_{p1}(\alpha))^2} dx ; \\ \sigma_{zz}(x, z) &= - \int_{-b_H}^{b_H} \frac{2q(x)}{\pi} \frac{z^3}{z^2 + (x - L_{p1}(\alpha))^2} dx ; \\ \sigma_{xz}(x, z) &= - \int_{-b_H}^{b_H} \frac{2q(x)}{\pi} \frac{z^2(x - L_{p1}(\alpha))}{z^2 + (x - L_{p1}(\alpha))^2} dx .\end{aligned}$$

Для расчета напряжений на поверхности цилиндра выполняется поворот тензора напряжений на соответствующий угол φ (рис. 1).

Расчет НДС осуществлен для различных наборов точек:

- в зоне контакта задана равномерная матрица точек расчета: размер по горизонтали x равен $6 b_H$, а в глубину он равен $5 b_H$. Первый слой лежит на глубине $0,1 b_H$.

- для анализа напряжений на поверхности используется равномерное разбиение дуги s сечения цилиндра (угла 90 градусов), за исключением первой точки, которая связана с концом области b_H .

Анализ НДС в зоне контакта и на поверхности цилиндра выполнен для различных значений кривизны R и нагрузки P (см. табл.).

Радиус, мм	b_H/R	q_{max} , МПа	b_H/R	q_{max} , МПа	b_H/R	q_{max} , МПа
	P=50 кН/м		P=500 кН/м		P=5000 кН/м	
2	0,017	929	0,054	2939	0,108	9292
5	0,011	588	0,034	1859	0,011	5877
10	0,0077	416	0,024	1314	0,077	4156
50	0,0034	186	0,011	588	0,034	1858
100	0,0024	131	0,0077	416	0,024	1314

Ниже приведены расчетные данные для цилиндра с радиусом 5 мм при $P=3620$ кН/м. Значения напряжений нормированы относительно величины максимального давления $q_{max}=5000$ МПа. На пространственных графиках приведены напряжения как функции x и z . На рис. 2 отображается характеристика **НДС в зоне контакта**. Интенсивность касательных напряжений для цилиндра изображена на рисунке слева, а справа дается сравнение по разнице «напряжение в цилиндре» минус «напряжение в полупространстве». Графики на рис. 3 показывают интенсивность касательных напряжений и сравнение с шаровой составляющей в цилиндре (слева). На правом рисунке дана выборка из левого графика для двух уровней глубины $z = 0,1 b_H$ и $z = 0,7 b_H$.

Напряжения на поверхности в первой четверти сечения цилиндра (рис. 4) дают представление о разнице решений для цилиндра и полупространства

при условии, что $q_{max}=5000$ МПа. Представленные результаты расчетов демонстрируют напряжения, соответствующие цилиндрам разных размеров, но при условии одинаковой относительной полуширины $b_H/R = 0,092$ и максимальном давлении $q_{max} = 5000$ МПа. При этом нагрузка P различна и определяется формулой $P = \pi R \eta q_{max}^2$.

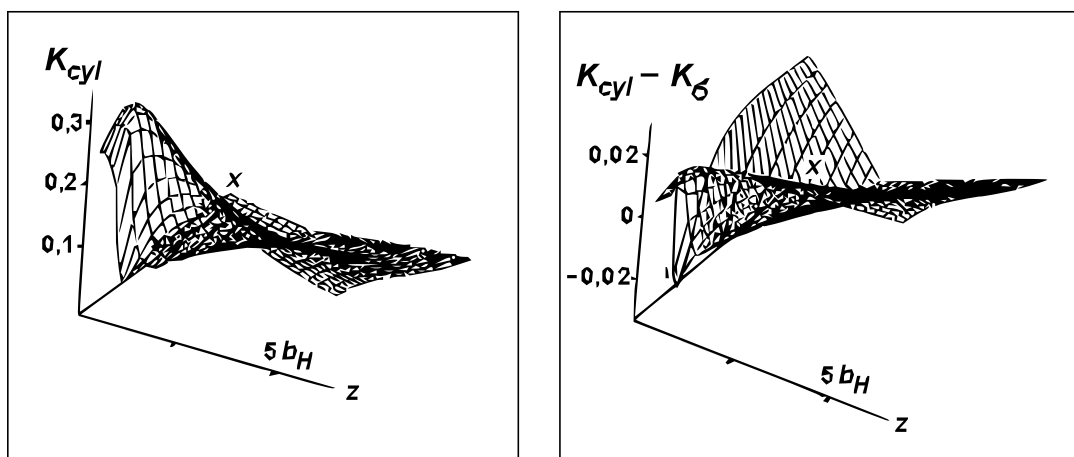


Рис. 2.

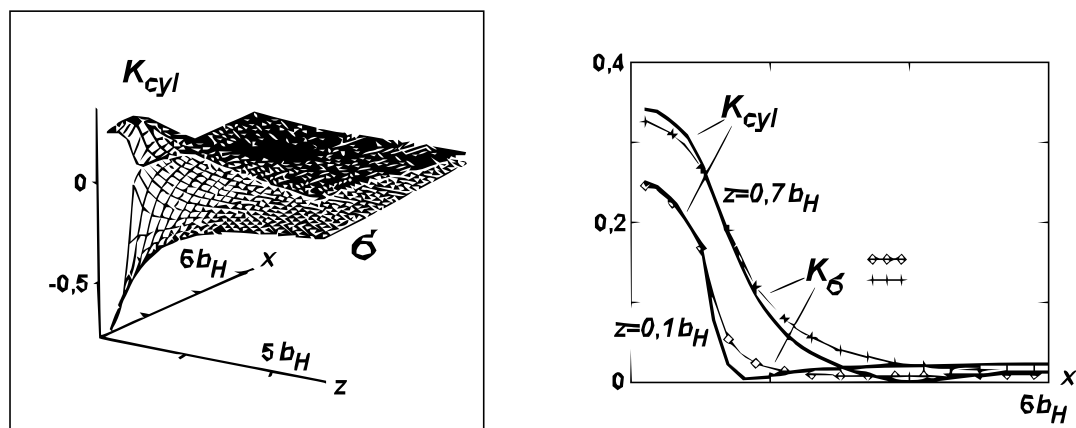


Рис. 3.

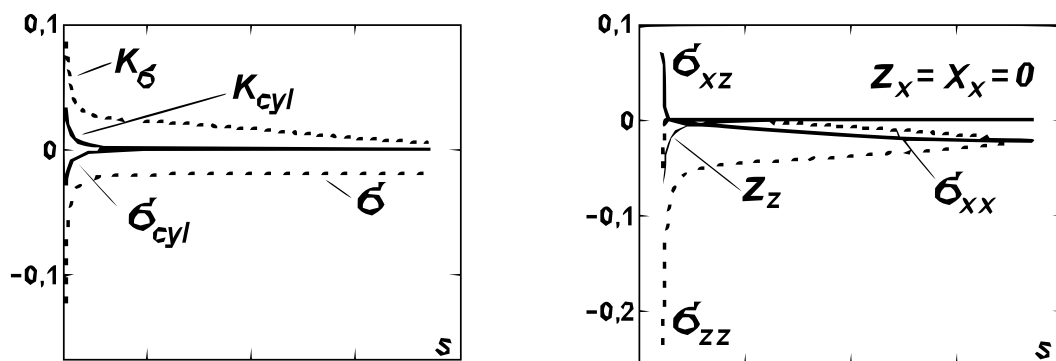


Рис. 4.

Использование решения для полупространства, которым традиционно моделируется цилиндрическое тело любой кривизны, не обеспечивает выполнение граничных условий для цилиндра (напряжения по поверхности цилиндра не равны нулю вне зоны контакта). Расчеты показывают:

- наличие свободной поверхности цилиндра приводит к тому, что в некоторой зоне его поверхности напряжения существенно меньше, чем в соответствующих точках полупространства, т. е. расчеты по Герцу дают завышение напряжений;
- рост кривизны цилиндра приводит к большему (относительно полупространства) снижению уровня напряжений;
- имеет место повышенная корреляция интенсивности касательных напряжений и среднего (шарового) давления в цилиндре: в точках поверхности цилиндра при приближении к зоне контакта с ростом интенсивности касательных напряжений пропорционально растет и среднее давление (наличие отрицательной шаровой части тензора напряжений чаще всего является упрочняющим фактором даже, если при этом растет и сдвиговая характеристика);
- разница интенсивности касательных напряжений и шарового давления (в цилиндре и в полупространстве) увеличивается по мере приближения к зоне контакта.

Перечисленные особенности решения плоской контактной задачи Герца можно считать одним из фактов наличия скрытых резервов прочности для тел ограниченных размеров. Тем не менее эти резервы касаются, исключительно, плоской контактной задачи — ни качественно и ни количественно они не затрагивают оценку иных (например, изгибно-сдвиговых компенсационных деформаций [4]) факторов проявления резервов роста прочности локализованного (срединного или кромочного) контакта.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [2] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [3] *Машиностроение. Энциклопедический справочник.* Инженерные расчеты в машиностроении // Под ред. М. А. Саверина. М.: ГНТИ машиностроительной литературы. Т. 1, Кн. 2, 456 с.
- [4] *Журавлев Г. А.* Оценка применимости решения Герца в задачах о контакте зубьев // Техника машиностроения. М., 2001, № 2, С. 82–90.

Azarov A. D., Babenko I. S., Zhuravlev G. A. *The analysis of influence of curvature of elastic bodies upon the stress-strain state in a zone of their contact.* The comparative analysis of solutions of the problems for semispace and the cylinder (in 2d statement) loaded with contact pressure was carried out. The estimations of influence of curvature on the stresses within the cylinder were recieved.

НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМАЯ ТРЕХМЕРНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСЖИМАЕМЫХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Азаров Д. А.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Предложена трехмерная механическая модель для описания больших деформаций нелинейно-упругих тел в условиях постоянного объема. Определены функции внутренних характеристик модели: нелинейно-упругих жесткостей связей, которые позволяют описать экспериментальные данные одноосного растяжения-сжатия резиноподобных материалов при больших деформациях.

В статье [1] были получены соотношения трехмерной механической модели для описания больших деформаций при одноосном растяжении. Ниже предложена аналогичная модель для описания больших деформаций нелинейно-упругих тел в условиях постоянного объема. Модель представляет собой элементарный куб упругой изотропной сплошной среды с заключенной в него трехмерной механической системой пружин (связей), отражающих взаимодействия между гранями куба. Узлы системы закреплены в центрах этих граней.

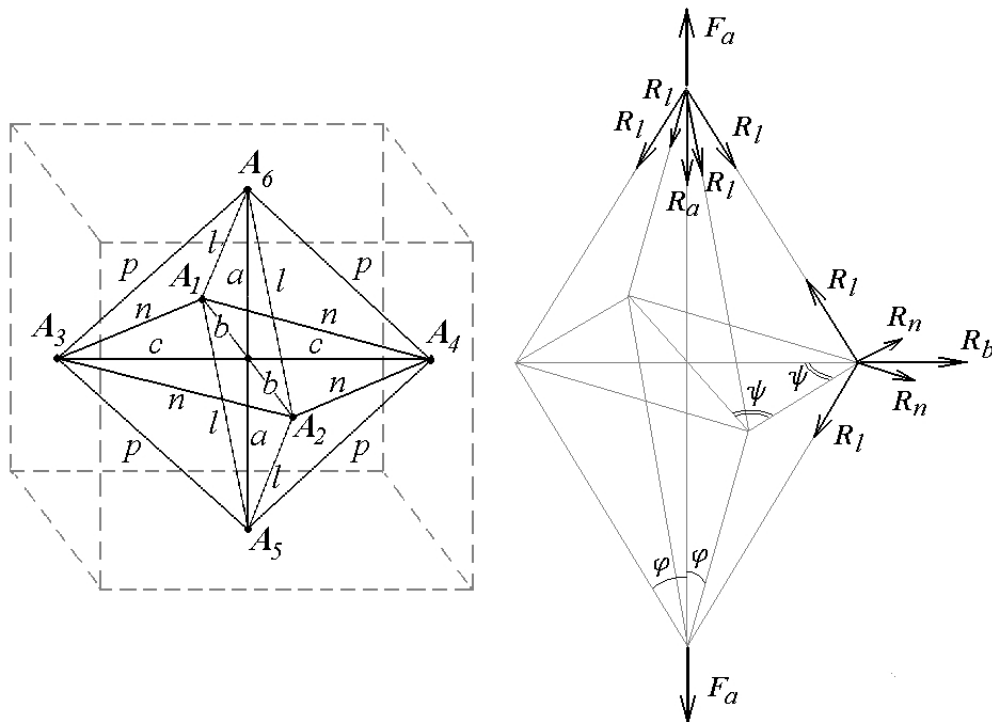


Рис. 1. Геометрия связей и равновесие сил в модели.

В изотропном материале длины граней элементарного куба (длины связей) в отсчетной конфигурации равны $A_5A_6 = A_1A_2 = A_3A_4 = 2a = 2b = 2c$, а диагональные связи $n = p = l$. Жесткости связей k_a, k_b, k_c, k_l, k_n и k_p , в общем случае нелинейные, в начальном состоянии — это коэффициенты упругости $k_a = k_b = k_c$, и $k_l = k_n = k_p$. Ниже, несмотря на равенства, некоторые обозначения сохраняются для понимания источников значений параметров.

Одноосное растяжение модели силой F_a , приложенной в вершинах A_5 и A_6 (рис. 1) приводит к деформации связей на величины $\delta_a, \delta_b = \delta_c, \delta_l = \delta_p, \delta_n$, так, что в текущей конфигурации длины равны

$$L = l + \delta_l, \quad A = a + \delta_a, \quad B = b - \delta_b, \quad N = l - \delta_n \quad (1)$$

Выполняются очевидные соотношения:

$$a^2 + b^2 = l^2, \quad A^2 + B^2 = L^2, \quad l = a\sqrt{2} \quad (2)$$

Подставив (1) во второе равенство, и с учетом первого, получим геометрическое условие для удлинений связей модели:

$$2a\delta_a + \delta_a^2 - 2b\delta_b + \delta_b^2 = 2l\delta_l + \delta_l^2 \quad (3)$$

При одноосном растяжении сечение изотропной модели в горизонтальной плоскости не искажает своей формы, следовательно $N = B\sqrt{2}$, $\delta_n = \delta_b\sqrt{2}$.

Из условия несжимаемости материала текущий и начальный объемы равны:

$$V = V_0 \Rightarrow b^2a = B^2A \Rightarrow b^2a = (b - \delta_b)^2(a + \delta_a) \Rightarrow$$

$$\delta_b^2(a + \delta_a) - 2b(a + \delta_a)\delta_b + b^2\delta_a = 0$$

Решением этого уравнения является условие связи δ_b с δ_a

$$\delta_b = b \frac{(a + \delta_a) - \sqrt{(a + \delta_a)^2 - \delta_a(a + \delta_a)}}{(a + \delta_a)} \quad (4)$$

Из условия (3) следует условие связи δ_l с δ_a и δ_b

$$\delta_l = -la - \sqrt{l^2 - (2\delta_b b - \delta_b^2 - 2\delta_a a - \delta_a^2)} \quad (5)$$

Формулы модели для описания изменения размеров при деформировании механической конструкции в зависимости от внешнего усилия [1], получаются из условий равновесия в узлах сил, возникающих в связях. Уравнения статики в узлах модели (рис. 1) имеют вид

$$F_a - R_a - 4R_l \cos \varphi = 0 \quad (6)$$

$$-2R_l \sin \varphi + 2R_n \cos \psi + R_b = 0 \quad (7)$$

где $R_i = k_i \delta_i$, $i = a, b, l, n$ — реакция соответствующей связи с жесткостью k_i в общем случае нелинейной.

Для определения углов справедливы тригонометрические соотношения:

$$\sin \varphi = \frac{B}{L} = \frac{b - \delta_b}{l + \delta_l}, \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad \cos \varphi = \frac{A}{L} = \frac{a + \delta_a}{l + \delta_l} \quad (8)$$

Подставив в (6) и (7) выражения (8), получаем нелинейные уравнения, которые с уравнениями (4) и (5) образуют систему для определения зависимостей между F_a , δ_a , δ_b , δ_l , δ_n (математическую модель, соответствующую трехмерной механической конструкции связей)

$$F_a = k_a \delta_a + 4k_l \delta_l \frac{a + \delta_a}{l + \delta_l} \quad (9)$$

$$\delta_b = C_l \delta_l \quad (10)$$

где комплекс

$$C_l(\delta_l) = \frac{2k_l b}{2k_l \delta_l + 2k_n(l + \delta_l) + k_b(l + \delta_l)} \quad (11)$$

Задавая деформацию δ_a как некоторый входной процесс, из (4), (5), (9)–(11) при известных жесткостях связей можно определить функции $F_a(\delta_a)$, $\delta_b(\delta_a)$, $\delta_l(\delta_a)$, $\delta_n(\delta_a)$.

«Пружины-связи» данной модели в общем случае нелинейно-упругие. Характеристики жесткости пружин рассматриваются как некоторые интегральные оценки силовых взаимодействий общей структуры материала. При этом допускаются и отрицательные значения жесткостей, что является отражением реальных сил притяжения в физической среде. Для изотропного материала вводятся два типа взаимодействий (две характеристики материала): между противоположащими гранями (поперечные) и между смежными (диагональные).

В предположении, что одинаковы жесткости связей $k_n = k_l$ и $k_b = k_a$, получаем

$$C_l(\delta_l) = \frac{2k_l a}{2k_l(l + 2\delta_l) + k_a(l + \delta_l)} \quad (12)$$

Поскольку δ_l и δ_b уже известны из (4), (5), то (10), (12) являются условиями связи между жесткостями k_l и k_a . В этом случае при наличии экспериментальных данных «усилие-удлинение/сжатие» из (9), (10), (12) можно определить k_a и k_l как функции удлинений δ_a и δ_l . На рис. 2 представлена соответствующая экспериментальная кривая для каучука [2], и восстановленные по этим данным функции $k_a(\delta_a)$ и $k_l(\delta_l)$.

Надо заметить, что полученные отрицательные значения жесткости связей k_a и k_b не являются физически невозможными. Их можно получить, например, следующим способом: к предварительно сжатым диагональным пружинам крепятся вертикальные и горизонтальные пружины. После освобождения всей конструкции от удерживающих сил, диагональные связи, стремясь вернуться в недеформированное состояние, разожмутся и растянут вертикальные и горизонтальные. В такой пространственной конструкции диагональные пружины будут находиться в сжатом состоянии, а вертикальные и горизонтальные будут растянуты. Таким образом, в полученной модели до определенного момента (до возврата в недеформированное состояние) при растяжении δ_a горизонтальные связи не будут оказывать

сопротивления поперечному сжатию δ_b , а, наоборот, способствовать ему. А это, как раз, и соответствует отрицательному коэффициенту жесткости связи b .

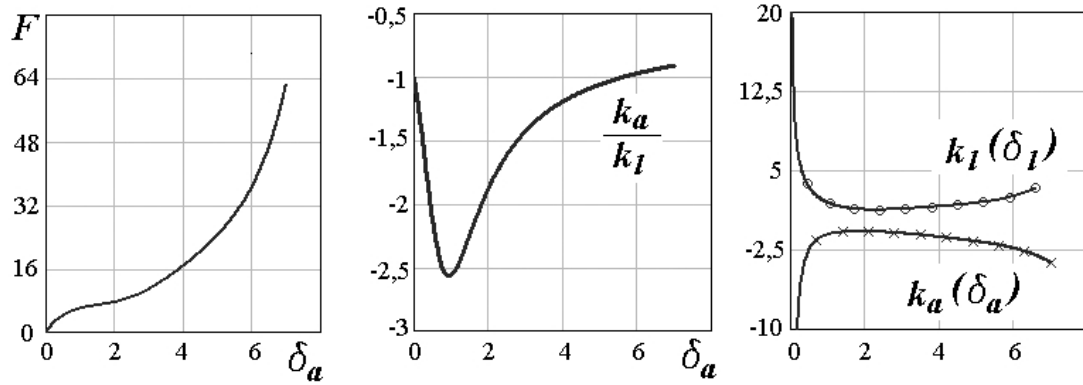


Рис. 2. Кривая растяжения каучука и характеристики жесткости связей.

Аналогично обработаны экспериментальные данные [3] резины на сжатие (рис. 3). Сложный характер изменения жесткости k_l связан с геометрическим изменением размера δ_l при условии постоянства объема (рис. 4), что также должно объяснять некоторое упрочнение на конечном участке нагружения (рис. 3), наступающее после значения $\delta_a = -0,2$.

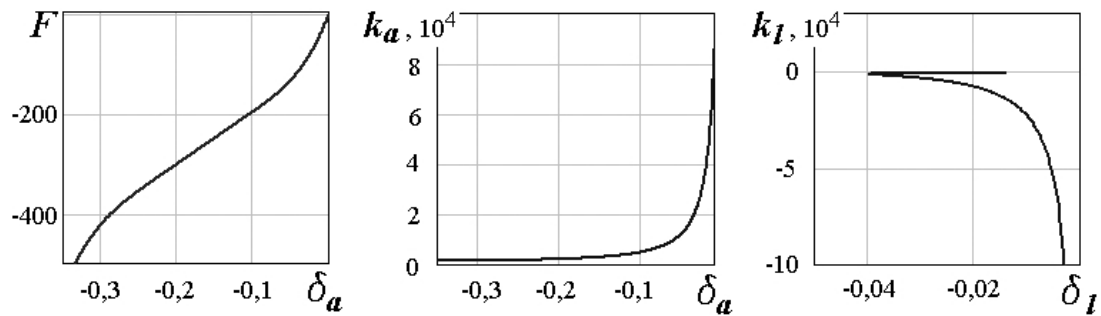


Рис. 3. Кривая сжатия резины и характеристики жесткости связей.

Таким образом, разработан способ определения функций внутренних характеристик модели: нелинейно-упругих жесткостей связей, которые позволяют описать экспериментальные данные одноосного растяжения-сжатия резиноподобных материалов при больших деформациях. Надо отметить, что при определении жесткостей в (12) было использовано предположение $k_n = k_l$ и $k_b = k_a$. Поскольку поведение внутренних связей при больших деформациях должно быть различным при растяжении и сжатии, более корректным является восстановление функций с учетом знака удлинения. Для этого необходимы экспериментальные данные одноосного растяжения-сжатия, получаемые на одном образце. Некоторое упрощение такого эксперимента сводится к тому, что величина деформации сжатия, обычно существенно меньше, чем деформации растяжения.

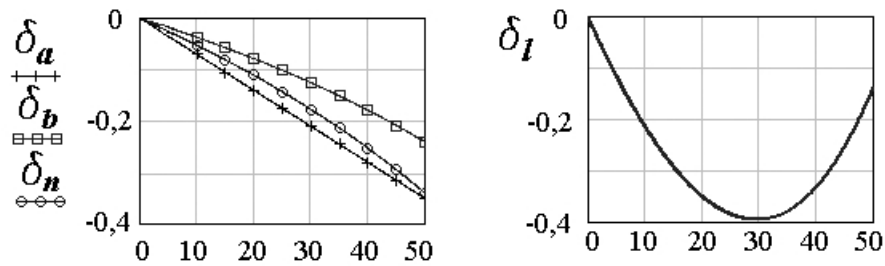


Рис. 4. Изменения длин связей при сжатии с постоянной скоростью δ_a в зависимости от времени.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Азаров А. Д. Азаров Д. А. Трехмерная механическая модель для описания больших упругих деформаций при одноосном растяжении // Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11. № 2(53). С. 147–156.
- [2] Гуль В. Е. Кулезнев В. Н. Структура и механические свойства полимеров. Высш. школа, 1972. 320 с.
- [3] Халаев А. А. Титенкова Е. Н. Оценка напряженно-деформированного состояния полимерных упругих элементов перспективного поглощающего аппарата автосцепки ГП-120А // Вестник Брянского технического университета. 2007. № 4. С. 84–90.

Azarov D. A. *Nonlinearly deformable 3d mechanical model of incompressible elastic materials.* The 3d mechanical model for description of large deformations of non-linear elastic bodies under constant volume is proposed. The functions of inner properties of the model such as rigidity of non-linear bonds (springs) are defined, which allows to describe experimental data of uniaxial compression-expansion of rubber-like materials under large deformations.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Аникина Т. А.^{*}, Углич П. С.^{**}

^{*}Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

^{**}Южный математический институт, Владикавказ

В настоящей статье рассматривается обратная коэффициентная задача об определении переменной жесткости круглой упругой пластинки, которая совершает вынужденные установившиеся колебания под действием равномерно распределенной осциллирующей нагрузки. При этом изгибная жесткость пластинки считается функцией радиальной координаты. Исходной информацией для ее определения является информация о прогибе пластинки на фиксированной частоте.

Для решения прямой задачи о колебаниях неоднородной пластинки использован метод Ритца. При этом результаты, полученные при помощи метода Ритца, сравниваются с известными аналитическими решениями, полученными для однородной пластинки, а также с результатами, полученными при решении соответствующей краевой задачи методом пристрелки. Для решения обратной задачи использован метод Галеркина. Приведены результаты вычислительных экспериментов для различных законов изменения жесткости.

1. Прямая задача. Рассмотрим установившиеся изгибные осесимметричные колебания круглой пластины радиуса R переменной жесткости под действием равномерно распределенной нагрузки q . Будем считать, что цилиндрическая жесткость пластины

$$D(r) = \frac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}$$

является функцией радиальной координаты. В выражении для $D(r)$ через $E(r)$ обозначен модуль Юнга, через h — толщина пластинки, ν — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим осесимметричные изгибные колебания круглой пластины в цилиндрической системе координат r, φ, z . Введем далее безразмерные параметры и переменные по формулам: $r = R\tilde{r}$, $D = D_0\tilde{D}$, $D_0 = D(R)$ (знак тильды для удобства в дальнейшем будем опускать)

Уравнение колебаний пластинки в безразмерных переменных имеет вид:

$$[D(r)rw''(r)]'' + \nu [D'(r)w'(r)]' - \left[\frac{D(r)w'(r)}{r} \right]' - k^2rw(r) - \lambda qr = 0 \quad (1)$$

Здесь $k^2 = \frac{\rho\omega^2hR^4}{D_0}$ — безразмерный спектральный параметр, связанный с частотой колебаний $\lambda = \frac{q_0R^3}{D_0}$ — вспомогательный коэффициент, ρ — плотность пластины.

В случае жесткой заделки краевые условия имеют вид:

$$w(1) = w'(1) = 0 \quad (2)$$

в случае шарнирного опирания краевые условия следующие:

$$w(1) = 0, \quad M_{rr}(1) = -D(r) \left[w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r) \right] \Big|_{r=1} = 0 \quad (3)$$

Решение задач (1)–(2), (1)–(3) может быть построено несколькими методами. Поскольку оператор имеет переменные коэффициенты, то необходимо использовать численные схемы. Одна из них опирается на метод Ритца, основанный на нахождении стационарной точки функционала:

$$F = \int_0^1 D(r) \left\{ [w''(r)]^2 + \left[\frac{w'(r)}{r} \right]^2 + 2\nu \left[\frac{w'(r)w''(r)}{r} \right] \right\} r dr - 2 \int_0^1 w(r) q r dr - \rho \omega^2 h \int_0^1 w^2(r) r dr \quad (4)$$

В соответствии с методом Ритца представим функцию прогиба в виде суммы

$$w(r) = \sum_{k=1}^{N_1} C_k \varphi_k(r),$$

где базисные функции имеют вид $\varphi_k(r) = (1 - r^2)^2 r^{2k}$ для случая жесткой заделки и $\varphi_k(r) = (1 - r^2) r^{2k}$ для случая шарнирного опирания.

В табл. 1 приведены собственные частоты для различных законов распределения цилиндрической жесткости $D(r)$, рассчитанные на основании двух предложенных методов. Точность методов тестировалась для однородной пластины в случае жесткой заделки, где собственные частоты известны [3] $k_1 = 10, 21$, $k_2 = 39, 78$, $k_3 = 88, 90$ и погрешность метода Ритца при определении собственных частот при $N_1 = 7$ составила менее 1%. Здесь и всюду в дальнейшем принято следующее значение коэффициента Пуассона $\nu = 0, 1$.

Для того, чтобы убедиться в достоверности результатов расчётов прогиба пластинки, произведено сравнение результатов для однородной пластинки при $k = 0$ с известными аналитическими результатами [2]. Погрешность результатов, найденных методом Ритца составила $10^{-5} \div 10^{-7}$. В таблице 2 приведены значения прогиба в некоторых точках для $k = 10$ в случае жесткой заделки и $k = 2, 5$ в случае шарнирного опирания. Из данных, представленных в табл. 2, видно хорошее совпадение результатов полученных разными методами, что позволяет судить об их достоверности.

2. Обратная задача. Постановка обратной задачи заключается в определении жесткости пластины $D(r)$ по некоторой дополнительной информации о поле перемещений, заданной или на границе пластины в некотором диапазоне изменения частоты колебаний или всюду внутри пластины. Такая задача относится

Закон распределения $D(r)$	Жесткая заделка		Шарнирное опирание	
	Метод Ритца	Метод пристрелки	Метод Ритца	Метод пристрелки
$D(r) = 1$	10,27 39,79	10,22 39,77	4,63 29,48	4,62 29,49
$D(r) = 1 + r^2$	12,51 46,34	12,52 46,35	5,32 33,87	5,33 33,87
$D(r) = 1 + e^r$	17,68 66,25	17,68 66,27	7,64 48,68	7,65 48,66
$D(r) = 1 + \cos r$	13,47 53,60	13,47 53,41	6,25 39,86	6,25 39,86

Таблица 1. Результаты расчета собственных частот.

Закон распределения $D(r)$	r	Жесткая заделка		Шарнирное опирание	
		Метод Ритца	Метод пристрелки	Метод Ритца	Метод пристрелки
$D(r) = 1 + r^2$	$r = 0$	0,030339	0,030337	0,071159	0,071157
	$r = 0,5$	0,015013	0,015011	0,048943	0,048941
$D(r) = 1 + e^r$	$r = 0$	0,007935	0,007935	0,030131	0,03013
	$r = 0,5$	0,004096	0,004096	0,020813	0,020812
$D(r) = 1 + \cos r$	$r = 0$	0,020329	0,020325	0,046881	0,046878
	$r = 0,5$	0,011326	0,011325	0,033475	0,033474

Таблица 2. Результаты расчета прогиба пластины.

к коэффициентным обратным задачам и в общей ситуации является существенно нелинейной и некорректной [1].

В настоящей работе рассмотрена постановка обратной задачи, заключающаяся в нахождении жесткости пластины $D(r)$ по заданному прогибу при некоторой фиксированной частоте

$$w(r, k_0) = W(r), \quad k_0 \in [k_1, k_2] \quad (5)$$

Воспользуемся проекционным методом Галеркина для исходной краевой задачи (1–3). Выберем базисные функции вида $\psi_k(r) = r^{k-1}$ и представим функцию жесткости в виде разложения по этой системе :

$$D(r) = \sum_{k=1}^{N_2} A_k \psi_k(r).$$

Преобразуем уравнение (1) и введем следующее обозначение для невязки

$$N(r) = r^2 [D(r)rW''(r)]'' + \nu r^2 [D'(r)W'(r)]' - r [D(r)W'(r)]' + D(r)W'(r) - k^2 r^3 W(r) - \lambda q r^3 \quad (6)$$

Далее потребуем ортогональности невязки к базисным функциям

$$\int_0^1 N(r)\psi_k(r)rdr = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_2.$$

Получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов разложения A_k , решая которую находим приближенное решение сформулированной обратной задачи.

3. Результаты вычислительных экспериментов. Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов по восстановлению цилиндрической жёсткости пластины $D(r)$ на основе предложенной выше проекционной схемы. На рис. 1 в случае шарнирного опирания при $D(r) = 1 + e^r$ продемонстрировано влияние количества координатных функций N_2 на точность результатов. Дальнейшие вычисления проводились при следующем наборе параметров: $\nu = 0, 1$; $q = 1$; $N_2 = 15$. Результаты экспериментов показали, что для выбранного числа координатных функций невязка имеет порядок 10^{-3} . На рис. 2 изображены результаты реконструкции жесткости для краевой задачи (1), (2). Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о достаточно точной процедуре реконструкции.

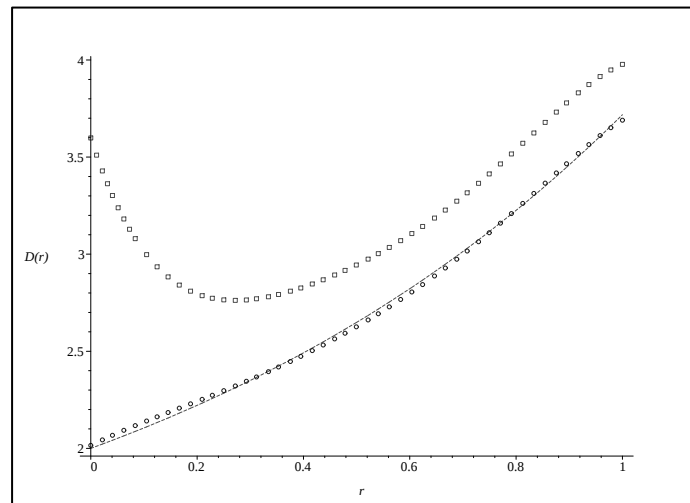


Рис. 1. Результаты решения обратной задачи. Сплошной линией обозначено точное решение, квадратами — при $N_2 = 6$, точками — при $N_2 = 15$.

Заключение. В представленной работе рассмотрена обратная задача об определении переменной жесткости круглой упругой пластинки по известному прогибу на заданной частоте. Разработан эффективный вычислительный аппарат для решения прямой задачи. Достоверность предложенного подхода определялась сравнением с известными аналитическими решениями. Приведен сравнительный анализ результатов полученных с помощью проекционного метода Ритца и метода пристрелки.

Предложен подход к решению обратной задаче на основе метода Галеркина. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

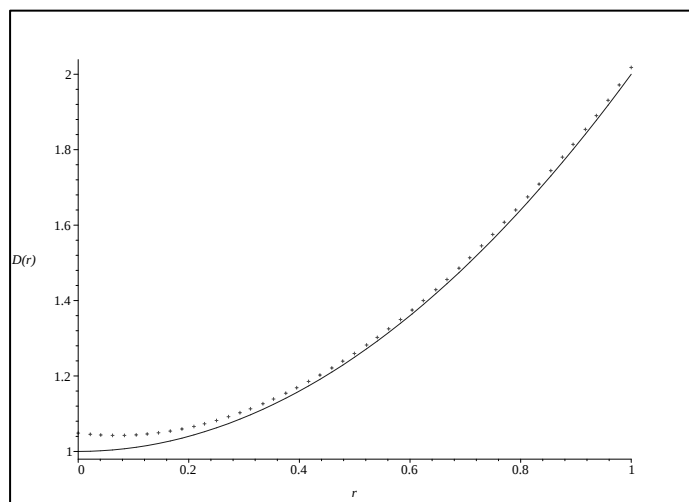


Рис. 2. Результаты решения обратной задачи при $D(r) = 1 + r^2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [2] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
- [3] Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.

Anikina T. A, Uglich P. S. *On the variable rigidity definition problem for the vibrating plate.* The inverse coefficient problem of the round elastic plate variable rigidity definition is considered. The flexural rigidity of a plate is considered as a function of radial coordinate. The information of a plate deflection on the fixed frequency serves as input data.

For a solution of the direct problem about oscillations of an inhomogeneous plate the Ritz method is used. Results obtained using the Ritz method are compared with known analytical results, and also with the results, obtained from a solution of the corresponding boundary problem by a shooting method. For a solution of the inverse problem the Galerkin method is used. Results of computing experiments for various laws of a rigidity variation are presented.

К ПРОБЛЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И УПРЕЖДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ОПОЛЗНЕЙ

**Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Горшкова Е. М.,
Бабешко О. М., Иванов П. Б.**

Кубанский государственный университет, Краснодар

Оползни рассматриваются как блочные структуры, состоящие из блочных элементов, границы между которыми начинают появляться по мере изменения свойств среды (В,С,Д). Эти границы рассматриваются как вертикальные плоскости, которые в свою очередь подвержены изменениям, старениям. В некоторых случаях они имеют форму, близкую к цилиндрической. По мере старения плоскости становятся разнотипными, и среде, из которых состоят плоскости, оказывается все сложнее удерживать блочные элементы в контакте. В результате образуются трещины, которые затем распространяются по всей плоскости контакта и блок разрушается. Немаловажную роль в разрушении играет также возможность просачивания грунтовых вод между рельефом основания и оползневыми блоками. Это приводит к уменьшению коэффициента трения между блоками и основаниями. Последняя часть, связанная с изменениями коэффициента трения и в случае наклонного основания достаточно легко анализируется методами теоретической механики. Наиболее сложной является часть, связанная с контактом блоков между собой при наличии стареющей контактной границы, и ей уделено основное внимание. Основными моментами исследования являются математическое описание выбранной модели, построение блочных элементов описанной блочной структуры, построение функциональных и псевдодифференциальных уравнений, построение интегральных уравнений контактных задач, выявление резонансов от внешних воздействий, приводящих к изменениям в предоползневой блочной структуре.

К числу опасных природных явлений относятся оползневые события, наносящие совершенно неожиданно серьезные материальные ущербы, зачастую сопровождающиеся человеческими жертвами. Они нередко происходят на Черноморском побережье Краснодарского края, пока без тяжелых последствий. Моделирование этих событий является сложной и до конца не решенной на сегодняшний день проблемой. Это связано с большим разнообразием оползневых явлений, скоротечностью процессов в период активизации созревшего предоползневого состояния и отсутствием точных данных о глубинных процессах в оползнеопасной зоне. Принята следующая классификация и названия оползней: а-скатывающиеся, б-сдвигающиеся, в-блочные, г-камнепадные, д-опрокидывающиеся, е-наносные, ж-лавиновые, з-грунтопотоковые, и-ползучие, к-горизонтально распространяющиеся. В настоящей работе показана принципиальная возможность использования факторизационных методов и метода блочного элемента для моделирования некоторых типов оползневых явлений. Среди оползневых явлений, можно выделить две группы первая формируется на наклонных основаниях (а, б, г, е, ж, з, и). Моделирование этих оползневых процессов и выявление предоползневого состояния зачастую достигается отслеживанием изменения коэффициента трения в зоне контакта оползневой массы и подстилающего наклонного основания. Расчет можно

проводить по простым формулам механики о равновесии тела на наклонной плоскости при наличии трения в условиях гравитации. Вторую группу составляют оползневые ситуации, формируемые на горизонтальных подстилающих основаниях (в. д. к.). Процесс предоползневого состояния для этого типа оползней не совсем четко представляется. В настоящей работе предложен один из вариантов развития предоползневой ситуации для оползней такого типа.

1. Прежде всего, следует отметить, что существует большое количество моделей грунтов и все, разумеется, охватить невозможно. Ниже рассматривается следующий тип грунта: считаем, что грунт оползневой среды представляют собой сухой материал, ведущий себя как линейно деформируемая среда, свойства которой являются изменяющимися. Именно, предполагается, что будучи подвержен значительным гармоническим перемещениям, грунт разрыхляется и не восстанавливает первоначальные свойства, приобретает новые упругие параметры. Оползневые среды рассматриваются как блочные структуры, состоящие из блочных элементов, границы между которыми начинают появляться по мере внешних гармонических воздействий, вызывающих изменения свойств среды. В частности, границы являются узловыми поверхностями перемещений, вызванными колебаниями рельефной среды на резонансных частотах. Эти узловые поверхности, наименее подверженные разрушениям, могут рассматриваться на некотором этапе как включения в разрыхленной среде. Самыми слабыми оказываются области в межузловой зоне, как правило, это узловые поверхности напряжений, где резонанс наиболее разрыхляет среду и появляются уже ослабленные неоднородности - интерфейсные вертикальные слои. Они до определенной степени удерживают разрыхляющуюся среду в форме цельного блока. Эти границы рассматриваются как вертикальные плоскости, которые в свою очередь подвержены изменениям, старениям. По мере старения плоскости становятся разнотипными, и среде, из которых состоят плоскости, оказывается все сложнее удерживать блочные элементы в контакте. В результате образуются трещины, которые затем распространяются по всей плоскости контакта и блок разрушается. Наиболее сложной является часть, связанная с контактом блоков между собой при наличии стареющей контактной границы, и ей уделено основное внимание, где исследование проводится факторизационными методами.

Возможность реализации такой модели подготовки оползней основана на фундаментальных результатах И. И. Воровича, впервые доказавшего существование ограниченного числа изолированных точек дискретного спектра в слое с рельефной границей [1, 2]. Основными моментами исследования являются математическое описание выбранной модели, построение блочных элементов описанной блочной структуры, построение функциональных и псевдодифференциальных уравнений, построение интегральных уравнений контактных задач, их решение.

В процессе применения метода блочного элемента для изучения предоползневых блочных структур возникают псевдодифференциальные уравнения, которые в свою очередь порождают интегральные уравнения смешанных или контактных задач. В частности, предоползневые блочные структуры представляются как совокупность блоков, контактирующих через посредство интерфейсного слоя, свойства которого изменяется, он стареет, оказывается разнотипным, не способным удерживать

живать блоки в контакте, в результате чего структура разрушается и происходит оползень.

2. Методом блочного элемента строятся блоки блочной структуры. Для простоты рассматривается блочный элемент, расположенный на подстилающем деформированном основании, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда [3]. Узловые поверхности такого тела — плоскости, параллельные граням. Для бесконечно протяженного в одном из направлений такого блочного элемента в условиях антиплоского воздействия удастся в явном виде найти асимптотическое представление резонансных частот дискретного спектра [4].

3. В соответствии с принятой моделью на этом этапе рассматривается задача для среды с включениями, которые инициированы узловыми линиям перемещений в уже изменившейся оползневой среде. Эта часть исследования необходима для оценки параметров частот, наиболее эффективных для разрыхления среды. Строятся соответствующие блочные элементы, которые в предположении неограниченности среды и перехода к двумерной задаче вырождаются в слои, что существенно упрощает ее решение. Выявляются диапазоны частот, приводящих к появлению характеристик, влияющих на разрыхление.

4. Зоны, наиболее подверженные разрыхлению - срединные между узловыми поверхностями перемещений, т. е. узловые поверхности напряжений, оказываются наиболее разрыхленными и ослабленными. Они описываются тонким интерфейсным слоем, удерживающим блок от разделения, несущим информацию о механических свойствах среды в этой зоне. Дальнейшее поведение интерфейсного слоя сопровождается его изменениям в отдельных зонах, в частности, уменьшением плотности в верхней части, он становится разнотипным. Возникает задача оценки частот, наиболее способствующих разрушению интерфейсного блока. Задача сводится, с учетом упрощений, в общем случае к матричной системе интегральных уравнений Винера–Хопфа четвертого порядка. При некоторых упрощениях оказывается возможным ее исследовать, используя подходы, изложенные в [5].

Исследовано влияние различных вариантов приближений, найдены частоты, наиболее интенсивно разрушающие интерфейсный слой.

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (09-08-00170), (09-08-00171), программы Юг России, проекты (09-01-96500), (09-01-96503), (09-08-96522), (09-08-96527), (09-08-00294), (11-08-96502), (11-08-96503), (11-08-96506), (11-08-96504), (11-08-96522), (11-08-96505) проекта НШ-3765.2010.1, проекта ФЦП 2009-1.5-503-004-006, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН, государственного контракта от 1 сентября 2010 г. № 16.740.11.0135 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И. И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076—1079.
- [2] Ворович И. И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817—820.
- [3] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Горшкова Е. М., Федоренко А. Г., Рядчиков И. В., Лозовой В. В. О блочных элементах в моделировании сложных структур и объектов // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2010. №1 С. 13—25.
- [4] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О блочных элементах в слоистых средах с рельефной границей ДАН. Т. 435, № 1, 2010, С. 29—34.
- [5] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Gorshkova E. M., Ivanov P. B. *The problem of study some kinds of the landslides.* The landslides which have the lower base as horizontal layer are studying. The Factorization method and the Block Elements method are applied when a study was made. Three phases of the behaviors of landslides are considered. This phases are intended to get the resonance parameters for landslides and to obtain the frequency needed for it to be destroyed. The results of study are presented.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ И УСТРОЙСТВ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ACELAN: ОПЫТ РАЗРАБОТКИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Белоконь А. В., Наседкин А. В., Скалиух А. С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваются проблемы конечно-элементного (КЭ) моделирования разнообразных пьезоустройств и пьезоэлектрических излучателей и приемников ультразвуковых волн, нагруженных на акустические среды. Описываются подходы, принятые в конечно-элементном пакете ACELAN. Особо отмечаются комплекс симметричных седловых алгоритмов, модели необратимых процессов поляризации и переполаризации поликристаллических сегнетоэлектрических материалов и модели композитных материалов, реализованные в данном пакете. Обсуждаются перспективы развития программного комплекса ACELAN.

Приблизительно 15 лет назад под руководством проф. А. В. Белоконоя на механико-математическом факультете Ростовского университета была начата работа над специализированным конечно-элементным программным комплексом, получившим впоследствии название ACELAN (ACoustoElectric ANalysis). Данная программная разработка была создана научным коллективом, включающим в различные годы следующих основных исполнителей: О. Н. Акопова, А. С. Даниленко, В. А. Еремеева, М. И. Карякина, Н. В. Курбатову, Д. К. Надолина, К. А. Надолина, А. В. Наседкина, А. В. Никитаева, А. Л. Петушкова, А. С. Скалиуха и А. Н. Соловьева.

Сейчас ACELAN является тщательно оттестированным действующим конечно-элементным пакетом, предоставляющим возможности проведения всех основных видов анализа пьезоэлектрических устройств для двумерных плоских и осесимметричных составных областей, а также для трехмерных областей обобщенной цилиндрической формы. Развитие ACELAN, оригинальные методы и алгоритмы, заложенные в ACELAN, были представлены в [1, 3, 4, 9], а опыт использования — в [2]. В настоящей работе отражены теоретические аспекты МКЭ для решения задач акустоэлектроупругости в ACELAN и представлены некоторые разработки последних лет, реализованные с использованием ACELAN.

Рассмотрим некоторый пьезопреобразователь Ω , представленный набором областей $\Omega_j = \Omega_{pk}$; $k = 1, 2, \dots, N_p$; $j = k$ со свойствами пьезоэлектрических материалов и набором областей $\Omega_j = \Omega_{em}$; $m = 1, 2, \dots, N_e$; $j = N_p + m$ со свойствами упругих материалов. Будем считать, что физико-механические процессы, происходящие в средах Ω_{pk} и Ω_{em} , можно адекватно описать в рамках теорий пьезоэлектричества (электроупругости) и упругости.

Для пьезоэлектрических сред $\Omega_j = \Omega_{pk}$ будем предполагать, что выполняются следующие полевые уравнения и определяющие соотношения

$$\rho_j \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_{dj} \rho_j \dot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j^E \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\mathbf{D} + \zeta_d \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{e}_j \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \zeta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \boldsymbol{\epsilon}_j^S \cdot \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2; \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (4)$$

где α_{dj} , β_{dj} , ζ_d — неотрицательные коэффициенты демпфирования, а остальные обозначения стандартны для электроупругости, за исключением дополнительного индекса « j », указывающего на принадлежность к среде Ω_j с номером j .

Для сред $\Omega_j = \Omega_{em}$ с чисто упругими свойствами будем учитывать только механические поля, для которых примем аналогичные (1)–(4) полевые уравнения и определяющие соотношения в пренебрежении электрическими полями и эффектами пьезоэлектрической связности

$$\rho_j \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_{dj} \rho_j \dot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}); \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2. \quad (6)$$

Наконец, пьезоэлектрическое устройство может быть нагружено на рабочие акустические среды $\Omega_j = \Omega_{al}$; $l = 1, 2, \dots, N_a$; $j = l + N_p + N_e$. Для этих областей будем использовать уравнения акустики с учетом диссипативных эффектов

$$\frac{1}{\rho_j c_j^2} \dot{p} + \nabla \cdot \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} = \nabla \psi, \quad (7)$$

$$\rho_j \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}; \quad \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + b_j \nabla \mathbf{v}, \quad (8)$$

где ρ_j — равновесное значение плотности; c_j — скорость звука; b_j — диссипативный коэффициент для среды $\Omega_j = \Omega_{al}$; p — звуковое давление; $\mathbf{v}$ — вектор скорости; ψ — потенциал скоростей; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Отметим, что принятые здесь модели (1)–(8) отличаются специфическими способами учета демпфирования. Для упругих сред имеем модель учета демпфирования по Релею. Эта модель в (1)–(4) обобщена на пьезоэлектрические среды. Подробное обсуждение модели (1)–(4) содержится в [1, 4], а обсуждение модели (7), (8) для акустической среды с диссипацией — в [10]. К (1)–(8) необходимо добавить соответствующие граничные условия, условия согласования полей по границам контакта различных сред, импедансные условия для «усечения» акустических областей, а также начальные условия для нестационарных задач.

Для решения динамических задач акустоэлектроупругости будем использовать МКЭ в классической лагранжевой формулировке. Выберем согласованную конечно-элементную сетку, задаваемую в областях Ω_{hj} , аппроксимирующих области Ω_j . На этой сетке неизвестные полевые функции $\mathbf{u}$, φ и ψ аппроксимируем в форме

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}_u^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t); \quad \varphi \approx \mathbf{N}_\varphi^T(\mathbf{x}) \cdot \Phi(t); \quad \psi \approx \mathbf{N}_\psi^T(\mathbf{x}) \cdot \Psi(t), \quad (9)$$

где $\mathbf{N}_u^T$ — матрица функций формы для поля перемещений $\mathbf{u}$; $\mathbf{N}_\varphi^T$, $\mathbf{N}_\psi^T$ — вектор-строки функций формы для полей электрического потенциала φ и потенциала скоростей в акустической среде ψ ; $\mathbf{U}(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ — глобальные векторы соответствующих узловых степеней свободы.

Аппроксимация МКЭ (9) обобщенных постановок динамических задач (1)–(8), включающих основные главные и естественные граничные условия, приводит к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (10)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 & \tilde{\mathbf{R}}_{u\psi} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{R}}_{u\psi}^T & 0 & -\mathbf{M}_{\psi\psi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 & \mathbf{R}_{u\psi} \\ \zeta_d \mathbf{K}_{u\varphi}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{u\psi}^T & 0 & -\mathbf{C}_{\psi\psi} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} & 0 \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{K}_{\psi\psi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\varphi + \zeta_d \dot{\mathbf{F}}_\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

относительно вектора неизвестных $\mathbf{a} = [\mathbf{U}, \Phi, \Psi]^T$. Здесь $\mathbf{C}_{uu} = \sum_j (\alpha_{dj} \mathbf{M}_{uij} + \beta_{dj} \mathbf{K}_{uij})$, где $\mathbf{M}_{uij}$ и $\mathbf{K}_{uij}$ — структурные КЭ матрицы масс и жесткости соответственно, а остальные входящие в (11), (12) подматрицы описаны в [4, 10]. В случае нестационарных задач к (10)–(12) следует присовокупить начальные условия $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0$; $\dot{\mathbf{a}}(0) = \dot{\mathbf{a}}_0$, получающиеся из (9) и континуальных начальных условий.

КЭ подход (9)–(12) позволяет использовать комплекс алгоритмов с симметричными седловыми матрицами для статических и динамических задач, причем в рассматриваемую модель можно добавить и учет элементов внешних электрических цепей [3]. Отметим, что такие важнейшие процедуры, как повороты узловых степеней свободы и учет главных граничных условий, необходимые для формирования систем (10)–(12), также могут быть реализованы в симметричных формах без нарушения структур матриц МКЭ [1].

С использованием описанного подхода и программного комплекса ACELAN было проведено моделирование разнообразных пьезоэлектрических устройств, пьезокомпозитов, процессов неоднородной поляризации, решены обратные задачи об обнаружении дефектов и задачи оптимизации для составных сред, включающих пьезоэлектрические, упругие и акустические тела. Опыт применения параллельной реализации ACELAN описан в [6] и др. работах.

Наряду с линейными задачами акустоэлектроупругости рассматривались и решались задачи, связанные с моделированием необратимых процессов поляризации и переполяризации поликристаллических сегнетоэлектрических элементов. Предложены методы решения нелинейных и необратимых задач пластичности и поляризации керамических материалов. Рассмотрены численные алгоритмы расчета остаточных полей поляризации и деформации. Разработанные математические модели подробно изложены в [5]. Алгоритмы и методы имплементированы в конечно-элементный комплекс ACELAN и позволяют, с одной стороны, определять векторные поля остаточной поляризации и тензорные поля остаточной деформации, и, с другой стороны, решать задачи по определению физических характеристик неоднородно поляризованных пьезокерамических элементов.

Под руководством проф. Соловьева А. Н. в последнее время с использованием пакета ACELAN были проведены разнообразные исследования неоднородных активных материалов. Так, в [7, 8] представлены новые результаты по уточненному

математическому моделированию определения эффективных свойств пьезокомпози- тов на основе пакета ACELAN с учетом неоднородной поляризации пористого композита. Новые модули пакета ACELAN, в сочетании с разработанными ранее оптимизационными модулями на основе генетических алгоритмов, позволили также решать обратные задачи по определению состава композита и количественного соотношения между его компонентами, при котором достигаются максимальные коэффициенты трансформации энергии. Были разработаны также методы и программы для компьютерного дизайна пьезокомпози- тов пластинчатой и оболочеч- ной структур и модифицированы решатели комплекса ACELAN, позволяющие вы- числять локальные конечно-элементные матрицы для неоднородных материалов. Данные разработки позволили существенно повысить точность математического моделирования пьезоэлектрических композитов и неоднородно поляризованных пьезоэлектрических элементов, в том числе функционально-градиентных актив- ных материалов.

В заключение отметим перспективные направления развития ACELAN. Неко- торые из этих направлений уже реализованы в программных бета-разработках, но речь идет о полномасштабных реализациях перечисляемых ниже модулей в новых версиях пакета ACELAN. Итак, планируется, что новые релизы пакета ACELAN будут содержать следующие программные средства:

- новые модели демпфирования для пьезоэлектрических материалов;
- модули расчета неоднородной поляризации и пьезопреобразователей с неоднородно поляризованными пьезоэлементами;
- нелинейные модели и решатели связанных физико-механических задач;
- оптимизационные модули на основе сочетания МКЭ и генетических алгоритмов;
- модули расчета пьезопреобразователей, включенных во внешние электрические цепи, в том числе с элементами управления на основе обратных связей и нейросе- тей;
- модули решения обратных задач теории упругости и электроупругости;
- модули расчета композиционных материалов регулярной и нерегулярной струк- туры;
- программы для проведения распределенных вычислений при сборке конечно-элементных матриц и решении статических и динамических задач акустоэлектро- упругости.

Авторы благодарят проф. Соловьева А. Н., представившего свои результаты по моделированию неоднородных пьезоэлектрических материалов в ACELAN для использования в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Акопов О. Н., Белоконь А. В., Надолин К. А., Наседкин А. В., Скалиух А. С., Со- ловьев А. Н. Симметричные седловые алгоритмы конечно-элементного анализа со- ставных пьезоэлектрических устройств // Мат. моделирование. 2001. Т. 13, № 2. С. 51–60.

- [2] Белоконов А. В. Конечноэлементный комплекс ACELAN: практическое применение и новые возможности // Совр. пробл. мех. спл. среды. Тр. X Межд. конф., г. Ростов-на-Дону, 5-9 декабря 2006 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО ЦВВР 2007. Т. 2. С. 46–52.
- [3] Белоконов А. В., Наседкин А. В., Даниленко А. С. Симметричные схемы конечно-элементного анализа пьезоэлектрических устройств с учетом внешних электрических цепей и акустических нагрузок // Вестник Самарского гос. ун-та. Естественная серия. 2007. № 4(54). С. 56–65.
- [4] Белоконов А. В., Наседкин А. В., Соловьев А. Н. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств // ПММ. 2002. Т. 66, № 3. С. 491–501.
- [5] Белоконов А. В., Скалиух А. С. Математическое моделирование необратимых процессов поляризации. М.: Физматлит, 2010. 328 с.
- [6] Васильченко К. Е., Наседкин А. В., Соловьев А. Н. К расчету амплитудно-частотных характеристик задач об установившихся колебаниях на основе кластерных технологий в ACELAN // Вычислит. технологии. 2005. Т. 10, № 1. С. 10–20.
- [7] Вернигора Г. Д., Еремеев В. А., Соловьев А. Н. Определение эффективных свойств композиционных материалов на основе конечно-элементного моделирования в ACELAN // Вестник РГУПС. 2011 № 1 (41). С. 9–12.
- [8] Вернигора Г. Д., Лупейко Т. Г., Скалиух А. С., Соловьев А. Н. О поляризации и определении эффективных характеристик пористой пьезокерамики // Вестник ДГТУ. 2011 Т. 11, № 4 (55). С. 462–469.
- [9] Наседкин А. В., Скалиух А. С., Соловьев А. Н. Пакет ACELAN и конечно-элементное моделирование гидроакустических пьезопреобразователей // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск. Математическое моделирование. С. 122–125.
- [10] Nasedkin A. V. Some finite element methods and algorithms for solving acousto-piezoelectric problems / Piezoceramic materials and devices. Ed. I.A. Parinov. NOVA Publishers, N.-Y., 2010. Pp. 175–216.

Belokon A. V., Nasedkin A. V., Skaliukh A. S. *Modeling of piezoelectric materials and devices in program package ACELAN: elaboration experience and outlook.* Some problems of finite element modeling for different piezoelectric devices and ultrasound emitter loaded on acoustic media are investigated. New approaches assumed in finite element package ACELAN are described. The set of symmetric saddle algorithms and nonreversible polarization and repolarization models for polycrystalline ferroelectric materials and models for piezoelectric composite materials are noticed especially. Finite element computation experiences for particular piezoelectric devices are analyzed. In the conclusion the prospects of finite element package ACELAN are considered.

МНОГОКРАТНЫЕ ОТРАЖЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ДЕФЕКТАХ: ЯВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ТЕСТИРОВАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНОМ МАКЕТЕ

Боев Н. В., Вдовин В. А., Зотов В. М.

НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

В рамках геометрической теории дифракции на примере обратного однократного и двукратного отражения продольной ультразвуковой волны проводится сравнительный анализ теоретических расчетов и результатов экспериментальных измерений амплитуды перемещений в отраженных волнах от поверхностей двух полостных дефектов, находящихся в образцах, изготовленных из упругих материалов.

Введение. В ультразвуковом неразрушающем контроле (УЗНК) упругих материалов при обнаружении скопления трехмерных дефектов наряду с анализом эхо-сигналов от изолированных дефектов важен учет информации о переотраженных высокочастотных упругих волнах от поверхностей скопления дефектов. Часто в УЗНК материалов используются датчики, работающие на продольных волнах [1]. Исследование коротковолновой дифракции волн с учетом их переотражения на поверхностях дефектов в сплошных средах для трехмерных задач является актуальной задачей. В настоящей работе для реальных упругих образцов в рамках геометрической теории дифракции выписаны явные аналитические выражения для перемещений в отраженной волне в случае ее обратного однократного и двукратного отражения и приведены данные экспериментальных измерений для металлического образца на созданном лабораторном макете.

1. Лабораторный макет и экспериментальные измерения. Лабораторный макет включает в себя стальной образец в форме прямого параллелепипеда, толщина образца 40 мм, высота 78 мм. На расстоянии $H = 50$ мм от верхней грани на которой располагается датчик продольных УЗ волн (диаметром 30 мм и частотой 2,5 МГц) просверлены два одинаковых соосных сквозных цилиндрических отверстия диаметром 3 мм ($R = 1,5$ мм), с образующими перпендикулярными стенкам и расстоянием между осями 15 мм. Схема образца дана на рис. 1. Для проведения эксперимента используется дефектоскоп-приставка «ЭВУД-ПК» (в дальнейшем дефектоскоп), общего назначения по ГОСТ 23049-94 и он предназначен для УЗ контроля продукции на наличие дефектов типа нарушения сплошности и однородности металлов. Дефектоскоп работает совместно с IBM компьютером.

2. Теоретический расчет. Ранее Боевым Н. В. и Сумбатьяном М. А. в работах [2, 3] в рамках геометрической теории дифракции на основе модификации [4] интегральных представлений физической теории дифракции Кирхгофа [5] и асимптотической оценки выписанных дифракционных интегралов методом стационарной фазы [6] получены явные выражения для перемещений в однократно и многократно отраженной продольной волны от граничных поверхностей полостных дефектов, находящихся в упругой среде. Выпишем эти формулы для однократно и двукратно отраженной волны [2, 3].

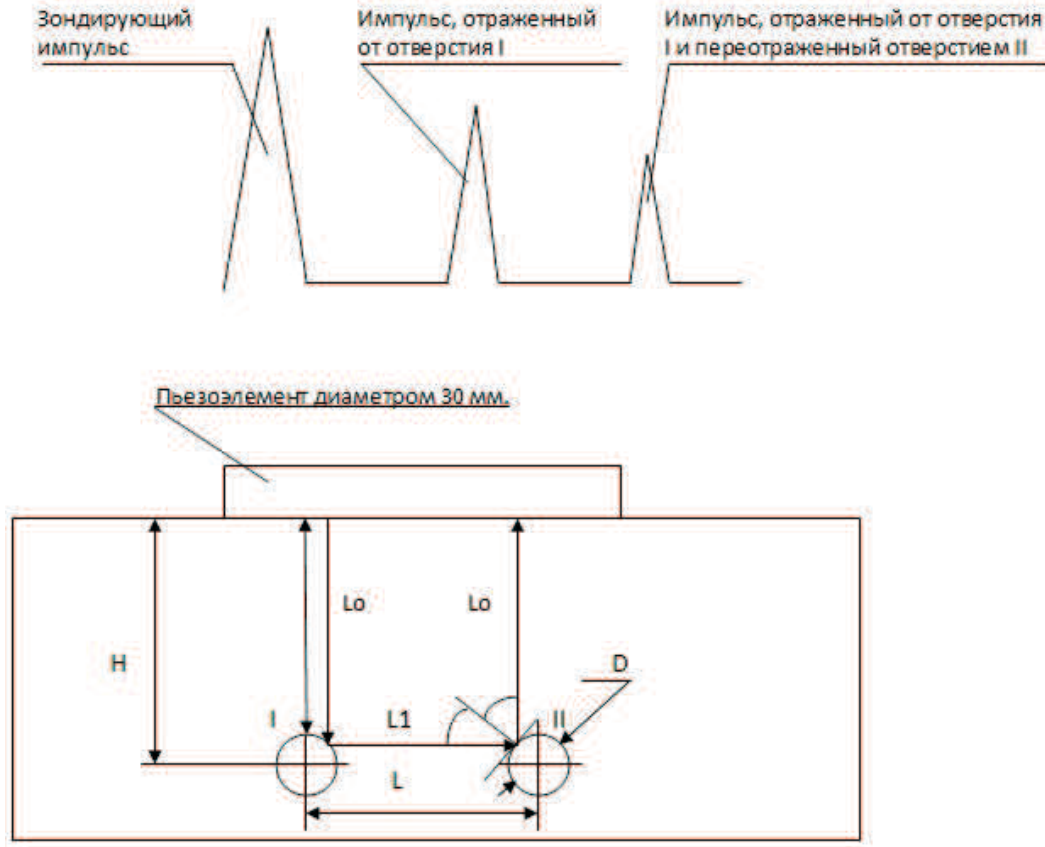


Рис. 1. Схема образца с датчиком и осциллограмма с экрана дефектоскопа.

Случай однократного отражения:

$$u_p^{(1)} = Z^{-1/2} B V_{pp}(y^*) \exp \left[i k_p (L_0 + L_1) + \frac{\pi}{4} \left(\delta_2^{(pp)} + 2 \right) \right], \quad (1)$$

$$Z = (L_0 + L_1)^2 + 2L_0L_1(L_0 + L_1) \left(2H_c \cos^2 \gamma + \tilde{k} \sin^2 \gamma \right) \cos^{-1} \gamma + 4L_0^2 L_1^2 K$$

$$B = \frac{Q_q}{4\pi\mu} \frac{k_p^2}{k_s^2}, \quad L_0 = |x_0 - y^*|, \quad L_1 = |y^* - x|.$$

Здесь x_0 — точка, в которой помещен источник продольной волны, вызванной единичной силой $Q_q e^{-i\omega t}$, x — точка приема волны, $k_p = \omega/c_p$, $k_s = \omega/c_s$; c_p , c_s — волновые числа и скорости соответственно продольной и поперечных волн, ω — частота колебаний, μ — модуль сдвига, $V_{pp}(y^*)$ — коэффициент p - p отражения (продольной волны в продольную). $K = k_1 k_2$ — гауссова кривизна, а $H_c = (k_1 + k_2)/2$ — средняя кривизна поверхности в точке зеркального отражения y^* , а $\tilde{k}$ — кривизна нормального сечения поверхности отражателя плоскостью луча $x_0 - y^* - x$. Кривизна $\tilde{k}$ определяется формулой Эйлера $\tilde{k} = k_1 \cos^2 \tilde{\varphi} + k_2 \sin^2 \tilde{\varphi}$ ($\cos \tilde{\varphi} = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}$, $\sin \tilde{\varphi} = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}$), выражающей кривизну произвольного нормального сечения через главные кривизны k_1 , k_2 и угол $\tilde{\varphi}$, образуемый касательной этого нормального сечения с первым главным направлением.

Формула (1) дает главный член асимптотики продольных перемещений при $k_p L_0 \gg 1$, $k_p L \gg 1$, $k_p R_1 \gg 1$, $k_p R_2 \gg 1$, где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности в точке зеркального отражения y^* .

Угол γ — это угол между направлением $\mathbf{q}^0 = \{-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma\}$ падения и отражения продольной волны и нормалью к поверхности в точке y^* в локальной декартовой системе координат.

Случай двукратного отражения (рис. 2):

$$u_p^{(2)} = \frac{Q_q}{4\pi\mu} \frac{k_p^2}{k_s^2} \left(\prod_{n=1}^2 V_{pp}(y_n^*) \cos \gamma_n \right) \frac{\exp \left[i \left(k_p \sum_{n=0}^2 L_n + \frac{\pi}{4} (\delta_4^{(p)} + 4) \right) \right]}{\left(\prod_{n=0}^2 L_n \right) \sqrt{|\det(D_4^{(p)})|}} \quad (2)$$

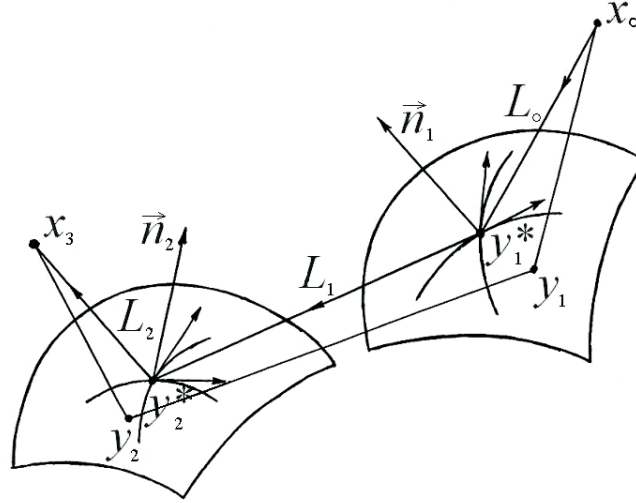


Рис. 2. Двукратное отражение продольной волны вдоль луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$ от граничных поверхностей двух полостей, находящихся в упругой среде.

Здесь $\delta_4^{(p)} = \text{sign } D_4^{(p)}$ — разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы Гессе $D_4^{(p)} = (d_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ является симметричной $d_{ij} = d_{ji}$ со следующими ненулевыми элементами d_{ij} , $i \leq j$:

диагональные элементы:

$$d_{2n-1, 2n-1} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1})(1 - (\mathbf{q}_n^0, \mathbf{i}_n)^2) + 2k_1^{(n)}(\mathbf{q}_n^0, \mathbf{k}_n)$$

$$d_{2n, 2n} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1})(1 - (\mathbf{q}_n^0, \mathbf{j}_n)^2) + 2k_2^{(n)}(\mathbf{q}_n^0, \mathbf{k}_n)$$

$$n = 1, 2$$

внедиагональные элементы:

$$d_{2n-1, 2n} = -(L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1})(\mathbf{q}_n^0, \mathbf{i}_n)(\mathbf{q}_n^0, \mathbf{j}_n), \quad n = 1, 2$$

$$d_{1, 3} = L_1^{-1} ((\mathbf{q}_1^0, \mathbf{i}_1)(\mathbf{q}_2^0, \mathbf{i}_2) - (\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1))$$

$$\begin{aligned}
d_{1,4} &= L_1^{-1} ((\mathbf{q}_1^0, \mathbf{i}_1)(\mathbf{q}_2^0, \mathbf{j}_2) - (\mathbf{j}_2, \mathbf{i}_1)) \\
d_{2,3} &= L_1^{-1} ((\mathbf{q}_1^0, \mathbf{j}_1)(\mathbf{q}_2^0, \mathbf{i}_2) - (\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)) \\
d_{2,4} &= L_1^{-1} ((\mathbf{q}_1^0, \mathbf{j}_1)(\mathbf{q}_2^0, \mathbf{j}_2) - (\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_1))
\end{aligned}$$

Здесь $k_1^{(n)}$, $k_2^{(n)}$ ($n = 1, 2$) — главные кривизны поверхностей, а $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$ — орты локальной декартовой системы координат, определяемой касательными к главным линиям кривизны и нормальными к поверхностям дефектов в точках зеркального отражения y_n^* , $n = 1, 2$ (рис. 2). Координаты ортов заданы в некоторой глобальной декартовой системе координат, $\mathbf{q}_n^0$ — направление падения волны в точке y_n^* .

Получим из общих формул (1) и (2) явные выражения для амплитуды перемещений принимаемой датчиком (рис. 1) продольной волны:

1) Обратное однократное отражение (рис. 1):

$$\begin{aligned}
\gamma &= 0 ; \quad V_{pp} = -1 ; \quad L_0 = L_1 = H - R ; \quad \rho = R ; \\
k_1 &= 1/R , \quad k_2 = 0 , \quad H_c = 0,5R , \quad K = k_1 k_2 = 0 , \\
|u_p^{(1)}| &= B / \left[2(H - R) \sqrt{1 + (H - R)/R} \right] .
\end{aligned} \tag{3}$$

2) Двукратное отражение волны от поверхностей двух цилиндров в плоскости, перпендикулярной их осям (рис. 1):

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \gamma_2 = \pi/4 , \quad L_0 = L_2 = H - R/\sqrt{2} , \quad L_1 = L - \sqrt{2}R , \\
k_1^{(1)} &= k_1^{(2)} = 1/R , \quad k_2^{(1)} = k_2^{(2)} = 0 , \\
u_p^{(2)} &= B \cdot 0,5V_{pp}^2(y_1^*) / \left[L_0^2 L_1 \sqrt{|\det D_4^{(p)}|} \right] .
\end{aligned} \tag{4}$$

3. Сравнительный анализ.

Измерения проведены на стальном образце. Скорость продольных и поперечных волн в стали соответственно равны $c_p = 5850$ м/с, $c_s = 3260$ м/с. При частоте излучаемой продольной волной 2,5 МГц, ее длина составляет 2,34 мм.

В результате эксперимента получены следующие значения амплитуды перемещений в отраженных волнах: амплитуда перемещений $u_{pz}^{(1)}$ в обратной однократно отраженной волне от дефекта I (рис. 1) составляет 60,5 дБ; амплитуда перемещений $u_{pz}^{(2)}$ в двукратно отраженной волне последовательно от дефектов I и II составляет 29,5 дБ. Разность между этими значениями составляет 31 дБ. При этих данных отношение $u_{pz}^{(1)}/u_{pz}^{(2)} = 35$.

Теоретические расчеты амплитуд $u_p^{(1)}$ и $u_p^{(2)}$ основывались на аналитических выражениях (3) и (4). При этом для отношения $u_p^{(1)}/u_p^{(2)}$ получено выражение

$$\frac{u_p^{(1)}}{u_p^{(2)}} = \frac{L_0^2 (R(a^2 - 1)[(a + b)^2 - 1])^{1/2}}{2(H - R)\sqrt{H}L_1V_{pp}^2(y_1^*)} = 51,20 ,$$

$$L_0 = 48,94 \text{ мм}, \quad L_1 = 12,88 \text{ мм}, \quad H = 50 \text{ мм}, \quad V_{pp} = 0,36 ,$$

$$a = 1 + L_1/L_0 , \quad b = 2\sqrt{2}L_1/R .$$

Расхождение для отношений амплитуд перемещений в обратно отраженной и двукратно отраженной волне экспериментальных измерений и теоретических расчетов составляет 3 Дб.

С учетом того, что стальной образец изготовлен с погрешностями и излучаемая датчиком волна не является плоской, а отношение длины волны (2,34 мм) к диаметру полости (3 мм) не является малым, что не в полной мере соответствует лучевой теории, полученный результат является вполне удовлетворительным.

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ 10-01-00557а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ермолов И. Н. Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
- [2] Боев Н. В., Сумбатян М. А. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью // Доклады РАН. 2003. Т. 392. № 5. С. 614–617.
- [3] Боев Н. В. Рассеяние высокочастотных волн на произвольной невыпуклой граничной поверхности упругого тела с учетом переотражений // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 65–80.
- [4] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
- [5] Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
- [6] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Boyev N. V., Vdovin V. A., Zotov V. M. *Multiple reflections of ultrasonic waves by defects: explicit analytical results and testing on a laboratory prototype model.* In frames of geometrical diffraction theory, on example of back single and double reflection of the longitudinal wave, we compare the theoretical calculations with the results of experimental measurements for amplitude of the signal reflected from a pair of volumetric defects, in the samples made of metal elastic materials.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСУЩЕСТВОВАНИЯ И КОНКУРЕНЦИИ БЛИЗКОРОДСТВЕННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ С УЧЕТОМ МИГРАЦИИ

Будянский А. В., Цибулин В. Г.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается модель эволюции конкурирующих за единый ресурс близкородственных популяций, записываемая в виде системы уравнений параболического типа. Анализируется случай переменной диффузии с миграционными потоками, зависящими от неравномерности распределения популяций и обобщенного ресурса. На основе метода прямых исследовано влияние миграции на формирование распределений популяций, изучены сценарии локального вытеснения и сосуществования видов. Найдены условия на параметры системы, при которых возможно сосуществование видов.

1. Введение. Изменение и сокращение пространств обитания биологических видов в современном мире вызывает миграцию животных и конкурентную борьбу видов. Задача сохранения природного многообразия требует развития методов моделирования пространственно-временной эволюции биологических популяций [1, 2]. При этом нужно учитывать разнообразие популяций, даже в том случае, когда их численность ограничивается единым ресурсом и когда близкие виды присутствуют в одной экологической нише [3]. К настоящему времени математические модели для описания взаимодействия близкородственных видов мало разработаны. В [4] дано обобщение принципа Гаузе [5] и показано, что при нелинейности миграционных потоков конкуренция биологических видов может не приводить к вытеснению менее приспособленной популяции. При формировании «ниш» отдельных биологических видов могут образовываться зоны смешения (сосуществования) популяций, размер этих зон определяется интенсивностью миграции, а само формирование может приводить к медленной динамике.

2. Модель динамики пространственного распределения популяций. Для двумерного ареала и двух взаимодействующих популяций формулируется модель, учитывающая миграционные потоки при неоднородности жизненных условий и неравномерности распределения самих популяций:

$$\dot{u} = -\nabla \cdot q_1 + f_1, \quad q_1 = -\varepsilon_1(u, v)\nabla u + \alpha_1 u \nabla p + \beta_1 u \nabla v, \quad (1)$$

$$\dot{v} = -\nabla \cdot q_2 + f_2, \quad q_2 = -\varepsilon_2(u, v)\nabla v + \alpha_2 v \nabla p + \beta_2 v \nabla u. \quad (2)$$

Здесь $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — плотности близкородственных популяций, q_1, q_2 — миграционные потоки, $\nabla = (\partial x, \partial y)^T$. Естественный прирост плотности популяций определяется «логистическим» законом: $f_1 = \mu_1 u f_0$, $f_2 = \mu_2 v f_0$, $f_0 = 1 - (u + v)/p$. Неоднородность жизненных условий по ареалу моделируется введением положительной функции обобщенного ресурса $p(x, y)$. Различия в естественном приросте определяются неотрицательными параметрами роста μ_1 и μ_2 . Влияние неравномерности предельных концентраций по ареалу учитывается членами, содержащими градиент функции $p(x, y)$ [1, 6]. При моделировании неродственных видов часто для каждой популяции назначается своя функция ресурса [2, 7].

Диффузионные коэффициенты $\varepsilon_1(u, v)$ и $\varepsilon_2(u, v)$ являются функциями, зависящими от плотностей популяций: $\varepsilon_i(u, v) = k_i + \gamma_i g(u, v)$, $i = 1, 2$. Здесь $k_1, k_2, \gamma_1, \gamma_2$ даются матрицами второго порядка с неотрицательными элементами, случай линейной диффузии получается при нулевых γ_1, γ_2 .

В выражениях для потоков q_1 и q_2 (1)–(2) направленная миграция учитывается вторыми и третьими слагаемыми. Миграционные параметры $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ являются матрицами второго порядка. Перенос плотности популяции $u(x, y, t)$, вызванный неравномерностью распределения плотности популяции $v(x, y, t)$, описывается слагаемым $\beta_1 u \nabla v$. Аналогично для плотности $v(x, y, t)$ миграция, вызванная неравномерностью распределения $u(x, y, t)$, описывается слагаемым $\beta_2 v \nabla u$.

Для ареала прямоугольной формы $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, $b/a \ll 1$ на протяженных сторонах ставятся условия Неймана, а на двух других — условия Дирихле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial v(x, 0, t)}{\partial y} &= \frac{\partial v(x, b, t)}{\partial y} = 0, \\ u(0, y, t) &= u_*^0(y, t), & u(a, y, t) &= u_*^a(y, t), \\ v(0, y, t) &= v_*^0(y, t), & v(a, y, t) &= v_*^a(y, t). \end{aligned}$$

Здесь $u_*^0(y, t), v_*^0(y, t), u_*^a(y, t), v_*^a(y, t)$ — известные функции.

3. Исследование модели с одной пространственной переменной. Если пренебречь изменениями плотностей популяций по координате y , то получается система с одной пространственной переменной $x \in \Omega = [0, a]$. Начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= [(k_1 + \gamma_1 g)u' - \alpha_1 u p' - \beta_1 u v']' + \mu_1 u \left(1 - \frac{u+v}{p}\right), \\ \dot{v} &= [(k_2 + \gamma_2 g)v' - \alpha_2 v p' - \beta_2 v u']' + \mu_2 v \left(1 - \frac{u+v}{p}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(a, t) = v(0, t) = v(a, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x). \end{aligned}$$

В случае $k_1 \mu_2 = k_2 \mu_1$, $\gamma_1 \mu_2 = \gamma_2 \mu_1$ и $\alpha_i = \beta_i = 0$, $i = 1, 2$ данная система относится к классу косимметричных динамических систем [8]. Это означает возможность возникновения непрерывных семейств стационарных решений с переменным спектром устойчивости. Далее представлены результаты моделирования пространственно-временной эволюции на одномерном ареале популяций, размещающихся в начальный момент времени в локализованных зонах. Вычислительный эксперимент проводился методом прямых; по пространственным координатам проводилась аппроксимация на основе формул второго порядка точности, по времени интегрирование велось методом Рунге–Кутты. Расчеты проводились при следующих значениях параметров.

$$a = 2, \quad k_1 = 0,03, \quad k_2 = 0,04, \quad \gamma_1 = 0,01, \quad \gamma_2 = 4/3\gamma_1, \quad \mu_1 = 3, \quad \mu_2 = 4.$$

В качестве $g(u, v)$ рассматривалась функция $g = uv$. Начальные распределения $u_0(x), v_0(x)$ были фиксированы (см. рис. 1а), а функция ресурса $p(x)$ соответствовала случаю, когда рассматриваемый ареал имеет две благоприятные зоны.

№	α_1	α_2	β_1	β_2	$\bar{U}$	$\bar{V}$	σ		
1	0	0	0	0	0.38	0.18	$-2.2 \cdot 10^{-6}$	-0.07	-0.92
1'	0	0	0	0	0.15	0.37	$-1.6 \cdot 10^{-7}$	-0.08	-0.72
2	0.15	0.01	0	0	0.30	0.23	-0.12	-0.18	-0.81
3	0	0	-0.06	-0.06	0.36	0.16	-0.04	-0.18	-1.04

Таблица 1. Значения параметров миграции, финальные средние значения плотностей $\bar{U}$ и $\bar{V}$, элементы спектра устойчивости σ .

Проведенные расчеты показали, что при различных коэффициентах миграции происходит выход на устойчивые стационарные распределения. В табл. 1 приведены результаты некоторых расчетов (финальные значения средних плотностей популяций, элементы спектра, наиболее близкие к мнимой оси).

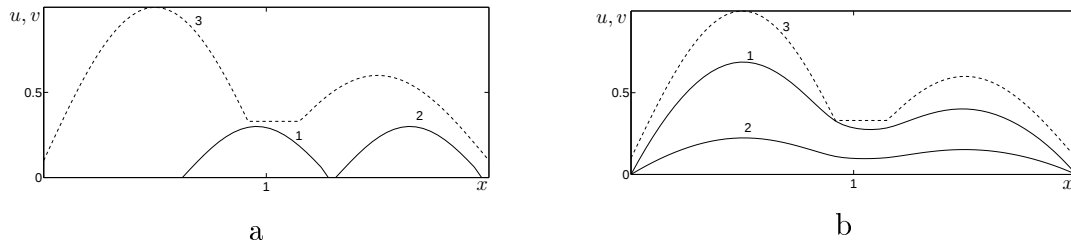


Рис. 1. Начальные (а) и финальные распределения (б) плотностей популяций u (кривая 1) и v (2) при непересекающихся начальных распределениях (а); $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$; функция ресурса (пунктир, 3).

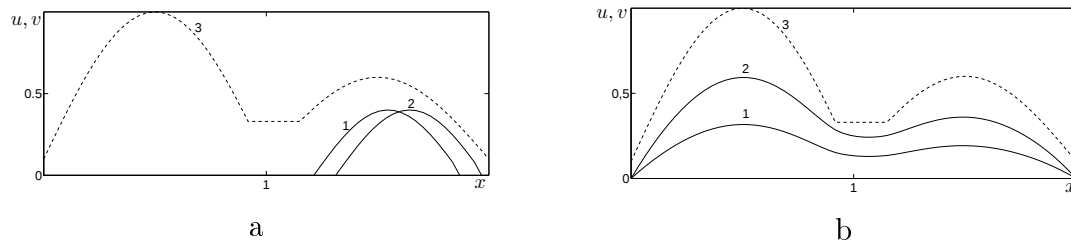


Рис. 2. Начальные (а) и финальные распределения (б) плотностей популяций u (кривая 1) и v (2) при близких начальных распределениях (а); $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$; функция ресурса (пунктир, 3).

На рис. 1–3 показаны стационарные распределения плотностей для комбинаций параметров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ (см. табл. 1). Рис. 1–2 иллюстрируют эффект влияния начальных условий на финальные распределения популяций. Приведены результаты расчетов для профилей плотности, одинаковых по форме и различающихся местоположением на отрезке. Например, для данных, соответствующих строке 1 табл. 1, формируется распределение с преобладанием популяции $u(x, t)$ (см. рис. 1b), что обусловлено удалением популяции $v_0(x)$ от наиболее благоприятной зоны.

На рис. 2 представлены результаты расчетов из близких начальных распределений $u_0(x)$ и $v_0(x)$, финальные профили u и v отличаются от приведенных

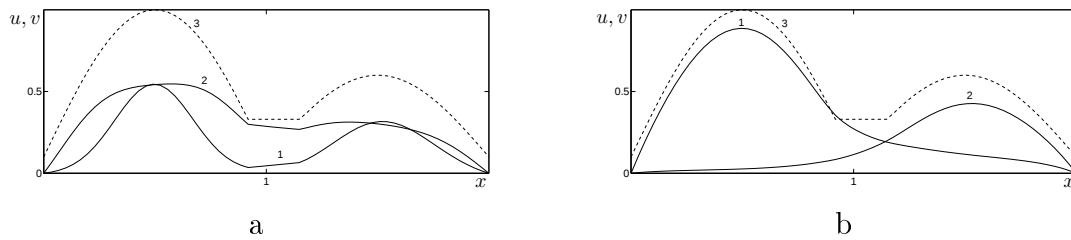


Рис. 3. Финальные распределения плотностей популяций u (кривая 1), v (2) и функции ресурса $p(x)$ (3); а) $\alpha_1 = 0.15$, $\alpha_2 = 0.01$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$; б) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = -0.06$, $\beta_2 = -0.06$.

на рис. 1б. При этом средние плотности популяций $\bar{U}$ и $\bar{V}$ различны, см. строки 1 и 1' табл. 1. Поскольку для этих экспериментов параметры задачи удовлетворяют условию косимметрии, то получаются стационарные распределения, в спектре которых имеются практически нулевые собственные значения ($\sigma \approx 10^{-6}$). Это означает, что данные решения входят в нетривиальное семейство стационарных решений. Стартуя из иных начальных условий, получаются другие финальные плотности популяций.

На миграцию могут влиять два фактора: неравномерность функции ресурса и неоднородность распределений соседних популяций. На рис. 3а представлены результаты расчета для случая, когда учитывается только неоднородность жизненных условий (данные из строки 2 табл. 1). Сравнение рис. 1б и 3а показывает, что при $\alpha_1 > \alpha_2$, неравномерность $p(x)$ сказывается сильнее на популяции $u(x, t)$: ее финальное распределение характеризуется сжатием максимумов, отвечающих благоприятным (для роста популяций) зонам. В результате этого популяция $v(x, t)$ получает возможность роста вне максимумов популяции $u(x, t)$.

В эксперименте по анализу миграций, вызванных неравномерностью распределения соседней популяции (строка 3 табл. 1 и рис. 3б), получается, что каждая популяция в основном заполняет ту благоприятную зону, к которой находится ближе в начальный момент времени. Такое размежевание происходит из-за отрицательности коэффициентов β_1 и β_2 .

3. Заключение. На основе метода прямых проведено численное исследование возможных сценариев сосуществования и вытеснения популяций. Найдены области изменения параметров, для которых наблюдается неединственность решений и начальные условия (распределения популяций по ареалу) существенно влияют на распространение биологического вида. Изучено влияние миграционных эффектов на формирование распределений плотностей популяций. Показано, что миграция, вызванная неравномерностью жизненных условий, может способствовать выживанию популяции при малом значении параметра роста, а также приводить к эффекту перенаселенности. Обнаружены комбинации миграционных коэффициентов, при которых на отдельных участках ареала происходит преимущественный рост отдельной популяции, что, в частности, может вызывать размежевание видов – формирование экологических «ниш». Таким образом, установлена применимость предложенной модели эволюции конкурирующих популяций для прогнозирования поведения реальных биосистем [3].

Исследование проводилось при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» («Математическая гидродинамика жидкостей со сложными физико-химическими свойствами», № 2.1.1/6095) и гранта РФФИ №11-01-00708.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Murray J. D. Mathematical Biology II. Spatial models and Biomedical Applications. Springer-Verlag, 2003.
- [2] Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: МГУ, 1993. 300 с.
- [3] Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. М.: Мир, 1989.
- [4] Белотелов Н. В., Лобанов А. И. Популяционные модели с нелинейной диффузией // Математическое моделирование. 1997. Т. IX. № 12. С. 43–56.
- [5] Гаузе Г. Ф. Борьба за существование. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исслед. 2002. 160 с.
- [6] McPeck M. A., Holt R. D. The evolution of dispersal in spatially and temporally varying environments // Am. Nat. 1992. Vol. 140. Pp. 1010–1027.
- [7] Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
- [8] Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 142–148.

Budyanski A. V., Tsybulin V. G. *Modeling competition and coexistence closely related species based migration.* We consider a model of populations that are closely related and share a common areal. System of nonlinear parabolic equations is formulated that incorporates nonlinear diffusion and migration flows induced by nonuniform densities of population and carrying capacity. We employ the method of lines and study the impact of migration on scenarios of local competition and coexistence of species. Conditions on system parameters are determined when a nontrivial family of steady states is formed.

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗОЛОБЕТОНОВ

**Буравчук Н. И., Гурьянова О. В.,
Окороков Е. П., Павлова Л. Н.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Основным материалом для возведения разнообразных конструкций по-прежнему остается тяжелый бетон. Одним из наиболее эффективных способов снижения себестоимости бетона и экономии минерального сырья для его изготовления является использование в его составе золошлаковых отходов. Золо, содержащие в небольшом количестве свободный оксид кальция, самостоятельно не твердеют. Но в смеси с цементом или известью при твердении способны проявлять пуццолановую активность, т. е. способность связывать гидроксид кальция с образованием нерастворимых соединений. В тонкодисперсных золах преобладают в основном частицы шарообразной формы, структура поверхности таких частиц остеклована и в составе бетонной смеси создается пластифицирующий эффект. В связи с этим в золобетонах чаще всего зола используется в бетоне как активная добавка и микронаполнитель и вводится в момент приготовления бетона. В этом случае зола используется как добавка полифункционального действия заменяет часть цемента и песка, является пластификатором. Эти свойства золы обеспечивают не только нормативные показатели качества бетона, но по некоторым характеристикам превосходят заданные значения, причем при меньшем расходе вяжущего. На свойства бетона оказывает существенное влияние гидравлическая скрытая активность золы и ее дисперсность. Анализ опыта применения золошлаковых отходов в технологии бетона [1–3] свидетельствует о том, что перспективным сырьем с точки зрения основных технологических процессов и свойств получаемых бетонов следует признать золу уноса.

В исследованиях по использованию золошлаковых отходов в технологии бетона был выполнен большой объем лабораторных работ и испытаний в производственных условиях на действующих заводах железобетонных конструкций и изделий Ростовской области. Испытывались составы бетонов класса от В7,5 до В30 различной подвижности и с различным расходом цемента в зависимости от предъявляемых к бетонам требований по морозостойкости, водонепроницаемости, другим свойствам и условий эксплуатации.

Изготовление опытных образцов-кубов в лабораторных условиях производилось на виброплощадке, хранили образцы в стандартных для твердения бетона условиях. В производственных условиях изготовление контрольных кубов производилось параллельно с изготовлением изделий из тех же бетонных смесей и при тех же условиях формования и термообработки. При пропаривании изделий и образцов температура изотермического прогрева, как правило, не превышала 80°C, продолжительность — 9–10 часов, общая длительность, включая время подъема температуры и охлаждения, 14–15 часов, предварительная выдержка образцов 4–5 часов. Контроль прочности и других показателей физико-механических

свойств бетона проводился на изделиях методами неразрушающего контроля и на образцах-кубах по методикам, приведенным в нормативных документах.

Основными проблемами при использовании золы как добавки к вяжущим веществам, являются дисперсность и количество, которое допускается вводить в цементы без снижения их прочности, а также способ введения добавки золы в бетон. Одним из показателей, определяющих эффективность применения золы, является прочность бетона. При установлении оптимального количества золы следует учитывать такие параметры, как количество сэкономленного цемента и отношение количества золы к сэкономленному цементу ($З/Ц$). Экспериментально было доказано, что количество вводимой золы может превышать количество заменяемого цемента в 2-5 раз; и при этом обеспечить высокие прочностные свойства и другие эксплуатационные характеристики золобетона. Оптимальным считается состав бетона, который обеспечивает получение по свойствам требуемых показателей при максимальной экономии цемента. Анализ зависимости прочности бетона от $З/Ц$ позволил выявить в бетонах различной прочности пределы значений $З/Ц$, в которых достигается экономия цемента (таблица 1).

Класс бетона	Расход золы, кг/м ³	Отношение $З/Ц$	Отношение $З/(З+Ц)$	Экономия цемента, %
B7,5	100 – 120	3,2 – 4,5	0,45 – 0,55	10 – 40
B10	150 – 180	2,8 – 4,2	0,45 – 0,55	10 – 40
B15	180 – 200	2,0 – 3,4	0,35 – 0,45	10 – 30
B20	180 – 220	1,5 – 2,4	0,35 – 0,40	10 – 30
B22,5	180 – 240	1,8 – 2,8	0,35 – 0,40	10 – 30
B30	4180 – 250	1,5 – 2,0	0,32 – 0,35	10 – 30

Таблица 1. Пределы отношений количества золы к сэкономленному цементу ($З/Ц$) для бетонов различной прочности.

Существенное влияние на прочностные характеристики золобетона оказывает дисперсность золы. В наибольшей степени это влияние сказывается на прочности на растяжение при изгибе. Из данных следует, что удельная дисперсность золы должна быть выше 250 м²/кг. Добавка золы с удельной поверхностью 400 и 600 м²/кг приводит к увеличению прочности и превышению этого показателя у контрольных образцов. Значительный прирост прочности отмечается в возрасте 28 суток твердения и составляет от 4 до 20%, в возрасте 180 суток — от 6 до 12%. Прирост прочности при изгибе у бетонов, содержащих золу с удельной поверхностью 600 м²/кг, достигает 25%. Из анализа полученных данных следует, что обеспечит высокие показатели свойств бетонов позволяет применение золы с удельной поверхностью 500–600 м²/кг. Этот вывод согласуется с утверждением авторов [4], о том, что оптимальная дисперсность минеральной добавки к цементу должна на 120–200 м²/кг превышать дисперсность цемента.

При использовании минеральных тонкодисперсных добавок реализуется плотная упаковка исходной матрицы смешанного вяжущего за счет распределения тонкодисперсных частиц в межзерновых пустотах более грубодисперсных. Для бетонов с добавками золы характерно увеличение объема цементно-золяного теста. Это отражается на реологических свойствах бетонных смесей: повышается пла-

стичность, связность, водоудерживающая способность, улучшается однородность и удобоукладываемость бетонной смеси, отсутствуют седиментационные явления.

На рисунке 1 показано влияние цементно-золяного отношения на прочность при сжатии золобетона. Содержание золы выдерживалось постоянным и составляло 150, 180, 200, 240 кг в 1 м³. Данные приведены для гидротехнического бетона с осадкой конуса 10–12 см. При определении оптимального количества золы в составе бетонных смесей надо учитывать коэффициент использования цемента, характеризующий величину прочности, которую обеспечивает единица массы цемента ($K_{\text{эф.ц.}} = R_{\text{сж}}/Ц$).

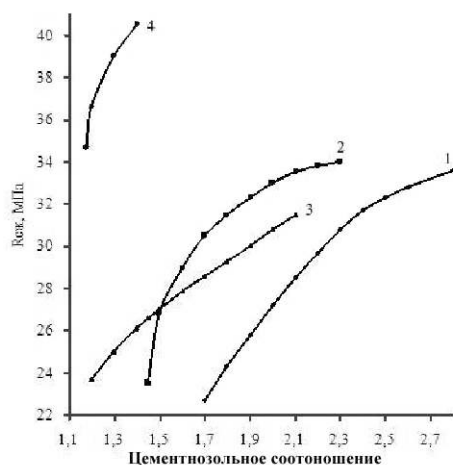


Рис. 1. Влияние цементно-золяного соотношения на прочность при сжатии золобетона:

- 1 — расход золы 150 кг/м³,
- 2 — расход золы 180 кг/м³,
- 3 — расход золы 200 кг/м³,
- 4 — расход золы 240 кг/м³.

Назначать количество золы следует, исходя из обеспечения заданных свойств бетона. С учетом этих факторов следует, что для обычных бетонов оптимальное содержание золы составляет 180–200 кг/м³. Для бетонов с повышенными требованиями по морозостойкости, водонепроницаемости и в связи с этим повышенным расходом цемента можно увеличить расход золы и довести его до 240–250 кг/м³. Дальнейшее увеличение содержания золы свыше 250 кг/м³ приводит к росту водопотребности золоцементного теста, изменению гранулометрического состава бетонной смеси, снижению прочности в ранние сроки твердения. Оптимальное количество вводимой золы можно определить экспериментально-расчетным способом, взяв за основу коэффициент эффективности использования цемента. За базовый

принимается обычный состав бетона заданной марки. При замене части цемента золой количество вводимой золы рассчитывать, используя полученные данные соотношения расхода золы на одну весовую часть цемента или соотношение золы к сумме смеси цемент плюс зола. Условия приготовления и режим твердения контрольных и исследуемых образцов идентичны. После испытаний образцов вычисляется коэффициент использования цемента и строится зависимость коэффициента использования цемента для бетонов одинаковой подвижности от содержания золы. За оптимальное значение принимается такое содержание золы, которому соответствует наибольшее значение коэффициента использования цемента. Корректировка составов производится на пробных замесах. Бетоны с добавкой золы набирают прочность как в нормальных условиях твердения, так и при термообработке.

Установлено, что интенсивность нарастания прочности бетона и эффективность использования тонкомолотых добавок, проявляющих свойства пуццоланов активность, повышается с увеличением температуры изотермического прогрева. Наибольший эффект от введения добавок при термообработке, по-видимому, свя-

Бетон (марка/класс), изделие	Расход золо- цементного вяжущего, кг/м³		Прочность на сжатие, МПа				Объемная масса, кг/м³	Морозо- стойкость, марка	Водоне- проницае- мость, марка	Экономия цемента, кг/%
			после пропарива- ния	твердение в естественных условиях в возрасте, сут.						
				28	56	180				
200/В15 ОК 3-5 см Плиты ПКУ	цемент	зола	30,8	29,5	32,9	33,6	2256	F100	W4	0/0
	344	0								
	276	170	33,4	30,2	34,3	41,7	2215	F150	W6	68/20
	242	200	32,7	31,0	35,6	40,5	2230	F150	W8	102/30
300/В22,5 ОК 4-6 см Плиты НПК	412	0	34,8	31,2	38,3	40,4	2240	F100	W4	0/0
	330	240	41,8	32,6	47,6	52,5	2185	F150	W6	82/20
	290	200	42,7	31,8	49,4	52,9	2196	F150	W8	122/30
	456	0	32,2	30,9	36,1	37,5	2275	F150	W6	0/0
300/В22,5 ОК 3-5 см Плиты ПКН	364	178	35,5	34,5	40,6	45,8	2235	F150	W8	92/20
	318	200	38,8	33,7	44,3	49,0	2220	F150	W8	138/30
	399	0	31,8	28,7	36,0	36,3	2260	F75	W4	0/0
	319	156	35,5	34,9	40,8	45,1	2230	F100	W6	80/20
Лотки 300/В22,5 ОЛ 4-6 см Блоки берегозащитные	279	176	36,5	35,2	41,9	46,7	2252	F150	W6	120/30
	400	0	30,7	28,4	34,6	35,5	2245	F100	W6	0/0
	320	157	32,3	31,7	36,8	41,0	2188	F150	W10	80/20
	280	176	35,6	33,5	40,9	45,1	2195	F150	W10	120/30

Таблица 2. Влияние условий твердения на относительную прочность золобетона

зано с повышением степени гидратации золо-цементного вяжущего и дополнительного связывания извести с возникновением новообразований. При термообработке заметно интенсифицируется гидратация минеральных компонентов смешанного связующего. Низкоосновные гидросиликаты появляются в различные сроки: при пропаривании — в первые три часа, в условиях нормального твердения — на седьмые сутки. Развитая удельная поверхность системы «золо-цементное вяжущее» создает благоприятные условия для протекания физико-химических процессов твердения и структурообразования без возникновения дефектов структуры. Преимуществом бетонов с золой является пониженное тепловыделение при твердении. Это обстоятельство при термообработке улучшает температурный режим внутри изделий, что способствует снижению деструкции бетона, что имеет место при термообработке обычного бетона.

В таблице 2 приведены результаты испытаний золобетонов в производственных условиях при выпуске опытных партий изделий. В изделиях из золобетона уменьшается число дефектов на поверхности, улучшается внешний вид и качество изделий. Продукция из золобетона имеет более темный с голубоватым оттенком цвет, включения стеклофазы блестят на солнце, при простукивании изделия «звонят».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буравчук Н. И. Ресурсосбережение в технологии строительных материалов. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2009. 224 с.
- [2] Буравчук Н. И., Будницкий В. М. и др. Ресурсосбережение в технологии вяжущих и бетонов. Ростов-н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 1999. 176 с.
- [3] Буравчук Н. И., Рутъков К. И. Переработка и использование отходов добычи и сжигания углей. Ростов-н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 1997. 224 с.
- [4] Величко Е. Г., Белякова Ж. С. Физико-химические и методологические основы получения многокомпонентных систем оптимизированного состава // Строительные материалы. 1996. № 3. С. 27–30.

Buravchuk N. I., Gurjanova O. V., Okorokov E. P., Pavlova L. N. *Physical and mechanical properties zolobetonov.* Shows the effect of additives of fly ash on physico-mechanical properties of concrete. The results of studies and pilot tests.

РАСЧЕТ РАВНОВЕСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТ СПЛАВА $SiGe$ В ОСТРОВКАХ СТРАНСКОГО–КРАСТАНОВА

Бычков А. А., Карпинский Д. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследовано распределение концентрации Ge в пирамидальных нанометровых островках на свободной поверхности полупроводниковой пленки состоящей из сплава $SiGe$. Построены трехмерные модели островков. Расчет упругих деформаций был выполнен с использованием метода конечных элементов. Для расчета распределения Ge использованы аппроксимирующие формулы и итерационный алгоритм. Расчет показал, что атомы Ge концентрируются в вершинах пирамидальных островков. Перераспределение Ge обеспечивает существенную релаксацию упругой энергии в сплаве $SiGe$.

Известно [1], что на границе раздела напыленной полупроводниковой $Ge_\eta Si_{1-\eta}$ пленки на Si подложке возникает деформация несовместности $\varepsilon_0 = (a_f - a_s)/a_s$, за счет различия постоянных решетки и подложки: для Si постоянная решетки $a_s = 0,3571$ нм, а для пленки $Ge_\eta Si_{1-\eta}$ постоянная решетки $a_f = 0,3571 + 0,01992\eta + 0,002733\eta^2$, $0 \leq \eta \leq 1$. Согласно [2], релаксация напряжения в пленке при малой деформации несовместности $\varepsilon_0 < 1,5\%$ ($\eta < 0,4$) происходит следующими основными способами: 1) с помощью образования волнистой поверхности (выпуклости, разделенные узкими канавками) на первоначально плоской пленке в процессе ее отжига (неустойчивость Азаро–Тиллера–Гринфельда); 2) путем зарождения дислокаций несовместности (ДН) на границе раздела пленки и подложки. В первом случае неустойчивость первоначально плоской пленки связана с тем, что волнистая поверхность напряженной пленки имеет меньшую суммарную энергию (энергия деформирования + поверхностная энергия) вследствие упругой релаксации напряжения в вершинах выступов. С увеличением толщины пленки последовательно возникают первый, а затем второй механизмы релаксации. Механизмом образования плоской или волнистой поверхности пленки является поверхностная диффузия, которая обеспечивает перенос материала вдоль возмущенной поверхности, которая постепенно переходит в состояние равновесия. Причем установление плоской или волнистой равновесной поверхности зависит от типа возмущения, величины деформации несовместности, толщины пленки и свойств ее материала.

Третьим механизмом релаксации упругой энергии за счет уменьшения упругой энергии $Ge_\eta Si_{1-\eta}$ полупроводниковой пленки является неоднородное перераспределение атомов Ge и Si вблизи волнистой поверхности пленки, которые равномерно распределены в случае ее плоской поверхности [2, 3]. Атомы Ge «предпочитают» выступы пленки, а Si – впадины между ними [4]. Расчеты в рамках плоской задачи [4] дают 9% снижение средней плотности упругой энергии за счет механодиффузии в пленке. Однако расчет [4] не учитывал ряд факторов, влияющих на процесс формирования неоднородности состава пленки с волнистой свободной поверхностью: зависимости упругих модулей пленки от состава и собственную деформацию за счет разноразмерности атомов Si и Ge . Последнее обстоятельство

учитывалось в расчете [5]. Четвертый механизм релаксации связан с уменьшением поверхностной энергии пленки $Ge_\eta Si_{1-\eta}$ при увеличении толщины пленки [6]. Этот механизм релаксации свободной энергии существенен при толщинах пленок менее 3 нм.

Пятый механизм релаксации деформированной полупроводниковой пленки на подложке: образование когерентных (бездислокационных) островков на поверхности пленки. Образование островков нанометровых размеров (квантовых точек) является крайним проявлением морфологической неустойчивости напряженных пленок и обычно наблюдается в системах с большой несовместностью. Обычно появлению островков предшествует, упомянутое выше, образование волнистой поверхности на первоначально плоской пленке в процессе ее отжига [7]. В данной работе приведены результаты расчетов, продолжающие исследование [3] для полупроводниковой пленки с учетом упомянутых дополнений.

В случае режима роста пленки Странского-Крастанова на так называемом смачивающем слое образуются наноразмерные изолированные островки, форма которых зависит от стадии и режима роста пленки. В частности, различают островки пирамидальной формы и островки в форме усеченной пирамиды. Релаксация накопленной в процессе роста пленки упругой энергии происходит за счет роста островков.

Модели островков на смачивающем слое имеют вид показанный на рис. 1. Пирамидальные островки имеют форму правильной четырехугольной пирамиды, отношение высоты пирамиды к длине стороны основания равно 0,1. Островки представляют собой правильную четырехугольную усеченную пирамиду, отношение высоты полной пирамиды к длине стороны основания равно 0,25, усеченной — 0,2.

Постановка краевой задачи для исследуемой модели в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0, & \Omega \\ u_i &= 0, & \Gamma_D \\ \sigma_{ij}n_j &= 0, & \Gamma_N\end{aligned}$$

где Ω — область занятая телом, $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ — граница тела, Γ_D — граница пленка-подложка, Γ_N — свободная граница пленки. Аналогично [5] будем рассматривать деформацию несовместности пленки как собственную деформацию $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_m c(x, y, z) \delta_{ij}$, $\varepsilon_m = 0,04$. Тогда определяющие соотношения можно записать следующим образом $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*)$.

Аналогично [2] потеря устойчивости равновесия плоской пленки определяется сменой знака у приращения свободной энергии δF участка поверхности пленки при наложении возмущения на плоскую форму

$$\delta F = \int_{\Gamma_N} \gamma dS + \int_{\Omega} w dV - \gamma_0 S_0 - W_0, \quad (1)$$

где удельная поверхностная энергия γ определена формулой $\gamma = c\gamma_{Ge} + (1 - c)\gamma_{Si}$, γ_{Ge} и γ_{Si} — удельная поверхностная энергия для Ge и Si , соответственно, $c = c(x, y, z)$ — доля Ge в сплаве, γ_0 — удельная поверхностная энергия невозмущенной пленки, S_0 — площадь свободной поверхности невозмущенной пленки,

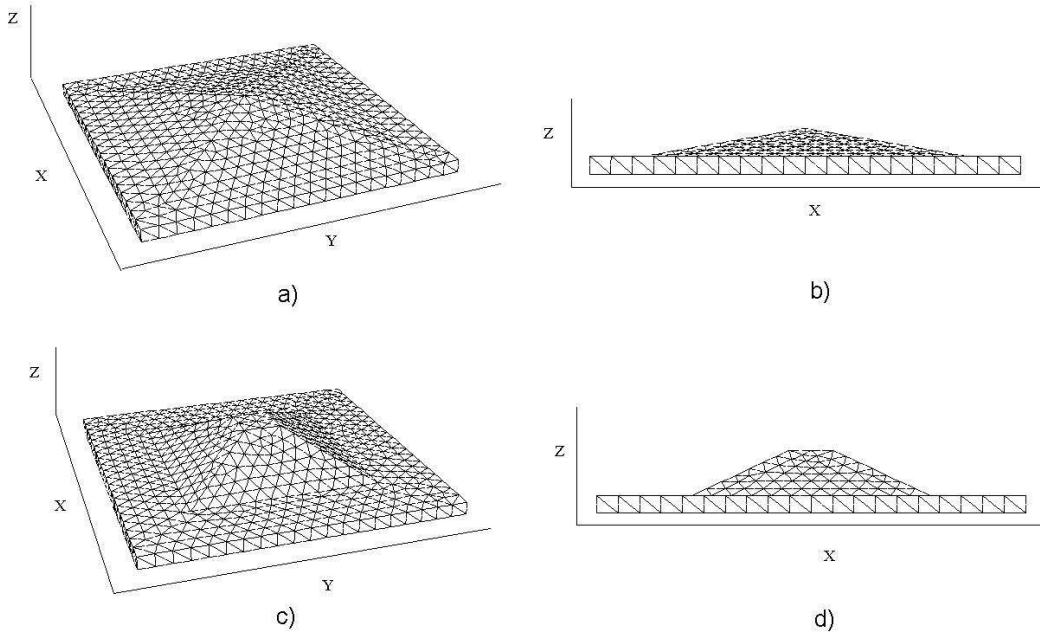


Рис. 1. Вид модельных образцов островков на смачивающем слое: пирамидальной формы (а), вид образца вдоль оси Ox (b); в форме усеченной пирамиды (с), вид образца вдоль оси Ox (d).

W_0 — упругая энергия невозмущенной пленки, плотность упругой энергии на поверхности пленки w имеет вид

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}.$$

Первое и третье слагаемое в (1) определяют приращение поверхностной энергии, второе и четвертое — приращение упругой энергии в пленке.

Расчет упругих напряжений во втором слагаемом (1) выполнен методом конечных элементов (пакет FlexPDE5). Во всех расчетах подложка предполагалась недеформируемой. Упругие перемещения заданной области малы по сравнению с амплитудами возмущений и не учитывались для определения формы свободной поверхности пленки.

Связь между неоднородностью распределения Δc атомов *Ge* и деформацией ε определялась согласно [5]:

$$\Delta c = \frac{1}{3\varepsilon_m} (Tr \varepsilon - \overline{Tr \varepsilon}) + (\bar{c} - c). \quad (2)$$

При этом предполагалось постоянство количества атомов *Ge*:

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \Delta c(x, y, z) dV = 0,$$

$\bar{c} = \eta$ — средняя доля атомов *Ge*, а $\overline{Tr \varepsilon} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} Tr \varepsilon dV$ — средняя деформация дилатации.

Для вычисления $c = c(x, y, z)$ использовалась процедура, состоящая из набора последовательных итераций. На первом шаге задавалось начальное распределение $c = c_0$ и вычислялась величина упругой энергии в пленке $W = W_0$. Далее, из (2) вычислялось $c_1 = c_0 + \Delta c$ и новое значение $W = W_1$ и т. д. В итоге было получено значение $c = c_{\min}$ соответствующее минимальной упругой энергии в пленке.

Использовалась следующая расчетная формула для $c = c(x, y, z)$

$$c_{i+1,j} = c_{i,j} + \Gamma \left[\frac{1}{3\varepsilon_0} (Tr \varepsilon_i - \overline{Tr \varepsilon_i}) - (\bar{c} - c_{i,j}) \right],$$

где $c_{i,0} = c_i$, Γ — малый положительный параметр ($\Gamma \leq 10^{-2}$), $c_{i,j}$ сходится при $j \rightarrow \infty$ к некоторому $c_{i,\infty} = c_{i+1}$, т. е.

$$\frac{1}{3\varepsilon_0} (Tr \varepsilon_i - \overline{Tr \varepsilon_i}) + (\bar{c} - c_{i,\infty}) = 0.$$

При расчете распределения $c = c(x, y, z)$, учитывалось выполнение условия $0 \leq c(x, y, z) \leq 1$.

Получены расчетные значения поверхностной и упругой энергии, а также приращения свободной энергии островков, для различных значений параметра L/a , определяющего размер островка (L — длина основания пирамиды, a — длина всего образца) и доли Ge в сплаве. Выполнены расчеты без учета перераспределения компонент пленки и расчеты с учетом перераспределения компонент. Обнаружено, что учет перераспределения компонент пленки приводит к повышению поверхностной энергии образца, в то время как упругая энергия образца принимает меньшие значения.

Расчеты показали, что доля Ge в вершинах пирамидального островка значительно превышает ее среднее значения, в тоже время она уменьшается на границе островок-подложка и пленка-подложка. Учет перераспределения компонент пленки вносит существенную поправку в значения критического размера островка. Эта поправка тем больше, чем меньше доля Ge в пленке. Обнаружена зависимость изменения концентрации от высоты островков. Для более высоких островков, на поздних стадиях роста, значение Δc увеличивается. Сравнение полученных результатов с расчетом, не учитывающим механизм механо диффузии, показывает существенную релаксацию упругой энергии в пленке, что согласуется с результатом [4], полученным для плоской задачи.

Результаты выполненных расчетов показали: 1) перераспределение атомов Ge и Si в полупроводниковой пленке связано с обогащением атомами Ge вершин островков и обеднением впадин между ним; 2) из-за различия упругих модулей Ge и Si происходит дополнительная релаксация упругой энергии в пленке; 3) учет влияния перераспределения компонент пленки приводит к ослаблению условий появления островков на поверхности (переход происходит при меньших размерах островков), этот эффект особенно заметен при малых концентрациях Ge ; 4) условия возникновения квантовых точек в виде пирамидальных островков в значительной степени определяются появлением неоднородного распределения компонент сплава $SiGe$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Berbezier I., Ronda A. SiGe nanostructures* // Surface Science Report, 2009, V. 54. Pp. 47–98.
- [2] *Paul D.J. Si/SiGe heterostructures: from material and physics to devices and circuits* // Semicond. Sci. Technol. 2004. V. 19. R75–R108.
- [3] *Бычков А.А., Карпинский Д.Н.* Влияние процессов релаксации на форму поверхности полупроводниковой пленки на подложке // Актуальные проблемы прочности: сборник трудов XLVIII Международной конференции, посвященной памяти М. А. Криштал. Тольятти: ТГУ, 2009. С. 220–221.
- [4] *Wu C. C., Hull R.* Composition and stress fields in undulated thin films // J. Appl. Phys., 2006. V.100. 083510.
- [5] *Digiuni D., Gatti R., Montalenti F.* Aspect-ratio-dependent driving force for nonuniform alloying in Stranski-Krastanow islands // Physical review, 2009. V. 80. 155436.
- [6] *Li X.-L., Yang G. W.* Theoretical determination of contact angle in quantum dot self-assembly // Appl. Phys. Lett., 2008. V. 92. 171902.
- [7] *Gao H. J., Nix W. D.* Surface roughening of heteroepitaxial thin films // Annual Review of Material Science, 1999. V. 29. Pp. 173–209.

Bychkov A. A., Karpinskiy D. N. *Calculation of equilibrium distribution of components of SiGe alloy in Stranski-Krastanov islands.* Distribution of concentration *Ge* in nano-metre pyramidal islands on a free surface of a semi-conductor film consisting of alloy *SiGe* is investigated. The three-dimensional models of islands is constructed. Calculation of elastic deformations has been executed with use of a finite elements method. For calculation of distribution *Ge* the approximating formulas and iterative algorithm are used. Calculation has shown, that atoms *Ge* concentrate in tops of pyramidal islands. Redistribution *Ge* provides an essential relaxation of elastic energy in *SiGe* alloy.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВОССТАНОВЛЕНИЮ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СЛОЯ

Ватульян А. О.^{*,**}, Богачев И. В.^{*}, Явруян О. В.^{*,**}

^{*}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

^{**}Южный математический институт, Владикавказ

Предложен способ решения обратной коэффициентной задачи электроупругости о восстановлении свойств неоднородного электроупругого слоя из анализа плоской задачи об установившихся колебаниях, возбуждаемых разностью потенциалов на электродах. С помощью преобразования Фурье построены две более простые развязанные краевые задачи относительно усредненных механических смещений и потенциала. Первая задача содержит только один упругий модуль — сдвиговый и аналогична задаче о продольных колебаниях неоднородного по длине стержня, которая была ранее подробно исследована. Вторая задача содержит функции, характеризующие как механические, так и пьезоэлектрические характеристики слоя. Неизвестные функции определяются при помощи метода линеаризации с привлечением итерационного процесса, на каждом этапе которого решаются интегральные уравнения Фредгольма первого и второго родов. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

Введение.

Интерес к задачам идентификации свойств электроупругих тел продиктован активным использованием пьезоэлектрических преобразователей во многих областях науки и техники. К настоящему моменту прямые задачи о колебаниях электроупругих однородных тел изучены достаточно подробно VYB-bib1. Однако задачи о колебаниях электроупругих неоднородных тел, когда свойства среды являются функциями координат, изучены значительно меньше, поскольку требуют знания законов изменения материальных характеристик. Наиболее изменяемой характеристикой, например, при располяризации образца, являются пьезомодули. Способ нахождения таковых для пьезоэлектрических стержней при продольной поляризации описан, например, в [1].

В настоящей работе представлена схема решения обратной коэффициентной задачи для электроупругой неоднородной по толщине полосы, колебания в которой возбуждаются разностью потенциалов на электродах, нанесенных на верхней и нижней границах полосы.

Предлагаемый алгоритм основан на предварительном сведении к более простой краевой задаче относительно усредненных характеристик — механических смещений и потенциала.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу об установившихся колебаниях с частотой ω электроупругой неоднородной по толщине полосы, занимающей область $S = \{x_1 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h]\}$. Нижняя грань жестко закреплена, на части верхней границы приложены механические нагрузки, а также задается разность потенциалов на электродах. В этом случае ненулевые механические и электрические характеристики можно представить в виде

$$u_i(x_1, x_3, t) = u_i(x_1, x_3)e^{-i\omega t}, \quad \varphi(x_1, x_3, t) = \varphi(x_1, x_3)e^{-i\omega t}, \quad i = 1, 3,$$

что позволяет отделить временной множитель и перейти к краевой задаче

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ D_{i,i} &= 0, \quad i, j = 1, 3,\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11}u_{1,1} + C_{13}u_{3,3} + e_{31}\varphi_{,3}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = C_{44}(u_{1,3} + u_{3,1}) + e_{15}\varphi_{,1}, \\ \sigma_{33} &= C_{13}u_{1,1} + C_{33}u_{3,3} + e_{33}\varphi_{,3}, \\ D_1 &= e_{15}(u_{1,3} + u_{3,1}) - \varepsilon_{11}\varphi_{,1}, \quad D_3 = e_{33}u_{3,3} + e_{13}u_{1,1} - \varepsilon_{33}\varphi_{,3}.\end{aligned}\quad (2)$$

Граничные механические условия

$$\begin{aligned}x_3 &= 0, \quad u_i = 0, \\ x_3 &= h, \quad \sigma_{i3}n_3 = p_i, \quad x_1 \in [a, b], \quad \sigma_{i3}n_3 = 0, \quad x_1 \notin [a, b]\end{aligned}\quad (3)$$

Граничные электрические условия

$$\begin{aligned}x_3 &= 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad x_1 \in [c, d], \\ x_3 &= h, \quad \varphi = -\varphi_0, \quad x_1 \in [c, d].\end{aligned}\quad (4)$$

где $C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{44}, e_{31}, e_{15}, e_{33}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ — упругие характеристики, пьезоэлектрические модули и характеристики диэлектрической проницаемости неоднородного слоя, которые могут быть произвольными положительными функциями от координаты x_3 , ρ — плотность полосы, в рассматриваемой задаче будем считать ее постоянной.

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [2].

Обратная коэффициентная задача сводится к определению неоднородных характеристик полосы по дополнительной информации о механических и электрических характеристиках, измеренных на части верхней границы полосы.

Для решения поставленной обратной задачи рассмотрим две постановки краевой задачи (1)–(4):

Задача 1. Колебания в полосе возбуждаются механическим воздействием при закороченных электродах, т. е. в граничных условиях (4) положим $\varphi_0 = 0$. В качестве дополнительной информации задаются значения полей смещений, измеренных на верхней границе полосы

$$u_1(h, x_1, \omega) = t_1(x_1, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (5)$$

$$u_3(h, x_1, \omega) = t_3(x_1, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (6)$$

Задача 2. Колебания в полосе возбуждаются разностью потенциалов на электродах при условии отсутствия механического воздействия на полосу, т. е. в граничных условиях (3) положим $p_1 = 0, p_3 = 0$. Неизвестные функции восстанавливаются по дополнительному условию для значений электрического тока.

2. Формулировка основных задач. Применим к краевым задачам 1 и 2 интегральное преобразование Фурье по переменной x_1 . После несложных преобразований получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно трансформант, которая при $\alpha_1 = 0$ получается развязанной и разделяется на три краевые задачи относительно усредненных характеристик $U_1(x_3), U_3(x_3), V_3(x_3), \Psi(x_3), \Phi(x_3)$.

Задача 1а

$$\begin{aligned}
(C_{44}U_1')' + \rho\omega^2 U_1 &= 0, \\
x_3 = 0, \quad U_1 &= 0 \\
x_3 = h, \quad C_{44}U_1' &= \tilde{p}_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Обратная задача. Определить пару функций $C_{44}(x_3), U_1(x_3, \omega)$ из (7) по информации

$$U_1(h, \omega) = \tilde{t}_1(\omega), \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{8}$$

Задача 1б

$$\begin{aligned}
(C_{33}U_3')' + (e_{33}\Psi')' + \rho\omega^2 U_3 &= 0, \\
(e_{33}U_3')' - (\varepsilon_{33}\Psi')' &= 0, \\
x_3 = 0, \quad U_3(0) = 0, \quad \Psi(0) &= 0, \\
x_3 = h, \quad C_{33}U_3' + e_{33}\Psi' &= \tilde{p}_3, \quad \Psi(h) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Задача 2а

$$\begin{aligned}
(C_{33}V_3')' + (e_{33}\Phi')' + \rho\omega^2 V_3 &= 0, \\
(e_{33}V_3')' - (\varepsilon_{33}\Phi')' &= 0, \\
x_3 = 0, \quad V_3(0) = 0, \quad \Phi(0) &= \phi_0, \\
x_3 = h, \quad C_{33}V_3' + e_{33}\Phi' &= 0, \quad \Phi(h) = -\phi_0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Обратная задача. Определить функции $C_{33}(x_3), e_{33}(x_3), \varepsilon_{33}(x_3), U_3(x_3, \omega), V_3(x_3, \omega), \Psi(x_3, \omega), \Phi(x_3, \omega)$ из (9), (10) по информации

$$U_3(h, \omega) = \tilde{t}_3(\omega), D_3(h, \omega) = D_0(\omega), \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{11}$$

где $D_0(\omega)$ — некоторая интегральная характеристика, пропорциональная амплитуде электрического тока. Задача (8) аналогична задаче об идентификации свойств неоднородного по длине упругого стержня, которая исследовалась ранее [3], из нее восстанавливается модуль C_{44} . При этом прямые задачи решаются на основе сведения к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и последующему обращению дискретного варианта.

Решение задачи (11) сводится к последовательному решению системы интегральных уравнений первого и второго рода, на основе которых могут быть построены итерационные процессы уточнения неизвестных функций на основе метода линеаризации.

3. Формулировка итерационного процесса.

1. Пусть известны $n - 1$ приближения неизвестных функций, характеризующих свойства полосы, тогда соответствующие решения задач (9), (10) $U_3^{n-1}(x_3), \Psi^{n-1}(x_3)$ и $V_3^{n-1}(x_3), \Phi^{n-1}(x_3)$ определяются из интегральных уравнений Фредгольма 2-ого рода

$$\begin{aligned}
U^{n-1}(x_3) &= \rho\omega^2 \int_0^h K_1^{n-1}(x_3, \xi) U^{n-1}(\xi) d\xi + F_1^{n-1}(x_3), \quad \xi \in [0, h] \\
\Theta^{n-1}(x_3) &= \rho\omega^2 \int_0^h K_2^{n-1}(x_3, \xi) \Theta^{n-1}(\xi) d\xi + F_2^{n-1}(x_3) \\
K_i^{n-1}(x_3, \xi) &= \int_0^{\min\{\xi, x_3\}} f_i^{n-1}(\eta) d\eta + (-1)^{i+1} \int_0^{x_3} f_{i+1}^{n-1}(\eta) d\eta \cdot R^{n-1}(\xi),
\end{aligned} \tag{12}$$

здесь для задачи (9): $U^{n-1} = U_3^{n-1}$, $\Theta^{n-1} = \Psi^{n-1}$,

$$F_i^{n-1}(x_3) = \tilde{p}_3 \int_0^{x_3} f_i^{n-1}(\eta) d\eta + (-1)^{i+1} \tilde{p}_3 \int_0^{x_3} f_{i+1}^{n-1}(\eta) d\eta \cdot R^{n-1}(h), \quad i = 1, 2, \text{ для}$$

задачи (11): $U^{n-1} = V_3^{n-1}$, $\Theta^{n-1} = \Phi^{n-1}$,

$$F_1^{n-1}(x_3) = 2\phi_0 R^{n-1}(x_3), \quad F_2^{n-1}(x_3) = \phi_0 \left(1 - 2 \int_0^{x_3} f_3^{n-1}(\eta) d\eta / \int_0^h f_3^{n-1}(\eta) d\eta \right).$$

2. На следующем этапе определим поправки к функциям $\delta C_{33}(x_3)$, $\delta e_{33}(x_3)$, $\delta \varepsilon_{33}(x_3)$ [4], которые должны удовлетворять системе интегральных уравнений Фредгольма 1-ого рода

$$\int_0^h [\delta C_{33}(x_3) (U_3'^{n-1})^2(x_3, \omega) + 2\delta e_{33}(x_3) \Psi_3'^{n-1}(x_3, \omega) U_3'^{n-1}(x_3, \omega) - \delta \varepsilon_{33}(x_3) (\Psi_3'^{n-1})^2(x_3, \omega)] dx_3 = \tilde{p}_3 [U_3'^{n-1}(h, \omega) - \tilde{t}_3(\omega)] \quad (13)$$

$$\int_0^h [\delta C_{33}(x_3) (V_3'^{n-1})^2(x_3, \omega) + 2\delta e_{33}(x_3) \Phi_3'^{n-1}(x_3, \omega) V_3'^{n-1}(x_3, \omega) - \delta \varepsilon_{33}(x_3) (\Phi_3'^{n-1})^2(x_3, \omega)] dx_3 = -2 \phi_0 [D_0(\omega) - D_3^{n-1}(\omega)]$$

где диапазон изменения $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ выбирается между резонансными частотами.

Из системы (13) можно определить численно неизвестные поправки лишь к двум неизвестным функциям.

В результате получаем следующие приближения неизвестных функций по правилу $C_{33}^n(x_3) = C_{33}^{n-1}(x_3) + \delta C_{33}^{n-1}(x_3)$ (аналогично для $e_{33}(x_3)$ или $\varepsilon_{33}(x_3)$). В качестве условия выхода из итерационного процесса использованы условия выхода по невязке или по предельному числу итераций, которое должно быть согласовано с погрешностью входной информации.

Уравнения Фредгольма второго рода (12) решаются численно при помощи метода коллокаций [5], при этом интегральный оператор заменяется конечномерным с использованием соответствующих квадратурных формул и на основе удовлетворения уравнения в некотором наборе точек $\{x_m\}_{m=1}^N$. Интегральные уравнения типа (13) представляют собой интегральные уравнения Фредгольма 1-ого рода с суммируемым ядром (при любых законах изменения неоднородности), их решение представляют некорректную задачу и для построения регуляризованного решения использован метод Тихонова А.Н. [6].

Таким образом, следуя предложенному алгоритму, можно восстановить три функционально-градиентные характеристики электроупругого слоя, две из которых определяют упругие свойства, третья функция является пьезоэлектрической характеристикой слоя.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел // Ростов-на-Дону, Изд-во ЮФУ, 2008, 176 с.
- [2] Ворович И. И., Бабешко В. В. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [3] Бочарова О. В., Ватульян А. О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал 2009. Т. 55. 3. С. 281–288.
- [4] Ватульян А. О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ 2010 №6. С. 911–918.
- [5] Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
- [6] Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

Vatulyan A. O., Bogachev I. V., Yavruyan O. V. *Identifying the properties of an inhomogeneously thick electroelastic layer.* A method for solving inverse problems of reconstruction electroelasticity properties of inhomogeneous electroelastic layer using the analysis of the plane problem of steady-state vibration excited by the potential difference across the electrodes is offered. Using the Fourier transform two more simple boundary value problems disjointed concerning averaged mechanical displacement and potential were constructed. The first problem has only one elastic modulus - shear and it is similar to the problem of longitudinal vibrations of the rod inhomogeneous along the length, which earlier has been researched. The second problem contains features that characterize both mechanical and piezoelectric characteristics of the layer. Using the linearization method involving an iterative process at each stage which deals with Fredholm integral equations of the first and second kind the unknown functions were determined. The results of computational experiments are presented.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Ватульян А. О., Дударев В. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Южный математический институт, Владикавказ

В общем виде поставлена обратная задача об определении неоднородных характеристик электроупругого тела по некоторой дополнительной информации. Сформулирована слабая постановка задачи о колебаниях пьезоэлектрических тел для общего случая нагружения. На основе такой постановки предложен способ построения решения обратной задачи. В качестве конкретного примера рассмотрена задача о реконструкции модуля податливости в пьезоэлектрическом стержне. Решение прямой задачи о продольных колебаниях стержня сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Проведен анализ точности составленной вычислительной схемы. Решение обратной задачи реализовано путем организации итерационного процесса, сочетающего на каждом этапе решение ИУФ 2-го рода и нахождение поправок на основе решения ИУФ 1-го рода. Решение этого уравнения реализовано численно с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. Представлены примеры по восстановлению неоднородного закона модуля податливости, проведена оценка эффективности работы алгоритма.

Введение.

В основе работы многих современных устройств контроля напряженного состояния лежит явление пьезоэффекта. Электромеханические свойства пьезоматериалов позволяют в режиме реального времени достаточно точно выявлять даже небольшие изменения в рассматриваемом объекте [1]. Приборы, использующие подобные материалы, имеют малые размеры, обладают простотой установки и мобильностью. Базовые элементы, изготовленные из пьезоматериалов, чаще всего представляют собой простейшие элементы типа пластин, дисков или стержней. В силу сложности технологических операций по производству пьезокерамик практически всегда присутствуют отклонения от установленных норм, в частности, неоднородность поляризации и упругих свойств. Определение реальных характеристик неоднородного объекта дает возможность оценить возможность его использования в конкретном приборе, а также диапазон его функционального применения. В настоящей работе рассмотрены общие вопросы построения итерационных процессов; решена задача об определении неоднородного закона изменения модуля податливости для пьезоэлектрического стержня с помощью метода акустического зондирования по данным об его амплитудно-частотной характеристике (АЧХ).

1. Слабая постановка. Рассмотрим установившиеся колебания пьезоэлектрического тела, имеющего объем V и кусочно-гладкую границу $S = S_u \cup S_\sigma$, $S = S_- \cup S_+ \cup S_H$. Общие уравнения движения, определяющие соотношения и смешанные граничные условия имеют вид [2]:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} + e_{kij}\varphi_{,k}, \quad u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i \quad (1)$$

$$D_{j,j} = 0, \quad D_i = e_{ikl}u_{k,l} + \varepsilon_{kl}\varphi_{,k}, \quad D_n|_{S_H} = 0, \quad \varphi|_{S_\pm} = \pm\varphi_0 \quad (2)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_i — компоненты вектора перемещения, ω — частота колебаний, C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных, ρ — плотность, e_{ikl} — компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных, φ — потенциал электрического поля, D_i — компоненты вектора электрической индукции, ε_{kl} — компоненты тензора диэлектрических постоянных, $\pm\varphi_0$ — подведенная к электродам разность потенциалов, n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к S , p_i — компоненты вектора активной нагрузки, приложенной к телу. Часть поверхности S_H неэлектродирована, а части S_+ и S_- — электродированы.

Введем в рассмотрение гладкие пробные функции ψ и v_i , удовлетворяющие главным граничным условиям $\psi|_{S_{\pm}} = \pm\varphi_0$, $v_i|_{S_u} = 0$. Нетрудно показать, что из постановки задачи (1)–(2) следует слабая постановка:

$$\int_V L(u_i, v_i, C_{ijkl}, e_{kij}, \varphi, \psi, \varepsilon_{ij}, \rho) dV = F(v_i) \quad (3)$$

где $L(u_i, v_i, C_{ijkl}, e_{kij}, \varphi, \psi, \varepsilon_{ij}, \rho) = C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} + e_{kij}(\varphi_{,k}v_{i,j} + \psi_{,k}u_{i,j}) - \varepsilon_{ij}\varphi_{,i}\psi_{,j} - \rho\omega^2u_iv_i$ — линейная форма по каждому из аргументов $(u_i, v_i, C_{ijkl}, e_{kij}, \varphi, \psi, \varepsilon_{ij}, \rho)$; $F(v_i) = \int_{S_{\sigma}} p_iv_i ds + \int_{S_+} D_n\varphi_0 ds - \int_{S_-} D_n\varphi_0 ds$ — линейный функционал.

Обратную задачу об определении неизвестных переменных характеристик пьезоэлектрического тела можно рассматривать как задачу об определении функций-коэффициентов, входящих в исходную краевую задачу, в зависимости от заданной дополнительной и априорной информации в виде некоторых неравенств. Будем считать, что на некоторой части границы S заданы значения компонент поля смещения, например, $u_i(x, \omega)|_{S_{\sigma}} = f_i(x, \omega)$, $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Под решением обратной задачи понимается множество элементов (u_i и искомые коэффициенты, входящие в запись формы L), которые удовлетворяют равенству (3) для любых пробных функций ψ и v_i . Отметим, что представленная задача является нелинейной и некорректной, что приводит к существенным затруднениям при построении ее решения на основе метода типа Ньютона, что приводит к необходимости нахождения производной по Фреше от исходного оператора. Наличие слабой трактовки и линейность формы L позволяет легко строить итерации. На основе такого подхода сформулирована последовательность слабых постановок и интегральных уравнений первого рода с гладкими ядрами, которые позволяют реализовать итерационный процесс для построения решения обратной задачи.

В [3, 4] исследованы задачи, посвященные проблеме реконструкции пьезомодулей при электрическом способе возбуждения колебаний. В настоящей работе рассматривается проблема реконструкции упругой характеристики (модуля податливости) при силовом воздействии по данным АЧХ нагружаемой части границы.

2. Постановка и решение прямой задачи для стержня

В качестве конкретного примера описанной выше задачи рассмотрим продольные колебания пьезоэлектрического стержня длины $2l$, в котором модуль податливости s является функцией продольной координаты. Уравнения движения, граничные условия и определяющие соотношения имеют вид [3]:

$$\sigma' + \rho\omega^2 u = 0, \quad u' = s\sigma - d\varphi', \quad \sigma(l) = p, \quad u(-l) = 0 \quad (4)$$

$$D' = 0, \quad D = d\sigma - \epsilon\varphi', \quad \varphi(\pm l) = 0 \quad (5)$$

где σ — компонента тензора напряжений, u — компонента продольного перемещения вдоль оси стержня x , d — пьезомодуль, φ — потенциал электрического поля, D — компонента вектора электрической индукции, ϵ — диэлектрическая постоянная. Представленные граничные условия соответствуют задаче о колебаниях пьезоэлектрического стержня, консольно заземленного на левом конце с закороченными электродами. Колебания вызываются периодической во времени нагрузкой с амплитудой p , действующей на правом конце, величины ρ , d , ϵ — постоянные и считаются известными.

С помощью обращения дифференциальных операторов первого порядка решение прямой задачи о построении смещения $u(x)$ сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром:

$$u(\xi) = \int_0^1 u(\chi) R(\chi, \xi) d\chi + b(\xi), \quad (6)$$

$$R(\chi, \xi) = k^2 \left(\int_0^{\min(\chi, \xi)} (k_0^{-2} f(s) - 1) ds + \xi\chi \right), \quad b(\xi) = 2s_0 p \int_0^\xi f(s) ds$$

где введены следующие обозначения: $\xi \in [0, 1] : x = l(2\xi - 1) \in [-l, l]$, $s = s_0 f(\xi)$, $k_0^2 = \frac{d^2}{s_0 \epsilon}$, $k^2 = s_0 k_0^2 \rho \omega^2 4l^2$, $f(\xi)$ — безразмерная функция, характеризующая закон изменения модуля податливости, k_0^2 — параметр, обратный коэффициенту электромеханической связи [3], k — спектральный параметр, прямо пропорциональный частоте колебаний ω .

Решение (6) построено численно на основе метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Точность построенной вычислительной схемы была проверена путем сравнения численного и аналитического решений исходной задачи для случая $f(\xi) = 1$. Отметим, что для частот, находящихся вдали от околорезонансных областей, относительная погрешность сравниваемых решений составила не более 0,05% при равномерном разбиении отрезка интегрирования на 40 частей.

3. Одномерная обратная задача

Обратная задача о реконструкции модуля податливости по некоторой дополнительной информации относится к классу коэффициентных обратных задач [4]. В качестве дополнительной информации выступают данные об АЧХ $w(\omega)$ нагружаемого торца стержня. Одним из наиболее эффективных методов отыскания решения подобных задач является метод построения итерационного процесса, основанного на процедуре линеаризации [5].

Слабая постановка представленной задачи может быть легко получена на ос-

нове общего соотношения (3):

$$\int_{-l}^l L(c, d_1, d_2, \rho, u, v, \varphi, \psi) dx = F \quad (7)$$

где $L = cu'v' + d_1(u'\psi' + v'\varphi') + d_2\varphi'\psi' - \rho\omega^2uv$, $d_1 = cd$, $d_2 = cd^2 - \epsilon$, $F = v(l)p$, $c = \frac{1}{s}$, $\epsilon = \varepsilon + cd^2$. Заметим, что форма L имеет симметричную структуру относительно переменных $(u, \varphi) \leftrightarrow (v, \psi)$. Используя обычную технику, проведем общую линеаризацию (7), положив $c = c_0 + \varepsilon c_1$, $u = u_0 + \varepsilon u_1$, $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1$, $d_1 = d_{10} + \varepsilon d_{11}$, $d_2 = d_{20} + \varepsilon d_{21}$, где ε — формальный малый параметр. Полагая $v = u_0$, $\psi = \varphi_0$, окончательно получим:

$$\int_{-l}^l (c_1 u_0'^2 + 2d_{11} u_0' \varphi_0' + d_{21} \varphi_0'^2) dx + p(w(\omega) - u_0(l, \omega)) = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (8)$$

Поскольку необходимо определить закон изменения только модуля податливости, а параметры d , ρ , ϵ считаются постоянными, то уравнение (8) преобразуется к виду:

$$\int_0^1 f_1(\xi) \left(k_0^{-2} k^2 \int_{\xi}^1 u_0 d\xi + 2s_0 p \right)^2 d\xi = 2s_0 p (w(\kappa) - u(1, \kappa)), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (9)$$

Уравнение (9) есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно функции поправки $f_1(\xi)$ закона изменения модуля податливости $f(\xi)$. При обращении этого оператора использован регуляризующий алгоритм, опирающийся на методе А. Н. Тихонова [6].

4. Результаты вычислительных экспериментов

Определение закона изменения модуля податливости $f(\xi)$ осуществлено численно в ходе реализации итерационного процесса. Начальное приближение $f_0(\xi)$ определялось из условия минимума функционала невязки $Q = \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} (u(1, \kappa) - w(\kappa))^2 d\kappa$ в классе линейных функций на некотором компакте, построенном исходя из априорной информации об ограниченности и положительности восстанавливаемой функции $f(\xi)$. В ходе последующих итераций находилась поправка к предыдущему приближению, которая находилась из решения интегрального уравнения (9); частотный диапазон выбирался между первой и второй резонансными частотами.

Результаты вычислительных экспериментов показали, что наиболее точно восстанавливаются монотонные функции, существенно немонотонные зависимости восстанавливаются хуже; для монотонных законов погрешность восстановления не превышает 2–3 %, немонотонных — 5–7 %.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-00194) и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кажис Р. И. Ультразвуковые информационно-измерительные системы. Вильнюс: Москлас, 1986. 216 с.
- [2] Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
- [3] Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2008. 176 с.
- [4] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [5] Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
- [6] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

Vatulyan A.O., Dudarev V.V. *On inverse problems of electroelasticity.* In general terms, the inverse problem of determining the inhomogeneous characteristics of electroelastic body on some additional information is formulated. The weak formulation of the problem of vibrations of piezoelectric bodies for the general case of loading is presented. Based on this formulation the method of constructing of the inverse problem solution is provided. As a concrete example the problem of reconstruction of the module compliance in a piezoelectric rod is considered. The solution of the direct problem of longitudinal vibrations of the rod is reduced to solving a Fredholm integral equation (FIE) of the 2nd kind. It is carried out analysis of the accuracy of the computational scheme. The solution of the inverse problem is realized through an iterative process, combining at each stage of FIE of the 2nd kind solution and determining of corrections on the basis of FIE of the 1st kind solution. The solution of this equation is realized numerically using Tikhonov's regularization method. The examples of the reconstruction of inhomogeneous law compliance module is presented, the evaluation of the algorithm efficiency is given.

ЗАДАЧА ИЗГИБА ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С РОМБОЭДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Ватульян К. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена задача Сен-Венана об изгибе поперечной силой цилиндра с прямолинейной ромбоэдрической анизотропией. Построено аналитическое решение в виде полиномов третьего порядка для смещений в случае, когда модуль упругости $c_{14} = 0$ и в виде полиномов второго порядка для напряжений, когда $c_{14} \neq 0$. Настоящая работа является продолжением работ [1], где представленная задача была решена численно и [2], где для её решения использовался другой метод.

В общем случае анизотропии задачи об изгибных деформациях и плоской деформации не разделяются и связаны между собой. Именно поэтому задачу об изгибе поперечной силой часто называют задачей обобщенного изгиба. Для произвольного поперечного сечения такая задача в [3] сводится к отысканию трех аналитических в области S функций, что представляет собой достаточно трудоемкую задачу. В то же время еще Сен-Венаном [4] для консоли, обладающей анизотропией частного вида (ортотропией), были построены решения для простых областей (эллипс, прямоугольник). Было бы интересно понять, насколько это возможно для анизотропии ромбоэдрического класса.

Рассмотрим равновесие упругого цилиндра, занимающего объем $V = S \times [0, L]$; здесь S — поперечное сечение цилиндра; L — его длина; ∂S — граница S , являющаяся кусочно-гладкой кривой. Свяжем с этим телом декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Будем считать, что ось $x_3 = x$ параллельна образующей цилиндра, проходит через геометрические центры тяжести сечения, оси x_1 и x_2 направлены по главным осям инерции сечения. Материал цилиндра обладает ромбоэдрической анизотропией, матрица упругих постоянных для которого приведена в [1].

В соответствии с общей теорией однородных решений [5] будем отыскивать решение в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \frac{x^3}{6}\mathbf{a}_1 + \frac{x^2}{2}\mathbf{a}_2 + x\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 \quad (1)$$

где

$$\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (0, 0, -x_2)^T, \quad \mathbf{a}_3 = (\nu x_1 x_2, -\frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2), 0)^T,$$

$$\mathbf{a}_4 = (a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3}), \quad a_{4,i} = a_{4,i}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad \nu = \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}}$$

В результате подстановки (1) в уравнения равновесия и граничные условия на боковой поверхности получаем следующую краевую задачу:

$$A\mathbf{a}_4 = (0, 0, -(2\nu(c_{44} + c_{13}) - c_{33})x_2)^T \quad (2)$$

$$G_1 \mathbf{a}_4 \Big|_{\partial S} = \left[c_{14} \left(n_1 \frac{\nu}{2} (x_1^2 - x_2^2) - n_2 \nu x_1 x_2 \right), -c_{14} \left(n_1 \nu x_1 x_2 + n_2 \frac{\nu}{2} (x_1^2 - x_2^2) \right), \right. \\ \left. -c_{44} \left(n_1 \nu x_1 x_2 - n_2 \frac{\nu}{2} (x_1^2 - x_2^2) \right) \right]^T \Big|_{\partial S}, \quad (3)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2 & (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2 & 2c_{14}\partial_1\partial_2 \\ (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2 & c_{66}\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 & c_{14}(\partial_1^2 - \partial_2^2) \\ 2c_{14}\partial_1\partial_2 & c_{14}(\partial_1^2 - \partial_2^2) & c_{44}(\partial_1^2 + \partial_2^2) \end{vmatrix},$$

$$G_1 = \begin{vmatrix} n_1 c_{11}\partial_1 + n_2 c_{66}\partial_2 & n_1 c_{12}\partial_2 + n_2 c_{66}\partial_1 & c_{14}(n_1\partial_2 + n_2\partial_1) \\ n_1 c_{66}\partial_2 + n_2 c_{12}\partial_1 & n_1 c_{66}\partial_1 + n_2 c_{11}\partial_2 & c_{14}(n_1\partial_1 - n_2\partial_2) \\ c_{14}(n_1\partial_2 + n_2\partial_1) & c_{14}(n_1\partial_1 - n_2\partial_2) & c_{44}(n_1\partial_1 + n_2\partial_2) \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим задачу изгиба цилиндра поперечными силами для эллиптического сечения с полуосями d_1 и d_2 . Эта задача, как показано в [3], для общего вида прямолинейной анизотропии допускает точное аналитическое решение в виде многочленов, однако сами эти решения не приводятся и не анализируются. Попробуем исследовать задачу в несколько этапов. Отметим, что задачи об изгибной деформации (и соответственно об отыскании касательных напряжений при изгибе) и тензор плоских напряжений связаны через граничные условия на боковой поверхности, а связующий коэффициент — c_{14} . Соответственно, в силу этого свойства даже для общего поперечного сечения можно построить разложения по этому параметру и решать попеременно задачу изгиба и плоскую задачу с различными граничными условиями. В качестве начального приближения для такого разложения рассмотрим задачу в случае, когда $c_{14} = 0$. Тогда, очевидно, плоская задача имеет только тривиальное решение $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$, а для $a_{4,3}$ имеем следующую краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta a_{4,3} = -\frac{1}{c_{44}}(2\nu(c_{44} + c_{13}) - c_{33})x_2 = A_1 x_2$$

$$n_1 \partial_1 a_{4,3} + n_2 \partial_2 a_{4,3} \Big|_{\partial S} = -c_{44} \left(n_1 \nu x_1 x_2 - n_2 \frac{\nu}{2} (x_1^2 - x_2^2) \right)^T \Big|_{\partial S}$$

Будем искать ее решение $a_{4,3}$ в виде многочлена третьего порядка от двух переменных:

$$a_{4,3} = b_1 x_1^3 + b_2 x_1^2 x_2 + b_3 x_1 x_2^2 + b_4 x_2^3 + b_5 x_1 + b_6 x_2$$

После проведения необходимых выкладок и вычислений получаем решение:

$$a_{4,3} = \frac{x_2}{6(3 + h^2)} [B_1^* x_1^2 + C_1^* x_2^2 + D_1^*]$$

Здесь

$$B_1^* = 3A_1 - 3\nu(1 - h^2), \quad C_1^* = A_1(2 + h^2) + \nu(1 - h^2)$$

$$D_1^* = -3d_2^2(A_1(2 + h^2) + 4\nu), \quad h = d_1/d_2$$

В этом случае напряжения имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= xx_2(2\nu c_{13} - c_{33}), \\ \sigma_{23} &= c_{44} \left(\left(\frac{B_1^*}{3(3+h^2)} - \nu \right) \frac{x_1^2}{2} + \left(\frac{C_1^*}{3+h^2} + \nu \right) \frac{x_2^2}{2} + \frac{D_1^*}{6(3+h^2)} \right), \\ \sigma_{13} &= c_{44} x_1 x_2 \left(\frac{B_1^*}{3(3+h^2)} + \nu \right)\end{aligned}$$

Эти решения могут служить в качестве тестовых для верификации результатов численного исследования с помощью КЭ пакетов.

Рассмотрим случай, когда $c_{14} \neq 0$. В этой ситуации можно поступить также, как и выше, отыскивая все компоненты смещений в виде полиномов третьего порядка, зависящих от двух переменных и удовлетворяющих (2)–(3), однако при этом требуется определять значительно большее количество коэффициентов полиномов, что является весьма трудоемкой процедурой, поэтому используем аналогичный подход для нахождения напряжений. Отметим, что в случае анизотропии общего вида напряженное состояние уже не разделяется на плоское и задачу об отыскании касательных напряжений при изгибе. В этом состоит существенное отличие изгиба поперечной силой в анизотропном случае от изотропного. Итак, для задачи обобщенного изгиба характерны следующие особенности: 1) помимо традиционно исследуемых при изгибе напряжений σ_{33} , σ_{13} , σ_{23} , в этом случае ненулевыми оказываются и напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} ; 2) поперечные сечения не остаются плоскими; 3) изгиб происходит совместно с кручением. Поэтому, исходя из вида граничных условий, для эллиптического поперечного сечения будем отыскивать компоненты всех напряжений в виде полиномов второго порядка, зависящих от двух переменных x_1, x_2 , причем аналогичные добавки должны быть и для компоненты σ_{33} . Используя такой подход и опуская громоздкие выкладки, установим следующую структуру компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{2A_2}{d_2^2} \left(\frac{x_1^2}{d_1^2} + \frac{3x_2^2}{d_2^2} - 1 \right), \quad \sigma_{22} = \frac{2A_2}{d_1^2} \left(\frac{3x_1^2}{d_1^2} + \frac{x_2^2}{d_2^2} - 1 \right), \\ \sigma_{12} &= -4A_2 \frac{x_1 x_2}{d_1^2 d_2^2}, \quad \sigma_{13} = 2B_2 \frac{x_1 x_2}{d_2^2}, \\ \sigma_{23} &= -B_2 \left(\frac{3x_1^2}{d_1^2} + \frac{x_2^2}{d_2^2} - 1 \right) + \frac{P}{2I} d_2^2 \left(\frac{x_1^2}{d_1^2} + \frac{x_2^2}{d_2^2} - 1 \right), \\ \sigma_{33} &= -\frac{P}{I} x_2 x - \frac{a_{13}}{a_{33}} \cdot \frac{2A_2}{d_1^2 d_2^2} \left(x_1^2 \left(1 + 3 \frac{d_2^2}{d_1^2} \right) + x_2^2 \left(1 + 3 \frac{d_1^2}{d_2^2} \right) - 2 \right),\end{aligned}$$

содержащих две произвольные постоянные A_2 и B_2 . Нетрудно проверить, что построенное поле напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия и граничным условиям, а произвольные постоянные определяются из условий совместности деформаций, которые дают следующую систему двух уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{16D_2}{d_1^2 d_2^2} A_2 + 2a_{14} B_2 \frac{1}{d_1^2} - a_{14} \frac{P}{I} \left(1 - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right) &= 0, \\ a_{14} \left(\frac{4}{d_1^2 d_2^2} - 6 \frac{1}{d_1^4} \right) A_2 - a_{44} B_2 \left(\frac{3}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \right) + \frac{P}{I} \left(-a_{13} + \frac{1}{2} a_{44} \frac{d_2^2}{d_1^2} \right) &= 0,\end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D_2 &= a_{11} + a_{12} + \frac{a_{66}}{4} - \frac{1}{4} \frac{a_{13}^2}{a_{33}} \left(2 + 3 \left(\frac{d_2^2}{d_1^2} + \frac{d_1^2}{d_2^2} \right) \right), \\ a_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_{33}}{B_3} + \frac{c_{44}}{2B_4} \right), \quad a_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{c_{33}}{B_3} - \frac{c_{44}}{2B_4} \right), \\ a_{33} &= \frac{c_{11} + c_{12}}{B_3}, \quad a_{14} = -\frac{c_{14}}{B_4}, \quad a_{44} = \frac{c_{44}}{B_4}, \quad a_{66} = \frac{c_{66}}{B_4}, \\ B_3 &= (c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2, \quad B_4 = c_{66}c_{44} - c_{14}^2 \end{aligned}$$

Выражения для A_2 и B_2 не приводятся из-за их громоздкости. При этом отметим, что $A_2 = \frac{P}{I} \cdot O(c_{14})$ и главная часть A_2 пропорциональна c_{14} . Таким образом и все компоненты плоского поля напряжений пропорциональны этому параметру (чего и следовало ожидать на основе рассмотренного выше случая $c_{14} = 0$).

Автор выражает благодарность Ю. А. Устинову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян К. А., Устинов Ю. А. Задача Сен-Венана для прямоугольной призмы с ромбоэдрической анизотропией // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIII международной конференции. Ростов-на-Дону, 12–15 октября 2009 г. Издательство Южного федерального университета, 2009. С. 52–56.
- [2] Устинов Ю. А., Ватульян К. А. Задача Сен-Венана об изгибе поперечной силой призмы с ромбоэдрической анизотропией // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Труды V Всероссийской школы-семинара. Дивноморское, 1–5 июня 2009 г. Ростов-на-Дону. Терра Принт, 2009. С. 23–25.
- [3] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
- [4] Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. «Классики естествознания». М.: Физматгиз, 1961. 518 с.
- [5] Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Физматлит, 2003. 128 с.

Vatulyan K. A. *The problem of curving by traversal force of cylinder with rhombohedral anisotropy.* The Saint-Venant problem of curving by traversal force of cylinder with rectilinear rhombohedral anisotropy is observed. The analytical solution in the form of polynomials of the third order for biases in a case, when a modulus $c_{14} = 0$ and in the form of polynomials of the second order for stresses, when a modulus $c_{14} \neq 0$ is built. The present work is sequel of research [1] where the introduced problem has been solved numerically and [2] where for its solution another method was used.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕНИЕМ

Вихтенко Э. М., Намм Р. В.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск

Для двумерной контактной задачи рассматривается метод последовательных приближений с модифицированными функционалами Лагранжа. В работе построены и обоснованы новые алгоритмы нахождения седловых точек модифицированных функционалов Лагранжа.

К вариационным и квазивариационным неравенствам сводятся многие важные с практической точки зрения нелинейные краевые задачи теории упругости [1–4].

Рассмотрим двумерную контактную задачу между упругим телом Ω и абсолютно твердой опорой. Пусть $\Omega \subset R^2$ — трапецевидная область, указанная на рис. 1. Задача контакта упругого тела с абсолютно твердой поверхностью может

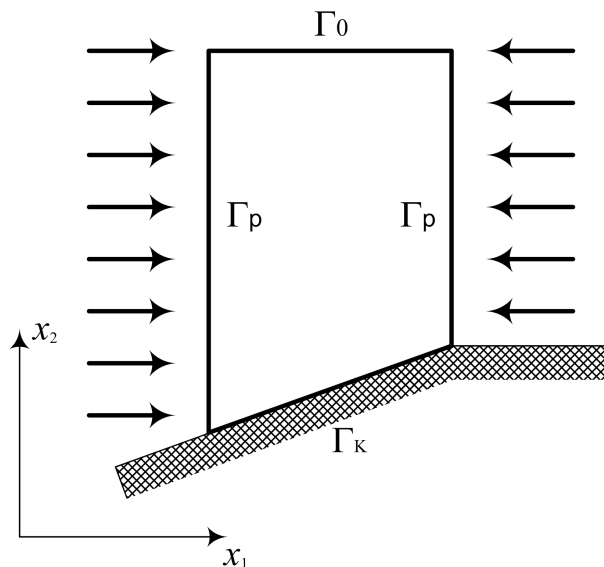


Рис. 1. Контакт упругого тела и твердой опоры.

быть сформулирована в виде квазивариационного неравенства [1, 2, 4]

$$\begin{aligned}
 a(u, v - u) + \int_{\Gamma_K} \mathcal{F}|\sigma_n(u)|(|v_t| - |u_t|) d\Gamma &\geq \\
 &\geq \int_{\Omega} f_i(v_i - u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_P} T_i(v_i - u_i) d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{K},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $a(u, v) = \int_{\Omega} c_{ijpm} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{pm}(v) d\Omega$; $v = (v_1, v_2)$ — вектор перемещений; $\varepsilon_{ij}(v)$ — тензор деформаций; $\sigma_{ij}(v)$ — тензор напряжений; c_{ijpm} — ограниченные измеримые функции в Ω , удовлетворяющие условиям симметрии $c_{ijpm} = c_{jipm} = c_{pmij}$, $i, j, p, m = 1, 2$; $F = (f_1, f_2) \in [L_2(\Omega)]^2$; $T = (T_1, T_2) \in [L_2(\Gamma_P)]^2$, $\mathcal{F}$ — коэффициент трения, $\mathcal{F} \geq 0$ на Γ_K ; $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω ; $\tau = (-n_2, n_1)$, $u_n = u \cdot n$; $\sigma_i = \sigma_{ij} n_j$, $i = 1, 2$; $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$; $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$; $\sigma_\tau = \sigma - \sigma_n n$. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

Через W и $\mathcal{K}$ обозначены множества

$$W = \{v \in [H^1(\Omega)]^2 : v_n = 0 \text{ на } \Gamma_0\}, \quad \mathcal{K} = \{v \in W : v_n \leq 0 \text{ на } \Gamma_K\}.$$

Основной сложностью при исследовании и построении численных алгоритмов решения задачи (1) является зависимость силы трения $\mathcal{F}|\sigma_n(u)|$ от искомого решения u . Задача (1) может быть записана как задача равновесного программирования [5]

$$u \in \arg \min_{v \in \mathcal{K}} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_P} T_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_K} \mathcal{F} |\sigma_n(u)| |v_t| d\Gamma \right\} d\Gamma.$$

Для решения квазивариационного неравенства (1) в [1, 2, 4] предложен метод последовательных приближений. Алгоритм метода последовательных приближений заключается в выполнении следующих шагов:

Step1 — находится u^s как решение вспомогательного вариационного неравенства

$$a(u, v - u) + \int_{\Gamma_K} g^{s-1} (|v_\tau| - |u_\tau|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_P} T_i (v_i - u_i) d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{K}; \quad (2)$$

Step2 — вычисляется $g^s = \mathcal{F}|\sigma_n(u^s)|$, $s=1, 2, \dots$; $g^0 \geq 0$ — задано, $g^0 \in H^{1/2}(\Gamma_K)$.

Величина g^{s-1} задает силу трения на шаге s , поэтому вариационное неравенство (2) называется задачей с заданным трением. Задача (2) эквивалентна задаче минимизации недифференцируемого функционала

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_P} T_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_K} g^{s-1} |v_t| d\Gamma \rightarrow \min, \\ v \in \mathcal{K}. \end{cases} \quad (3)$$

Задача (2) является полукоэрцитивной задачей [1, 2], минимизируемый функционал $J(v)$ не является сильно выпуклым на всем пространстве. В [6] показано, что при выполнении условия

$$\int_{\Omega} f_1 d\Omega + \int_{\Gamma_P} T_1 d\Gamma > 0$$

задача (3) имеет решение. В дальнейшем будем считать условие разрешимости выполненным.

Для решения задач условной минимизации, к которым относится и задача (3), широкое применение получили методы двойственности, заменяющие задачу минимизации исходного функционала задачей поиска седловой точки функционала

Лагранжа. Однако сходимость известных алгоритмов поиска седловых точек с классическим функционалом Лагранжа даже в коэрцитивных задачах доказывалась только по прямой переменной. Применение же метода последовательных приближений, как будет показано ниже, предъявляет высокие требования к точности нахождения двойственной составляющей седловой точки функционала Лагранжа. В полукоэрцитивном случае использование классических функционалов Лагранжа не представляется возможным. Для преодоления указанных сложностей авторами были построены и исследованы модифицированные функционалы Лагранжа.

На множестве $W \times L_2(\Gamma_K)$ определим классический функционал Лагранжа

$$L(v, \lambda) = J(v) + \int_{\Gamma_K} \lambda v_n d\Gamma$$

и модифицированный функционал Лагранжа [7]–[9]

$$M(v, \lambda) = J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left\{ [(\lambda + r v_n)^+]^2 - \lambda^2 \right\} d\Gamma.$$

Пара $(v^*, \lambda^*) \in W \times (L_2(\Gamma_K))^+$ называется седловой точкой функционала Лагранжа $L(v, \lambda)$, если выполняется двусторонне неравенство

$$L(v^*, \lambda) \leq L(v^*, \lambda^*) \leq L(v, \lambda^*) \quad \forall (v, \lambda) \in W \times (L_2(\Gamma_K))^+,$$

где через $(L_2(\Gamma_K))^+$ обозначено множество неотрицательных функций из $L_2(\Gamma_K)$.

Использование модификации функционала Лагранжа позволяет снять ограничение на двойственную переменную, т. е. для функционала $M(v, \lambda)$ величина λ^* отыскивается в $L_2(\Gamma_K)$.

Известно, что если задача (3) имеет решение $u = (u_1, u_2)$ из пространства $[H^2(\Omega)]^2$ и $\text{mes}\{x \in \Gamma_K: \sigma_n(u) < 0\} > 0$, тогда пара $(u, -\sigma_n(u))$ является единственной седловой точкой функционалов $L(v, \lambda)$ и $M(v, \lambda)$. Квалифицированное вычисление $\lambda^* = -\sigma_n(u)$ обеспечивает качественное определение g^s на шаге Step2 метода последовательных приближений.

Для нахождения седловой точки функционала $M(v, \lambda)$ может быть использован алгоритм Удзавы. Функционал $M(v, \lambda^k)$ не является сильно выпуклым по переменной v , что усложняет процесс поиска седловой точки. Для преодоления этого затруднения рассмотрим алгоритм, в котором проводится итеративная проксимальной регуляризации по v минимизируемого функционала.

Алгоритм поиска седловой точки с итеративной проксимальной регуляризацией выглядит так.

Зададим начальную точку $\lambda^0 \in L_2(\Gamma_K)$ и на $(k+1)$ -ой итерации ($k=1, 2, \dots$) найдем (u^{k+1}, λ^{k+1}) следующим образом:

U-Step1 — определяем $u^{k+1} \in W$ из критерия

$$\bar{u}^{k+1} = \arg \min M(v, \lambda^k) + \frac{1}{2} \|v - v^k\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2,$$

$$\|u^{k+1} - \bar{u}^{k+1}\|_{[W_2^1(\Omega)]^2} \leq \delta_k, \quad \delta_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty.$$

U-Step2 — корректируем двойственную переменную по формуле

$$\lambda^{k+1} = (\lambda^k + ru_n^{k+1})^+.$$

Регуляризирующая добавка $1/2 \|v - v^k\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2$ обеспечивает сильную выпуклость вспомогательного функционала, что позволяет применять эффективные методы минимизации.

При численной реализации построенных алгоритмов возникает дополнительная трудность, связанная с недифференцируемостью функционала $J(v)$. Для сглаживания недифференцируемости можно воспользоваться иной модификацией функционала Лагранжа. Заменим задачу (3) эквивалентной задачей

$$\begin{cases} \hat{J}(v, w) = a(v, v) - \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_P} T_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_K} g|v \cdot t - w| d\Gamma \rightarrow \min, \\ v \in \mathcal{K}, \\ w = 0 \text{ на } \Gamma_K, \quad w \in L_2(\Gamma_K), \end{cases} \quad (4)$$

где $t = (-n_2, n_1)$ на Γ_K .

Для задачи (4) классический и модифицированный функционалы Лагранжа определены на множестве $(W \times L_2(\Gamma_K)) \times (L_2(\Gamma_K))^2$ и имеют вид

$$\hat{L}(v, w; \lambda_1, \lambda_2) = \hat{J}(v, w) + \int_{\Gamma_K} \lambda_1 v_n d\Gamma + \int_{\Gamma_K} \lambda_2 w d\Gamma$$

$$\hat{M}(v, w; \lambda_1, \lambda_2) = \hat{J}(v, w) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(((\lambda_1 + rv_n)^+)^2 - \lambda_1^2 \right) d\Gamma + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left(\lambda_2 w + \frac{r}{2} w^2 \right) d\Gamma.$$

Седловая точка функционала $\hat{M}(v, w; \lambda_1, \lambda_2)$ определяется как элемент $(v^*, w^*; \lambda_1^*, \lambda_2^*) \in W \times L_2(\Gamma_K) \times [L_2(\Gamma_K)]^2$, для которого выполняется

$$\hat{M}(v^*, w^*; \lambda_1, \lambda_2) \leq \hat{M}(v^*, w^*; \lambda_1^*, \lambda_2^*) \leq \hat{M}(v, w; \lambda_1^*, \lambda_2^*)$$

$$\forall (v, w; \lambda_1, \lambda_2) \in (W \times L_2(\Gamma_K)) \times (L_2(\Gamma_K))^2.$$

Удаётся показать, что для седловой точки $v^* = u$ — решение задачи (1), $w^* = 0$ на Γ_K , $\lambda_1^* = -\sigma_n(u)$.

Для поиска седловой точки функционала $\hat{M}(v, w; \lambda_1, \lambda_2)$ можно использовать алгоритм, аналогичный алгоритму U-Step1, U-Step2. На шаге 1 алгоритма снимается ограничение вида « $v_n \leq 0$ на Γ_K » и, одновременно, задача минимизации недифференцируемого функционала $M(v, w; l_1^k, l_2^k)$ сводится к задаче минимизации дифференцируемого функционала

$$\hat{M}(v; \lambda_1^k, \lambda_2^k) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_P} T_i v_i d\Gamma +$$

$$+\frac{1}{2r}\int_{\Gamma_K}\left(\left((\lambda_1+rv_n)^+\right)^2-\lambda_1^2\right)d\Gamma+\int_{\Gamma_K}F(v\cdot\tau)d\Gamma,$$

где $F(v\cdot\tau)=\inf_w\{|v\cdot\tau-w|+\lambda_2^k w+\frac{1}{2}w^2\}$ — выпуклая, дифференцируемая функция скалярного аргумента $v\cdot\tau$.

Для реализации шага U-Step2 используется метод конечных элементов, погрешность которого согласовывается с δ_k .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986. 270 с.
- [2] Kikuchi N., Oden T. Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Philadelphia: SIAM, 1988. 495 p.
- [3] Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 251 с.
- [4] Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997. 339 с.
- [5] Антипин А. С. Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. М.: Вычислительный Центр РАН, 2002. 130 с.
- [6] Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
- [7] Вихтенко Э. М., Намм Р. В. Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения квазивариационного неравенства Синьорини // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1571–1579.
- [8] Намм Р. В., Сачков С. А. Решение квазивариационного неравенства Синьорини методом последовательных приближений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 5. С. 805–814.
- [9] Namm R. V., Vikhtenko E. M. Modified Lagrangian Functional for Solving the Signorini Problem with Friction // Advances in Mechanics Research. V. 1. Nova Science Publishers, New-York. 2010. Pp. 435–446.

Vikhtenko E. M., Namm R. V. *Modified Lagrangian functionals for solving of semicoercive contact problems with friction.* Two-dimensional contact problem in elasticity is solved by the method of successive approximations with modified Lagrangian functionals. In this paper the new algorithms of search the saddle points of modified Lagrangian functionals are constructed and developed.

УСЛОВИЯ БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСИЯ СФЕРЫ ИЗ МАТЕРИАЛА БЛЕЙТЦА И КО

Волокитин Г. И., Моисеев Д. В.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

В рамках модели нелинейно-упругого тела, упругие свойства которого заданы соотношением Блейтца и Ко, рассмотрена задача об устойчивости сферы под действием наружного гидростатического давления. Используется теория малых деформаций упругого тела, наложенных на конечную. Докритическое напряженно-деформированное состояние равновесия сферы предполагалось центрально-симметричным, смежное равновесное состояние — осесимметричным. Выведены уравнения нейтрального равновесия для нелинейно-упругих тел из материала Блейтца и Ко. Условия бифуркации равновесия приводят к задаче на собственные значения с нелинейным вхождением параметра. Для решения этой задачи используются численные методы. Получены значения верхнего критического давления для сфер различной относительной толщины с учетом разных модулей упругости. В зависимости от точности решения начальной задачи сравниваются некоторые варианты уравнений нейтрального равновесия. Это позволяет исследовать влияние физической и геометрической нелинейности на величину верхнего критического давления.

1. Начальная деформация полой сферы. Закон состояния задается выражением удельной потенциальной энергии деформации вида [1]

$$W = \frac{\mu\beta}{2} \left[I_1 + \frac{1}{\alpha}(I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right] + \frac{\mu}{2}(1 - \beta) \left[I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha}(I_3^{\alpha} - 1) - 3 \right]. \quad (1)$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — главные инварианты меры деформации Коши-Грина $\mathbf{G}$, α, β, μ — модули упругости. Модуль α выражается через постоянные Ляме и коэффициент Пуассона:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{\nu}{1 - 2\nu}$$

Трехконстантный закон (1) предложен в работах [2, 3] для описания упругих свойств некоторых сортов резины, требующих учета сжимаемости.

Закон состояния Фингера, конкретизированный с учетом (1), имеет вид:

$$\mathbf{T} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left({}^0_c \mathbf{F} - \frac{1}{c} \mathbf{F}^2 + \frac{-1}{c} \mathbf{E} \right), \quad (2)$$

где:

$${}^0_c = \frac{\mu\beta}{2} + \frac{\mu(1-\beta)}{2} \frac{I_1}{I_3}, \quad \frac{1}{c} = \frac{\mu(1-\beta)}{2} \frac{1}{I_3}, \quad \frac{-1}{c} = -\frac{\mu\beta}{2} I_3^{-\alpha} + \frac{\mu(1-\beta)}{2} \left(I_3^{\alpha} - \frac{I_2}{I_3} \right),$$

$\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\mathbf{F}$ — мера деформации Фингера.

Рассматривается радиально симметричная деформация полой сферы. С помощью сферических координат r, ϕ, λ (в недеформированном состоянии) и R, Φ, Λ (в актуальной конфигурации) деформация, которая возникает при нагружении внешней поверхности сферы гидростатическим давлением интенсивности p , определяется равенствами:

$$\mathbf{R} = R(r)\mathbf{e}_r, \quad \Phi = \phi, \quad \Lambda = \lambda, \quad (3)$$

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\lambda$ — базисные векторы сферической системы координат. Из (3) находятся выражения градиента деформации, меры деформации Фингера и главных инвариантов этой меры:

$$\begin{aligned} \overset{0}{\nabla} \mathbf{R} &= a\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + b(\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\lambda\mathbf{e}_\lambda), \quad \mathbf{F} = a^2\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + b^2(\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\lambda\mathbf{e}_\lambda), \\ I_1 &= a^2 + 2b^2, \quad I_2 = 2a^2b^2 + b^4, \quad I_3 = a^2b^4 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь введены обозначения: $a = \frac{dR}{dr}$, $b = \frac{R}{r}$, $\overset{0}{\nabla}$ — набла-оператор в метрике недеформированного тела.

Задача определения начального равновесного состояния приводит к одному обыкновенному дифференциальному уравнению и краевым условиям:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2a}{R}(\sigma_r - \sigma_\phi) = 0, \quad \sigma_r(r_0) = 0, \quad \sigma_r(r_1) = -p \quad (5)$$

где σ_r, σ_ϕ — физические компоненты тензора напряжений. r_0 — внутренний радиус сферы, r_1 — наружный. Согласно закону (1), эти компоненты принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \mu\beta(ab^{-2} - (ab^2)^{-1-2\alpha}) + \mu(1 - \beta)((ab^2)^{-1+2\alpha} - a^{-3}b^{-2}) \\ \sigma_\phi &= \sigma_r - (ab^{-2} - a^{-1})(\mu\beta + \mu(1 - \beta)a^{-2}b^{-2}) \end{aligned} \quad (6)$$

В частности, для материала Ноулса-Стернберга ($\beta = 0$, $\nu = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{2}$) из (5) получаем соотношения:

$$\frac{da}{dr} + \frac{2(a-b)}{3r}\left(\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^3}{b^3}\right) = 0 \quad (7)$$

$$1 - a^{-3}b^{-2} = \begin{cases} 0, & \text{если } r = r_0 \\ -\frac{p}{\mu}, & \text{если } r = r_1 \end{cases}$$

Краевая задача (7) допускает решение в аналитическом виде. Получено параметрическое решение этой задачи Ляме:

$$r(t) = r_0 \frac{t^{3/5}(t_0 - 1)^{1/3} \left(t_0^2 + t_0 + \frac{5}{2}\right)^{2/15}}{t_0^{3/5}(t - 1)^{1/3} \left(t^2 + t + \frac{5}{2}\right)^{2/15}} \exp \left[\frac{2}{15} \left(\arctan \frac{2t+1}{3} - \arctan \frac{2t_0+1}{3} \right) \right], \quad (8)$$

$$R(t) = \frac{1}{t_1^{3/5} \left(1 + \frac{p}{\mu}\right)^{1/5}} \frac{(t_1 - 1)^{1/3} \left(t_1^2 + t_1 + \frac{5}{2}\right)^{1/6}}{(t - 1)^{1/3} \left(t^2 + t + \frac{5}{2}\right)^{1/6}} \exp \left[\frac{1}{3} \left(\arctan \frac{2t+1}{3} - \arctan \frac{2t_1+1}{3} \right) \right].$$

Границы изменения параметра t задаются решением нелинейной системы для двух неизвестных, определяемой граничными условиями:

$$\frac{t_1^{3/5}(t_0 - 1)^{1/3} \left(t_0^2 + t_0 + \frac{5}{2}\right)^{2/15}}{t_0^{3/5}(t - 1)^{1/3} \left(t_1^2 + t_1 + \frac{5}{2}\right)^{2/15}} \exp \left[\frac{2}{15} \left(\arctan \frac{2t_1+1}{3} - \arctan \frac{2t_0+1}{3} \right) \right] = \frac{r_1}{r_0},$$

$$\frac{(t_0^2 + t_0 + \frac{5}{2})^{3/2}}{(t_1^2 + t_1 + \frac{5}{2})^{3/2}} \exp \left(\arctan \frac{2t_0+1}{3} - \arctan \frac{2t_1+1}{3} \right) = 1 + \frac{p}{\mu}.$$

Используя формулы (8), можно получить, изменяя параметр t от t_0 до t_1 , зависимость $R = R(r)$. Известны [4] другие параметрические формулы общего решения дифференциального уравнения задачи Ляме (7). Однако, в отличие от (8), в них не прояснен вопрос решения краевой задачи.

2. Уравнения нейтрального равновесия. Изучение бифуркации равновесия сферы предполагает рассмотрение условий равновесия в объеме и на поверхности для добавочной деформации. Вектор добавочного перемещения выбран в виде, допускающем осесимметричные возмущенные формы равновесия: $\mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, \phi)\mathbf{e}_r + \mathbf{w}(\mathbf{r}, \phi)\mathbf{e}_\phi$. Смежные формы равновесия сферы исследовались с помощью тензора Лурье [1], который в данной задаче имеет вид[5]:

$$\begin{aligned} \Theta = & (A_1 v_r' + A_2 \frac{2v + w_\phi' + w \cot \phi}{r})\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \\ & (B_1 v_r' + B_2 \frac{v + w_\phi'}{r} + B_3 \frac{v + w \cot \phi}{r})\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_\phi + (C_1 v_r' + C_2 \frac{v + w_\phi'}{r} + C_3 \frac{v + w \cot \phi}{r})\mathbf{e}_\lambda\mathbf{e}_\lambda + \\ & (D_1 w_\phi' + D_2 \frac{v_\phi' - w}{r})\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\phi + (F_1 w_\phi' + F_2 \frac{v_\phi' - w}{r})\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (9)$$

Применительно к материалу (1) закон состояния для тензора Θ получается в виде:

$$\begin{aligned} \Theta = & 2\mu(1 - \beta)I_3^{-\frac{3}{2}}(((\alpha(I_3^{1+\alpha} + \nu_1 I_3^{1-\alpha}) + I_2)\mathbf{E} - I_1\mathbf{F} + \mathbf{F}^2)(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \\ & + \frac{1}{2}(\nu_1 I_3^{1-\alpha} - I_3^{1+\alpha} + I_2)\nabla \mathbf{w}^\top + \frac{1}{2}((\nu_1 I_3 + I_1)\mathbf{F} - \mathbf{F}^2) \cdot \nabla \mathbf{w} - \\ & - (I_1\mathbf{F} \cdot \cdot \varepsilon - \mathbf{F}^2 \cdot \cdot \varepsilon)\mathbf{E} + \mathbf{F} \cdot \cdot \varepsilon \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь ∇ — набла-оператор в метрике деформированного тела, ε — линейный тензор добавочной деформации, $\nu_1 = \frac{\beta}{1-\beta}$. Компоненты тензора Лурье — линейные дифференциальные операторы над координатами вектора добавочного перемещения. Используя (9) и (10), были получены формулы коэффициентов этих операторов. Приведем выражение одного из них:

$$A_1 = \frac{\mu(1 - \beta)}{a^4 b^6}((2\alpha + 1)\nu_1 I_3^{1-\alpha} + (2\alpha - 1)I_3^{1+\alpha} + \nu_1 I_3 + 3b^4).$$

Уравнения нейтрального равновесия в объеме [1] $\nabla \cdot \Theta = 0$ приводят к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{R}{a} \frac{\partial \Theta_{rr}}{\partial r} + 2\Theta_{rr} - \Theta_{\phi\phi} - \Theta_{\lambda\lambda} + \frac{\partial \Theta_{\phi r}}{\partial \phi} + \Theta_{\phi r} \cot \phi = 0 \\ \frac{R}{a} \frac{\partial \Theta_{r\phi}}{\partial r} + 2\Theta_{r\phi} + \Theta_{\phi r} + \frac{\partial \Theta_{\phi\phi}}{\partial \phi} + (\Theta_{\phi\phi} - \Theta_{\lambda\lambda}) \cot \phi = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения нейтрального равновесия на поверхности, которые в данной задаче определяются соотношением $\mathbf{N} \cdot \Theta = -p(\text{tr } \varepsilon \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{w}^\top)$, задают краевые условия: при $r = r_0$, $r = r_1$

$$\begin{cases} A_1 v_r' + (\frac{A_2}{r} + \frac{q}{R})(2v + w_\phi' + w \cot \phi) = 0 \\ D_1 w_r' + (\frac{D_2}{r} - \frac{q}{R})(v_\phi' - w) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

В этих соотношениях $q = 0$, если $r = r_0$ и $q = p$, если $r = r_1$.

Решение краевой задачи (11), (12) разыскиваем в виде

$$\begin{cases} v = X_k(r)P_k(\cos \phi) \\ w = Y_k(r)\frac{dP_k(\cos \phi)}{d(\cos \phi)} \sin \phi, \end{cases} \quad (13)$$

где $P_k(\cos \phi)$ — многочлены Лежандра k -ой степени. Учитывая известные равенства, связывающие функции Лежандра, удастся разделить переменные в уравнениях системы (11) и граничных условиях. В результате приходим к краевой задаче для системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} A_1 X_k'' + (A_1' + \frac{2}{r}A_2 + \frac{2a}{R}(A_1 - B_1))X_k' + (k^2 + k)(\frac{1}{r}A_2 + \frac{a}{R}F_1)Y_k' + \\ + (2(\frac{A_2}{r})' + \frac{2a}{rR}(2A_2 - B_2 - B_3) - (k^2 + k)\frac{a}{rR}F_2)X_k + (k^2 + \\ + k)((\frac{A_2}{r})' + \frac{a}{rR}(2A_2 - B_2 - B_3 - F_2))Y_k = 0, \\ D_1 Y_k'' + (D_1' - \frac{1}{r}D_2 + \frac{a}{R}(2D_1 + F_1))Y_k' - (\frac{1}{r}D_2 + \frac{a}{R}B_1)X_k' - \\ - ((\frac{D_2}{r})' + \frac{a}{rR}(B_2 + B_3 + 2D_2 + F_2))X_k - \\ - ((\frac{D_2}{r})' + \frac{a}{rR}((k^2 + k - 1)B_2 + B_3 + 2D_2 + F_2))Y_k = 0 \end{cases} \quad (14)$$

При $r = r_0, r_1$:

$$\begin{cases} A_1 X_k' + \frac{1}{R}(bA_2 + q)(2X_k + (k^2 + k)Y_k) = 0 \\ -D_1 Y_k' + \frac{1}{R}(bD_2 - q)(X_k + Y_k) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Однородная система (14) и краевые условия (15) составляют условия нейтрального равновесия сферы. При бифуркационных значениях параметра p возможны нетривиальные решения, они соответствуют возмущенным равновесным формам. Критическое давление находим как наименьшее бифуркационное p , определяемое надлежащим выбором числа k узлов формы бифуркации равновесия. Отметим, что задача на собственные значения для определения бифуркационной нагрузки является нелинейной, так как искомый параметр входит в коэффициенты задачи через функции $R(r), R'(r)$. Оператор, определяемый системой и краевыми условиями — линейный. Для нахождения бифуркационных значений нагрузки использовался численный метод, предложенный в [5]. Расчеты проведены для безразмерных величин: относительной толщины сферы $\varepsilon = \frac{r_1 - r_0}{r_0}$ и параметра p_{kp} : $p = 2\mu p_{kp}\varepsilon^2$. В численных расчетах рассматривались разные варианты уравнений нейтрального равновесия: начальные перемещения рассчитывались по формулам линейной теории упругости и как решение нелинейной задачи Ляме (5). В таблице представлены критические значения параметра нагрузки p_{kp} и отвечающие им значения параметра волнообразования k для разных относительных толщин ε . Модуль упругости α принимался равным 0.5, что соответствует $\nu=0.25$.

ε	0.01			0.05			0.20			0.33		
k	16			8			4			3		
β	0.00	0.42	1.00	0.00	0.42	1.00	0.00	0.42	1.00	0.00	0.42	1.00
p_{kp}	1.24	1.23	1.22	1.30	1.26	1.23	1.78	1.52	1.26	2.24	1.65	1.19

Численный эксперимент позволяет сделать некоторые выводы о величине верхнего критического давления.

1. Для тонкостенных сфер p_{kr} не отличается от значений определяемых классической формулой Цолли–Лейбензона.

2. Учет нелинейности при решении задачи расчета начальной деформации практически не сказывается на результате для тонких оболочек. Наблюдается уменьшение критического параметра p_{kr} с увеличением ε .

3. Константа упругости β слабо влияет как на величину начального перемещения, так и на критическую нагрузку. Принимая во внимание результаты, приведенные в [5] для материала Мурнагана ($\nu = 0.272$, $\alpha = 0.587$) отметим более сильное влияние модуля α .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [2] Blatz P. J., Ko W. L. Application of finite elasticity theory to deformation of rubbery materials // Trans. Soc. Rheol. 1962, V. 6. Pp. 223–251.
- [3] Ko W. L. Application of finite elastic theory to the behavior of rubber-like materials. Thesis in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy. California Institute of Technology, 1963.
- [4] Fu Y. B., Ogden R. W. Nonlinear elasticity: theory and applications. Cambridge University Press, 2001.
- [5] Волокитин Г. И. Влияние физической и геометрической нелинейности на величину верхнего критического давления при выпучивании полый сферы // ПММ, Т. 42, 1978, С. 504–510.

Volokitin G. I., Moiseev D. V. *Bifurcation conditions of stability of sphere, made of Blaitz and Ko material.* In this article we examine a problem of stability of sphere under external hydrostatic pressure, which has a non-linear elastic membrane; its elastic properties are set with a correlation of Blaitz and Ko. We use a theory of low deformation of elastic solid, put on terminal one. Subcritical stressedly-deformed condition of sphere is considered to be centrosymmetrical, related stability condition — axisymmetric. New equations of neutral stability for non-linear elastic solids, made of Blaitz and Ko material, were concluded. Bifurcation conditions of stability lead to an eigenvalue problem with non-linear entry of parameter. Numerical procedures are used to get a solution of this problem. Values of top-critical pressure for spheres with different relative thickness and various coefficients of elasticity were derived. We compare different variants of equations of neutral stability, depending on the solution accuracy of the basic problem. It allows us to analyze the dependence of physical and geometrical nonlinearity on the value of top-critical pressure.

СЕЛЕКЦИЯ УСТОЙЧИВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Говорухин В. Н.^{*}, Шевченко И. В.^{*,**}

^{*}*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

^{**}*Technische Universität München, Germany*

С помощью вычислительных экспериментов изучена селекция стационарных режимов при малых надкритичностях в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере при постоянно поддерживаемом линейном профиле температуры на границе. Показано, что реализация режимов сильно зависит от начального состояния жидкости: окрестности только двух режимов реализуются из близких к состоянию покоя начальных данных; окрестность также двух, но других режимов, реализуются при больших начальных температурах; при промежуточных ситуациях возможна реализация любого из бесконечного числа стационарных режимов.

Рассматриваемая задача обладает косимметрией [1], и, как следствие, при подогреве жидкости в ней происходят специфические бифуркационные явления и динамика. В результате потери устойчивости состоянием покоя возникает однопараметрическое семейство стационарных режимов [2]. При малых надкритичностях все стационарные режимы семейства нейтрально устойчивы в касательном к семейству направлении, и асимптотически устойчивы в трансверсальных направлениях, а семейство является глобально устойчивым [1, 3]. При этом все стационарные режимы семейства индивидуальны — у каждого свой спектр устойчивости, различные физические характеристики. В [4, 5] показано, что разница в физических характеристиках режимов особенно существенна в случае вытянутого по вертикали контейнера. Сосуществуют режимы от проводящих тепло с нижней границы к верхней, до режимов запирающих теплопередачу внизу или наверху.

При сосуществовании нескольких устойчивых стационарных режимов возникают естественные и важные вопросы селекции: какой из стационарных режимов будет реализовываться в экспериментах; как этот процесс зависит от начального состояния жидкости; какими факторами определяется вероятность реализации режимов; возможно ли управления селекцией. Изучение механизмов селекции в косимметричных системах началось в [6]. Для трехмерной, являющейся системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений, был проведен ряд компьютерных экспериментов по селекции равновесий в симметричном и косимметричном случаях. Оказалось, что в трехмерной абстрактной модели фильтрационной конвекции из достаточно удаленных от цикла равновесий начальных точек реализуется окрестность единственного равновесия, а из близких к нулевому равновесию точек равновероятна реализация двух режимов. При удаленных начальных данных динамика установления разбивается на два этапа: выход траектории на инвариантное подпространство, и стремление по нему к одной из точек семейства. В [7] изучалась реализация режимов в косимметричном случае при возмущении краевых условий на начальном промежутке времени, численно были построены

функции распределения реализации режимов при таких возмущениях. Можно предположить, что и в случае полных уравнений может иметь место похожий на описанный в [6] механизм реализации режимов однопараметрического семейства.

1. Исходные уравнения и их аппроксимация. Рассмотрим прямоугольный контейнер $D = [0, a] \times [0, b]$ заполненный пористой средой и насыщенный жидкостью. Уравнения, описывающие гравитационную конвекцию жидкости в D в терминах функции тока $\psi(t, x, y)$ и отклонения $\theta(t, x, y)$ температуры от равновесного по вертикали профиля, имеют вид [1, 2]:

$$\begin{cases} \Delta\psi = \theta_x, \\ \theta_t + \psi_y\theta_x - \psi_x\theta_y = \Delta\theta + \lambda\psi_x. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь (x, y) — декартовы координаты на плоскости, t — время, λ — фильтрационное число Рэлея. На границе D заданы условия, соответствующие постоянному линейному температурному профилю на границе и ее непроницаемости:

$$\theta|_{\partial D} = \psi|_{\partial D} = 0. \quad (2)$$

Известно [1, 3], что задача (1)–(2) обладает косимметрией, диссипативна и при малых значениях параметра λ глобально устойчиво состояние покоя. Выражение для критических значений устойчивости состояния покоя имеет вид [3]:

$$\lambda_{m,n} = 4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Все критические числа (3), по крайней мере, двукратны, и в этом случае соответствующие собственные функции, являются линейной комбинацией функций

$$\begin{aligned} u_{m,n} &= \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_{m,n}}x\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\ v_{m,n} &= \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_{m,n}}x\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Каждому переходу параметра λ через значение $\lambda_{m,n}$ соответствует бифуркация рождения однопараметрического семейства стационарных режимов. В [1] показано, что первое критическое значение $\lambda_{1,1}$ всегда двукратно и при $\lambda = \lambda_{1,1}$ от состояния покоя ответвляется цикл устойчивых стационарных режимов. Все режимы семейства при λ близких к $\lambda_{1,1}$ нейтрально устойчивы вдоль цикла и асимптотически устойчивы в трансверсальных к нему направлениях, их спектр зависит от координат равновесия. Семейство при этом является глобально устойчивым и имеет форму близкую к окружности на плоскости $(u_{1,1}, v_{1,1})$.

Система уравнений (1) имеет две дискретные симметрии

$$x \rightarrow -x, y \rightarrow y, \psi \rightarrow -\psi, \theta \rightarrow \theta, \quad (5)$$

$$x \rightarrow x, y \rightarrow -y, \psi \rightarrow -\psi, \theta \rightarrow -\theta. \quad (6)$$

Наличие дискретных симметрий (5), (6) приводит к существованию в фазовом пространстве системы инвариантных подпространств, что может оказывать сильное влияние на динамику системы и на механизмы селекции стационарных режимов.

Для численного решения задачи (1)–(2) будем использовать метод Галеркина. Применение метода к рассматриваемой задаче обсуждалось в [4, 5]. Решение задачи разыскивается в виде

$$\psi = \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} \psi_{i,j}(t) \phi_{i,j}(x, y), \quad \theta = \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} \theta_{i,j}(t) \phi_{i,j}(x, y). \quad (7)$$

В качестве функций $\phi_{i,j}(x, y)$ будем использовать функции (4). В этом случае, критические значения $\lambda_{m,n}$ вычисляются точно при численной аппроксимации. Подстановка (7) в (1) и операции проектирования приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $N = nx \times ny$, относительно функций $\theta_{i,j}$. Коэффициенты $\psi_{i,j}$ однозначно выражаются через неизвестные $\theta_{i,j}$ из аппроксимации первого уравнения системы (1).

2. Постановка численных экспериментов. Анализ селекции конвективных режимов, принадлежащих однопараметрическому семейству, проводился для случая, когда все семейство является глобально устойчивым, то есть при $\lambda > \lambda_{1,1}$ близком к первому критическому $\lambda_{1,1}$. При таких значениях параметра галеркинское приближение (7) хорошо аппроксимирует исходную задачу (1)–(2) даже при небольших n_x и n_y , в частности однопараметрическое семейство стационарных режимов [5]. Аналитическое доказательство сохранения глобальной устойчивости семейства равновесий аппроксимацией затруднительно, но в результате многочисленных численных экспериментов при всех рассмотренных начальных данных со временем устанавливается одно из равновесий семейства.

Численные эксперименты состояли в многократном решении нестационарной начально-краевой задачи (1)–(2) на установление для различных геометрий контейнера D при разных начальных распределениях температуры, удовлетворяющих граничным условиям. При пространственной аппроксимации исходной задачи в разложении (7) использовались базисные функции вида (4), рассматривались приближения при $N = 40$.

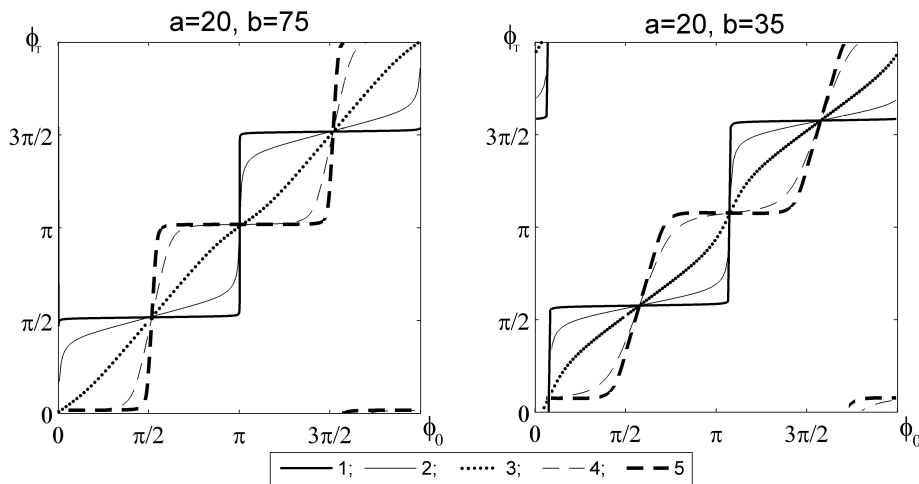


Рис. 1. Графики $\phi_T(\phi_0)$ при различных R : 1–5, $R = 0.0001, 0.01, 0.1, 1, 10$. Даны графики для двух размеров контейнера.

Естественно предположить, что отбор стационарных режимов зависит от вида начального распределения и его интенсивности. При используемых аппроксимациях и малых надкритичностях по параметру λ семейство стационарных режимов имеет близкую к окружности форму на плоскости $(u_{1,1}, v_{1,1})$. Поэтому удобно рассматривать начальные возмущения вида

$$u_{1,1} = R \cos \phi, \quad v_{1,1} = R \sin \phi, \quad (8)$$

где ϕ — полярный угол, а R — полярный радиус на плоскости $(u_{1,1}, v_{1,1})$. Изменяя R можно сформировать начальные распределения температуры вблизи состояния покоя ($R \ll 1$), вблизи семейства стационарных режимов, или соответствующие высокому нагреву в начальный момент времени ($R \gg 1$). При каждом значении R можно рассмотреть функцию $\phi_T(\phi_0)$, где ϕ_0 — значение ϕ соответствующего начальному распределению, ϕ_T — значение ϕ соответствующее установившемуся в результате расчета режима. Для установившихся режимов интересно рассмотреть графики локальной теплопередачи на нижней и верхней границах контейнера

$$Nu_l^0(x) = \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=0} \quad Nu_l^b(x) = \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_{y=b}.$$

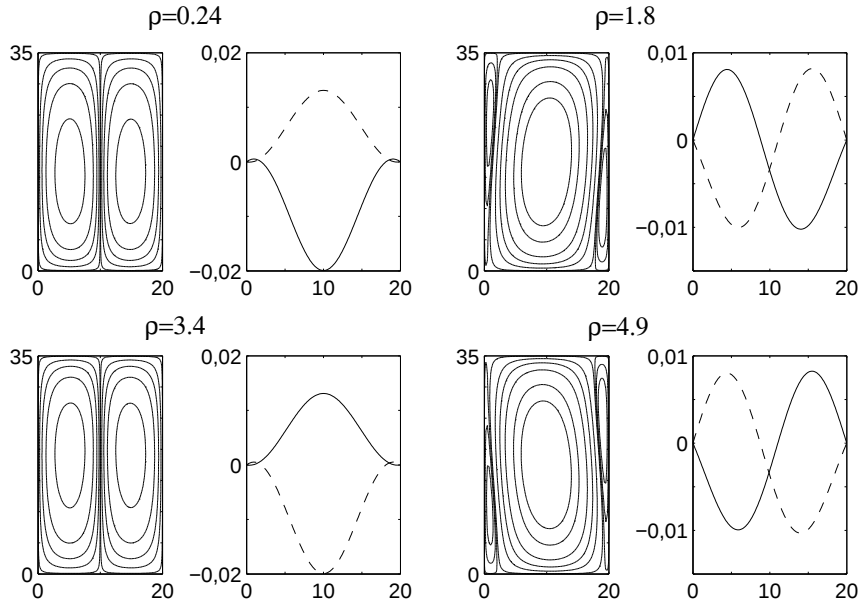


Рис. 2. Линии тока и графики $Nu_l^0(x)$ и $Nu_l^b(x)$ реализующихся при $R = 0.0001, 10$ режимов для $a = 20, b = 35$.

3. Результаты численных экспериментов. Здесь представлены результаты вычислительных экспериментов для двух случаев: $a = 20, b = 75$ и $a = 20, b = 35$. Для каждого из случаев были численно построены функции $\phi_T(\phi_0)$ для $R = 0.0001, 0.01, 0.1, 1, 10$. Результаты представлены на рисунке 1. Видно, что в обоих случаях при $R = 0.0001$ и $R = 10$ функция $\phi_T(\phi_0)$ имеет две ступеньки, но при разных ϕ_T . Это соответствует реализации двух, но различных при разных R , конвективных режимов. При промежуточных значениях R функция $\phi_T(\phi_0)$ более

гладкая, а при $R = 0.1$ близка к линейной. На рис. 2 представлены физические характеристики конвективных режимов для случая $a = 20$, $b = 35$. Видно, что режимы достаточно сильно отличаются.

Вычислительные эксперименты показали, что при начальных данных близких к состоянию покоя в результате установления реализуются окрестности двух режимов семейства. Окрестности двух других режимов реализуются при больших начальных возмущениях состояния покоя. При этом, физические характеристики реализующихся режимов могут сильно отличаться. В промежуточных ситуациях возможна реализация любого из бесконечного числа стационарных режимов. Можно предположить, что и в физических экспериментах при малых надкритичностях реализация стационарных режимов будет схожа с полученной.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00708).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Математические заметки. 1991. Т. 49. вып.5. С. 142–148.
- [2] Любимов Д. В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
- [3] Yudovich V. I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5. № 2. Pp. 402–411.
- [4] Говорухин В. Н. Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 53–62.
- [5] Говорухин В. Н., Шевченко И. В. Численное исследование второго перехода в задаче плоской фильтрационной конвекции // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 115–128.
- [6] Govorukhin V. N. Yudovich V. I. Bifurcations and selection of equilibria in a simple cosymmetric model of filtrational convection // Chaos. 1999. V. 9. № 2. Pp. 403–412.
- [7] Tsybulin V. G., Karasözen B., Ergenç T. Selection of steady states in planar Darcy convection // Physics Letters A. 2006. Vol. 356. Pp. 189–194.

Govorukhin V. N., Shevchenko I. V. *The selection of stable steady state regimes in filtrational convection problem.* By means of computer experiments selection of steady state regimes in planar filtrational convection problem was studied. It is shown that realization of regimes strongly depends on an initial condition of a fluid: neighborhood only of two regimes are realized from close to zero initial data; a neighborhood also two, but other regimes, are realized at the high initial temperatures; at intermediate situations realization of any of infinite number of stationary regimes is possible.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Горбашова Е. А.^{*}, Углич П. С.^{**}

^{*} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

^{**} Южный математический институт, Владикавказ

Рассмотрены прямая и обратная задачи об антиплоских вынужденных колебаниях прямоугольного бруса, плотность и модуль сдвига которого являются функциями двух координат. Для решения прямой задачи использован метод конечных разностей и задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена методом матричной прогонки. Также рассмотрена обратная задача об определении неизвестных законов распределения механических характеристик по данным о поле перемещений при разных частотах и разных точках зондирования.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу об установившихся вынужденных колебаниях неоднородного упругого прямоугольника.

Предположим, что поле перемещений имеет вид:

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u(x_1, x_2)e^{-i\omega t},$$

где ω — частота колебаний.

Тогда уравнение колебаний приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \rho \omega^2 u = 0, \quad (1)$$

где $\mu = \mu(x_1, x_2)$ — модуль сдвига, $\rho = \rho(x_1, x_2)$ — плотность материала.

Пусть левая сторона прямоугольника жёстко закреплена

$$u|_{x_1=0} = 0, \quad (2)$$

а верхняя и нижняя стороны прямоугольника свободны от напряжений

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=\pm d} = 0. \quad (3)$$

Будем считать, что колебания вызываются касательной нагрузкой, распределённой по правому краю прямоугольника:

$$\mu \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=b} = p(x_2). \quad (4)$$

2. Решение прямой задачи. Преобразуем формулы (1)–(4) с помощью метода конечных разностей [2]. Проведём разбиение прямоугольника на равномерную сетку из $(N + 1) * (M + 1)$ узлов. Для этого разобьём отрезок $[0, b]$ на N частей,

а отрезок $[-d, d]$ — на M частей. Шаг разбиения по оси x_1 обозначим $h_1 = b/N$, по оси x_2 — $h_y = 2d/M$.

Примем следующие приближённые выражения для производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \approx \\ &\approx \frac{1}{4h_x^2} (\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}) (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{\mu_{i,j}}{h_x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \approx \\ &\approx \frac{1}{4h_y^2} (\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j-1}) (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \frac{\mu_{i,j}}{h_y^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=\pm d} = \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h_y} = \frac{u_{i,M+1} - u_{i,M}}{h_y} = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=b} = \frac{u_{N+1,j} - u_{N,j}}{h_x} = \frac{p_j}{\mu_{N+1,j}}, \quad 0 \leq j \leq M+1 \quad (10)$$

В последних формулах

$$\mu_{i,j} = \mu(x_1^i, x_2^j), \quad \rho_{i,j} = \rho(x_1^i, x_2^j), \quad u_{i,j} = u(x_1^i, x_2^j), \quad x_1^i = h_x i, \quad x_2^j = -d + h_y j.$$

Подставляя (5)–(10) в краевую задачу (1)–(4), получаем систему линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена методом матричной прогонки [2].

3. Численные результаты решения прямой задачи. Произведён ряд расчетов решения прямой задачи. Для того, чтобы убедиться в их достоверности, произведено сравнение с результатами, полученными в конечно-элементном пакете FlexPDE, а также с известными аналитическими результатами в одномерном случае. Разность между результатами, полученными методом матричной прогонки и методом конечных элементов, возрастает с увеличением частоты и в приведенных примерах не превышает 10%.

Далее представлены результаты решения прямой задачи в случае $b = 1$ м, $d = 0,5$ м, $N = M = 16$. Плотность считается постоянной и равной $\rho = 7800$ кг/м³. На рис. 1, 2 изображены результаты расчета амплитуды перемещения $u(x_1, x_2)$ при помощи метода матричной прогонки. Слева на рисунках 1, 2 изображены графики функции $u(x_1, x_2)$, где более темные цвета означают меньшие значения, справа — графики функции $u(x_1, x_2)$ на нижней поверхности прямоугольного бруса. Сплошная линия означает решение, найденное методом матричной прогонки, точки — решение, найденное при помощи пакета FlexPDE.

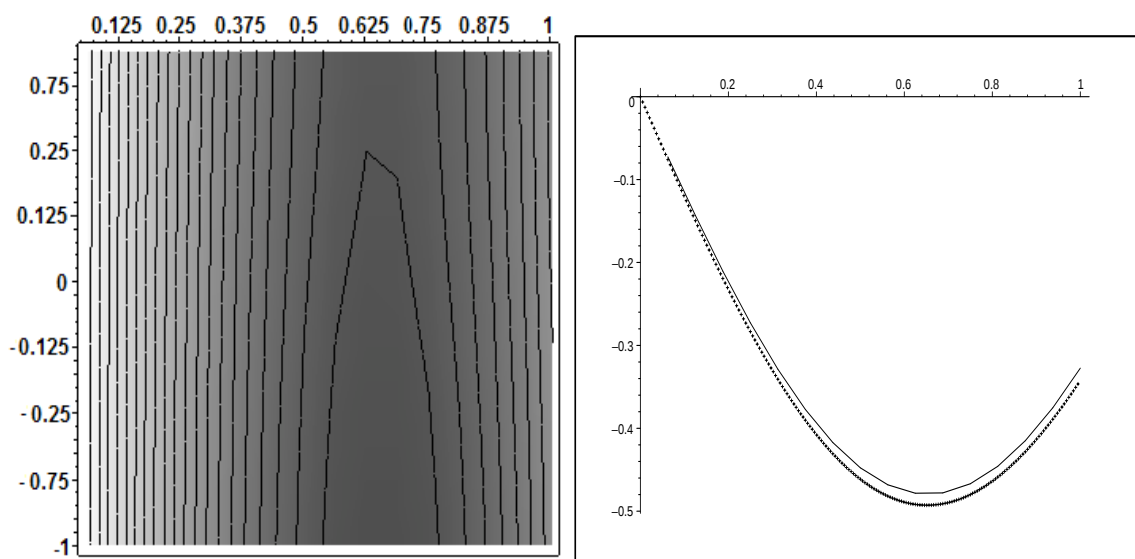


Рис. 1. Результаты решения прямой задачи в случае $\omega = 10000$ Гц, $\mu = \mu^0(1 + 0,1x_1)$, $\mu = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па, нагрузка $p(x_2) = \mu^0$.

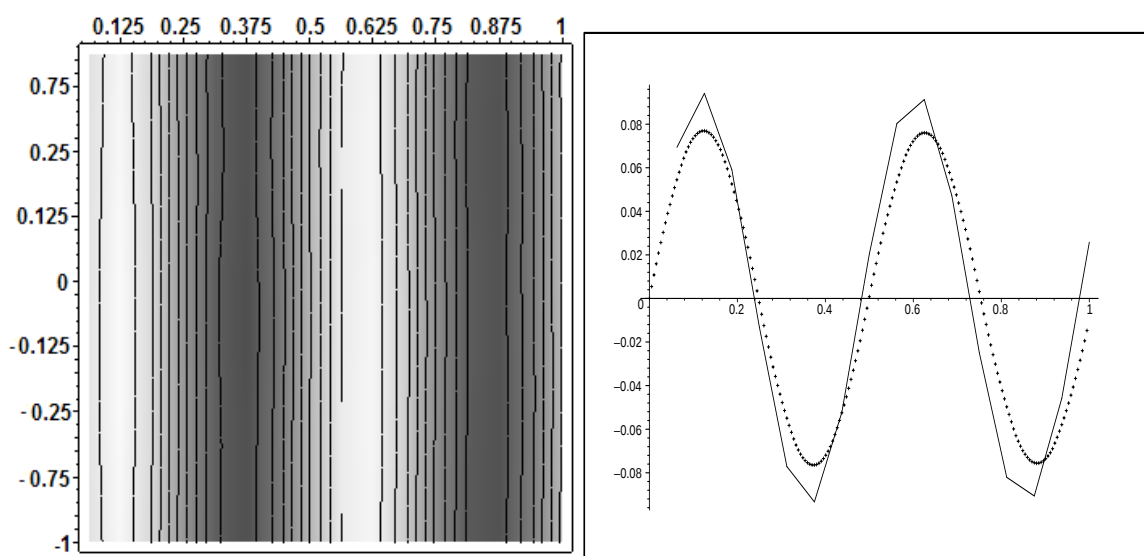


Рис. 2. Результаты решения прямой задачи в случае $\omega = 50000$ Гц, $\mu = \mu^0[1 + 0,1(x_1 - x_1x_2)]$, $\mu = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па, нагрузка $p(x_2) = \mu^0$.

Кроме того, произведено сравнение с аналитическим результатом в случае $\omega = 0$, $\mu = \text{const} = \mu^0$, $p(x_2) = \text{const} = p_0$. В этом случае задача (1)–(4) имеет очевидное аналитическое решение $u(x_1, x_2) = p_0x_1/\mu^0$. Совпадение результатов оказалось полным.

Далее на рис. 3 представлена амплитудно-частотная характеристика в случае двумерной зависимости вида $\mu = \mu^0[1 + \eta \sin(\pi x_1/b) \cos(\pi x_2/d)]$.

3. Обратная задача. Рассмотрим обратную задачу по определению модуля сдвига. Предположим, что нам известна информация о перемещениях на левой

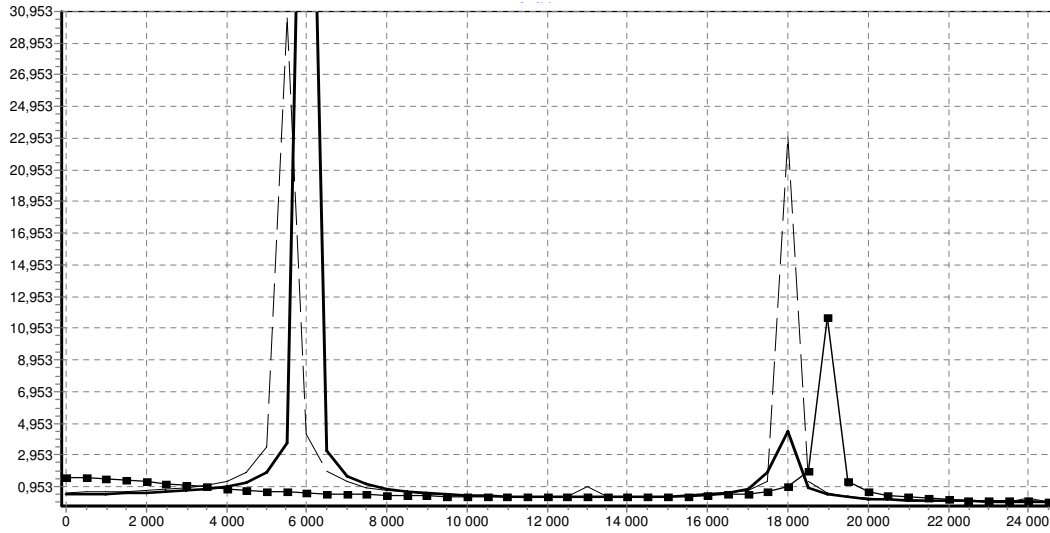


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика. Сплошная линия — АЧХ при $\eta = 0$, пунктир — при $\eta = 0,1$, квадраты — при $\eta = 1$.

стороне прямоугольника и требуется установить характер распределения механических параметров μ или ρ . В работе [3] решение задачи сведено к решению итерационной последовательности интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно поправок, которое в случае известной плотности принимает вид:

$$\int_S \mu^{(i+1)} \left[\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_2} \right)^2 \right] dS = \int_{l_2} p(f - u^{(i)}) dl_x \quad (11)$$

Выберем начальное приближение $\mu^{(0)}$. С помощью метода конечных разностей строим поле перемещений $u^{(0)}$ при $\mu = \mu^{(0)}$. Подставляя $u^{(0)}$ в уравнение (11) и решая его, находим поправку $\mu^{(1)}$. Затем решаем прямую задачу при $\mu = \mu^{(0)} + \mu^{(1)}$. Решаем прямую задачу и строим следующее уравнение для отыскания поправки к модулю сдвига μ . Продолжаем выполнять эти действия, на каждом шаге прибавляя к модулю сдвига очередную поправку $\mu^{(i)}$, пока очередная поправка не станет меньше заданной точности.

Далее представлены результаты решения обратной задачи. Для решения уравнения (11) производные были заменены разностями по формулам (5)–(6).

При решении обратной задачи нагрузка считалась сосредоточенной в N_1 точках ξ_i , расположенных на отрезке $[-d, d]$, решение прямой задачи происходило на M_1 частотах, расположенных на отрезке, не содержащем собственных частот. В приведённых ниже примерах $N = M = N_1 = M_1 = 16$. Итерационный процесс останавливался, когда наибольшее по модулю значение очередной поправки не станет меньше $\varepsilon = 10^{-4}$ или количество итераций не станет больше семи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

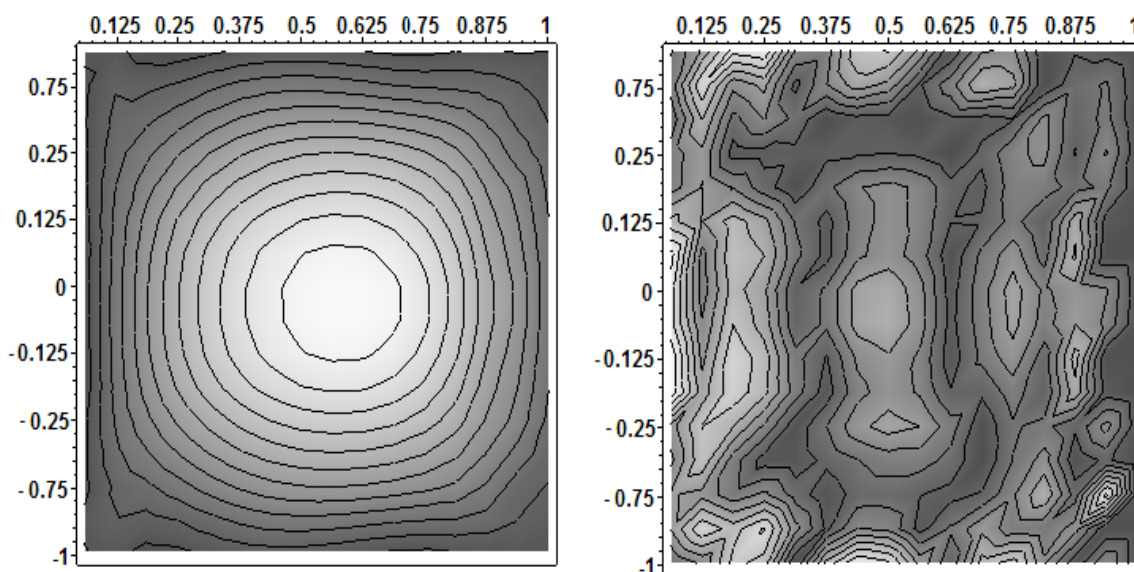


Рис. 4. Результаты решения обратной задачи в случае $\mu = \mu^0 \left(1 + 0,1 \sin \frac{\pi x_1}{b} \cos \frac{\pi x_2}{d}\right)$, $\mu = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па, $\omega \in [6250, 17750]$, слева — решение обратной задачи, справа — погрешность между точным и найденным решением, наибольшая погрешность — 0,436%, достигнута за 5 итераций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
- [2] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Бином, 2004. 636 с.
- [3] Ватульян А. О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Доклады РАН. 2005. Т. 405 № 3. С. 343–345.

Gorbashova E. A., Ouglich P. S. *On the inverse problem solution for two-dimensional domain.* Both direct and inverse problems for antiplane enforced vibrations of the elastic rectangular bar are considered. Shear modulus and density of the considered body depend on both coordinates. For the direct problem solving, the finite differences method is used. It reduces the direct problem to a linear equations system, which can be solved using the modified tridiagonal matrix algorithm. The inverse problem of material properties definition using displacement field data is also considered and reduced to the iterative solution of the integral equations sequence.

НЕОСЕССИМЕТРИЧНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВОЛН ЛЭМБА КРУГОВЫМ ПЬЕЗОАКТУАТОРОМ

Голуб М. В.^{*}, Молл Й.^{**}, Глушкова Н. В.^{*},
Глушков Е. В.^{*}, Фритцен К.-П.^{**}

^{}Кубанский государственный университет, Краснодар*

*^{**}Университет г. Зиген*

Для получения информации о состоянии конструкций и структур в современных системах мониторинга широко используются волны Лэмба. В состав таких систем часто входят пьезоактивные сенсоры, устанавливаемые на конструкцию или внедряемые в нее. Для получения точных сведений с помощью такой системы необходимо учитывать особенности возбуждения упругих волн пьезоактуаторами. Волновое поле, излучаемое актуатором, на практике зачастую имеет неосесимметричный вид и зависит от частоты. Теоретически и экспериментально изучается эффект неосесимметричного излучения на примере кругового актуатора, приклеенного к поверхности плоской пластины, дается интерпретация полученных результатов.

1. Введение. В последние годы возможным также стало создание разного рода малогабаритных, легких и недорогих устройств (волоконные оптические сенсоры, пьезоактивные элементы), позволяющих в режиме реального времени измерять различные физико-механические параметры структур, необходимые для выявления наличия в них повреждений. Все это привело к возникновению целого направления, занимающегося созданием систем мониторинга состояния конструкций и структур или в англоязычной литературе Structural Health Monitoring [1]. В основе таких систем мониторинга лежит использование динамических импульсов или упругих волн, возбуждаемых актуаторами, которые распространяясь в структуре улавливаются сенсорами. Следовательно, важно иметь диаграммы направленности для актуатора, чтобы повысить вероятность обнаружения дефектов. В настоящей работе изучается динамическое поведение пьезоактивного слоистого актуатора (piezoelectric wafer active sensor). Актуаторы такого типа широко применяются на практике и имеется ряд работ, в которых рассматривалось их поведение, например [2, 3]. Так, в [2] было обнаружено, что круговой пьезоактуатор имеет существенно несимметричную диаграмму излучения. Для построения математической модели используется интегральный подход и классическая замена воздействия актуатора набором точечных сил (pin-force model) [4].

2. Эксперимент. Типичный актуатор, используемый на практике для задач мониторинга и исследуемый в настоящей работе, приведен на рисунке 1. Он состоит из трех слоев, средний — пьезоэлектрик, два других — металлические, при этом нижний слой загнут наверх. Такая конфигурация удобная для производства и установки актуатора, но ведет к сложной волновой картине при его действии и требует учитывать ориентацию актуатора. На актуатор, приклеенный на поверхности $z = 0$ алюминиевой пластины, подается модулированный окном Ханна сигнал

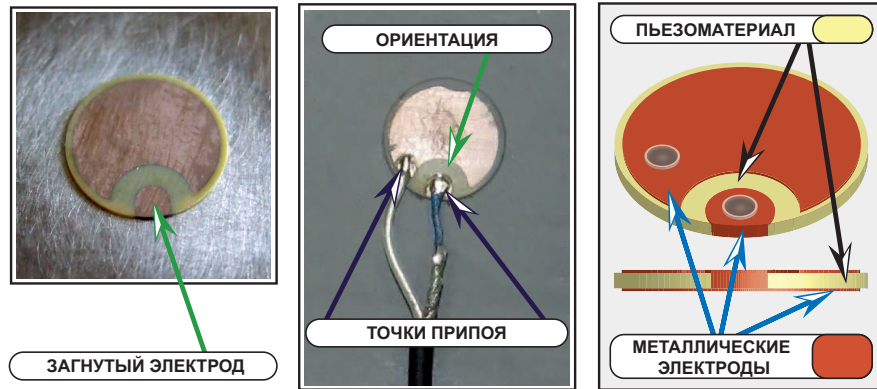


Рис. 1. Конструкция актуатора: геометрия, ориентация относительно электродов и точек припоя.

из N_c циклов синуса с центральной частотой f_c

$$p(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_c t) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi f_c t}{N_c}\right) \right), \quad 0 < t < \frac{N_c}{f_c}.$$

Скорости колебаний ортогональные плоскости образца $\dot{u}_z(x, y, -H, t)$ измеряются лазерным виброметром на поверхности $z = -H$ противоположной месту размещения актуатора. При проведении экспериментов было установлено, что положение точек припоя не влияет на излучаемое поле, поэтому их положение далее исключено из рассмотрения. Подробное описание экспериментальной установки дано в [5].

3. Математическая модель. Для моделирования волновых полей возбуждаемых актуатором в пластине использовались интегральные представления для свободного слоя с заданной поверхностной нагрузкой [6]. Вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнениям Ламе, а поверхность слоя вплоть до момента приложения нагрузки $t = 0$ предполагается свободной от напряжений $\boldsymbol{\tau}(x, y, 0, t) = \mathbf{q}(x, y)p(t)$, вызванной действием актуатора на поверхности слоя $z = 0$. Центр актуатора предполагается расположенным в центре декартовой системы координат (x, y, z) , при этом загнутый электрод полагается повернутым на угол θ относительно оси Ox (ориентация). Нижняя поверхность свободна от напряжений $\boldsymbol{\tau}(x, y, -H, t) = 0$.

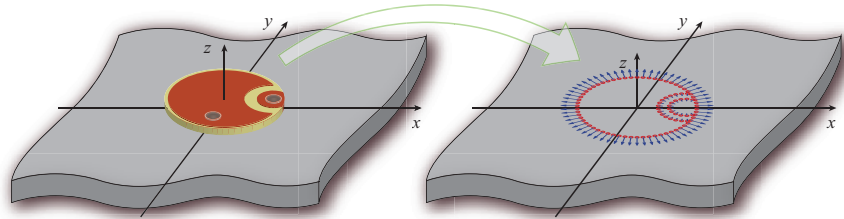


Рис. 2. Математическая модель предполагает замену воздействия актуатора точечными нагрузками.

Решение нестационарной задачи $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ может быть представлено как преобразование Фурье от гармонического решения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$. Последнее в свою очередь имеет интегральное представление через преобразование Фурье $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ от нагрузки $\mathbf{q}(\mathbf{x}, y)$ и Фурье-символ матрицы Грина $K(\alpha_1, \alpha_2, z, \omega)$, см. подробнее [6]. Воздействие актуатора может быть заменено действием сосредоточенных сил, математически описываемыми дельта-функциями Дирака δ . Таким образом, действие неосесимметричной нагрузки описывается суммой M сил, расположенных в точках (x_m, y_m) : $\mathbf{q}(\mathbf{x}, y) = \sum_{m=1}^M q_m \mathbf{c}_m \delta(x - x_m) \delta(y - y_m)$. Точки (x_m, y_m) расположены равномерно вдоль контура C , ответственного за возбуждение волн Лэмба. Контур C однозначно определяется геометрией актуатора (рисунок 2), $\mathbf{c}_m$ — единичные вектора ($|\mathbf{c}_m| = 1$) ортогональные контуру C и лежащие в плоскости xOy , q_m — интенсивности сил. Выбор контура C и мощностей q_m может быть сделан из решения связанной задачи, что требует создание более сложной математической модели, или, как в данной работе, базируясь на экспериментальных данных, рис. 2.

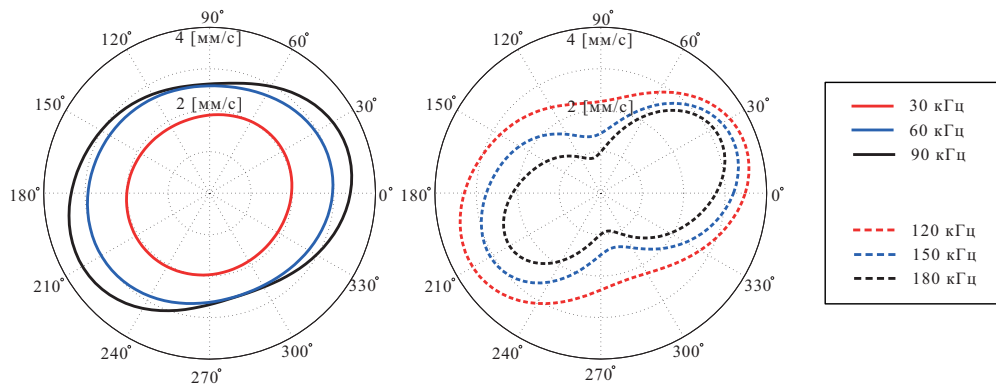


Рис. 3. Диаграммы направленности $\dot{u}_z(t)$ при $r = 30$ мм. Эксперимент.

4. Анализ. На рис. 3 для различных центральных частот представлены диаграммы излучения (эксперимент) на расстоянии $r = 30$ мм от центра актуатора (ориентация $\theta = 15^\circ$). Нетрудно видеть, что лишь на низких частотах диаграммы направленности почти симметричны, а с ростом частоты картина все значительно усложняется. На более высоких частотах амплитуды колебаний в точках на направлениях, совпадающих с ориентацией ($\varphi = \theta$), в несколько раз больше чем в ортогональных ($\varphi = \theta \pm 90^\circ$).

Из решения задачи о минимизации разности между экспериментальными измерениями и моделью были оценены значения неизвестных интенсивностей q_m , $m = 1, M$. При этом значения q_m предполагались равными вдоль контуров электродов, рис. 1, 2. Полагая $q_m \approx 1$ вдоль периметра приклеенного актуатора и решая задачу минимизации для значений интенсивностей вдоль внутренних контуров, были получены значения прочих интенсивностей $q_m \approx 0.25$. Данный факт может быть объяснен неоднородностью создаваемого в пьезоматериале электрического поля и соответственно неравномерными касательными силами вдоль контуров электродов.

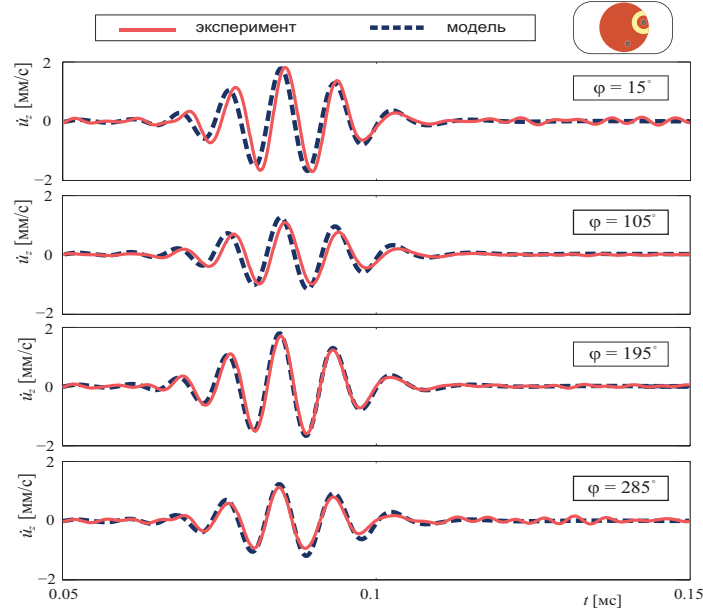


Рис. 4. Скорости $\dot{u}_z(t)$ измеренные (сплошная) и рассчитанные с помощью модели (пунктир) в четырех точка на расстоянии $r = 120$ мм от центра актуатора: $\varphi = 15^\circ + n90^\circ, n = 0..3$ для частоты $f_c = 120$ кГц.

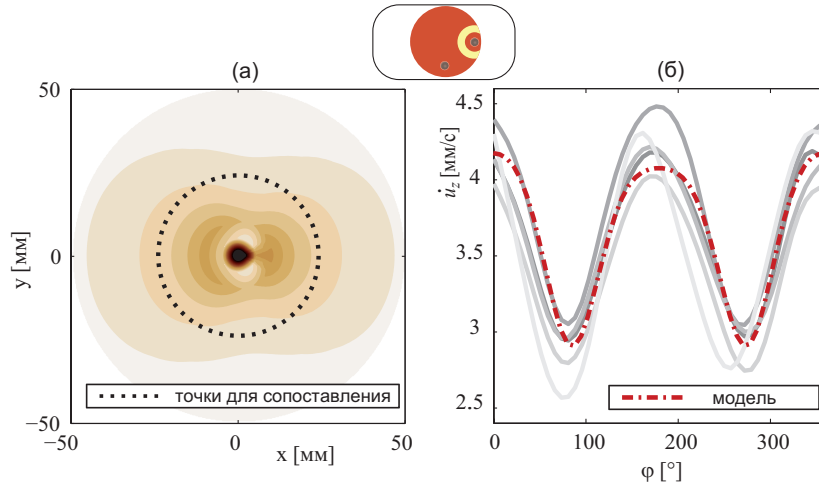


Рис. 5. Распределение амплитуд скоростей $|\dot{u}_z(t)|$ при ориентации $\theta = 0^\circ$ (а); сопоставление диаграмм излучения: эксперимент (сплошная) и теория (пунктир) на расстоянии 25 мм от центра актуатора (б).

Для сравнения результатов эксперимента и теоретических расчетов были сопоставлены нестационарные сигналы. А-сканы в двух точках, в направлении ориентации и перпендикулярном ему, приведены на рис. 4; здесь сплошная линия соответствует эксперименту, а пунктирная — расчетам. Можно видеть достаточно хорошее совпадение в амплитудах и некоторое расхождение в фазах, которое, по-видимому, связано с потерей информации при обработке экспериментальных

данных и последующей аппроксимации. Рисунок 5 а демонстрирует волновую картину (амплитуды скоростей $\dot{u}_z(t)$) при действии актуатора на центральной частоте 90 кГц. Были также проведены эксперименты для актуатора при ориентации $\theta = 0^\circ$, рис. 5 б, где четко видна направленность излучения.

Таким образом, можно заключить, что неосесимметричность излучения не является случайным эффектом, а связана с расположением и формой электродов. Данная информация является важной для создания систем мониторинга, позволяя усиливать отклик системы в нужных направлениях. Кроме того, продемонстрирована хорошая точность предсказаний достаточно простой приближенной модели.

Работа выполнена при поддержке АВЦП Минобрнауки «Развитие потенциала высшей школы» (2.1.1/10463) и РФФИ (11-01-96508).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Konstantinidis G., Wilcox P. D., Drinkwater B. W.* An investigation into the temperature stability of a guided wave structural health monitoring system using permanently attached sensors // *IEEE Sensors*. № 7(5). 2007. Pp. 905–912.
- [2] *Huang H., Pamphile T., Derriso M.* The effect of actuator bending on Lamb wave displacement fields generated by a piezoelectric patch // *SMS*. № 17(3), 055012, 2008.
- [3] *Giurgiutiu V.* Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring // *SMS*. 2005. № 4, Pp. 291–305.
- [4] *Crawley E. F., De Luis J.* Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures // *AIAA Journal*. 1987. № 25, Pp. 1373–1385.
- [5] *Moll J. et al.* Interactive simulation and visualization of Lamb wave propagation in isotropic and anisotropic structures // *J. Physics Conf. Series* 305, Oxford, UK, 2011.
- [6] *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред М.: Наука, 1989. 344 с.

Golub M. V., Moll J., Glushkova N. V., Glushkov E. V., Fritzen C.-P. *Non-axisymmetric wave pattern induced by a circular piezoelectric wafer active sensors.* A Lamb wave-based structural health monitoring system requires the exact knowledge of the dynamical behavior of piezoelectric actuators. It has been shown in the literature that the radiation pattern excited by piezoelectric wafer active sensors is often directional and frequency-dependent. The radiation pattern becomes strongly non-axisymmetric when the excitation frequency increases. The theoretical considerations and experimental studies in this paper show that this effect can be attributed to the influence of the complex actuator shape with disk-wrapped electrode. Simulation procedures are based on an integral approach and a pin-force model, theoretical results are compared with experimental measurements from a Laser-Doppler vibrometer.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НАНОМЕХАНИКИ

Греков М. А.^{*}, Еремеев В. А. А.^{**}, Каштанова С. В.^{*},
Морозов Н. Ф.^{*}, Язовская А. А.^{*}

^{*} Санкт-Петербургский государственный университет

^{**} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Успехи наномеханики привели к внедрению в современную индустрию многочисленных наноразмерных механизмов, что естественно предполагает необходимость традиционного анализа проблем прочности, устойчивости, разрушения и т. д. Такого рода анализ можно проводить на основе традиционной модели механики твердого тела, модифицированного введением поверхностного эффекта. В докладе приводится решение трех прикладных задач теории упругости и анализируется поправка к решению, полученного в силу учета поверхностных напряжений.

Многие наноматериалы обладают аномальными физическими свойствами, существенно отличающимися от свойств обычных материалов. Одно из объяснений этих отличий состоит в наличии поверхностных эффектов, роль которых для наноразмерных структур может быть чрезвычайно велика по сравнению с классической механикой [1–6]. Целью данной работы является анализ влияния поверхностных эффектов на упругие характеристики наноматериалов.

1. Эффективная жесткость нанопористого стержня

Первая из рассматриваемых задач — задача о растяжении линейно-упругого прямолинейного стержня с круговым сечением радиуса R . Будем считать, что параллельно оси стержня расположены n пор цилиндрической формы с одинаковыми радиусами r , суммарная площадь поперечных сечений которых равна

$$S = \pi n r^2. \quad (1)$$

Пусть на торцах стержня действует равномерно распределенная нагрузка, статически эквивалентная силам P . Обозначив модуль Юнга материала стержня через E , эффективный продольный модуль стержня с порами E_0^* можно выразить как (см., например, [7]):

$$E_0^* = E(1 - \varphi),$$

где $\varphi = S/F$ — пористость, $F = \pi R^2$ — полная площадь сечения стержня, включая площадь пор. Очевидно, что эффективный продольный модуль стержня с порами E_0^* не зависит от количества содержащихся в нем пор, а только от суммарной площади их поперечных сечений.

Эффективный модуль упругости с учетом поверхностных напряжений E_s^* [8]

$$E_s^* = E(1 - \varphi) + E_s \frac{2\pi r n}{F} = E_0^* + E_s \frac{2\pi r n}{F}.$$

Или с учетом (1)

$$E_S^* = E(1 - \varphi) + E_s \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}F} \sqrt{n}. \quad (2)$$

Здесь $E_s = \sigma_{zz}/\epsilon_{zz} > 0$ — поверхностный аналог модуля Юнга, имеющий размерность Н/м, $\sigma_{zz}, \epsilon_{zz}$ — продольные компоненты напряжений и поверхностной деформации.

Таким образом, учет поверхностного эффекта позволяет получить зависимость (2) эффективного модуля упругости стержня с порами E_S^* от количества пор n . При этом, маленькое количество пор большой площади поперечного сечения ослабляет стержень (его жесткость становится меньше жесткости изотропного материала стержня), но при той же суммарной площади поперечных сечений пор, стержень становится тем жестче, чем больше пор он содержит (чем меньше радиус пор).

2. Плоская задача для кругового отверстия в нанопластине

Еще одна задача, рассмотренная в работе, демонстрирующая, что учет поверхностных напряжений оказывает существенное влияние на механические свойства нанообъектов — плоская задача для кругового отверстия в наноматериале.

Рассмотрим соответствующую задачу теории упругости: пусть упругая плоскость с круговым вырезом радиуса R находится под действием одноосного растяжения на бесконечности (задача Кирша) величины p и дополнительных поверхностных напряжений. Объемные соотношения поверхностной [3,4] и объемной линейной упругости в случае плоской деформации сводятся к

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^s &= \sigma_0^s + (\lambda_s + 2\mu_s)\epsilon_{\varphi\varphi}^s, \sigma_{33}^s = \sigma_0^s + \lambda_s\epsilon_{\varphi\varphi}^s, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\epsilon_{rr}, \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{rr} + \lambda\epsilon_{\varphi\varphi}, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu\epsilon_{r\varphi}, \sigma_{33} = \lambda(\epsilon_{\varphi\varphi} + \epsilon_{rr}) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь (r, φ) — полярная система координат с центром, совпадающим с центром выреза, σ_0^s — остаточное поверхностное напряжение, отвечающее ненагруженному телу, $\sigma_{\varphi\varphi}^s$ и $\epsilon_{\varphi\varphi}^s$ — окружные поверхностные напряжения и деформации, σ_{33}^s — нормальная к плоскости компонента тензора поверхностных напряжений, σ_{ij} и ϵ_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций в объеме, λ_s и μ_s — модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе λ и μ для объемной изотропной упругости. Краевые условия на границе выреза $r = R$ будут иметь вид:

$$\sigma_{rr} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^s}{R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^s}{\partial \varphi} = 0, \quad r = R, \quad (4)$$

а условия на бесконечности в декартовой системе координат ($x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad \text{кроме} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{11} = p, \quad (5)$$

где ω — поворот материальной частицы.

Решив задачу (3)–(5) методом комплексных потенциалов, получим для внешности круга $r > R$ [9]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \varphi) &= \frac{\sigma_0^s R^2}{R+M} + \frac{P}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{M(1+\kappa)}{2(R+M)} \right) \frac{R^2}{r^2} + \left(1 - \frac{4R^2}{r^2} + \left(3 - \frac{2M(1+\kappa)}{2R+M(3+\kappa)} \right) \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= -\frac{\sigma_0^s R^2}{R+M} + \frac{P}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{M(1+\kappa)}{2(R+M)} \right) \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \left(3 - \frac{6M(1+\kappa)}{2R+M(3+\kappa)} \right) \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{P}{2} \left[1 + \frac{2R^2}{r^2} + \left(3 - \frac{4M(1+\kappa)}{2R+M(3+\kappa)} \right) \frac{R^4}{r^4} \right] \sin 2\varphi.\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь $M = (\lambda_s + 2\mu_s)/2\mu$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Равенства (6) показывают характерную для наноматериалов зависимость напряжений от размера отверстия. Кроме того, из равенств (6) следует, что при $M > 0$ учет поверхностных напряжений уменьшает концентрацию напряжений в окрестности выреза. Аналогичное действие оказывает остаточное поверхностное напряжение σ_0^s , которое по сути является поверхностной энергией, необходимой для образования единицы поверхности. Например, для кубических металлов $M \sim (10^{-10} - 10^{-9})\text{м}$, $\sigma_0^s \sim 1\text{Н/м}$ [6], и в этом случае при радиусе отверстия $a \sim 10\text{нм}$ первое слагаемое во второй из формул (6) имеет порядок 100 МПа. А значит, при значениях напряжений на бесконечности $p = 100\text{МПа}$, вклад остаточных напряжений σ_0^s в напряженное состояние границы отверстия сравним со вкладом однородного напряженного состояния, существенно уменьшая концентрацию напряжений вблизи выреза. Это в частности означает, что наноматериал способен нести существенно большую нагрузку до момента потери устойчивости.

3. Устойчивость бесконечной пластины с круговым отверстием с учетом поверхностных эффектов

В самом деле, воспользуемся энергетическим методом С.П. Тимошенко для определения критического напряжения, при котором наступает потеря плоской формы устойчивости [10,11]:

$$\begin{aligned}U &= W, \\ U &= \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w, w)] r dr d\varphi, \\ W &= \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \left[\sigma_{rr} r \frac{\partial w^2}{\partial r} + \sigma_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial w^2}{\partial \varphi} + 2\tau_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] dr d\varphi,\end{aligned}$$

где U — потенциальная энергия деформации изгиба, W — работа усилий в срединной плоскости пластины, накопившихся к моменту потери устойчивости, на дополнительных перемещениях, вызванных выпучиванием, w — прогиб выпученной пластины, ν — коэффициент Пуассона, $D = Eh^3/12(1 - \nu)^2$ — цилиндрическая жесткость пластины, h — ее жесткость,

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\partial w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right].$$

Разыскивая функцию прогиба в виде $w(r, \varphi) = \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{r^i} \cos \varphi$ и определив коэффициенты a_i из граничных условий, с использованием формул (6) окончательно

h , нм	0,1	0,5	1	5
P^*/P_0^*	9,8	1,7	1,4	1,3

Таблица 1. Сравнение критических нагрузок.

получим следующее выражение для критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости:

$$P^* = \frac{-(48c_0R^2(-1+\nu)^3(-1731+443\nu) + 5h^2E(7213-8154\nu+1613\nu^2))}{(4R^2(-1+\nu)^2(5c_4(2777-1720\nu+287\nu^2)-72(874-1081\nu+347\nu^2)+6c_2(1731-2174\nu+443\nu^2)))}$$

$$c_0 = \frac{\sigma_0^s}{R+M}, \quad c_2 = \frac{M(1+\kappa)}{2(R+M)}, \quad c_4 = \frac{2M(1+\kappa)}{2R+M(3+\kappa)}.$$

В табл. 1 приведено сравнение критических нагрузок, вызывающих потерю устойчивости с учетом (P^*) и без учета (P_0^*) поверхностных эффектов (при $R = 10$ нм, $\nu = 0.33$):

Заключение

Учет поверхностных напряжений в задачах механики позволяет эффективно проводить анализ механического поведения наноразмерных объектов на основе традиционной модели механики твердого тела, позволяя объяснить ряд эффектов, присущих наноматериалам.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Ration. Mech. And Anal. 1975. V. 57. № 4. Pp. 291–323.
- [2] *Murdoch A. I.* Some fundamental aspects of surface mode // J. Elast. 2005. V. 80. Pp. 33–50.
- [3] *Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Введение в механику поверхностных явлений. Киев.: Наукова Думка, 1985. 200 с.
- [4] *Dual H. L., Wang J., Karimhaloo B. L.* Theory of elasticity at the nanoscale // Advances in Applied Mechanics. 2008. № 42. Pp. 1–68.
- [5] *Альтенбах Х., Еремеев В., Морозов Н.* Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // ДАН. 2009. т. 429, № 4. С. 472–476.
- [6] *Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Устинов К. Б.* Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физическая мезомеханика. 2010. т. 13, № 5. С. 127–138.

- [7] *Работнов Ю. Н.* Соппротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456 с.
- [8] *Еремеев В. А., Морозов Н. Ф.* Об эффективной жесткости нанопористого стержня // ДАН. 2010. т. 432, № 4. С. 473–476.
- [9] *Греков М. А.* Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 192 с.
- [10] *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966.
- [11] *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
- [12] *Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Кулиев Г. Г., Милованова О. Б.* Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. Киев.: Наукова Думка, 1981.
- [13] *Бочкарев А. О., Даль Ю. М.* Локальная устойчивость упругих пластин с вырезами // ДАН СССР. 1989. т. 308, № 2. С. 312–315.
- [14] *Tian L., Rajapakse R. K. D.* Analytical solution for size-dependent elastic field of a nanoscale circular inhomogeneity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2007. 74(5). Pp. 568–574.

Grekov M. A., Eremeev V. A., Kashtanova S. V., Morozov N. F., Yazovskaya A. A. *Selected Problems in Applied Nanomechanics*. Modern advances in nanomechanics motivate manufacturing of numerous nanoscale mechanisms for industrial applications. This requires investigation of mechanical behavior of nanoobjects including analysis of strength, stability, fracture resistance, etc. Investigation of mechanical properties of nanoobjects could be particularly conducted based on traditional solid state models introducing a surface effect into considerations [1–6].

In order to illustrate this fact the solutions of three applied problems of the theory of elasticity will be delivered and an amendment to the solutions obtained by taking into account surface stresses will be given into report.

БЫСТРЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Джанибеков М. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Целью данного исследования является применение метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) к изучению обтекания профиля произвольной формы, имеющего один острый угол, и поиск максимально быстрого алгоритма расчета. Решение подобных задач указанным методом значительно упростит расчет характеристик исследуемого профиля, особенно при расчетах крыловых профилей, для которых в основном применяется метод конформных отображений. Метод демонстрируется на примере профиля Жуковского с учетом следующих допущений: 1) жидкость идеальная; 2) в каждом сечении задача плоская (т. е. двумерная).

1. Постановка задачи и основные гипотезы

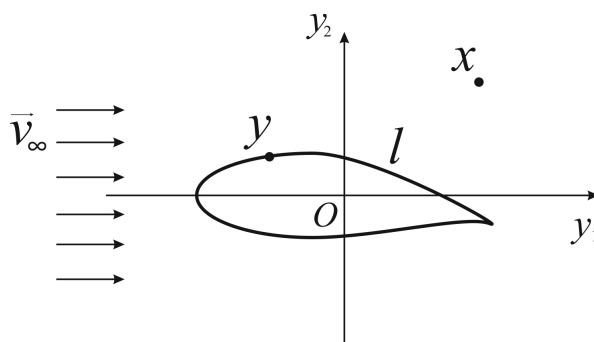


Рис. 1. Обтекаемый профиль.

При расчете характеристик профиля, имеющего острую кромку, согласно гипотезе Кутта–Жуковского должна быть введена циркуляция скорости, которая позволит избежать образования особенности на острой кромке, приводящей к физически невозможным бесконечно большим давлениям. Однако, прежде чем переходить к более сложным случаям, рассмотрим симметричный профиль (рис. 2).

Основное интегральное представление для идеальной несжимаемой жидкости при безвихревом стационарном течении:

$$\varphi_p(x) = \int_{\ell} \left[\varphi_p(y) \frac{\partial \Phi(y, x)}{\partial n_y} - \frac{\partial \varphi_p(y)}{\partial n_y} \Phi(y, x) \right] d\ell_y, \quad (1)$$

где φ_p — потенциал скорости возмущенного потока; $\varphi = \varphi_{\infty} + \varphi_p$; $\Phi(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln r$ — функция Грина; $r(x, y) = |x - y|$; ℓ — контур исследуемого профиля; $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ — произвольные точки в исследуемой области. Далее будем считать, что точка $y \in \ell$, а точка $x \notin \ell$ и расположена вне профиля.

Устремим $x \rightarrow y_0 \in \ell$ и используем граничные свойства потенциалов простого и двойного слоя. Тогда уравнение (1) приводится к виду:

$$\frac{\varphi(y_0)}{2} - \int_{\ell} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(y, y_0)}{\partial n_y} d\ell_y = \varphi_{\infty}(y_0), y_0 \in \ell. \quad (2)$$

Численное решение уравнения (2) позволяет определить значение потенциала φ в произвольной точке жидкости. Расчет показал, что при симметричности профиля и набегающего потока отсутствует необходимость добавления циркуляции, так как условие конечного значения скорости выполняется автоматически, и происходит лишь разрыв функции (рис. 3).

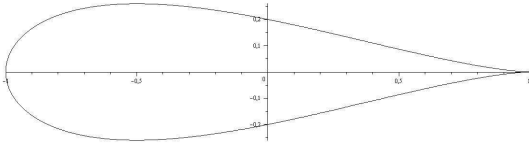


Рис. 2. Симметричный профиль.

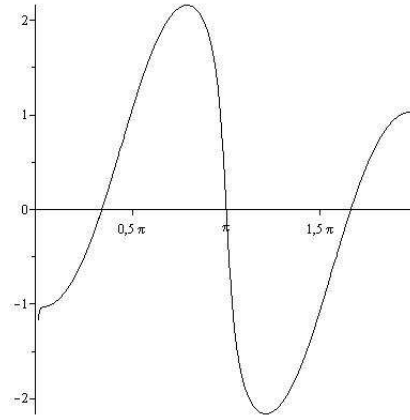


Рис. 3. Касательная компонента скорости.

2. Обтекание несимметричного профиля. Для определения характеристик несимметричного профиля с острой кромкой добавим вихрь скорости, который позволит получить необходимую циркуляцию:

$$\varphi = \varphi_{\infty} + \varphi_p + \varphi_c. \quad (3)$$

В общем виде потенциал циркуляционной скорости можно представить как $\varphi_c = \frac{\theta}{2\pi} \Gamma$, где Γ — некоторая неизвестная константа. Подставим соотношение (3) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) = & \int_{\ell} \left[\varphi(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} - \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n_y} \Phi \right] d\ell_y - \int_{\ell} \left[\varphi_{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} - \frac{\partial \varphi_{\infty}}{\partial n_y} \Phi \right] d\ell_y - \\ & - \int_{\ell} \left[\varphi_c(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} - \frac{\partial \varphi_c(y)}{\partial n_y} \Phi \right] d\ell_y. \end{aligned} \quad (4)$$

Точка x на самом деле остается снаружи, просто равенство указанного интеграла нулю можно доказать интегрированием по внутренности контура, и именно потому что особенность в точке x остается снаружи, интеграл и оказывается равным нулю.

Преобразуем уравнение $K\varphi = f$:

$$K^t\varphi = (K^t - K)\varphi + f. \quad (7)$$

Тогда построенная тёплицева матрица позволяет организовать итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, \\ K^t\varphi_1 &= f, \\ K^t\varphi_2 &= (K^t - K)\varphi_1 + f, \\ &\dots \end{aligned} \quad (8)$$

Применение быстрого метода с использованием тёплицевых матриц позволяет сократить число итераций при решении линейных систем до $O(N^2)$.

Работа поддержана ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы», Госконтракт №16.516.11.6106.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1996. 448 с.
- [2] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- [3] Scalia A., Sumbatyan M. A., Popuzin V. V. A Fast BIE Method for Arbitrary Body in a Flow of Incompressible Inviscid Fluid // In press.

Dzhanibekov M. V. *A Fast Boundary Integral Equation Method for the Aerofoil in a Flow of Inviscid Fluid.* The objective of the present research is the application of the Boundary Integral Equations (BIE) method to the studying of the flow over the aerofoil of arbitrary shape having one sharp edge, as well as to find an appropriate fast numerical algorithm. The application of this method significantly simplifies the calculation of aerodynamic characteristics of the aerofoil, where there are typically applied the conformal mapping technique. The proposed method is demonstrated on a Zhukovsky aerofoil, with the following assumptions: 1) the fluid is inviscid; 2) at every section the problem is plane (i.e. 2d).

БРАТЬЯ КОССЕРА И МЕХАНИКА ОБОБЩЕННЫХ КОНТИНУУМОВ

Ерофеев В. И., Виноградова Ю. В.*

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благодного РАН

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

В статье рассказывается о жизни и деятельности Эжена и Франсуа Коссера — основоположников механики обобщенных континуумов. Обсуждается современное состояние механики обобщенных континуумов и перспектив ее развития.

В минувшем столетии механика испытала как взлеты, так и серьезные затруднения. С одной стороны, ей принадлежит выдающаяся роль в развитии современной техники. С другой стороны, механика оказалась неспособной дать удовлетворительное описание целого ряда явлений.

Описание механических свойств тел является важнейшей проблемой механики сплошных сред, от решения которой существенно зависит физическая достоверность математических моделей и, следовательно, пригодность для практических применений результатов, получаемых с их помощью.

Исследования последних лет требуют создания новых и совершенствования классических теоретико-экспериментальных подходов к построению уравнений состояния сред, развития основ теории и методов математического моделирования процессов и явлений.

Бурный рост и доступность вычислительной техники стимулировали возможности аналитического и численного решения задач механики, в том числе и с применением неклассических моделей сред, учитывающих микроструктуру материала.

Более ста лет назад, в 1909 году, была опубликована книга французских исследователей братьев Эжена и Франсуа Коссера (Cosserat) «Теория деформируемых тел» [1], заложившая основы механики обобщенных континуумов.

Известно, что одной из основных гипотез классической механики сплошных сред (МСС) является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие несимметричные тензоры. Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить в среде наличие дополнительных степеней свободы и рассмотреть физически бесконечно малый объем (по которому ведется усреднение свойств среды) не как материальную точку, а как более сложный объект, обладающий новыми степенями свободы: ротационными, осцилляторными или способностью к микродеформации. Таким образом, для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно

малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью или волокнистостью строения реальных материалов.

В теории Коссера каждая материальная точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета ротационных степеней свободы. Можно сказать, что появление модели континуума Коссера знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело.

Приведем некоторые сведения о жизни и деятельности Э. и Ф. Коссера.

Старший брат — Франсуа Коссера, родился 26 ноября 1852 года в городе Дуэ, во Французской Фландрии. В 1870 году окончил в Париже Высшую политехническую школу (Ecole Polytechnique), а в 1872 году — Национальную школу мостов и дорог. В 1875 году получил должность гражданского инженера третьего класса. Женился, в 1878 году у него родилась дочь Амелия-Адель. В 1879 году был переведен на должность железнодорожного инженера-строителя второго класса по северной зоне. В 1883 году он становится гражданским инженером первого класса. Кавалер ордена Почетного легиона (1893 г.), главный инженер (1895 г.). В 1912 году он избирается Вице-Президентом, а в 1913 году — Президентом Французского математического общества.

Научная работа Ф. Коссера идет параллельным курсом с его деятельностью гражданского инженера, занимающегося строительством путей, тоннелей, мостов, железных дорог. Об этой работе лишь кратко упоминается в его служебных характеристиках (цитаты из книги [2]): «Мистер Франсуа Коссера — это выдающийся инженер, имеющий богатый опыт практической деятельности, которую он сочетает с проведением теоретических исследований; недавно он представил во Французскую академию наук несколько замечательных работ по механике (27 июня 1898 г.)»; «Мистер Франсуа Коссера является ценным сотрудником, он очень эффективен, особенно в общественных работах. Среди научного сообщества он известен как автор замечательных исследований по вопросам математики и механики (11 октября 1910 г.)»; «Мистер Франсуа Коссера обладает высоким уровнем компетенции для строительства тоннелей, мостов, ... он является также выдающимся математиком, президентом Французского математического общества. Кроме того, он внес существенный вклад в работы для нужд армии (20 октября 1913 г.)».

Ф. Коссера умер 22 марта 1914 года на 62 году.

Примечательно, что следующим после него президентом Французского математического общества стал Э. Вессьо (1865–1952), получивший всемирную известность работами по представлению групп Ли, создавший (вместе с Э. Пикаром) дифференциальную теорию Галуа и применивший теорию Фредгольма к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Младший брат — Эжен Коссера (полное имя Эжен-Морис-Пьер), родился 4 марта 1866 года на севере Франции в городе Амьене. С 1883 по 1888 годы учился в Высшей нормальной школе (Ecole Normale Supérieure) в Париже, по окончании которой занял должность астронома-ассистента в обсерватории города Тулузы. В 1889 году защитил докторскую диссертацию по математике [3], в которой развивались идеи Ю. Плюккера и Г. Дарбу; переведен на должность адъюнкта Астрономической обсерватории. С 1895 года — профессор кафедры дифференци-

ального и интегрального исчисления университета Тулузы. С 1908 года Э. Коссера становится директором Астрономической обсерватории Тулузы и занимает эту должность до конца своей жизни (умер 31 мая 1931 года в возрасте 65 лет). Его астрономические исследования посвящены кольцам и спутникам Сатурна, кометам и двойным звездам. Именно как астроном Э. Коссера был избран в 1919 году членом Французской академии наук. По отзывам коллег, «...сдержанный, добрый человек и прилежный работник, Эжен Коссера был одной из движущих сил в университете Тулузы в течение тридцати пяти лет».

О потомках братьев Коссера известно следующее. У Эжена был только один сын, он умер на руках у отца в гостинице во время поездки.

Единственная дочь Франсуа вышла замуж за морского инженера Эдуарда Даво (что интересно, переведшего с русского языка на французский курс физики петербургского профессора О. Д. Хвольсона [4]). У них было два сына, один из которых умер в 1939 году, а второй, Пьер-Франсуа, прожил до конца 1980-х годов и застал триумфальное возвращение в мир теории своего деда.

В период между 1895 и 1910 годами Э. и Ф. Коссера опубликовали серию статей и монографию по механике. Кроме теории континуума твердых тел, именуемого сегодня континуумом Коссера, в 9-ти статьях 1898–1901 годов братья излагают результаты своих исследований спектра пучка операторов статической теории упругости для трехмерной изотропной среды.

Работы по спектру Коссера были продолжены в 60–70-х годах двадцатого века С. Г. Михлиным, показавшим, в частности, что исследование спектра открывает перспективу построения теории многомерных интегральных уравнений.

Нынешние исследователи полагают, что в творческом союзе братьев главным был Франсуа, а Эжен лишь ассистировал, «...только вносил поправки в вычисления» [2]. В подтверждение сказанного приводится то обстоятельство, что после смерти старшего брата Эжен, активно работавший в науке еще полтора десятилетия, не опубликовал более ни одной работы по механике и совсем не пропагандировал еорию бобщенного континуума.

Современники не были столь единодушными в своих суждениях. Известно, что когда Франсуа претендовал на должность заведующего кафедрой механики Высшей политехнической школы и конкурировал с Ж. Адамаром и Ж. Жуге, кто-то из ответственных лиц высказал сомнение в его участии в совместных работах, и предпочтение было отдано Ж. Жуге.

До недавних пор считалось, что работа Коссера существует как бы «в вакууме», не имея ни предшественников, ни, долгое время, последователей. Но это не соответствует действительности. «Праотцами» полярных сред следует считать Якоба Бернулли, который в 1686 году ввел в рассмотрение момент количества движения, и Леонарда Эйлера, в 1765 году описавшего кинематику твердого тела конечных размеров.

До конца 19-го века физиками разрабатывались две теории эфира, конкурирующие между собой. Из наиболее известных ученых на позиции квазиджидкого (газоподобного) эфира стояли Р. Декарт, Дж. Максвелл, Г. Лоренц. Они предполагали, что в эфире существуют вихри из каких-то очень мелких частиц. Потоки этих частиц образуют магнитные поля, а движения частиц от одного заряженного

тела к другому обеспечивают электростатическое взаимодействие. Последовательными сторонниками квазитвердого эфира выступали Дж. Мак-Куллаг, В. Томсон (лорд Кельвин) и Дж. Стокс. Согласно их теориям магнитные и электрические поля возникают в эфире в результате определенного вида деформаций.

В 1839 году Дж. Мак-Куллаг предложил модель эфирной среды как упругого тела, невосприимчивого к деформациям сжатия и изменения формы, но реагирующего на деформацию кручения относительно абсолютного пространства. Подробно теория Мак-Куллага изложена в книге А. Зоммерфельда, который заметил, что эта теория, будучи чисто механической, хорошо согласуется с теорией электромагнитных и оптических явлений Дж. Максвелла.

Вслед за Дж. Мак-Куллагом В. Томсон (Кельвин) смоделировал эфир с помощью волчков, то есть рассмотрел полярную среду, состоящую из вращающихся осесимметричных частиц, способных совершать большие повороты и перемещения общего вида.

Модель Мак-Куллага является частным случаем модели Коссера, а модель Кельвина следует причислить к «Коссера-подобным» (определение А. К. Эрингена) моделям.

Во Франции среди современников работу Э. и Ф. Коссера оценили немногие, собственно, только трое, но кто! Это А. Пуанкаре, Э. Пикар и Э. Картан. О Э. Картане следует упомянуть особо. Его, будущего автора классической книги «Теория спиноров», знакомство с трудом Коссера вдохновило на создание теории пространств с кручением. Именно у Коссера он нашел подсказку: связать тензор кручения с внутренними вращательными степенями свободы сплошных сред, что, в свою очередь, позволило связать кручение пространства–времени с конкретными свойствами материальных систем, а именно со спином. Такая связь достигается в рамках динамической теории гравитационных взаимодействий Эйнштейна–Картана.

В Германии теорию микрополярного континуума пропагандировал К. Хейн, несколько лет читавший лекции по механике Коссера в университете Карлсруэ.

Подробный обзор книги Э. и Ф. Коссера опубликовал профессор Массачусетского технологического университета Э. Вильсон в альманахе «Достижения теоретической механики» за 1913 год.

А далее на несколько десятилетий было забвение. Но, воистину, идеям Коссера «... как драгоценным винам, настанет свой черед». Без теории Коссера механика не полна. Эта теория вернулась в мир, и эта теория живет сегодня.

В 50-х годах 20 века К. Трусделл (Университет Дж. Гопкинса, Балтимор, США) обратил внимание на предложения Коссера и включил их в свои обширные монографии. Вслед за ним так же поступил А. К. Эринген (Принстон, США). После этого начинается массовое увлечение возможностью соответствующего формального расширения континуальных теорий. Важнейшую роль сыграл первый пример конкретного приложения динамики Коссера к теории жидких кристаллов (Э. Л. Аэро и Дж. Эриксен).

Обобщенные континуумы представляют как теоретический, так и практический интерес и заслуживают внимания, как теоретиков, так и экспериментаторов, специализирующихся в различных отраслях механики и физики.

Актуальность таких исследований повышается и тем обстоятельством, что, в сущности, для всех природных и искусственных материалов и систем проявляются взаимодействия механических процессов различного пространственного масштаба. В настоящее время обобщенные континуумы применяются при разработке новых металлургических технологий, позволяющих синтезировать искусственные материалы с управляемой микроструктурой. Они помогают прогнозировать поведение таких хрупких материалов, как бетон или лед. Некоторые методы технической диагностики и неразрушающего контроля базируются на усредненных материальных свойствах обобщенных континуумов. Большие надежды возлагаются на моделирование, базирующееся на концепциях обобщенных континуумов, для успешного и скорейшего развития нанотехнологий. Обобщенные континуумы, такие, как микрополярные или ориентированные материалы, микроморфный континуум, высокоградиентные материалы, тела со слабыми или сильными нелокальными взаимодействиями привлекаются, также, при разработке интегральных многомасштабных вычислительных процедур. Такие компьютерные технологии имеют целью объединение различных пространственных масштабов в одной численной схеме. Начало берется в квантово-механическом описании, моделировании процессов на атомарном, молекулярном, микроскопическом и, затем, континуальном масштабах.

В 2009 г. к столетнему юбилею монография Э. и Ф. Коссера переиздана на французском языке. Думается, что пришло время для выхода в свет и русской версии этой эпохальной книги.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Cosserat E. et F.* Theorie des corps deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
- [2] *Pommaret J. F.* Lie-pseudogroups and mechanics. Gordon and Breach Science, 1988. 590 p.
- [3] *Cosserat E.* Sur le cercle considere comme element Generateur de L'Espace / Diss. Paris, 1889.
- [4] *Chwolson O. D.* Traite de physique. Ouvrage traduit sur les editions russe et allemande per E. Davaux. Edition revue et considerablement augmentee per l'Auteur, suivie de notes sur la physique theorique pur E. et F. Cosserat. Tome 1: Mecanique. Etats de la matiere. Acoustique, vii + 1092 pp., 1908. Tome 2: L'Energie rayonnante. 1188 pp., 1909. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils.

Erofeyev V. I., Vinogradova Yu. V. *The cosserat brothers and generalized continuum mechanics.* This paper presents an overview of the major milestones in the life and research activity of Eugene and Francois Cosserat — the founders of generalized continuum mechanics. The current status and future prospects of generalized continuum mechanics are discussed.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОФОРЕЗА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Жуков М. Ю.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Приведена процедура построения нормальной формы уравнений электрофореза — системы гидродинамического типа. Аналитические вычисления компонент тензора Хаантьеса показали, что система электрофореза для слабых электролитов не имеет инвариантов Римана.

Введение. Хорошо известно (см. например, [1]), что необходимым и достаточным условием существования инвариантов Римана для системы гидродинамического типа

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ik}(u) \frac{\partial u_k}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

является обращение в нуль компонент тензора Хаантьеса H_{ij}^k , вычисляемого по компонентам матрицы A_{ik} при помощи тензора Нийенхейса N_{ij}^k

$$N_{ij}^k = A_i^s \partial_s A_j^k - A_j^s \partial_s A_i^k + A_s^k \partial_j A_i^s - A_s^k \partial_i A_j^s, \quad (2)$$

$$H_{ij}^k = A_s^k A_r^s N_{ij}^r - A_s^k N_{rj}^s A_i^r - A_s^k N_{ir}^s A_j^r + N_{sr}^k A_i^s A_j^r.$$

Применение указанного критерия к различным системам уравнений, описывающих процессы переноса массы при помощи электрического поля (электрофорез), во многих случаях затруднено, так как в своем исходном виде эти уравнения не записаны в нормальной форме (1). В частности, помимо дифференциальных уравнений в частных производных, уравнения электрофореза содержат алгебраические соотношения (ограничения), что делает невозможным непосредственное вычисление компонент тензора Хаантьеса. В данной работе, для уравнений описывающих электрофорез в растворе слабых электролитов, приведена процедура, позволяющая записать такие уравнения в нормальной форме (1). Символьные вычисления показали, что указанная система не имеет инвариантов Римана, то есть компоненты соответствующего тензора Хаантьеса не обращаются в нуль.

1. Уравнения электрофореза в случае слабых электролитов. Система уравнений, описывающих процесс переноса электрическим полем компонент водного раствора, состоящего из набора слабых кислот и одного слабого основания, в бездиффузионном приближении имеет вид [2]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mu_i \theta_i(h) u_i}{s_0} \right\} = 0, \quad \theta_i(h) = \frac{K_i}{K_i + h}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mu_0 \theta_0(h) u_0}{s_0} \right\} = 0, \quad \theta_0(h) = \frac{h}{K_0 + h}, \quad (4)$$

$$\theta_0(h) u_0 = \sum_{m=1}^n \theta_m(h) u_m, \quad (5)$$

$$s_0 = \sum_{m=1}^n (\mu_m + \mu_0) \theta_m(h) u_m. \quad (6)$$

Здесь u_i — концентрации кислот ($i = 1, \dots, n$) основания ($i = 0$), h — концентрация ионов водорода, μ_k — подвижности, $\theta_k(h)$ — степени диссоциации, K_i — константы диссоциации химических реакций, s_0 — проводимость раствора.

Укажем, что величины u_i ($i = 0, \dots, n$), h являются неизвестными, а все константы K_i , μ_i считаются заданными. В приведенной системе уравнения (3), (4) — дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, (5) уравнение для определения h является алгебраическим, а уравнение (6) — определяющее соотношение для s_0 . Именно наличие алгебраического уравнения (5) и затрудняет непосредственное вычисление тензора Хаантьеса.

Обратим внимание, что система (3)–(6) имеет два очевидных интеграла

$$\Omega(x) = u_0 - \sum_{m=1}^n u_m, \quad (7)$$

$$R(x) = \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m + \mu_0}{\mu_m} u_m. \quad (8)$$

2. Замены переменных. Существуют замены переменных, позволяющие уменьшить количество дифференциальных уравнений и легко разрешить алгебраическое уравнение для h . Одну из таких замен переменных удобно провести в два этапа. Первый этап — переход к переменным a_i , h

$$u_i = (K_i + h)a_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (9)$$

После замены (9) исходная система (3)–(6) и интегралы (7), (8) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(K_i + h)a_i\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mu_i K_i a_i}{s_0} \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(K_0 + h)a_0\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mu_0 h a_0}{s_0} \right\} = 0, \quad (11)$$

$$h a_0 = \sum_{m=1}^n K_m a_m, \quad (12)$$

$$s_0 = \sum_{m=1}^n (\mu_m + \mu_0) K_m a_m. \quad (13)$$

$$\Omega(x) = a_0(K_0 + h) - \sum_{m=1}^n a_m(K_m + h) = a_0 K_0 - h \sum_{m=1}^n a_m, \quad (14)$$

$$R(x) = \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m + \mu_0}{\mu_m} (K_m + h) a_m. \quad (15)$$

Неизвестными в системе (10)–(13) являются a_i , h ($i = 0, \dots, n$).

Второй этап замен позволяет избавиться от дифференциального уравнения для a_0 за счет использования интеграла (14) и, фактически, от h , для которого получается явное соотношение. После замены переменных

$$a_i = a_0 w_i \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

система (10)–(14) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(K_i + h)a_0 w_i\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mu_i K_i w_i}{s} \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (17)$$

$$h = \sum_{m=1}^n K_m w_m, \quad (18)$$

$$s = \sum_{m=1}^n (\mu_m + \mu_0) K_m w_m, \quad (s_0 = a_0 s). \quad (19)$$

$$a_0 = \frac{\Omega(x)}{K_0 - h \sum_{m=1}^n w_m}. \quad (20)$$

Интеграл (15) (с сохранение прежних обозначений) запишется в форме

$$\frac{R(x)}{\Omega(x)} = (K_0 - h \sum_{m=1}^n w_m) \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m + \mu_0}{\mu_m} (K_m + h) w_m.$$

Окончательно систему (17)–(20) удобно записать в форме (только для переменных w_i , $i = 1, \dots, n$)

$$\Omega(x) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(K_i + h)w_i}{K_0 - hw} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mu_i K_i w_i}{s} \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

где определяющие соотношения для h , s , w имеют вид

$$s = \sum_{m=1}^n (\mu_m + \mu_0) K_m w_m, \quad h = \sum_{m=1}^n K_m w_m, \quad w = \sum_{m=1}^n w_m. \quad (22)$$

Система (22), по-прежнему, имеет интеграл

$$\frac{R(x)}{\Omega(x)} = (K_0 - hw) \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m + \mu_0}{\mu_m} (K_m + h) w_m. \quad (23)$$

От множителя $\Omega(x)$ в (21) легко избавиться, например, заменой (по-крайней мере, в случае знакоопределенной функции $\Omega(x)$)

$$y(x) = \int_0^x \Omega(\bar{x}) d\bar{x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \Omega(x) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (24)$$

3. Приведение к нормальной форме. Введем матрицы

$$B_{ij} = \frac{\partial}{\partial w_j} \left\{ \frac{(K_i + h)w_i}{K_0 - hw} \right\}, \quad A_{ij} = \frac{\partial}{\partial w_j} \left\{ \frac{\mu_i K_i w_i}{s} \right\}, \quad (25)$$

которые после всевозможных преобразований записываются в виде

$$B_{ij} = \delta_{ij} \frac{K_i + h}{K_0 - hw} + w_i \frac{K_j(K_0 + K_i w) + h(K_i + h)}{(K_0 - hw)^2}, \quad A_{ij} = \delta_{ij} \frac{\mu_i K_i}{s} - \frac{\mu_i K_i w_i}{s^2}. \quad (26)$$

Система (21), (22) записывается в виде (далее все суммирование от 1 до n)

$$\Omega(x) \sum_j B_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \sum_j A_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0. \quad (27)$$

Данная система уже не содержит алгебраического уравнения, но все еще отличается от нормальной формы (1). Обратим внимание на то, что матрица A_{ij} вырождена (именно по этой причине система имеет интеграл (23))

$$\sum_j A_{ij} w_j \equiv 0. \quad (28)$$

Напротив, матрица B обратима и систему (27) можно представить в нормальной форме

$$\Omega(x) \frac{\partial w_j}{\partial t} + \sum_j M_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0, \quad (29)$$

где

$$\sum_r B_{ir} M_{rj} = -A_{ij}, \quad (30)$$

К сожалению, запись компонент обратной матрицы B^{-1} довольно громоздка и здесь ограничимся лишь указанием простого алгоритма вычисления компонент.

Для построения матрицы M введем обозначения

$$\beta_i = \frac{(K_0 + K_i w)w_i}{(K_i + h)(K_0 - hw)}, \quad \gamma_i = \frac{hw_i}{K_0 - hw}, \quad F_{ij} = \frac{-(K_0 - hw)A_{ij}}{(K_i + h)}.$$

Тогда (30) записывается в виде

$$M_{ij} + \beta_i p_j + \gamma_i q_j = F_{ij}, \quad p_j = \sum_r K_r M_{rj}, \quad q_j = \sum_r M_{rj}. \quad (31)$$

Суммируя первое уравнение (31) и, соответственно, умножая (31) на K_i и суммируя, получим систему для определения p_j , q_j

$$p_j \sum_r \beta_r + q_j \left(1 + \sum_r \gamma_r \right) = \sum_r F_{rj},$$

$$p_j \left(1 + \sum_r K_r \beta_r \right) + q_j \sum_r K_r \gamma_r = \sum_r K_r F_{rj}.$$

Решая эту систему (фактически для двух переменных), получим матрицу

$$M_{ij} = F_{ij} - \beta_i p_j - \gamma_i q_j.$$

Таким образом, исходная система (3)–(6) приведена к нормальной форме (29) или (1). Как уже указывалось, от множителя $\Omega(x)$ в (29) легко избавиться при помощи замены (24). Несмотря на отсутствие инвариантов Римана, нормальная система уравнений удобна для использования численных схем расчета, так как при вычислениях не требует решения алгебраических уравнений на каждом временном шаге.

Компьютерные символьные вычисления компонент тензора Хаантьеса (2) показали, что для $n = 3, 4, 5$ компоненты тензора Хаантьеса не обращаются в нуль тождественно и, следовательно, исходная система не имеет инвариантов Римана. Для $n > 5$ проведение вычислений ограничивается компьютерными ресурсами, однако, маловероятно, что при этом тензор Хаантьеса будет равен нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП: «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (госконтракт 16.516.11.6106), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт 14.740.11.0877, грантов РФФИ 10-05-00646, 11-05-01138, 11-05-91052, 10-01-00452, и АФГИР/CRDF RUM1-2943-RO-09.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Павлов М. В., Свинолунов С. И., Шарипов Р. А. Инвариантный критерий гидродинамической интегрируемости // Функ. анализ и его прил. 1996. Т. 30, вып. 1. С. 18–29.
- [2] Жуков М. Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 2005. 215 с.

Zhukov M. Yu. *Normal form of the electrophoresis equations.* Normal form of the electrophoresis equations is obtained. This system is the equations of hydrodynamic type. We show that for weak electrolytes system the electrophoresis equations have nonzero Haantjes tensor and have not the Riemann invariants.

ИНВАРИАНТЫ РИМАНА ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ЗОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОФОРЕЗА

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Для системы уравнений, описывающей процесс переноса примесей электрическим полем в пространственно многомерном случае, получены инварианты Римана. Построено автомодельное решение, соответствующее волнам разрежения.

Введение. Существование инвариантов Римана для систем квазилинейных гиперболических уравнений существенно упрощает построение решений таких систем. В частности, для пространственно одномерного случая наличие инвариантов Римана позволяет полностью решить задачу о распаде кусочно-постоянного начального разрыва (задача Римана) для системы уравнений, описывающих зональный электрофорез [1]. В пространственно многомерном случае общая схема построения инвариантов Римана отсутствует. В данной работе удалось построить инварианты Римана и использовать их при конструировании автомодельного решения многомерной задачи зонального электрофореза. В отличие от одномерного случая, вместо одного сорта автомодельных решений имеется множество различных типов таких решений, зависящих от параметра.

1. Основные уравнения. Процесс переноса вещества электрическим полем при зональном электрофорезе в общем случае описывается системой уравнений в бездиффузионном приближении (переменные безразмерные) [1]

$$\frac{\partial c_k}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i}_k = 0, \quad \mathbf{i}_k = \mu_k c_k \mathbf{E}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi,$$

где c_k , $\mathbf{i}_k$ — концентрация и плотность потока концентрации, μ_k — подвижность компоненты, φ , $\mathbf{E}$ — потенциал и напряженность электрического поля, $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, σ — проводимость смеси.

Предполагаем, что зависимость проводимости смеси от концентраций задается соотношением

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k \right), \quad (2)$$

где α_k — коэффициент влияния концентрации на проводимость смеси, σ_0 — проводимость чистой смеси (далее полагаем $\sigma_0 = 1$).

Исключая из системы (1), (2) плотность электрического тока $\mathbf{j}$, получим

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - (1 + s) \nabla \varphi \cdot \nabla \left(\frac{\mu_k u_k}{1 + s} \right) = 0, \quad s = \sum_{k=1}^n u_k,$$

$$\nabla(1+s) \cdot \nabla\varphi + (1+s)\Delta\varphi = 0,$$

где $u_k = \alpha_k c_k$ — эффективные концентрации, которые могут, в зависимости от знака α_k , быть либо положительными, либо отрицательными.

Вводя дифференцирование вдоль направления $\nabla\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = -(1+s)\nabla\varphi \cdot \nabla,$$

формально имеем пространственно одномерную систему квазилинейных уравнений гиперболического типа в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{\mu_k u_k}{1+s} \right) = 0, \quad s = \sum_{k=1}^n u_k,$$

которая, как хорошо известно ([1]), приводится к инвариантам Римана

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} + \lambda_k(R) \frac{\partial R_k}{\partial\xi} = 0, \quad \lambda_k = R_k \prod_{i=1}^n \frac{R_i}{\mu_i}, \quad \sigma = 1 + s = \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{R_i} > 0. \quad (3)$$

Инварианты Римана R_k по известным концентрациям u_i определяются как корни полинома

$$L(R) \equiv \prod_{k=1}^n (\mu_k - R) - R \sum_{j=1}^n u_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mu_k - R), \quad L(R) = 0.$$

Обратная зависимость дается соотношениями

$$u_s = \frac{\mu_s - R_s}{\mu_s} \prod_{k=1}^n \frac{\mu_k}{R_k} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n \frac{\mu_s - R_k}{\mu_s - \mu_k}.$$

Возвращаясь к пространственно многомерному случаю, получим систему для определения инвариантов Римана R_k и дополнительное уравнение для определения потенциала φ

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} - R_k \nabla\varphi \cdot \nabla R_k = 0, \quad \Delta\varphi - \sum_{i=1}^n \frac{\nabla R_i}{R_i} \cdot \nabla\varphi = 0. \quad (4)$$

Обратим внимание, что систему (4) не удастся записать в форме (3). В частности, характеристические скорости $R_k \nabla\varphi$, которым в (3) соответствуют λ_k , не удастся записать явно в виде зависимостей от инвариантов Римана — для их определения придется решать дополнительное уравнение. В случае ограниченных областей уравнения для потенциала φ следует дополнить краевыми условиями, которые могут существенно изменить картину эволюции компонент смеси при разделении. Описанный эффект, конечно же, не будет проявляться в пространственно одномерном случае.

2. Автомодельное решение. Для системы (4) удастся построить автомодельное решение, разыскивая такое решение в виде

$$R_k = t^\alpha r_k(\mathbf{z}), \quad \varphi = -\beta t^\gamma \Phi(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = \mathbf{x}t^\beta, \beta \neq 0. \quad (5)$$

Нетрудно показать, что при выполнении соотношений

$$\gamma + 2\beta + \alpha + 1 = 0$$

получим систему дифференциальных уравнений для функций независимой переменной $\mathbf{z}$

$$\alpha r_k + \beta \mathbf{z} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} r_k + \beta r_k \nabla_{\mathbf{z}} \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{z}} r_k = 0, \quad \Delta_{\mathbf{z}} \Phi - \sum_{k=1}^n \frac{\nabla_{\mathbf{z}} r_k \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \Phi}{r_k} = 0, \quad (6)$$

где $\nabla_{\mathbf{z}}$ — оператор дифференцирования по автомодельным переменным $\mathbf{z}$.

Таким образом, произвол в выборе решений вида (5) значительно больше, чем в пространственно одномерном случае.

Далее ограничимся ситуацией, когда R_k зависит лишь от $\mathbf{z}$, т. е. $\alpha = 0$. Тогда

$$\alpha = 0, \quad \gamma + 2\beta + 1 = 0 \quad (7)$$

и система (6) примет вид

$$(\mathbf{z}\theta_k + \nabla_{\mathbf{z}} \Phi) \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \theta_k = 0, \quad \Delta_{\mathbf{z}} \Phi - \sum_{k=1}^n \mathbf{z} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \theta_k = 0, \quad \theta_k = \frac{1}{r_k}. \quad (8)$$

Полученная система является системой для инвариантов Римана (в данном случае θ_k также инварианты Римана) для пространственно многомерного случая.

Как и в одномерном случае, имеется, по крайней мере, n решений данной системы, соответствующих центрированным волнам разрежения, для которых инварианты Римана $\theta_i = \text{const}$ ($i \neq k$, $k = 1, \dots, n$), а $\theta_k = \theta_k(\mathbf{z})$. В этом случае система (8) определяет лишь две неизвестные функции: θ_k и φ .

Опуская индекс k , запишем

$$(\mathbf{z}\theta + \nabla_{\mathbf{z}} \Phi) \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \theta = 0, \quad \Delta_{\mathbf{z}} \Phi - \mathbf{z} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \theta = 0.$$

Частное решение определяется соотношениями

$$\nabla_{\mathbf{z}} \Phi = -\mathbf{z}\theta, \quad 2\mathbf{z} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \theta + m\theta = 0,$$

где m — размерность пространства.

Линейное уравнение в частных производных первого порядка для функции θ легко решается методом характеристик. Однако, проще решать систему, используя условия совместности, то есть равенства смешанных производных функции Φ

$$\Phi_{z_i z_k} = -z_i \theta_{z_k} = \Phi_{z_k z_i} = -z_k \theta_{z_i}, \quad i \neq k.$$

Умножая эти соотношения, например, на z_k и суммируя, получим

$$\frac{\theta_{z_i}}{\theta} = -\frac{m}{2} \frac{z_i}{|z|^2}, \quad |z|^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Интегрируя, выводим (возвращая индексы для величин θ)

$$\theta_k = A|z|^{-m/2}, \quad -\nabla_z \Phi = Az|z|^{-m/2}, \quad \theta_i = \text{const}, \quad i \neq k, \quad (9)$$

где A — некоторая константа.

3. Волна разрежения. Решение (9) позволяет определить волны разрежения для пространственно многомерного случая и частично решить задачу о распаде начального разрыва для уравнений (4).

Пусть имеется начальный разрыв вида

$$\theta_k(|x_0| \mp 0, 0) = \theta_k^\mp, \quad \theta_k^- \neq \theta_k^+, \quad \theta_i(|x_0| \mp 0, 0) = \theta_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq k. \quad (10)$$

где $\theta_k^\mp, \theta_i^0$ — некоторые константы, $|x_0|$ — радиус сферы в m -мерном пространстве, на которой имеется кусочно-постоянный разрыв в момент $t = 0$.

Для определенности полагаем

$$0 < \theta_k^- < \theta_k^+. \quad (11)$$

Будем считать, что задана постоянная сила тока I , определяемая формулой

$$I = |j|S_n, \quad S_m = \eta_m|x|^{m-1}, \quad (12)$$

где S_m — площадь сферы в m -мерном пространстве ($\eta_1 = 1, \eta_2 = 2\pi, \eta_3 = 4\pi$).

Используя соотношения (1), (2) для j , (9) для $\nabla_z \Phi$ и (3) для σ , имеем

$$|I| = |\beta|A^2\eta_m t^{(2-m)\beta+\gamma} \prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{i=1, i \neq k}^n \theta_i^0. \quad (13)$$

Для того, чтобы $|I|$ не зависела при постоянном $|z|$ от времени, требуем

$$(2-m)\beta + \gamma = 0.$$

С учетом (7) имеем

$$\beta = -\frac{1}{m}, \quad \gamma = \frac{2-m}{m}.$$

Соотношение (13) при известных $|I|, \beta, \mu_i, \theta_i^0$ позволяет определить константу A .

Условия непрерывности решения на заднем $|z| = |z^-|$ и переднем $|z| = |z^+|$ фронтах волны разрежения

$$\theta_k^\mp = A|z^\mp|$$

позволяют при известных $\theta_k^\mp$, определить величины $|z^\mp|$.

Учитывая, что $|z| = |x|t^{1/m}$, выводим

$$|x^-| = |x_0| + |z^-|t^{1/m}, \quad |x^+| = |x_0| + |z^+|t^{1/m}.$$

В этом случае решение, отвечающее k -ой волне разрежения будет

$$\theta_k = \begin{cases} \theta_k^-, & |z| < |z^-|, \\ \theta_k(z), & |z^-| < |z| < |z^+|, \\ \theta_k^+, & |z^+| < |z|, \end{cases} \quad R_k = r_k = \frac{1}{\theta_k}. \quad (14)$$

Условия (11) гарантируют выполнение неравенства $|z^+| > |z^-|$.

Ширина области, занимаемой волной разрежения, очевидно, будет

$$\delta(t) = |x^+| - |x^-| = (|z^+| - |z^-|)t^{1/m}.$$

Таким образом, в одномерном случае ($m = 1$) ширина области растет как $O(t)$, в двумерном случае ($m = 2$) — как $O(t^{1/2})$ и в трехмерном случае ($m = 3$) — как $O(t^{1/3})$. Скорости движения фронтов волны разрежения, соответственно для пространств размерности $m = 1, 2, 3$, будут $O(1)$, $O(t^{-1/2})$ и $O(t^{-2/3})$. Значения $m > 3$ физически не мотивированы, по крайней мере, для задачи о переносе примеси электрическим полем.

Полученный результат означает, что поведением ширины области зоны вещества можно управлять (замедлять ее рост), проводя процесс разделения либо в цилиндре, либо в шаре, задавая изменение разности потенциалов вдоль радиуса цилиндра или шара. В теории электрофореза процесс фракционирования в указанных областях называется трансфорезом.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП: «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (госконтракт 16.516.11.6106), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт 14.740.11.0877, грантов РФФИ 10-05-00646, 11-05-01138, 11-05-91052, 10-01-00452, и АФГИР/CRDF RUM1-2943-RO-09.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жуков М. Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 2005. 215 с.

Zhukov M. Yu., Shiryayeva E. V. *The Riemann invariants for multi-dimensional zonal electrophoresis model.* In the case equations described transport of the impurities by an electric field the Riemann invariants are obtained. A self-similar solutions corresponding to rarefaction waves are constructed.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЛАМЕ ДЛЯ УПРУГОГО ШАРА

Зеленина А. А., Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена задача нелинейной моментной теории упругости для полого шара, нагруженного по внешней и внутренней поверхностям равномерно распределенными давлениями и равномерно распределенным крутящим («сверлящим») моментом. Полуобратным методом задача сведена к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Обнаружено существование нетривиального решения при отсутствии внешних нагрузок, которое описывает собственные напряжения в упругой сфере, возникающие в микрополярном теле вследствие кинематической независимости поля вращений от поля перемещений. Для модели физически линейного микрополярного тела найдено точное решение задачи о собственных напряжениях.

1. Исходные соотношения. Система уравнений нелинейной статики микрополярной упругой среды, называемой также континуумом Коссера состоит [1–4] из уравнений равновесия для напряжений

$$\operatorname{div} \mathbf{D} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} + \rho \mathbf{l} = 0 \quad (1)$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}} \quad (2)$$

$$W = W(\mathbf{E}, \mathbf{L})$$

и геометрических соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = X_k \mathbf{i}_k \\ \mathbf{L} \times \mathbf{I} &= -(\operatorname{grad} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{r}^k \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^k} \right)_{\times} \\ \mathbf{r}_s &= \frac{\partial x_m}{\partial q^s} \mathbf{i}_m, \quad \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}_s = \delta_s^k \end{aligned} \quad (3)$$

В (1)–(3) $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений типа Кирхгофа, ρ — плотность среды в отсчетной конфигурации, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{l}$ — массовые векторные плотности распределенных сил и моментов, $\mathbf{C}$ — градиент деформации (тензор дисторсии), $\mathbf{H}$ — собственно ортогональное тензорное поле микроповоротов, характеризующих вращательные степени свободы частиц моментной среды, W — удельная свободная энергия, $\mathbf{E}$ — мера деформации, $\mathbf{L}$ — тензор изгибной деформации, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, X_k , $k = (1, 2, 3)$ — декартовы координаты частиц деформированного тела (эйлеровы координаты), $\mathbf{i}_k$ — координатные орты, δ_s^k — символ Кронекера, div ,

grad — операторы дивергенции и градиента в отсчетной конфигурации материального тела (т.е. в лагранжевых координатах). В качестве лагранжевых координат можно использовать декартовы x_s или криволинейные q^s ($s = 1, 2, 3$) координаты отсчетной (недеформированной) конфигурации упругого тела. Символ $\mathbf{A}_\times$ означает векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{A} = A_{ks}\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_s$: $\mathbf{A}_\times = A_{ks}\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s$.

В дальнейшем микрополярный материал будем считать изотропным. Условие изотропности накладывает следующие ограничения на зависимость напряжений и моментных напряжений от мер деформации $\mathbf{P} = \xi(\mathbf{E}, \mathbf{L})$ и $\mathbf{K} = \zeta(\mathbf{E}, \mathbf{L})$

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}, (\det \mathbf{Q})\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}) &= \mathbf{Q}^T \cdot \xi(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \cdot \mathbf{Q} \\ \zeta(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}, (\det \mathbf{Q})\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}) &= (\det \mathbf{Q})\mathbf{Q}^T \cdot \zeta(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \cdot \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{Q}$ — любой ортогональный тензор.

2. Приведение задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим полый шар из микрополярного изотропного материала. В качестве лагранжевых координат возьмем сферические координаты $q^1 = r$, $q^2 = \varphi$ (долгота), $q^3 = \theta$ (широта). В полюсах сферы $\theta = \pm\pi/2$. Единичные векторы, касательные к координатным линиям, обозначим $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$. Предположим, что упругая сфера нагружена по внешней поверхности $r = r_0$ равномерно распределенным давлением p_0 , а по внутренней поверхности $r = r_1$ — давлением p_1 . Кроме того, поверхности сферы нагружены равномерно распределенным крутящим («сверляющим») моментом с интенсивностями m_0 и m_1 на единицу площади поверхности деформированного тела. Массовые силы и моменты принимаются в виде: $\mathbf{b} = b(r)\mathbf{e}_r$, $\mathbf{l} = l(r)\mathbf{e}_r$.

Следуя полуобратному методу [5], решение задачи будем искать в виде

$$R = R(r), \quad \Phi = \varphi, \quad \Theta = \theta \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{g}\cos\chi(r) + \mathbf{d}\sin\chi(r) \quad (6)$$

$$\mathbf{g} \triangleq \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{d} \triangleq \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{I} \times \mathbf{e}_r$$

Здесь R , Φ , Θ — сферические координаты частиц тела после деформации. Согласно (5),(6) каждая частица континуума испытывает радиальное перемещение и микроповорот вокруг радиальной оси на угол $\chi(r)$. Граничные условия поставленной выше задачи на поверхностях $r = r_0$ и $r = r_1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D} &= -p_0 \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G} &= m_0 \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r, & r &= r_0 \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D} &= -p_1 \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G} &= m_1 \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r, & r &= r_1 \end{aligned} \quad (7)$$

При помощи (3),(5),(6) находим (штрихом отмечена производная по координате r)

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= R' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{R}{r} \mathbf{g}, & \mathbf{E} &= R' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{R}{r} \cos\chi \mathbf{g} - \frac{R}{r} \sin\chi \mathbf{d} \\ \mathbf{L} &= \chi' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\sin\chi}{r} \mathbf{g} + \frac{\cos\chi - 1}{r} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (8)$$

Положим в соотношениях (4) $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 = 2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \mathbf{I}$, $\det \mathbf{Q}_1 = 1$. На основании (8) получаем

$$\mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{L} \quad (9)$$

Из (4) и (9) следуют равенства

$$\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{K} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}_1 \quad (10)$$

из которых вытекают представления

$$\mathbf{P} = P_{rr}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + P_{\varphi\varphi}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + P_{\varphi\theta}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta + P_{\theta\varphi}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi + P_{\theta\theta}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \quad (11)$$

$$\mathbf{K} = K_{rr}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + K_{\varphi\varphi}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + K_{\varphi\theta}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta + K_{\theta\varphi}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi + K_{\theta\theta}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$$

Соотношения, аналогичные (9), (10), выполняются также для тензора $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{d}$, $\det \mathbf{Q}_2 = 1$, откуда имеем

$$P_{\varphi\varphi} = P_{\theta\theta}, \quad P_{\varphi\theta} = -P_{\theta\varphi}, \quad K_{\varphi\varphi} = K_{\theta\theta}, \quad K_{\varphi\theta} = -K_{\theta\varphi} \quad (12)$$

Из (2), (11), (12) вытекает, что для изотропного однородного материала тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ имеют следующие представления

$$\mathbf{D} = D_1(r)\mathbf{g} + D_2(r)\mathbf{d} + D_3(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \quad (13)$$

$$\mathbf{G} = G_1(r)\mathbf{g} + G_2(r)\mathbf{d} + G_3(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$$

Уравнения равновесия (1) с учетом (13) принимают вид

$$D_3' + 2r^{-1}(D_3 - D_1) + \rho b(r) = 0 \quad (14)$$

$$G_3' + 2r^{-1}(G_3 - G_1) + 2r^{-1}RD_2 + \rho l(r) = 0 \quad (15)$$

После применения уравнений состояния (2) равенства (14), (15) составят систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $R(r)$, $\chi(r)$. Функции $b(r)$ и $l(r)$ считаются заданными. Граничные условия (7) в соответствии с (13) переписываются так

$$\begin{aligned} D_3 &= -p_0 r_0^{-2} R^2, & G_3 &= m_0 r_0^{-2} R^2, & r &= r_0 \\ D_3 &= -p_1 r_1^{-2} R^2, & G_3 &= m_1 r_1^{-2} R^2, & r &= r_1 \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим конкретную модель изотропной микрополярной среды — физически линейный материал [3], для которого удельная свободная энергия и тензоры напряжений задаются формулами

$$\begin{aligned} 2W &= \lambda \text{tr}^2(\mathbf{E} - \mathbf{I}) + (\mu + \varkappa) \text{tr}[(\mathbf{E} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{I})^T] + (\mu - \varkappa) \text{tr}(\mathbf{E} - \mathbf{I})^2 + \\ &+ \gamma_1 \text{tr}^2 \mathbf{L} + \gamma_2 \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \gamma_3 \text{tr} \mathbf{L}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= [\lambda \text{tr}(\mathbf{E} - \mathbf{I}) + (\mu + \varkappa)(\mathbf{E} - \mathbf{I}) + (\mu - \varkappa)(\mathbf{E}^T - \mathbf{I})] \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{G} &= [\gamma_1 \text{Itr} \mathbf{L} + \gamma_2 \mathbf{L} + \gamma_3 \mathbf{L}^T] \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\lambda, \mu, \varkappa, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — материальные постоянные.

При помощи (13), (18) найдем явные выражения компонент тензоров $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ через функции $R(r)$ и $\chi(r)$ для данной модели материала

$$\begin{aligned} D_1 &= \lambda(R' + 2r^{-1}R\cos\chi - 3)\cos\chi + 2\mu(r^{-1}R\cos\chi - 1)\cos\chi + 2\varkappa r^{-1}R\sin^2\chi \\ D_2 &= \lambda(R' + 2r^{-1}R\cos\chi - 3)\sin\chi + 2\mu(r^{-1}R\cos\chi - 1)\sin\chi - \varkappa r^{-1}R\sin 2\chi \\ D_3 &= \lambda(R' + 2r^{-1}R\cos\chi - 3) + 2\mu(R' - 1) \\ G_1 &= r^{-1} [\gamma_1(r\chi' \cos\chi + \sin 2\chi) + \gamma_2 \sin\chi + \gamma_3(\sin 2\chi - \sin\chi)] \\ G_2 &= r^{-1} [\gamma_1 \sin\chi(r\chi' + 2\sin\chi) + \gamma_2(1 - \cos\chi) + \gamma_3(\cos\chi - \cos 2\chi)] \\ G_3 &= (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\chi' + 2\gamma_1 r^{-1} \sin\chi \end{aligned} \quad (19)$$

3. Задача о собственных напряжениях. При отсутствии внешних сил и моментов имеем очевидное решение $R = r, \chi = 0$. Однако это не единственное решение при $\mathbf{b} = \mathbf{l} = p_0 = p_1 = m_0 = m_1 = 0$. Покажем, что при $\chi(r) \equiv \pm\pi$ уравнение равновесия моментов (15) удовлетворяется для любого изотропного материала, если $l(r) = 0$. При $\cos\chi = -1$ на основании (6), (8) получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \mathbf{g}, \quad \mathbf{E} = R' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \frac{R}{r} \mathbf{g}, \quad \mathbf{L} = -\frac{2}{r} \mathbf{d} \quad (20)$$

Положим в (4) $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_3 = \mathbf{I} - 2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_4 = \mathbf{I} - 2\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$, $\det \mathbf{Q}_3 = \det \mathbf{Q}_4 = -1$. В силу (4) и (20) справедливы равенства ($\alpha = 3, 4$)

$$\mathbf{Q}_\alpha^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{E}, \quad \mathbf{Q}_\alpha^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}_\alpha = -\mathbf{L} \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}_\alpha \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_\alpha, \quad \mathbf{Q}_\alpha \cdot \mathbf{K} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}_\alpha \quad (22)$$

При помощи (22) доказывается, что в случае изотропного материала коэффициенты D_2 и G_1 в выражениях (13) тождественно равны нулю. Псевдоскалярная величина $\tau(\mathbf{E}, \mathbf{L}) = \text{tr } \mathbf{K}$ в силу (4) удовлетворяет требованию

$$\tau(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}, (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}) = \det \mathbf{Q} \tau(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \quad (23)$$

Полагая в (23) $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_3$ и учитывая (21), находим, что $\text{tr } \mathbf{K} = 0$, откуда и из равенства $K_1 = 0$ получаем соотношение $G_3 = 0$. Таким образом, моментное уравнение равновесия (15) и моментные граничные условия в (16) тождественно удовлетворяются, если $l(r) = m_0 = m_1 = 0$. Уравнение (14) служит для определения функции $R(r)$. Если $p_0 = p_1 = b(r) = 0$, то в силу (20) это уравнение будет иметь решение $R(r) \neq r$. Следовательно, напряжения D_1, D_3 и G_2 будут отличны от нуля. Поскольку эти напряжения существуют при полном отсутствии внешних нагрузок, их можно назвать собственными напряжениями.

Проиллюстрируем сделанные общие выводы решением задачи о собственных напряжениях в упругой сфере из физически линейного микрополярного материала. В этом случае справедливость соотношений $D_2 = G_1 = G_3 = 0$ при $\cos\chi = -1$

непосредственно вытекает из формул (19), а напряжения D_1 , D_3 и G_2 принимают вид

$$\begin{aligned} D_1 &= \lambda(-R' + 2r^{-1}R + 3) + 2\mu(1 + r^{-1}R), \quad G_2 = r^{-1}(\gamma_2 - \gamma_3) \\ D_3 &= \lambda(R' - 2r^{-1}R - 3) + 2\mu(R' - 1) \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановка (24) в (14) при $b(r) = 0$ приводит к уравнению

$$r^2 R'' + 2rR' - 2(1 - \nu)^{-1}(1 + \nu)R = 4(1 - \nu)^{-1}(1 + \nu)r$$

которое имеет следующее общее решение

$$R = A_1 r^{\lambda_1} + A_2 r^{\lambda_2} - \frac{1 + \nu}{\nu} r, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{\frac{9 + 7\nu}{1 - \nu}} \right)$$

Постоянные A_1 и A_2 определяются из линейной неоднородной алгебраической системы уравнений, вытекающей из граничных условий (16) при $p_0 = p_1 = 0$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00459) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Toupin R. A.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1964. V 17. № 2. Pp. 85–112.
- [2] *Шкутин Л. И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 127 с.
- [3] *Zubov L. M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin: Springer, 1997. 205 p.
- [4] *Eringen A. C.* Microcontinuum Fields Theories. I. Foundations and Solids. Berlin: Springer. 1999. 325 p.
- [5] *Зеленина А. А., Zubov Л. М.* Одномерные деформации нелинейно упругих микрополярных тел // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 97–106.

Zelenina A. A., Zubov L. M. *The integrated Lamé problem for elastic sphere.*

The problem of nonlinear elastic theory with couple stress for hollow ball loaded by uniformly distributed pressures and uniformly distributed torsion («drilling») torque on external and inner surfaces is considered.

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Предложена нелинейная теория упругих оболочек типа Кирхгофа–Лява с непрерывно распределенными дислокациями. За основные неизвестные в системе разрешающих уравнений приняты компоненты тензора дисторсии деформирующейся поверхности. Система уравнений включает уравнения несовместности, в которых плотность дислокаций считается заданной функцией координат на поверхности, и уравнения равновесия с заданной плотностью внешней нагрузки. Рассмотрены задачи кручения и изгиба круговой цилиндрической оболочки с дислокациями. Эти задачи сведены либо к обыкновенным дифференциальным уравнениям, либо к алгебраическим уравнениям. При отсутствии внешних нагрузок найдено несколько точных решений об изометрических деформациях оболочки с дислокациями. Показано, что цилиндрическая оболочка с дислокациями может закручиваться или изгибаться без всякого сопротивления, т. е. без появления напряжений. Обсуждается проблема изгибания поверхностей с распределенными дислокациями.

1. Плотность дислокаций в оболочках. Пусть σ — поверхность упругой оболочки, рассматриваемой как двумерный материальный континуум, в отсчетной конфигурации, т. е. в недеформированном состоянии. Радиус-вектор точки на σ обозначим $\mathbf{r}$, а гауссовы координаты — q^α ($\alpha = 1, 2$). Введем векторы основного $\mathbf{r}_\alpha$ и взаимного базисов $\mathbf{r}^\beta$, а также оператор градиента на σ

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}, \quad \mathbf{r}^\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha = \delta_\alpha^\beta, \quad \mathbf{r}^\beta \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{grad} = \mathbf{r}^\beta \partial / \partial q^\beta \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности σ . Радиус-вектор деформированной поверхности Σ , отнесенной к тем же криволинейным координатам q^α , обозначим $\mathbf{R}$, а векторы основного базиса, взаимного базиса и единичной нормали на Σ обозначим соответственно $\mathbf{R}_\alpha$, $\mathbf{R}^\beta$, $\mathbf{N}$. Считая тензор дисторсии поверхности [1, 2] $\mathbf{F} = \text{grad} \mathbf{R} = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{R}_\alpha$ однозначной и непрерывно дифференцируемой функцией координат q^α , рассмотрим задачу определения поля перемещений оболочки $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ по заданному в многосвязной области полю тензора $\mathbf{F}$. Векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в данном случае определяется, вообще говоря, неоднозначно, что означает наличие в оболочке трансляционных дислокаций, каждая из которых характеризуется вектором Бюргерса. Следуя методу [3], перейдем от дискретного набора дислокаций к их непрерывному распределению и определим плотность дислокаций $\boldsymbol{\alpha}$ как векторное поле, интеграл от которого по любой области на σ равен суммарному вектору Бюргерса всех дислокаций, содержащихся в этой области. Указанное определение приводит к следующему уравнению относительно дисторсии.

$$\nabla \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{e} \triangleq -\mathbf{E} \times \mathbf{n} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{E}$ — трехмерный единичный тензор, $\mathbf{e}$ — дискриминантный тензор на поверхности σ [2]. При $\boldsymbol{\alpha} = 0$ уравнение (2) переходит в уравнение совместности [1] для тензора дисторсии. Если $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, то поле перемещений $\mathbf{u}$ для оболочки не существует, поэтому при $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ уравнение (2) называется уравнением несовместности.

2. Система уравнений нелинейной статики оболочек с распределенными дислокациями. В рамках двумерной модели Кирхгофа–Лява уравнения равновесия в усилиях и моментах можно представить [4] в форме векторного уравнения относительно тензоров усилий $\mathbf{D}$ и моментов $\mathbf{H}$ типа Пиолы

$$\operatorname{div} [\mathbf{D} + (\operatorname{div} \mathbf{H}) \cdot (\operatorname{Grad} \mathbf{r}) \mathbf{N}] + \mathbf{f} = 0, \quad \operatorname{Grad} \mathbf{r} = \mathbf{R}^\beta \partial \mathbf{r} / \partial q^\beta \quad (3)$$

Тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ выражаются через тензор дисторсии $\mathbf{F}$ при помощи уравнений состояния

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{H} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{K}}, \quad W = W(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^T) \quad (4)$$

и геометрических соотношений

$$\mathbf{K} = \operatorname{grad} \mathbf{N} = -(\operatorname{Grad} \mathbf{r}) \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \quad (5)$$

$$\operatorname{Grad} \mathbf{r} = J^{-2} \mathbf{F}^T \cdot [\mathbf{g} \operatorname{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) - \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T] \quad (6)$$

$$J \mathbf{N} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{F}^2 - \mathbf{F} \operatorname{tr} \mathbf{F} + \frac{1}{2} \mathbf{E} (\operatorname{tr}^2 \mathbf{F} - \operatorname{tr} \mathbf{F}^2), \quad J = \sqrt{\frac{1}{2} [\operatorname{tr}^2(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) - \operatorname{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^2]} \quad (7)$$

В (3)–(7) $\mathbf{f}$ — вектор приведенной внешней нагрузки, действующей на единицу площади поверхности σ , W — удельная (на единицу площади поверхности σ) энергия деформации оболочки, $\operatorname{Grad} \mathbf{r}$ — обратный тензор дисторсии, $\mathbf{g}$ — первый фундаментальный тензор поверхности σ , $(J - 1)$ — локальное относительное изменение площади поверхности при деформации. При помощи (4)–(7) все величины, стоящие в квадратных скобках уравнения (3), выражаются через тензор дисторсии $\mathbf{F}$. Присоединив к (3) уравнение несовместности (2), получим полную систему уравнений относительно тензора дисторсии.

При вращении оболочки как абсолютно твердого тела вектор Бюргерса изолированной дислокации поворачивается вместе с оболочкой. Поэтому вектор плотности дислокаций следует считать заданным в виде $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \mathbf{A}$, где $\boldsymbol{\alpha}_0$ — заданная функция гауссовых координат, а $\mathbf{A}$ — тензорное поле поворотов элементарных площадок поверхности, выражаемое через поле дисторсии при помощи формулы [2]

$$\mathbf{A} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1/2} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N} \quad (8)$$

Если толщина оболочки весьма мала, ее изгибной жесткостью можно пренебречь и использовать нелинейную мембранную (безмоментную) теорию оболочек. В случае мембранной теории удельная энергия W не зависит от тензора $\mathbf{K}$, тензор моментов $\mathbf{H}$ равен нулю, уравнение равновесия (3) принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{D} = dW(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) / d\mathbf{F} \quad (9)$$

Если материал оболочки изотропен, то удельная энергия W будет функцией инвариантов J и $\operatorname{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)$.

Предположим, что граница оболочки $\partial\sigma$ состоит из двух связных участков: $\partial\sigma = \gamma' \cup \gamma''$. Наиболее распространенные краевые условия мембранной теории оболочек состоят из дисторсионных [1] условий на γ' и силовых условий на γ'' соответственно:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{V}(s); \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau}(s) \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали к контуру $\partial\sigma$ ($\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$), $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к $\partial\sigma$, s — текущая длина дуги на $\partial\sigma$, $\mathbf{V}(s)$ и $\boldsymbol{\tau}(s)$ — заданные вектор-функции.

3. Кручение, растяжение и раздувание цилиндрической трубки с дислокациями. Пусть x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты в пространстве, $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — соответствующие орты. Уравнение поверхности цилиндрической оболочки зададим в виде $x_1 = r_0 \cos \varphi$, $x_2 = r_0 \sin \varphi$, $x_3 = z$, а в качестве гауссовых координат примем $q^1 = \varphi$, $q^2 = z$. Введем единичные векторы ($\psi = \text{const}$)

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_r \cos \psi z + \mathbf{e}_\varphi \sin \psi z, \quad \mathbf{e}_\Phi = -\mathbf{e}_r \sin \psi z + \mathbf{e}_\varphi \cos \psi z$$

и зададим тензорное поле дисторсии в виде, описывающем кручение цилиндра с углом закручивания ψ , которое сопровождается раздуванием и осевым растяжением-сжатием

$$\mathbf{F} = F_{11} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + F_{21} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi + F_{22} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad F_{\alpha\beta} = \text{const} \quad (12)$$

Предположим, что в оболочке распределены винтовые дислокации с плотностью $\boldsymbol{\alpha} = a_0 \mathbf{e}_R$, $a_0 = \text{const}$, и она нагружена внутренним равномерным гидростатическим давлением p , так что вектор $\mathbf{f}$ имеет вид $\mathbf{f} = p \mathbf{J} \mathbf{e}_R$.

Если материал оболочки изотропен, то тензор усилий Пиолы согласно (12) имеет представление

$$\mathbf{D} = D_{11} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + D_{12} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + D_{21} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi + D_{22} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad D_{\alpha\beta} = \text{const} \quad (13)$$

В силу (12), (13) уравнения несовместности (2) и равновесия (9) сводятся к алгебраическим соотношениям

$$r_0 \psi F_{11} - F_{21} = r_0 a_0, \quad D_{11} + r_0 \psi D_{21} = r_0 F_{11} F_{22} p \quad (14)$$

Здесь предполагается, что напряжения $D_{\alpha\beta}$ выражены через компоненты дисторсии при помощи уравнений состояния. Считая заданными осевую силу и крутящий момент, действующие в сечении оболочки $z = \text{const}$, получим, в дополнение к (14), еще два соотношения для определения постоянных $F_{11}, F_{21}, F_{22}, \psi$. При отсутствии внешних нагрузок согласно (14) в оболочке реализуется изометрическая деформация, когда $F_{11} = 1, F_{22} = 1, F_{21} = 0, D_{\alpha\beta} = 0$, а тензор дисторсии выражается через собственно ортогональный тензор $\mathbf{A}_1$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R \quad (15)$$

При изометрической деформации из (14) следует, что $\psi = a_0$. Это означает, что трубка закручивается, не оказывая кручению никакого сопротивления, а угол закручивания равен плотности винтовых дислокаций.

4. Нелинейный изгиб цилиндрической оболочки с распределенными дислокациями. Введем в рассмотрение единичные векторы ($\omega = \text{const}$)

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 \cos \omega z + \mathbf{i}_3 \sin \omega z, \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{i}_2 \sin \omega z + \mathbf{i}_3 \cos \omega z \quad (16)$$

и предположим, что в цилиндрической трубке, нагруженной внутренним гидростатическим давлением p , распределены краевые дислокации с плотностью $\boldsymbol{\alpha} = \beta(\varphi) \mathbf{e}_3$. Решение задачи о равновесии оболочки будем искать в виде, позволяющем свести исходную двумерную задачу к одномерной

$$\mathbf{F} = F_{11}(\varphi) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_1 + F_{12}(\varphi) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_2 + F_{23}(\varphi) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (17)$$

Выражение (17) описывает конечную деформацию чистого изгиба трубки, при которой поперечные сечения оболочки поворачиваются на угол ωz вокруг орта $\mathbf{i}_1$, а также деформируются в своей плоскости. Для изотропной безмоментной оболочки тензор усилий Пиолы согласно (17) будет иметь представление

$$\mathbf{D} = D_{11}(\varphi) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_1 + D_{12}(\varphi) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_2 + D_{23}(\varphi) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (18)$$

Подстановка (16)–(18) в уравнение несовместности (2) и уравнение равновесия (9) приводит к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $F_{11}(\varphi)$, $F_{12}(\varphi)$, $F_{23}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} dF_{23}/d\varphi - r_0 \omega F_{12} &= r_0 \beta(\varphi) \\ dD_{11}/d\varphi + r_0 F_{23} F_{12} p &= 0, \quad dD_{12}/d\varphi - r_0 \omega D_{23} - r_0 F_{23} F_{11} p = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Для отыскания постоянной ω уравнения (19) надо дополнить соотношением для заданного изгибающего момента M , действующего на торцах цилиндрической оболочки. Если внешние нагрузки отсутствуют ($p = M = 0$), а $\beta(\varphi) = b_0 \cos \varphi$, $b_0 = \text{const}$, то система (19) имеет решение в виде изометрической деформации, при которой напряжения в безмоментной оболочке равны нулю

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_2^{-T} = \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad \omega = -b_0 \end{aligned} \quad (20)$$

Это решение означает, что трубка с дислокациями изгибается без появления напряжений.

5. Изгибание поверхностей с распределенными дислокациями. При отсутствии внешних нагрузок уравнение равновесия (2) тождественно удовлетворяется для изометрической деформации, когда $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{g}$. Из последнего равенства и (8) и вытекает, что $\mathbf{F} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — собственно ортогональное тензорное поле. Геометрически это означает, что при изометрической деформации, называемой также изгибанием, каждая элементарная площадка перемещается как абсолютно твердое тело. Согласно (2) тензорное поле $\mathbf{A}(q^1, q^2)$ подчиняется системе уравнений

$$\text{div}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{A}) = \boldsymbol{\alpha}_0(q^1, q^2) \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{A} = 1, \quad (21)$$

где α_0 — заданная функция. При $\alpha_0 = 0$ система (21) отвечает классической проблеме изгибаний поверхности. В качестве примера рассмотрим изгибание замкнутой единичной сферы с распределенными дислокациями. При $\alpha_0 = 0$ замкнутая сфера, как известно [5] неизгибаема, т. е. не допускает регулярных изгибаний. Однако при наличии распределенных дислокаций, как показано ниже, сфера может стать изгибаемой. В самом деле, при $\alpha_0 = a(\theta)\mathbf{e}_\varphi$ система (21) имеет решение

$$\mathbf{A} = (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)\cos\chi(\theta) + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta)\sin\chi(\theta), \quad (22)$$

где функция $\chi(\theta)$ определяется из уравнения

$$\sin\chi(\theta) + [1 - \cos\chi(\theta)] \operatorname{tg}\theta = a(\theta) \quad (23)$$

Здесь θ — географическая широта на сфере ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_r$ — единичные векторы, направленные соответственно по касательной к параллели, по касательной к меридиану и по нормали к сфере. Формула (22) описывает конечный поворот вокруг вектора $\mathbf{e}_\varphi$ на угол $\chi(\theta)$. При $a(\theta) \equiv 0$ уравнение (23) имеет только одно непрерывное решение $\chi(\theta) \equiv 0$, что означает неизгибаемость сферы без дислокаций. Если $a(\theta) \neq 0$, то уравнение (23) может иметь нетривиальное непрерывное решение. В частности, при $a(\theta) = a_0 \cos \theta$ и $|a_0| \ll 1$ решение уравнения (23) имеет вид $\chi = a_0 \cos \theta$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00459) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубов Л. М. Статико-геометрическая аналогия и вариационные принципы в нелинейной безмоментной теории оболочек // Труды XII Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. Т. 2. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1980. С. 171–176.
- [2] Зубов Л. М. Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Ростовского ун-та, 1982. 143 с.
- [3] Зубов Л. М. Линейная теория дислокаций и дисклинаций в упругих оболочках // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 928–942.
- [4] Zubov L. M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin: Springer, 1997. 205 p.
- [5] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981. 344 с.

Zubov L. M. *The nonlinear deforming of elastic shells with distributed dislocations.* The nonlinear theory of Kirchhoff-Love type elastic shells with continuously distributed dislocations is suggested.

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ РАСЧЕТ ДИНАМИКИ СОСТАВНОГО ПОРОУПРУГОГО ТЕЛА

Игумнов Л. А., Карелин И. С., Петров А. Н.

НИИМ Нижегородского университета, Нижний Новгород

Рассматривается модель пористой среды Био [1, 2]. Представлены результаты расчетов динамического состояния составных конечных пороупругих тел на основе метода граничных элементов. Продемонстрировано влияние значений параметров модели материала на динамические отклики.

Введение. В работе используются модифицированные интегральные представления волновых полей в одномерных пороупругих средах, полученные ранее М. Schanz [3]. На основе новых граничных интегральных уравнений (ГИУ) [4] пороупругости получены интересные численные гранично-элементные решения.

1. Математическая модель. Для однородного пороупругого тела Ω^l система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр s) для смещения $\hat{u}_i^l$ и порового давления $\hat{p}^l$ имеет следующий вид:

$$G^l \hat{u}_{i,jj}^l + \left(K^l + \frac{1}{3} G^l \right) \hat{u}_{j,ij}^l - (\alpha^l - \beta^l) \hat{p}_{,i}^l - s^2 (\rho^l - \beta^l \rho_f^l) \hat{u}_i^l = -\hat{F}_i^l,$$
$$\frac{\beta^l}{s \rho_f^l} \hat{p}_{,ii}^l - \frac{\phi^{l2} s}{R^l} \hat{p}^l - (\alpha^l - \beta^l) s \hat{u}_{i,i}^l = -\hat{a}^l, i, j = \overline{1, 3}$$
$$\beta^l = \frac{k^l \rho_f^l \phi^{l2} s^2}{\phi^{l2} s + s^2 k^l (\rho_a^l + \phi^l \rho_f^l)},$$

где G^l, K^l — константы упругости, ϕ^l — пористость, k^l — проницаемость, α^l — эффективный коэффициент напряжений, $\rho^l, \rho_a^l, \rho_f^l$ — плотности пористого скелета, присоединенной массы и жидкой среды, $\hat{F}_i^l, \hat{a}^l$ — плотности источников.

Для численного обращения решения использован алгоритм, предложенный Дурбином [5].

2. Гранично-элементная дискретизация. Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассмотрим регуляризованное ГИУ для обобщенного вектора перемещений $\hat{u}^l = (u_1^l, u_2^l, u_3^l, p^l)$ и обобщенного вектора поверхностной силы $\hat{t}^l = (t_1^l, t_2^l, t_3^l, q^l)$ в сочетании с условиями контакта. Граница области аппроксимируется обобщенными восьмиузловыми четырехугольными элементами. Обобщенные граничные поля $(\hat{u}^l, \hat{t}^l)$ поэлементно линейно аппроксимируются по обобщенным перемещениям и постоянно — по обобщенным поверхностным силам.

Для получения дискретного аналога ГИУ применим метод коллокации. В качестве узлов коллокации будем выбирать узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируются системы линейных алгебраических уравнений для каждой подобласти Ω^l . Необходимо отметить, что коэффициенты дискретных аналогов могут иметь особенность типа $O(r^{-1})$ и $O(r^{-2})$. Это определяет специфику

вычислительного процесса. Для возможности численного решения ГИУ, необходимо выделить особенности в ядрах ГИУ. Особенности всех компонент аналогичных матриц для упругой динамики имеют один и тот же порядок. В пороупругой динамике разные компоненты имеют разные порядки, что существенно на этапе гранично-элементной методики, на котором производится поэлементное интегрирование.

3. Гранично-элементные результаты. Рассмотрим задачу о действии силы на торец составного призматического пороупругого тела (рис. 1а), решение этой задачи соответствует аналитическому решению задачи, изображенной на рис. 1б. Задавались следующие краевые условия: на боковой поверхности в качестве известных заданы $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $q = 0$, а в качестве неизвестных u_2 , σ_1 , σ_3 , p ; на границе $x_2 = 0$ известные $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $q = 0$, а неизвестные σ_1 , σ_2 , σ_3 , p ; на границе $x_2 = l$ известные $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1 \text{ Н/м}^2$, $\sigma_3 = 0$, $p = 0$, а неизвестные u_1 , u_2 , u_3 , q .

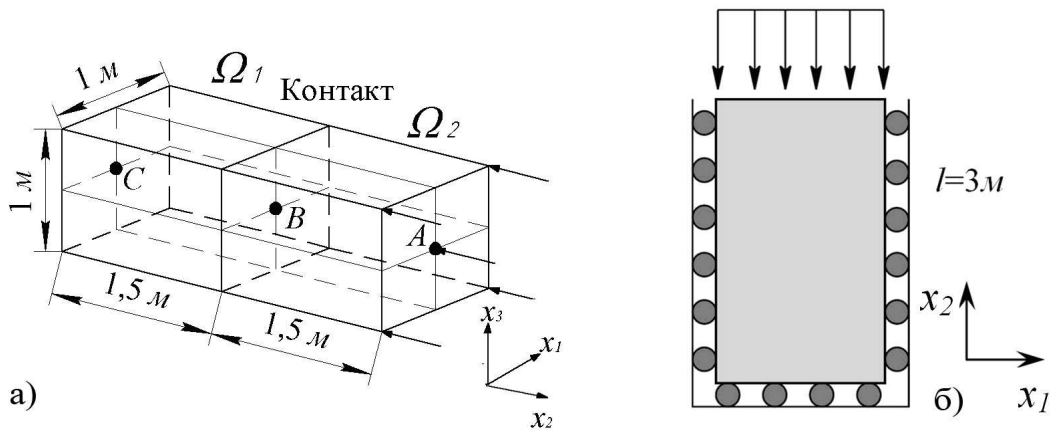


Рис. 1.

Параметрами материала для полной модели Био следующие: $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $R = 4,7 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $k = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/\text{Нс}$, $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\phi = 0,19$; $\alpha = 0,867$. На торец ($x_2 = 3 \text{ м}$) действует хевисайдова сила $t_2 = -1 \text{ Н/м}^2$. ГЭ-сетка каждой из подобластей состоит из 506 точек и 504 элементов. На рис. 2 представлены перемещения в точках A и B , на рис. 3 соответственно давления в точках B и C .

Кроме того, проведено исследование влияния параметров пористости и проницаемости на динамический отклик. В качестве примера таких исследований на рис. 4 представлено перемещение в точке A , причем цифрами на рисунке маркированы кривые, полученные при следующих значениях параметра проницаемости: 1 — $k = 1,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4/\text{Нс}$, 2 — $k = 2,9 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4/\text{Нс}$, 3 — $k = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ м}^4/\text{Нс}$.

Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, при поддержке РФФИ (проект № 10-08-01017-а) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8.

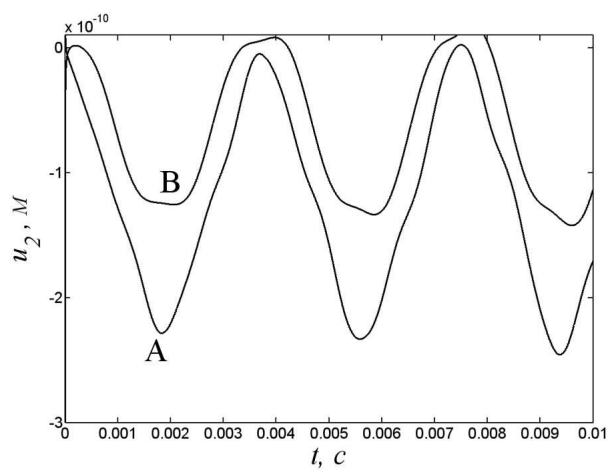


Рис. 2.

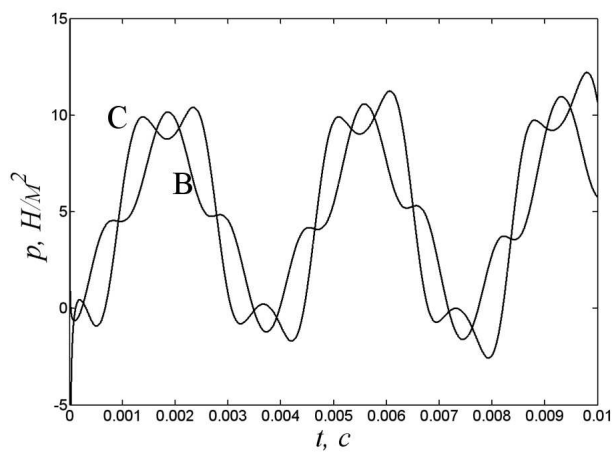


Рис. 3.

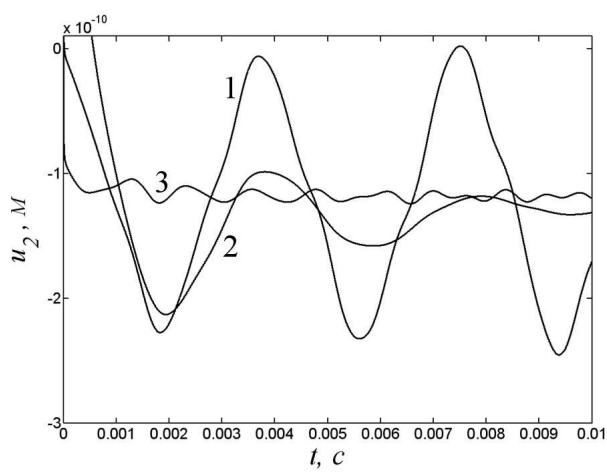


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Biot M.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. V. 28 № 2. Pp. 168–178.
- [2] *Biot M.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. V. 28 № 2. Pp. 179–191.
- [3] *Schanz M.* Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
- [4] *Аменицкий А. В., Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // *Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб.* 2009. V. 71 С. 164–171.
- [5] *Durbin F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // *The Computer Journal.* 1974. V. 17 № 4. Pp. 371–376.

Igumnov L. A., Karelin I. S., Petrov A. N. *Boundary element computation for dynamics of composite porous elastic body.* A model of Bio's porous medium is considered. Based on boundary element method the results of computations for a dynamic condition of composite porous elastic bodies are presented. The influence of material model parameters on the dynamic responses is demonstrated.

МАТРИЦА ГРИНА ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Марков И. П., Пазин В. П.
НИИМ Нижегородского университета, Нижний Новгород

Рассмотрена система уравнений анизотропной теории магнитоэлектродупругости. Применены два способа построения матриц Грина: отмечены их достоинства и недостатки. Приведен численный пример.

Введение. Функции Грина используются для нахождения аналитических решений многих прикладных задач особенно в методе граничных элементов. Активно функция Грина используется при исследовании трещин, дефектов, включений.

Для анизотропных и пьезоэлектрических материалов с электромеханической связью функциям Грина уделено большое внимание: Deeg W.F. (1980), Wang B. (1992), Benveniste Y. (1992), Chen T.Y. (1993), Chen T.Y., Lin F.Z. (1993), Pan E., Tonon F. (2000), Pan E., Yuan F.G. (2000), Wang Z.K., Chen G.C. (1994), Wang Z.K., Zheng B.L. (1995), Dunn M.L. (1994), Dunn M.L., Wienecke H.A. (1996, 1997, 1999), Ding H.J., Liang J., Chen B. (1996, 1997) и др.

Широкий класс кристаллов (Sirotn Y.I., Shaskolskaya M.P., 1982) и появляющиеся композитные материалы (Huang J.H., Kuo W.S., 1997; Li J.Y., Dunn M.L., 1998) обладают одновременно пьезоэлектрическими, пьезомагнетическими и магнитоэлектрическими эффектами. Основываясь на расширенном формализме Pan E. (2002) получил трехмерные функции Грина для анизотропных бесконечных, двухфазных и полубесконечных магнитоэлектродупругих сред. Среди авторов, занимавшихся функциями Грина для магнитоэлектродупругих сред отметим следующих: Wang X., Shen Y.P. (2002), Alshits V.I., Kirchner H.O.K., Ting T.C.T. (1995), Kirchner H.O.K., Alshits V.I. (1996), Liu J.X., Liu X.L., Zhao Y.B. (2001).

1. Постановка задач. Базовые уравнения трехмерной линейной теории магнитоэлектродупругости имеют вид [1, 2]:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad D_{i,i} - Q = 0, \quad B_{i,i} - M = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijklm} \varepsilon_{lm} - e_{kij} E_k - q_{kij} H_k, \quad D_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \tilde{\varepsilon}_{ij} E_j + \lambda_{ij} H_j, \quad (2)$$

$$B_i = q_{ijk} \varepsilon_{jk} + \lambda_{ij} E_j + \mu_{ij} H_j, \quad i, j, k, l, m = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad H_i = -\vartheta_{,i}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

где σ_{ij} , D_i , B_i соответственно компоненты тензора напряжения, вектора электрического смещения и магнитной индукции; F_i , Q , M — компоненты плотностей объемной силы, плотности электрического заряда и плотности электрического тока; ε_{ij} — компоненты тензора деформации, E_j — компоненты вектора электрического поля, H_j — компоненты вектора магнитного поля; C_{ijklm} , e_{ijk} , $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, μ_{ij} , q_{ijk} , λ_{ij} —

упругие модули, электроупругие коэффициенты, диэлектрические константы, модули магнитной проходимости, пьезомагнитные и магнитоэлектрические коэффициенты; u_i , ϕ и ϑ — упругое смещение, электрический и магнитный потенциал.

Сгруппируем базовые компоненты для (1)–(4) следующим образом [3]:

$$\hat{u}_i = \begin{cases} u_i, & i = 1, 2, 3, \\ \phi, & i = 4, \\ \vartheta, & i = 5, \end{cases} \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij}, & i = 1, 2, 3, \\ -E_j, & i = 4, \\ -H_j, & i = 5, \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & j = 1, 2, 3, \\ D_i, & j = 4, \\ B_i, & j = 5, \end{cases} \quad \hat{C}_{ijkl} = \begin{cases} C_{ijkl}, & j, k = 1, 2, 3, \\ e_{lij}, & j = 1, 2, 3, k = 4, \\ e_{ikl}, & j = 4, k = 1, 2, 3, \\ q_{lij}, & j = 1, 2, 3, k = 5, \\ q_{ikl}, & j = 5, k = 1, 2, 3, \\ -\lambda_{il}, & j = 4, k = 5; j = 5, k = 4, \\ -\varepsilon_{il}, & j, k = 4, \\ -\mu_{il}, & j, k = 5. \end{cases}$$

Тогда физические уравнения и уравнения равновесия систем (1)–(4) запишутся в форме уравнений анизотропной теории упругости [4]. Тем самым, можем применить для систем (1)–(4) подходы построения матрицы Грина, разработанные для анизотропной теории упругости [5].

2. Получение формул представления матрицы Грина. Математически матрица Грина может быть определена следующим образом:

$$\hat{C}_{ijkl} G_{km,li}(x) = -\delta_{jm} \delta(x), \quad i, j, k, l, m = \overline{1, 3}.$$

Рассмотрим интегральный метод. Матрица G_{jk} с использованием обратного преобразования Радона может быть записана следующим образом [6]:

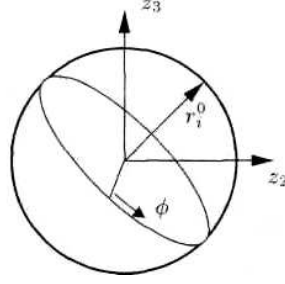
$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} (M_{jk}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i) ds(z_i) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{S^2} (M_{jk}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i^0) ds(z_i),$$

$$r_i^0 = \frac{r_i}{r}, \delta(z_i r_i) = \delta(r z_i r_i^0) = \frac{1}{r} \delta(z_i r_i^0), M_{jk}^{zz} = \hat{C}_{ijkl} z_i z_l.$$

Интеграл по сфере $S^2: z_i z_i = 1$ преобразуется к интегралу по окружности:

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} (M_{jk}^{zz}(z_i(\phi)))^{-1} d\phi. \quad (5)$$

Единичная окружность является пересечением единичной сферы с плоскостью $z_i r_i^0 = 0$.

Рис. 1. Пересечение единичной сферы с плоскостью $z_i r_i^0 = 0$.

Продemonстрируем второй метод. Обратную матрицу ($M^{zz}(z)$) представим через матрицу алгебраических дополнений $A_{jk}(z)$ и определитель $D(z)$, тогда матрица Грина примет вид [3]:

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{A_{jk}(z_i)}{D(z_i)} \delta(z_i r_i) dS(z_i) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{jk}(p + \zeta q)}{D(p + \zeta q)} d\zeta. \quad (6)$$

Применение теории вычетов позволяет записать следующее:

$$G_{jk}(x) = -\frac{1}{2\pi r} \text{Im} \sum_{m=1}^5 \frac{A_{jk}(p + \zeta_m q)}{a_{11}(\zeta_m - \zeta_m^*) \prod_{k=1, k \neq m}^5 (\zeta_m - \zeta_k)(\zeta_m - \zeta_k^*)} \quad (7)$$

где ζ_m — корни многочлена десятой степени от ζ $D(p + \zeta q)$; a_{11} — коэффициент при ζ^{10} ; $\text{Im} \zeta_m > 0$, $m = \overline{1, 5}$; ζ_m^* — сопряженное к ζ_m .

Итак, в отличие от интеграла (5), второй способ дает явную формулу (7), что гарантирует эффективность использования $G(x)$ и точность получаемых результатов. Отметим, что при построении (7) все полюсы предполагались простыми. В случае кратных полюсов небольшие изменения в константах позволяют свести задачу к простым полюсам с незначительными ошибками в вычислениях расширенной матрицы Грина [7]. При вычислении важно, что матрица M_{jk}^{zz} симметрична, как и ее алгебраическое дополнение A_{jk} , а значит расширенная матрица Грина симметрична и необходимо вычислить лишь 15 элементов из 25.

3. Численные эксперименты. Для удобства тензор упругих модулей C_{ijkl} запишем через следующие константы $c_{\alpha\beta}$ ($\alpha = \overline{1, 6}$, $\beta = \overline{1, 6}$) [8].

Пьезомагнитные коэффициенты q_{kij} могут быть записаны с двумя индексами q_{kp} ($k = \overline{1, 3}$, $p = \overline{1, 6}$) следующим образом:

$$q_{k1} = q_{k11} ; \quad q_{k2} = q_{k22} ; \quad q_{k3} = q_{k33} ; \quad q_{k4} = q_{k23} = q_{k32} ;$$

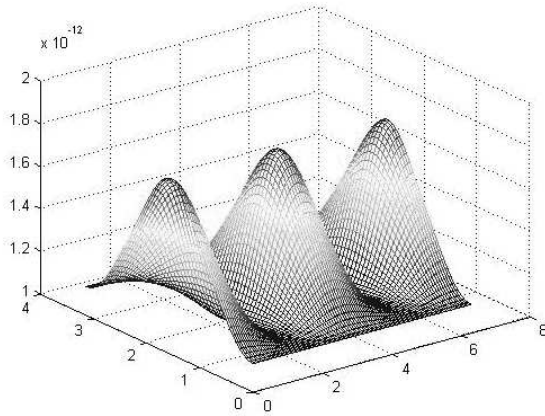
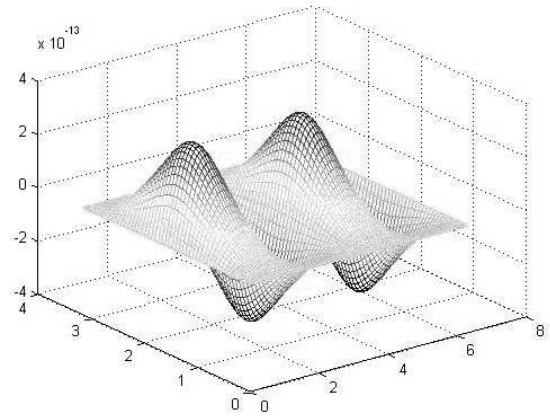
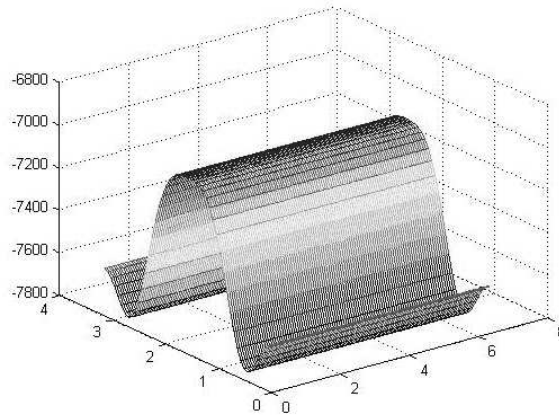
$$q_{k5} = q_{k13} = q_{k31} ; \quad q_{k6} = q_{k12} = q_{k21} .$$

В качестве примера рассмотрим магнитоэлектрoупругий материал $BaTiO_3$ [1].

Опишем построение матриц Грина в виде двумерных поверхностей на основе интерполяционной схемы вычисления. Функции $G_{jk}(x)$ зависят от трех пространственных переменных x_1 , x_2 и x_3 . Перейдем к сферическим координатам (r, θ_1, θ_2) .

Для единичной сферы $G_{jk}(\theta_1, \theta_2)$ — функции только двух переменных — полярного угла $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ и азимутного угла $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Значение G_{jk} от конкретных θ_1 и θ_2 строится с помощью интерполяции Лагранжа [2].

На рис. 2–4 представлены компоненты магнитоэлектроупругой матрицы Грина для $BaTiO_3$.

Рис. 2. Компонента G_{11} .Рис. 3. Компонента G_{12} .Рис. 4. Компонента G_{55} .

Заключение. Представленные подходы построения матриц Грина позволяют получать значения необходимых компонент с высокой точностью. Вид компонент магнитоэлектроупругих матриц Грина позволяет учесть специфику их поведения при организации поэлементного численного интегрирования для получения коэффициентов дискретного аналога соответствующего граничного интегрального уравнения.

Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, при поддержке РФФИ (проект № 10-08-01017-а) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Huang J. H., Kuo W. S.* The analysis of piezoelectric/piezomagnetic composite materials containing ellipsoidal inclusions // *Journal of Applied Physics*. 1997. № 81. Pp. 1378–1386.
- [2] *Li J., Dunn M. L.* Micromechanics of magneto-electro-elastic composite materials: Average fields and effective behavior // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 1998. № 9. Pp. 404–416.
- [3] *Pan E.* Three-dimensional Green's functions in anisotropic magneto-electro-elastic bimaterials // *Zeitschrift for angewandte Mathematik und Physik*. 2002. № 53. Pp. 815–838.
- [4] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [5] *Игумнов Л. А. [и др.]* Численно-аналитическое построение матриц Грина трехмерных теорий упругости и электроупругости // *Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И.Лобачевского*. 2010. № 3. Часть 1 С. 134–140.
- [6] *Баженов В. Г., Игумнов Л. А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
- [7] *Tonon F., Pan E., Amadei B.* Green's functions and BEM formulation for 3D anisotropic media // *Computers and Structures*. 2001. № 79. С. 469–482.
- [8] *Ting T. C. T.* Anisotropic Elasticity — Theory and Applications // Oxford University Press, New York.

Igumnov L. A., Litvinchuk S. Yu., Pazin V. P., Markov I. P. *Green's matrix in three-dimensional theory magneto-electro-elasticity.* A system of equations for anisotropic magneto-electro-elasticity theory is considered. Two manners for deriving Green's matrices are used. Advantages and defects of these manners are discussed. A numerical example is given.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ОДНОМЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ

Клевчишкина Н.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках одномерной модели изучено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее возмущения радиуса стенки кровеносного сосуда. Представлено решение этого уравнения, выражающееся через эллиптические функции Якоби. Рассмотрены предельные случаи, когда решение выражается в элементарных функциях. Проведено исследование решения в зависимости от скорости волны; представлены соответствующие графические зависимости. Осуществлена линеаризация задачи и дан сравнительный анализ результатов, полученных в рамках линейной и нелинейной моделей.

1. Введение. Гидродинамика кровообращения — интенсивно развивающаяся область биомеханики. Отметим, что задача о движении жидкости по трубкам с тонкими эластичными стенками рассмотрена в [1], при этом большая часть аналитических результатов о распространении возмущений в жидкости и характерных режимах течения получена в рамках линейной одномерной теории. Однако в ряде работ [2, 3] подчеркивается необходимость учета нелинейных эффектов, возникающих при движении крови в сосудах и определяющих особенности ее движения. Цель данной работы состоит в учете нелинейной упругости стенок крупных сосудов и оценке этого фактора.

2. Постановка задачи. Рассматривается течение жидкости в аксиально-симметричной эластичной трубке при следующих допущениях: жидкость несжимаема, плотность стенки трубки постоянна, деформация трубки характеризуется изменением её радиуса, радиус трубки зависит от координаты и времени; деформации стенки трубки и её толщина малы по сравнению с радиусом, а характерные длины волновых процессов много больше равновесного радиуса; давление жидкости в потоке одинаково по всему сечению трубки и зависит от координаты и времени. В настоящей работе ограничимся на начальном этапе анализом нелинейных волн в длинноволновом приближении и при больших числах Рейнольдса. Такое приближение оказывается справедливым для средних и крупных артерий [4].

Система уравнений в безразмерных переменных для описания одномерного течения жидкости в аксиально-симметричной эластичной трубке при сделанных предположениях примет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Su)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$S = \left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^2 \quad (3)$$

$$P = 1 + \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \alpha \eta + \lambda \eta^2 \quad (4)$$

Здесь $u = u(x, t)$ — средняя по сечению осевая компонента скорости, $S = S(x, t)$ — площадь поперечного сечения трубки, $P(x, t)$ — давление в жидкости, $\eta(x, t)$ — возмущения радиуса стенки трубки, $\alpha = \frac{\rho c_0^2}{P_e}$, $\beta = \frac{k h_0 R_0}{2 P_0 l^2}$, $\gamma = \frac{\rho_w h_0 R_0 c_0^2}{2 P_0 l^2}$, $\lambda = \frac{\kappa_2 h_0}{4 P_0}$ — гемодинамические параметры.

Исследование представленной системы начнем с отыскания стационарных решений.

3. Отыскание стационарных решений. Введём в рассмотрение переменную $\theta = x - wt$ и будем отыскивать решения системы (1)–(4), зависящие только от переменной θ . Преобразовав систему уравнений с учетом замены переменных, придем к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно возмущений радиуса

$$A_1 \eta'' + A_2 \eta + A_3 \eta^2 = a_2 - \frac{1}{\alpha} + w \left(w + \frac{a_1}{(1 + \frac{\eta}{2})^2} \right) - \frac{1}{2} \left(w + \frac{a_1}{(1 + \frac{\eta}{2})^2} \right)^2 \quad (5)$$

где $A_1 = \frac{\gamma w^2 - \beta}{\alpha}$, $A_2 = 1$.

Отметим, что a_1, a_2 — это первые интегралы уравнений (1) и (2) соответственно.

4. Редукция. Солитонное решение. Принимая во внимание малые возмущения радиуса стенки $\eta(x, t)$, разложим правую часть уравнения (5) в окрестности нуля, пренебрегая слагаемыми порядка η^3 и выше. Придем к уравнению второго порядка

$$A_1 \eta'' = B_0 + B_1 \eta + B_2 \eta^2 \quad (6)$$

где $B_0 = a_2 - \frac{1}{\alpha} + \frac{w^2}{2} - a_1^2$, $B_1 = -A_2 + a_1^2$, $B_2 = -A_3 - \frac{5}{4} a_1^2$.

Последовательной заменой переменных и интегрированием данное уравнение приводится к уравнению, определяющему эллиптическую функцию Якоби $sn(z, K)$ [5]. Решение уравнения (6) имеет вид

$$\eta(x - wt) = \alpha_3 - (\alpha_3 - \alpha_2) sn^2 \left(\sqrt{\frac{B_2(\alpha_3 - \alpha_1)}{6A_1}} (x - wt), K \right) \quad (7)$$

Полученное решение имеет две предельные формы. При α_2 , стремящемся к α_1 , решение принимает вид

$$\eta(x - wt) = \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_2) \sec^2 \left(\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1} (x - wt) \right), \quad (8)$$

и описывает импульс с полушириной $(\alpha_3 - \alpha_2)^{-\frac{1}{2}}$, амплитуда которого относительно уровня отсчета α_2 равна $\alpha_3 - \alpha_2$.

С другой стороны, когда α_3 стремится к α_2 и K становится малым, получается стационарное решение в виде колебаний малой амплитуды

$$\eta(x - wt) = \alpha_3 - (\alpha_3 - \alpha_2) \sin^2 \left(\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1} (x - wt) \right) \quad (9)$$

Рассмотрим зависимость решения от параметра w . Здесь и далее были выбраны следующие значения параметров, отвечающие аорте собаки [6]:

$$P_e = 6 \text{ кПа}, \quad \rho_w = 1.06 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^3, \quad \rho = 1.2 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 0.499,$$

$$E = 5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2, \quad R_0 = 0.0065 \text{ м}, \quad h_0 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad k = 1, \quad l = 0.1 \text{ м}.$$

В зависимости от параметра w будет меняться модуль эллиптической функции K . На рис. 1 представлены графики функции $\eta(x - wt)$ при различных значениях параметра t (сплошной линии соответствует $t = 0$, пунктирной — $t = 0.00015$, точкам — $t = 0.0003$) при $w = 5$.

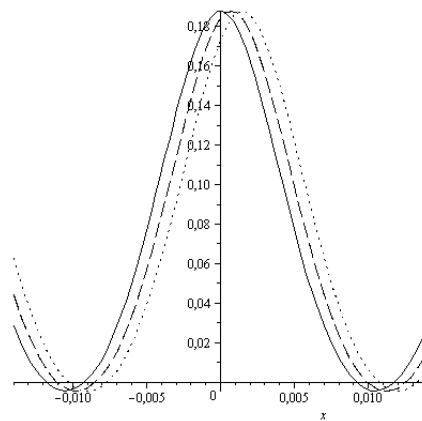


Рис. 1.

На рис. 2 изображены графики решения в начальный момент времени при различных значениях скорости (сплошной линии соответствует $w = 5.5$, пунктирной — $w = 6$, точкам — $w = 6.5$).

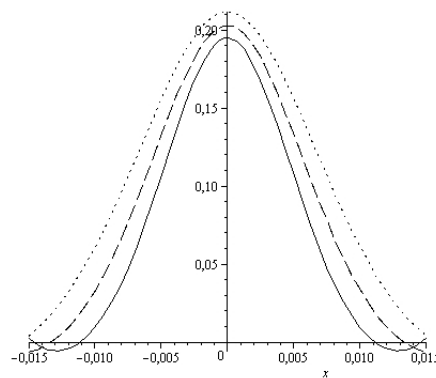


Рис. 2.

Отметим, что с увеличением скорости возрастает амплитуда волны и период колебаний.

Рассмотрим случай $w = 7.5$. Тогда $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$, решение выражается формулой (8) и представляет собой уединенную волну; его график при $t = 0$ изображен на рис. 3

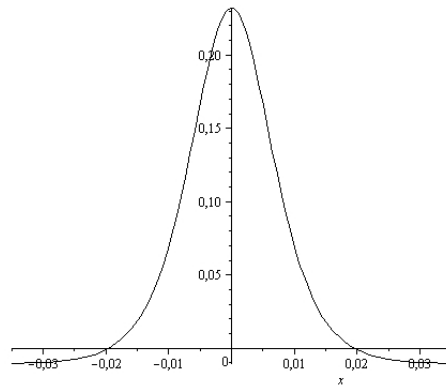


Рис. 3.

5. Сравнение с решением линеаризованной задачи. Линеаризуем уравнение (6) в окрестности нуля и получим

$$A_1 \eta'' = B_0 + B_1 \eta$$

Скорость распространения импульса давления при течении жидкости в эластичной трубке, полученная Моенсом и Кортвегом, имеет вид

$$c_0 = \sqrt{\frac{\kappa h_0}{2\rho}}$$

В данной работе при выбранных значениях гемодинамических параметров $c_0 = 5.26$.

Сравним результаты для линейного и нелинейного случая. Ниже, на рис. 4, представлен график решения линейной и нелинейной задачи в начальный момент времени.

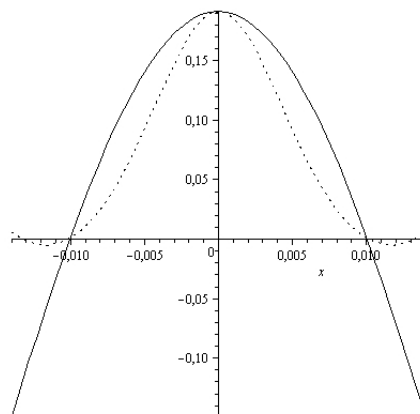


Рис. 4.

Отметим, что линейная модель достаточно адекватно описывает поведение исследуемой функции для внешней части трубки. Представления для внутренней

части трубки линейной и нелинейной задач сильно отличаются. Таким образом, учет нелинейной упругости стенки позволяет гораздо более точно описать движение жидкости в упругой трубке.

Автор выражает благодарность А. О. Ватульяну за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чесноков А. А. Вихревые движения жидкости в узком канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 38–47.
- [2] Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 624 с.
- [3] Регирер С. А. Некоторые вопросы гидродинамики кровообращения // Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971. 270 с.
- [4] Кудряшов Н. А., Чернявский И. Л. Нелинейные волны при течении жидкости в вязкоэластичной трубке // Механика жидкости и газа, 2006, № 1. С. 54–67.
- [5] Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. 294 с.
- [6] Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.

Klevchishkina N. V. *About the singularities of the one-dimensional simulation of blood flow.* On the basis of the one-dimensional model the nonlinear second order differential equation describing the perturbations of the radius of blood vessel walls is studied. A solution of this equation, expressed in terms of Jacobi elliptic functions, is presented. The limiting cases where the solution is expressed in elementary functions are considered. The study of solutions depending on the speed of the wave; the corresponding graphical dependences are presented. The linearization of the problem is implemented and the comparative analysis of linear and nonlinear models is given.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В ОБОБЩЕННОЙ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТРЕТЬЕГО ТИПА (GNIII)

Ковалев В. А.^{*}, Радаев Ю. Н.^{**}

^{*}Московский городской университет управления Правительства Москвы

^{**}Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

В настоящей работе в рамках модели нелинейного связанного термоупругого континуума Грина—Нахди третьего типа (GNIII) получены определяющие уравнения термодинамической ортогональности в пространстве термодинамических сил: термодинамический поток (точнее, его необратимая составляющая) ортогонален поверхности уровня потенциала рассеяния в связанных процессах термоупругого деформирования и теплопроводности твердых тел. Тем самым устанавливается нелинейный определяющий закон теплопроводности, соответствующий GNIII теории, согласующийся с принципом ортогональности термодинамических потоков и сил. Принцип, аналогичный принципу ортогональности термодинамических потоков и сил, первоначально возник в математической теории пластичности (там он известен как принцип максимума Мизеса). Исследуются предельные варианты нелинейных определяющих законов связанной термоупругости: GNI/СТЕ — стандартная термоупругость, восходящая к классическому закону теплопроводности Фурье; GNII — гиперболическая термоупругость, характеризующаяся нулевым внутренним производством энтропии в процессах теплопроводности и потоком энтропии, имеющим только обратимую составляющую.

1. Вводные замечания. Принцип, аналогичный принципу ортогональности термодинамических потоков и сил, первоначально возник в математической теории пластичности (там он известен как принцип максимума Мизеса (R. von Mises)) и выступал (и в настоящее время выступает) как ее основополагающий принцип, из которого следовали геометрическая выпуклость поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ($\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений) и ортогональность приращения пластической деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ поверхности текучести в гладких ее точках — ассоциированный с условием пластичности $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ закон пластического течения:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = d\lambda \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad df(\boldsymbol{\sigma}) = 0), \quad (1)$$

где $d\lambda \geq 0$ — неопределенный множитель, выступающий в качестве множителя Лагранжа при решении экстремальной задачи, соответствующей принципу максимума; в круглых скобках приведены признаки активного нагружения идеально пластического тела, выполнение которых указывает на наличие необратимого термодинамического потока $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ тогда, когда действительные напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ находятся на пределе текучести.

Таким образом, ассоциированный закон пластического течения (1) устанавливает геометрическую ортогональность в пространстве напряжений термодинамического потока, в роли которого в данном случае выступает приращение пластической деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, поверхности текучести в геометрическом месте, определяемом действительным напряжением $\boldsymbol{\sigma}$.

Принцип максимума Мизеса как исходный принцип математической теории пластичности и ассоциированный закон пластического течения обсуждаются практически во всех без исключения монографиях, посвященных теории идеальной пластичности (см., например, [1, 2]). Не подлежит никакому сомнению, что принцип максимума Мизеса является одним из фундаментальных принципов механики деформируемого твердого тела, а в широком смысле — всеобъемлющим принципом современного естествознания.

2. Производство энтропии в процессах транспорта тепла в термоупругих средах. Принцип максимума может быть распространен на процессы транспорта тепла в твердых телах, хотя работы в этом направлении, по-видимому, ранее не выполнялись, с целью построения таких определяющих уравнений термоупругости, которые исключали бы присущие классической теории теплопроводности Фурье (СТЕ) недостатки: уравнения СТЕ предсказывают конечную скорость распространения упругой волны и — бесконечную для теплового импульса. Рассмотрим как принцип максимума может сформулирован в теории связанной обобщенной термоупругости Грина и Нахди (А. Е. Green, Р. М. Naghdi) [3, 4].

Для представления деформации термоупругого тела воспользуемся классическим лагранжевым отсчетным описанием: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{x}$ — пространственное положение точки, которая занимала место $\mathbf{X}$ в отсчетном положении. В дальнейшем изложении систематически будет использоваться отсчетный оператор Гамильтона $\nabla_{\mathbf{R}}$, ассоциированный с лагранжевой переменной $\mathbf{X}$.

Система основных соотношений нелинейной связанной термоупругости GNIII состоит из:

— уравнения баланса массы

$$\left. \frac{\partial \rho_{\mathbf{R}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = 0; \quad (2)$$

— уравнения баланса импульса

$$\rho_{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}, \quad (3)$$

где $\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{T}$ — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x}$ — градиент деформации, $J = \det \mathbf{F}$ — якобиан деформации;

— уравнения баланса внутренней энергии

$$\dot{e} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{R}} + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) + \varepsilon, \quad (4)$$

где e — плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии) внутренней энергии, $\mathbf{h}_{\mathbf{R}}$ — вектор потока тепла (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии), ε — плотность объемных источников тепла (лучистое тепло);

— уравнения баланса энтропии

$$\dot{s} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \sigma + \xi, \quad (5)$$

где s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии), $\mathbf{j}_{\mathbf{R}}$ — вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в

отсчетном состоянии), σ — внешнее производство энтропии, $\xi \geq 0$ — внутреннее производство энтропии.

В качестве термодинамических переменных состояния в термоупругости GNII выбираются переменные (ϑ — температурное смещение)

$$\vartheta, \quad \dot{\vartheta}, \quad \nabla_R \vartheta, \quad \nabla_R \dot{\vartheta}, \quad \mathbf{F}. \quad (6)$$

Перечисленные переменные считаются термодинамически независимыми и в этом смысле образуют термодинамический базис. Выбор термодинамического базиса чрезвычайно важен и решающим образом сказывается на построении математической модели тех процессов, для исследования которых он собственно и используется.

Далее полагается, что допустимы лишь такие процессы, когда выполняется уравнение баланса энтропии (5) при ограничениях (2)–(4). Ограничения в форме дифференциальных уравнений (2)–(4) учитываются с помощью множителей Лагранжа. В результате можно получить соотношения (θ — абсолютная температура, обратное значение которой («холодность») выступает в качестве множителя Лагранжа)

$$\theta \mathbf{j}_R = \mathbf{h}_R, \quad \theta \sigma = \varepsilon. \quad (7)$$

На основании уравнений (2)–(5) и соотношений (7) выводится уравнение

$$-(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) - \mathbf{j}_R \cdot \nabla_R \theta = \theta \xi, \quad (8)$$

где $\psi = e - s\theta$ — плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии) свободной энергии Гельмгольца.

Дифференциальные уравнения термоупругости должны быть дополнены определяющими уравнениями. Определяющие уравнения связанного термоупругого поля обязаны иметь форму

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \mathbf{h}_R &= \mathbf{h}_R(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ s &= s(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \xi &= \xi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \theta &= \theta(\dot{\vartheta}). \end{aligned} \quad (9)$$

В такой общей форме определяющие уравнения термоупругости мало пригодны в прикладных вопросах. Дальнейшие ограничения на форму определяющих уравнений (9) могут быть получены следующим образом. Применим принцип непротиворечивости: уравнение (8) должно удовлетворяться тождественно для всех термодинамически допустимых процессов в силу выполнения всех оставшихся уравнений баланса. Выполнив подстановку определяющих зависимостей (9) в уравнение (8) и замечая, что коэффициенты при $\dot{\vartheta}$, $\nabla_R \dot{\vartheta}$, $\dot{\mathbf{F}}$ должны обращаться в нуль, заключаем, что свободная энергия в действительности не может зависеть от переменной состояния $\nabla_R \dot{\vartheta}$:

$$\psi = \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F});$$

кроме того должны выполняться следующие равенства:

$$s = -\frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta}} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad \mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}. \quad (10)$$

Для внутреннего производства энтропии, следовательно, остается выражение

$$\theta \xi = - \left(\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} \right) \cdot \nabla_R \dot{\vartheta} - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\vartheta}. \quad (11)$$

Предполагая, что определяющие уравнения не содержат *явных* вхождений температурного смещения ϑ , находим

$$\theta \xi = - \left(\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} \right) \cdot \nabla_R \dot{\vartheta}. \quad (12)$$

3. Термодинамическая ортогональность в определяющих уравнениях связанной термоупругости GNIII. Принцип термодинамической ортогональности и его двойственная формулировка были предложены Циглером (H. Ziegler) в ряде публикаций, начиная с 1958 г., как обобщение линейной теории Онсагера (L. Onsager), восходящей к 1931 г. (см. [5–7]).

Следуя принципу термодинамической ортогональности, введем потенциал рассеяния (точнее говоря, сопряженный потенциал рассеяния) согласно

$$\theta \xi = \mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) \quad (13)$$

и будем рассматривать его как функцию от термодинамической силы $-\nabla_R \dot{\vartheta}$, приходим к определяющему уравнению в форме соотношения термодинамической ортогональности в пространстве термодинамических сил термодинамического потока $\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}$ поверхности уровня потенциала рассеяния $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) = \text{const}$. В гладких точках поверхности уровня имеем следующее уравнение градиентальности:

$$\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} = -\lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}, \quad (14)$$

или

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta} - \lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}. \quad (15)$$

Множитель λ^* в уравнении (14) вычисляется на основании определяющего потенциал рассеяния $\mathcal{D}$ равенства

$$\theta \xi = \mathcal{D} = \lambda^* (\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}},$$

откуда сразу же следует, что

$$\lambda^* = \frac{1}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \mathcal{D}. \quad (16)$$

Выполнение неравенства $\xi \geq 0$ обеспечивается выпуклостью поверхностей уровня $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) = \text{const}$ в пространстве термодинамических сил.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [2] *Радаев Ю. Н.* Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп.). Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.
- [3] *Green A. E., Naghdi P. M.* On undamped heat waves in an elastic solid // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. Pp. 253–264.
- [4] *Green A. E., Naghdi P. M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. Pp. 189–208.
- [5] *Циглер Г.* Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966. 134 с.
- [6] *Ziegler H.* Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1970. Vol. 21. № 6. Pp. 853–863.
- [7] *Ziegler H.* Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality // Archive of Applied Mechanics. 1981. Vol. 50. № 3. Pp. 149–164.

Kovalev V. A., Radayev Y. N. *Constitutive equations of thermodynamic orthogonality in type-III coupled thermoelasticity (GNIII).* In the paper constitutive equations of thermodynamic (or thermomechanical) orthogonality for the non-linear Green–Naghdi type-III coupled thermoelastic continuum are obtained. The Ziegler principle of thermodynamic orthogonality generalizes Onsager’s linear theory and states that the irreversible parts of thermodynamic currents (velocities) are orthogonal to the dissipation level surface in the space of thermodynamic forces in a process of heat transport in solids. The orthogonality condition remains valid when the roles of currents and forces are interchanged. The principle analogous to thermomechanical orthogonality takes its origin from the von Mises maximum principle of the perfect plasticity, where it provides existence of a yield surface, its convexity, and the associated flow rule. A non-linear constitutive law of heat conduction corresponding to type-III thermoelasticity and conforming to thermomechanical orthogonality is formulated. The limiting cases of type-III thermoelasticity are separately considered: GNI/CTE — conventional thermoelasticity based on the Fourier heat conduction law and GNII — hyperbolic thermoelasticity. In the case of GNII the internal entropy production vanishes for any heat transport process which has the form of the undamped thermoelastic wave propagating at finite speed.

АЗИМУТАЛЬНЫЕ ЧИСЛА МАТЬЕ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Ковалев В. А.^{*}, Радаев Ю. Н.^{**}, Таранова М. В.^{***}

^{*}Московский городской университет управления Правительства Москвы

^{**}Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

^{***}Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Рассматриваются вопросы, связанные с построением периодических и полупериодических по угловой переменной решений дифференциального уравнения Матье для окружных гармоник эллиптического цилиндра, ассоциированных характеристических значений и азимутальных чисел, необходимых для формирования элементарных волновых функций эллиптического цилиндра. Элементарные волновые функции эллиптического цилиндра получаются в результате разделения переменных в уравнении Гельмгольца, представленном в координатах эллиптического цилиндра. Классическая задача Штурма — Лиувилля для уравнения Матье приводится к спектральной задаче для линейного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве бесконечных квадратично суммируемых двусторонних последовательностей. Предлагается подход, позволяющий дать весьма простые алгоритмы вычисления характеристических значений «углового» уравнения Матье с вещественными параметрами и соответствующих собственных функций. Систематически используются наиболее симметричные формы и уравнения, не находившие до этого применения в теории уравнения Матье. По существу, указанные алгоритмы сводятся к построению ортогональной матрицы, диагонализующей одну бесконечную симметричную пентадиагональную матрицу. Рассматривается проблема обобщения на случай эллиптической геометрии понятия азимутального числа волны, распространяющейся в цилиндрическом волноводе. Алгебраическими методами построены уточняющие друг друга двусторонние оценки для спектральных значений дифференциального оператора Матье с периодическими и полупериодическими граничными условиями.

1. Вводные замечания. Элементарные волновые функции эллиптического цилиндра, получающиеся в результате разделения переменных в уравнении Гельмгольца, представленном в координатах эллиптического цилиндра, являются произведениями «угловых» и «радиальных» функций Матье (Mathieu function, MF), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям Матье, преобразующихся одно к другому с помощью весьма простой замены независимой переменной.

Дифференциальное уравнение Матье (Mathieu equation, ME)

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v)Y = 0, \quad (1)$$

где v ($-\pi \leq v \leq \pi$) — «угловая» переменная; a , q — постоянные, полученное впервые в работе [1] при решении задачи о колебаниях эллиптической мембраны более ста лет назад, начиная с момента своего появления в научных публикациях, является объектом систематических исследований как теоретических, так и прикладных.

Решения дифференциального уравнения Матье играют важную роль во многих задачах математической физики. В прикладных задачах механики и электродинамики дифференциальное уравнение Матье обычно получается при построении элементарных волновых функций эллиптического цилиндра методом разделения переменных в скалярном уравнении Гельмгольца, представленном в координатах эллиптического цилиндра. Именно поэтому решения уравнения Матье иногда называют функциями эллиптического цилиндра. Заметим, что всегда предпочтительнее иметь решение уравнения Гельмгольца, выраженное в терминах функций Матье.

Отделение «угловой» координаты в волновых потенциалах приводит к угловым гармоникам, зависящим только от переменной v . Угловые гармоники Матье $Y = Y(v)$ являются решениями «углового» (angular, circumferential) дифференциального уравнения Матье (b — параметр разделения переменных, называемый также характеристическим параметром уравнения Матье)

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + (b - c^2 \lambda^2 \cos^2 v) Y = 0, \quad (2)$$

где c — половина фокусного расстояния; λ^2 имеет смысл разности квадратов волновых чисел (одно из которых связано с плоской гармонической волной), с подлежащими определению характеристическими постоянными (собственными значениями) $b = b_j$ ($j = 0, 1, 2, 3, \dots$), образующими счетное ограниченное снизу множество, обеспечивающими существование 2π -периодических решений этого уравнения. Последнее требование совершенно необходимо, если элементарные волновые функции предполагаются однозначными.

С помощью несложных рассуждений можно доказать, что спектральный параметр b неотрицателен: это необходимое условие существования 2π -периодического решения уравнения Матье. Таким образом, упорядоченные по возрастанию собственные значения b_j приводят к неограниченно возрастающей последовательности эллиптических азимутальных чисел (азимутальных чисел Матье), квадраты которых суть собственные значения b_j :

$$\sqrt{b_0} < \sqrt{b_1} < \sqrt{b_2} < \sqrt{b_3} < \dots \quad (3)$$

В уравнение Матье (2) удобнее ввести новые постоянные

$$a = b - \frac{c^2 \lambda^2}{2}, \quad q = \frac{c^2 \lambda^2}{4}, \quad (4)$$

после чего оно приобретает «каноническую» форму (1).

Теория «углового» уравнения Матье (1) достаточно полно обсуждается в классических руководствах [2, 3].

2. Спектральные задачи для уравнения Матье. Собственные функции, обладающие наименьшим периодом π , и соответствующие собственные значения можно определять как решения периодической задачи Штурма—Лиувилля:

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v) Y = 0, \quad Y(0) = Y(\pi), \quad Y'(0) = Y'(\pi). \quad (5)$$

$\mathbf{g}$ — бесконечный квадратично суммируемый вектор-столбец

$$\mathbf{g} = (\cdots, g_{-1}, g_0, g_1, \cdots)^T. \quad (13)$$

Линейная система алгебраических уравнений (11) имеет нетривиальное решение только если

$$\det(\mathbf{H} - a\mathbf{I}) = 0. \quad (14)$$

Следовательно, 2π -периодические решения «углового» уравнения Матье (1) существуют только для таких значений спектрального параметра a , которые являются собственными значениями матрицы $\mathbf{H}$.

Задача (11) — классическая спектральная задача для линейного оператора $\mathbf{H}$ в гильбертовом пространстве бесконечных двусторонних квадратично суммируемых последовательностей. Линейный оператор $\mathbf{H}$, действующий в этом пространстве, симметричен и обратим; обратный оператор вполне непрерывен; спектр оператора $\mathbf{H}$ дискретен; каждое собственное значение задачи (11) некратное; собственные векторы оператора $\mathbf{H}$ образуют базис в рассматриваемом пространстве.

4. Оценки собственных значений уравнения Матье алгебраическими методами. Оценки собственных значений симметричной матрицы $\mathbf{H}$, спектр которой совпадает со спектром дифференциального уравнения Матье, могут быть получены чисто алгебраическими методами, описание которых дано в известной монографии [4]. Для этого сначала необходимо разложить матрицу $\mathbf{H}$ на сумму диагональной матрицы $\mathbf{P}$ и симметричной остаточной матрицы $\mathbf{L}$. Остаточная матрица, как нетрудно заметить, бистохастична. Обозначим через h , p и l спектральные параметры матриц $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$ соответственно. Следует обратить внимание на то, что $h = a$. Упорядочим собственные значения матриц $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{L}$ по возрастанию влево и вправо от «центральных» собственных чисел $h_0, p_0 = 0^2, l_0$.

С помощью теорем Гершгорина (см. [4, с. 103]) заключаем, что для собственных чисел матрицы $\mathbf{H}$ будут выполняться оценки

$$|h_s - p_s| \leq 2q \quad (s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots), \quad (15)$$

устанавливающие двусторонние границы, в которых заключаются элементы спектра матрицы $\mathbf{H}$, а именно: в случае не слишком больших q (точнее, когда $2q < 1/2$) круги Гершгорина $|h - p_s| \leq 2q$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) изолированы друг от друга; в каждом круге Гершгорина радиуса $2q$ с центром $p_k = p_{-k} = k^2$ ($k = 1, 2, \dots$), как следует из второй теоремы Гершгорина, располагаются ровно два собственных значения матрицы $\mathbf{H}$; круг Гершгорина радиуса $2q$ с центром $p_0 = 0^2$ содержит единственное собственное значение h_0 .

Полученные двусторонние оценки собственных значений уравнения Матье существенно уточняются, если вместо кругов Гершгорина использовать овалы Кассини: Все собственные значения h_s матрицы $\mathbf{H}$ будут расположены в объединении замкнутых областей

$$|h - h_{ss}||h - h_{jj}| \leq d_k d_j = 4q^2 \quad (s, j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Эти неравенства позволяют сразу же получить более точную оценку снизу для наименьшего спектрального значения h_0 матрицы $\mathbf{H}$, т.е. фактически для $a_0^{(e)}$.

Действительно, поскольку в соответствующем круге Гершгорина находится всего одно собственное значение (именно h_0), то для его более точной локализации воспользуемся овалом Кассини $|h||h-1| = 4q^2$. Обозначая через $-d$ ($d > 0$) координату левой точки пересечения овала с вещественной осью $\text{Im } h = 0$, для определения d можно получить квадратное уравнение $d^2 + d - 4q^2 = 0$, из которого находим, что $d = \frac{\sqrt{1 + 16q^2} - 1}{2}$. Поэтому минимальное собственное значение матрицы $\mathbf{H}$, а вместе с ним и собственное значение $a_0^{(e)}$, подчиняется следующему ограничению:

$$-\frac{\sqrt{1 + 16q^2} - 1}{2} < h_0. \quad (17)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00184-а «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости»).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Mathieu E.* Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique // J. des Mathématiques Pures et Appliquées. 1868. Vol. 13. Pp. 137–203.
- [2] *Стрелт М. Д. О.* Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков, Киев: Гос. научно-техническое изд-во Украины, 1935. 240 с.
- [3] *Мак-Ланлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 476 с.
- [4] *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.

Kovalev V. A., Radayev Y. N., Taranova M. V. *On localization of azimuthal numbers related to elementary wave functions of an elliptic cylinder.* The paper is devoted to numerical and analytical aspects of generating periodic solutions of the angular Mathieu equation obtained for the circumferential harmonics of an elliptic cylinder and localization problem for the Mathieu eigenvalues and corresponding azimuthal numbers. Those are required in the usual procedure of constructing the elliptic cylinder elementary wave functions playing an important role in mathematical physics. The Sturm–Liouville eigenvalue problem for angular Mathieu equation is reformulated as the algebraic eigenvalue problem for a linear self-adjoint pentadiagonal matrix operator acting in the complex bi-infinite sequence space l_2 . Simple algorithms aimed at computation of the Mathieu eigenvalues and angular harmonics are discussed. The most symmetric forms and equations mostly known from the contemporary theory of the Mathieu equation are systematically used. Some of them are specially derived for the case and seem to be new. An extension of the azimuthal number notion to the case of elastic and thermoelastic waves propagating in a long elliptic waveguide is proposed. Estimations of upper and low bounds for the Mathieu eigenvalues and azimuthal numbers are obtained by the aid of the Gerschgorin theorems and more accurate ones by the Cassini ovals technique.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА С ЖЁСТКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВСТАВКОЙ

Колесников А. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе рассматривается равновесие тонкостенной трубки, представляющей собой бесконечную цилиндрическую оболочку кругового поперечного сечения. Материал оболочки считаем высокоэластичным и несжимаемым. Внутри трубки вставлен абсолютно жёсткий цилиндр большего радиуса. Задача состоит в определении напряжённо-деформированного состояния оболочки и давления на вставку в зависимости от её геометрических размеров.

При решении считаем, что изгибная жёсткость оболочки пренебрежимо мала. Задачу формулируем в рамках нелинейной теории безмоментных оболочек. Координаты области контакта оболочки со вставкой заранее неизвестны и находятся при решении задачи. Уравнения равновесия и уравнения для определения неизвестных границ получены из вариационного принципа минимума потенциальной энергии. Для материала Бартенева–Хазановича решение получено в аналитическом виде.

1. Постановка задачи. В отсчётной конфигурации (недеформированном состоянии) оболочка представляет собой бесконечную цилиндрическую поверхность кругового поперечного сечения единичного радиуса. Начальную толщину оболочки считаем постоянной и равной h . В цилиндрической системе координат с ортами $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ радиус-вектор точки поверхности оболочки имеет вид

$$\mathbf{r}(z, \varphi) = \mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

За гауссовы координаты поверхности взяты цилиндрические координаты z и φ , которые примем также за лагранжевы координаты для деформированной поверхности оболочки.

Пусть в цилиндрическую оболочку вставлен абсолютно жёсткий цилиндр радиуса $P > 1$ и высоты $2L$.

Примем следующие предположения: деформированное состояние оболочки будем искать в классе осесимметричных деформаций, деформированная оболочка симметрична относительно центра вставки, оболочка плотно прилегает к боковой поверхности вставки, часть оболочки не деформируется. Это позволяет считать, что точки оболочки с лагранжевой координатой $z = 0$ расположены по центру вставки (относительно образующей), и рассматривать равновесие только части оболочки ($z \geq 0$), полагая, что в точке $z = 0$ отсутствует перемещения вдоль образующей.

Пусть $z \in [0, z_1]$ — часть оболочки, прилегающая к боковой поверхности цилиндрической вставки. Если рассмотреть отдельно часть оболочки $z \in [z_1, +\infty)$, то она представляет собой растянутый по краю равномерными радиальными усилиями полубесконечный цилиндр. В этом случае можно показать из условий равновесия [1, 2], что некоторая часть оболочки $z \in [z_1, z_2]$ становится плоским круглым

диском, а часть $z \in [z_2, +\infty)$ остаётся недеформированной. Форма продольного сечения деформированной оболочки для $z \in [0, +\infty)$ представлена на рис. 1. Координаты z_1 и z_2 являются неизвестными и определяются при решении задачи.

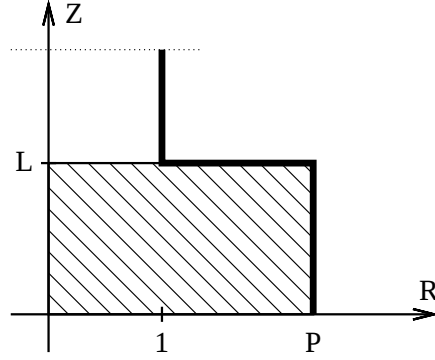


Рис. 1. Сечение деформированной оболочки с вставкой в виде цилиндра.

Учитывая вышеизложенное, поверхность деформированной оболочки можно представить в виде

$$\mathbf{R}(z, \varphi) = \hat{R}(z)\mathbf{e}_r + \hat{Z}(z)\mathbf{e}_z,$$

где

$$\hat{R}(z) = \begin{cases} P, & z \in [0, z_1], \\ R(z), & z \in [z_1, z_2], \\ 1, & z \in [z_2, +\infty); \end{cases} \quad \hat{Z}(z) = \begin{cases} Z(z), & z \in [0, z_1], \\ L, & z \in [z_1, z_2], \\ z - z_2 + L, & z \in [z_2, +\infty). \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения равновесия деформированной оболочки, краевые условия на неизвестные функции и условия на неизвестные границы получим из вариационного принципа минимума потенциальной энергии. Так как к оболочке не приложены внешние активные силы, то вариационный принцип можно сформулировать в виде

$$\delta U = 0, \quad U = \int_o W^* do. \quad (2)$$

Здесь U — потенциальная энергия всей оболочки, W^* — удельная потенциальная энергия на единицу площади оболочки, выражающаяся для безмоментной оболочки постоянной толщины h через удельную потенциальную энергию трёхмерной среды следующим образом $W^* = hW$.

Для упругого несжимаемого материала удельная потенциальная энергия может быть выражена как функция главных кратностей удлинений: $W = W(\lambda_1, \lambda_2)$. При заданном виде деформаций (1) главные кратности удлинений имеют вид

$$\lambda_1(z) = \begin{cases} Z'(z), & z \in [0, z_1], \\ -R'(z), & z \in [z_1, z_2], \\ 1, & z \in [z_2, +\infty); \end{cases} \quad \lambda_2(z) = \begin{cases} P, & z \in [0, z_1], \\ R(z), & z \in [z_1, z_2], \\ 1, & z \in [z_2, +\infty). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь штрихом обозначена производная по координате z ($' = \frac{d}{dz}$). Заметим, что по смыслу функция $R(z)$ убывающая на интервале $z \in [z_1, z_2]$. Данное предположение подтвердится при решении задачи. Откуда, из положительности кратности удлинения, имеем $\lambda_1 = \sqrt{R'^2(z)} = -R'(z) > 0$.

Тогда для упругого несжимаемого материала удельная потенциальная энергия деформации может быть представлена в виде

$$W = \begin{cases} W(Z'(z)), & z \in [0, z_1], \\ W(R(z), R'(z)), & z \in [z_1, z_2], \\ 0, & z \in [z_2, +\infty). \end{cases}$$

Таким образом, потенциальная энергия оболочки запишется так:

$$U = 4\pi h \left[\int_0^{z_1} W(Z'(z)) dz + \int_{z_1}^{z_2} W(R(z), R'(z)) dz \right]. \quad (4)$$

Вариационный принцип (2) для функционала (4), зависящего на разных интервалах от функций $R(z)$ и $Z(z)$, с неизвестными границами z_1 и z_2 представляется в виде [3]

$$0 = \int_0^{z_1} \left(-\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial W}{\partial Z'} \right) \right) \delta Z dz + \frac{\partial W}{\partial Z'} \delta Z \Big|_{z=0}^{z=z_1} + \left(W - \frac{\partial W}{\partial Z'} Z' \right) \delta z \Big|_{z=0}^{z=z_1} + \\ + \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial W}{\partial R} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial W}{\partial R'} \right) \right) \delta R dz + \frac{\partial W}{\partial R'} \delta R \Big|_{z=z_1}^{z=z_2} + \left(W - \frac{\partial W}{\partial R'} R' \right) \delta z \Big|_{z=z_1}^{z=z_2}. \quad (5)$$

После преобразований из вариационного уравнения (5) можно получить следующую систему дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial W(Z')}{\partial Z'} = c_1, \quad z \in [0, z_1]; \quad Z(0) = 0, \quad Z(z_1) = L, \quad (6)$$

$$W(R, R') - \frac{\partial W(R, R')}{\partial R'} R' = 0, \quad z \in [z_1, z_2]; \quad R(z_1) = P, \quad R(z_2) = 1, \quad (7)$$

$$W(Z') - \frac{\partial W}{\partial Z'} Z' = 0, \quad z = z_1. \quad (8)$$

2. Материал Бартенева–Хазановича. Рассмотрим удельную потенциальную энергию для несжимаемой модели материала Бартенева–Хазановича [4], которую можно представить в виде

$$W = 2\mu \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} - 3 \right). \quad (9)$$

Для данного материала решение системы уравнений (6)–(8) представляется в явном виде

$$Z(z) = \frac{2z}{P(3-P)}, \\ s(R) = \frac{1}{6}(R^3 - P^3) - \frac{3}{4}(R^2 - P^2) + \frac{1}{2}LP(3-P), \\ z_1 = \frac{1}{2}LP(3-P), \quad z_2 = -\frac{7}{12} - \frac{1}{6}P^3 + \frac{3}{4}P^2 + \frac{1}{2}LP(3-P).$$

Из уравнений равновесия (6) и (7) для рассматриваемого материала можно получить, что

$$\lambda_1 = \frac{2}{\lambda_2(3 - \lambda_2)}. \quad (10)$$

Из положительности главных кратностей удлинений следует, что $\lambda_2 < 3$. Следовательно, с учётом (1) и (3), полученное решение имеет смысл только при $1 \leq P < 3$.

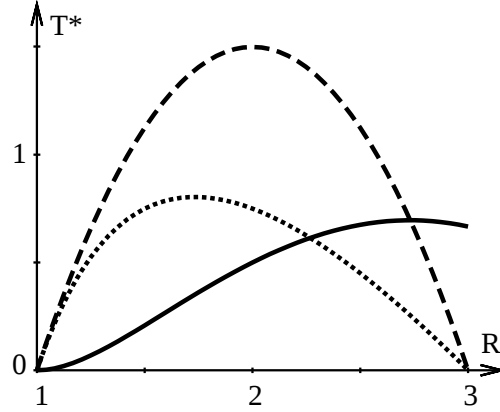


Рис. 2. Усилия в оболочке и интенсивность давления на вставку.

Введём безразмерные величины

$$T_z^* = \frac{T_z}{\mu h}, \quad T_\varphi^* = \frac{T_\varphi}{\mu h}, \quad z_1^* = \frac{z_1}{L}, \quad z_2^* = \frac{z_2}{L}, \quad p^* = \frac{T_z}{\mu h P}.$$

Здесь p^* — обезразмеренная интенсивность давления на жёсткую вставку, T_z и T_φ — главные усилия в оболочке. С учетом (10) главные усилия для материала Бартенева–Хазановича можно представить как функции только λ_2 следующим образом

$$T_z = \frac{h}{\lambda_2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{\mu h}{2\lambda_2} (4 - \lambda_2(3 - \lambda_2)^2),$$

$$T_\varphi = \frac{h}{\lambda_1} \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{3\mu h}{2} (3 - \lambda_2)(\lambda_2 - 1).$$

Усилия T_z^* и T_φ^* не зависят от L . Из (3) следует, что кратность удлинения λ_2 для цилиндра с единичным начальным радиусом численно равна эйлеровой координате R , то есть усилия можно представить как функции только координаты R . Это означает, что на участке $z \in [0, z_1]$ усилия постоянны и равны усилиям в точке $z = z_1$. На участке $z \in [z_2, +\infty)$ оболочка не напряжена. Таким образом, усилия во всей оболочке можно оценить по изменению усилий на интервале $z \in [z_1, z_2]$. На рис. 2 безразмерные усилия представлены как функции от эйлеровой координаты на интервале $R \in [1, P]$ ($1 \leq P < 3$). По вертикальной оси отложены усилия T_z^* и T_φ^* , по горизонтальной — координата R . Сплошной линией показаны усилия T_z^* , пунктирной — T_φ^* . Максимум усилия T_φ^* достигается при $R = 2$. Максимум усилия T_z^* достигается при $R \approx 2,732$.

Так как на участке $z \in [0, z_1]$ усилия постоянны, то давление на боковую поверхность цилиндрической вставки распределено равномерно. Интенсивность давления p^* в зависимости от радиуса вставки представлена точечной линией на рисунке 2. Максимальная величина достигается при $P = \sqrt{3}$ и равна $p_{max}^* \approx 0,804$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента Российской Федерации (грант МК-439.2011.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (госконтракт П596) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 11-08-01152-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Flügge W., Riplog P. M.* A large deformation theory of shell membranes // Tech. Rept. No. 102, Div. Engr. Mech., Standford Univ. [R, S, T]. 1956.
- [2] *Kolesnikov A. M.* Radial deformation of cylindrical membrane // Proceeding of the XXXIX Summer School «Advanced Problems in Mechanics». Saint-Peterburg (Repino). 1–5 July 2011. Pp. 238–243.
- [3] *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1961. 228 с.
- [4] *Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н.* О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. 1960. Т. 2. № 1. С. 21–28.
- [5] *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошных сред. М.: Мир, 1965. 454 с.

Kolesnikov A. M. *Cylindrical membrane with rigid cylindrical insert.* In this paper the thin-walled tube which is an infinite cylindrical shell with a circular cross-section are considered. The material of shell is hyperelastic and incompressible. The rigid cylinder is inserted into the tube. The problem is to determine the stress-strain state of the shell and the pressure on the insert.

We assume that the bending stiffness of shell is negligible. The problem is solved in the framework of the nonlinear membrane theory. The equilibrium equations, the boundary conditions and the conditions to determine the contact zone are obtained from the principle of minimum potential energy. The analytical solution is obtained for Bartenev–Khazanovich material.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРАВИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ ВНУТРИ КРУГА

Куракин Л. Г.

*Южный математический институт, Владикавказ
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Работа посвящена проблеме устойчивости системы N точечных вихрей, расположенных равномерно на окружности внутри круга. Дан обзор достигнутых в настоящее время результатов, полученных в том числе и автором.

Рассматривается задача устойчивости стационарного вращения системы N одинаковых точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного N -угольника радиуса R_0 внутри круговой области радиуса R с общим центром симметрии.

После работы Хавелока [1], открытые вопросы остались лишь в случаях $N = 2, \dots, 6$, когда собственные значения матрицы линеаризации лежат на мнимой оси. Результаты их нелинейного анализа были анонсированы в заметке [2] и подробно изложены в работах [3]–[6]. Четный случай $N = 2, 4, 6$ удалось исследовать в рамках единого подхода [3]. Каждый из случаев $N = 3, 5$ распался на серию задач, потребовавших индивидуального подхода, в частности, применения КАМ теории и нелинейного анализа всех резонансов до четвертого порядка включительно, встречающихся в задаче. По поводу результатов общей теории устойчивости положений равновесий гамильтоновых систем, упоминаемых здесь и ниже, сошлемся на книгу [7] и обзор [8]. Устойчивость вихревого треугольника детально исследована в работе [4] и ее англоязычной версии [5], а пятиугольника — в работе [6].

Полученные в итоге критерии устойчивости стационарного вращения томсоновских конфигураций N вихрей ($N = 2, \dots, 6$) внутри круга изображены схематично на рис. 1–3. На них параметр $p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_0^2}{R^2}$. Величины p_{0N}, p_{*N} заданы в табл. 1, а критические значения p , отвечающие резонансам в табл. 2.

Дадим необходимые пояснения:

1. Устойчивость по Раусу, когда $0 < p < p_{*N}$, ($N = 2, 4, 6$) и $0 < p < p_{0N}$, ($N = 3, 5$) следует из положительной определенности гамильтониана линеаризованной приведенной системы [3]. Численно это установил Кэмпбелл [9], который использовал метод энергия — момент. Неустойчивость, когда $p_{*N} < p < 1$, $N = 2, \dots, 6$ доказана Хавелоком [1].

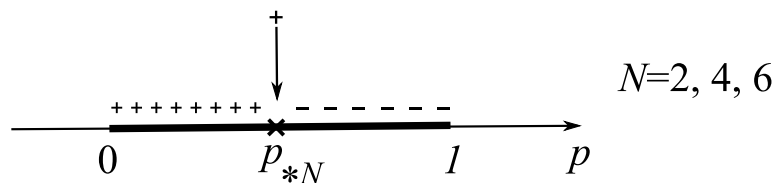


Рис. 1. Критерий устойчивости томсоновского вихревого многоугольника с четным числом вихрей внутри круга [3]: $p \in (0, p_{*N}]$ — устойчивость по Раусу (++); $p \in (p_{*N}, 1)$ — неустойчивость (—). Параметр $p \stackrel{\text{def}}{=} R_0^2/R^2$.

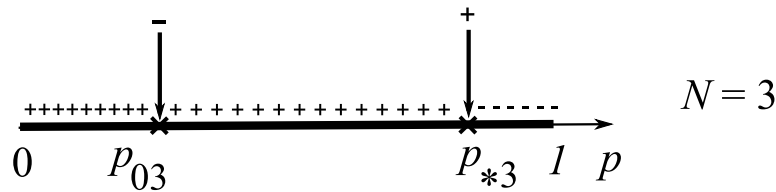
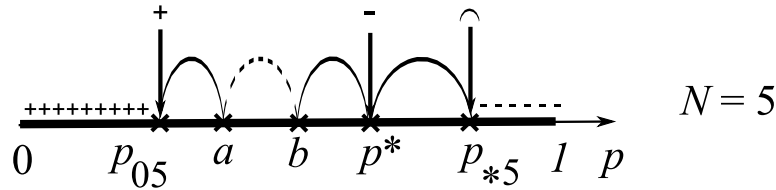
$P_2 = 7p^3 - 3p^2 + 5p - 1$	$p_{*2} \approx .2137403629$
$P_3 = 10p^6 + 3p^5 + 6p^4 + 10p^3 + 6p^2 + 3p - 2$	$p_{*3} \approx 0.3212811546$
$Q_3 = 5p^6 + 9p^5 + 5p^3 + 9p^2 - 1$	$p_{03} \approx 0.3040641646$
$P_4 = 7p^6 + p^4 + 9p^2 - 1$	$p_{*4} \approx .3298399891$
$P_5 = 18p^{10} + 10p^8 + 15p^7 + 34p^5 + 15p^3 + 10p^2 - 2$	$p_{*5} \approx 0.3461008645$
$Q_5 = 27p^{12} + 81p^{11} + 132p^{10} + 135p^9 + 90p^8 + 96p^7 + 153p^6 + 196p^5 + 165p^4 + 60p^3 + 2p^2 - 9p - 3$	$p_{05} \approx .3410383818$
$P_6 = 23p^9 + 13p^6 + 37p^3 - 1$	$p_{*6} \approx .2991212951$

Таблица 1. Критические значения p_{*N} и p_{0N} — корни полиномов P_N и Q_N .

2. При четном $N = 2, 4, 6$, когда $p = p_{*N}$ (см. рис. 1), в задаче устойчивости имеет место критический случай двукратного нулевого собственного значения (недиагонализируемый случай). Доказательство положительной определенности приведенного гамильтониана потребовало привлечение слагаемых его ряда Тейлора до четвертого порядка включительно. Отметим, что процедура нормализации при этом не проводилась.

Замечание 1. Устойчивость для граничных значений параметра интересно изучить, чтобы выяснить «опасной» или «безопасной» (по Баутину [10]) является эта граница. Другими словами, жестко или мягко происходит потеря устойчивости томсоновского многоугольника, когда параметр p возрастая, проходит через критическое значение p_{*N} ?

3. В случае $N = 3$, изображенном на рис. 2, доказательство устойчивости по Ляпунову приведенной гамильтоновой системы двух степеней свободы на интервале (p_{03}, p_{*3}) состояло в проверке условий теоремы Арнольда-Мозера (см., например, [7]). При $p = p_{03}$, в задаче устойчивости имеет место критический случай дву-

Рис. 2. Критерий устойчивости томсоновского вихревого треугольника внутри круга [4, 5]: $p \in (0, p_{03}) \cup (p_{03}, p_{*3}]$ — устойчивость по Раусу; $p = p_{03}$ и $p \in (p_{*3}, 1)$ — неустойчивость.Рис. 3. Критерий устойчивости томсоновского вихревого пятиугольника внутри круга [6]: $p \in (0, p_{05}]$ — устойчивость по Раусу; $p \in (p_{05}, a) \cup (b, p^*) \cup (p^*, p_{*5}]$ — формальная устойчивость по Раусу (сплошная дуга); $p \in [a, b]$ — устойчивость по Раусу для большинства начальных условий (пунктирная дуга); $p = p^*$ и $p \in (p_{*5}, 1)$ — неустойчивость.

N=2	$\hat{p}_{00} = p_{*2}$
N=3	$p_{00} = p_{03}, p_{1:3} \approx .3168967611$ $p_{1:2} \approx .3193266263, \hat{p}_{1:1} = p_{*3}$
N=4	$\hat{p}_{00} = p_{*4}$
N=5	$p_{00} = p_{05}$ $p_{1:3} \approx .3434991204, p_{1:3} \approx .3448097395$ $p_{1:2} = p^* \approx .3443792197, p_{1:2} \approx .3455248914$ $p_{1:1:2} \approx .3460792749, p_{1:1} \approx .3459139152, \hat{p}_{1:1} = p_{*5}$
N=6	$\hat{p}_{00} = p_{*6}$

Таблица 2. Критические значения параметра p , отвечающие резонансам: p_{00} — двукратный диагонализиремый ноль, $p_{k:m}$ — резонанс $k : m$, символ шапочка $\hat{p}$ — недиагонализиремый случай.

кратного нулевого собственного значения (диагонализиремый случай). Неустойчивость следует из результатов Сокольского. При $p = p_{*3}$ имеет место критический случай двукратной пары чисто мнимых собственных значений (жорданова клетка). Для доказательства устойчивости по Ляпунову равновесия приведенной системы использовались результаты общей теории [7, 8, 11]

4. В случае $N = 5$ использовано определение формальной устойчивости по Раусу, которое определяется как формальная устойчивость по Ляпунову приведенной системы. Формальная устойчивость по Ляпунову положения равновесия системы означает (см., например, [7]), что существует степенной ряд, возможно расходящийся, который формально является интегралом системы, достигающий минимума на этом положении равновесия. В случае формальной устойчивости по Раусу неустойчивость по Ляпунову решения (если она существует) не обнаруживается в приведенной системе при учете в ее разложении слагаемых до сколь угодно большого, но конечного порядка.

Формальная устойчивость по Раусу при $p \in (p_{05}, a) \cup (b, p^*) \cup (p^*, p_{*5})$ следует из теоремы Брюно [7].

Применение результатов В.И. Арнольда (ссылки см. в книге [7]) на отрезке $p \in [a, b]$, изображенном схематично на рис. 3, позволило доказать устойчивость равновесия приведенной системы для большинства в смысле меры Лебега начальных данных. Как известно, это не исключает неустойчивость по Ляпунову.

При $p = p_{05}$ в задаче устойчивости имеет место критический случай двукратной нулевого собственного значения (диагонализиремый случай). Из положительной определенности приведенного гамильтониана вытекает устойчивость по Ляпунову приведенной системы. Это доказательство потребовало привлечение слагаемых до четвертого порядка включительно ряда Тейлора приведенного гамильтониана.

При $p = p_{*5}$ в критическом случае двукратной пары чисто мнимых собственных значений (жорданова клетка) имеет место формальная устойчивость по Раусу. При $p = p^*$ (см. табл. 2) имеет место критический случай резонанса $1 : 2$. Неустойчивость доказывается применением результатов А.П. Маркеева [7].

Замечание 2. Ряд резонансных значений $p_{k:m}$, указанных в таблице 2 и отсутствующих на рис. 2, 3, оказались несущественными. Это означает, что от-

вещающие им в общей теории специфические резонансные слагаемые отсутствуют среди слагаемых до четвертого включительно ряда Тейлора приведенного гамильтониана. Поэтому при $N = 3$, когда $p = p_{1:3}$ и $p = p_{1:2}$ применима теорема Арнольда–Мозера, а при $N = 5$ резонансные точки $p_{1:3}$, $p_{1:2} \neq p^*$, $p_{1:1}$ лежат в интервале (b, p_{*5}) и формальная устойчивость в них следует из результатов теоремы Брюно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральных целевых программ: «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (госконтракт № 16.516.11.6106), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., (госконтракт № 14.740.11.0877) и Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР/CRDF), грант RUM1-2943-RO-09.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Havelock T. H.* The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // *Phil. Mag.* 1931. Vol. 11. № 70. Pp. 617–633.
- [2] *Куракин Л. Г.* Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // *Докл. РАН.* 2004. Т. 399. № 1. С. 52–55.
- [3] *Kurakin L. G.* On stability of a regular vortex polygon in the circular domain // *J. Math. Fluid Mech.* 2005. Vol. 7. Supplem. 3. Pp. S376–S386.
- [4] *Куракин Л. Г.* Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // *Нелинейная динамика.* 2009. Т. 5. № 3. С. 295–317.
- [5] *Kurakin L. G.* On the stability of Thomson’s vortex configurations inside a circular domain // *Reg. Chaot. Dyn.* 2010. Vol. 15. № 1. Pp. 40–58.
- [6] *Куракин Л. Г.* Об устойчивости томсоновского вихревого пятиугольника внутри круга // *Нелинейная динамика.* 2011. Т. 7. № 3. С. 465–488.
- [7] *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
- [8] *Куницын А. Н., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях // *Итоги науки и техники, Общая механика.* М.: ВИНТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139.
- [9] *Campbell L. J.* Transverse normal modes of finite vortex arrays // *Phys. Rev. A.* 1981. Vol. 24. Pp. 514–534.
- [10] *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости. М.–Л.: Гостехиздат. 1984. 164 с.
- [11] *Lerman L. M., Markova A. P.* On Stability at the Hamiltonian Hopf Bifurcation // *Reg. Chaot. Dyn.* 2009. Vol. 14. №. 1. Pp. 148–162.

Kurakin L. G. *On the stability of regular system of point vortices inside a circular domain.* The paper is devoted to stability of the stationary rotation of a system of N equal point vortices located at vertices of a regular N -gon of radius R_0 inside a circular domain of radius R with a common center of symmetry.

УСРЕДНЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Левенштам В. Б.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт, Владикавказ*

В работе обоснован метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского [1] для квазилинейных параболических начально-краевых задач второго порядка с высокочастотными по времени старшими слагаемыми. Ранее обоснование метода усреднения было нами осуществлено для аналогичных линейных параболических начально-краевых задач второго порядка [2]. Близкие к [2] результаты вероятностными методами в 1963 г. получил Р. З. Хасьминский. Отметим еще важные работы В. В. Жикова [3–4] (см. также [5], гл. XI), в которых метод усреднения обоснован для широких классов параболических и абстрактных параболических задач с высокочастотной главной частью на всей временной оси.

1. Пусть Ω — ограниченная область в n — мерном евклидовом пространстве E_n векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с вещественными компонентами; S — граница области класса C^2 ; $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где $T > 0$, — цилиндр в пространстве E_{n+1} ; $S_T = S \times [0, T]$ — боковая поверхность цилиндра Q_T ; $\Gamma_T = S_T \cup \Omega$; Ω_δ , где δ — достаточно малое положительное число, — подобласть Ω , расстояние которой до границы Ω равно δ ; $Q_T^\delta = \Omega_\delta \times (\delta, T)$.

Символом $H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_T)$, где $\alpha \in (0, 1)$, будем обозначать обычное гельдерово пространство функций $u(x, t)$, заданных в $\overline{Q}_T$, с нормой $\|u\|_{H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_T)} = \max_{(x, t) \in \overline{Q}_T} |u(x, t)| + \sup_{(x', t') \neq (x'', t'')} \frac{|u(x'', t'') - u(x', t')|}{|x'' - x'|^\alpha + |t'' - t'|^{\alpha/2}}$.

Рассмотрим в Q_T первую начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, t, \omega t, u, u_x) + a(x, t, \omega t, u, u_x) = 0 \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_T} = \psi(x, t), \quad (2)$$

где $u_x = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$, $\omega \gg 1$.

Основные ограничения, наложенные на функции a_i, a и ψ опишем, следуя теореме 6.3 [6, гл. V].

Предположим, что функции $a_i(x, t, \tau, u, p), a(x, t, \tau, u, p)$ определены для $(x, t) \in \overline{Q}_T$ и произвольных τ, u, p , непрерывны, удовлетворяют условию Гельдера по τ и обладают непрерывными производными $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}, \frac{\partial a_i}{\partial u}$ и $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$. Пусть при всех указанных значениях аргументов x, t, τ, u выполнено условие параболичности уравнения (1)

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i(x, t, \tau, u, 0)}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \geq 0, \forall \xi_i \xi_j \in R,$$

и, кроме того, выполнено неравенство

$$A(x, t, \tau, u, 0)u \geq -\Phi(u)|u| - b_2.$$

$$\text{Здесь } A(x, t, \tau, u, p) = a(x, t, \tau, u, p) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x, t, \tau, u, p)}{\partial u} p_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x, t, \tau, u, p)}{\partial x_i},$$

$$\Phi > 0, \int_0^\infty \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty, b_1 > 0, b_2 > 0.$$

Предположим, что $\psi|_{S_T} \in C^{2,1}(S_T)$, $\max_{x \in \Omega} |\psi_x(x, 0)| < \infty$ и ψ продолжима до функции из пространства $H^{\gamma, \gamma/2}(\overline{Q}_T)$, $\gamma \in (0, 1)$.

Обобщенным решением задачи (1)–(2) назовем функцию $u(x, t) \in H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_T)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$, имеющую непрерывный в $\overline{Q}_T$ градиент u_x , удовлетворяющую условию (2) и почти всюду в Q_T уравнению (1).

При указанных выше ограничениях справедлива априорная оценка решений задачи (1)–(2) (см. [6, гл. V, § 6])

$$\max_{\overline{Q}_T} |u_\omega| \leq M,$$

где постоянная M , как легко видеть, не зависит от ω .

Пусть при $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $\|u\| \leq M$ и произвольных τ, p выполняются неравенства

$$\nu \xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i(x, t, \tau, u, p)}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2$$

$$\sum_{i=1}^n \left(|a_i| + \left| \frac{\partial a_i}{\partial u} \right| \right) (1 + |p|) + \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right| + |a| \leq \mu (1 + |p|)^2,$$

где $\nu, \mu = \text{const} > 0$. Тогда согласно [6, гл. V, § 6] при некотором $\alpha \in (0, 1)$ для решений задачи (1)–(2) справедливы априорные оценки

$$\|u\|_{H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_T)} + \max_{\overline{Q}_T} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}| \leq M_1, \quad (3)$$

$$\|u_x\|_{H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_T^\delta)} \leq M_2(\delta), \quad (4)$$

где M_1 и $M_2(\delta)$ не зависят от ω .

Предположим, что функция $a(x, t, \tau, u, p)$ удовлетворяет условию Липшица по u и p равномерно на множестве $(x, t) \in Q_T$, $\tau \in R$, $|u| \leq M$, $|p_j| \leq M_1$. Функции $a_i(x, t, \tau, u, p)$, $a(x, t, \tau, u, p)$ имеют равномерные средние по τ , т. е. равномерно относительно $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $\|u\| \leq M$, $|p_j| \leq M_1$ существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N a_i(x, t, \tau, u, p) d\tau = \bar{a}_i(x, t, u, p) \quad (5)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N a(x, t, \tau, u, p) d\tau = \bar{a}(x, t, u, p) \quad (6)$$

Наряду с возмущенной задачей (1)–(2) рассмотрим усредненную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{a}_i(x, t, v, v_x) + \bar{a}(x, t, v, v_x) \quad (7)$$

$$v|_{\Gamma_T} = \psi(x, t). \quad (8)$$

Легко видеть, что все условия, наложенные на функции a_i, a , справедливы, в силу предположений (5)–(6), и для функций $\bar{a}_i, \bar{a}$. Поэтому согласно теореме 6.3 [6, гл. V] задачи (1)–(2) и (7)–(8) однозначно разрешимы.

Теорема 2. При выполнении описанных выше условий при некотором $\alpha \in (0, 1)$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\|u_\omega - v\|_{H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T)} + \|u_\omega - v\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}) = 0,$$

где u_ω и v — решения задач (1)–(2) и (7)–(8) соответственно.

Доказательство опускаем. Отметим лишь, что оно базируется на результатах и методах монографии [6].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503 с.
- [2] Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для параболических уравнений второго порядка с высокочастотным старшими коэффициентами // Труды научной школы И. Б. Симоненко. Ростов-на-Дону. изд. ЮФУ, 2010. С. 137–144.
- [3] Жиков В. В. Принцип усреднения для параболических уравнений с переменным главным членом // ДАН СССР, Т. 14, № 1, 1973 С. 1061–1064.
- [4] Жиков В. В. Вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 40, № 6, 1976. С. 1380–1408.
- [5] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд. Московского университета, 1978. 204 с.
- [6] Ладженская О. А., Солонников В. А., Урольцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

Levenshtam V. B. *Averaging of quasilinear parabolic problems with a variable main part.* For a quasilinear parabolic nachalno-regional problems the averaging method is proved.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПОРОУПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

Ляпин А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе представлен способ построения интегральных представлений фундаментальных решений трансверсально-изотропной пороупругой плоскости при помощи интегрального преобразования Фурье. Эти решения используются для построения граничных интегральных уравнений для задач с включениями и неоднородностями произвольной формы в пористоупругой среде. Проведено обезразмеривание исходной задачи путем введения соответствующих параметров. Построены полярные множества для корней характеристического уравнения задачи, а также поля перемещений и давления от действия сосредоточенной нагрузки.

1. Введение.

В настоящее время исследования в области пороупругих сред приобрели большую популярность. Это связано с растущим интересом к таким математическим моделям двухфазных сред, как пороупругие модели, использующихся в механике водонасыщенных грунтов, при моделировании шахтных конструкций, в биомеханике, где многие биологические ткани, в том числе костная и мышечная, для адекватного математического описания требуют учета сложной структуры среды. Процессы фильтрации жидкости в твердом грунте, осадка фундаментов и дорожных покрытий могут быть успешно описаны моделями пороупругости.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим трансверсально-изотропную пороупругую плоскость под действием сосредоточенной нагрузки в точке (ξ_1, ξ_2) . Для описания указанной среды воспользуемся моделью Коуина–Нунзиато для случая установившихся колебаний [1]:

$$\begin{aligned} & C_{11}u_{1,11}^{(m)} + C_{13}u_{3,31}^{(m)} + C_{55}(u_{1,33}^{(m)} + u_{3,13}^{(m)}) - \\ & - A_{11}p_{,1}^{(m)} + \rho\omega^2u_1^{(m)} + \delta_{1m}\delta(x, \xi) = 0 \\ & C_{13}u_{1,13}^{(m)} + C_{33}u_{3,33}^{(m)} + C_{55}(u_{1,31}^{(m)} + u_{3,11}^{(m)}) - \\ & - A_{33}p_{,3}^{(m)} + \rho\omega^2u_3^{(m)} + \delta_{2m}\delta(x, \xi) = 0 \\ & -(K_{11}p_{,11}^{(m)} + K_{33}p_{,33}^{(m)}) - i\omega(A_{11}u_{1,1}^{(m)} + A_{3,3}u_{3,3}^{(m)}) + \\ & - i\omega\frac{\phi^2}{R}p^{(m)} + \rho_f\omega^2(K_{11}u_{1,1}^{(m)} + K_{33}u_{3,3}^{(m)}) + \delta_{3m}\delta(x, \xi) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь: C_{ij} — модули упругости, A_{ij} — компоненты тензора констант Био, K_{ij} — компоненты тензора проницаемости среды, ρ, ρ_f — плотность среды и плотность жидкости соответственно, ω — частота колебаний среды, u_i — компоненты вектора смещений среды, p — давление жидкости в порах, ϕ — пористость среды, R — гидростатическая константа.

3. Обезразмеривание.

Отметим, что порядки материальных констант, входящих в систему (1), имеют различные размерности и на несколько порядков отличаются между собой. Это обстоятельство может внести большие погрешности при численной реализации. Введем следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}
 x &= \bar{x}H, u_k = U_kH, p = QP_*, \\
 \beta_1 &= \frac{A_{11}P_*}{C_{33}}, \beta_3 = \frac{A_{33}P_*}{C_{33}}, \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 H^2}{C_{33}}, \\
 \gamma_1 &= \frac{C_{11}}{C_{33}}, \gamma_5 = \frac{C_{55}}{C_{33}}, \gamma_7 = \frac{C_{13}}{C_{33}}, \\
 \delta_1 &= \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \frac{\phi^2}{R} \frac{H}{K_{33}}, \gamma_{10} = \frac{K_{11}}{K_{33}}, \nu_1 = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \frac{H}{P_*} \frac{A_{11}}{K_{33}}, \\
 \nu_2 &= \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \frac{H}{P_*} \frac{A_{33}}{K_{33}}, \nu_3 = \frac{\rho_f}{\rho} \frac{C_{33}}{P_*} \frac{K_{11}}{K_{33}}, \nu_4 = \frac{\rho_f}{\rho} \frac{C_{33}}{P_*},
 \end{aligned} \tag{2}$$

С учетом введенных обозначений система уравнений (1) представима в виде:

$$\begin{aligned}
 &\gamma_1 U_{1,11}^{(m)} + \gamma_7 U_{3,31}^{(m)} + \gamma_5 (U_{1,33}^{(m)} + U_{3,13}^{(m)}) - \beta_1 Q_{,1}^{(m)} + \\
 &\quad + \kappa^2 U_1^{(m)} + \Delta_{1m} \delta(\bar{x}, \bar{\xi}) = 0 \\
 &\gamma_7 U_{1,11}^{(m)} + U_{3,31}^{(m)} + \gamma_5 (U_{1,33}^{(m)} + U_{3,13}^{(m)}) - \beta_3 Q_{,1}^{(m)} + \\
 &\quad + \kappa^2 U_3^{(m)} + \Delta_{2m} \delta(\bar{x}, \bar{\xi}) = 0 \\
 &-i\omega \delta_1 Q^{(m)} - (\gamma_{10} Q_{,11}^{(m)} + Q_{,33}^{(m)}) - i\kappa(\nu_1 U_{1,1}^{(m)} + \nu_2 U_{3,3}^{(m)}) + \\
 &\quad + \kappa^2(\nu_3 U_{1,1}^{(m)} + \nu_4 U_{3,3}^{(m)}) + \Delta_{3m} \delta(\bar{x}, \bar{\xi}) = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

4. Представление решений.

Для нахождения фундаментальных решений для пороупругой плоскости воспользуемся аналогичным подходом, использованным для получения фундаментальных решений электроупругости [2]. Применим интегральное преобразование Фурье к системе уравнений (3) по обеим координатам. Тогда (3) можно записать в следующем удобном для дальнейших операций виде:

$$A \cdot W^{(m)} = F^{(m)} \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1^2 \gamma_1 - \alpha_3^2 \gamma_5 + \kappa^2 & -(\gamma_5 + \gamma_7) \alpha_1 \alpha_3 & i\beta_1 \alpha_1 \\ -(\gamma_5 + \gamma_7) \alpha_1 \alpha_3 & -\alpha_3^2 - \gamma_5 \alpha_1^2 + \kappa^2 & i\beta_3 \alpha_3 \\ -\kappa \nu_1 \alpha_1 - i\kappa^2 \nu_3 \alpha_1 & -\kappa \nu_2 \alpha_3 - i\kappa^2 \nu_4 \alpha_3 & -i\kappa \delta_1 + (\gamma_{10} \alpha_1^2 + \alpha_3^2) \end{pmatrix}$$

$$F^{(m)} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta_{1m} H}{C_{33}} e^{-i(\alpha_1 \bar{\xi}_1 + \alpha_3 \bar{\xi}_3)} \\ -\frac{\delta_{2m} H}{C_{33}} e^{-i(\alpha_1 \bar{\xi}_1 + \alpha_3 \bar{\xi}_3)} \\ -\frac{\delta_{3m} H}{C_{33}} e^{-i(\alpha_1 \bar{\xi}_1 + \alpha_3 \bar{\xi}_3)} \end{pmatrix}, \quad W^{(m)} = \begin{pmatrix} U_1^{(m)} \\ U_3^{(m)} \\ Q^{(m)} \end{pmatrix}$$

Тогда решение можно представить в виде:

$$W_q^{(m)}(\bar{\xi}_1 - \bar{x}_1, \bar{\xi}_3 - \bar{x}_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{P_q^{(m)}(\alpha_1, \alpha_3)}{P_0(\alpha_1, \alpha_3)} e^{i(\alpha, \bar{\xi} - \bar{x})} d\alpha, q = 1..3 \quad (5)$$

где P_0 — определитель матрицы A , а $P_i^{(m)}$ — определители матриц, полученных заменой i -ого столбца матрицы A на вектор $F^{(m)}$.

Перейдем в полученных представлениях в полярную систему координат, введя замены: $\alpha_1 = \Lambda \cos \psi$, $\alpha_3 = \Lambda \sin \psi$. Тогда решение (5) можно представить в виде:

$$W_q^{(m)}(\gamma \cos \zeta, \gamma \sin \zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\hat{P}_q^{(m)}(\Lambda, \psi)}{\hat{P}_0(\Lambda, \psi)} e^{i\Lambda \gamma \cos(\psi - \zeta)} d\psi d\Lambda, q = 1..3 \quad (6)$$

Здесь $\hat{P}_0$ — бикубический полином относительно Λ , который является характеристическим уравнением задачи:

$$\hat{P}_0(\Lambda, \psi) = a_0(\Lambda^2 - \theta_1^2(\psi))(\Lambda^2 - \theta_2^2(\psi))(\Lambda^2 - \theta_3^2(\psi))$$

Используя свойства периодичности подинтегральных функций и произведя некоторые преобразования, решение $W_q^{(m)}$ можно представить в виде:

$$W_q^{(m)}(\gamma \cos \zeta, \gamma \sin \zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^3 a_{qmk}(\psi) F^{(1,2)}(\theta_k |\gamma \cos(\psi - \zeta)|) d\psi, q = 1..3 \quad (7)$$

где a_{qmk} — коэффициенты разложения дроби $\frac{\hat{P}_q^{(m)}(\Lambda, \psi)}{\hat{P}_0(\Lambda, \psi)}$ на простейшие:

$$\frac{\hat{P}_q^{(m)}(\Lambda, \psi)}{\hat{P}_0(\Lambda, \psi)} = \sum_{k=1}^3 \frac{a_{qmk}(\psi)}{\Lambda^2 - \theta_k^2(\psi)}$$

Функции $F^{(1,2)}$ имеют вид:

1. В случае, когда полином $\hat{P}_q^{(m)}$ четной степени по Λ :

$$F^{(1)}(\theta z) = \pi i e^{i\theta z} - 2(\text{ci}(\theta z) \cos(\theta z) + \text{si}(\theta z) \sin(\theta z))$$

2. В случае, когда полином $\hat{P}_q^{(m)}$ нечетной степени по Λ :

$$F^{(2)}(\theta z) = i \cdot \text{sign}(z) \left(\frac{\pi}{\theta} e^{i\theta z} - \frac{1}{\theta} (\text{ci}(\theta z) \sin(\theta z) - \text{si}(\theta z) \cos(\theta z)) \right)$$

где $\text{ci}(x)$, $\text{si}(x)$ — интегральный синус и косинус соответственно [4]:

$$\begin{aligned} \text{ci}(x) &= C + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt \\ \text{si}(x) &= -\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \end{aligned}$$

5. Результаты.

Для конкретизации рассмотрим пористоупругий материал со следующими параметрами [1]: $C_{11} = 1.31 \cdot 10^9$ Па, $C_{13} = 0.57 \cdot 10^9$ Па, $C_{33} = 1.52 \cdot 10^9$ Па, $C_{55} = 0.51 \cdot 10^9$ Па, $A_{11} = 0.8$, $A_{33} = 0.2$, $K_{11} = 1.6 \cdot 10^{-12}$ м²/Па·с, $K_{33} = 3.0 \cdot 10^{-10}$ м²/Па·с, $R = 1.36 \cdot 10^9$ Па, $\rho = 2200.0$ кг/м³, $\rho_f = 1000.0$ кг/м³, $\phi = 0.5$, $P_* = 1.0 \cdot 10^9$ Па.

Для наглядности приведем график одного из корней характеристического уравнения в полярной системе координат; действительная часть корня θ_1 приведена на рис. 1, мнимая часть корня θ_1 приведена на рис. 2:

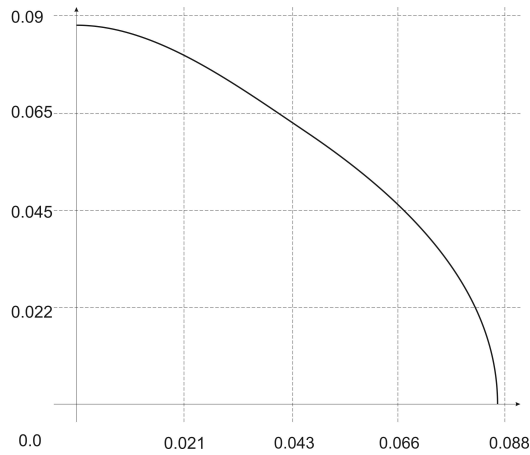


Рис. 1. Действительная часть θ_1 .

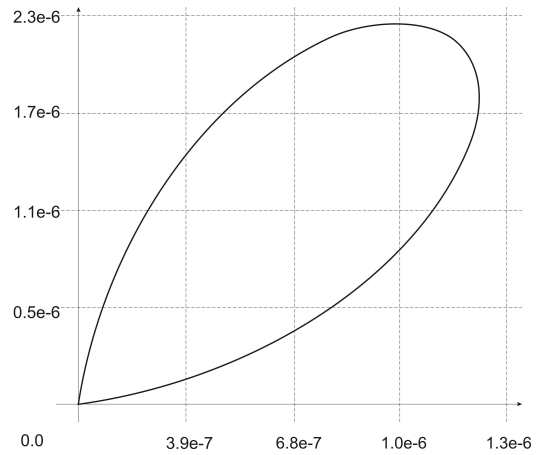


Рис. 2. Мнимая часть θ_1 .

В качестве примера представим реакцию среды на сосредоточенное усилие, приложенное в начале координат в направлении оси x_1 для безразмерной частоты $k = 0.05$. Модуль первой компоненты функции перемещения $U_1^{(1)}$ и давления $Q^{(1)}$ для этого случая приведены на рис. 3, 4. Остальные компоненты функции перемещения и давление для других вариантов приложения сосредоточенного усилия имеют аналогичный вид-локализация в окрестности точки приложения нагрузки и быстрое спадание по мере удаления от нее.

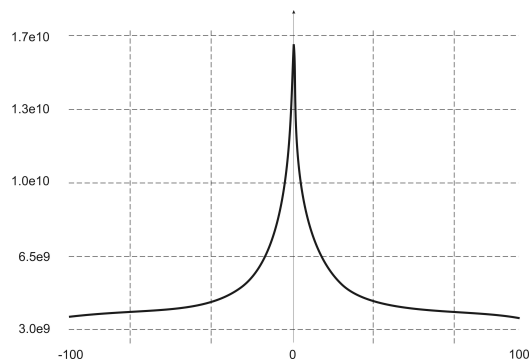


Рис. 3. $U_1^{(1)}$.

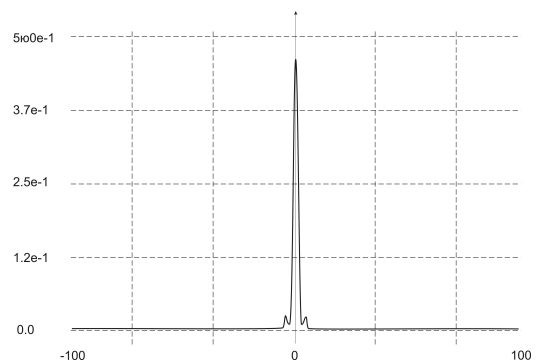


Рис. 4. $Q^{(1)}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Маслов Л. Б.* Математическое моделирование колебаний пороупругих систем. Ивано-ново: ПресСто, 2010. 264 с.
- [2] *Ватульян А. О., Кубликов В. Л.* О граничных интегральных уравнениях в электроупругости // ПММ. 1989. № 6. С. 1037–1041.
- [3] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962. 1100 с.
- [4] *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука., 1964. 342 с.

Lyapin A. A. *Fundamental solutions for transverse-isotropic poroelastic plane.* Way for obtaining fundamental solutions for poroelastic transverse-isotropic plane, using Fourier integral transformation presented. This result can be used for constructing boundary integral equations for problems with inclusions and inhomogeneities of common shape. Dimensionless of the original problem, using corresponding dimensionless parameters performed. Polar sets of roots of characteristic equation of problem and fields of displacement and pressure constructed.

ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СВЕРХМЕЛКОГО ПОТОКА С НЕСТАЦИОНАРНОЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Надолин К. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Предложенная ранее [1, 2] для моделирования течений в слабоискривленных руслах, упрощенная система уравнений рассматривается применительно к т. н. *сверхмелкому потоку*, для которого отношение глубины к ширине является величиной более высокого порядка малости, чем отношение ширины к протяженности. Используемые модельные редуцированные уравнения, описывающие течение как пространственно трехмерный процесс, оказываются существенно проще полных уравнений гидродинамики, а определение гидродинамических полей сводится к решению задачи Коши для квазилинейного гиперболического уравнения относительно функции глубины потока. Для изучаемой редуцированной математической модели существенным оказывается условие нестационарности свободной поверхности потока. В качестве примеров рассмотрены потоки постоянного сечения простой геометрической формы, для которых легко находится точное решение.

1. Математическая модель.

Редуцированные уравнения математической модели сверхмелкого руслового потока при постоянной вязкости в безразмерных переменных имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -g, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial \pi}{\partial z} = g \quad (1)$$

$$u = v = w|_{z=h} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta} = -f_x, \quad \frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta} = -f_y, \quad \pi|_{z=\zeta} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} - w \bigg|_{z=\zeta} = 0 \quad (4)$$

Здесь u , v , w — продольная, поперечная и вертикальная составляющие вектора скорости, соответственно; π — давление; g — гравитационный параметр уклона русла.

Прямоугольные декартовы координаты (x, y, z) введены так, что плоскость xu расположена на поверхности потока, ось z направлена в сторону дна, ось x направлена вдоль уклона русла, а ось y — от левого берега к правому (рис. 1).

Начало координат находится во входном сечении рассматриваемого участка на одинаковом расстоянии от берегов. Ложе потока определяется известной функцией $z = h(x, y)$ и считается твердым, где действуют краевые условия прилипания (2). Параметры f_x и f_y определяют постоянный вектор ветровой нагрузки, действующей на свободную поверхность потока, которая считается слабо деформируемой и заданной неизвестной функцией $z = \zeta(x, y, t)$.

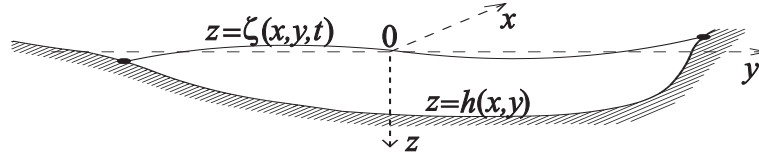


Рис. 1. Сечение руслового потока.

На свободной поверхности действуют динамические краевые условия (3) и кинематическое условие (4).

Из уравнений (1)–(3) давление и компоненты скорости могут быть явно выражены через функцию свободной поверхности $\zeta(x, y, t)$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}g[(h - \zeta)^2 - (z - \zeta)^2] + f_x(h - z), & v &= f_y(h - z), \\ w &= g(h - z) \left((h - \zeta) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2}(h - z) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \\ &+ (h - z) \left(f_x \frac{\partial h}{\partial x} + f_y \frac{\partial h}{\partial y} \right), & \pi &= g(z - \zeta) \end{aligned} \quad (5)$$

Из формул (5) следует, что продольная скорость u квадратично зависит от z и может рассматриваться как комбинация параболического течения Пуазейля и сдвигового течения Куэтта в слое. Возникновение поперечной скорости v связано исключительно с действием внешней поверхностной силы в направлении y , а вертикальная составляющая скорости w обусловлена неровностями дна и свободной поверхности потока. Давление в потоке подчиняется гидростатическому закону, что соответствует многочисленным гидрометрическим данным и общепринятым гидрологическим представлениям о русловых потоках [3].

Из (5) легко получить условие возникновения противотока (нагонного ветрового течения)

$$f_x \leq -\frac{1}{2}g(h - \zeta)$$

Очевидно, что у пологих берегов естественных водотоков противотечение будет возникать даже при незначительном встречном ветровом воздействии, поскольку глубина $(h - \zeta)$ в этих местах мала.

Подставляя выражения (5) в кинематическое условие (4), получим уравнение для возвышения свободной поверхности ζ

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \zeta}{\partial t} + g(h - \zeta)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \\ &+ (h - \zeta) \left(f_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + f_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

2. Глубина потока.

Вводя функцию глубины потока

$$H(x, y, t) = h(x, y) - \zeta(x, y, t) \quad (7)$$

запишем кинематическое краевое условие (6) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + gH^2 \frac{\partial H}{\partial x} + H \left(f_x \frac{\partial H}{\partial x} + f_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \quad (8)$$

Полагая, что в начальный момент времени (при $t = 0$) свободная граница является известной $\zeta(x, y, 0) = \zeta_0(x, y)$, а значит известно и начальное распределение глубин потока $H_0(x, y) = h(x, y) - \zeta_0(x, y)$, имеем

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y) \quad (9)$$

Формулы (8), (9) определяют задачу Коши для однородного квазилинейного гиперболического уравнения первого порядка с тремя независимыми переменными, решение которой существует и единственно.

Действительно, для справедливости этого утверждения достаточно выполнения условия (см. [4, 5])

$$\begin{vmatrix} 1 & H_0(gH_0 + f_x) & f_y H_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

что очевидно.

В работе [1] был рассмотрен случай, когда свободная поверхность потока стационарная (т. е. $\zeta = \zeta(x, y)$), а внешнее ветровое воздействие направлено вдоль оси x (т. е. $f_y = 0$). В этом случае $H = H(x, y)$ и задача (8), (9) принимает вид

$$H(gH + f_x) \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad H(0, y) = H_0^0(y) \quad (10)$$

где $H_0^0(y) = H_0(0, y)$ — функция промера глубин в начальном створе потока $x = 0$.

При $H(gH + f_x) \neq 0$ решение задачи (10) имеет вид $H(x, y) = H_0^0(y)$. Т. е. заданное в начальном створе распределение глубин сохраняется на всем рассматриваемом участке течения.

Далее мы откажемся от предположения о стационарности свободной границы и будем искать решение задачи (8), (9) методом характеристик [4, 5].

Запишем характеристическую систему для уравнения (8)

$$\frac{dx}{dt} = H(gH + f_x), \quad \frac{dy}{dt} = f_y H, \quad \frac{dH}{dt} = 0$$

и найдем интегральный базис

$$x - H(gH + f_x)t = C_1, \quad y - f_y Ht = C_2, \quad H = C_3 \quad (11)$$

Условие Коши (9) запишем в параметрическом виде

$$t = 0, \quad x = \xi, \quad y = \eta, \quad H = H_0(\xi, \eta)$$

и определим постоянные C_1 , C_2 и C_3 в формулах (11)

$$C_1 = \xi, \quad C_2 = \eta, \quad C_3 = H_0(\xi, \eta) \quad (12)$$

Исключая из выражений (11) константы (12), получаем

$$H - H_0(x - H(gH + f_x)t, y - f_y Ht) = 0 \quad (13)$$

Уравнение (13) неявно задает функцию $H(x, y, t)$, которая является решением задачи Коши (8),(9).

3. Примеры точных решений.

Рассмотрим несколько примеров русловых потоков, характерных для гидротехнических приложений и допускающих аналитическое решение уравнения (13).

Будем предполагать, что свободная граница в начальный момент времени невозмущенная и плоская, т.е. $\zeta_0(x, y) = 0$. В этом случае $H_0(x, y) = h(x, y)$, и уравнение (13) имеет вид

$$H - h(x - H(gH + f_x)t, y - f_y Ht) = 0$$

Рассмотрим поток, русло которого имеет постоянное сечение, т.е. дно определяется функцией $z = h(y)$. В этом случае распределение глубин не зависит от x и определяется из уравнения

$$H - h(y - f_y Ht) = 0 \quad (14)$$

Заметим, что если $h(x, y) \equiv \text{const}$, т.е. дно потока задается плоскостью $z = h = \text{const}$, то глубина потока также оказывается постоянной ($H(x, y, t) = h = \text{const}$), а свободная поверхность — стационарной и плоской ($\zeta(x, y, t) \equiv 0$).

Пример 1. Пусть русло описывается функцией $h(x, y) = 1 - |y|$, т.е. имеет в сечении прямоугольный треугольник. В этом случае уравнение (14) имеет вид

$$H - 1 + |y - f_y t H| = 0$$

Для внешней нагрузки, действующей, например, в положительном направлении оси y ($f_y \geq 0$), получим

$$H = \begin{cases} \frac{1+y}{1+f_y t}, & \text{при } -1 \leq y \leq f_y t \\ \frac{1-y}{1-f_y t}, & \text{при } f_y t < y \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

Формула (15) позволяет найти распределение глубин по сечению потока на временном интервале $0 \leq t \leq f_y^{-1}$, причем функция глубина остается в интервале $0 \leq H \leq 1$. Из (15) следует, что в поперечном сечении русла присутствуют две зоны — растущая со временем сгонная $-1 \leq y \leq f_y t$ и уменьшающаяся нагонная $f_y t < y \leq 1$, разделенные линией $y = f_y t$, где глубина равна 1.

Пример 2. Пусть сечение русла потока имеет форму равнобокой трапеции с основаниями $2a$ и $2b$ ($a > b > 0$)

$$h = \begin{cases} \frac{a+y}{a-b}, & \text{при } -a \leq y \leq -b \\ 1, & \text{при } -b < y < b \\ \frac{a-y}{a-b}, & \text{при } b \leq y \leq a \end{cases}$$

В этом случае решение уравнения (14) имеет вид

$$H = \begin{cases} \frac{a+y}{a-b+f_y t}, & \text{при } -a \leq y \leq -b+f_y t \\ 1, & \text{при } -b+f_y t < y < b+f_y t \\ \frac{a-y}{a-b-f_y t}, & \text{при } b+f_y t \leq y \leq a \end{cases}$$

определенное на временном интервале $0 \leq t \leq f_y^{-1}(a-b)$.

Пример 3. Пусть сечение русла потока представляет собою полукруг $h = \sqrt{1-y^2}$. В этом случае уравнение (14) сводится к квадратному уравнению с решением

$$H = \frac{y f_y t + \sqrt{1 + f_y^2 t^2 - y^2}}{1 + f_y^2 t^2} \quad (16)$$

Подставляя выражение (16) в формулы (5) с учетом представления (7), получим выражения для компонент вектора скорости в рассматриваемом случае.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Надолин К. А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Матем. моделирование. 2009. Т. 21, № 2. С. 14–28.
- [2] *Надолин К. А.* Моделирование массопереноса в русловых потоках: проблемы и подходы // Тр. XIV Межд. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, гг. Ростов-на-Дону, Азов, 19-24 июня 2010 г. — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2010. С. 250–254.
- [3] *Железняков Г. В.* Гидрология и гидрометрия. М.: Высшая школа, 1981. 264 с.
- [4] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
- [5] *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003. 416 с.

Nadolin K. A. *Example of the analytically exact solution for the equations of super-shallow stream flow with unsteady free surface.* A proposed in [1, 2] for modeling lengthy stream-bed flows with low curvature and smooth shore lines set of reduced equations is applied for so-called *super-shallow* stream flow, for which depth-width ratio is much less than width-length ratio. These reduced model equations describe stream flow as a 3D phenomenon but they are more simple than general hydrodynamic equations and one can find hydrodynamic fields by solving Cauchy problem for quasi-linear hyperbolic equation about depth-stream function. For undertaken reduced mathematical model the assumption about time-dependence of unsteady free surface flow function is essential. Some examples of stream flows with constant and simple shape of cross-section were tested and analytically exact solutions for these cases were presented.

МЕТОД ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ

Наседкин А. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены теоретические аспекты метода эффективных модулей для композиционных сред с пьезоэлектрическими и пьезомагнитными фазами. Сформулированы утверждения для осредненных полевых характеристик, обобщающие известные для упругих и пьезоэлектрических сред. Выделены восемь статических задач электромагнитоупругости для представительного объема, позволяющие находить эффективные модули магнитоэлектрического композита. Данные задачи различаются граничными условиями на поверхности представительного объема. Для этих задач указаны определенные виды граничных условий, позволяющие по удобным формулам вычислить полный набор эффективных модулей электромагнитоупругой среды с произвольным классом анизотропии.

Пусть Ω — двухфазный композит, состоящий из двух материалов Ω_e и Ω_m ($\Omega = \Omega_e \cup \Omega_m$), причем Ω_e имеет пьезоэлектрические свойства, а Ω_m — пьезомагнитные свойства; $\Gamma = \partial\Omega$ — граница тела; $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — вектор внешней единичной нормали к Γ ($\mathbf{x} \in \Gamma$); $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — вектор-функция перемещений; $\varphi(\mathbf{x})$, $\phi(\mathbf{x})$ — функции электрического и магнитного потенциалов, соответственно. Всюду далее через $\boldsymbol{\varepsilon}$ будем обозначать тензор деформаций; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор механических напряжений; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции; $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции. Поля $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выражаются через $\mathbf{u}$, φ и ϕ следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)/2; \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi; \quad \mathbf{H} = -\nabla \phi.$$

На границе Γ будем рассматривать также вектор механических напряжений $\mathbf{p}$ и поверхностные плотности электрических зарядов σ_e и магнитных зарядов σ_m :

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}; \quad \sigma_e = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}; \quad \sigma_m = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}. \quad (2)$$

Как обычно, осредненные по объему характеристики будем обозначать в угловых скобках:

$$\langle \langle \dots \rangle \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\dots) d\Omega. \quad (3)$$

Следуя обоснованию метода эффективных модулей для упругих сред [1], для электромагнитоупругого тела сформулируем вспомогательные утверждения. Эти утверждения доказываются по аналогичным схемам, что и для упругого тела.

Утверждение 1. Имеют место следующие представления для осредненных по объему Ω полевых характеристик через значения связанных с ними величин на границе Γ :

$$(a) \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}\mathbf{n}^* + \mathbf{n}\mathbf{u}^*) d\Gamma; \quad (4)$$

$$(b) \quad \forall \mathbf{E}, \mathbf{H} \quad \langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \varphi, \quad \langle \mathbf{H} \rangle = -\frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \phi d\Gamma; \quad (5)$$

$$(c) \quad \forall \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* : \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Gamma} (\mathbf{p} \mathbf{x}^* + \mathbf{x} \mathbf{p}^*) d\Gamma; \quad (6)$$

$$(d) \quad \forall \mathbf{D}, \mathbf{B} : \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \langle \mathbf{D} \rangle = -\frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma} \sigma_e \mathbf{x} d\Gamma; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \langle \mathbf{B} \rangle = -\frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma} \sigma_m \mathbf{x} d\Gamma. \quad (7)$$

Естественно, что для (4), (5) нужны формулы (1); а $\mathbf{p}$, σ_e и σ_m в (6), (7) связаны с $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ по (2).

Утверждение 2.

- (a) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0$, где $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0^* = \text{const}$, то $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0$.
- (b) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_0 = \text{const}$, то $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_0$.
- (c) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_0 = \text{const}$, то $\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{H}_0$.
- (d) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0$, где $\mathbf{p}$ — вектор механических напряжений из (2), $\boldsymbol{\sigma}_0 = \text{const}$, то $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\sigma}_0$.
- (e) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\sigma_e = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0$, где σ_e — поверхностная плотность электрического заряда из (2), $\mathbf{D}_0 = \text{const}$, то $\langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{D}_0$.
- (f) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\sigma_m = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0$, где σ_m — поверхностная плотность магнитного заряда из (2), $\mathbf{B}_0 = \text{const}$, то $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}_0$.

Утверждение 3.

- (a) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0^* = \text{const}$, и выполнено уравнение равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$, то $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$.
- (b) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_0 = \text{const}$, и выполнено уравнение электростатики $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, то $\langle \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{D} \rangle \cdot \langle \mathbf{E} \rangle$.
- (c) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_0 = \text{const}$, и выполнено уравнение магнитостатики $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, то $\langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle \cdot \langle \mathbf{H} \rangle$.
- (d) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_0 = \text{const}$, где $\mathbf{p}$ — вектор механических напряжений из (2), и выполнено уравнение равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$, то $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$.
- (e) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\sigma_e = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0$, $\mathbf{D}_0 = \text{const}$, где σ_e — поверхностная плотность электрического заряда из (2), и выполнено уравнение электростатики $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, то $\langle \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{D} \rangle \cdot \langle \mathbf{E} \rangle$.
- (f) Если при $\mathbf{x} \in \Gamma$ $\sigma_m = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_0 = \text{const}$, где σ_m — поверхностная плотность магнитного заряда из (2), и выполнено уравнение магнитостатики $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, то $\langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle \cdot \langle \mathbf{H} \rangle$.

В соответствие с восемью эквивалентными формами определяющих соотношений можно ввести в рассмотрение модули электромагнитоупругой среды:

— εEH -форма

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^{E,H} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^{H*} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{q}^{E*} \cdot \mathbf{H}, \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}^H \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^{S,H} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha}^S \cdot \mathbf{H}, \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{q}^E \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\alpha}^{S*} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\mu}^{S,E} \cdot \mathbf{H}, \quad (10)$$

— σEH -форма

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^{E,H} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^{H*} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{r}^{E*} \cdot \mathbf{H}, \quad (11)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}^H \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon}^{T,H} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\gamma}^T \cdot \mathbf{H}, \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}^E \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma}^{T*} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\mu}^{T,E} \cdot \mathbf{H}, \quad (13)$$

и аналогично для εDH , σDH , εEB , σEB , εDB , σDB -форм.

Например, в (8)–(10) $\mathbf{c}^{E,H}$ — упругие жесткости, $\mathbf{e}^H$ — пьезомодули, $\mathbf{q}^E$ — модули магнитострикции, $\boldsymbol{\epsilon}^{S,H}$ — диэлектрические проницаемости, $\boldsymbol{\alpha}^S$ — коэффициенты магнитоэлектрической связи, $\boldsymbol{\mu}^{S,E}$ — магнитные проницаемости, а верхние индексы указывают, при постоянстве каких полей вычислены данные модули (S — деформации, T — напряжения).

Для двухфазного композита с пьезоэлектрической и пьезомагнитной составляющими модули будут функциями координат $\mathbf{x}$: $\mathbf{c}^{E,H} = \mathbf{c}^{E,H}(\mathbf{x})$; $\mathbf{e}^H = \mathbf{e}^H(\mathbf{x})$ и т. д., причем $\boldsymbol{\alpha}^S = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \Omega$; $\mathbf{q}^E = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \Omega_e$; $\mathbf{e}^H = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \Omega_m$.

Считая, что Ω — представительный объем неоднородного композита с пьезоэлектрической и пьезомагнитной фазами, можно определить эффективные модули $\tilde{\mathbf{c}}^{E,H}$, $\tilde{\mathbf{e}}^H$, $\tilde{\mathbf{q}}^E$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{S,H}$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{S,H}$, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^S$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{S,E}$ по описываемой ниже методике, аналогичной известной для чисто упругих и пьезоэлектрических композитов [2].

Рассмотрим следующую статическую задачу электромагнитоупругости для представительного объема Ω :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (14)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0; \quad \varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0; \quad \phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial\Omega. \quad (15)$$

Задачу (14), (15) назовем задачей I, а ее решение обозначим через $\mathbf{u}^I$, φ^I , ϕ^I . По найденному решению из (1), (8)–(10) определяются $\boldsymbol{\varepsilon}^I$, $\mathbf{E}^I$, $\mathbf{H}^I$, $\boldsymbol{\sigma}^I$, $\mathbf{D}^I$ и $\mathbf{B}^I$, где $\boldsymbol{\varepsilon}^I = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^I)$ и т. д. Отметим, что по утверждению 2 для задачи I $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^I \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\langle \mathbf{E}^I \rangle = \mathbf{E}_0$ и $\langle \mathbf{H}^I \rangle = \mathbf{H}_0$.

Поставим в соответствие данной исходной неоднородной среде некоторую «эквивалентную» однородную среду с эффективными модулями $\tilde{\mathbf{c}}^{E,H}$, $\tilde{\mathbf{e}}^H$, $\tilde{\mathbf{q}}^E$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{S,H}$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{S,H}$, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^S$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{S,E}$. Определяющие соотношения для «эквивалентной» среды в форме, аналогичной (8) — (10), будут иметь вид:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \tilde{\mathbf{c}}^{E,H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \tilde{\mathbf{e}}^{H*} \cdot \mathbf{E}_0 - \tilde{\mathbf{q}}^{E*} \cdot \mathbf{H}_0, \quad (16)$$

$$\mathbf{D}_0 = \tilde{\mathbf{e}}^H \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{S,H} \cdot \mathbf{E}_0 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^S \cdot \mathbf{H}_0, \quad (17)$$

$$\mathbf{B}_0 = \tilde{\mathbf{q}}^E \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{S*} \cdot \mathbf{E}_0 + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{S,E} \cdot \mathbf{H}_0. \quad (18)$$

Условиями для нахождения входящих в (16) — (18) эффективных модулей для задачи I логично принять следующие равенства:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^I \rangle = \boldsymbol{\sigma}_0; \quad \langle \mathbf{D}^I \rangle = \mathbf{D}_0; \quad \langle \mathbf{B}^I \rangle = \mathbf{B}_0. \quad (19)$$

Модули, найденные из этих условий, будем помечать дополнительно верхними индексами «I». Отметим, что по утверждению 3 для неоднородной и «эквивалентной» однородной электромагнитоупругих сред будут одинаковыми и осредненные энергии

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^I \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^I + \mathbf{D}^I \cdot \mathbf{E}^I + \mathbf{B}^I \cdot \mathbf{H}^I \rangle / 2 = (\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0) / 2.$$

Используя (16)–(19), можно подобрать такие граничные условия, для которых получатся явные выражения для эффективных модулей. Например, рассмотрим задачу I при

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_m \mathbf{e}_k); \quad \mathbf{E}_0 = 0; \quad \mathbf{H}_0 = 0, \quad (20)$$

где k, m — некоторые фиксированные значения ($k, m = 1, 2, 3$); $\mathbf{e}_k$ — орты декартового базиса. Тогда, из (16)–(20) получаем:

$$\tilde{c}_{ijkm}^{E,HI} = \langle \sigma_{ij}^I \rangle / (2\varepsilon_0); \quad \tilde{e}_{jkm}^{HI} = \langle D_j^I \rangle / (2\varepsilon_0); \quad \tilde{q}_{jkm}^{EI} = \langle B_j^I \rangle / (2\varepsilon_0). \quad (21)$$

Если же в задаче I положить

$$\varepsilon_0 = 0; \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_k; \quad \mathbf{H}_0 = 0, \quad (22)$$

то из (16)–(19), (22) получим

$$\tilde{e}_{kij}^{HI} = -\langle \sigma_{ij}^I \rangle / E_0; \quad \epsilon_{jk}^{S,HI} = \langle D_j^I \rangle / E_0; \quad \alpha_{kj}^{SI} = \langle B_j^I \rangle / E_0. \quad (23)$$

Наконец, если в задаче I положить

$$\varepsilon_0 = 0; \quad \mathbf{E}_0 = 0; \quad \mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_k, \quad (24)$$

то из (16)–(19), (24) получим

$$\tilde{q}_{kij}^{EI} = -\langle \sigma_{ij}^I \rangle / H_0; \quad \alpha_{jk}^{SI} = \langle D_j^I \rangle / H_0; \quad \mu_{jk}^{S,EI} = \langle B_j^I \rangle / H_0. \quad (25)$$

Отметим, что величины σ_{ij}^I , D_j^I и B_j^I в (21), (23) и (25) разные, так как вычисляются по решениям задач I с различными граничными условиями (15): (20), (22) и (24).

Кроме описанного способа, по аналогии с неоднородными электроупругими средами [3], для электромагнитоупругих сред можно предложить и другие варианты введения эффективных модулей, рассматривая задачи с иными механическими, электрическими и магнитными условиями, перечисленными в утверждении 2. Именно, можно рассматривать следующие задачи:

— задача II с граничными условиями для вектора механических напряжений $\mathbf{p}$, электрического потенциала φ и магнитного потенциала ϕ

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0; \quad \varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0; \quad \phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma;$$

— задача III с граничными условиями для перемещений $\mathbf{u}$, поверхностной плотности электрического заряда σ_e и магнитного потенциала ϕ

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0; \quad \sigma_e = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0; \quad \phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma;$$

— задача IV с граничными условиями для вектора механических напряжений $\mathbf{p}$, поверхностной плотности электрического заряда σ_e и магнитного потенциала ϕ

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0; \quad \sigma_e = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0; \quad \phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

— задачи V–VIII, отличающиеся от задач I–IV заменой граничного условия для магнитного потенциала $\phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma$ на граничное условие для магнитного заряда $\sigma_m = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Во всех этих задачах рассматриваются полевые уравнения равновесия, электростатики и магнитостатики (14). При этом в задаче II используются определяющие соотношения (11)–(13) и первоначально находятся эффективные модули $\tilde{\mathbf{s}}^{E,II}$, $\tilde{\mathbf{d}}^{II}$, $\tilde{\mathbf{r}}^{E,II}$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{T,II}$, $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{T,II}$ и $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{T,E,II}$; в задачах III–VIII — определяющие соотношения для εDH , σDH , εEB , σEB , εDB , σDB -форм и соответствующие модули.

Отметим, что по утверждению 3 во всех задачах I–VIII сохраняется осредненная внутренняя энергия, что является важным обоснованием метода эффективных модулей.

В любой из этих задач по найденным первоначально эффективным модулям можно в дальнейшем определить и все остальные модули, входящие в определяющие соотношения для различных форм, записанные для «эквивалентной» среды. Естественно, что полученные в результате из различных задач эффективные модули будут, вообще говоря, отличаться друг от друга, т.е., например, $\tilde{\mathbf{c}}^{E,II} \neq \tilde{\mathbf{c}}^{E,III} \neq \dots \neq \tilde{\mathbf{c}}^{E,VIII}$, и т.п.

Формулы (21), (23), (25) и аналогичные для задач II–VIII позволяют вычислить полный набор эффективных модулей электромагнитоупругой среды произвольного класса анизотропии. Использование же тех или иных определяющих соотношений из восьми различных типов задач может оказаться полезным для нахождения эффективных модулей неоднородных структур, совершающих при работе преимущественно одномерные движения, например, стержней, пластин, дисков с пьезожесткими и пьезомягкими модами колебаний и др.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-01-00875).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
- [2] Хорошун Л. Н., Маслов Б. П., Лещенко П. В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев.: Наукова Думка, 1989. 347 с.
- [3] Наседкин А. В. О некоторых способах определения эффективных характеристик неоднородных пьезоматериалов // Совр. пробл. мех. спл. среды: Тр. VII Межд. конф. памяти акад. РАН И. И. Воровича, Ростов-на-Дону, 22–24 окт. 2001 / Ростов-н/Д: Изд-во ООО «ЦВВР», 2002. Т. 1. С. 14–22.

Nasedkin A. V. *Effective modules methods for determination of electromagnetic composites characteristics.* Theoretical aspects of effective constants method for inhomogeneous electro-magneto-elastic medium are considered. The convenient formulas for all effective constants are obtained.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Недин Р. Д.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены постановки прямых и обратных задач для тонких упругих пластин с неоднородным полем предварительных напряжений. Подробно рассмотрены два режима колебаний — планарный и изгибный. Решения прямых задач получены и исследованы с помощью метода конечных элементов. Предложена схема идентификации неоднородных одноосных предварительных напряжений, основанная на построении итерационного процесса. Представлена серия вычислительных экспериментов по восстановлению предварительных напряжений в рамках нескольких модельных задач, отличающихся друг от друга типами приложенных зондирующих нагрузок. Приведены эффективные режимы нагружения и частотные диапазоны, дающие наибольшую точность идентификации.

1. Введение. Трудно переоценить роль класса задач об анализе предварительного напряженного состояния в твердых телах и механических конструкциях. Прежде всего это связано с тем, что если в конструкции есть концентраторы или существенные неоднородности предварительных напряжений, то это может стать причиной значительной потери прочностных характеристик конструкции или даже ее разрушения. С другой стороны, нередко наличие особых типов предварительного напряженного состояния в конструкции может, наоборот, повысить ее надежность и прочность при эксплуатации.

Одним из наиболее эффективных неразрушающих методов оценки неоднородного предварительного напряженного состояния является акустический метод. Наиболее часто при моделировании предварительного напряженного состояния используется модель однородных начальных напряжений, причем при оценке его уровня достаточно измерения скоростей упругих волн [5]. В то же время в реальных конструкциях предварительное напряженное состояние неоднородно. Существенные неоднородности предварительных напряжений наиболее часто встречаются в окрестностях различных дефектов — полостей, включений, трещин, в областях сварных швов.

В настоящей работе исследованы возможности идентификации поля неоднородных предварительных напряжений в тонких упругих изотропных пластинах, нагружаемых в режимах планарных и изгибных стационарных колебаний, с помощью неразрушающего акустического метода.

2. Постановки прямых задач о планарных и изгибных колебаниях тонкой предварительно напряженной пластины. В рамках плоского напряженного состояния рассмотрим установившиеся колебания произвольного тела с границей $l = l_u \cup l_\sigma$, занимающего область S , которая на части границы l_u жестко закреплена, а на части l_σ действует нагрузка, осциллирующая с частотой ω . Будем считать, что тело находится в условиях неоднородного предварительного

напряженного состояния. Тогда линеаризованная постановка задачи об установившихся планарных колебаниях имеет вид следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \\ T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma_{mj}^0, \\ \sigma_{ij} = \lambda^* \delta_{ij} u_{k,k} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \\ u_i|_{l_u} = 0, \\ T_{ij} n_j|_{l_\sigma} = P_i, \quad i, j = 1, 2, \end{cases} \quad (1)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений, T_{ij} — компоненты несимметричного тензора Пиолы [7], σ_{ij}^0 — компоненты симметричного тензора предварительных напряжений, σ_{ij} подчиняются линейному закону Гука, ε_{ij} — компоненты линейного тензора деформаций. При этом рассматривается плоское напряженное состояние, т. е. $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$ (далее звездочку будем опускать). Будем считать, что компоненты тензора предварительных напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия, т. е. $\sigma_{ij,j}^0 = 0$.

Постановка аналогичной задачи об изгибных установившихся колебаниях пластины под действием нагрузки q , приложенной на контуре l_σ перпендикулярно плоскости сечения, имеет вид

$$\begin{cases} D\Delta^2 w + \frac{2}{3}h^3(\sigma_{m\beta}^0 w_{,\alpha m})_{,\alpha\beta} - 2h\sigma_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta} + \frac{2}{3}h^3\rho\omega^2\Delta w - 2h\rho\omega^2 w = 0, \\ w|_{l_u} = 0, \frac{\partial w}{\partial n}|_{l_u} = 0, G_t|_{l_\sigma} = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial\tau}(H_t) - N_t + \frac{2}{3}h^3\rho\omega^2\frac{\partial w}{\partial n}\right]|_{l_\sigma} = q. \end{cases} \quad (2)$$

где $D = \frac{2}{3}h^3(\lambda^* + 2\mu) = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины,

$G_t = \frac{2}{3}h^3\tilde{T}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta$ — изгибающий момент на ∂S ,

$H_t = \frac{2}{3}h^3(\tilde{T}_{2\beta}n_\beta n_1 - \tilde{T}_{1\beta}n_\beta n_2)$ — крутящий момент на ∂S ,

$N_t = -D\frac{\partial(\Delta w)}{\partial n} - \frac{2}{3}h^3(\sigma_{m\beta}^0 w_{,\alpha m})_{,\beta}n_\alpha + 2h\sigma_{\alpha\beta}^0 n_\alpha w_{,\beta}$ — поперечная сила на ∂S ,

$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \lambda^* \delta_{\alpha\beta} w_{,kk} + 2\mu w_{,\alpha\beta} + w_{,\alpha m}\sigma_{m\beta}^0, \quad \alpha, \beta, k, m = 1, 2;$

$\frac{\partial}{\partial n}$ и $\frac{\partial}{\partial\tau}$ — соответственно нормальная производная и производная по касательному направлению к контуру ∂S .

Слабые постановки задач (1) и (2) имеют вид соответственно

$$\int_{l_\sigma} P_i v_i dl_\sigma - \int_S (\lambda u_{i,i} v_{j,j} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u_k) \varepsilon_{ij}(v_k) + u_{i,m} \sigma_{mj}^0 v_{i,j} - \omega^2 \rho u_i v_i) dS = 0, \quad (3)$$

и

$$\int_S \left[D w_{,\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} + \frac{2}{3}h^3 \sigma_{m\beta}^0 w_{,\alpha m} v_{,\alpha\beta} + 2h\sigma_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} v_{,\beta} - 2h\rho\omega^2 w v - q v \right] dS = 0. \quad (4)$$

3. Решение прямых задач. Решение прямых задач (1) и (2) реализовано с помощью метода конечных элементов в пакете FreeFem++ на основе их слабых постановок (3) и (4).

Было проведено исследование влияния величины предварительных напряжений σ_{11}^0 на амплитудно-частотные характеристики различных точек прямоугольной пластины, нагружаемой разными способами, в режимах планарных и изгибных колебаний. Это исследование проводилось на первых двух частотных диапазонах (т.е. до первой резонансной частоты и между первой и второй резонансными частотами), для разных соотношений геометрических размеров области. Наиболее сильное влияние уровни предварительных напряжений оказывают в окрестностях резонансных частот. Расхождение в амплитудно-частотных характеристиках оказалось вполне достаточным для использования процедуры реконструкции предварительных напряжений (см. работы [4, 6]).

4. Постановка обратной задачи. Рассмотрим обратную задачу для пластины с теми же характеристиками, что и в п.2, с существующими внутри нее неоднородными одноосными предварительными напряжениями, характеризующимися одной компонентой тензора предварительных напряжений $\sigma_{11}^0(x_2)$. Известными будем считать материал, нагрузку и некоторую дополнительную информацию о поле смещений; при этом наиболее популярными способами ее задания являются следующие: 1) задание поля смещений u_i внутри области для фиксированной частоты; 2) задание поля смещений u_i на части границы ∂S в конечном наборе частот $\omega_k \in [\omega_-, \omega_+]$. В первой постановке обратная задача линейна, во второй — нелинейна [2]. Рассмотрим 2-ой способ задания дополнительной информации:

$$\{u_i|_{l_u}\}_k, \omega_k \in [\omega_1, \omega_2], k = \overline{1, m}.$$

Отдельно следует отметить, что тензор предварительных напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$, откуда следует, что в одноосном случае (т.е. когда единственной отличной от нуля компонентой тензора $\underline{\underline{\sigma}}^0$ является σ_{11}^0) $\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x_2)$.

Поставим задачу о восстановлении закона изменения $\sigma_{11}^0(x_2)$.

5. Сведение решения обратной задачи к итерационному процессу. Один из способов построения операторных соотношений в обратной задаче основан на применении следствия обобщенного соотношения взаимности, выведенного в работе [3]:

$$\int_V \delta\sigma_{mj}^0 u_{i,m} u_{i,j} dV + \int_{l_\sigma} P_i(f_i - u_i) dl_\sigma = 0, \quad (5)$$

где $\delta\sigma_{mj}^0$ — поправки к неизвестным функциям предварительных напряжений, f_i — известное поле смещений на части поверхности l_σ . Из этого соотношения в случае планарных колебаний пластины следует уравнение

$$\int_S \delta\sigma_{11}^0 [(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2] dS = \int_{l_\sigma} P_i(u_i - f_i) dl_\sigma. \quad (6)$$

а в случае изгибных колебаний — уравнение

$$\int_S \delta\sigma_{11}^0 \left[\frac{2}{3} h^3 (w_{,11}^2 + w_{,12}^2) + 2h w_{,1}^2 \right] dS = \int_{l_\sigma} q(w - f) dS. \quad (7)$$

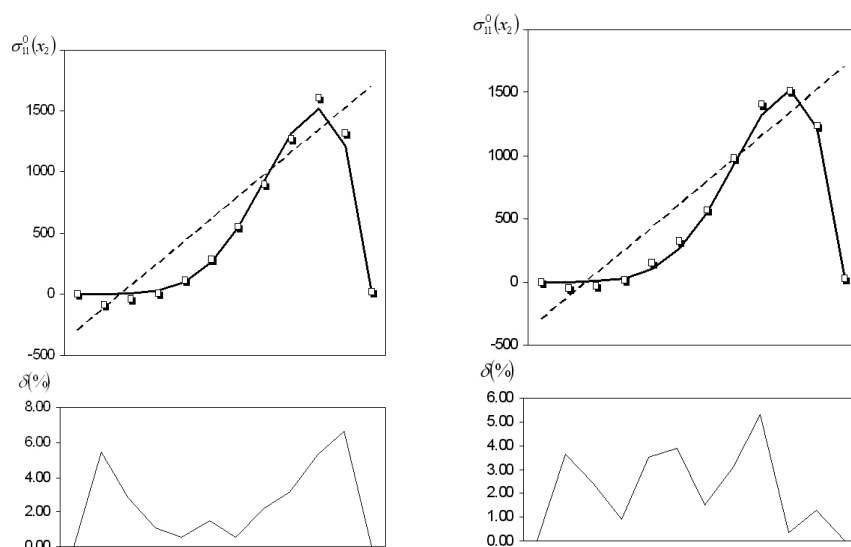


Рис. 1. Слева: планарные колебания; 18 итераций. Справа: изгибные колебания; 29 итераций.

Оба уравнения (6) и (7) представляют собой интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода относительно поправки $\delta\sigma_{11}^0$ к неизвестной функции предварительных напряжений.

Обе обратные задачи сведены к итерационному процессу: сначала выбирается начальное приближение неизвестной функции; затем реализуется итерационный процесс, на каждом шаге которого решается прямая задача и интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, после чего происходит корректировка приближения с учетом вычисленной поправки по формуле $\sigma_{11}^{0(n)} = \sigma_{11}^{0(n-1)} + \delta\sigma_{11}^0$ [1].

6. Численные эксперименты. Исследования показали, что предложенная схема идентификации одноосных неоднородных начальных напряжений является работоспособной и эффективной. Установлено, что, во-первых, 2-ой частотный диапазон амплитудно-частотной характеристики почти во всех случаях оказался благоприятнее, чем 1-ый; во-вторых, чем больше выбирается область нагружения, тем лучше результаты восстановления.

Ранее в режиме планарных колебаний было рассмотрено 6 модельных задач для прямоугольной пластины, защемленной одной гранью, отличающихся друг от друга по способу нагружения (были рассмотрены различные сочетания приложений касательных и нормальных нагрузок к незащемленным граням пластины) [4].

Для апробирования схемы идентификации выбирались различные классы восстанавливаемых функций — линейные, полиномиальные, экспоненциальные, тригонометрические и более сложные аналитические зависимости. При этом частоты колебаний ω прикладываемой нагрузки выбирались из первых двух частотных диапазонов амплитудно-частотной характеристики.

На рис. 1 приведены результаты идентификации функции предварительных напряжений $\sigma_{11}^0(x_2) = 0.001 \sin(0.062x_2)x_2^4$ для планарных и изгибных колебаний. В планарном случае равномерно-распределенная касательная нагрузка действует на одной верхней незащемленной грани пластины (при этом защемлена ле-

вая грань), а в изгибном случае равномерно-распределенная нагрузка приложена к незащемленным граням перпендикулярно сечению пластины. Параметры пластины приняты следующими: $l = 1$ м, $h = 0.5$ м, $E = 1.96 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.28$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³ (параметры стали). На всех рисунках сплошная линия — точный закон распределения предварительных напряжений, пунктир — 1-ое приближение, квадратики — результат идентификации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

Автор выражает благодарность А. О. Ватульяну за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А. О. Итерационные процессы в обратных коэффициентных задачах // Труды XIV международной конференции «Современные проблемы МСС». Изд-во ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2010. Т. 1. С. 81–85.
- [2] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [3] Ватульян А. О., Дударев В. В. О некоторых проблемах реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругих телах // Изд. Сарат. Унта. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. вып. 4, ч. 2. С. 25–32.
- [4] Ватульян А. О., Недин Р. Д. К идентификации неоднородных предварительных напряжений // Вестник Санкт-Петербургского Государственного университета. Сер.1. Математика, механика, астрономия. Изд-во Санкт-Петербургского университета. 2011. С. 38–44.
- [5] Guz A. N. On foundations of the ultrasonic nondestructive method for determination of stresses in near-surface layers of solid bodies // International Applied Mechanics. Vol. 41, No. 8, Springer Science+Business Media, Inc. 2005. Pp. 944–955.
- [6] Nedin R. D., Vatulyan A. O. On the Reconstruction of Inhomogeneous Initial Stresses in Plates. Advanced Structured Materials. Vol. 15. Shell-like Structures — Nonclassical Theories and Applications. Springer. 2011. Pp. 165–182.
- [7] Robertson R. L. Determining Residual Stress from Boundary. Measurements: a Linearized Approach // Netherlands. Journal of Elasticity. 1998. Vol. 52. Pp. 63–73.

Nedin R. D. *The Direct and Inverse Problems for the Prestressed Elastic Plates.* Annotation. The formulations of the direct and inverse problems for the thin elastic plates with inhomogeneous prestress field are considered. Two vibration regimes are examined in detail — an in-plane and an out-of plane vibrations. The direct problems solutions are obtained and explored using the finite element method. The scheme of the inhomogeneous uni-axial prestress identification is proposed, which is based on the iterative process. The series of numerical experiments on the prestress identification in the limits of several model problems differing by probing types is presented. The efficient probing regimes and frequency ranges are given for the highest identification accuracy.

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ СРЕДЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Нескородев Р. Н.

Донецкий национальный университет

В работе представлены результаты решения задач линейной вязкоупругости анизотропного тела, полученные методом численного определения резольвент интегральных уравнений состояния среды и приведения интегральных уравнений к уравнениям закона Гука в произвольный момент времени. Используемый метод не требует аналитического представления ядер ползучести или релаксации и базируется на непосредственном использовании экспериментальных данных. Приведены данные численных исследований напряженного состояния бесконечной вязкоупругой ортотропной пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием.

Введение. Один из способов решения граничных задач теории линейной вязкоупругости базируется на использовании принципа Вольтерра, основанном на том, что решение этих задач получают из соответствующих упругих решений заменой упругих постоянных временными операторами. При использовании этого принципа существенное значение имеет наличие алгебры операторов Вольтерра. Для специального класса операторов с дробно-экспоненциальными ядрами такой подход был предложен в работе [1], что сделало возможным получение явного представления резольвенты интегрального уравнения по заданному ядру.

В работе [2] предложена методика решения задач линейной вязкоупругости анизотропного тела, которая не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Методика основана на численном нахождении резольвент интегральных уравнений состояния среды и предполагает работу с табличными данными, заданными на достаточно густой сетке. В данной работе предложен метод сглаживания и восполнения таблиц экспериментальных данных. На основе этих таблиц строятся матрицы уравнений состояния, элементы которых имеют явную зависимость от времени. Решение задач вязкоупругости в произвольный момент времени осуществляется по тем же алгоритмам, которые используются в теории упругости.

При помощи предложенной методики решена задача об обобщенном плоском напряженном состоянии бесконечной ортотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием.

1. Метод сглаживания и восполнения таблиц экспериментальных данных. При проведении эксперимента определяются данные для построения кривых ползучести или релаксации. Таблица экспериментальных данных может содержать погрешности измерений, которые обусловлены различными причинами. Поэтому данные таблицы должны подлежать определенной математической обработке. Эта задача тесно связана с задачей сглаживания и восполнения, когда по заданным точкам измерения (t_k, ε_k) необходимо провести гладкую кривую $w(t)$

t , час	0	12	24	48	120	240	360	505
$\varepsilon_k/\varepsilon_0$	1.000	1.200	1.271	1.336	1.432	1.542	1.632	1.684
t , час	624	744	864	1008	1128	1248	1320	1400
$\varepsilon_k/\varepsilon_0$	1.736	1.755	1.774	1.826	1.832	1.838	1.839	1.839

Таблица 1. Данные ползучести стеклотекстолита ТС8/3-250.

при минимальной погрешности. При этом в качестве функции $w(t)$ необходимо выбирать выражение, которое будет описывать ожидаемое поведение изучаемого физического процесса. Установлено, что функции ползучести должны быть монотонно возрастающими, а функции релаксации, монотонно убывающими функциями времени [3, 4]. Если уровень нагрузок меньше предела прочности материала, то развитие деформаций практически полностью прекращается при достижении определенного времени. В этом случае имеет место затухающий процесс, а представление для функции $w(t)$ можно выбирать в виде ряда, содержащего убывающую экспоненциальную функцию:

$$w(t) = \left(1 + \sum_{k=1}^m a_k t^{\alpha k}\right) \exp[-\beta t^{\alpha}]. \quad (1)$$

В представлении (1) подлежат определению величины α , β и a_k . С использованием дискретного метода наименьших квадратов получено восполнение сеточных значений известных экспериментальных данных, приведенных в работе [5] для стеклотекстолита ТС8/3-250. В табл. 1 представлены данные эксперимента, а на сплошной линии даны графики восполнения (точки — табличные данные).

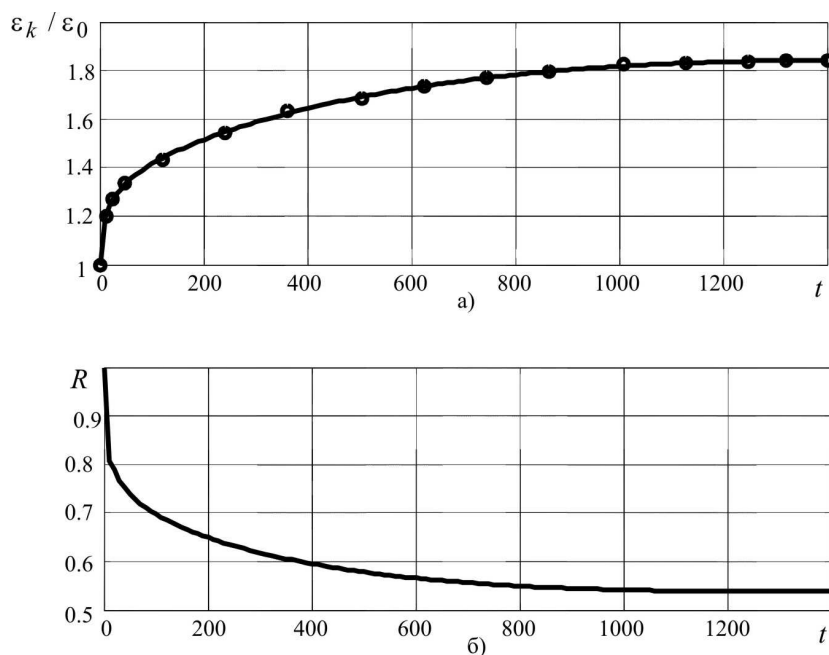


Рис. 1. Кривые ползучести а) и релаксации б) стеклотекстолита ТС8/3-250.

2. Численное определение резольвент интегральных уравнений теории вязкоупругости. Для определения напряжений и деформаций, возникающих в анизотропной среде при ее длительном нагружении, в работе [2] использованы уравнения состояния в форме

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(0) \mathbf{e}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{R}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{e}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(0) \mathbf{s}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{s}(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{s}(t) = s_i = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6]$, $\mathbf{e}(t) = e_k = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]$ — векторы напряжений и деформаций; $\mathbf{R} = \{R_{ij}\}$ и $\mathbf{P} = \{P_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) — регулярные части матриц функций релаксации и ползучести.

В момент приложения внешних усилий или деформаций (время $t = 0$) упругие постоянные материала среды характеризуются матрицей $\mathbf{a}$ — коэффициентов деформации, или $\mathbf{A}$ — модулей упругости, а решение является упругим. Дальнейшее поддержание усилий или деформаций (время $t > 0$), приводит к тому, что тело продолжает деформироваться. Соотношения между модулями упругости и коэффициентами деформации в теории упругости имеют вид $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{a}$. Соответствующие соотношения между функциями ползучести и релаксации неверны. Однако имеют место соотношения [4]

$$\mathbf{P}(0) = [\mathbf{R}(0)]^{-1}, \quad \mathbf{P}(\infty) = [\mathbf{R}(\infty)]^{-1}. \quad (4)$$

для мгновенных и длительных модулей упругости и коэффициентов деформации.

Численные соотношения между функциями ползучести и релаксации найдены в работе [2]. Они имеют вид

$$\mathbf{R}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{R}_{k-i} (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \right) \mathbf{A} \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_{k-i} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}) \right) \mathbf{a} \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad (6)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(t_i)$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(t_i)$, $\mathbf{P}_{k-i} = \mathbf{P}(t_k - t_i)$, $\mathbf{R}_{k-i} = \mathbf{R}(t_k - t_i)$ — значения функций в точке $t = t_i$.

Из соотношений (5) по экспериментально найденным значениям функции ползучести в точках сетки находятся функции релаксации, а из (6) — наоборот.

На рис. 1 б) приведена кривая релаксации, соответствующая кривой ползучести рис. 1 а) и вычисленная по формулам (5). Точность вычислений контролировалась обратным пересчетом по формулам (6). Вычисленные значения сравнивались с исходными $\mathbf{P}_k$ поточечно. В результате максимальная по абсолютному значению погрешность мала и составляет величину порядка 10^{-15} . Кроме того, с большой точностью выполняются условия (4).

В работе [2] показано, что знание функций $\mathbf{R}_k$ и $\mathbf{P}_k$ позволяет операторные соотношения (2) и (3) записать в виде

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{R}(t_k)\mathbf{e}_k, \quad \text{или} \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{P}(t_k)\mathbf{s}_k \quad (7)$$

и определение перемещений, деформаций и напряжений в момент времени $t > 0$ свести к решению одной из задач (7). Это соответствует решению упругой задачи с уравнениями закона Гука в момент времени $t = t_k$.

3. Результаты численных исследований. Апробация предложенного метода была осуществлена проведением численных исследований для растягиваемой на бесконечности ортотропной пластины со свободным от нагружения эллиптическим отверстием.

Результаты, полученные для ортотропной пластинки, изготовленной из композитного материала на основе эпоксидного связующего со следующими упругими и реологическими параметрами [6]

$$E_{11}^0 = 23.0 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_1 = 0.0323 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_1 = 0.157 c^{-(1+\alpha)},$$

$$E_{22}^0 = 16.0 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_2 = 0.1295 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_2 = 0.2745 c^{-(1+\alpha)},$$

$$G_{12}^0 = 3.08 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_g = 0.0717 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_g = 0.0276 c^{-(1+\alpha)},$$

$$\nu_{12} = 0.11, \quad \nu_{21} = 0.0765, \quad \alpha = -0.846.$$

сравнивались с результатами, полученными в работе [7] для тонкой бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием, свободным от нагружения. Пластика растягивалась на бесконечности усилиями $\sigma_x^0 = p \cos^2 \varphi$, $\sigma_y^0 = p \sin^2 \varphi$, $\tau_{xy}^0 = p \sin \varphi \cos \varphi$, где φ — угол между направлением растягивающих усилий интенсивности p и положительным направлением оси Ox . Соотношение полуосей эллипса $a/b = 2$. На рис. 2а) сплошной линией показаны изменения максимальных напряжений σ_θ , полученные по предложенной методике, которые возникают в точке контура, соответствующей $\theta = 90^\circ$ при $\varphi = 0^\circ$. Значения напряжений

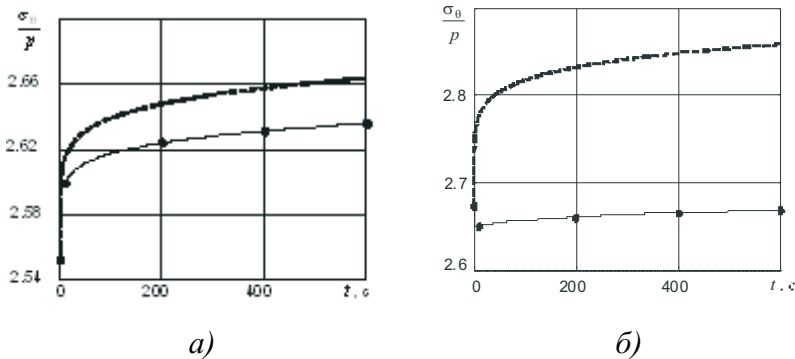


Рис. 2. Изменения максимальных напряжений на контуре эллиптического отверстия.

в этой точке для некоторых моментов времени, взятые из работы [7], обозначены точками. Штриховой линией изображены результаты рассматриваемой задачи

в упрощенной постановке, когда учитывается только сдвиговая ползучесть, т. е. $\overline{E}_1 = E_1$, $\overline{E}_2 = E_2$.

Аналогичные результаты представлены на рис. 2б) в точке $\theta = 0^\circ$ для случая $\varphi = 45^\circ$.

Как видно из рис. 2, результаты, полученные по предложенной методике, хорошо согласуются с известными результатами.

Заключение. Предложенная методика решения задач вязкоупругости анизотропного тела не требует построения явных аналитических представлений ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Методика основана на численном решении интегральных уравнений состояния среды и предполагает работу с таблицами экспериментальных данных, определенными на достаточно густой сетке. Решение задач вязкоупругости в произвольный момент времени осуществляется по тем же алгоритмам, которые используются в теории упругости. В рамках предложенного подхода представлены результаты численного исследования вязкоупругого напряженного состояния бесконечной ортотропной пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [2] Шевченко В. П., Нескородев Р. Н. Новый метод решения задач вязкоупругости анизотропных сред // Доп. НАН України. 2010. № 11. С. 51–58.
- [3] Ильющин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
- [4] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
- [5] Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степанычев Е. И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 // Механика полимеров. 1971. № 3. С. 391–397.
- [6] Каминский А. А., Гаврилов Д. А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. Киев: Наук. думка, 1992. 248 с.
- [7] Подильчук И. Ю. Исследование концентрации напряжений в вязкоупругой ортотропной пластине с эллиптическим отверстием // Прикл. механика. 1997. 33, № 9. С. 64–73.

Neskorodev R. N. *Numerical calculation of resolvents of integral equations of state environment in solution of a viscoelastic.* In article the method of the numerical solution of problems linear viscoelasticity of the anisotropic body, not demanding obvious construction of analytical representation of kernels of creep and a relaxation is offered. The approached decision of the integrated equations is based on direct use of the experimental data preliminary smoothed and filled in richer grid. Results of numerical research of a viscoelastic stress state orthotropic plate weakened by an elliptic hole are submitted.

ОБРАЗОВАНИЕ КАВЕРНЫ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Норкин М. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается совместное движение вязкой несжимаемой жидкости и полностью погруженного в нее эллиптического цилиндра на малых временах. Предполагается, что цилиндр движется из состояния покоя в горизонтальном направлении с постоянным ускорением. Особенностью этой задачи является то, что при быстром разгоне цилиндра происходит отрыв жидкости от поверхности тела и образование каверны за телом.

1. Постановка задачи. Рассмотрим эллиптический цилиндр, полностью погруженный в вязкую несжимаемую жидкость, занимающую ограниченную область прямоугольной формы. Считаем, что цилиндр начинает свое движение из состояния покоя и движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением w_0 . Предполагается, что сразу после начала движения происходит отрыв частиц жидкости от поверхности тела, в результате которого позади цилиндра образуется каверна (движение с большими ускорениями). Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, жестко связанной с цилиндром, имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \dot{h}(t) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + (\bar{v}, \nabla) \bar{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \bar{v} - \frac{1}{Fr^2} \bar{k}, \quad \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad r \in \Omega(t), \quad (1)$$

$$\left(-p + 2Re^{-1} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) n_x + Re^{-1} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) n_y = 0, \quad r \in S_2(t), \quad (2)$$

$$Re^{-1} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) n_x + \left(-p + 2Re^{-1} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) n_y = 0, \quad r \in S_2(t), \quad (3)$$

$$v_y = \frac{\partial \xi}{\partial x} (v_x - \dot{h}(t)) + \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad r \in S_2(t); \quad \bar{v} = \dot{h}(t) \bar{i}, \quad r \in S_{11}(t), \quad (4)$$

$$\left(-p + 2Re^{-1} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) n_x + Re^{-1} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) n_y = 0.5 \chi n_x, \quad r \in S_{12}(t), \quad (5)$$

$$Re^{-1} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) n_x + \left(-p + 2Re^{-1} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) n_y = 0.5 \chi n_y, \quad r \in S_{12}(t), \quad (6)$$

$$R^{-1} (xv_x + yv_y - x\dot{h}(t)) = R^{-2} \left(R'_0(\theta) + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) (xv_y - yv_x + y\dot{h}(t)) + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (7)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad R_0(\theta) = (\cos^2 \theta + \alpha^{-2} \sin^2 \theta)^{-1/2}, \quad (8)$$

$$\bar{v} = 0, \quad y = -H_b; \quad \bar{v} = 0, \quad x = H_R - 0.5t^2, -H_L - 0.5t^2, \quad (9)$$

$$\bar{v}(x, y, 0) = 0, \quad \xi(x, 0) = 0, \quad \eta(\theta, 0) = 0, \quad h(t) = 0.5t^2. \quad (10)$$

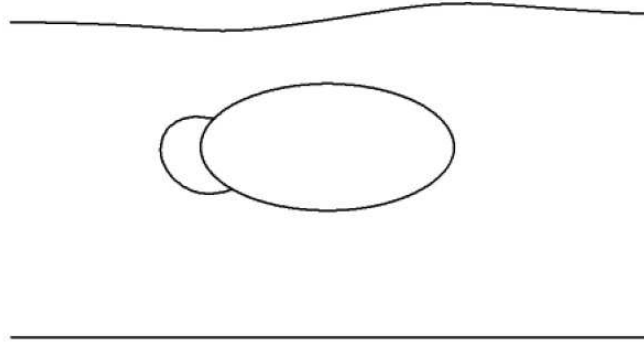


Рис. 1. Форма каверны и возвышение внешней свободной границы жидкости на начальном этапе движения эллиптического цилиндра.

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам:

$$t' = \sqrt{\frac{a}{w_0}} \cdot t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad p' - p_a = \rho w_0 a p, \quad \bar{v}' = \sqrt{w_0 a} \cdot \bar{v},$$

где штрихами помечаются размерные величины. Подвижные координаты x, y связаны с неподвижными x_1, y_1 соотношениями: $x = x_1 - h(t)$, $y = y_1$.

Здесь $\bar{v} = \bar{v}(x, y, t)$, $p = p(x, y, t)$ — скорость движения жидкости и давление, записанные относительно подвижной системы координат; $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости; $\Omega(t)$ — область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ — часть поверхности цилиндра на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ — оторвавшаяся от поверхности цилиндра внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ — свободная граница жидкости, которая первоначально была горизонтальной; $h(t)$ — закон движения цилиндра; a и b — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса; r — радиус-вектор с координатами (x, y) .

Функции $\eta = \eta(\theta, t)$ и $\xi = \xi(x, t)$ определяют возмущение внутренней и внешней свободной границы жидкости, где θ — полярный угол. Уравнения этих границ относительно подвижной системы координат имеют вид:

$$R = R_0(\theta) + \eta(\theta, t), \quad y = H + \xi(x, t).$$

На свободных границах задаются динамические и кинематические условия. Кинематическое условие (7) на $S_{12}(t)$ записывается в полярных координатах R, θ ($x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$). Задача (1)–(10) содержит безразмерные параметры:

$$Re = \frac{a\sqrt{w_0 a}}{\nu}, \quad Fr = \sqrt{\frac{w_0}{g}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho w_0 a}, \quad \alpha = \frac{b}{a},$$

где Re — число Рейнольдса; Fr — число Фруда; χ — число кавитации; p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне; g — ускорение свободного падения.

В каждый момент времени решение задачи должно удовлетворять требованию конечности полной энергии жидкости в объеме $\Omega(t)$.

Отметим, что близкие задачи по динамике отрыва на малых временах исследовались ранее только для случая идеальной жидкости [1].

2. Асимптотическое решение задачи на малых временах. Введем в рассмотрение быстрое время τ , полагая $t = \varepsilon\tau$, где ε — малый параметр. Асимптотическое разложение решения начально-краевой задачи (1)–(10) в случае, когда число Рейнольдса одного порядка с ε ($Re = \delta^{-1}\varepsilon$, $\delta = \text{const}$), будем искать в виде следующих разложений ($\varepsilon \rightarrow 0$):

$$\bar{v}(x, y, \varepsilon\tau) = \varepsilon\bar{v}_0(x, y, \tau) + \varepsilon^3\bar{v}_1(x, y, \tau) + o(\varepsilon^3), \quad (11)$$

$$p(x, y, \varepsilon\tau) = p_0(x, y, \tau) + \varepsilon^2 p_1(x, y, \tau) + o(\varepsilon^2), \quad (12)$$

$$\xi(x, \varepsilon\tau) = \varepsilon^2 \xi_0(x, \tau) + \varepsilon^4 \xi_1(x, \tau) + o(\varepsilon^4), \quad (13)$$

$$\eta(\theta, \varepsilon\tau) = \varepsilon^2 \eta_0(\theta, \tau) + \varepsilon^4 \eta_1(\theta, \tau) + o(\varepsilon^4). \quad (14)$$

Подставляя разложения (11)–(14) в уравнения, граничные и начальные условия задачи (1)–(10), придем в главном приближении к следующей задаче:

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \tau} = -\nabla p_0 + \delta \Delta \bar{v}_0 - \frac{1}{Fr^2} \bar{k}, \quad \text{div } \bar{v}_0 = 0, \quad \bar{v}_0(x, y, 0) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial v_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial x} = 0, \quad -p_0 + 2\delta \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} = 0, \quad y = H, \quad (16)$$

$$\left(-p_0 + 2\delta \frac{\partial v_{0x}}{\partial x}\right) n_x + \delta \left(\frac{\partial v_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial x}\right) n_y = 0.5\chi n_x, \quad r \in S_{12}(0), \quad (17)$$

$$\delta \left(\frac{\partial v_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial x}\right) n_x + \left(-p_0 + 2\delta \frac{\partial v_{0y}}{\partial y}\right) n_y = 0.5\chi n_y, \quad r \in S_{12}(0), \quad (18)$$

$$\bar{v}_0 = \tau \bar{i}, \quad r \in S_{11}(0), \quad \bar{v}_0 = 0, \quad y = -H_b; \quad \bar{v}_0 = 0, \quad x = H_R, -H_L. \quad (19)$$

Здесь $S_{11}(0)$ и $S_{12}(0)$ — первоначальные области контакта и отрыва, которые получаются в результате предельного перехода при $t \rightarrow 0$ границ $S_{11}(t)$ и $S_{12}(t)$. Для их определения необходимо сформулировать отдельную задачу.

Вектор скорости $\bar{v}$ и давление p будем искать в виде:

$$\bar{v}(x, y, t) = t\bar{u}(x, y) + o(t), \quad p(x, y, t) = f(x, y) + o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (20)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения и граничные условия задачи (1)–(10) и устремляя затем t к нулю, получим равенства:

$$\Delta f = 0; \quad f = 0, \quad r \in S_2(0); \quad f = -0.5\chi, \quad r \in S_{12}(0);$$

$$-\frac{\partial f}{\partial n} = Fr^{-2}n_y + n_x, \quad r \in S_{11}(0).$$

Для корректной постановки задачи с неизвестной областью контакта необходимо еще сформулировать дополнительные условия в областях $S_{11}(0)$ и $S_{12}(0)$. В зоне отрыва должно выполняться кинематическое условие в виде неравенства, означающее, что жидкие частицы не могут входить внутрь твердого тела, хотя им разрешается отрываться от этой границы: $(\bar{u}, \bar{n}) \geq n_x$. Предельное динамическое условие для нормальных напряжений в области контакта формулируется в виде следующего неравенства: $p'_{nn} \leq -p'_c \Rightarrow f + 0.5\chi \geq 0$. Это неравенство означает,

что в главном приближении нормальные напряжения (фактически предельные давления) в области контакта должны быть сжимающими и по абсолютной величине не должны опускаться ниже абсолютных значений нормальных напряжений на границе каверны. В результате приходим к следующей смешанной краевой задаче теории потенциала с неизвестной априори областью контакта, для которой справедлива теорема существования и единственности решения [2]:

$$\Delta f = 0, \quad r \in \Omega(0); \quad f = 0, \quad r \in S_2(0), \quad (21)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial n} = Fr^{-2}n_y + n_x, \quad f + 0.5\chi \geq 0, \quad r \in S_{11}(0), \quad (22)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial n} \geq Fr^{-2}n_y + n_x, \quad f + 0.5\chi = 0, \quad r \in S_{12}(0), \quad (23)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -Fr^{-2}, \quad y = -H_b; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad x = H_R, -H_L. \quad (24)$$

Важно отметить, что при быстром разгоне эллиптического цилиндра, полностью погруженного в жидкость, первоначальные зоны отрыва и контакта не зависят от вязкости жидкости. Они определяются также, как и в случае идеальной жидкости. После их нахождения решается смешанная краевая задача (15)–(19) для линейного уравнения Навье–Стокса с фиксированным разбиением границы тела на области контакта и отрыва $S_{11}(0)$ и $S_{12}(0)$ (динамика точек отрыва в главном приближении не учитывается). Далее, на основе полученного решения, находятся главные члены разложений для возмущений внутренней и внешней свободной границы жидкости (формулы (13)–(14)), где функции $\eta_0(\theta, \tau)$ и $\xi_0(x, \tau)$ определяются на основании следующих соотношений:

$$R_0(\theta)^{-1}[xv_{0x} + yv_{0y} - x\tau] = R_0(\theta)^{-2}[xv_{0y} - yv_{0x} + y\tau]R'_0(\theta) + \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau}, \quad v_{0y} = \frac{\partial \xi_0}{\partial \tau}.$$

Заметим, что формулы (20) представляют собой главные члены внешнего разложения для случая $Re \sim 1$. При этом соответствующие погранслойные решения в окрестности смоченной поверхности тела и вблизи неподвижных твердых границ, исправляющие невязки в граничных условиях для касательных компонент скоростей, не влияют на определение первоначальных зон отрыва и контакта.

3. Численная реализация. Для решения смешанной краевой задачи (21)–(24) с неизвестной априори областью контакта можно использовать такие же подходы, как и при решении задач об ударе с отрывом. Обзор соответствующих работ приведен в [3]. Для определения точек отрыва применяется специальный итерационный процесс, позволяющий свести решение рассматриваемой нелинейной задачи к последовательному решению линейных краевых задач. Последние задачи решаются численно с использованием пакета конечных элементов FreeFem++ [4]. После определения первоначальных зон контакта и отрыва $S_{11}(0)$ и $S_{12}(0)$ исследуется смешанная начально-краевая задача (15)–(19) для линейного уравнения Навье–Стокса. Для ее решения применяется метод шагов по времени. Производная по времени аппроксимируется обычной конечной разностью первого порядка, а остальные члены уравнения берутся в момент времени τ_{m+1} (неявная схема).

На каждом шаге по времени записывается слабая вариационная постановка задачи, которая при заданных точках отрыва решается с помощью пакета конечных элементов FreeFem++ [4].

Задача с отрывом исследовалась в главном приближении при следующих фиксированных значениях параметров: $Fr = 3$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 0.5$, $t = 0.75$, $H_R = 6$, $H_L = 6$. При этом число кавитации, а также параметры, характеризующие форму эллипса, глубину его погружения и близость дна выбирались различными. На фигуре показаны форма каверны и возвышение внешней свободной границы жидкости, отвечающие следующим значениям параметров: $\chi = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $H = 1$, $H_b = 1.5$. Приведем также приближенные значения угловых координат точек отрыва: $\theta_1 = 2.54$, $\theta_2 = 3.50$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 14.740.11.0877.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Norkin M., Korobkin A.* The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // J. Eng. Math. 2011. 70. Pp. 239–254.
- [2] *Норкин М. В.* Удар с отрывом эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности несжимаемой экспоненциально-стратифицированной жидкости // Изв. Вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. Спецвыпуск, посвященный 75-летию В. И. Юдовича, Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2009. С. 168–173.
- [3] *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
- [4] *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д, 2008. 256 с.

Norkin M. V. *Cavity formation at the initial stage of movement of the elliptic cylinder in a viscous incompressible liquid.* Cooperative motion of a viscous incompressible liquid and an immersed elliptic cylinder is studied at small time. It is supposed that the originally motionless cylinder moves in a horizontal direction with constant acceleration. Feature of this problem is that at fast speedup of the cylinder there is the separation of liquid from a surface of body and cavity formation behind body.

ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИФУРКАЦИЙ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА–ТЕЙЛОРА

Овчинникова С. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Точки пересечения нейтральных кривых интересны тем, что в их малой окрестности возможно изучать аналитически, вполне строгими методами, последовательности бифуркаций, включая развитие хаотических режимов. В работе приведены результаты расчета нейтральных кривых и найдены новые типы точек пересечения (точки бифуркации коразмерности 2 и 3), которым отвечают различные амплитудные системы.

Начиная с работы Дж. Тейлора 1923 года и до сих пор выполняется большое число экспериментальных и теоретических работ, в которых изучается потеря устойчивости течения Куэтта и появление различных вторичных, третичных и так далее режимов движения.

Движение жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса, зависящими от безразмерных параметров: η — отношение радиусов, Ω — отношение угловых скоростей цилиндров, R — безразмерное число Рейнольдса. При любых значениях параметров существует точное стационарное вращательно симметричное решение уравнений движений — течение Куэтта. Скорость и давление отличного от течения Куэтта решения предполагаются $2\pi/\alpha$ периодичными вдоль оси цилиндров (α — заданное осевое волновое число).

Система Навье–Стокса инвариантна относительно сдвигов вдоль, вращений вокруг общей оси цилиндров (оси z) и преобразования инверсии. Поэтому в задаче устойчивости имеет место разделение переменных: переменные осевая z , азимутальная θ и время t отделяются посредством множителя $e^{\sigma t - i(k\alpha z + m\theta)}$. Здесь в силу $2\pi/\alpha$ -периодичности по z осевое квантовое число k — целое, целое также и азимутальное квантовое число m в силу очевидной периодичности по θ . Критическими параметрами задачи называются такие значения, для которых линеаризованная на течении Куэтта система Навье–Стокса имеет ненулевые решения (нейтральные моды) при $\sigma = 0$ (монотонная потеря устойчивости) или при $\sigma = \pm i\omega_m$ (колебательная потеря устойчивости).

В [1] строго доказано, что в случае вращения цилиндров в одну сторону ($\Omega \geq 0$) существует строго упорядоченная по возрастанию последовательность критических чисел Рейнольдса $R_*^{(p)}(\Omega, \eta, \alpha)$, $p = 1, 2, \dots$, соответствующих вращательно симметричным течениям ($m = 0$). Из результатов расчета следует существование такой последовательности и для несимметричных течений ($m \neq 0$), у которой нарушается строгая упорядоченность при некоторых значениях Ω .

Для различных значений квантовых чисел m и k в четырехмерном пространстве Π параметров задачи $(R, \Omega, \eta, \alpha)$ существуют трехмерные семейства критических чисел Рейнольдса $R_*^{(p)}(\Omega, \eta, \alpha)$. Если в Π зафиксировать два из четырех параметров (например, η и Ω), то на плоскости двух оставшихся (в нашем примере

на плоскости (R, α) существуют кривые $R = R_*^p(\alpha, m, k, \Omega, \eta)$ — нейтральные кривые. В малой окрестности каждого значения $R_*^{(p)}$, состоящей из точек $R_*^{(p)} + \varepsilon^2$ (ε — малый параметр), происходит бифуркация. На смену потерявшему устойчивость течению Куэтта появляется стационарный или колебательный режим $([1, 2])$, вектор скорости которого и соответствующее ему давление аналитически зависят от малого параметра ε . Этот вторичный режим может быть устойчивым и неустойчивым.

С экспериментальной точки зрения наибольший интерес представляют собой критические значения R_* и соответствующие им волновые числа α_{m*} , при которых происходит первая потеря устойчивости течения Куэтта $R_*(\alpha_{m*}, \Omega, \eta) = \min_{\alpha} R_*^1(m, k, \alpha, \Omega, \eta)$. На рис. 1. изображены нейтральные кривые первого перехода $R_*^1(\Omega, \eta)$ для $\eta = 1.13257$ и $\eta = 1.4$.

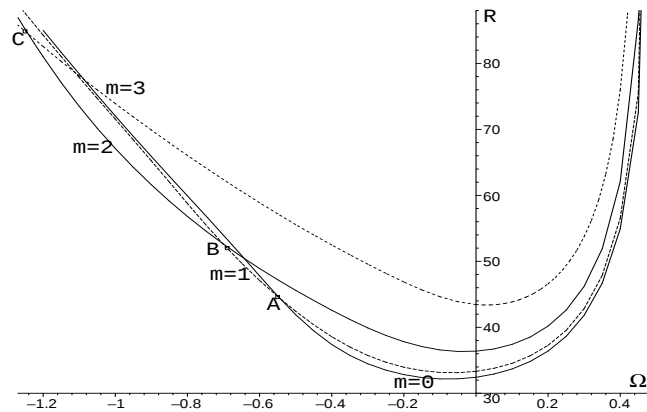


Рис. 1. Нейтральные кривые $R = R_*^1(\alpha^*, \Omega) = \min_{\alpha} R_*(\alpha, \Omega)$ при $\eta = 1.4$. Рядом с каждой кривой написано соответствующее ей число m . Точки пересечения, соответствующие разным значениям азимутальных квантовых чисел m и n обозначены A ($m/n = 0/1$), B ($m/n = 1/2$), C ($m/n = 2/3$).

В случае сонаправленного ($\Omega \geq 0$) вращения цилиндров течение Куэтта впервые теряет устойчивость относительно вращательно симметричных возмущений. Это подтверждается стогими результатами [1] и экспериментами [3–5], в которых при медленном увеличении угловых скоростей впервые появляются вращательно симметричные течения с осевым волновым числом α_* .

Если же цилиндры вращаются в противоположные стороны ($\Omega < 0$), то, начиная с некоторого значения $\Omega_0 < 0$, наиболее опасными становятся невращательно симметричные возмущения с азимутальным числом $m = 1$. При дальнейшем усилении контрнаправленного вращения цилиндров появляется последовательность точек пересечения кривых первой потери устойчивости, отмеченных на рисунке точками A ($m/n = 0/1$), B ($m/n = 1/2$), C ($m/n = 2/3$).

В экспериментах [3–5] наблюдались различные устойчивые стационарные и колебательные течения жидкости между цилиндрами, вращающимися с высокими скоростями как в одну ($\Omega \geq 0$), так и в противоположные стороны ($\Omega < 0$). Существование каждого из таких течений зависит от пути движения в пространстве параметров к заданному значению R числа Рейнольдса.

Объяснить существование таких режимов может изучение поведения нелинейной системы Навье–Стокса в окрестности точек пересечения нейтральных кривых (точек бифуркации коразмерности 2), соответствующих различным парам квантовых чисел (m, k) и (n, l) . В каждой такой точке существует несколько независимых нейтральных мод. После появления работ В.И. Юдовича, Chossat P. и G. Iooss [6–8], нелинейное взаимодействие этих мод (точнее, слегка измененных) в малой окрестности точек бифуркации коразмерности 2 стало возможным описывать с помощью нелинейных амплитудных уравнений на центральном многообразии. Исследование таких систем открывает уникальные возможности для наблюдения вторичных, третичных и т. д. режимов, вплоть до развития хаоса в системе. В случае $\Omega < 0$ вычисление точек пересечения нейтральных кривых и расчет коэффициентов амплитудных уравнений позволили провести конкретный анализ возможных режимов движения жидкости вблизи течения Куэтта [9, 10].

Если в точке пересечения двух нейтральных кривых выполняется некоторое резонансное соотношение между параметрами, то у соответствующей амплитудной системы появляются дополнительные резонансные слагаемые. Если $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то в таких точках пересечения имеется семь типов (Res 0 — Res 6) амплитудных систем [11], которые отличаются друг от друга дополнительными резонансными кубическими слагаемыми.

В случае вращения цилиндров в одну сторону ($0 \leq \Omega \leq 1/\eta^2$) найдены точки бифуркации коразмерности 2, в которых пересекаются нейтральные кривые, отвечающие разным по порядку критическим числам Рейнольдса и различным парам квантовых чисел (m, k) и (n, l) . В таких точках существует три типа амплитудных систем Res 0, Res 1 и Res 3. Вблизи границы $\Omega = 1/\eta^2$ (границы Synge) появляются пересечения нейтральных кривых, соответствующих разным по порядку p критическим числам Рейнольдса ($R_*^{(p)}$) и одинаковым азимутальным квантовым числам ($m = n$). Если в такой точке пересечения равны осевые квантовые числа ($k = l$), то она является точкой резонанса Res 1.

После появления таких пересечений при дальнейшем приближении к границе Synge нейтральные кривые становятся замкнутыми и, постепенно уменьшаясь, исчезают. Слева на рис. 2 видно, как с ростом значений Ω изменяются нейтральные кривые для $m = 7$, $k = 1$, $\eta = 1.13257$. При $\Omega > 0.759$ первая из кривых 5 вообще исчезает.

При возрастании по модулю значений $\Omega < 0$ нейтральные кривые, соответствующие азимутальным числам $m \neq 0$ также перестают быть выпуклыми. Справа на рис. 2 показано как изменяется вид нейтральных для $\eta = 1.13257$, $m = 1$ и малых значений осевого волнового числа α и $-0.5 \leq \Omega \leq -1.8$.

В большинстве работ рассматриваются пересечения нейтральных кривых для цилиндров, вращающихся в противоположные стороны, когда пересечения появляются при $\Omega < \Omega_0$. При $\Omega > \Omega_0$ также существуют точки пересечения разных по порядку нейтральных кривых.

Слева на рис. 3 видно как происходит пересечение нейтральных кривых, соответствующих первому и второму по порядку критическому числу Рейнольдса и квантовым числам $m = 1$, $m = 2$, $k = l = 1$ при $\alpha = 3.7$ и $\eta = 1.2$. Справа на этом рисунке изображены кривые, состоящие из точек пересечения $m/n = 1/2$

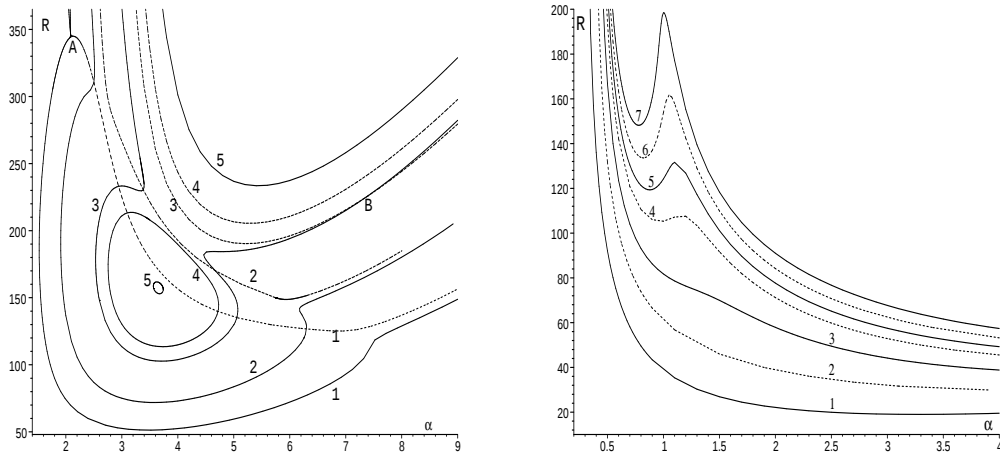


Рис. 2. Слева нейтральные кривые $R = R_*^{(1)}(\alpha)$ и $R = R_*^{(2)}(\alpha)$ при $m = 7, k = l$. Кривые 1 — при $m = 7, k = l$ и $\Omega = 0.7134$, 2 — при $\Omega = 0.74$, 3 — при $\Omega = 0.753$, 4 — при $\Omega = 0.755$, 5 — при $\Omega = 0.75776$. A — точка пересечения $R = R_*^{(1)}(\alpha)$ и $R = R_*^{(2)}(\alpha)$ при $\Omega = 0.7134$, B — при $\Omega = 0.753$. Справа нейтральные кривые $R = R_*^{(1)}(\alpha)$ при $m = 1, k = l$. Кривая 1 — при $\Omega = -0.5$, 2 — при $\Omega = -1$, 3 — при $\Omega = -1.3$, 4 — при $\Omega = -1.5$, 5 — при $\Omega = -1.6$, 6 — при $\Omega = -1.7$, 7 — при $\Omega = -1.7$.

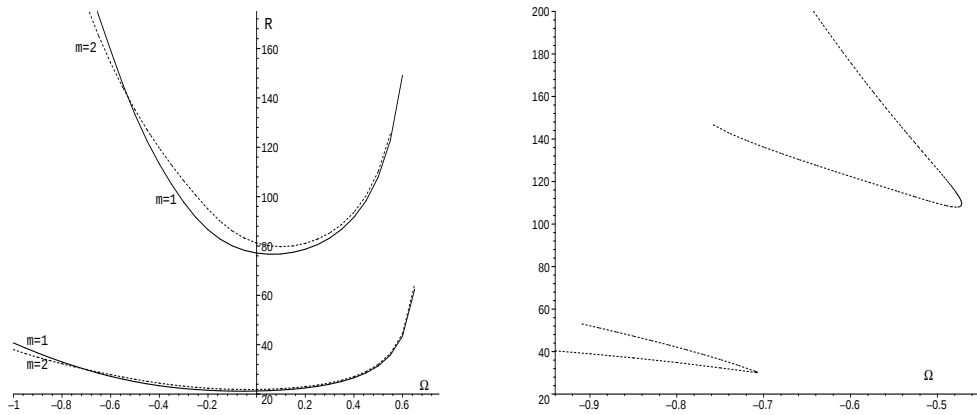


Рис. 3. Нейтральные кривые $R = R_*^{(1)}(\alpha)$ (тонкие линии) и $R = R_*^{(2)}(\alpha)$ (жирные линии) при $\Omega = 0.6$. Цифра возле каждой кривой — соответствующее ей азимутальное число m .

при $-0.9 \leq \Omega \leq -0.45$.

При вращении цилиндров в одну сторону ($\Omega \geq 0$) также существуют точки бифуркации коразмерности 2, которым соответствует нерезонансный случай $\text{Res } 0$, резонанс $\text{Res } 1$ ($m \neq n, l = k$) и $\text{Res } 3$ ($m = 3n, l = k, \omega_m = 3\omega_n$). При вращении цилиндров в одну сторону найдены еще точки бифуркации коразмерности 2 для равных азимутальных чисел $m = n$ и разных по порядку критических чисел

Рейнольдса. Такие точки являются точками резонанса Res 0, если $l \neq k$ и точками Res 1, если $l = k$. Вычислены также точки бифуркации коразмерности 3 (пересечения трех нейтральных кривых).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №11-05-01138).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами // ПММ. 1966. Т. 30. вып. 4. С. 688–698.
- [2] Юдович В. И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // ПММ. 1972. Т. 36. вып. 3. С. 450–459.
- [3] Coles D. Transition in circular Couette flow // 1965. J. Fluid Mech. vol. 21. part. 3. Pp. 385–425.
- [4] Andereck C. D., Liu S. S., Swinney H. L. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders // 1986. J. Fluid Mech., vol. 164, Pp. 155–183.
- [5] Dutcher Cari S., Muller Susan J. Spacio-temporal mode dynamics and higher order transitions in high aspect ratio Newtonian Taylor-Couette flows // 2009. J. Fluid Mech. vol. 641. Pp. 85–113.
- [6] Юдович В. И. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент, 1986. С. 661.
- [7] Chossat P., Demay Y., Iooss G. Interaction de modes azimutaux dans le problème de Couette–Taylor // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. № 3. 99. Pp. 213–248.
- [8] Chossat P., Iooss G. The Couette–Taylor Problem. N.Y.: Springer, 1991. 233 p.
- [9] Моршнева И. В., Овчинникова С. Н. Резонансные режимы в окрестности точек бифуркации коразмерности 2 в задаче Куэтта–Тейлора // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 6. С. 21–31.
- [10] Моршнева И. В., Овчинникова С. Н. Нерезонансный случай при пересечении бифуркационных кривых в задаче Куэтта–Тейлора // ПМТФ. 2010. Т. 51 № 6. С. 55–62.
- [11] Yudovich V. I. Resonances in the codimension-2 bifurcations in the Couette–Taylor problem // J. math. fluid. mech. 2009. vol. 11, Pp. 469–491.

Ovchinnikova S. N. *Neutral curves and their intersections in the Couette–Taylor problem.* The points of intersection of neutral curves are interest, because near such points one can analytically investigate sequences of bifurcations including those leading to chaotic regimes. We provide results of calculation of neutral curves and new types of points of intersection (codimension 2 and 3 bifurcation points), that lead to various amplitude systems.

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В СОСУДЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ДИАМЕТРОМ

Поддубный А. А.^{*}, Устинов Ю. А.^{}**

^{}НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.*

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

*^{**}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Исследовано распространение пульсовой волны в артериальном сосуде со стенозом. Стеноз моделируется сужением сосуда в виде цилиндрического отрезка конечной длины, форма пульсовой волны, возникающей во время систолы, аппроксимируется кривой четвертого порядка, ординаты которой в начале и конце систолы обращаются в ноль. Исследования проводятся методами гармонического анализа на основе двух математических моделей. В качестве характеристики сопротивления, порождаемого стенозом, исследуются величины потоков энергии отраженных и прошедших волн в зависимости от радиуса сужения и его длины. Исследуются также искажения формы исходной волны на различных участках сосуда. Приводятся результаты численного анализа коэффициентов отражения и прохождения пульсовой волны сквозь стеноз, полученные на основе одномерной и двумерной моделей стенки сосуда.

Стеноз — врожденное или приобретенное стойкое сужение просвета какого-либо полого органа (пищевода, гортани, кишечника, кровеносного сосуда и др.) или отверстия между полостями (напр., при пороках сердца); затрудняет продвижение их содержимого. В частности в результате стеноза кровеносных сосудов нарушается нормальное обеспечение различных органов и тканей питательными веществами, что приводит к атрофии органа и прекращению его нормального функционирования. В настоящей работе стеноз моделируется цилиндрическим сужением конечной длины.

Сердечный цикл — понятие, отражающее последовательность процессов, происходящих за одно сокращение сердца (систолы) и его последующее расслабление (диастолу). Соответственно во время сердечного цикла происходит повышение и понижение давления крови; этот процесс является периодическим.

Обозначим через T — период сердечного цикла, T_c — временной отрезок систолы, $T_d = T - T_c$ — временной отрезок диастолы. Давление на выходе из левого желудочка (на входе в аорту) представим следующим выражением

$$\begin{aligned} p &= p_{tm} + (\eta^2 - \varepsilon^2)^2, & -\varepsilon \leq \eta \leq \varepsilon, \\ p &= p_{tm}, & -1 + \varepsilon \leq \eta \leq 1 - \varepsilon, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\eta = t/T$, $2\varepsilon = T_c/T$, t — время, p_{tm} — трансмуральное давление [2].

Первая модель. Исследуется распространение волны давления в артериальном сосуде с переменным внутренним диаметром (рис. 1) на основе модели Юнга–Моэнса–Кортевега.

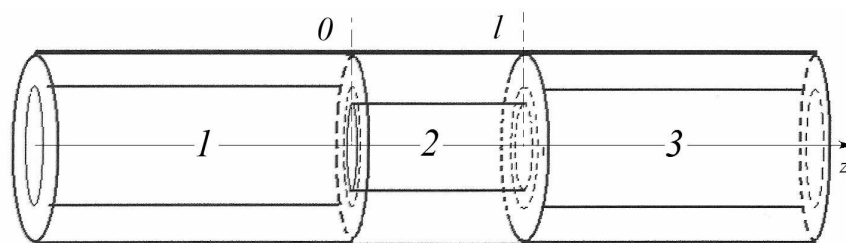


Рис. 1.

Согласно этой модели динамические процессы описываются следующей системой дифференциальных уравнений движения

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 p_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} = 0, \quad c_i = \sqrt{G_i/\rho_c}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

при выполнении условий непрерывности давления p и скорости v на стыке участков 1–2 и 2–3. В формуле (2) ρ — плотность крови, $G_i = h_i E/d_i$ — жесткости участков сосуда при воздействии на них внутреннего давления, h_i — толщины стенки соответствующих участков сосуда, d_i — диаметры их срединных поверхностей. Формула для жесткости вытекает из безмоментной теории тонкостенной цилиндрической оболочки. Однако в области стеноза толщина стенки сосуда может быть соизмерима с ее внутренним радиусом. Поэтому при проведении расчетов жесткости эти жесткости определялись на основе решения трехмерных уравнений теории упругости (задача Ляме [1]). При этом скорость волны давления на каждом участке рассчитывалась по формуле

$$c_i = \sqrt{\frac{E(1 - x_i^2)}{2\rho(1 + x_i^2 + \nu(1 - x_i^2))}} \quad (3)$$

Здесь $x_i = a_{i1}/a$, a_{i1} — внутренний радиус соответствующего участка, a — наружный радиус, который принимался одинаковым для всех участков.

Построение решения проводилось методами гармонического анализа. Для этого выражение (1) представлялось в виде ряда Фурье

$$p_N = p_{st} + P \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N f_n e^{-in(\eta - \varepsilon)} \right], \quad p_{st} = p_{tm} + P f_0, \quad (4)$$

где

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\varepsilon^2 - \eta'^2)^2 d\eta', \quad f_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\varepsilon^2 - \eta'^2)^2 \cos n\eta' d\eta'.$$

Затем на участках 1, 2 решение представлялось в виде суперпозиции гармонических волн «набегающей волны» с положительными волновыми числами

и амплитудами $A_n = Pf_n$ и суперпозиции гармонических волн «отраженной волны» с отрицательными волновыми числами и неизвестными амплитудами $A_{1n} = Pf_{1n}$. На третьем участке решение отыскивалось в виде суперпозиции гармонических волн с положительными волновыми числами и неизвестными амплитудами $A_{3n} = Pf_{3n}$. Амплитуды этих волн определялись на основе условий сопряжения.

Для оценки энергетических потерь на участке 1 вычислялись векторы потоков энергии

$$V = P^2 \sum_{n=1}^N n f_n^2, V_1 = -P^2 \sum_{n=1}^N n f_{1n}^2 \quad (5)$$

«набегающей волны» и «отраженной волны» соответственно, и поток энергии «прошедшей волны» на участке 3

$$V_3 = P^2 \sum_{n=1}^N n f_{3n}^2. \quad (6)$$

Неизвестные коэффициенты f_{1n}, f_{3n} определялись из алгебраических систем, вытекающих из условий сопряжения на разрезах 1–2 и 2–3.

Оценка энергетических потерь на «отраженную волну» проводилась путем расчета энергетических коэффициентов отражения и прохождения по формулам

$$K_1 = V_1/V, \quad K_3 = |V_3|/V. \quad (7)$$

В рамках данной модели $K_1 + K_3 = 1$. Выполнение данного равенства служило одним из критериев правильности проведенных расчетов. Некоторые результаты расчетов приводятся в конце статьи.

Отметим одну из особенностей данной модели. Если длина l участка 2 кратна $c_2 T$, то коэффициент прохождения $K_1 = 1$ независимо от внутреннего радиуса участка 2 и систола, определяемая формулой (1), проходит без искажения.

Вторая модель. Во второй модели стенка сосуда рассматривается как ортотропная оболочка, а кровь — как вязкая несжимаемая жидкость, движение которой описывается уравнениями Навье–Стокса. При этом для описания движения каждого участка стенки сосуда со стенозом используются уравнения безмоментной теории оболочек. Вектор Пойнтинга–Умова, на основе которого исследуются энергетические потери при прохождении гармонической волны, определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \Pi &= -\frac{1}{2T} \int_0^T \left(\int_0^a (p\bar{v} + \bar{p}v) r dr + T_{zz} \dot{u}_z + \bar{T}_{zz} \dot{u}_z \right) dt = \\ &= -2\pi Re \int_0^a P \bar{V} r dr + 2\pi a \omega Im(t_{zz} \bar{V}_z) \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь p — давление жидкости, P — амплитуда гармонической волны давления, u_z — продольное смещение точек стенки сосуда, V_z — амплитуда скорости гармонической волны, T_{zz} — продольное усилие в стенке.

Приведем выражения, связывающие усилия с деформациями:

$$T_{zz} = h(g_{21}e_1^0 + g_{22}e_2^0), \quad T_{\theta\theta} = h(g_{11}e_1^0 + g_{12}e_2^0),$$

где $e_1^0 = u_r/a$, $e_2^0 = \partial_z u_z$, а u_r , u_θ , u_z — смещения точек срединной поверхности. При этом

$$g_{11} = E_2 E_3 / (E_3 - \nu_{32}^2 E_2), \quad g_{12} = \nu_{32} E_2 E_3 / (E_3 - \nu_{32}^2 E_2), \\ g_{21} = \nu_{32} E_2 E_3 / (E_3 - \nu_{32}^2 E_2), \quad g_{22} = E_3^2 / (E_3 - \nu_{32}^2 E_2).$$

При проведении расчетов выражения для указанных полевых характеристик брались из работ [1, 5, 8] и преобразовывались к ортотропному случаю. На основе анализа совместного движения каждого участка стенки сосуда и крови были получены дисперсионные уравнения для каждого участка. Каждое уравнение имеет 4 комплексных корня, которым отвечают комплексные волновые числа, реальные части которых являются логарифмическими декрементами затухания. Затухание волн связано с учетом вязкости крови, которая согласно [2] примерно в четыре раза больше вязкости воды.

Для расчетов были выбраны следующие значения параметров (l — безразмерный параметр, отвечающий длине вставки):

$$E_2 = E_3 / 1.2, \quad E_3 = 6 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2, \quad \nu_{23}, \nu_{32} = 0.45, \quad G_{23} = E_2 / 4, \quad \nu_{23} E_3 = \nu_{32} E_2, \\ a_1 = 0.0073 \text{ м}, \quad h_1 = 0.0006 \text{ м}, \quad a_2 = 0.006 \text{ м}, \quad h_2 = 2(a_1 + h_1/2 - a_2), \\ l = 10, 20, 50.$$

Анализ энергетических потерь проводился по среднему значению потока энергии за период на основании расчетов потока энергии прошедшей волны, который определяется вектором Пойнтинга–Умова. В ходе численного эксперимента были проведены расчеты зависимости энергетического коэффициента прохождения от длины вставки (параметр l) и радиуса срединной поверхности вставки (параметр a_2).

В таблице приведены значения коэффициентов прохождения для различных значений параметров a_2 (внутренний радиус вставки) и l (длина вставки). Первое число в каждой ячейки отвечает первой модели, второе — второй.

	$l = 10$	$l = 20$	$l = 50$
$a_2 = 0.0060$	0.799; 0.759	0.765; 0.719	0.690; 0.653
$a_2 = 0.0062$	0.842; 0.793	0.787; 0.739	0.739; 0.689
$a_2 = 0.0064$	0.902; 0.828	0.836; 0.785	0.768; 0.713

Таблица 1. Зависимость коэффициента прохождения от l и a_2 .

Из таблицы видно, что значения коэффициентов прохождения, отвечающих второй модели, как и следовало ожидать, меньше значений коэффициентов, отвечающих первой модели.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [2] Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
- [3] Регирер С. А. Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971. 270 с.
- [4] Парашин П. И., Иткин Г. П. Биомеханика кровообращения. М.: МГТУ им. Баумана, 2005. 244 с.
- [5] Бегун П. И., Шукейло Ю. А. Биомеханика: Учебник для вузов. СПб: Политехника, 2000. 463 с.
- [6] Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Физматлит. 2003. 128 с.
- [7] Пуриня Б. А. , Касьянов В. А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов. Рига: Знание. 1980. 260 с.
- [8] Устинов Ю. А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 3. С. 344–348.

Poddubny A. A., Ustinov Y. A. *Analysis of energy losses under spread of harmonic waves in the vessel with variable diameter.* The spread of pulse wave in arterial vessel with stenosis was researched. Stenosis is simulated by restriction in the form of a cylindrical segment of finite length, the shape of the pulse wave, occurring during systole, is approximated by a four-order curve, which ordinates vanish at the beginning and at the end of systole. Research is carried out by methods of harmonic analysis on the basis of two mathematical models. As a characteristic of resistance generated by the stenosis, we study the fluxes of energy of reflected and transmitted waves as a function of the radius of the restriction and its length. We also study waveform distortion of initial wave in different parts of vessel. The results of numerical analysis of reflection and transmission coefficients of a pulse wave through stenosis, which had been obtained on a basis of one- and two-dimensional models of the vessel wall are given.

ОБ ОБРАЗОВАНИИ ПУЗЫРЕЙ В БИНГАМОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Радионов А. А.

Южный математический институт, Владикавказ

На простом примере в работе показано, что в реологически сложных жидкостях появляются дополнительные силы, которые необходимо учитывать при рассмотрении двухфазных процессов, протекающих в таких жидкостях.

После заливки достаточно объемных несущих конструкций бетоном возможно возникновение удивительного явления. Внутри этой бетонной конструкции могут появиться заполненные воздухом и водяным паром пузыри, размер которых оказывается сопоставимым с характерным размером заливки. Наличие таких полостей внутри бетонной заливки может существенно влиять на прочность получаемых конструкций.

Методы борьбы с таким нежелательным явлением известны и широко применяются на практике. Это деформирование бетонной заливки (цементного геля) до момента схватывания [1], применяется также вакуумирование поверхности. Решение вопроса о причине возникновения столь крупных пузырей представляет собой скорее методологический интерес, связанный с необходимостью исследования среды, подобной цементному гелю в ситуациях, когда деформационное воздействие на них затруднено либо невозможно.

Известно [1], что цементный гель представляет собой жидкость, реологические свойства которой описываются уравнением, характерным для сред Бингама. Кроме того, в нем имеется газовая фаза, равномерно распределенная в объеме, состоящая из множества пузырьков воздуха и паров воды, заполняющих пустоты и неоднородности в заполнителе. Количество газовой фазы зависит от способа приготовления бетона, а также от свойств самого цементного геля. Некоторые числовые значения приведены в работе [1].

Рассмотрим бесконечный объем, заполненный бетонной смесью, в котором равномерно распределены газовые пузырьки радиуса a . Массовыми силами пренебрежем. Будем полагать, что в начальный момент времени скорости равны нулю и все силы, действующие на любой малый объем жидкости уравновешены. Это означает рассмотрение отклонений от положения гидростатического равновесия. Каждый из пузырьков газа, имеющих в жидкости является сферическим и занимает объем $v = 4\pi a^3/3$. Давление в каждом из них превышает величину гидростатического давления на выражение $2\sigma/a$. Пусть далее после установления такого равновесного состояния по случайным причинам два близ расположенных пузырька слились в один также имеющий сферическую форму. Для краткости назовем такое событие возмущением.

Далее будет показано, что движение множества пузырьков определяется возникшим в результате случайного роста первого пузырька распределением девиаторных напряжений и заставляет пузырьки сливаться, то есть двигаться в направлении первого, случайно увеличившегося пузырька. Для этого будет рассмотрено

движение одиночного малого неизменного пузырька в поле напряжений создаваемых возмущением. Рассматриваемому возмущению может соответствовать не только слияние двух пузырьков, но также множество других явлений, связанных например с усадкой бетона, или каких-либо других вариациях давления в одиночном пузырьке. Масса нового пузырька возрастает вдвое, а радиус пузырька увеличивается в $\sqrt{2}$. Давление в пузырьке при этом изменится на величину $\delta p = 2\sigma/a - 2\sigma/(a\sqrt{2}) = \sigma/[a(2 - \sqrt{2})] \approx 0.58\sigma/a$. Радиальное смещение u в окрестности сферической пузырька, расположенной в безграничной упругой среде при изменении давления в пузырьке на величину δp и при неизменных условиях на бесконечности будет [2, 3]

$$u = \frac{1 + \nu}{2} \frac{\delta p a^3}{E r^2}$$

Главные компоненты тензора деформаций будут

$$d_{rr} = -(1 + \nu) \frac{\delta p a^3}{E r^3}, d_{\phi\phi} = d_{\theta\theta} = \frac{1 + \nu}{2} \frac{\delta p a^3}{E r^3}$$

так что объемная деформация равна нулю. Среда в окрестности растущего пузырька не изменяет своей плотности.

В результате слияния двух маленьких пузырьков плотность среды не меняется, но создаются некоторые ее деформации. Деформации среды вызывают в ней напряжения, они характеризуются тензором напряжений и зависят от реологического строения среды. В случае бингамовской среды уравнения течения и зависимость напряжений от скоростей деформаций представляется в виде [4]:

$$T = \tau_0 + 2\mu H$$

где H — второй инвариант тензора скоростей деформации, T — второй инвариант тензора напряжений, τ_0 — предельное напряжение сдвига, μ — вязкость жидкости. Чтобы получить скорости деформации среды, продифференцируем по времени выражение для деформации, полученное для среды расположенной вокруг растущего пузырька.

$$\frac{\partial d_{rr}}{\partial t} = -(1 + \nu) \frac{\delta p}{E} 3 \frac{a^2}{r^3} \frac{\partial a}{\partial t}$$

Величина $\partial a / \partial t$ имеет смысл скорости образования нового пузырька, или скорости слияния двух пузырьков. Примем ее за постоянную и конечную величину $\partial a / \partial t = v_a$. Компоненты тензора скоростей деформаций будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial d_{rr}}{\partial t} = -(1 + \nu) \frac{\delta p}{E} 3 \frac{a^2}{r^3} v_a, \\ \varepsilon_{\phi\phi} &= \frac{\partial d_{\phi\phi}}{\partial t} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial d_{\theta\theta}}{\partial t} = \frac{1 + \nu}{2} \frac{\delta p}{E} 3 \frac{a^2}{r^3} v_a. \end{aligned} \quad (1)$$

Заметим, что выполняется уравнение неразрывности: $\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{\theta\theta} = 0$. Запишем реологические отношения, чтобы выяснить связь скоростей деформации с возникающими вокруг пузырька напряжениями, учитывая (1):

$$H = \frac{9\sqrt{2}}{4} (1 + \nu) \frac{\delta p a^2}{E r^3} v_a$$

$$\tau_{rr} = -p + (2\mu + \tau_0/H)\varepsilon_{rr} = -p - 2\mu(1 + \nu)\frac{\delta p}{E}3\frac{a^2}{r^3}v_a - \frac{4}{3\sqrt{2}}\tau_0 \quad (2)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -p + (2\mu + \tau_0/H)\varepsilon_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi} = -p + 2\mu\frac{1 + \nu}{2}\frac{\delta p}{E}3\frac{a^2}{r^3}v_a + \tau_0\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad (3)$$

Запишем уравнение движения для жидкости движущейся жидкости вокруг растущего пузырька. Это выражение необходимо для выяснения сил, действующих на третий, неизменный пузырек. Скорость движения имеет только радиальную составляющую:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{4}{r\sqrt{2}}\tau_0 \right) \quad (4)$$

Видно, что даже при очень малых вариациях давления в случайно увеличившемся пузырьке, в окружающей его жидкости имеется значительный радиальный градиент давления $p_{eff}(r)$, обусловленный реологическим строением жидкости. С точностью до постоянной его величина есть $p_{eff} \sim -\sqrt{8}\tau_0 \ln(r)$. Градиент давления приобретает зависимость от τ_0 и меньше определенного значения не бывает. Величина этого градиента спадает с расстоянием логарифмически.

Далее положим, что в рассматриваемом объеме занимаемом бингамовской средой никаких других возмущений не появлялось, кроме одного единственного возмущения — слияния двух малых пор (пузырьков). Вокруг этого события среда деформировалась согласно (1) и приобрела напряжения согласно выражениям (2)–(3). Все прочие поры (пузырьки) также оказались под действием указанных в выражениях (2)–(3) напряжений. Эти напряжения могут оказаться нескомпенсированными, по крайней мере в какой-то окрестности иницирующего возмущения, что может привести к движению пор, равномерно распределенных в бингамовской среде. Рассмотрим третий неизменный и не участвовавший ранее ни в каких процессах слияния сферический пузырек, находящийся на расстоянии от источника возмущения, то есть от того пузырька, который появился из двух в процессе их слияния.

При рассмотрении многофазных сред зачастую выделяют различные силы, действующие со стороны несущей фазы на дисперсную фазу. При рассмотрении движения частицы в неинерциальной системе координат в уравнении изменения импульса к внешним массовым силам добавляется сила инерции, которая выделяется под названием силы Архимеда [5, 6]:

$$\vec{F}_A = \rho_g \frac{d_g \vec{v}_g}{dt} - \rho_g \vec{g} = \rho_g \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial t} + \rho_g \vec{v}_g \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x_k} - \rho_g \vec{g},$$

где ρ_g — плотность жидкости, $\vec{v}_g$ — скорость жидкости. Уравнение Ньютона для пузырька, с учетом сил, на него действующих можно переписать в виде [6]:

$$\left(1 + \frac{\rho_g}{2\rho_p} \right) \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{9f_s\mu}{2a^2\rho_p}(\vec{v}_g - \vec{v}_p) + \frac{3\rho_g}{2\rho_p} \frac{d\vec{v}_g}{dt}. \quad (5)$$

где ρ_p — плотность газа в пузырьке, $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения. a — это радиус движущегося пузырька, радиус же возмущения переобозначим

как $\tilde{a}$. В этом выражении представлены сила Архимеда, сила гидродинамического сопротивления и сила присоединенной массы отнесенные к объему рассматриваемого пузырька, силой тяжести по прежнему пренебрегаем. Введем эйлерову сферическую систему координат, связанную с центром возмущения. Направим ось Ox введенной системы координат по прямой соединяющей центры рассматриваемых пузырьков и возмущения. Пользуясь выражением (4) перепишем (5) в проекции на ось, соединяющую центр возмущения и центр рассматриваемого пузырька в виде

$$\left(1 + \frac{\rho_g}{2\rho_p}\right) \frac{dv_p}{dt} = \frac{9\mu}{2a^2\rho_p}(v_g - v_p) - \frac{3\rho_g}{2\rho_p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sqrt{8}\tau_0}{x}\right)$$

Здесь x — это расстояние до возмущения. В первом приближении пренебрежем инерционным слагаемым, считая, выполняется баланс сил и движение пузырька под действием приложенных сил быстро становится равномерным. Тогда

$$v_p = v_g - \rho_g \frac{a^2}{3\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sqrt{8}\tau_0}{x}\right)$$

Оценим слагаемые, входящие в правую часть. $\tau_0 \sim 50 \div 1050$ Па, $a \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$ м, $\mu \sim 1 \div 10$ Па·с, вязкость в процессе схватывания существенно возрастает, плотность воздуха $\rho_p \sim 1,2$ кг/м³, плотность цементного геля порядка 1800 до 2500 кг/м³. Градиент давления $\partial p / \partial x$ можно приближенно принять равным $\delta p / x$, $\delta p \sim 0.58\sigma/a$ где коэффициент поверхностного натяжения σ на границе воздух-цементный гель не известен. Для оценок примем величину для воды $\sigma \sim 0.07$ Н/м. $\tilde{a}$ — радиус пузырька-возмущения. Скорость жидкости вокруг возмущения примем из (1), тогда при $x > \tilde{a}$:

$$v_p = -(1 + \nu) \frac{\delta p}{E} \frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{\tilde{a}^2} - \frac{a^2}{x^2}\right) v_a - \rho_g \frac{a^2}{3\mu} \left(\frac{\delta p}{x} + \frac{\sqrt{8}\tau_0}{x}\right) \quad (6)$$

Это выражение справедливо для начального распределения пузырьков с одинаковым радиусом. Здесь остается неопределенным параметр v_a , характеризующий скорость слияния пузырьков, его величина по всей вероятности мала. В знаменателе стоит модуль упругости E , величина которого для жидкого цементного геля не ясна, но может быть оценена с использованием величины τ_0 . Это слагаемое соответствует силе, действующую на пузырек в направлении возмущения, которая мала вдали от пузырька и возрастает вблизи поверхности возмущения. С ростом радиуса пузырька-возмущения величина этого слагаемого также будет уменьшаться, для учета растущего возмущения надо использовать выражение $\delta p = 2\sigma/a - 2\sigma/\tilde{a}$, с зависимостью радиуса возмущения от времени.

Без учета первого слагаемого в (6) проинтегрируем это выражение. Это пренебрежение эквивалентно допущению, что жидкость вокруг медленно растущего возмущения неподвижна. Примем в качестве начального условия $x(t = 0) = x_0$, получим для расстояния до центра возмущения:

$$x = \sqrt{x_0^2 - 2\rho_g \frac{a^2}{3\mu} (\delta p + \sqrt{8}\tau_0)t}$$

Из приведенной оценки видно, что на малые пузырьки, имеющиеся в бингамовской среде действует дополнительная сила, которая в отсутствие внешней деформации приводит к слиянию этих пузырьков. При внешней деформации, помимо того, что эти дополнительные силы упорядочиваются в направлении связанном с этой деформацией, также значительно уменьшается величина τ_0 [1], что уменьшает величину этих сил.

Приведенные рассуждения оценочного характера приводят к выводу, что в реологически сложных жидкостях появляются дополнительные силы, которые необходимо учитывать при рассмотрении двухфазных процессов, протекающих в таких жидкостях.

Работа выполнена в рамках подпрограммы № 12 Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахвердов И. Н.* Основы физики бетона. М: Стройиздат, 1981. 464 с.
- [2] *Христианович С. А.* Проблемы теории пластичности и геомеханики: к 100-летию со дня рождения акад. С. А. Христиановича // Ин-т проблем механики им. Ишлинского РАН. М.: Наука, 2008. 391 с.
- [3] *Ландау Л. Д. , Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VII. Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 264 с.
- [4] *Гноевой И. Н., Климов Д. М., Чесноков В. М.* Основы теории течений бингамовских сред. М.: Физматлит, 2004. 272 с.
- [5] *Низматуллин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [6] *Волков К. Н., Емельянов В. Н.* Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 600 с.

Radionoff A. A. *About bubbling in liquid with Bingham rheology.* It is shown in this study, additional forces are appeared in complex liquid. Some problems of two-phases processes require consideration of these forces.

ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ ТЕЧЕНИЙ

Ревина С. В.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт, Владикавказ*

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил, периодического по пространственным переменным и по времени. Предполагается, что один из пространственных периодов, а также период по времени, стремятся к бесконечности, когда волновое число стремится к нулю. Найдены главные члены длинноволновой асимптотики задачи устойчивости.

1. Введение. Рассматривается двумерное $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно и T -периодического по времени:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где ν — безразмерная вязкость. Средняя по пространству скорость считается заданной и T -периодической.

В качестве краевых условий задаются условия периодичности поля скорости $\mathbf{v}$ по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1, L_2 соответственно. Предполагается, что $L_2 = 2\pi/\alpha$, $\alpha \rightarrow 0$. Предполагается также, что период по времени T стремится к бесконечности: $T = 2\pi/(w\alpha)$, волновое число $\alpha \rightarrow 0$. Параметр $w = L_2/T$ есть характерная скорость течения.

Пусть $x = x_1$, $z = \alpha x_2$. Тогда поле скоростей периодически по z с периодом 2π . Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости периодического по времени течения, когда основное поле скорости имеет вид:

$$\mathbf{V} = (\alpha V_1, V_2)(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Кроме того, рассматриваются частные случаи: класс параллельных (сдвиговых) течений

$$\mathbf{V} = (0, V_2(x_1, t)), \quad (2)$$

а также класс течений, близких к параллельным:

$$\mathbf{V} = (\alpha V_1(x_2, t), V_2(x_1, t)). \quad (3)$$

Всюду в дальнейшем через $\langle f \rangle$ будем обозначать среднее по x

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} f(\mathbf{x}, t) dx_1,$$

через $\langle\langle f \rangle\rangle$ — среднее по прямоугольнику периодов:

$$\langle\langle f \rangle\rangle(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2, \quad \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2],$$

через $\{f\}$ обозначим временное среднее f :

$$\{f\} = \{f\}(x_1, x_2) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{x}, t) dt.$$

Впервые длинноволновая асимптотика ($\alpha \rightarrow 0$) задачи устойчивости двумерных параллельных течений $\mathbf{v} = (0, V(x_1))$ рассмотрена в [1]. Исследованию автоколебаний, возникающих при потере устойчивости параллельных течений относительно длинноволновых возмущений, посвящена работа [2]. Линейная задача устойчивости трехмерных стационарных течений вида $\mathbf{v} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)$, $\langle V_3 \rangle \neq 0$ рассмотрена в [3]. В частности, показано, что если среднее продольной компоненты скорости отлично от нуля, то при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости. Изучение автоколебаний, возникающих при потере устойчивости двумерных и трехмерных стационарных течений относительно длинноволновых возмущений было продолжено в [4–5].

Критическим называется такое значение параметра ν , при котором один или несколько мультипликаторов выходят на единичную окружность. В [6] обоснована законность линеаризации в задаче устойчивости периодических по времени течений жидкости в некритическом случае.

В данной работе доказано, что в нерезонансном случае, когда отношение среднего продольной компоненты скорости к характерной скорости течения иррационально: $\frac{\langle V_2 \rangle}{w} \notin Q$ (через Q обозначено множество рациональных чисел), происходит колебательная потеря устойчивости — мультипликаторы пересекают единичную окружность в точках $\rho_{1,2} = e^{\pm i\lambda}$, $\lambda = \frac{m\{\langle V_2 \rangle\}}{w} 2\pi$.

Для параллельного периодического по времени основного течения рассмотрен и случай $\frac{\langle V_2 \rangle}{w} \in Q$. Оказывается, что при этом условии возможна монотонная потеря устойчивости и бифуркация удвоения периода.

2. Линейная задача устойчивости. Разыскивая решение линеаризованного на основном течении (1) уравнения возмущений в виде:

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = e^{\sigma t} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), \quad \tilde{p}(\mathbf{x}, t) = e^{\sigma t} P(\mathbf{x}, t),$$

приходим к системе:

$$\begin{aligned} \sigma \varphi_1 + \alpha w \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} - \nu \Delta_{\alpha} \varphi_1 + \alpha V_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \alpha V_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \\ + \alpha \varphi_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \alpha^2 \varphi_2 \frac{\partial V_1}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma\varphi_2 + \alpha w \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} - \nu\Delta_\alpha\varphi_2 + \alpha V_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + \alpha V_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \varphi_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \\ + \alpha\varphi_2 \frac{\partial V_2}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \langle\varphi_2\rangle = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_1 dz = 0, \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем $z = \alpha x_2$, $\tau = \alpha w t$, $\Delta_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Неизвестные показатели Флоке σ , собственные функции, 2π -периодические по τ , и критическое значение вязкости ν будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра α :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \alpha^k, \quad \nu = \nu^* + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha^k, \\ \varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k \alpha^k, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \alpha^k. \end{aligned}$$

Приравнявая в системе (4)–(6) выражения при α^0 : выводим, что коэффициент $\sigma_0 = 0$, функции φ_1^0 и P^0 зависят только от z и τ : $\varphi_1^0 = \varphi_1^0(z, \tau)$ и $P^0 = P^0(z, \tau)$, а φ_2^0 имеет вид:

$$\varphi_2^0 = \frac{1}{\nu^*} \varphi_1^0(z, \tau) \frac{\partial\theta}{\partial x},$$

где через θ обозначено решение вспомогательной задачи $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = V_2$, $\langle\theta\rangle = 0$.

После осреднения уравнения (4) по x , приходим к задаче для нахождения σ_1 , φ_1^0 :

$$w \frac{\partial\varphi_1^0}{\partial\tau} + \sigma_1 \varphi_1^0(z, \tau) - \langle V_2 \rangle(\tau) \frac{\partial\varphi_1^0}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Сделаем замену переменных:

$$\varphi_1^0(z, \tau) = e^{-\frac{\sigma_1}{w}\tau} \psi_1^0(z, \tau).$$

Тогда $\psi_1^0(z, \tau)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\partial\psi_1^0}{\partial\tau} + \frac{1}{w} \langle V_2 \rangle(\tau) \frac{\partial\psi_1^0}{\partial z} = 0, \quad \psi_1^0(z + 2\pi, \tau) = \psi_1^0(z, \tau), \quad (8)$$

$$\psi_1^0(z, \tau + 2\pi) = e^{-\frac{\sigma_1}{w}2\pi} \psi_1^0(z, \tau) \quad \int_0^{2\pi} \psi_1^0 dz = 0. \quad (9)$$

Если $\langle V_2 \rangle = 0$, то уравнение для нахождения $\psi_1^0(z, \tau)$ принимает вид: $\frac{\partial\psi_1^0}{\partial\tau} = 0$. Следовательно, $\psi_1^0 = \psi_1^0(z)$ есть 2π -периодическая функция, зависящая только от z , с нулевым средним.

Тогда из условия 2π -периодичности по z (8) следует равенство:

$$e^{-\frac{\sigma_1}{w}2\pi} = 1.$$

Отсюда $\sigma_1 = ikw$, где k — целое число. Так как для любого k этим показателям Флоке соответствует единичный мультипликатор, то можно положить $k = 0$ и $\sigma_1 = 0$.

Пусть теперь $\langle V_2 \rangle \neq 0$. Для решения (8)–(9) перейдем к движущейся системе координат:

$$y = z - \frac{1}{w} \int_0^\tau \langle V_2 \rangle(\xi) d\xi.$$

В новых переменных (y, τ) , разыскивая функцию $\Psi_1^0(y, \tau) = \psi_1^0 \left(y + \frac{1}{w} \int_0^\tau \langle V_2 \rangle(\xi) d\xi, \tau \right)$ в виде ряда

$$\Psi_1^0 = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} C_n e^{iny},$$

для всех n , для которых $C_n \neq 0$, приходим к условию:

$$e^{-i2\pi(\frac{\mu_1}{w} + \frac{\{\langle V_2 \rangle\}}{w}n)} = 1, \quad \sigma_1 = i\mu_1.$$

Если отношение среднего по времени и по пространственным переменным продольной компоненты скорости к характерной скорости потока иррационально: $\frac{\{\langle V_2 \rangle\}}{w} \notin Q$, то существует единственный номер $n = -m$ такой, что выполняется равенство (8) и $\mu_1 = \{\langle V_2 \rangle\}m$. В исходных переменных (z, τ)

$$\varphi_1^0(z, \tau) = C_1^0 e^{-im\frac{\{\langle V_2 \rangle\}}{w}\tau} e^{-im(z - \frac{1}{w} \int_0^\tau \langle V_2 \rangle(\xi) d\xi)}, \quad \sigma_1 = i\{\langle V_2 \rangle\}m. \quad (10)$$

Здесь m — целое число. Из условий равенства нулю среднего следует, что $m \neq 0$.

Случай $\frac{\{\langle V_2 \rangle\}}{w} \in Q$ относится к резонансным. Он рассмотрен лишь для сдвиговых течений (2), а также для течений, близких к параллельным (3). Для этих течений $\varphi_1^0(z, \tau)$ находится из следующих разложений по α и имеет тот же вид (10).

В порядке α^2 осредненное по переменной x_1 уравнение (4) принимает вид:

$$w \frac{\partial \langle \varphi_1^1 \rangle}{\partial \tau} + \sigma_1 \langle \varphi_1^1 \rangle + \langle V_2 \rangle(\tau) \frac{\partial \langle \varphi_1^1 \rangle}{\partial z} = g(z, \tau), \quad (11)$$

где функция $g(z, \tau)$ определяется формулой:

$$g(z, \tau) = -\sigma_2 \varphi_1^0(z, \tau) + \nu_* \frac{\partial^2 \varphi_1^0}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_*} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left\langle \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial z} \right).$$

Из условия разрешимости уравнения (11) — ортогональности правой части решению однородного сопряженного уравнения — находим σ_2 и нулевой член критического значения вязкости

$$\sigma_2 = 0, \quad \nu_*^2 = \left\{ \left\langle \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \right\}. \quad (12)$$

3. Заключение. Получены явные формулы для первых членов разложения в ряд по малому параметру α — волновому числу — нормальных возмущений основного решения и соответствующих показателей Флоке. При этом, если наиболее опасными являются длинноволновые возмущения, то для сдвигового течения и течения, близкого к параллельному, потеря устойчивости может происходить при прохождении мультипликаторов через $+1$ (когда $\frac{\{\langle V_2 \rangle\}}{w} = k$), через -1 (когда $\frac{\{\langle V_2 \rangle\}}{w} = k + \frac{1}{2}$), в остальных случаях на единичную окружность выходят два комплексно-сопряженных мультипликатора. Для течения общего вида в предположении $\frac{\{\langle V_2 \rangle\}}{w} \notin Q$ происходит колебательная потеря устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М., Наука. 1966. С. 242–249.
- [2] Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32–35.
- [3] Юдович В. И. Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 31–35.
- [4] Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 29–41.
- [5] Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 2. С. 41–56.
- [6] Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов н/Д: Изд-во Ростовского ун-та, 1984. 192 с.

Revina S. V. *Long-wave asymptotic of stability problem of time-periodic flow.* We consider the stability problem of time-periodic stream $\mathbf{v} = (\alpha V_1, V_2)$ with respect to long-wave length disturbances, when one of the spatial periods and time period tend to infinity (the wave number α tends to zero). The explicit formulas for the main asymptotic terms are obtained. Oscillation, monotonic, and period-doubling bifurcations take place in this system.

ОЦЕНКИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ ОЗЕЕНА ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сазонов Л. И.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт, Владикавказ*

Для решений линеаризованной на устойчивом стационарном решении системы Озеена получены степенные оценки по времени для некоторых норм старших производных.

При исследовании нелинейных эволюционных уравнений с выделенной главной линейной частью существенную роль играют оценки решений линеаризованных уравнений [1–3]. Методы теории полугрупп операторов позволяют установить асимптотические по времени ($t \rightarrow \infty$) оценки норм решений по пространственным переменным. Для системы Озеена, которая получается при линеаризации системы Навье–Стокса на постоянном решении, такие оценки получены в [4–6]. В ряде работ автора [7–10] полугрупповой подход использовался для оценок решений возмущенной системы Озеена — линеаризации системы Навье–Стокса на стационарном решении. Данное исследование продолжает линию этих работ. В нем получены степенные оценки убывания по времени для пространственных и временных производных решений возмущенной системы Озеена в случае, когда стационарное решение удовлетворяет некоторым условиям устойчивости.

Пусть v — стационарное решение системы Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u, \nabla)u - \nabla p + f, \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$.

Будем предполагать, что поле v имеет вид $v = u_\infty e_1 + w$, где $u_\infty = \operatorname{const}$, а w в определенном смысле стремится к нулю на бесконечности (это условие в дальнейшем будет уточнено).

Осуществляя замену $u \div u + v$ и линеаризацию на стационарном решении v , приходим к возмущенной системе Озеена

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u_\infty \partial_1 u - (w, \nabla)u - (u, \nabla)w - \nabla q, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим через $S_p = S_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$) подпространство в $(L_p(\mathbb{R}^n))^n$, являющееся замыканием множества всех гладких финитных соленоидальных полей. Применяя к системе (1) гидродинамический проектор $\Pi : (L_p(\mathbb{R}^n))^n \rightarrow S_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$), сведем возмущенную систему Озеена к линейному ОДУ в пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{du}{dt} = Au + Bu,$$

где A, B — операторы вида

$$Au = \Pi(\Delta u - u_\infty \partial_1 u), \quad Bu = -\Pi((w, \nabla)u + (u, \nabla)w).$$

Оператор Озеена $A = \Pi(\Delta - u_\infty \partial_1)$ и возмущенный оператор Озеена $\tilde{A} = A + B$ (при выполнении условий w — соленоидальное поле и $w, \partial_j w \in (L_\infty(\mathbb{R}^n))^n$) с областями определения $D(A) = D(\tilde{A}) = S_p(\mathbb{R}^n) \cap W_p^2(\mathbb{R}^n)$ порождают в любом пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) аналитические полугруппы $T(t)$ и $\tilde{T}(t)$, причем для полугруппы Озеена $T(t)$ справедливы оценки

$$\|\partial^\alpha T(t)\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq}^\alpha t^{-\frac{|\alpha|}{2} - \frac{n}{2}(1/p - 1/q)},$$

где $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Для возмущенной полугруппы Озеена $\tilde{T}(t)$ были получены следующие результаты [7, 9].

Теорема 1. Пусть $w \in L_{\rho_1} \cap L_\infty$, $\rho_1 < n$ и возмущенный оператор Озеена $\tilde{A}$ в любом пространстве $S_q(\mathbb{R}^n)$, $q > (n+1)/n$ не имеет собственных функций, отвечающих собственным значениям в полуплоскости $\{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$. Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки

$$\|\tilde{T}(t)\Pi\partial^\theta\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq} t^{-|\theta|/2 - (n/2)(1/p - 1/q)}$$

при выполнении следующих условий $|\theta| \leq 1$, $1 \leq p \leq q < \infty$, $q > 1$ при $|\theta| = 0$, $1 < p \leq q < \infty$ при $|\theta| = 1$.

Пусть $w \in L_{\rho_1} \cap L_\infty$, $\rho_1 < n$, $\nabla w \in L_{\sigma_1} \cap L_\infty$, $\sigma_1 < n/2$ и для оператора $\tilde{A}$ выполнено сформулированное выше спектральное условие. Тогда

$$\|\nabla \tilde{T}(t)\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq} t^{-1/2 - (n/2)(1/p - 1/q)},$$

если только $1 < p \leq q < n$.

Отметим, что в [8, 9] доказано, что сформулированное спектральное свойство влечет устойчивость стационарного решения в пространстве $S_n(\mathbb{R}^n)$. В [10] установлены оценки для $\|\nabla \tilde{T}(t)\|_{p \rightarrow q}$ для всего множества параметров $1 < p \leq q < \infty$. Они здесь не приводятся, так как предлагаемый ниже подход позволяет уточнить оценки первых производных и получить оценки старших производных. Далее предполагаются выполненными предположения теоремы 1.

Рассмотрим вектор-функцию $u(t) = \tilde{T}(t)u^0$, где $u^0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div} u_0 = 0$. Учитывая, что справедливо представление

$$\nabla \tilde{T}(t) = \nabla \tilde{T}(t/2) \tilde{T}(t/2),$$

приходим к выводу, что достаточно получить оценки $\|\nabla \tilde{T}(t)\|_{q \rightarrow q}$. Для $u(t)$ имеем представление

$$u(t) = T(t)u^0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds. \quad (2)$$

Формально дифференцируя соотношение (2), для производных получаем представление

$$\partial_j u(t) = \partial_j T(t)u^0 + \int_0^t \partial_j T(t-s)Bu(s) ds.$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$Z_j = - \int_0^t \partial_j T(t-s) \Pi \left\{ \sum_k w_k Z_k \right\} ds + F_j, \quad (3)$$

где

$$F_j(t) = - \int_0^t \partial_j T(t-s) \Pi \{ (u, \nabla) w \} (s) ds + \partial_j T(t)u^0.$$

Заметим, что при всех $q \in (1, \infty]$ справедливы оценки

$$\|F_j\|_q \leq c_q \|u_0\|_q \begin{cases} t^{-1/2}, & 1 < q \leq n; \\ t^{-1/2} + t^{-n/(2q)}, & n \leq q \leq \infty. \end{cases} \quad (4)$$

Далее исследуется разрешимость системы интегральных уравнений (3) в классе вектор-функций, удовлетворяющих оценкам вида (4). Применяя к системе (3) пространственные на матричный случай методы работы [7], приходим к заключению, что при существует ее единственное решение $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, удовлетворяющее при $q \in (n/(n-1), \infty]$ оценкам вида (4). Рассмотрим вектор-функцию

$$v(t) = - \int_0^t T(t-s) \Pi \left\{ \sum_k w_k Z_k \right\} ds - \int_0^t T(t-s) \Pi \{ (u, \nabla) w \} (s) ds + T(t)u^0.$$

Очевидно, что $v(t) \in C((0, \infty), S_q)$ при $n/(n-1) < q < \infty$ и $Z_j(t) = \partial_j v(t)$. Поэтому $v(t)$ — решение уравнения

$$v(t) = - \int_0^t T(t-s) \Pi \{ (w, \nabla) v + (u, \nabla) w \} (s) ds + T(t)u^0.$$

Но оператор-функция $u(t) = \tilde{T}(t)u^0$ также является решением этого уравнения и в силу единственности его решения получаем $u(t) = v(t)$. Случай $1 < q \leq n/(n-1)$ исследуется иначе с использованием уже установленных оценок.

Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливы оценки

$$\|\partial_j \tilde{T}_a(t)u^0\|_q \leq c_q \|u^0\|_p \begin{cases} t^{-1/2-(n/2)(1/p-1/q)}, & 1 \leq p \leq q \leq n, q > 1 \\ t^{-1/2-(n/2)(1/p-1/q)}(1+t)^{-n/(2q)+1/2}, & n \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Отметим при $q > n$ более слабое убывание при $t \rightarrow \infty$ производных возмущенной полугруппы по сравнению с невозмущенной.

Аналогичным образом можно получить оценки старших производных. Приведем окончательные результаты.

Теорема 3. Пусть $\partial^\alpha w \in S_p$, $\forall p \in [p_1, \infty]$, $p_1 < n/2$, $|\alpha| = 1, 2, \dots, m$, $w \in S_\varrho$, $\forall \varrho \in [\varrho_1, \infty]$, $\varrho_1 < n$ и для возмущенного оператора Озеена выполнено спектральное свойство, сформулированное в теореме 1. Тогда справедливы оценки

$$\|\partial^\alpha \tilde{T}(t)\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p,q}(1+t)^{-\min(1, n/(2q)) - (n/2)(1/p-1/q)},$$

где $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $q > 1$, $|\alpha| = 2, \dots, m$;

$$\|\partial^\alpha \tilde{T}(t) \partial_k\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p,q}(1+t)^{-\min(1/2, n/(2q)) - 1/2 - (n/2)(1/p-1/q)},$$

где $1 < p \leq q \leq \infty$, $q > 1$, $|\alpha| = 2, \dots, m$.

В заключение в качестве следствия теоремы 3 получим оценки для производных $\frac{d^m}{dt^m} \tilde{T}(t)$ при больших t . Будем исходить из соотношения

$$\frac{d^m}{dt^m} \tilde{T}(t) = (\tilde{A} \tilde{T}(t/m))^m.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left\| \frac{d^m}{dt^m} \tilde{T}(t) \right\|_{p \rightarrow q} \leq \|\tilde{A} \tilde{T}(t/m)\|_{p \rightarrow q} (\|\tilde{A} \tilde{T}(t/m)\|_{p \rightarrow p})^{m-1}.$$

Из оценок первых и вторых производных получаем, что

$$\|\tilde{A} \tilde{T}(t/m)\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p,q} t^{-\min(1/2, n/(2q)) - (n/2)(1/p-1/q)}.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 4. Пусть выполнены предположения теоремы 3. Тогда

$$\left\| \frac{d^m}{dt^m} \tilde{T}(t) \right\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p,q,m} t^{-\delta(p,q,m)},$$

где $1 < p \leq q \leq \infty$,

$$\delta(p,q,m) = \min(1/2, n/(2q)) + (n/2)(1/p - 1/q) + (m-1)\min(1/2, (n/2p)).$$

Отметим частные случаи данной оценки:

при $1 < p \leq q \leq n$

$$\left\| \frac{d^m}{dt^m} \tilde{T}(t) \right\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p,q,m} t^{-m/2 - (n/2)(1/p-1/q)};$$

(в этом случае оценка совпадает с оценкой для невозмущенной полугруппы Озеена)

при $1 < p \leq n \leq q \leq \infty$

$$\left\| \frac{d^m}{dt^m} \tilde{T}(t) \right\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p,q,m} t^{-m/2 - (n/2)(1/p-1/q) + 1/2 - n/(2q)};$$

при $n \leq p \leq q \leq \infty$

$$\left\| \frac{d^m}{dt^m} \tilde{T}(t) \right\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p,q,m} t^{-m/2 - (n/2)(1/p-1/q) + 1/2 - n/(2q) + (m-1)(1/2 - n/(2p))}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилле Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962. 830 с.
- [2] Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: изд-во РГУ, 1984. 192 с.
- [3] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1984. 376 с.
- [4] Сазонов Л. И. Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 5. С. 85–109.
- [5] Kobayashi T., Shibata Y. On the Oseen equation in exterior domains // Math. Ann. 1998. Vol. 310. Pp. 1–45.
- [6] Enomoto Y., Shibata Y. On the rate of decay of the Oseen semigroup in exterior domains and its application to Navier–Stokes equation // J. of Math. Fluid Mech. 2005. Vol. 7, № 3. Pp. 339–367.
- [7] Сазонов Л. И. Оценки возмущенной полугруппы Озеена // Владикавказский математический журнал. 2009. Т. 11, вып. 3. С. 50–61.
- [8] Сазонов Л. И. Об устойчивости стационарных решений задачи обтекания // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Актуальные проблемы математической гидродинамики. 2009. Спецвыпуск. С. 195–200.
- [9] Сазонов Л. И. Оценки возмущенной полугруппы Озеена в $\mathbb{R}^n$ и устойчивость стационарных решений системы Навье–Стокса // Владикавказский математический журнал. 2010. Т. 12, вып. 3. С. 71–82.
- [10] Сазонов Л. И. Оценки возмущенной полугруппы Озеена и их приложения // Итоги науки. Юг России. Математический форум. 2010. Т. 4. С. 293–302.

Sazonov L. I. *Estimations of solutions of the perturbed linearized Ozeen system.* We present power-like estimates of solutions for the perturbed linearized Ozeen system. This result is valid if the perturbed Ozeen operator has no eigenvalues in the right half-plane.

ВИБРОАКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОЛИМЕРНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Сафроненко В. Г., Трифонов В. В., Шутько В. М.

НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Численно исследуются вынужденные гармонические колебания цилиндрической оболочки трехслойной структуры с полимерным связующим в акустической среде. Физико-механические характеристики полимерного связующего описаны с позиций теории термовязкоупругости. Для определения поля акустического давления в окружающей среде используется интеграл Гельмгольца. Реализуется численный подход, связанный с использованием метода разложения в ряды Фурье с последующим применением метода прогонки. Определяются амплитудно-частотные и диссипативные характеристики оболочки, а также дальнейшее поле звукового давления в зависимости от граничных условий.

1. Рассмотрим вынужденные колебания непологой оболочки вращения трехслойной структуры, погруженной в сжимаемую жидкость. Предположим, что оболочка отнесена к ортогональной системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, причем координатная поверхность $\alpha_3 = 0$ совпадает со срединной поверхностью заполнителя. Примем в дальнейшем гипотезу о ломаной линии для пакета [1], в соответствии с которой кинематические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_i + [1 + k_i(\alpha_3 - c)]c\varphi_i + \alpha_3\vartheta_i, & c \leq \alpha_3 \leq c + h_1; \\ u_i^{(2)} &= u_i - [1 + k_i(\alpha_3 + c)]c\varphi_i + \alpha_3\vartheta_i, & -c - h_2 \leq \alpha_3 \leq -c; \\ u_i^{(3)} &= u_i + \alpha_3(\alpha_i + \vartheta_i), & -c \leq \alpha_3 \leq c \quad i = 1, 2; \\ u_3^{(j)} &= w, & j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Приняты следующие обозначения: k_i, A_i — главные кривизны и коэффициенты Ляме, u_i, w — перемещения точек отсчетной поверхности, φ_1, φ_2 — углы поворота нормали в заполнителе, дополнительные к углам поворота ϑ_1 и ϑ_2 , $h_1, h_2, 2c$ — толщины внешних слоев и заполнителя.

Деформационные соотношения в деформациях срединной поверхности E_{ij} , кривизн и кручения K_{ij} были рассмотрены в работе [2].

Уравнения движения оболочки, соответствующие (1), имеют вид:

$$\begin{aligned} L_1(T_{11}, T_{22}, S) + k_1 Q_{11} + X_1 &= a_1 \ddot{u}_1 + a_2 \ddot{\vartheta}_1 + a_3 \ddot{\varphi}_1; \\ L_2(T_{22}, S) + k_2 Q_{22} + X_2 &= a_1 \ddot{u}_2 + a_2 \ddot{\vartheta}_2 + a_4 \ddot{\varphi}_2; \\ L_3(Q_{11}, Q_{22}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + X_3 + p &= a_1 \ddot{w}; \\ L_1(M_{11}, M_{22}, H) - Q_{11} = 0, \quad L_2(H, M_{22}) - Q_{22} &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$L_1(m_{11} + \bar{M}_{11}ck_1, \quad m_{22} + \bar{M}_{22}ck_1; m_{12} + 2\bar{H}ck_1) - Q_{13} = 0;$$

$$L_2(m_{12} + 2\bar{H}ck_2, \quad m_{22} + \bar{M}_{22}ck_2) - Q_{23} = 0.$$

Здесь введены в рассмотрение дифференциальные операторы:

$$L_1(f_1, f_2, \varphi) = f'_1 + \varphi^\bullet + \psi(f_1 - f_2), \quad L_2(f_1, f_2) = f'_1 + f_2^\bullet + 2f_1f_2 \quad (3)$$

$$L_3(f_1, f_2) = f'_1 + f_2^\bullet + \psi f_1.$$

X_r ($r = 1, 2, 3$), p — компоненты внешней нагрузки и нормальной реакции со стороны жидкости. В (3) введены обобщенные усилия, моменты и перерезывающие силы, осредненные по пакету оболочки.

Пусть оболочка находится под воздействием поверхностной нагрузки, циклически изменяющейся во времени:

$$X_k(\alpha_1, \alpha_2, t) = q_k(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\omega t}, \quad (4)$$

q_k — интенсивность нагрузки, ω — частота.

В аналогичной форме представим все кинематические, деформационные и силовые факторы. В отношении определяющих соотношений для материалов слоев примем, что они могут быть описаны с позиций ортотропной термовязкоупругости [3]. В условиях гармонического нагружения и в случае малых колебаний они принимают для k -го слоя вид:

$$\sigma_{11}^{(k)} = E_1^{(k)} / (1 - \hat{\nu}_1^{(k)} \hat{\nu}_2^{(k)}) (\varepsilon_{11}^{(k)} + \hat{\nu}_2^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)}) \quad (1 \Leftrightarrow 2); \quad \sigma_{12}^{(k)} = \hat{G}_{12}^k \varepsilon_{12}^k, \quad \sigma_{i3}^{(k)} = \hat{G}_{i3}^3 \varphi_i. \quad (5)$$

Здесь представлены комплекснозначные амплитуды напряжений и деформаций, а также комплексные аналоги модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и модулей сдвига.

Для замыкания соотношений (1)–(5) необходимо определить динамическую реакцию на оболочку со стороны жидкости, в которую она погружена. Это может быть произведено с помощью метода моделирования локального импеданса [4, 5]. После нахождения полей перемещений и давления на поверхности оболочки можно определить поле динамического давления в жидкости с помощью интеграла Гельмгольца:

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[P(\vec{r}_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} \right) - \frac{\partial P(\vec{r}_1)}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} \right) \right] dS,$$

где S — срединная поверхность оболочки, k_1 — волновое число, $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ радиус-векторы точек в жидкости и на оболочке: $R_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}|$. Для численного исследования используется подход, связанный с модальным представлением искомых функций в виде разложений в комплекснозначные ряды Фурье.

После отделения координаты α_2 и приведения всех соотношений к безразмерному виду формируется квазиодномерная система нормального вида 12 порядка, решаемая методом ортогональной прогонки:

$$\frac{dy_1}{d\alpha_i} = A_i f_1(\alpha_1, m, \bar{y}), \quad \bar{y} = y_i. \quad i = 1..12.$$

Используемый метод модального анализа позволяет определять коэффициенты поглощения соответствующие различным модам, а также его суммарное значение.

2. В качестве примера рассмотрим цилиндрическую трехслойную оболочку, колеблющейся в сжимаемой жидкости. Физико-механические характеристики внешних слоев соответствуют стали: $E^{(1)} = E^{(2)} = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0$; $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$.

Уравнения состояния полимерного заполнителя соответствуют модели термо-вязкоупругого тела [6].

Численные расчеты проводились при следующих геометрических параметрах: $L = 350 \text{ мм}$; $R = 100 \text{ мм}$; $h_1 = h_2 = 0,2 \text{ мм}$, $2s = 1 \text{ мм}$; $T = 22^\circ\text{C}$. Нагрузка единичной интенсивности распределена на цилиндрической панели, расположенной в середине образующей. На рис. 1–3 представлены результаты расчетов по модальным и суммарным значениям АЧХ нормального перемещения в центре площадки нагружения, коэффициента поглощения энергии и поля акустического давления в жидкости на расстоянии 50 радиусов оболочки от ее оси вращения на прямой, проходящей через центр площадки нагружения.

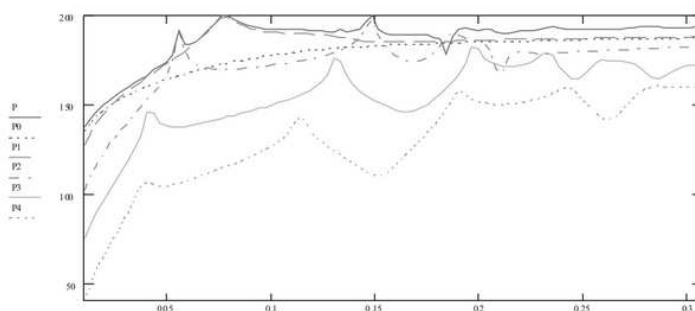


Рис. 1.

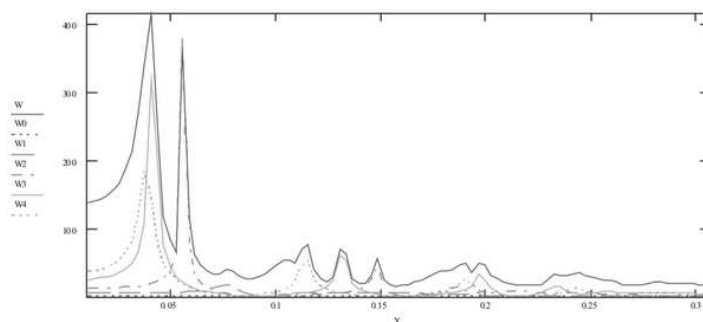


Рис. 2.

Сравнительный анализ указывает на существенное количественное и качественное отличие АЧХ для указанных граничных условий как для поля давления в жидкости, так и для нормального перемещения. Уровни поля динамического давления и амплитуд перемещения в случае жесткого заземления торцов оказываются существенно выше соответствующих характеристик в случае свободных торцов

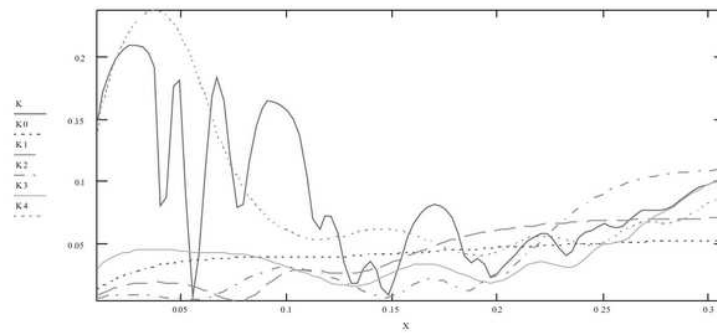


Рис. 3.

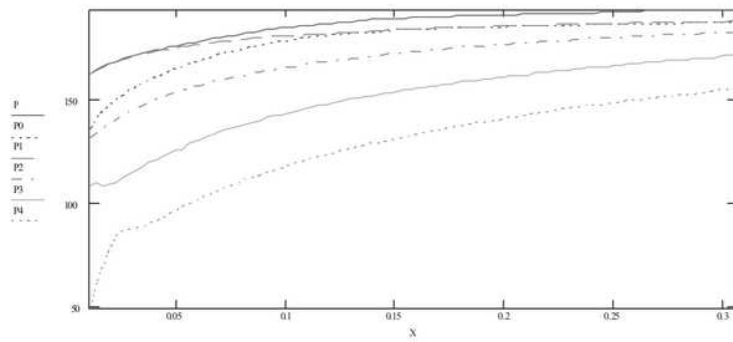


Рис. 4.

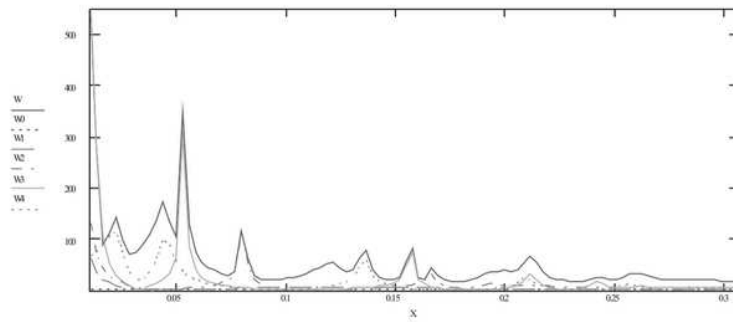


Рис. 5.

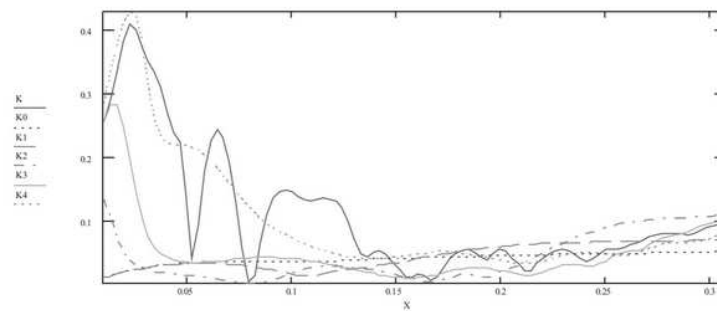


Рис. 6.

(рис. 1, 2, 4, 5). С другой стороны диссипативные свойства оболочки в случае свободных торцов оказываются значительно лучше чем при жестком заземлении (рис. 3, 6). Это выражается в том, что в дальнем акустическом поле в рассмотренном частотном диапазоне отсутствуют локальные максимумы (рис. 4), отмеченные в АЧХ на поверхности оболочки (рис. 5).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
- [2] Сафроненко В. Г., Трифонов В. В., Шутько В. М. Численное решение задачи о колебаниях и звукоизлучении трехслойной оболочки из полимерного композита // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XIV Международной конференции, г. Азов, 19–24 июня 2010 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. Т. 2. С. 300–304.
- [3] Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
- [4] Chertock G. I. Acoust. Soc. Amer. 1964. V.36. № 7. Pp. 1305–1313.
- [5] Юдин А. С., Амбалова Н. М. // Прикл. мех., 1989. Т. 25. № 12. С. 63–68.
- [6] Степаненко Ю. П., Исаев К. В., Азаров А. Д. // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды II Международной конференции. Ростов-на-Дону. 19–20 сентября 1996 г. Т. 1. С. 118–123.

Safronenko V. G., Trifonov V. V., Shutko V. M. *Vibroacoustic properties three-layer cylindrical shell with polymer filler.* Forced harmonic vibrations of a cylindrical shell of a three-layer structure of the polymer composite in the acoustic media are considered. Constitutive equations of the polymer matrix confirm with thermoviscoelasticity theory. To describe the propagation of acoustic waves the Helmholtz equation is used. Numerical approach that uses the method of expansion in Fourier series with the subsequent application of the sweep method is implemented. The amplitude-frequency and dissipation characteristics of the shell, as well as the far of sound pressure depending on the parameters of the problem are investigated.

РАВНОВЕСНАЯ ПОПЕРЕЧНАЯ ТРЕЩИНА В ПОЛУПЛОСКОСТИ, УСИЛЕННОЙ ТОНКОЙ ГИБКОЙ НАКЛАДКОЙ

Соболев Б. В., Краснощёков А. А.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена плоская статическая задача теории упругости для полуплоскости, ослабленной прямолинейным поперечным разрезом. Граница полуплоскости усилена тонкой гибкой накладкой. Трещина поддерживается в раскрытом состоянии нормальными усилиями, приложенными к ее берегам. Применением обобщенного интегрального преобразования Фурье задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода относительно производной функции раскрытия трещины. Построено решение полученного интегрального уравнения методом коллокаций в виде разложения по полиномам Чебышева с выделенной особенностью. Получены значения коэффициента интенсивности напряжений в окрестности краев трещины. Достоверность полученных результатов подтверждена сравнениями с известными частными случаями. Проведено исследование влияния на процесс сходимости метода и на само решение задачи различных физических и геометрических параметров.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о равновесии упругой полуплоскости $y \leq 0$, ослабленной прямолинейной поперечной трещиной длины $2a$, перпендикулярной границе. Центр трещины расположен на расстоянии h от поверхности. Граница полуплоскости усилена гибкой плакирующей накладкой. К берегам трещины приложены нормальные усилия интенсивности $p(y)$, поддерживающие ее в раскрытом состоянии (рис. 1).

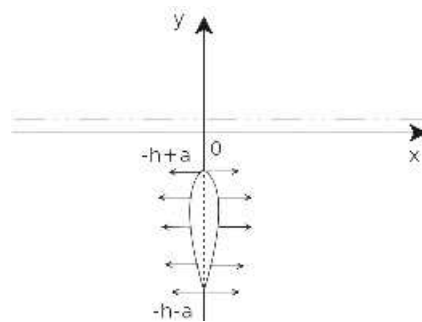


Рис. 1. Равновесная трещина в полуплоскости с накладкой.

Задача описывается уравнениями равновесия в перемещениях при следующих условиях на границе полуплоскости, при $y = 0$ [1]:

$$\begin{cases} 4G_1 h_1 u'' = (1 - \nu_1) \tau_{xy} + 2\nu_1 h_1 \sigma_y' \\ \sigma_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее G_i , ν_i — модуль сдвига и коэффициент Пуассона, соответственно, накладки ($i = 1$) и полуплоскости ($i = 2$), h_1 — толщина накладки, τ_{xy} , σ_y —

компоненты тензора напряжений в полуплоскости. Производные берутся по переменной x .

Для разрывов компонент вектора перемещений u и v на оси трещины введем обозначения:

$$u|_{-0}^{+0} = X(y), \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{-0}^{+0} = \Psi(y) \quad (2)$$

Симетрия задачи относительно оси $x=0$ и отсутствие касательных напряжений на границах трещины позволяют установить связь между искомыми функциями:

$$\Psi(y) = -X'(y) \quad (3)$$

Применим к уравнениям равновесия в перемещениях обобщенное интегральное преобразование Фурье по переменной x с учетом разрывов (2) и связи (3). Удовлетворяя далее в полученном общем решении граничным условиям (1), перейдем к оригиналам Фурье и удовлетворим условию на линии трещины:

$$x = 0, h - a < y < h + a, \sigma_x = p(y) \quad (4)$$

В результате сводим задачу к решению сингулярного интегрального уравнения I рода:

$$\int_{-h-a}^{-h+a} X'(\eta) \left[\frac{1}{\eta - y} + S(\eta, y) \right] d\eta = \frac{2\pi p}{\theta_2}, y \in (-h - a, -h + a) \quad (5)$$

$$S(\eta, y) = \frac{y^2 - \eta^2 + 4y\eta}{(n + y)^3} - \frac{12(a\varepsilon - \eta)(2a\varepsilon - y)E(\eta, y) + 4a\varepsilon\eta - 8a^2\varepsilon^2}{(n + y)^3} \quad (6)$$

$$\theta_i = \frac{G_i}{(1 - \nu_i)}; \varepsilon = \frac{4h_1}{a} \frac{\theta_2}{\theta_1}; E(\eta, y) = e^{-\frac{1}{a\varepsilon}(\eta+y)} \int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{a\varepsilon}(\eta+y)t}}{t^4} dt;$$

Здесь подлежит определению производная функции раскрытия трещины $X'(\eta)$.

Сингулярная часть ядра интегрального уравнения (5) соответствует задаче Гриффитса о трещине в неограниченной упругой плоскости. Регулярная часть $S(\eta, y)$ при предельном переходе при $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствует известному случаю задачи для полуплоскости с поперечным разрезом [2, 3].

2. Построение решения методом коллокаций. Перейдем в интегральном уравнении (5) к безразмерным переменным и параметрам.

$$\int_{-1}^1 \psi(\zeta) [k_0(\zeta - z) + K(\zeta, z)] d\zeta = \pi f(\zeta), |z| < 1 \quad (7)$$

$$\psi(\zeta) = g'(\zeta) = \frac{1}{2} X'(a\zeta - h);$$

$$f(z) = \frac{p}{\theta_2} = const$$

$$k_0(\zeta - z) = (\zeta - z)^{-1} \quad (8)$$

$$K(\zeta, z) = \frac{(z - \lambda^{-1})^2 - (\zeta - \lambda^{-1})^2 + 4(\zeta - \lambda^{-1})(z - \lambda^{-1})}{(\zeta + z - 2\lambda^{-1})^3} - \frac{12(\varepsilon + \lambda^{-1} - \zeta)(2\varepsilon + \lambda^{-1} - z)E(\zeta, z) + 4\varepsilon(\zeta - \lambda^{-1}) - 8\varepsilon^2}{(\zeta + z - 2\lambda^{-1})^3} \quad (9)$$

где $E(\zeta, z) = e^{-\frac{\zeta+z-2\lambda^{-1}}{\varepsilon}} \int_1^\infty e^{\frac{\zeta+z-2\lambda^{-1}}{\varepsilon}t} \frac{1}{t^4} dt$; $\lambda = \frac{a}{h}$ характеризует относительное расстояние от трещины до границы полуплоскости; $g(\zeta)$ — функция раскрытия трещины.

Решение интегрального уравнения (7) с ядром (8),(9) строим методом коллокации в виде, явно учитывающем особенность в окрестности края трещины:

$$g'(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sum_{n=0}^N X_n T_n(\zeta); \quad (10)$$

при этом имеем $g(\zeta) = \sqrt{1-z^2} \sum_{n=0}^N X_n U_{n-1}(\zeta)$, где T_n, U_n — полиномы Чебышева I и II рода соответственно.

Из очевидного условия $g(\pm 1) = 0$ определяем: $X_0 = 0$.

В качестве узловых точек принимаем корни полиномов Чебышева:

$$z_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2N}, \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

Реализация представлений (10) в интегральном уравнении (7) с ядром (8,9), позволяет свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов X_n :

$$AX = B \quad (12)$$

Вычисление коэффициентов $a_{ij} = \int_{-1}^1 T_j(\zeta) \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\frac{1}{(\zeta-z_i)} + K(\zeta, z_i) \right] d\zeta$ системы (12) осуществляется в два этапа. Сингулярная часть представляет собой табличный интеграл [4]

$$\int_{-1}^1 T_n(\zeta) \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = \pi U_{n-1}(z), \quad (13)$$

а регулярная часть находится численно.

3. Анализ полученных результатов.

Численная реализация проведённого исследования позволила проанализировать эффективность применения метода коллокации к интегральным уравнениям подобного вида. На рис. 2. графически представлены результаты вычисления интегральной характеристики $I = \int_{-1}^1 g' d\zeta$ для различного количества узлов коллокации (точное значение $I=0$). Рассмотрены случаи различных значений параметра λ^{-1} . При вычислениях принято: $\frac{h_1}{a} = 0.01$, материал основания — алюминий, материал накладки — сталь. Результаты непосредственных вычислений свидетельствуют о снижении эффективности метода коллокации для малых значений относительных расстояний между трещиной и границей тела.

Результаты проведённого исследований позволяют в каждом случае определить значения коэффициента интенсивности нормальных напряжений, являющегося важнейшей характеристикой в механике разрушения.

$$K_I = K_{I\infty} N \quad (14)$$

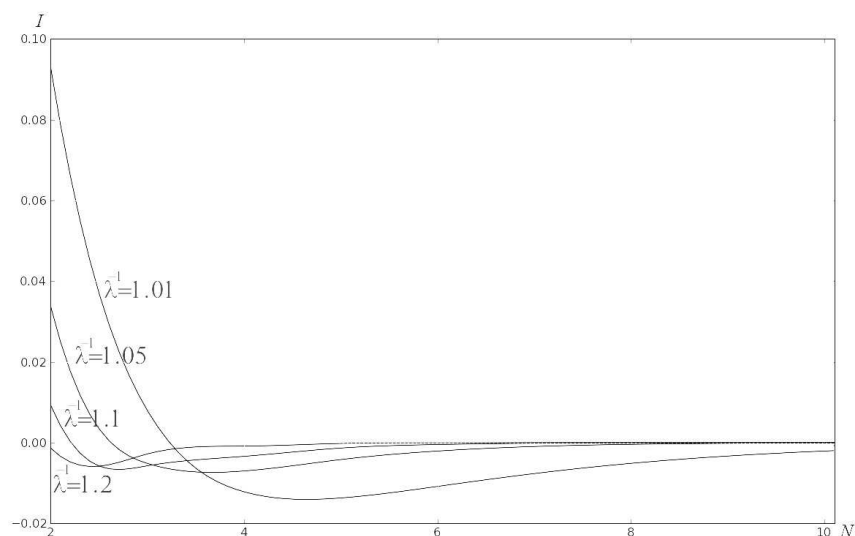


Рис. 2. Зависимость сходимости метода коллокации от значений параметра λ .

где $K_{I\infty}$ — коэффициент интенсивности напряжений в предельном случае — задаче о трещине в неограниченной упругой плоскости [5], N — фактор влияния [6], множитель характеризующий влияние на коэффициент интенсивности напряжений значений различных геометрических и физических параметров задачи.

На рис. 3. представлены результаты вычисления фактора N для различных сочетаний материалов основной полуплоскости и накладки и различных значений λ (кривые 2 и 3).

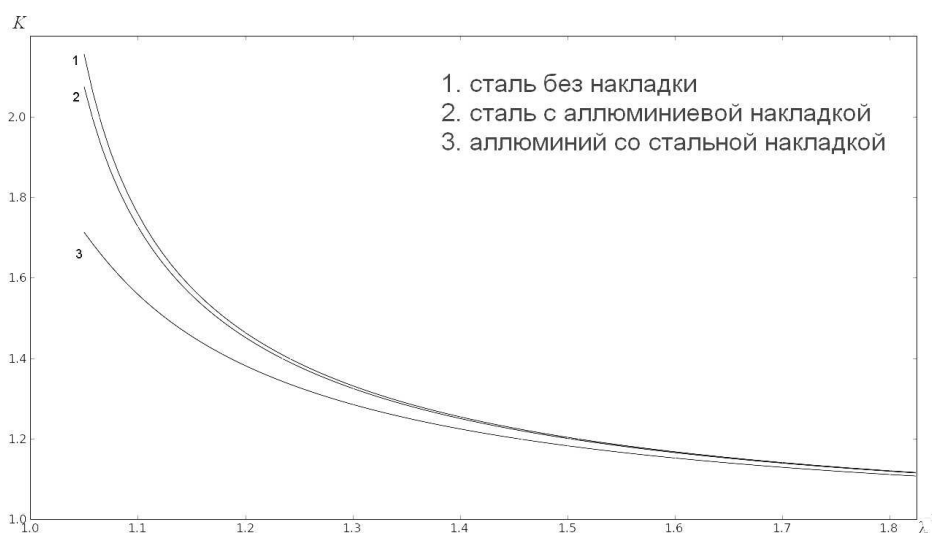


Рис. 3. Значения фактора влияния в окрестности ближнего края трещины для различных сочетаний основного материала и накладки.

Выводы.

1. Рассматриваемая задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода, решение которого получено методом коллокаций.

2. Установлена высокая эффективность метода коллокаций для решения рассмотренных задач.

3. Тонкая накладка, помимо плакирующей функции, также уменьшает интенсивность напряжений у края трещины; этот эффект прослеживается даже в случаях достаточно тонких наклеек и более мягких по сравнению с основным материалом.

Авторы выражают благодарность Борису Ивановичу Сметанину за внимание к работе и ценные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-08-00839а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1979. 486 с.
- [2] Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. 224 с.
- [3] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дачышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка, 1976. 443 с.
- [4] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
- [5] Paris P. C., Sih G. C. Stress analysis of cracks, ASTM STP 391, 1965. Pp. 30–81.
- [6] Соболев Б. В. Об асимптотических решениях трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями, Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, 2011, No 4 (4), С. 1778–1780.

Sobol B. V., Krasnoschekov A. A. *Equilibrium transverse crack in half-space reinforced by thin, flexible lining.* Plane static problem of elasticity theory for a half-plane weakened by a straight transverse crack was considered. The boundary of the half-plane is reinforced by a thin flexible plate. The crack is maintained in the opened state by normal forces applied to its faces. By applying the generalized Fourier integral transform the problem is reduced to solving a singular integral equation of the first kind with respect to the derivative of crack opening. A solution of the resulting integral equation was constructed with collocation method as an expansion in Chebyshev polynomials. The values of the stress intensity factor near the edges of the crack were calculated. Reliability of the results is confirmed by comparisons with known special cases.

РЕКОНСТРУКЦИЯ ДЕФЕКТОВ В МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ

Соловьев А. Н.^{***}, Спожакин А. С.^{*}, Напрасников В. В.^{****}

^{*}Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

^{**}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

^{***}Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

^{****}Белорусский национальный технический университет, Минск

Предложен метод определения номера слоя или номера интерфейсной границы многослойного композита, которые содержат дефекты. Метод основан на применении теорем взаимности для неповрежденного тела и тела с дефектом и использовании некоторых аналитических пробных решений для многослойного тела. Дополнительной информацией для решения обратных задач служит поле смещений, измеренное на границе тела. Рассмотрены примеры такой реконструкции, включающие в себя дефекты типа интерфейсных трещин и разрывов слоев.

1. Введение. Ранее были разработаны методы реконструкции трещин в упругих однородных телах или составных с дефектом находящимся на известной границе раздела [1-5], и в слоистых композитах, когда интерфейсная граница, несущая трещину неизвестна [6]. Процесс реконструкции размера трещины особенно эффективен, если эта интерфейсная граница или плоскость, несущая трещину известны. Основой реконструкции внутренних дефектов в упругих и теплопроводных телах могут служить механические или температурные поля, измеренные на поверхности тела. В приведенных работах методы идентификации для однородных тел, основанные на применении неклассических граничных интегральных уравнений или применения теорем взаимности для поврежденного и неповрежденного состояния с применением набора пробных аналитических решений для установившихся колебаний или стационарного однородного уравнения теплопроводности. В случае неоднородных тел, например, слоистых композитов, набор таких решений ограничен, однако он позволяет провести частичную реконструкцию единичных дефектов.

2. Постановка обратной задачи реконструкции трещины. В декартовой прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ ($\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$) рассматривается конечное составное упругое тело, занимающее область $V = \bigcup_{k=1}^K V_k$ (рис. 1) и ограниченную поверхностью S . Подобласти V_k представляют собой слои, S_{int} — внутренние интерфейсные поверхности раздела подобластей. На поверхности S задан вектор напряжений. Имеется система непересекающихся трещин $\Gamma = \bigcup_{q=1}^M \Gamma_q$, ($\Gamma_q = \Gamma_q^{(+)} \cup \Gamma_q^{(-)}$), которые расположены либо на внутренних поверхностях S_{int} (расслоения), либо соответствуют разрыву слоев, либо одновременно расслоению и разрыву рис. 1. Краевая задача, в которой кроме определения характеристик НДС, требуется определить геометрию системы трещин Γ , формулируется следующим образом. Она состоит из уравнений равновесия линейной теории упругости [7]

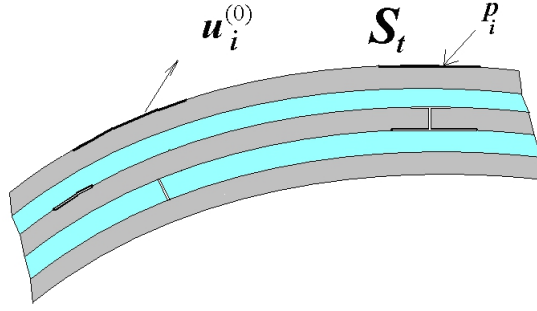


Рис. 1. Образец с дефектами.

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} + f_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad \underline{x} \in V_k \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijml}^{(k)} u_{m,l}^{(k)} \quad (2)$$

граничных условий прямой задачи

$$t_i^{(k)}|_S = \sigma_{ij}^{(k)} n_j|_S = p_i, \quad (3)$$

условий непрерывности на $S_{int} \setminus \Gamma$

$$u_i^{(k)}|_{S_{int} \setminus \Gamma} = u_i^{(k+1)}|_{S_{int} \setminus \Gamma}, \quad t_i^{(k)}|_{S_{int} \setminus \Gamma} = t_i^{(k+1)}|_{S_{int} \setminus \Gamma} \quad (4)$$

условий на берегах трещин

$$t_i^{(k)}|_{\Gamma_q^\pm} = 0, \quad q = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

и дополнительных условий, отвечающих измерению вектора смещений на S

$$u_i^{(k)}|_S = u_i^0 \quad (6)$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$, $c_{ijml}^{(k)}$ — компоненты тензоров напряжений и упругих постоянных, $u_i^{(k)}$ — компоненты вектора смещений, f_i — массовые силы, n_j — компоненты единичных векторов внешней нормали к соответствующим поверхностям.

Замечание 1. На практике обычно задается не распределение вектора перемещений всюду на S , а значения перемещений в некотором наборе точек, соответствующих местам установки датчиков, причем аналог (5) имеет вид:

$$u_i^{(k)}(\underline{x}_m) = u_{im}^0, \quad \underline{x}_m \in S, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

3. Пробные решения. Рассмотрим пробные решения уравнений равновесия (1) для тела без дефекта. Первый набор таких решений удовлетворяющих однородным уравнениям определяется соотношениями для компонент вектора перемещений $U_i^{(k)}$ $i = 1, 2, 3$

$$U_i^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2; \quad U_3^{(k)} = a_k x_3 + b_k \quad (8)$$

Коэффициенты a_k , b_k определяются из уравнений непрерывности на интерфейсных границах

$$a_{k+1} = a_k \frac{c_{33}^{(k)}}{c_{33}^{(k+1)}}, \quad b_{k+1} = b_k + h_k(a_k - a_{k+1}) \quad (9)$$

Второй набор пробных решений, удовлетворяющих неоднородным уравнениям для тела без дефектов, определяется соотношениями для компонент вектора перемещений $Q_i^{(k)}$ $i = 1, 2, 3$

$$Q_i^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2; \quad Q_3^{(k)} = A_k x_3^2 + B_k \quad (10)$$

массовые силы при этом определяются как

$$f_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad f_3 = -2c_{33}^{(k)} A_k \text{ при } x \in V_k \quad (11)$$

Коэффициенты A_k , B_k определяются из уравнений непрерывности на интерфейсных границах

$$A_{k+1} = A_k \frac{c_{33}^{(k)}}{c_{33}^{(k+1)}}, \quad B_{k+1} = B_k + h_k^2(A_k - A_{k+1}) \quad (12)$$

Замечание 2. Количество наборов пробных решений может быть увеличено если в качестве ненулевых компонент вектора смещений в (8) и (10) выбирать первую или вторую компоненту, тогда в условиях стыковки и в массовых силах вместо модуля $c_{33}^{(k)}$ будут присутствовать соответствующие модули сдвига.

4. Принцип взаимности работ и реконструкция трещины. Пусть имеется два напряженно деформированного состояния с компонентами векторов перемещений u_i и u_i^* , вызванного двумя наборами внутренних и поверхностных сил: f_i , p_i и f_i^* , p_i^* соответственно. Для статики упругого тела имеет место теорема о взаимности работ [7]

$$\int_V (f_i u_i^* - f_i^* u_i) dV + \int_S (p_i u_i^* - p_i^* u_i) dS = 0 \quad (13)$$

Рассмотрим далее задачу реконструкции единичной трещины с плоскими интерфейсными границами перпендикулярными оси координат Ox_3 и используем (13), когда в качестве второго набора внутренних сил взяты 0 и (11), а на поверхности следы пробных решений (8) и (10) - P_i и T_i соответственно, в результате, учитывая (9) и (13) получим:

$$-a_1 c_{33}^{(1)} I_1 + \int_S (p_i U_i - P_i u_i^0) dS = 0 \quad (14)$$

$$2c_{33}^{(1)} A_1 I_2 - 2c_{33}^{(1)} A_1 h I_1 + \int_S (p_i Q_i - T_i u_i^0) dS = 0 \quad (15)$$

где $I_1 = \int_{\Gamma_+} (u_3^+ - u_3^-) dS$ интегральный скачок третьей компоненты вектора перемещения на трещине, $I_2 = \int_V u_3 dV$, $x_3 - h = 0$ — уравнение плоскости с трещиной.

Из соотношения (14) находится I_1 и его значение, отличное от нулевого (с учетом погрешности измерений поля смещений на поверхности тела) показывает наличие скачка перемещений, а следовательно наличие дефекта. Так как решается задача с силовыми граничными условиями, то равенство $I_2 = 0$ может быть принято в качестве условия однозначности вертикальных перемещений, тогда из уравнения (15) может быть найдена координата плоскости с дефектом

$$h = \frac{a_1 \int_S (p_i Q_i - T_i u_i^0) dS}{2A_1 \int_S (p_i U_i - P_i u_i^0) dS} \quad (16)$$

После того, как носитель трещины найден, реконструкцию ее размеров можно провести одним из методов, разработанных ранее и приведенных во введении.

В случае разрыва слоев или разрыва и расслоения одновременно соотношение (15) принимает вид

$$-2c_{33}^{(1)} A_1 I_3 + \int_S (p_i Q_i - T_i u_i^0) dS = 0, \quad I_3 = \int_{\Gamma_+} x_3 (u_3^+ - u_3^-) dS \quad (17)$$

Тогда вертикальная координата x_3^* внутренней точки дефекта может быть определена через I_1 и I_3 , которые определяются из (14), (17) очевидным образом

$$x_3^* = I_3 / I_1 \quad (18)$$

5. Численные примеры реконструкции трещин. В первом примере проводится реконструкция расслоения между третьим и четвертым слоями многослойной плиты, деформированное состояние и распределение вертикального смещения представлены на рис. 2. При этом точность определения вертикальной координаты интерфейсной границы с расслоением по формуле (16) составила 1.3 %.

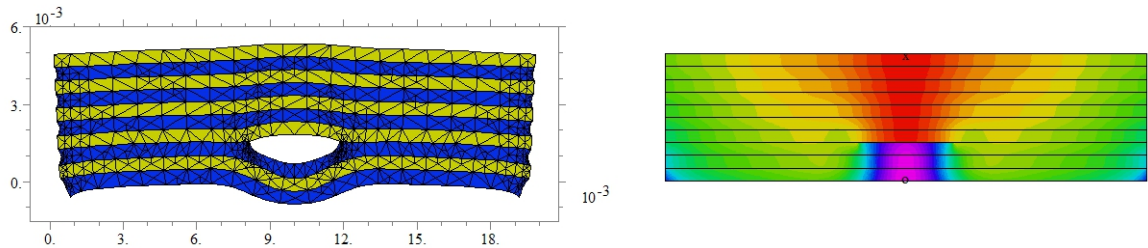


Рис. 2. Решение прямой задачи с расслоением.

Во втором примере определялась внутренняя точка дефекта, представляющего собой наклонный разрыв третьего и четвертого слоев той же плиты (рис. 3). Трещина заключена в отрезке $x_3^* \in [0.001, 0.002]$ (м), при этом значение координаты вычисленной по формуле (18) составило $x_3^* = 0.00154$ м.

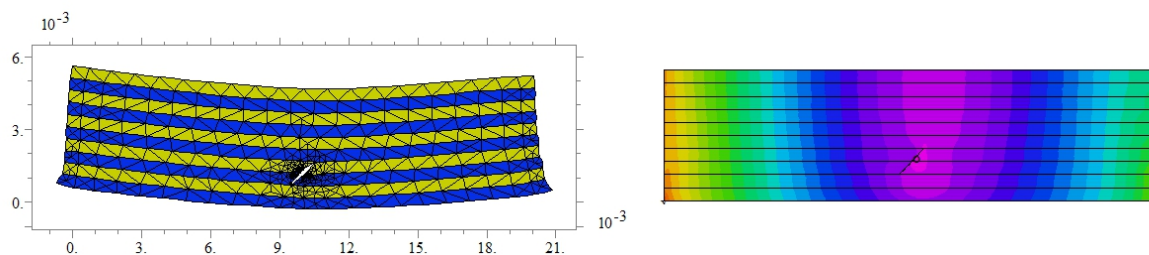


Рис. 3. Решение прямой задачи с разрывом слоев

Работа выполнена при частичной финансовой поддержки РФФИ (гранты 10-08-01296-а, 10-01-00194-а, 10-08-00093-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соловьев А. Н. Идентификация интерфейсной трещины. Современные проблемы МСС: Труды VIII международной научной конференции. Ростов-на-Дону. 2002 Т.1. С. 163-169.
- [2] Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Некоторые полувывные алгоритмы реконструкции интерфейсных трещин // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естесств. науки. 2003, № 3. С. 20-24.
- [3] Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Определение ориентации плоских трещин в упругом теле // Теорет. и прикладная механика. 2003. Вып. 37. С. 141-145.
- [4] Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об определении дефектов в составном упругом теле // Дефектоскопия. 2004. №5. С. 15-23.
- [5] Ватульян А. О., Соловьев А. Н. О реконструкции трещин с взаимодействующими берегами // Дефектоскопия 2004. №10. С. 62-69.
- [6] Соловьев А. Н., Ватульян А. О., Спожакин А. С., Шевцов С. Н. Реконструкция дефектов в слоистых композитах // Вестник ДГТУ. 2009, Том 9, № 2. С. 3-14.
- [7] Новацкий В. Теория упругости. Мир: Москва, 1975.

Soloviev A. N., Spogakin A. S., Naprasnikov V. V. Defects reconstruction in multilayered composite materials. The method of definition of number of a layer or number of the interface border of a multilayered composite which contain defects is offered. The method is based on application of theorems of reciprocity for the intact body and a body with defect and use of some analytical trial solutions for a multilayered body. As the additional information for the decision of inverse problems the field of displacement measured on border of a body serves. The examples of such reconstruction including defects of type of the interface cracks and ruptures of layers are considered.

ЯВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЧАСТОТ ВИХРЕВЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДЛЯ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА В КАНАЛЕ

Сумбатян М. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Для развитого высокоскоростного турбулентного потока в канале предлагается новый аналитический метод, позволяющий получить явные оценки для частот вихревых пульсаций. Метод основан на линеаризации уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости на фоне основного осредненного потока. Распределение скорости в осредненном потоке заранее неизвестно и должно находиться в процессе решения задачи. Математический аппарат основан на преобразовании Лапласа по времени и методе ВКБ в сочетании с аналитическим исследованием сложного трансцендентного характеристического уравнения для частот пульсаций, корни которого удастся найти в явном виде.

1. Постановка задачи и основные гипотезы. Известно [1], что с увеличением скорости развитого турбулентного потока распределение осредненной скорости $U(y)$ все больше приближается к некоторому постоянному значению U_0 в средней зоне течения с резким спадом до нуля в погранслоях. Данный спад объясняется необходимостью выполнения условия прилипания на стенках канала. В первом приближении заранее неизвестную функцию распределения продольной скорости осредненного потока можно приблизить ломаной, как показано на рис. 1. Для простоты ограничимся решением, симметричным относительно оси канала $y = 0$.

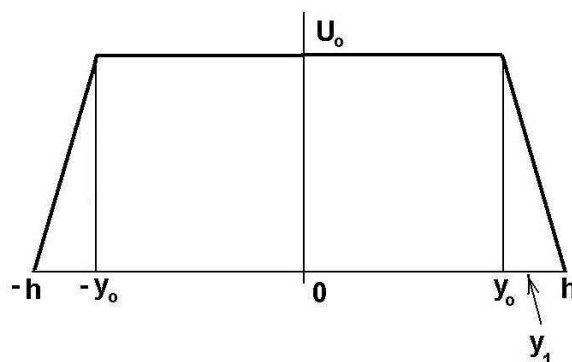


Рис. 1. Профиль скорости осредненного потока: внешняя и погранслойная области.

При таком подходе величина $y_1 = h - y_0$ обозначает ширину погранслоя ($y_1 \ll h$), а значение скорости в центральной зоне канала $|y| \leq y_0$ асимптотически равно средней скорости потока U_0 .

2. Основные математические соотношения. В двумерной постановке малые возмущения компонент вектора скорости на фоне основного потока приводят

к следующим соотношениям в терминах функции тока:

$$\begin{aligned} v_x(x, y, t) &= U(y) + v'_x(x, y, t), \quad v_y(x, y, t) = v'_y(x, y, t), \quad \Psi(y) = \int_{-h}^y U(y) dy, \\ v'_x(x, y, t) &= \frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v'_y(x, y, t) = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad \psi(x, y, t) = \Psi(y) + \psi'(x, y, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения Навье–Стокса и отбрасывая малые величины второго порядка, получаем

$$\frac{\partial(\Delta \psi')}{\partial t} + U(y) \frac{\partial(\Delta \psi')}{\partial x} - U''(y) \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \nu U'''(y) - \nu \Delta \Delta \psi' = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) для функции тока возмущенного потока необходимо решить с граничными условиями прилипания: $\psi' = \partial \psi' / \partial y = 0$, $y = \pm h$.

Начальные условия разумно поставить на основании того, что развитый турбулентный поток достаточно устойчив к небольшим изменениям возмущенной компоненты скорости, которую можно выбрать достаточно произвольно в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям прилипания. Например, можно задать начальное условие в виде:

$$v'_x(x, y, 0) = \varepsilon \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \cos(x/L), \quad v'_y(x, y, 0) = 0, \quad (3)$$

где L — некоторый характерный размер вдоль оси канала, а ε — малая амплитуда.

Теперь уравнение (2) необходимо решить отдельно в центральной и в пограничной областях. При этом в точках сопряжения $y = \pm y_0$ необходимо добиться непрерывности функции ψ' и ее первых трех производных по y . Поскольку в обеих зонах $U''(y) = U'''(y) \equiv 0$, то (2) эквивалентно

$$\frac{\partial(\Delta \psi')}{\partial t} + U(y) \frac{\partial(\Delta \psi')}{\partial x} - \nu \Delta \Delta \psi' = 0. \quad (4)$$

Применим к уравнению (4) преобразование Лапласа по t с параметром p :

$$\begin{aligned} p \Delta \hat{\psi}' + U(y) \frac{\partial(\Delta \hat{\psi}')}{\partial x} - \nu \Delta \Delta \hat{\psi}' &= \Delta \psi'|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial v'_x(x, y, 0)}{\partial y} = -\frac{2\varepsilon}{h^2} y \cos(x/L) = -\frac{\varepsilon}{h^2} y (e^{ix/L} + e^{-ix/L}). \end{aligned} \quad (5)$$

В силу линейности последнего уравнения, рассмотрим его лишь с правой частью в виде первой экспоненциальной функции. Решение для второй экспоненты является комплексно сопряженной функцией по отношению к первой.

Если заметить, что $\hat{\psi}'(x, y) = \hat{\psi}'(y)e^{ix/L}$, то уравнение (5) становится эквивалентным паре обыкновенных дифференциальных уравнений

$$p g(y) + \frac{iU(y)}{L} g(y) - \nu \left[\frac{d^2 g(y)}{dy^2} - \frac{g(y)}{L^2} \right] = -\frac{2\varepsilon}{h^2} y, \quad \frac{d^2 \hat{\psi}'(y)}{dy^2} - \frac{\hat{\psi}'(y)}{L^2} = g(y). \quad (6)$$

Такой подход с введением вспомогательной функции g вместо $\widehat{\psi}'$ позволяет построить равномерное асимптотическое приближение для всех значений параметра p при $U_0 \rightarrow \infty$. В отличие от этого прямое применение рассматриваемого подхода к уравнению (5) привело бы к уравнению 4-го порядка, для которого характеристическое уравнение при $p = iU(y)/L$ имеет кратные корни. В этом случае при применении метода ВКБ необходимо учитывать точки поворота [2]. В примененном же нами подходе корни характеристических уравнений для обоих уравнений в (6) — всегда простые. Заметим, что решение второго уравнения в (6) строится в явном виде.

Уравнения (6) в центральной зоне канала $0 \leq y \leq y_0$, где $U(y) \equiv U_0$, имеют постоянные коэффициенты. Поэтому в этой зоне решение легко строится в виде

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}'_1(y) &= L \int_0^y \operatorname{sh} \frac{y-\eta}{L} g(\eta) d\eta + C_1 \operatorname{sh} \frac{y}{L}, \quad 0 \leq y \leq y_0, \\ g(y) &= C_2 \frac{\operatorname{sh}(\gamma_0 y)}{\gamma_0} - \frac{\varepsilon y}{h^2 \nu \gamma_0^2}, \quad \gamma_0 = \sqrt{\frac{p}{\nu} + \frac{iU_0}{L\nu} + \frac{1}{L^2}}.\end{aligned}\quad (7)$$

На интервале $y_0 \leq y \leq h$ введем новую локальную переменную $\tilde{y} = h - y$, $0 \leq \tilde{y} \leq y_1$. Тогда первое уравнение в (6) примет вид

$$\frac{d^2 g(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} - \left(\frac{p}{\nu} + \frac{iU_0 \tilde{y}}{L\nu y_1} + \frac{1}{L^2} \right) g(\tilde{y}) = \frac{\varepsilon}{h^2 \nu} (h - \tilde{y}), \quad 0 \leq \tilde{y} \leq y_1. \quad (8)$$

Его решение строится методом ВКБ [2]:

$$\begin{aligned}g(\tilde{y}) &= C_3 \frac{e^{\xi(\tilde{y})}}{\gamma(\tilde{y})} + C_4 \frac{e^{-\xi(\tilde{y})}}{\gamma(\tilde{y})} - \frac{\varepsilon(h - \tilde{y})}{h^2 \nu \gamma^2(\tilde{y})}, \quad \widehat{\psi}'_2(\tilde{y}) = L \int_0^{\tilde{y}} \operatorname{sh} \frac{\tilde{y}-\eta}{L} g(\eta) d\eta, \\ \gamma(\tilde{y}) &= \sqrt{\frac{p}{\nu} + \frac{iU_0 \tilde{y}}{L\nu y_1} + \frac{1}{L^2}}, \quad \xi(\tilde{y}) = \int_0^{\tilde{y}} \gamma(\eta) d\eta = \frac{2\nu \tilde{y}}{3iU_0} \left[\gamma^3(\tilde{y}) - \left(\frac{p}{\nu} + \frac{1}{L^2} \right)^{3/2} \right].\end{aligned}\quad (9)$$

Заметим, что построенное решение (9) автоматически удовлетворяет двум условиям прилипания при $\tilde{y} = 0$ и записано в общей несимметричной форме, т. к. на отрезке $0 \leq \tilde{y} \leq y_1$ у решения нет никакой симметрии.

3. Основное характеристическое уравнение и его корни. Четыре произвольные постоянные в формулах (7), (9) должны быть найдены из 4-х условий сопряжения внешнего и внутреннего решений, — вплоть до третьей производной включительно в точке сопряжения $y = y_0$, или $\tilde{y} = y_1$. Оценивая возникающие при этом интегралы методом Ватсона [2], приходим к некоторой линейной алгебраической системе 4×4 . Обращение в ноль детерминанта этой системы приводит к трансцендентному уравнению, корни которого $p = i\omega$, если они существуют в виде мнимых значений, определяют частоты вихревых турбулентных пульсаций. В предположении больших чисел Рейнольдса и малости толщины пограничного слоя по сравнению с шириной канала данное трансцендентное уравнение упрощается к виду:

$$e^{\xi_1} = \frac{1 + \operatorname{cth}(y_0/L)/(\gamma_0 L)}{\gamma_0^{3/2}} \left(\frac{p}{\nu} + \frac{1}{L^2} \right)^{3/4}. \quad (10)$$

Изучим вопрос о существовании решений этого уравнения вида $p = i\omega$, соответствующих достаточно большим длинам L . В этом случае во всех выражениях, входящих в уравнение (10), величину $1/L^2$ можно отбросить, а также пренебречь членом $\text{cth}(y_0/L)$ по сравнению с единицей. Тогда (10) заметно упрощается:

$$e^{\xi_1} = \left(\frac{\omega}{\omega + U_0/L} \right)^{3/4}, \quad \xi_1 = \frac{2\nu y_1 L}{3iU_0} \left\{ \left[\frac{i}{\nu} \left(\omega + \frac{U_0}{L} \right) \right]^{3/2} - \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{3/2} \right\}. \quad (11)$$

Рассмотрим несколько возможных случаев:

$$1) \quad \omega + \frac{U_0}{L} > 0, \quad \omega > 0. \quad (12)$$

Тогда уравнение (11) перепишется в следующем виде

$$e^{\alpha(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \left(\frac{\omega}{\omega + U_0/L} \right)^{3/4}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2} y_1 L}{3 U_0 \sqrt{\nu}} \left[\left(\omega + \frac{U_0}{L} \right)^{3/2} - \omega^{3/2} \right]. \quad (13)$$

Поскольку справа стоит положительная функция, то и слева должна быть положительная. Это возможно в двух случаях:

$$1a) \quad L_n > 0. \quad (14)$$

$$1b) \quad L_n < 0. \quad (15)$$

В обоих случаях величина α положительна, поэтому первое соотношение в (13) может выполняться, лишь если

$$\alpha = \alpha_n = 2\pi n > 0, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad e^{2\pi n} = \left(\frac{\omega}{\omega + U_0/L} \right)^{3/4}, \quad \Rightarrow \quad \omega_n = - \frac{U_0/L_n}{1 - e^{-8\pi n/3}}, \quad (16)$$

что в случае 1a) противоречит условию (12) положительности величины ω . В случае же 1b) имеем

$$\omega_n + \frac{U_0}{L_n} = - \frac{(U_0/L_n)e^{-8\pi n/3}}{1 - e^{-8\pi n/3}}, \quad \Rightarrow \quad L_n = \frac{U_0 (1 - e^{-4\pi n})^2 y_1^2}{18 \nu (1 - e^{-8\pi n/3})^3 (\pi n)^2}, \quad (17)$$

что противоречит отрицательности величины L_n .

$$1c) \quad \alpha = \alpha_n = \pi \pm 2\pi n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

В этом случае левая часть уравнения (13) отрицательна, а правая положительна, что противоречиво.

$$2) \quad \omega + \frac{U_0}{L} > 0, \quad \omega < 0. \quad (19)$$

Этот случай требует особого исследования и будет рассмотрен в одной из ближайших работ автора.

$$3) \quad \omega + \frac{U_0}{L} < 0, \quad \omega > 0. \quad (20)$$

Этот случай также требует особого исследования.

$$4) \quad \omega + \frac{U_0}{L} < 0, \quad \omega < 0. \quad (21)$$

В этом случае уравнение (11) принимает вид

$$e^{\alpha(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \left(\frac{\omega}{\omega + U_0/L} \right)^{3/4}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2} y_1 L}{3 U_0 \sqrt{\nu}} \left[(-\omega)^{3/2} - \left(-\omega - \frac{U_0}{L} \right)^{3/2} \right]. \quad (22)$$

Здесь возможны следующие частные случаи:

$$4a) \quad L_n > 0, \implies \alpha = \alpha_n = 2\pi n > 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

В этом случае

$$e^{2\pi n} = \left(\frac{\omega}{\omega + U_0/L} \right)^{3/4}, \implies \omega_n = -\frac{U_0/L_n}{1 - e^{-8\pi n/3}}, \quad (24)$$

$$\omega_n + \frac{U_0}{L_n} = -\frac{(U_0/L_n)e^{-8\pi n/3}}{1 - e^{-8\pi n/3}}, \implies L_n = \frac{U_0(1 - e^{-4\pi n})^2 y_1^2}{18\nu(1 - e^{-8\pi n/3})^3 (\pi n)^2}.$$

Очевидно, все введенные предположения выполняются. Следовательно, формулы (24) дают истинное решение задачи, что подтверждают численные расчеты.

$$4b) \quad L_n < 0, \implies \alpha = \alpha_n = 2\pi n > 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (25)$$

В этом случае легко получить $\omega_n = -(U_0/L_n)/(1 - e^{-8\pi n/3}) > 0$, что противоречит второму неравенству в (21).

Работа поддержана ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы», Госконтракт №16.516.11.6106.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шлихтинг Г. И. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
- [2] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Sumbatyan M. A. *Explicit analytical estimates for the frequencies of vortex pulsations in the high-speed channel turbulent flow.* For a developed high-speed turbulent flow in the channel we propose a new analytical method which permits explicit estimates for the wave frequencies of the vortex pulsations. The method is founded upon a linearization of incompressible Navier-Stokes equations near the basic averaged stream. The distribution of velocities in the averaged stream is not known *a priori* and should be determined in the solving process. The mathematical technique is based on the Laplace transform in time and WKB method, in a combination with an analytical study of a complex transcendental characteristic equation for pulsation frequencies, whose roots can be found in an explicit form.

КОНВЕКЦИЯ ПРИ ЭЛЕКТРОФОРЕЗЕ, ВЫЗВАННАЯ ДВИЖЕНИЕМ ГРАНИЦЫ МЕЖДУ ЗОНАМИ

Цывенкова О. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Для задачи о конвекции при электрофорезе построено решение, отвечающее механическому равновесию, и получена система для определения критических чисел потери устойчивости. Решение, соответствующее механическому равновесию, представляет собой волну, движущуюся вдоль оси действия силы тяжести.

1. Введение. При исследовании процесса разделения вещества электрическим полем особое интерес вызывает поведение границы раздела между зонами, которые отличаются друг от друга в частности, тем, что по различные стороны границы плотность жидкости различна. В случае, когда поле тяжести направлено перпендикулярно границе раздела, задача подобна задаче Кельвина–Гельмгольца о поведении границы раздела между двумя жидкостями с различной плотностью [1]. Однако, в рассматриваемом далее случае «граница раздела» «размыта» и движется вдоль направления поля тяжести. Это движение обусловлено действием электрического поля, которое также не дает границе разрушиться. Профиля концентрации в окрестности границы раздела представляет собой сглаженную функцию, близкую к кусочно-постоянной. Это позволяет в случае, когда граница раздела достаточно далеко от границ плоского горизонтального слоя, удалить границы рассматриваемого горизонтального слоя на бесконечность.

2. Постановка задачи. Гравитационная концентрационная конвекция при электрофорезе описывается системой уравнений в приближении Обербека–Буссинеска (безразмерные переменные) [2, 3]:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{k} \sum_{j=1}^n \beta_j c_j, \quad (1)$$

$$\frac{dc_k}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{i}_k = 0, \quad \mathbf{i}_k = -\varepsilon \gamma_k \nabla c_k + \gamma_k z_k c_k \mathbf{E}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad \sigma = \sigma_0 \left(1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k \right). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость смеси в целом, p — давление, c_k , $\mathbf{i}_k$ — концентрация и плотность потока компоненты смеси ($k = 1, 2, \dots, n$), $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, $\mathbf{E}$, φ — напряженность и потенциал электрического поля, σ — проводимость раствора (σ_0 — проводимость раствора при $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$), μ , ε , β_k , α_k — коэффициенты кинематической вязкости, диффузии, концентрационного сжатия, влияния концентрации на проводимость смеси, γ_k , z_k — подвижность и заряд k -ой компоненты смеси.

Основной целью работы является определение решения, отвечающего механическому равновесию и построение системы уравнений для амплитуд возмущений.

2. Однокомпонентная модель. Для простоты ограничимся рассмотрением однокомпонентной модели ($n = 1$), когда имеется лишь один движущийся скачок профиля концентрации в случае механического равновесия. Для многокомпонентной системы каждая концентрация может иметь скачок профиля и, если эти скачки достаточно далеко удалены друг от друга, то их исследование можно вести независимо, чем и оправдывается использование однокомпонентной модели.

Система уравнений, описывающая поведение одной компоненты смеси, имеет вид (индексы идентифицирующие компоненту, опущены):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = -\sigma_0 (1 + \alpha c) \nabla \varphi, \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{k} \beta c \quad (5)$$

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon \gamma \Delta c - P \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{c}{1 + \alpha c} \right), \quad P = \frac{\gamma z}{\sigma_0}. \quad (6)$$

3. Механическое равновесие. Решение, отвечающее механическому равновесию, ищем в виде:

$$\mathbf{v} = 0, \quad c_0 = c_0(x_3, t), \quad p_0 = p_0(x_3, t), \quad \mathbf{j}_0 = (0, 0, j_0(x_3)). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4)–(6), получим систему:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x_3} = \beta c_0, \quad \frac{\partial j_0}{\partial x_3} = 0, \quad \nabla \varphi_0 = -\frac{\mathbf{j}_0}{\sigma_0 (1 + \alpha c_0)}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} - \varepsilon \gamma \frac{\partial^2 c_0}{\partial x_3^2} + P j_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{c_0}{1 + \alpha c_0} \right) = 0, \quad (9)$$

решение которой ищем в виде бегущей волны. Для этого введем замену переменных (ограничимся построением решения лишь для концентрации $c_0(\xi)$).

$$\xi = x_3 - V t, \quad c_0 = c_0(x_3 - V t) = c_0(\xi), \quad (10)$$

здесь V — скорость бегущей волны.

Подставляя (10) в (9) получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\varepsilon \gamma c_0''(\xi) + V c_0'(\xi) - P j_0 \left(\frac{c_0}{1 + \alpha c_0} \right)' = 0. \quad (11)$$

Потребуем выполнения условий на $\pm\infty$:

$$c_0 \Big|_{-\infty} = c_-; \quad c_0 \Big|_{+\infty} = c_+, \quad (12)$$

где c_- , c_+ — заданные концентрации.

Интегрируя задачу (11), (12), получим соотношение для скорости бегущей волны V и решение в неявном виде:

$$V = \frac{\gamma z j_0}{\sigma_0 (1 + \alpha c_-)(1 + \alpha c_+)}, \quad (13)$$

$$|c_0 - c_+|^{1+\alpha c_+} = A |c_0 - c_-|^{1+\alpha c_-} \cdot e^{-\frac{\alpha V (c_+ - c_-)}{\varepsilon \gamma} \xi}, \quad (14)$$

где A — некоторая константа, возникающая в результате того, что на бесконечной оси не фиксировано начало отсчета.

Полученное уравнение можно рассматривать как трансцендентное уравнение для определения $c_0 = c_0(\xi)$, но более удобно брать обратную функцию $\xi = \xi(c_0)$, которая для случая $A = 1$ имеет вид

$$\xi = -\frac{\varepsilon \gamma}{V \alpha (c^+ - c^-)} \left((1 + \alpha c_+) \ln |c_0 - c_+| - (1 + \alpha c_-) \ln |c_0 - c_-| \right). \quad (15)$$

Обратим внимание, что выбор константы в уравнении (14) влияет на значение ξ_0 , в котором профиль $c_0(\xi)$ имеет перегиб, то есть $c_0''(\xi_0) = 0$.

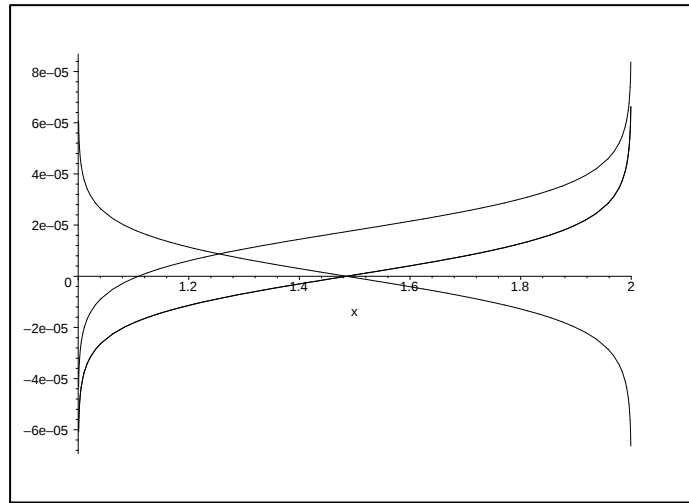


Рис. 1. График концентрации при механическом равновесии.

На рис. 1 представлены профили $c_0(\xi)$ для различных A и z : один из графиков отвечает значению $A = 1$, $z = 1$, другой — $A = 2$, $z = 1$, а третий $A = 1$, $z = -1$. При расчетах выбирались следующие значения параметров $\varepsilon = 10^{-6}$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 10^{-6}$, $\sigma_0 = 1$, $j_0 = 1$, $c_- = 1$, $c_+ = 2$. В случае $A = 1$, $z = 1$ значение $\xi_0 = 1.484926269$.

Полученные результаты позволяют получить представление о том, как ведет себя концентрация при механическом равновесии. В дальнейшем при решении задачи об устойчивости профиль $c_0(\xi)$ определяется как решение задачи Коши

$$c_0'(\xi) = -\frac{V \alpha}{\varepsilon \gamma} \frac{(1 + \alpha c_0)}{(c_0 - c_+)(c_0 - c_-)}, \quad c_0(0) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{(1 + \alpha c^-)(1 + \alpha c^+)} - 1 \right), \quad (16)$$

где начальное условие $c_0(0)$ получено путем выбора начала отсчета на оси ξ в точке перегиба, т. е. $c_0''(0) = 0$.

Задача (16) решалась на отрезке $(-10, 10)$ методом Рунге–Кутты вправо и влево от точки перегиба. Оказалось, что вблизи нуля концентрация довольно быстро выходит на значения c^+ и c^- .

3. Система уравнений для возмущений. Для определения стационарного решения, отвечающего механическому равновесию, был выполнен переход к новой

переменной $\xi = z - Vt$, где V — скорость бегущей волны. При исследовании устойчивости также следует перейти к новой переменной ξ . В этом случае система (4)–(6) примет вид

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} - V \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \xi} + (\tilde{\mathbf{v}}, \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\nabla \tilde{p} + \mu \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \beta \tilde{c}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} - V \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \xi} + (\tilde{\mathbf{v}}, \nabla) \tilde{c} = \varepsilon \gamma \Delta \tilde{c} - P \tilde{\mathbf{j}} \cdot \nabla \left\{ \frac{\tilde{c}}{1 + \alpha \tilde{c}} \right\} = 0. \quad (19)$$

Выполняя замену:

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= c_0(\xi) + \delta \tilde{c}(x_1, x_2, \xi, t), \quad \tilde{v}_j = \delta \tilde{v}_j(x_1, x_2, \xi, t), \quad j = 1, 2, 3, \\ \tilde{\mathbf{j}} &= \tilde{\mathbf{j}}_0 + \delta \tilde{\mathbf{j}}(x_1, x_2, \xi, t), \quad \tilde{\varphi}(x_1, x_2, \xi) = \varphi_0(\xi) + \delta \tilde{\varphi}(x_1, x_2, \xi), \end{aligned} \quad (20)$$

линеаризуем полученные уравнения в окрестности механического равновесия.

Система уравнений для возмущений имеет вид (знак двойной тильды опущен):

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} - \varepsilon \gamma \Delta c + P j_0 \frac{2\alpha}{(1 + \alpha c_0)^3} c'_0(\xi) c + \left(\frac{P j_0}{(1 + \alpha c_0)^2} - V \right) \frac{\partial c}{\partial \xi} = \\ = - \left(P j_3 \frac{1}{(1 + \alpha c_0)^2} + v_3 \right) c'_0(\xi), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - V \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \delta v_1, \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - V \frac{\partial v_2}{\partial \xi} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \delta v_2, \quad (23)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} - V \frac{\partial v_3}{\partial \xi} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \mu \delta v_3 + \beta c_1, \quad (24)$$

$$(1 + \alpha c_0) \Delta \varphi + \alpha \varphi''_0(\xi) c + \alpha \varphi'_0(\xi) \frac{\partial c}{\partial \xi} + \alpha c'_0(\xi) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0. \quad (25)$$

4. Система уравнений для амплитуд возмущений. Будем рассматривать периодические возмущения по x_1 и x_2 :

$$c(x_1, x_2, \xi) = e^{\lambda t} \hat{c}(\xi) e^{i k_1 x + i k_2 y}, \quad (26)$$

$$j_3(x_1, x_2, \xi) = e^{\lambda t} \hat{j}_3(\xi) e^{i k_1 x + i k_2 y}, \quad (27)$$

$$v_i(x_1, x_2, \xi) = e^{\lambda t} \hat{v}_i(\xi) e^{i k_1 x + i k_2 y}, \quad i = 1, 2, 3.. \quad (28)$$

Для амплитуд возмущений получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon \gamma (\hat{c})'' - (\hat{c})' \left[\frac{P j_0}{(1 + \alpha c_0)^2} - V \right] - \hat{c} \left[\lambda + \varepsilon \gamma K^2 - \frac{2 \alpha P j_0 c'_0(\xi)}{(1 + \alpha c_0)^3} \right] = \\ = \frac{P j_3 c'_0(\xi)}{(1 + \alpha c_0)^2} + c'_0(\xi) \hat{v}_3, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\mu \hat{v}_3^{IV}(\xi) + V \hat{v}_3'''(\xi) - (\lambda + 2\mu K^2) \hat{v}_3''(\xi) - V K^2 \hat{v}_3'(\xi) + (\lambda + K^2 \mu) K^2 \hat{v}_3 = K^2 \beta \hat{c}, \quad (30)$$

$$(1 + \alpha c_0) \left(-K^2 \hat{\varphi} + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial \xi^2} \right) + \alpha c_0'(\xi) \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \xi} = \\ = \frac{\alpha j_0}{\sigma_0 (1 + \alpha c_0)} \left(\frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} + \frac{\alpha c_0'(\xi)}{(1 + \alpha c_0)} \hat{c} \right). \quad (31)$$

Заметим, что для амплитуды $\hat{j}_3(\xi)$ получаем следующее выражение

$$\hat{j}_3 = -\sigma_0 (1 + \alpha c_0) \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \xi} + \frac{\alpha j_0}{1 + \alpha c_0} \hat{c}. \quad (32)$$

Здесь введено обозначение для волнового числа

$$K^2 = k_1^2 + k_2^2. \quad (33)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП: «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (госконтракт 16.516.11.6106), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт 14.740.11.0877, и гранта РФФИ 10-01-00452.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [2] Жуков М. Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов-н/Д: Инд-во Рост. ун-та, 2005. 216 с.
- [3] Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Юдович В. И. Математическая теория электрофореза: применение к методам фракционирования биополимеров. Киев: Наукова Думка, 1983. 202 с.

Tsyvenkova O. A. *The electrophoretic convection induced by bounary motion between zones.* The stationary solution for the problem of convection motion within the electrophoresis process is constructed and the equations for determination critical values of stability parameters is obtained. This stationary solution is a traveling wave that moves along gravity direction.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ С ПРОДОЛЬНЫМИ ПРОТЕКТОРНЫМИ ВСТАВКАМИ В ВИДЕ СПИРАЛЕЙ

Чебаков М. И., Газзаев Д. А., Колосова Е. М.

НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

С помощью метода конечных элементов исследуется задача о взаимодействии упругого цилиндра с внутренней поверхностью цилиндрического слоя конечной длины, содержащего спиралевидные протекторные вставки, которые имеют механические свойства, отличные от свойств слоя. Внешняя граница слоя жёстко закреплена, в зоне контакта отсутствует трение. Поставленная задача может рассматриваться как компьютерная модель работы бинарного подшипника, широко используемого в машиностроении. Изучено влияние механических и геометрических параметров задачи на напряжённо-деформируемое состояние цилиндрического слоя.

Исследованию бинарных подшипников посвящены работы [1–6] и др.

1. Постановка задачи.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) рассмотрим кусочно-неоднородный цилиндрический слой конечной длины $(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq z \leq -l)$ с периодически изменяющимися механическими свойствами по координате φ (угол $\varphi = 0^\circ$ соответствует положению оси r вертикально вниз) с периодом $\alpha = 2\pi/N$. Вставки (N штук) ширины a , высоты b , длина проекции которых на ось z равна l , при условии $a < 2R_1 \sin(\alpha/2)$ располагаются в слое по спирали вдоль оси z (рис. 1 а).

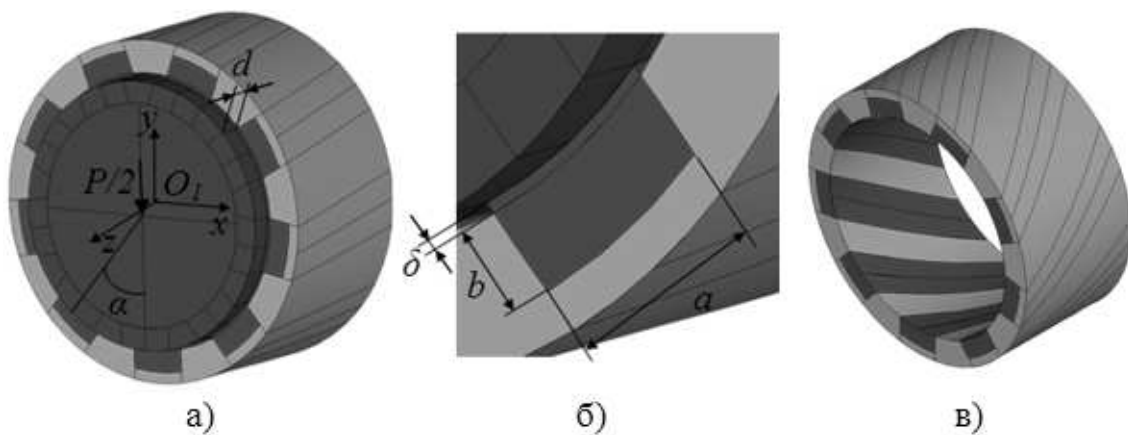


Рис. 1. Постановка задачи.

Вставки представляют собой фигуры, полученные перемещением криволинейного прямоугольника по винтовой линии вдоль оси z . Цилиндрический слой имеет соответствующие вставкам выемки. Верхняя грань вставок расположена на поверхности слоя $r = R_1$, либо, если вставки выступают за пределы слоя, параллельно этой поверхности над ней на расстоянии δ .

Поверхность $r = R_2$ жёстко закреплена, а в поверхность $r = R_1 - \delta$ вдавливается усилием P упругий цилиндр радиуса $R_0 = R_1 - h - \delta$ длины $l + 2d$, расположенный вдоль оси z в области $d \leq z \leq -l - d$, ось которого параллельна оси цилиндрического слоя и смещена относительно неё вниз на величину $h \geq 0$. Предполагается, что трение между упругим цилиндром и кусочно-неоднородным цилиндрическим слоем отсутствует.

2. Конечно-элементное моделирование.

В качестве инструментария при конечно-элементном моделировании использовался пакет ANSYS 11.0 и его командный язык программирования APDL [7, 8]. Для удобства проведения расчетов была разработана программа на макроязыке APDL ANSYS 11.0, позволяющая моделировать задачу с введением параметрических входных данных. Таким образом, в рамках одной программы проводились расчеты задач о контактном взаимодействии упругого цилиндра и кусочно-неоднородного цилиндрического слоя с спиралевидными вставками при различных геометрических и механических входных параметрах. Проводилось тестирование программы при задании упругих констант вставок равными упругим константам слоя. Результаты конечно-элементных расчетов контактных напряжений в случае однородности слоя и соизмеримости величины зоны контакта с толщиной слоя незначительно отличались от аналогичных результатов, полученных на основе формул теории Герца.

3. Числовые расчеты.

Было произведено исследование контактных $\sigma_r(R_1 - \delta, \varphi, z)$ и эквивалентных $\sigma_e(r, \varphi, z)$ напряжений в неоднородном цилиндрическом слое в зависимости от механических и геометрических параметров, где

$$\sigma_e(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}.$$

Для проведения расчетов использовались суперкомпьютерная система, состоящая из четырёх вычислительных кластеров Edge-8 «Т-Платформы» с производительностью по 300 гигафлопс каждый, и лицензионное программное обеспечение ANSYS 11.0 с возможностями проведения параллельных вычислений. Отметим, что имеющееся оборудование и программное обеспечение позволяло рассчитывать конечно-элементные модели с большим количеством узлов, добиваясь необходимой точности вычислений.

При проведении численных экспериментов задавались следующие значения параметров. Коэффициенты Пуассона и модули Юнга основного материала цилиндрического слоя полагались равными соответственно $\nu = 0.3$ и $E = 10^5$ МПа, а для цилиндра — $\nu_c = 0.3$ и $E_c = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, приложенное усилие $P = 30$ кН. Радиусы цилиндрического слоя полагались равными соответственно $R_1 = 0.025$ м и $R_2 = 0.031$ м, радиус цилиндра полагался равным $R_0 = 0.249$ м в тех случаях, когда вставки не выступали за пределы цилиндрического слоя, и $R_0 = 0.0245$ м при выступающих вставках, длина слоя $l = 0.03$ м и $d = 0.00375$ м.

В дальнейшем будем обозначать материал вставок цифрой 1, когда его коэффициент Пуассона $\nu_v = 0.4$, модуль Юнга $E_v = 0.5 \cdot 10^5$ МПа, и назовем такой материал «жёстким», цифрой 2 обозначим «мягкий» материал, когда $\nu_v = 0.4$,

$E_v = 0.1 \cdot 10^5$ МПа. Когда материал вставок совпадает с основным материалом слоя, будем обозначать его цифрой 0.

В приведённой таблице в столбце, обозначенном «in», приводятся результаты расчётов максимальных по модулю эквивалентных напряжений на внутренней поверхности цилиндрического слоя, в столбце, обозначенном «out», — на внешней.

Номер серии	Угол поворота цилиндра θ (°)	Угол закручивания вставок ψ (°)	$ \sigma_r^{\max} $	$\sigma_e^{\max}$ (МПа)			
			(МПа)	in		out	
				$z=0$	$z=l$	$z=0$	$z=l$
А	-	-	110	105	105	106	106
	0	0	73.3	85.1	85.1	110	110
		10	97.0	85.2	103	110	119
	10	0	97.1	103	103	116	116
		10	98.9	104	106	115	118
В	0	0	72.2	80.1	80.1	125	125
		10	88.7	80.0	92	124	124
	10	0	88.4	89.9	89.9	119	119
		10	105	90.3	104	114	129
С	0	0	83.7	85.0	85.0	94.2	94.2
		10	91.6	85.4	93.5	95.3	107
	10	0	91.8	93.5	93.5	108	108
		10	92.1	94.2	90.1	108	100
D	-	-	265	336	336	138	138
	0	0	241	308	308	133	133
		10	248	307	316	131	113
	10	0	235	304	304	100	100
		10	244	322	317	102	125

Таблица 1. Значения максимальных контактных и эквивалентных напряжений в слое.

Было произведено несколько серий расчётов задачи, в которых варьировались геометрические параметры, материал и количество вставок. Для некоторых из этих серий в табл. 1 приведены результаты расчетов максимальных по модулю контактных $\sigma_r^{\max} = \max \sigma_r(R - \delta_1, \varphi, z)$ и эквивалентных $\sigma_e^{\max}$ напряжений в слое при различных углах закручивания вставок, различных положениях вставок по отношению к области контакта, которые характеризуются поворотом цилиндра на угол θ по часовой стрелке. Материал вставок в этих сериях — «жёсткий». Буквой А обозначена серия расчётов, в которой число вставок $N = 9$ и их размеры $a = 0.01$ м, $b = 0.0036$ м. В серии расчётов В были рассмотрены более широкие вставки, их число $N = 5$, ширина вставок здесь равна $a = 0.015$ м и высота вставок $b = 0.0044$ м. В сериях С и D рассматривались более узкие вставки, ширина вставок здесь равна $a = 0.005$ м, высота — $b = 0.003$ м, число вставок $N = 16$. В сериях А, В и С вставки не выступают за границу слоя, то есть $\delta = 0$, в серии D — $\delta = 3 \cdot 10^{-4}$ м. Для сравнения результатов расчетов, в сериях А и D приведены значения для случая, когда материал вставок аналогичен основному материалу слоя.

4. Выводы.

Из результатов для серии А видно, что для вставок среднего размера при увеличении угла закручивания вставок при $\theta = 0^\circ$ максимальные контактные напряжения растут, а при $\theta > 0^\circ$ — практически не изменяются. При ненулевом угле поворота максимальные эквивалентные напряжения концентрируются в окрестности точек сопряжения разных материалов на торцах цилиндрической поверхности, при ненулевом угле закручивания — в окрестности точек сопряжения разных материалов на торце при $z = l$ цилиндрической поверхности.

По результатам серий В и С можно заметить, что для случаев широких и узких вставок при увеличении угла поворота цилиндрического слоя или угла закручивания вставок, максимальные эквивалентные и контактные напряжения увеличиваются.

Из результатов для тех случаев, в которых $\delta > 0$, видно, что при жёстком материале вставок максимальные эквивалентные напряжения концентрируются в области цилиндрического слоя, находящейся под вставкой, а при мягком материале вставок — вдоль границы сопряжения материалов вставок и цилиндрического слоя с максимальными значениями вблизи торцов, при ненулевом угле закручивания вставок — вблизи торца при $z = l$.

Анализируя результаты для случая D, то есть случай выступающих вставок, $\delta > 0$, можно заметить, что при увеличении угла закручивания вставок и угла поворота цилиндрической поверхности максимальные контактные напряжения возрастают. Кроме того, максимальные эквивалентные напряжения концентрируются вдоль границы сопряжения материалов вставок и цилиндрической поверхности в окрестности выступающей области вставок.

Из приведённых выше результатов можно сделать вывод, что использование вставок, выступающих за границы внутренней поверхности цилиндрического слоя, нецелесообразно, так как это ведёт к значительному увеличению максимальных эквивалентных напряжений. Ещё одним выводом из анализа таблицы является то, что ширина вставок оказывает значительное влияние на значения максимальных эквивалентных напряжений, и чем шире вставка, тем выше значения максимальных эквивалентных напряжений на границе сопряжения материалов вставок и цилиндрической поверхности. В тех случаях, когда $\delta = 0$, при жёстком материале вставок максимальные эквивалентные напряжения концентрируются в области цилиндрического слоя, находящейся под вставкой, а при мягком материале вставок — вдоль границы сопряжения материалов вставок и цилиндрического слоя с максимальными значениями вблизи торцов, при ненулевом угле закручивания вставок — вблизи торца при $z = l$. Также исходя из полученных результатов, можно заключить, что модель с большим количеством вставок небольшого размера является более перспективной для дальнейшего изучения, чем модели с меньшим количеством более широких и высоких вставок.

Разработанная методика и проведённое прочностное исследование может быть использовано при проектировании цилиндрического подшипника скольжения с продольными протекторными вставками в виде спиралей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 09-08-01195, 11-08-00909).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рубин М. Б., Бахарева В. Е. Подшипники в судовой технике: Справочник. Л.: Судостроение, 1987. 344 с.
- [2] Иванов В. А., Хосен Ри. Прогрессивные самосмазывающиеся материалы на основе эпоксидофторопластов для триботехнических систем. Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2000. 429 с.
- [3] Колесников В. И., Мясникова Н. А. Разработка антифрикционных самосмазывающихся композиционных материалов на основе явления фрикционного переноса // Вестник РГУПС. 2004. № 3. С. 22–25.
- [4] Колосова Е. М., Чебаков М. И. Моделирование контактного взаимодействия упругого цилиндра с внутренней поверхностью кусочно-неоднородного упруго цилиндрического слоя // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. № 3. С. 49–55
- [5] Колосова Е. М. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия в комбинированном подшипнике скольжения с учетом тепловыделения от трения // Известия Вузов Сев.-Кавказ. рег. техн. наук. 2010. № 5. С. 35–39
- [6] Колосова Е. М., Чебаков М. И. Пространственные контактные задачи о взаимодействии вала и цилиндрического слоя с протекторными вставками // Вісник Східноукраїнського національного університету імені В. Даля. 2010. № 1 (143). Ч. 1. С. 381–383
- [7] Басов К. А. ANSYS в примерах и задачах. М.: Компьютер пресс, 2002. 224 с.
- [8] Морозов А. Ю., Муйземнек А. С., Шадский Е. М. ANSYS в руках инженера: механика разрушения. М.: ЛЕНАНД, 2008. 456 с.

Chebakov M. I., Gazzaev D. A., Kolosova E. M. *Contact problem for a cylindrical layer with longitudinal tread inserts in the form of spirals.* Through the finite element method researched the problem of the interaction of an elastic cylinder with an internal surface cylindrical layer of finite length, containing a spiral tread inserts that have mechanical properties different from properties of the layer. The outer boundary layer is rigidly secured in the contact zone there is no friction. The problem can be regarded as a computer model of a binary bearing, widely used in industry. Has been studied the influence of mechanical and geometrical parameters of the problem on the stress-deformed state of cylindrical layer.

ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОСНОВАНИЙ

Чебаков М. И., Колосова Е. М.

НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Рассмотрены плоские и пространственные контактные задачи с учетом сил трения для трехслойного упругого основания, лежащего на жестком основании или упругом полупространстве, предполагается, что слои жестко соединены между собой и с полупространством. Предполагается также, что в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона, а на штамп действуют нормальные и касательные усилия, при этом система штамп — трехслойное основание находится в условиях предельного равновесия и штамп в процессе деформации слоя не поворачивается. В плоском случае подошва штампа имеет форму параболы или плоская, в пространственном случае имеет форму эллиптического параболоида. С помощью программ аналитических вычислений впервые получены точные интегральные уравнения первого рода с ядрами, представленными в явном аналитическом виде. Изучены основные свойства ядер интегральных уравнений. Построены схемы решения интегральных уравнений. Для решения задач используются аналитические методы и метод конечных элементов. С помощью предложенных методов произведен расчет распределения контактных напряжений, размеров области контакта, взаимосвязи перемещения штампа и действующих на него сил, напряженно-деформируемого состояния во внутренних областях, особенно на границах раздела слоев с разными механическими параметрами в зависимости от геометрических и механических параметров слоев и коэффициента трения. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных аналитическими методами и методом конечных элементов.

В плоском случае рассмотрим в прямоугольной системе координат (x, y) область $y \leq h_1$ состоящую из трех слоев $0 \leq y \leq h_1$ (слой 1), $-h_2 \leq y \leq 0$ (слой 2) $-h_3 \leq y \leq h_2$, $-\infty < x < \infty$ (рис. 1) и полуплоскости $y \leq h_3$, где (x, y) — декартовы координаты. Пусть слои и полуплоскость, имеющие разные упругие постоянные, жестко соединены между собой, а грань $y = h_1$ слоя 1 взаимодействует со штампом, находящимся под действием нормальной силы P и горизонтальной силы $T = \mu P$. Пусть в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона $\tau_{xy} = \mu \sigma_y$ (μ — коэффициент трения).

Будем рассматривать два случая: штамп имеет подошву в виде параболы с радиусом кривизны R в вершине — задача 1 и штамп имеет форму прямоугольника — задача 2. В задаче 1 зона контакта переменна, а в задаче 2 фиксирована. Рассматривается случай предельного равновесия, сила P приложена к штампу с некоторым эксцентриситетом таким образом, что он не поворачивается в процессе деформирования слоя.

В случае плоской деформации задачи сводятся к уравнениям Ламе при соответствующих граничных условиях, при этом напряжения в полуплоскости $y < -h_2 - h_3$ при $y \rightarrow -\infty$ стремятся к нулю. С помощью преобразования Фурье

задачи сводятся относительно неизвестных нормальных контактных напряжений под штампом $\sigma_y = -q(x)$ к интегральному уравнению (ИУ)

$$\int_{-a}^a q(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{h_1}\right) d\xi = \pi\theta(\delta - f(x)), \quad (-a \leq x \leq b), \quad \theta = \frac{G_1}{1-\nu_1}, \quad (1)$$

$$k(t) = k_1(t) - \varepsilon k_2(t), \quad \varepsilon = \frac{(1-2\nu_1)}{2(1-\nu_1)},$$

$$k_1(t) = \int_0^\infty \frac{L_1(u)}{u} \cos ut du, \quad k_2(t) = \int_0^\infty \frac{L_2(u)}{u} \sin ut du,$$

$f(x) = \beta x^2/(2R)$ (задача 1), $f(x) = 0$ (задача 2). В пространственном случае аналогичным образом в прямоугольной системе координат (x, y, z) рассмотрим область $z \leq h_1$ состоящую из трех слоев: $0 \leq z \leq h_1$ (слой 1), $-h_2 \leq y \leq 0$ (слой 2), $-h_3 \leq z \leq h_2$, $-\infty < x < \infty$ (рис. 1) и полуплоскости $z \leq h_3$. Слои и полупространство также имеют разные упругие постоянные, жестко соединены между собой, а грань $z = h_1$ слоя 1 взаимодействует со штампом в форме эллиптического параболоида, находящимся под действием нормальной силы P и горизонтальной силы $T = \mu P$, действующей в направлении оси x . Предполагаем, что плоскости симметрии штампа совпадают с плоскостями $x = 0$ и $y = 0$. Пусть в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона $\tau_{zx} = \mu\sigma_z$. (рис. 1).

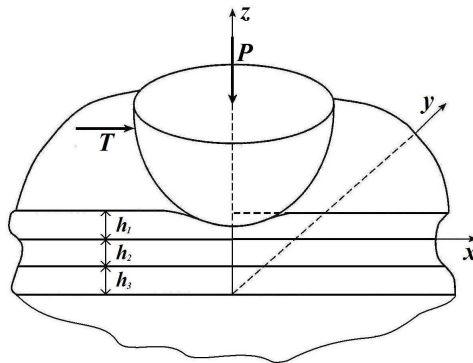


Рис. 1.

В этом случае интегральное уравнение для определения контактных напряжений $\sigma_z(x, y, h_1) = -q(x, y)$ принимает вид

$$\iint_{\Omega} q(\eta, \xi) k(x - \eta, y - \xi) d\eta d\xi = \frac{2\pi G_1}{1-\nu_1} (\delta - f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

$$k(t, \tau) = k_1(t, \tau) - \varepsilon k_2(t, \tau), \quad \varepsilon = \mu(1-2\nu_1)/(2-2\nu_1)$$

$$k_1(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \tau^2}} + \int_0^\infty (L_1(\gamma h) - 1) J_0(\gamma \sqrt{t^2 + \tau^2}) d\gamma, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$k_2(t, \tau) = \frac{1}{t^2 + \tau^2} + \frac{t}{t^2 + \tau^2} \int_0^\infty (L_2(\gamma h) - 1) J_1(\gamma \sqrt{t^2 + \tau^2}) d\gamma.$$

Функция $f(x, y) = x^2/(2R_1) + y^2/R_2$ характеризует форму штампа, R_1 и R_2 радиусы кривизн штампа в точке первоначального касания в пространственной задаче соответственно в плоскостях $x = 0$ и $y = 0$. Для плоских и пространственной задачи δ — перемещение штампа в вертикальном направлении,

$$L_i(u) = L_{i1}(u)/L_{i2}(u), \quad (3)$$

где функции $L_{ij}(u)$ ($i, j = 1, 2$) представимы в виде разложений по величинам относительных модулей сдвига $G_{i1} = G_i/G_1$, где G_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — соответственно модули сдвига слоев 1, 2, 3 и полупространства

$$\begin{aligned} L_{ij}(u) = & n_{022}^{ij}(u)G_{31}^2G_{41}^2 + n_{031}^{ij}(u)G_{31}^3G_{41} + n_{040}^{ij}(u)G_{31}^4 + n_{112}^{ij}(u)G_{21}G_{31}G_{41}^2 + \\ & + n_{121}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^2G_{41} + n_{122}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^2G_{41}^2 + n_{130}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^3 + n_{131}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^3G_{41} + \\ & + n_{140}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^4 + n_{202}^{ij}(u)G_{21}^2G_{41}^2 + n_{211}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}G_{41} + n_{212}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}G_{41}^2 + \\ & + n_{220}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^2 + n_{221}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^2G_{41} + n_{222}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^2G_{41}^2 + n_{230}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^3 + \\ & + n_{231}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^3G_{41} + n_{240}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^4 + n_{302}^{ij}(u)G_{21}^3G_{41}^2 + n_{311}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31}G_{41} + \\ & + n_{312}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31}G_{41}^2 + n_{320}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31}^2 + n_{321}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31}^2G_{41} + n_{330}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31}^3 + \\ & + n_{402}^{ij}(u)G_{21}^4G_{41}^2 + n_{411}^{ij}(u)G_{21}^4G_{31}G_{41} + n_{420}^{ij}(u)G_{21}^4G_{31}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что $L_{12}(u) = (1 - 2\nu_1)L_{22}(u)/2$. Функции $n_{klm}^{ij}(u)$ получены в явном виде, содержат гиперболические и степенные функции аргумента, зависят только от коэффициентов Пуассона и относительных толщин слоев $H_2 = h_2/h_1$, $H_3 = h_3/h_1$. Здесь функции $n_{klm}^{ij}(u)$ не приводятся из-за громоздкости, но их вид позволяет изучить основные свойства трансформант (3) ядер интегрального уравнения, а именно: поведение в нуле и на бесконечности.

$$L_1(u)/u = A_{-1}u^{-1} + A_0 + O(u)(u \rightarrow 0), \quad L_1(u) = 1 \quad (u \rightarrow \infty),$$

$$A_{-1} = \frac{1 - \nu_4}{G_{41}(1 - \nu_1)}, \quad A_0 = \frac{n_1}{d_1},$$

$$L_2(u)/u = B_{-1}u^{-1} + B_0 + O(u)(u \rightarrow 0), \quad L_2(u) = 1 \quad (u \rightarrow \infty),$$

$$B_{-1} = -\frac{1 - 2\nu_4}{G_{41}(1 - 2\nu_1)}, \quad B_0 = \frac{-2(1 - \nu_4)n_2}{d_2},$$

$$d_1 = 2G_{21}G_{31}G_{41}^2(1 - \nu_1)^2(1 - \nu_2)(1 - \nu_3),$$

$$\begin{aligned} n_1 = & n_{012}G_{31}G_{41}^2 + n_{102}G_{21}G_{41}^2 + n_{110}G_{21}G_{31} + n_{111}G_{21}G_{31}G_{41} + n_{112}G_{21}G_{31}G_{41}^2 + \\ & + n_{120}G_{21}G_{31}, \quad n_{012} = H_2(1 - \nu_1)(1 - \nu_3)(1 - 2\nu_2), \end{aligned}$$

$$n_{102} = H_3(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)(1 - 2\nu_3), \quad n_{110} = (1 - \nu_2)(1 - \nu_3)(1 - 2\nu_4)^2,$$

$$n_{111} = -2(1 - 2\nu_4)[H_3\nu_3(1 - \nu_1)(1 - \nu_2) + H_2\nu_2(1 - \nu_1)(1 - \nu_3) + \nu_1(1 - \nu_2)(1 - \nu_3)],$$

$$\begin{aligned}
n_{112} &= (1 - 2\nu_1)(1 - \nu_3)(1 - \nu_2), \quad n_{120} = -H_3(1 - 2\nu_4)^2(1 - \nu_1)(1 - \nu_2), \\
d_2 &= G_{41}^2(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_3)(1 - \nu_2)(1 - \nu_1), \\
n_2 &= -G_{21}H_2(1 - 2\nu_4)(1 - \nu_3)(1 - \nu_1) - G_{31}H_3(1 - 2\nu_4)(1 - \nu_2)(1 - \nu_1) + \\
&+ G_{41} [H_2(1 - \nu_3)(1 - 2\nu_2)(1 - \nu_1) + H_3(1 - 2\nu_3)(1 - \nu_2)(1 - \nu_1) + \\
&+ (1 - \nu_3)(1 - \nu_2)(1 - 2\nu_1)], \quad H_2 = h_2/h_1, \quad H_3 = h_3/h_1.
\end{aligned}$$

Отметим, что при $G_{41} \rightarrow \infty$ $B_{-1} \rightarrow 0$, $B_0 \rightarrow 0$, а A_0 примет более простой вид

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{n_{01}G_{31} + n_{10}G_{21} + n_{11}G_{21}G_{31}}{2G_{21}G_{31}(1 - \nu_1)^2(1 - \nu_2)(1 - \nu_3)}, \quad n_{01} = H_2(1 - \nu_1)(1 - \nu_3)(1 - 2\nu_2), \\
n_{10} &= H_3(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)(1 - 2\nu_3), \quad n_{11} = (1 - \nu_2)(1 - \nu_3)(1 - 2\nu_1),
\end{aligned}$$

что совпадает с известным результатом [1].

Формулы (4) позволяет путем предельных переходов при $G_{41} \rightarrow \infty$ прийти к задаче для трех слоев на жестком основании. Также аналогично выполняется предельный переход к двум слоям и одному слою на жестком основании. Если положить $G_{i1} = 1$ ($i=1, 2, 3$), $G_4 = \infty$, $\nu_2 = \nu_1$, $\nu_3 = \nu_1$, $\nu_4 = \nu_1$, получим хорошо изученную задачу для одного слоя толщины $h_1 + h_2 + h_3$ [2]. Отметим, что для задачи 2 естественно считать, что $b = a$.

В случае задачи для трех слоев, жестко соединенных с недеформируемым основанием функции $L_{ij}(u)$ ($i = 1, 2$) принимают более простой вид

$$\begin{aligned}
L_{ij}(u) &= n_{02}^{ij}(u)G_{31}^2 + n_{11}^{ij}(u)G_{21}G_{31} + n_{12}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^2 + n_{20}^{ij}(u)G_{21}^2 + \\
&+ n_{21}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31} + n_{22}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^2 + n_{30}^{ij}(u)G_{21}^3 + n_{31}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31} + n_{40}^{ij}(u)G_{21}^4 \quad (5)
\end{aligned}$$

Приведем здесь некоторые выражения функций $n_{km}^{ij}(u)$, имеющих наиболее простую структуру, другие функции $n_{km}^{ij}(u)$ не представляется возможным привести в рамках этой статьи

$$\begin{aligned}
n_{02}^{11}(u) &= 16(2u + sh2u)m_{02}(u), \\
n_{12}^{11}(u) &= -8[a_{42}sh2u - a_{04}sh2u(1 - H_2) - a_{00}sh2u(1 + H_2) + \\
&+ a_{20}ch2uH_2 + a_{22}/2]m_{12}(u), \quad a_{42} = -2\eta_1(2u^2H_2^2 + \gamma_2), \quad a_{20} = -4u\kappa_2\eta_2, \\
a_{04} &= \kappa_2\kappa_{12}, \quad a_{00} = -\kappa_2\beta_{12}, \quad a_{22} = u(2u^2H_2^2 - 4H_2\eta_{12} + \gamma_2), \\
n_{22}^{11}(u) &= 8(2u - \kappa_1sh2u)m_{22}(u), \\
n_{02}^{21}(u) &= 16[\eta_1(ch2u - 1) + 2u^2]m_{02}(u), \\
n_{12}^{21}(u) &= 4[c_{44}ch2u(1 + H_2) + c_{04}ch2uH_2 + c_{42}ch2u(1 - H_2) + \\
&+ c_{04}ch2u + c_{22}]m_{12}(u), \quad c_{44} = -\kappa_2\eta_1\beta_{12}, \quad c_{04} = 2\eta_2^2(2u^2H_2^2 + \gamma_2), \\
c_{42} &= \gamma_2\kappa_{12}, \quad c_{40} = 2\gamma_2(2u^2 - \kappa_1), \\
c_{22} &= -8u^4H_2^2 + 4u^2(\kappa_1H_2^2 + 8\eta_{12}H_2 - \gamma_2) + 2\gamma_2\kappa_1, \\
n_{22}^{21} &= 8[\gamma_1(ch2u - 1) - 2u^2]m_{22}(u), \quad n_{02}^{12}(u) = n_{02}^{22}(u) = 32(u^2 - sh^2u)m_{02}(u),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{12}^{12}(u) &= n_{12}^{22}(u) = 8(b_{44}ch2u(1 + H_2) + b_{42}ch2u + b_{40}ch2u(1 - H_2) + \\
&+ b_{24}ch2uH_2 + b_{22}/2)m_{12}(u), \quad b_{44} = -\kappa_2\gamma_{12}, \quad b_{42} = 2\eta_1(2u^2H_2^2 + \gamma_2), \\
&b_{40} = \kappa_2\kappa_{12}, \quad b_{24} = -2\eta_2\kappa_2(2u^2 - \eta_1), \\
b_{22} &= 16u^4H_2^2 - u^2(8H_2^2\eta_1 + 64H_2\eta_{12} - 8\gamma_2) - 4\eta_1\gamma_2, \\
n_{22}^{12}(u) &= n_{22}^{22}(u) = -8(2u^2 + \kappa_1ch2u + \beta_1)m_{22}(u), \\
m_{02}(u) &= (\kappa_2^2sh^2uH_2 - u^2H_2^2)m_{12}(u), \quad m_{12}(u) = 2u^2H_3^2 + \kappa_3ch2uH_3 + \beta_3, \\
m_{22}(u) &= (2u^2H_2^2 + \kappa_2^c h2uH_2 + \beta_2)m_{12}(u).
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\beta_i &= 8\nu_i^2 - 12\nu_i + 5, \quad \beta_{ij} = 8\nu_i\nu_j - 6(\nu_i + \nu_j) + 5, \quad \gamma_i = 8\nu_i^2 - 10\nu_i + 3 = \kappa_i\eta_i, \\
\eta_i &= 1 - 2\nu_i \quad \eta_{ij} = (1 - \nu_i)(1 - \nu_j), \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i, \quad \kappa_{ij} = 3 - 2\nu_i - 2\nu_j.
\end{aligned}$$

Видим, что функции $n_{km}^{i1}(u)$, $n_{km}^{i2}(u)$ с одинаковыми нижними индексами имеют одинаковые функции-множители $m_{02}(u)$, $m_{12}(u)$, $m_{22}(u)$, что позволяет легко проследить отмеченный выше последовательный предельный переход при $G_{31} \rightarrow \infty$ и $G_{21} \rightarrow \infty$ и получить ранее известные соотношения [2].

Ядро ИУ (2) имеет логарифмическую особенность и для случая $G_4 = \infty$ его решение получено коллокаций [3].

Для решения интегрального уравнения (2) пространственной задачи использован метод нелинейных граничных уравнений типа Гаммерштейна [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 09-08-01195, 11-08-00909).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иваночкин П. Г., Колесников В. И., Флек Б. Н., Чебаков М. И. Контактная прочность двухслойного покрытия при наличии сил трения в области контакта // Изв. РАН, МТТ. 2007. № 1. С. 183–192.
- [2] Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
- [3] Воронин В. В., Цецецо В. А. Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т. 21. № 1. С. 40–53.
- [4] Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач в случае неизвестных областей контакта // ПММ. Т. 40. Вып. 5. С. 827–835.

Chebakov M. I., Kolosova E. M. *Plane and three-dimensional contact problems for a three-layer base.* The plane and three-dimensional contact problem taking into account the friction forces for a three-layer elastic base, lying on hard ground or on an elastic half space is considered. It is assumed that the layers are rigidly connected to each other and with the half-space. It is also assumed that in the contact normal and tangential stresses associated Coulomb's law.

ВЫПУЧИВАНИЕ КРУГЛОЙ ПОРИСТОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ ПРИ РАДИАЛЬНОМ СЖАТИИ

Шейдаков Д. Н.^{*}, Шейдаков Н. Е.^{}**

^{*}Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

^{**}Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)

В рамках общей теории устойчивости трехмерных тел проведен анализ бифуркации равновесия при радиальном сжатии круглой плиты, состоящей из металлической или полимерной пены, покрытой жесткой оболочкой. Для описания поведения пены применяется модель континуума Коссера. Построены линеаризованные уравнения равновесия круглой трехслойной плиты. Показано, что при одинаковых верхнем и нижнем покрытиях существует два независимых класса решений данных уравнений. Путем численного решения линеаризованных уравнений равновесия для конкретного пористого материала и покрытий найдены спектры критических значений удельного радиального сжатия и соответствующие им моды выпучивания. Проанализирован размерный эффект и влияние свойств покрытий на потерю устойчивости трехслойных плит с пористой основой.

1. Равновесие трехслойной круглой плиты при радиальном сжатии.

Рассмотрим трехслойную круглую плиту радиуса r_1 и толщины H . Поведение пористой основы толщиной $2a$ описывается моделью микрополярного упругого тела. Верхнее покрытие толщиной h_+ и нижнее покрытие толщиной h_- выполнены из классических неполярных материалов. В случае радиального сжатия плиты положение частицы тела в деформированном состоянии определяется радиус-векторами $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{R}_-$ (здесь и далее, индексом '+' и '-' обозначены величины, относящиеся к верхнему и нижнему покрытиям, соответственно, без индексов '+', '-' — к пористой основе трехслойной плиты):

$$\begin{aligned} R &= \alpha r, & 0 \leq r \leq r_1 \\ \Phi &= \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}, \quad Z = \begin{cases} f_+(z), & a \leq z \leq a + h_+ \\ f(z), & |z| \leq a \\ f_-(z), & -(a + h_-) \leq z \leq -a \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_+ &= \alpha r \mathbf{e}_R + f_+(z) \mathbf{e}_Z, & a \leq z \leq a + h_+ \\ \mathbf{R} &= \alpha r \mathbf{e}_R + f(z) \mathbf{e}_Z, & |z| \leq a \\ \mathbf{R}_- &= \alpha r \mathbf{e}_R + f_-(z) \mathbf{e}_Z, & -(a + h_-) \leq z \leq -a \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты), R, Φ, Z — эйлеровы цилиндрические координаты, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ и $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$ — ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат, соответственно, α — коэффициент радиального сжатия, $f(z)$ и $f_\pm(z)$ — неизвестные функции, характеризующие толщинную деформацию плиты.

Кроме того, при $|z| \leq a$ задан собственно ортогональный тензор микроповорота $\mathbf{H}$, который характеризует поворот частицы микрополярной среды и при рассматриваемой деформации равен:

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z \quad (3)$$

Согласно выражениям (1), (2), градиенты деформации $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}_\pm$ равны (здесь и далее ' обозначает производную по z):

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_+ &= \text{grad } \mathbf{R}_+ = \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + f'_+ \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z, & a \leq z \leq a + h_+ \\ \mathbf{C} &= \text{grad } \mathbf{R} = \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + f'_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z, & |z| \leq a \\ \mathbf{C}_- &= \text{grad } \mathbf{R}_- = \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + f'_- \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z, & -(a + h_-) \leq z \leq -a\end{aligned}\quad (4)$$

где grad — градиент в лагранжевых координатах.

Из соотношений (3), (4) следует, что для микрополярной основы плиты ($|z| \leq a$) тензор изгибной деформации $\mathbf{L}$ равен нулю, а мера деформации типа Коши $\mathbf{Y}$ выражается следующим образом

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T = \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \alpha \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + f'_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (5)$$

Согласно (4), для верхнего ($a \leq z \leq a + h_+$) и нижнего ($-a - h_- \leq z \leq -a$) покрытий выражения меры искажения $\mathbf{U}_\pm$ и тензора макроповорота $\mathbf{A}_\pm$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_\pm &= (\mathbf{C}_\pm \cdot \mathbf{C}_\pm^T)^{\frac{1}{2}} = \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \alpha \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + f'_\pm \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \\ \mathbf{A}_\pm &= \mathbf{U}_\pm^{-1} \cdot \mathbf{C}_\pm = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z\end{aligned}\quad (6)$$

Будем считать, что упругие свойства плиты описываются моделью физически линейного материала, удельная потенциальная энергия деформации которого в случае микрополярного тела является квадратичной формой тензоров $\mathbf{Y} - \mathbf{E}$ и $\mathbf{L}$:

$$\begin{aligned}W(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) &= \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) + \frac{1}{2} (\mu + \kappa) \text{tr} \left((\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{E})^T \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \mu \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E})^2 + \frac{1}{2} \gamma_1 \text{tr}^2 \mathbf{L} + \frac{1}{2} \gamma_2 \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} \gamma_3 \text{tr} \mathbf{L}^2 \\ \mu + \kappa &> 0, \quad \lambda + 2\mu + \kappa > 0, \quad \gamma_2 \geq 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 > 0\end{aligned}\quad (7)$$

а в случае классического неполярного материала — квадратичной формой тензора $\mathbf{U}_\pm - \mathbf{E}$:

$$W_\pm(\mathbf{U}_\pm) = \frac{1}{2} \lambda_\pm \text{tr}^2(\mathbf{U}_\pm - \mathbf{E}) + \mu_\pm \text{tr}(\mathbf{U}_\pm - \mathbf{E})^2, \quad \mu_\pm > 0, \quad \lambda_\pm + 2\mu_\pm > 0 \quad (8)$$

Здесь λ, μ и $\lambda_\pm, \mu_\pm$ — константы Ляме основы и покрытий плиты, соответственно, $\kappa, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — микрополярные упругие константы, $\mathbf{E}$ — единичный тензор.

Из выражения (7) следует, что для пористой основы тензор моментных напряжений типа Пиолы $\mathbf{G}$ равен нулю при радиальном сжатии трехслойной плиты, а тензор напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}$ равен

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H} = (\lambda \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \mathbf{E} + \mu (\mathbf{Y}^T - \mathbf{E}) + (\mu + \kappa) (\mathbf{Y} - \mathbf{E})) \cdot \mathbf{H} \quad (9)$$

Согласно (8), выражения тензоров напряжений Пиолы $\mathbf{D}_\pm$ для покрытий имеют вид:

$$\mathbf{D}_\pm = \frac{\partial W_\pm}{\partial \mathbf{U}_\pm} \cdot \mathbf{A}_\pm = (\lambda_\pm \text{tr}(\mathbf{U}_\pm - \mathbf{E}) \mathbf{E} + 2\mu_\pm (\mathbf{U}_\pm - \mathbf{E})) \cdot \mathbf{A}_\pm \quad (10)$$

Уравнения равновесия нелинейной моментной теории упругости при отсутствии массовых сил и моментов записываются следующим образом

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} = 0 \quad (11)$$

где div — дивергенция в лагранжевых координатах.

Уравнения равновесия классической (неполярной) нелинейной теории упругости при отсутствии массовых сил имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_{\pm} = 0 \quad (12)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_+|_{z=a+h_+} &= 0, & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_-|_{z=-(a+h_-)} &= 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_{\pm}|_{z=\pm a} &= \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}|_{z=\pm a}, & f_{\pm}(\pm a) &= f(\pm a), \quad f(0) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

выражают отсутствие внешних нагрузок на лицевых поверхностях трехслойной плиты, жесткое сцепление верхнего и нижнего покрытий с пористой основой, а также отсутствие вертикального смещения на плоскости $z = 0$.

Решая краевую задачу (11) – (13) с учетом соотношений (5), (6), (9), (10), находим неизвестные функции $f(z)$ и $f_{\pm}(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha_3 z, & f_+(z) &= \alpha_3^+(z - a) + a\alpha_3, & f_-(z) &= \alpha_3^-(z + a) - a\alpha_3 \\ \alpha_3 &= 1 + \frac{2\lambda(1-\alpha)}{\lambda+2\mu+\kappa}, & \alpha_3^{\pm} &= 1 + \frac{2\lambda_{\pm}(1-\alpha)}{\lambda_{\pm}+2\mu_{\pm}} \end{aligned}$$

2. Возмущенное состояние. Предположим, что помимо описанного выше состояния равновесия трехслойной плиты при тех же внешних нагрузках существует бесконечно близкое равновесное состояние, определяемое: для микрополярной основы — радиус-вектором $\mathbf{R} + \eta \mathbf{v}$, и тензором микроповорота $\mathbf{H} - \eta \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$; для покрытий — радиус-векторами $\mathbf{R}_{\pm} + \eta \mathbf{v}_{\pm}$. Здесь η — малый параметр, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_{\pm}$ — вектора добавочных перемещений, $\boldsymbol{\omega}$ — линейный вектор добавочного поворота, характеризующий малый поворот частиц микрополярной среды, отсчитываемый от начального деформированного состояния.

Возмущенное состояние равновесия микрополярной среды описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}^{\bullet} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{G}^{\bullet} + [\operatorname{grad} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D}^{\bullet}]_{\times} &= 0 \\ \mathbf{D}^{\bullet} &= (\lambda (\operatorname{tr} \mathbf{Y}^{\bullet}) \mathbf{E} + (\mu + \kappa) \mathbf{Y}^{\bullet} + \mu \mathbf{Y}^{\bullet T}) \cdot \mathbf{H} - \\ &- (\lambda \operatorname{tr} (\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \mathbf{E} + \mu (\mathbf{Y}^T - \mathbf{E}) + (\mu + \kappa) (\mathbf{Y} - \mathbf{E})) \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{G}^{\bullet} = (\gamma_1 (\operatorname{tr} \mathbf{L}^{\bullet}) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L}^{\bullet} + \gamma_3 \mathbf{L}^{\bullet T}) \cdot \mathbf{H} - (\gamma_1 (\operatorname{tr} \mathbf{L}) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L} + \gamma_3 \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{Y}^{\bullet} = (\operatorname{grad} \mathbf{v} + \mathbf{C} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L}^{\bullet} = \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}^T$$

Здесь $\mathbf{D}^{\bullet}$ и $\mathbf{G}^{\bullet}$ — линеаризованные тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, $\mathbf{Y}^{\bullet}$ — линеаризованная мера деформации типа Коши, $\mathbf{L}^{\bullet}$ — линеаризованный тензор изгибных деформаций.

Уравнения нейтрального равновесия в рамках неполярной нелинейной теории упругости имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_{\pm}^{\bullet} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\pm}^{\bullet} = & (\lambda_{\pm} \operatorname{tr} (\mathbf{U}_{\pm} - \mathbf{E}) \mathbf{E} + 2\mu_{\pm} (\mathbf{U}_{\pm} - \mathbf{E})) \cdot \mathbf{U}_{\pm}^{-1} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v}_{\pm} - \mathbf{U}_{\pm}^{\bullet} \cdot \mathbf{A}_{\pm}) + \\ & + (\lambda_{\pm} (\operatorname{tr} \mathbf{U}_{\pm}^{\bullet}) \mathbf{E} + 2\mu_{\pm} \mathbf{U}_{\pm}^{\bullet}) \cdot \mathbf{A}_{\pm} \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{D}_{\pm}^{\bullet}$ — линейризованные тензора напряжений Пиолы, $\mathbf{U}_{\pm}^{\bullet}$ — линейризованные меры искажения.

Линейризованные краевые условия на лицевых поверхностях трехслойной плиты и на границах раздела сред записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_{+}^{\bullet} \Big|_{z=a+h_{+}} &= 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_{-}^{\bullet} \Big|_{z=-(a+h_{-})} = 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_{\pm}^{\bullet} \Big|_{z=\pm a} &= \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \Big|_{z=\pm a}, \quad \mathbf{v}_{\pm} \Big|_{z=\pm a} = \mathbf{v} \Big|_{z=\pm a}, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{G}^{\bullet} \Big|_{z=\pm a} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Будем полагать, что на крае плиты ($r = r_1$) отсутствуют силы трения и задано постоянное нормальное перемещение. Это приводит к следующим линейризованным граничным условиям:

1) для пористой основы плиты:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_{\Phi} \Big|_{r=r_1} &= \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_Z \Big|_{r=r_1} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v} \Big|_{r=r_1} = 0 \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_R \Big|_{r=r_1} &= \mathbf{e}_{\varphi} \cdot \boldsymbol{\omega} \Big|_{r=r_1} = \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\omega} \Big|_{r=r_1} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

2) для верхнего и нижнего покрытий:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_{\pm}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_{\Phi} \Big|_{r=r_1} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_{\pm}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_Z \Big|_{r=r_1} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}_{\pm} \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (18)$$

Запишем представление векторов добавочных перемещений $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_{\pm}$, и добавочного поворота $\boldsymbol{\omega}$ в базисе эйлеровых координат:

$$\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_{\Phi} \mathbf{e}_{\Phi} + v_Z \mathbf{e}_Z, \quad \mathbf{v}_{\pm} = v_R^{\pm} \mathbf{e}_R + v_{\Phi}^{\pm} \mathbf{e}_{\Phi} + v_Z^{\pm} \mathbf{e}_Z, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_R \mathbf{e}_R + \omega_{\Phi} \mathbf{e}_{\Phi} + \omega_Z \mathbf{e}_Z$$

Выражения (14), (15), описывающие возмущенное состояние равновесия трехслойной плиты, представляют собой систему 12 уравнений в частных производных относительно 12 неизвестных функций трех переменных r, φ, z . Подстановка

$$\begin{aligned} v_R &= V_R(r, z) \cos n\varphi, & v_R^{\pm} &= V_R^{\pm}(r, z) \cos n\varphi, & \omega_R &= \Omega_R(r, z) \sin n\varphi \\ v_{\Phi} &= V_{\Phi}(r, z) \sin n\varphi, & v_{\Phi}^{\pm} &= V_{\Phi}^{\pm}(r, z) \sin n\varphi, & \omega_{\Phi} &= \Omega_{\Phi}(r, z) \cos n\varphi \\ v_Z &= V_Z(r, z) \cos n\varphi, & v_Z^{\pm} &= V_Z^{\pm}(r, z) \cos n\varphi, & \omega_Z &= \Omega_Z(r, z) \sin n\varphi \end{aligned}$$

приводит к отделению переменной φ в этих уравнениях, сводя исследование устойчивости к решению однородной краевой задачи (14)–(18) для системы 12 уравнений в частных производных относительно функций двух переменных r, z .

В частном случае осесимметричных возмущений ($n = 0$) использование более простой подстановки

$$\begin{aligned} v_R &= V_R(z) J_1(\beta r), & v_R^{\pm} &= V_R^{\pm}(z) J_1(\beta r), & \omega_R &= 0 \\ v_{\Phi} &= 0, & v_{\Phi}^{\pm} &= 0, & \omega_{\Phi} &= \Omega_{\Phi}(z) J_1(\beta r) \\ v_Z &= V_Z(z) J_0(\beta r), & v_Z^{\pm} &= V_Z^{\pm}(z) J_0(\beta r), & \omega_Z &= 0 \end{aligned}$$

$$\beta = \xi_m/r_1, \quad J_1(\xi_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

позволяет удовлетворить линеаризованным краевым условиям (17), (18) и свести исследование устойчивости к решению линейной однородной краевой задачи (14)–(16) для системы 7 обыкновенных дифференциальных уравнений.

Легко показать, что в случае одинаковых верхнего и нижнего покрытий ($h_+ = h_-$, $\lambda_+ = \lambda_-$, $\mu_+ = \mu_-$) краевая задача (14)–(16) имеет два независимых класса решений. **Первый класс** образован решениями, для которых прогиб плиты является нечетной функцией координаты z :

$$0 \leq z \leq a \quad \left\{ \begin{array}{l} V_R(z) = V_R(-z) \\ V_Z(z) = -V_Z(-z) \\ \Omega_\Phi(z) = -\Omega_\Phi(-z) \end{array} \right. ; \quad a \leq z \leq \frac{H}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_R^+(z) = V_R^-(z) \\ V_Z^+(z) = -V_Z^-(z) \end{array} \right.$$

Для решений **второго класса**, наоборот, прогиб — четная функция z :

$$0 \leq z \leq a \quad \left\{ \begin{array}{l} V_R(z) = -V_R(-z) \\ V_Z(z) = V_Z(-z) \\ \Omega_\Phi(z) = \Omega_\Phi(-z) \end{array} \right. ; \quad a \leq z \leq \frac{H}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_R^+(z) = -V_R^-(z) \\ V_Z^+(z) = V_Z^-(z) \end{array} \right.$$

Благодаря этому свойству краевой задачи (14)–(16), при исследовании устойчивости достаточно рассмотреть лишь верхнюю половину трехслойной плиты ($0 \leq z \leq H/2$). Из четности и нечетности функций V_R, V_Z, Ω_Φ по координате z следуют граничные условия при $z = 0$:

а) для **первого класса** решений:

$$V_R'(0) = V_Z(0) = \Omega_\Phi(0) = 0 \quad (19)$$

б) для **второго класса** решений:

$$V_R(0) = V_Z'(0) = \Omega_\Phi'(0) = 0 \quad (20)$$

Таким образом, в случае одинаковых верхнего и нижнего покрытий, исследование устойчивости трехслойной плиты сводится к решению двух линейных однородных краевых задач — (14)–(16), (19) и (14)–(16), (20) — для системы 5 обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (грант МК-6315.2010.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 09-01-00459-а и 11-08-01152-а).

Sheydakov D. N., Sheydakov N. E. *Buckling of circular porous sandwich plate subject to radial compression.* In the framework of a general stability theory for three-dimensional bodies the buckling analysis has been carried out for a circular sandwich plate subject to radial compression. The plate consists of a metallic or polymer foam layer, covered by a hard and stiff face sheets. To describe the behavior of a foam the Cosserat continuum model is used. The linearized equilibrium equations have been derived for a circular sandwich plate. By solving these equations numerically, for some specific materials the critical spectra of relative radial compression have been found. The size effect and influence of coating properties on the buckling of elastic sandwich plates with porous core has been analyzed.

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИАГРАММЫ СВОЙСТВ ЛИСТОВОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ФОРМОВКЕ КУПОЛА ИЗ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Юдин С. А., Юдин А. С., Беликов Н. В.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Для идентификации свойств листовых материалов используется теоретическое решение и некоторые измерения в технологическом процессе пластической вытяжки купола. Представлены экспериментальные данные, используемые для идентификации свойств листового материала теоретико-экспериментальным методом, и методика подбора параметров соответствующей аппроксимирующей кривой.

Применительно к задачам анализа прочности тонкостенных сварных сосудов, работающих под высоким внутренним давлением, технология испытаний листовых материалов развита в [1]. В ней приведено систематическое изложение вопросов прочности тонкостенных сосудов, используемых в современных летательных аппаратах и других транспортных установках. Уделено также внимание обобщению экспериментальных данных, а также формулированию конструкторских и технологических рекомендаций применительно к проектированию и изготовлению сварных тонкостенных сосудов. В представленной методике испытаний и технике замеров требуется получать информацию с тензодатчиков, контролировать изменение толщины пластинки в процессе вытяжки, замерять кривизну оболочки в вершине.

Для задач сверхпластической формовки в [2] предложена схема решения обратных задач идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов формовки оболочек простой геометрии (цилиндрических, сферических) в матрицах соответствующей формы на основе применения безмоментной теории оболочек. Проведение испытаний выполняется либо на производственном оборудовании, либо на специальных установках.

Современная технология формовки куполообразных хлопающих мембран включает этап свободной пластической вытяжки пластины гидростатическим давлением до, примерно, 85% от заданной высоты. Дальнейший процесс формовки купола растущим давлением выполняется с участием артифицирующей силы определённой величины.

График $p_э(H)$ «давление-высота подъёма» первого этапа можно использовать для идентификации диаграммы упрочнения материала листовой заготовки. Для этого решается аналогичная задача математического моделирования [3]. На основе сравнения теоретической $p_T(H)$ и экспериментальной $p_э(H)$ диаграмм корректируются координаты реперных точек степенной теоретической зависимости $\sigma(\bar{\epsilon})$ «напряжение-интенсивность деформаций» так, чтобы $p_T(H)$ и $p_э(H)$ были максимально сближены. Причём, вначале можно добиваться совпадения точек с наибольшей высотой подъёма. Как показывают численные эксперименты, уже

такой способ даёт результаты с достаточной точностью, поскольку неоднородность свойств листа даёт разбросы ординат $p_э(H)$ при повторяющихся экспериментах до $\pm 4 \div 5\%$. Оцифрованные данные $p_э(H)$ для выборочных восьми экспериментов из порядка 60 представлены в табл. 1. Данные получены на автоматизированной технологической установке «АСД-Мембрана», представленной в [3]. Параметры круговых пластин-заготовок были следующими: диаметр $D = 200$ мм; толщина заготовки $h_o = 0.3$ мм; температура испытаний $T^\circ = 20^\circ$. Конечная высота купола $H \geq 35$ мм. Для идентификации свойств достаточно высоты 30 мм. Материал — нержавеющая сталь 12X18H9, модуль Юнга $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа. Для изготовления и, следовательно, для испытаний могут также использоваться нержавейки типа 08X18H9, 12X18H10T, а также стали 10X13, 20X13, 30X13, монель-металл, латуни Л-62, Л-68, алюминий.

H	$p_{э1}(H)$	$p_{э2}(H)$	$p_{э3}(H)$	$p_{э4}(H)$	$p_{э5}(H)$	$p_{э6}(H)$	$p_{э7}(H)$	$p_{э8}(H)$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.5	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
2.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
3.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.03	0.04
3.5	0.06	0.06	0.05	0.07	0.07	0.06	0.05	0.07
4.5	0.11	0.11	0.10	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11
6.0	0.15	0.15	0.15	0.17	0.16	0.16	0.15	0.16
7.5	0.20	0.20	0.19	0.19	0.20	0.20	0.19	0.21
9.0	0.24	0.24	0.24	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
10.5	0.30	0.30	0.29	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
12.0	0.35	0.35	0.34	0.36	0.35	0.35	0.35	0.36
13.5	0.41	0.41	0.40	0.41	0.41	0.41	0.40	0.41
15.0	0.46	0.46	0.46	0.48	0.47	0.47	0.47	0.47
16.5	0.53	0.53	0.52	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53
18.0	0.58	0.58	0.57	0.59	0.59	0.59	0.58	0.59
19.5	0.65	0.65	0.64	0.66	0.65	0.66	0.65	0.66
21.0	0.71	0.71	0.71	0.73	0.73	0.72	0.72	0.73
22.5	0.79	0.78	0.78	0.80	0.80	0.80	0.78	0.80
24.0	0.85	0.85	0.85	0.87	0.87	0.86	0.86	0.87
25.5	0.93	0.92	0.92	0.95	0.94	0.93	0.93	0.94
27.0	1.01	1.00	1.00	1.02	1.01	1.01	1.00	1.02
28.5	1.08	1.07	1.07	1.09	1.09	1.08	1.08	1.09
30.0	1.16	1.15	1.16	1.18	1.17	1.17	1.16	1.18
31.5	1.24	1.25	1.25	1.26	1.25	1.26	1.24	1.26
33.0	1.32	1.32	1.32	1.34	1.34	1.33	1.32	1.34

Таблица 1.

Данные, приведённые в табл. 1, сняты с графиков, выдаваемых системой «АСД-Мембрана» с точностью 0.01 и шагом, достаточным для отражения вида кривых $p_э(H)$ — «давление-высота подъёма». При оцифровке наведением курсора

на кривую система выдает информацию о попадании на точку замера и её координаты с указанной выше точностью. Для примера, на рис. 1 показан вариант кривой вытяжки, соответствующий столбцу $p_{э1}(H)$ табл. 1.

Более обширная информация о снимаемых замерах (тысячи точек) содержится в файлах базы данных, собираемых системой автоматизированного съёма информации. В таблице 1 столбцам соответствуют файлы базы АСД: $p_{э1}(H)$ – *bel1.MD*, $p_{э2}(H)$ – *bel10.MD*, $p_{э3}(H)$ – *bel11.MD*, $p_{э4}(H)$ – *bel12.MD*, $p_{э5}(H)$ – *bel13.MD*, $p_{э6}(H)$ – *bel14.MD*, $p_{э7}(H)$ – *bel15.MD*, $p_{э8}(H)$ – *bel16.MD*.

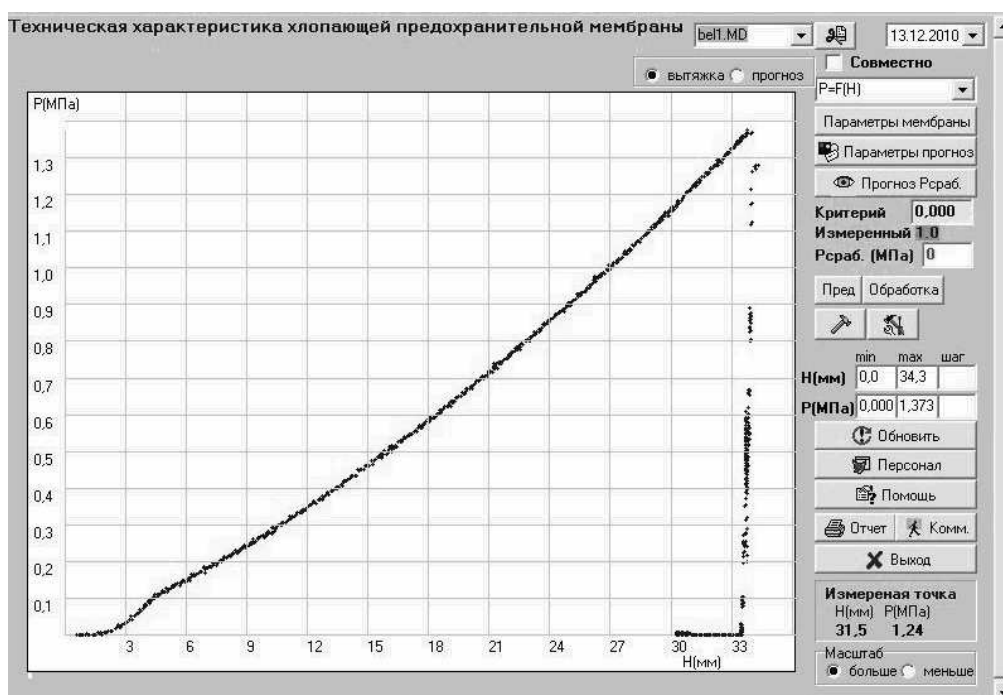


Рис. 1.

Например, текстовый файл *bel1.MD* содержит 1618 строк данных. После выполнения прореживания этого массива информация передается в интегрированный пакет MathCad для обработки, где текстовый файл преобразуется в матрицу. На основе матрицы можно строить графики и аппроксимирующие кривые.

Таким образом, на основе технологии пластической формовки и полученного теоретического решения задачи способом пластической вытяжки куполообразной оболочки из круглой пластинки, защемлённой на внешнем контуре, можно реализовать метод идентификации пластической диаграммы материала. Метод апробирован для металлов и даёт возможность существенно упростить испытания. В нём нет необходимости в тензометрировании, поскольку достаточно иметь только зависимости, связывающие формообразующее давление с перемещением вершины купола. Эти связи сопоставляются с теоретической моделью [3], в которой определяются все деформационные характеристики. В этой модели применяется моментная теория для больших нелинейных деформаций. По минимизации отклонений экспериментальной и теоретической кривых нагружения подбираются параметры аппроксимации диаграммы свойств материала, рис. 2.

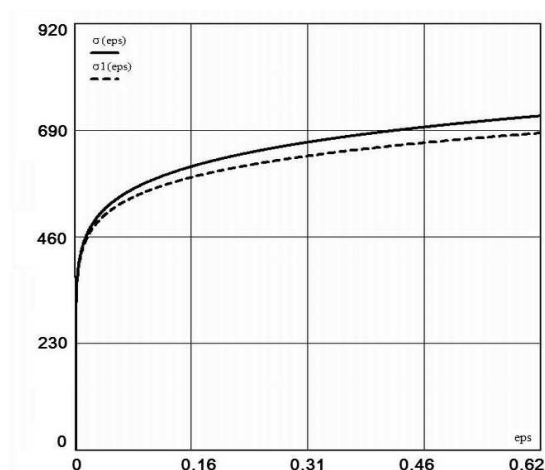


Рис. 2.

Более того, поскольку при достаточно сильной вытяжке интенсивность деформаций по меридиану получаемого купола меняется от нуля на контуре защемления до некоторого максимального значения в вершине, достаточно сравнивать и приводить к совпадению экспериментальную и теоретическую высоту подъёма оболочки. Поэтому в испытаниях достаточно замерять только высоту сегмента и соответствующее ей давление вытяжки. Далее выполняется математическое моделирование, основанное на полуаналитическом способе построения решения. Варьируя значения параметра материала σ_B (сигма временное), можно добиться совпадения теоретической и экспериментальной высот купола при одном и том же давлении. Значение σ_B , которое это обеспечивает, и является уточнённым параметром степенной аппроксимации кривой пластических свойств материала.

Такая идентификация свойств материала проверена в задаче формовки армированных оболочек и позволила улучшить согласование теории и эксперимента с 3% до 1.5%.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Куркин, С. А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением: монография. М: Машиностроение, 1976. 184 с.
- [2] Васин, Р. А. Об идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов // Изв. РАН. Мех. тв. тела. 2003. № 2. С. 111–123.
- [3] Юдин, А. С. Устойчивость и колебания конструктивно-анизотропных и армированных оболочек вращения: монография. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2011. 362 с.

Yudin S. A., Yudin A. S., Belikov N. V. *About identification of the diagram of sheet material properties at forming domes from a circular plate.* For identification of properties of sheet materials the theoretical decision and some measurements in technological process of a plastic extension of a dome is used. The experimental data used for identification of properties of a sheet material and a technique of parameters selection of a corresponding approximating curve are presented.

ON EIGEN-FREQUENCIES OF AN ELASTIC BODY WITH SURFACE STRESSES

Altenbach H. ^{*}, Eremeyev V. A. ^{,***}, Lebedev L. P. ^{**,****}**

^{}Otto von Guericke University, Magdeburg*

*^{**}South Federal University, Rostov-na-Donu*

*^{***}South Scientific Center of RASci, Rostov-na-Donu*

*^{****}Universidad Nacional de Colombia, Colombia*

Following [1, 2] a mathematical investigation of the eigenvalue problems for elastic bodies including surface stresses is presented. Weak setup of the problems is based on the Rayleigh variational principle. Certain spectral properties are established for the problems under consideration. In particular, bounds for the eigenfrequencies of an elastic body with surface stresses are presented. These bounds demonstrate increases in both the rigidity of the body and of the eigenfrequencies over those of the body with surface stresses neglected.

1. Basic relations of linear elasticity with surface stresses. Suppose an elastic body occupies a bounded volume $V \subset \mathbb{R}^3$ with a piecewise smooth boundary Ω . We consider a problem with mixed boundary conditions. Let a nonempty portion Ω_1 of Ω be fixed so that the displacement $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ at each point of Ω_1 . Surface stresses $\boldsymbol{\tau}$ act over the remainder of the boundary $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$. The initial-boundary value problem is given by the relations

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in V, \quad \mathbf{u}|_{\Omega_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_2} = \nabla_S \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress tensor, ∇ is the three-dimensional nabla operator, ρ is the material density, $\mathbf{n}$ is the exterior unit normal to Ω , $\boldsymbol{\tau}$ is the surface stress tensor, $\nabla_S = \nabla - \mathbf{n} \partial / \partial z$ is the surface nabla operator, and z is the coordinate along $\mathbf{n}$. An overdot denotes differentiation with respect to time t . The dot symbol “.” between variables stands for the dot product in $\mathbb{R}^3$. For simplicity, we consider a homogeneous boundary value problem without volume forces or external surface forces.

In the case of an isotropic material, equations (1) should be supplemented as follows. Inside V we require

$$W = W(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \equiv 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \mathbf{I} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (3)$$

where W is the bulk strain energy density, $\boldsymbol{\varepsilon}$ is the volume strain tensor, λ, μ are Lamé's moduli for the bulk material, and the symbol “:” stands for the inner product in the space of second order tensors. Because the displacement vector for points of Ω is the continuation of $\mathbf{u}$ in the volume, it is also denoted by $\mathbf{u}$. On Ω_2 we require

$$U = U(\boldsymbol{\epsilon}) \equiv \frac{1}{2} \lambda_s \text{str}^2 \boldsymbol{\epsilon} + \mu_s \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \equiv 2\mu_S \boldsymbol{\epsilon} + \lambda_S \mathbf{A} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} (\nabla_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla_S \mathbf{u})^T), \quad (5)$$

where U is the surface strain energy density, $\boldsymbol{\epsilon}$ is the surface strain tensor, $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ is the surface unit tensor, $\mathbf{I}$ is the three-dimensional unit tensor, and λ_S, μ_S are the surface elastic Lamé's moduli.

When $\lambda_S = \mu_S = 0$, equations (1) reduce to the mixed boundary value problem of classical linear elasticity:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in V; \quad \mathbf{u}|_{\Omega_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_2} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

When $\lambda_S, \mu_S \rightarrow \infty$, because $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ on the boundary of Ω_2 , equations (1) reduce to the dynamic equations of classical elasticity for a body with fixed boundary:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in V; \quad \mathbf{u}|_{\Omega} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

These relations for the problems allow us to compare their ordered sets of eigenfrequencies.

Let us seek the displacement field in the form $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$. Equations (1) reduce to

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\rho \omega^2 \mathbf{w}, \quad \mathbf{x} \in V; \quad \mathbf{w}|_{\Omega_1} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla_S \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\Omega_2} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

These, when supplemented with the appropriately transformed relations (2)–(5), constitute the eigenfrequency problem for a body V with surface stresses. We refer to it as *Problem P_{ss}* .

The spectrum of Problem P_{ss} will be compared with the spectra of two problems obtained by substituting $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$ into (6) and (7). For (6), the eigenoscillation equations are

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\rho \omega^2 \mathbf{w}, \quad \mathbf{x} \in V; \quad \mathbf{w}|_{\Omega_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_2} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Supplemented with the correspondingly transformed relations (3), they constitute *Problem P_f* . Finally, the equations

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\rho \omega^2 \mathbf{w}, \quad \mathbf{x} \in V; \quad \mathbf{w}|_{\Omega} = \mathbf{0} \quad (10)$$

supplemented with the correspondingly transformed relations (3), constitute eigenfrequency *Problem P_0* for a body V with fixed boundary.

Note that the operators of the boundary value problems for elastic bodies with surface stresses have properties similar to those for the operators of linear elasticity; these are well established. Weak setup of boundary value problems in the theory of elasticity with surface stresses is studied in [1].

2. The least eigenfrequency. The estimation of the least eigenfrequency is an important problem in engineering. For solids with surface stresses, the eigenvalue Problem P_{ss} can be formulated using Rayleigh's variational principle [1].

The properties of the considered functional spaces and functionals allow us to prove the following

Theorem 1. *The least eigenfrequency of a bounded elastic body with surface stresses (Problem P_{ss}) is no less than the least eigenfrequency for the same body with free boundary Ω_2 (Problem P_f), and it is no greater than the least eigenfrequency for the same body with fixed boundary (Problem P_0):*

$$\omega_{\min}^f \leq \omega_{\min} \leq \omega_{\min}^\circ. \quad (11)$$

Two results follow from Theorem 1.

Corollary 1. *The equality $\omega_{\min} = \omega_{\min}^f$ holds if and only if $U(\epsilon(\mathbf{w}_{\min})) = 0$ on Ω_2 .*

By positive definiteness, $U = 0$ if and only if $\epsilon(\mathbf{w}_{\min}) = \mathbf{0}$ on Ω_2 . Hence the displacement $\mathbf{w}_{\min}$ of Ω_2 describes an infinitesimal isometric deformation of Ω_2 . In particular, $\epsilon = \mathbf{0}$ if $\mathbf{w}_{\min}$ describes a rigid body motion.

Corollary 2. *The equality $\omega_{\min} = \omega_{\min}^\circ$ holds if and only if $\mathbf{w}_{\min} = \mathbf{0}$ on Ω_2 , which is when $\mathbf{w}_{\min} \in \mathbf{H}_0$.*

Cases when $\epsilon(\mathbf{w}_{\min}) = \mathbf{0}$ or $\mathbf{w}_{\min} = \mathbf{0}$ on Ω_2 should be rare for an elastic body of general shape and with general boundary conditions. Hence, in general we can expect the strict inequalities $\omega_{\min}^f < \omega_{\min} < \omega_{\min}^\circ$. This extends the inequality $\omega_{\min}^f < \omega_{\min}^\circ$, well known in the theory of elasticity and mathematical physics.

The least eigenfrequency $\omega_{\min}$ depends on λ_S and μ_S . An increase in the surface elastic moduli implies an increase in the least eigenfrequency of Problem P_{ss} . Indeed, let us consider two bodies of equal shape and equal internal moduli λ and μ , but with different values of λ_S and μ_S . Denote the surface moduli of the bodies by $\lambda_S^{(1)}, \mu_S^{(1)}$ and $\lambda_S^{(2)}, \mu_S^{(2)}$, respectively. Denote the least eigenfrequencies of the bodies by $\omega_{\min}^{(1)}$ and $\omega_{\min}^{(2)}$, respectively.

Theorem 2. *Let $0 < \mu_S^{(1)} \leq \mu_S^{(2)}$, $0 < \lambda_S^{(1)} + \mu_S^{(1)} \leq \lambda_S^{(2)} + \mu_S^{(2)}$. Then*

$$\omega_{\min}^{(1)} \leq \omega_{\min}^{(2)}. \quad (12)$$

The least eigenfrequency depends continuously on the values of λ_S and μ_S .

Theorem 3. *For any number $\varepsilon > 0$, there exists a number $\delta > 0$ such that $|\omega_{\min}^{(1)} - \omega_{\min}^{(2)}| \leq \varepsilon$ whenever $|\mu_S^{(1)} - \mu_S^{(2)}| \leq \delta$ and $|\lambda_S^{(1)} - \lambda_S^{(2)}| \leq \delta$.*

From Theorem 3 we get an important conclusions.

Corollary 3. *The least eigenfrequency of a bounded elastic body with surface stresses tends to the least eigenfrequency for the same body with free boundary Ω_2 :*

$$\omega_{\min} \rightarrow \omega_{\min}^f \quad \text{as } \lambda_S \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \mu_S \rightarrow 0.$$

Note that Theorems 1–3 are valid when λ_S and μ_S are piecewise continuous on Ω_2 . In other words, they hold true for a body with nonhomogeneous surface properties.

3. Higher eigenfrequencies. The three eigenvalue Problems P_{ss} , P_f , and P_0 have discrete spectra, and the eigenmodes constitute complete orthogonal sets in the corresponding energy spaces and in the space $(L^2(V))^3$. The eigenfrequencies of these problems can be compared using Courant's minimax principle. We prove

Theorem 4. Let ω_k be eigenfrequencies of a bounded elastic body with surface stresses enumerated in increasing order as $\omega_0 \leq \omega_1 \leq \omega_2, \dots$, and let ω_k^f and ω_k° be correspondingly ordered eigenfrequencies of the elastic body with free boundary Ω_2 and with fixed boundary, respectively. Then

$$\omega_k^f \leq \omega_k \leq \omega_k^\circ, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Theorem 5. Let $\omega_k^{(1)}$ be eigenfrequencies of a bounded elastic body with moduli λ, μ and surface elastic moduli $\lambda_S^{(1)}, \mu_S^{(1)}$, ordered as $\omega_0^{(1)} \leq \omega_1^{(1)} \leq \omega_2^{(1)}, \dots$. Let $\omega_k^{(2)}$ be the ordered eigenfrequencies for the elastic body with moduli λ, μ but with surface moduli $\lambda_S^{(2)}, \mu_S^{(2)}$. Let $\mu_S^{(1)} \leq \mu_S^{(2)}$, $\lambda_S^{(1)} + \mu_S^{(1)} \leq \lambda_S^{(2)} + \mu_S^{(2)}$. Then $\omega_k^{(1)} \leq \omega_k^{(2)}$ for $k = 1, 2, 3, \dots$.

Theorems 1–5 can be proved for more general boundary conditions on Ω_1 . For example, they hold true for boundary conditions of the form

$$\mathbf{w}|_{\Omega_1^{(1)}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_1^{(2)}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}|_{\Omega_1^{(3)}} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})|_{\Omega_1^{(3)}} = \mathbf{0},$$

where $\Omega_1 = \Omega_1^{(1)} \cup \Omega_1^{(2)} \cup \Omega_1^{(3)}$, $\Omega_1^{(1)} \cap \Omega_1^{(2)} = \emptyset$, and $\Omega_1^{(2)} \cap \Omega_1^{(3)} = \emptyset$.

These theorems can also be proved when $\Omega_1 = \emptyset$, i.e., when Problems P_f and P_{ss} are formulated for a body free from geometrical constraints. In this case the first six eigenfrequencies are equal to zero, and the corresponding eigenmodes constitute the basis for the translations and rotations of a rigid body.

4. Radial oscillations of an elastic sphere with surface stresses. To illustrate the spectral properties of Problems P_{ss} , P_f , and P_0 , we consider the oscillations of an elastic sphere — a problem that admits analytical solution.

For simplicity we introduce the normalized eigenfrequency η by $\eta^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}$. For Problem P_{ss} , the dependencies of η_k on α are given in Fig. 1, where $\alpha = 4(\lambda_S + \mu_S)/\mu a$ is a dimensionless parameter, a is the radius of the sphere. Here the dashed and stroke-dashed lines correspond to η_k^f and η_k° for Problems P_f and P_0 , respectively. Note that $\alpha \rightarrow 0$ as $a \rightarrow \infty$, while $\alpha \rightarrow \infty$ as $a \rightarrow 0$. With the given elastic moduli, the eigenfrequency depends on a , which is a so-called size effect. It follows that $\eta_k = \eta_k^f$ when $\alpha = 0$ and $\eta_k \rightarrow \eta_k^\circ$ when $\alpha \rightarrow \infty$. Thus, the bounds (13) cannot be strengthened, in general.

Conclusions. We established lower and upper bounds for the eigenfrequencies of an elastic body with surface stresses. These bounds cannot be improved. For the k th eigenfrequency, the lower bound is the k th eigenfrequency of the same body with free boundary, while the upper bound is the k th eigenfrequency of the same body with fixed boundary (the eigenfrequencies are numbered in increasing order, taking into account multiplicity of the modes). An increase in the values of surface elastic moduli implies an increase in the eigenfrequencies. The proof is based on Rayleigh's minimal principle and Courant's maximum-minimum principle.

The increase in the eigenfrequencies for the elastic body with surface stresses, in comparison with the same body with free boundary, can be interpreted as the increase in the stiffness. This conclusion coincides qualitatively with the results for nano-porous

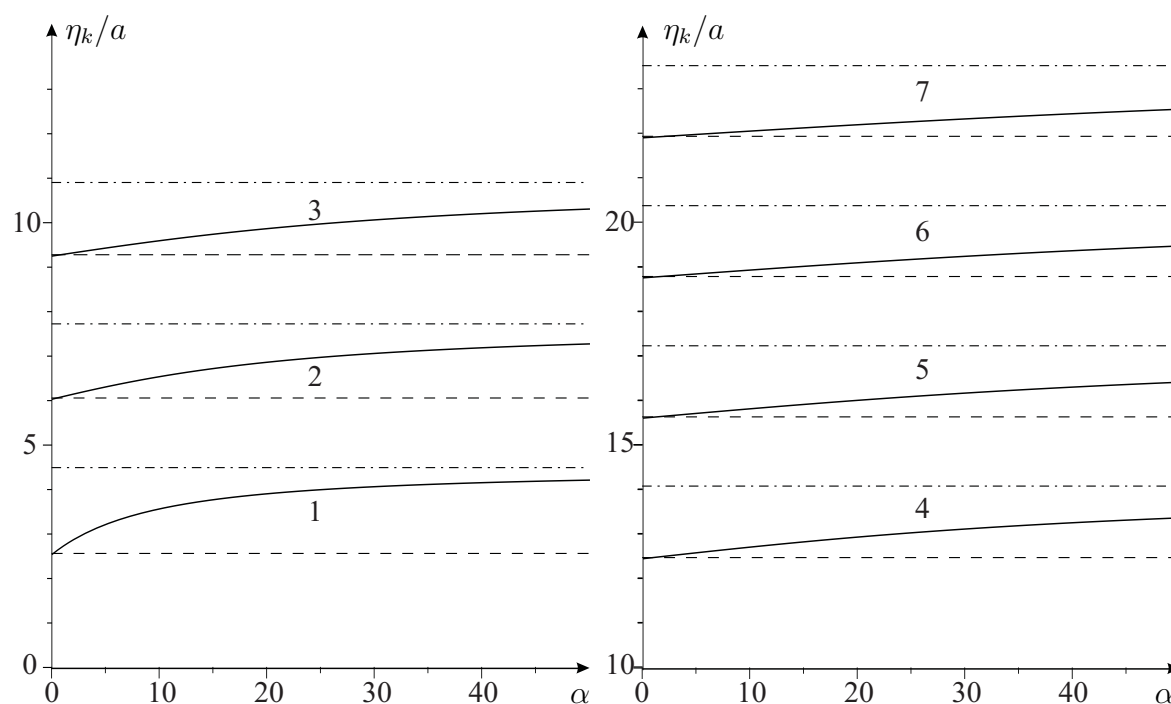


Рис. 1. Dependencies of the normalized eigenfrequencies η_k on α for $k = 1, 2, \dots, 7$.

or nano-cellular media, and with the increase in stiffness parameters of nanosized plates and shells. The influence of the surface elasticity is more significant for higher eigenfrequencies and for bodies with surface imperfections. The stiffening effect is also more significant when the body sizes decrease, i.e., for nano-sized bodies.

The second author was supported by DFG grant No. AL 341/33-1 and by the RFBR under grant No. 09-01-00459.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Altenbach H., Eremeyev V. A., Lebedev L. P. On the existence of solution in the linear elasticity with surface stresses // ZAMM. 2010. Vol. 90. № 7. Pp. 535–536.
- [2] Altenbach H., Eremeyev V. A., Lebedev L. P. On the spectrum and stiffness of an elastic body with surface stresses // ZAMM. 2011. Vol. 91 № 9. Pp. 699–710.

Альтенбах Х., Еремеев В.А., Лебедев Л.П. *О собственных частотах упругого тела с поверхностными напряжениями.* Проведено исследование спектра собственных частот для упругого тела при учете поверхностных напряжений. Слабая постановка задачи использует вариационный принцип Рэля. Установлены свойства спектра. В частности, даны оценки для собственных частот, которые демонстрируют повышение жесткости упругого тела с поверхностными напряжениями по сравнению с таким же упругим телом, не обладающим свойствами поверхностной упругости.

STEADY STREAMING BETWEEN TWO VIBRATING PLANES AT HIGH REYNOLDS NUMBERS

Morgulis A. B.^{*,}, Ilin K. I.^{***}**

^{}Southern Federal University, Rostov-na-Donu*

*^{**}Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz*

*^{***}The University of York*

We consider the incompressible flows in a gap between two walls driven by the periodical deforming of the walls. Such driving gives rise to the steady streaming (steady mean flows) which are in the focus of our study. Our approach involves the asymptotic integration of the Navier–Stokes system in the case when both the wall displacements and the thickness of the Stokes layer are small but of the same order of magnitude. We employ Vishik–Lyusternik technique and apply it directly to the variable flow domain.

The present communication is very brief version of E-print [21].

Consider the viscous incompressible and homogeneous flows in a gap between two walls driven by the periodical deforming of the walls. The flow parameters are the amplitude and frequency of the deforming, the mean distance between the walls and the kinematic viscosity of the fluid. They are denoted as a , ω , d and ν^* respectively. There are two dimensionless parameters

$$\varepsilon = a/d = V_0^*/\omega d, \quad R_s = V_0^{*2}/\omega \nu^* \quad (1)$$

where $V_0^* = \omega a$ is the amplitude of the velocity of the wall. The present paper deals with the flow regimes with $R_s \sim 1$, $\varepsilon \ll 1$. Note that R_s/ε is nothing more than the standard Reynolds number $R = V_0^* d/\nu^*$ which is great, therefore.

The vibrations of the walls gives rise to the steady mean flows that are widely known as the steady streaming. Most classical flows (e.g. induced by the oscillating rigid sphere or by the surface waves) were treated by many authors in a wide range of R_s [1–10]). The considerations of the deforming walls relates to the theory of the peristaltic flows (see e.g. [11–17]). As far as we know, the preceding research in this area was restricted to small R_s while the case $R_s \sim 1$ has not been treated before. Our treatment employs the asymptotic solution for $\varepsilon \rightarrow +0$ which we construct with the use of the Vishik–Lyusternik technique. In some respects our construction resembles that of Levenshtam [18] who considered periodically driven flows in general fixed domain. Also, similar techniques were involved in [19, 20]. We build the asymptotic solution directly for the the variable flow domain. Note that our assumptions imply that the amplitude of the wall displacement is of the same order of magnitude as the thickness of the Stokes layer. As a result, the boundary conditions on the deforming walls cannot be transferred to the fixed mean positions of the walls. This is what gives certain peculiarity to the employing of the Vishik–Lyusternik scheme.

1. Formulation of the problem. We write the dimensionless Navier–Stokes equations

and boundary conditions in the form

$$\mathbf{v}_\tau + \varepsilon (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \varepsilon^2 \nu \nabla \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \varepsilon f < z < 1 + \varepsilon g \quad (2)$$

$$\mathbf{v}|_{z=\varepsilon f} = f_\tau \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}|_{z=1+\varepsilon g} = g_\tau \mathbf{e}_z. \quad (3)$$

where $\nu = R_s^{-1} \sim 1$; $f = f(x, y, \tau)$ and $g = g(x, y, \tau)$ are given functions that possesses both temporal and spatial periodicity with periods L_x , L_y and 2π in x , y and τ . In addition, we assume that both spatial and temporal averaged values both of f and of g are equal to zero. We seek for the asymptotic solutions $(\mathbf{v}, p)$ possessing spatial and temporal periodicity with periods specified above in the case of $\varepsilon \rightarrow 0$ and $\nu = O(1)$.

2. The asymptotic solution has the form

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{v}_0^b + \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{v}_1^b) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Here the fields bearing superscript b represent the boundary layer corrections, ‘tilde-terms’ are time-periodic functions vanishing on average (here we mean the temporal averaging) while ‘bar-term’ is the time-independent field. One may think that $\bar{\mathbf{v}}_1$ describes the long-term drift of the material particles (the time scale for the drift is $T = \varepsilon^{-2}\omega^{-1}$) but this is not the case. The actual drift velocity has the form

$$\mathbf{v}_L = \bar{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{V}; \quad 2\mathbf{V} = \overline{[\zeta_\tau, \zeta]}, \quad \zeta_\tau = \tilde{\mathbf{v}}_0; \quad \bar{\zeta} = 0.$$

Here the overlining denotes the temporal averaging. We note that $\tilde{\mathbf{v}}_0$ is the irrotational flow caused by the normal deforming of the walls. However, $\mathbf{V}$ is generally vortical. The seeking of $\bar{\mathbf{v}}_1$ leads to the following problem

$$(\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}_1 = -\nabla \Pi + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{V} \times \text{curl } \bar{\mathbf{v}}_1 \text{ for } z : 0 < z < 1; \quad \bar{\mathbf{v}}_1|_{z=0,1} = \mathbf{a}_{0,1} \quad (4)$$

Both $\mathbf{a}_0$ and $\mathbf{a}_1$ admit an explicit expressing on the planes $z = 0, 1$. In particular,

$$(\mathbf{a}_0 + \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_z|_{z=0} = (\mathbf{a}_0 + \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_z|_{z=1} = 0.$$

Consequently, the normal component of the actual drift velocity $\mathbf{v}_L$ is equal to zero everywhere on the averaged walls. As well, there are general explicit expressions for the tangential components of $\mathbf{a}_0$ and $\mathbf{a}_1$ in the terms of $\tilde{\mathbf{v}}_0$, f , g , $\mathbf{v}_0^b$, see [21]. They are quite effective as the boundary layer equations are linear and admit simple reducing to the elementary heat equation. We give more details for the examples below.

Traveling waves. Assume that

$$f(x, \tau) = F(kx - \tau), \quad g(x, \tau) = \alpha F(kx - \tau), \quad (5)$$

where F is an arbitrary 2π -periodic function of $h = kx - \tau$ where $k > 0$ and $\alpha = \pm 1$; if $\alpha = 1$ then we have the bending waves else we have the contracting-expanding waves. Then

$$\mathbf{v}_L = (A(k) + V_0(z))\mathbf{e}_x, \quad V_0 = 4k \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\hat{F}_n|^2 \frac{\cosh(kn) - \alpha}{\sinh^2(kn)} \cosh[kn(2z - 1)]; \quad (6)$$

$$A(k) = k \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\hat{F}_n|^2 (5 + \cosh^2(kn) - 6\alpha \cosh(kn)) \sinh^{-2}(kn) \quad (7)$$

where $\hat{F}_n$ are the Fourier coefficients of F . Let us note that the total volume flux of the fluid through the channel (per unit length in y direction) determines a quadratic functional $Q = Q(F)$. The maximizing of $Q(F)$ among $F : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\hat{F}_n|^2 = 1$ gives answer to the question on what shape of the traveling waves leads to the the most efficient generating of the averaged flow. Apparently, the maximizers have the form $A \cos(mh) + B \sin(mh)$ where m must maximize the sequence of reals that can be written out explicitly. It turns out that $m = 1$ for the contracting/expanding waves ($\alpha = -1$). In the case of bending waves, the optimal mode depends on k , see fig. 1. One can see that m is equal to 1 for $k \gtrsim 2.9$ (i.e. for sufficiently short waves) and increases when k decreases.

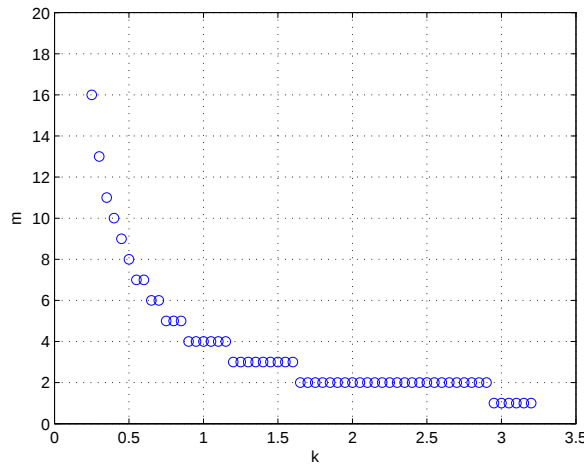


Рис. 1. Optimal m vs k for the bending waves ($\alpha = 1$).

Consider now the waves traveling in the opposite directions; for instance, set

$$f = \cos(kx - \tau), \quad g = \cos(kx + \tau),$$

Let $\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{u}_1 \mathbf{e}_x + \bar{w}_1 \mathbf{e}_z$. Then the boundary conditions for the mean flow are

$$\bar{u}_1|_{z=0} = B^+(k, x), \quad \bar{u}_1|_{z=1} = B^-(k, x), \quad \bar{w}_1|_{z=0} = C(k, x), \quad \bar{w}_1|_{z=1} = C(k, x), \quad (8)$$

$$B^\pm(k, x) = \frac{k}{4} \left[\pm 1 + 6\alpha \frac{\cosh(k)}{\sinh^2(k)} \sin(2kx) \right], \quad C(k, x) = \alpha \frac{k \sin(2kx)}{\sinh(k)}. \quad (9)$$

The Stokes correction to the drift velocity is

$$\mathbf{V}(x, z) = V_1(z) \mathbf{e}_x + V_3(x) \mathbf{e}_z, \quad V_1(z) = -k \frac{\sinh[k(2z - 1)]}{\sinh(k)}, \quad V_3(z) = -C(k, x), \quad (10)$$

where $C(k, x)$ is given by (9). Thus, the total drift velocity can be easily found numerically. The results are presented on fig.2. Looking at fig. 2 one can conclude that the drift flow depends on the wavelength in a complicated way. For short waves the averaged flow is a superposition of a shear flow with a linear velocity profile and a periodic array of weak vortices ('cat's eyes') in the center of the channel. When the wavelength increases, the vortices first grow in size and magnitude. Then they split

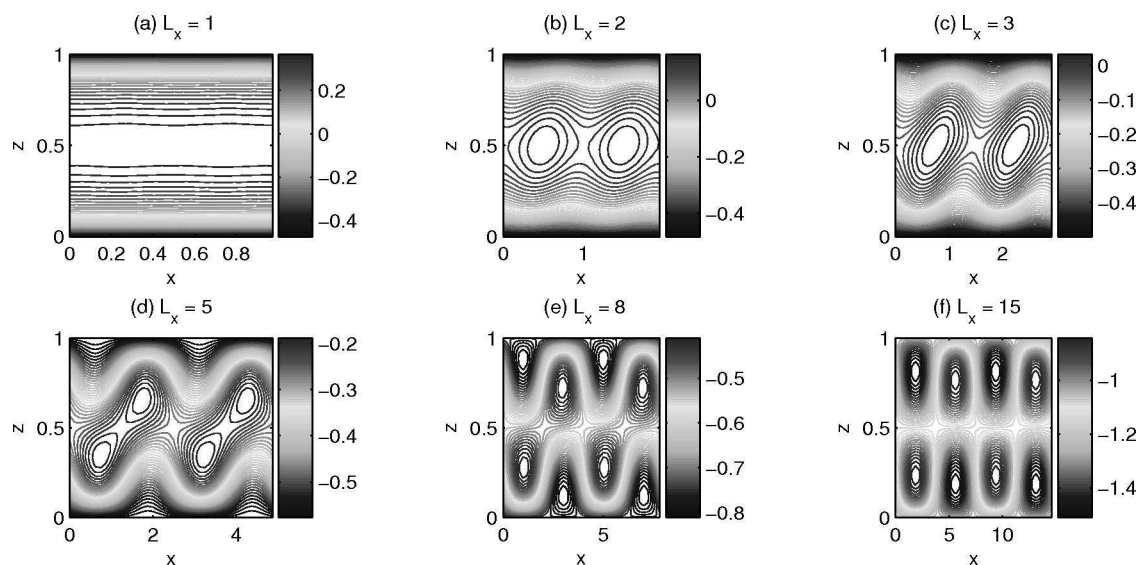


Рис. 2. Streamlines of the drift velocity for $\alpha = 1$ and $\nu = 1$ (waves traveling in opposite directions).

into a pair of vortices of the same sign, and at the same time new vortices appear near the walls and move towards the center of the channel. Eventually, for long waves, there are two arrays of alternating vortices.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Longuet-Higgins M. S. Mass transport in water waves // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1953. **245**. Pp. 535–581.
- [2] Riley N. Oscillatory Viscous Flows. Review and Extension // J. Inst. Maths Applies. 1967. **3**. Pp. 419–434.
- [3] Stuart J. T. Double boundary layers in oscillatory viscous flow // J. Fluid Mech., 1966. **42**(4). Pp. 673–687.
- [4] Riley N. Oscillating viscous flows // Mathematika, 1965. **12**. Pp. 161–175.
- [5] Wang Ch.-Y. On high-frequency oscillatory viscous flows // J. Fluid Mech., 1968. **32**(1). Pp. 55–68.
- [6] Bertelsen A., Svardal, A., Tjøtta, S. Nonlinear streaming effects associated with oscillating cylinders // J. Fluid Mech., 1973. **59**(3). Pp. 493–511.
- [7] Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder // J. Fluid Mech., 1975. **68**. Pp. 801–812.

- [8] *Haddon E. W., Riley N.* The steady streaming induced between oscillating circular cylinders // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1979. **32**(3). Pp. 801–812.
- [9] *Duck P. W., Smith F. T.* Steady streaming induced between oscillating cylinders // *J. Fluid Mech.* 1979. **91**. Pp. 93–110.
- [10] *Riley N.* Steady Streaming // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2001. **33**. Pp. 43–65.
- [11] *Jaffrin M. Y., Shapiro A. H.* Peristaltic pumping // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1971. **3**. Pp. 13–37.
- [12] *Wilson D. E., Panton R. L.* Peristaltic transport due to finite amplitude bending and contraction waves // *J. Fluid Mech.* 1979. **90**. Pp. 145–159.
- [13] *Longuet-Higgins M. S.* Peristaltic pumping in water waves // *J. Fluid Mech.* 1983. **137**. Pp. 393–407.
- [14] *Selverov J. P., Stone H. A.* Peristaltically driven channel flows with applications towards micromixing // *Phys. Fluids*. 2001. **13**(7). Pp. 1838–1859.
- [15] *Yi M., Bau H. H., Hu H.* Peristaltically induced motion in a closed cavity with two vibrating walls // *Phys. Fluids*, 2002. **14**(1). Pp. 184–197.
- [16] *Carlsson F., Sen. M., Löfdahl H. A.* Fluid mixing induced by vibrating walls // *European J. Mech. B/Fluids*. 2005. **24**. Pp. 366–378.
- [17] *Hoepffner J., Fukagata K.* Pumping or drag reduction? // *J. Fluid Mech.* 2009. **635**. Pp. 171–187.
- [18] *Levenshtam V. B.* Asymptotic expansion of the solution of a problem of vibrational convection // *Comput. Math. Math. Phys.* 2000. **40**, №. 9. Pp. 1357–1365.
- [19] *Ilin K.* 2008 Viscous boundary layers in flows through a domain with permeable boundary // *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **27**. Pp. 514–538.
- [20] *Vladimirov V. A.* 2008 Viscous flows in a half space caused by tangential vibrations on its boundary // *Stud. Appl. Math.*, **121**(4). Pp. 337–367.
- [21] *Ilin K., Morgulis A.* Steady streaming between two vibrating planes at high reynolds numbers // E-print: arXiv:1108.2710v1 [physics.flu-dyn] 12 Aug 2011

Моргулис А. Б., Ильин К. И. *Средние течения вязкой жидкости в зазоре между двумя деформирующимися стенками.* Рассматриваются течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя стенками, вызываемые периодическим деформированием стенок. В центре внимания находятся стационарные компоненты течений. Мы используем асимптотическое интегрирование системы Навье–Стокса в случае когда толщина стоксова слоя и амплитуда деформации стенок суть малые одного порядка. При этом используется метод типа Вишика–Люстерника, который мы применяем непосредственно к переменной области течения.