

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН

А. Н. Кириллов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
В УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИКЕ

КУРС ЛЕКЦИЙ

ПЕТРОЗАВОДСК
2012

УДК 512.64(075)

ББК 22.143

К 43

Кириллов А. Н.

К 43 Линейная алгебра в управляемой динамике. Курс лекций.

— Петрозаводск, КарНЦ РАН, 2012. — 103 с.

ISBN 978-5-9274-0542-8

В учебном пособии изложен курс лекций по методам линейной алгебры, применяемым в задачах управления линейными динамическими системами. Пособие соответствует содержанию спецкурса, который автор читает на математическом факультете Петрозаводского государственного университета для студентов старших курсов и аспирантов, обучающихся по направлениям «Математика» и «Прикладная математика и информатика».

Работа издается при частичной финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию образовательной деятельности

Библиогр. 45 назв.

РЕЦЕНЗЕНТ

доктор физ.-мат. наук, профессор Ю. В. Заика

ISBN 978-5-9274-0542-8

© КарНЦ РАН, 2012

© А. Н. Кириллов, 2012

Оглавление

Предисловие	4
I Программные управления	5
1. Линейные системы и ограничения. Полная управляемость	5
2. Неполная управляемость с ограничениями	14
3. Задача распределения инвестиций	27
4. Допустимый план в случае скалярного ограничения	37
5. Построение допустимого плана в вырожденном случае	44
II Гибридные системы	55
1. Линейная последовательная система	55
2. Управление структурой в последовательной системе	66
3. Параллельная система. Стабилизация структуры .	77
4. Модель инвестирования с переменной структурой	85
III Разное	89
1. Проблема Брокетта	89
2. Обращение суммы матриц	92
3. Об адекватности моделей динамических систем . .	95
Литература	99

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит курс лекций, которые могут послужить материалом для спецкурса по применению методов линейной алгебры в теории управления линейными динамическими системами, а также быть полезными при самостоятельном изучении студентами и аспирантами математических специальностей и специалистами, интересующимися вопросами управления в линейных системах.

Линейная алгебра давно стала основным математическим аппаратом при исследовании линейных динамических систем, как управляемых, так и неуправляемых. Приведение линейных систем к различным каноническим формам, анализ управляемости, наблюдаемости, идентифицируемости систем, построение программных и стабилизирующих управлений и многие другие проблемы теории линейных динамических систем решаются на основе активного использования инструментария линейной алгебры. Можно сказать, что линейная теория управления это раздел линейной алгебры со своими специфическими задачами.

Автор сосредоточился на близких ему темах линейной теории управления: задачи математической экономики, гибридные системы, теория стабилизации. Пособие состоит из трех разделов, в соответствии с указанными темами. Большая часть пособия представляет результаты исследований автора. Для понимания представленного материала достаточно знания стандартного университетского курса линейной алгебры, а также основ математического анализа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Нелишним также было бы знакомство с основами теории управления линейными системами.

Автор благодарен М.Е. Галаховой за большую помощь, оказанную ею при подготовке настоящего пособия в издательском пакете LaTeX.

Глава I

Программные управления

1. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ И ОГРАНИЧЕНИЯ. ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Проблема построения управления, переводящего динамическую систему из начального состояния в конечное, является одной из основных в теории управления. Для линейных систем она решена в случае отсутствия ограничений на управления и состояния [13], [10]. В настоящей главе решается задача построения управления для линейной системы при смешанных ограничениях на управление u и состояние x . Последнее означает, что векторы u , x удовлетворяют некоторой системе линейных алгебраических уравнений, связывающей их компоненты. Введение такого ограничения мотивировано экономической задачей распределения инвестиций, решение которой также приводится в данной главе.

Рассмотрим систему n линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + F(t), \quad (1.1)$$

где $P(t), Q(t)$ – матрицы размерности $(n \times n)$ и $(n \times r)$, соответственно; $\mathbb{R}^n \ni x(t)$ – вектор состояния системы; $\mathbb{R}^r \ni u(t)$ – вектор управления; $\mathbb{R}^n \ni F(t)$ – возмущение. В дальнейшем будем считать, что элементы матриц $P(t)$, $Q(t)$ и компоненты вектора $F(t)$ заданы при $t \geq t_0$, вещественны и непрерывны. Здесь $0 \leq t_0$ – заданная вещественная постоянная.

Пусть на векторы x и u наложено линейное ограничение сле-

дующего вида:

$$\alpha(t)x + \beta u = \gamma(t), \quad (1.2)$$

где $\alpha = \alpha(t)$, β – матрицы размерности $(k \times n)$ и $(k \times r)$, имеющие заданные вещественные непрерывные при $t \geq t_0$ и постоянные, соответственно, элементы; $\gamma \in \mathbb{R}^k$, компоненты вектора $\gamma = \gamma(t)$ заданы при $t \geq t_0$, вещественны и непрерывны. Будем считать, что $0 < k < r$.

Замечание 1. В случае, если из (1.1) можно выразить u через x , $\dot{x}$, то после подстановки u в (1.2) это ограничение будет представлять систему неголономных связей, так как величины x и $\dot{x}$ можно интерпретировать как векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей, соответственно.

Постановка задачи. Предположим, что заданы два произвольных вектора $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$, начальное и конечное состояния системы, соответственно. Задача заключается в том, чтобы найти вектор-функцию $u = u(x, t) := u(t)$ такую, что решение системы (1.1), удовлетворяющее ограничению (1.2) и начальному условию $x(t_0) = x^0$, принимает при $t = t_0 + T$ значение x^1 , т. е. $x(t_0 + T) = x^1$ и при этом выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u^*(\tau)u(\tau) d\tau < +\infty.$$

Это означает, что вектор-функция $u(t)$ суммируема с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$. Здесь $0 < T$ – заданная вещественная постоянная, $*$ – символ транспонирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть суммируемую с квадратом вещественную функцию $u(t) \in \mathbb{R}^r$, удовлетворяющую ограничениям (1.2), допустимым управлением.

Обозначим множество допустимых значений $u(t)$ через Ω , где $\Omega \subset \mathbb{R}^r$. Тогда из ограничения (1.2) следует, что Ω зависит от x и t , т. е. $\Omega = \Omega(x, t)$, где $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Таким образом, задача состоит в отыскании таких управлений $u(t) \in \Omega(x, t)$, что при подстановке их в систему (1.1), последняя имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям:

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_0 + T) = x^1. \quad (1.3)$$

Такие управления $u = u(t)$ будем называть допустимыми программными, а соответствующие им решения системы (1.1), удовлетворяющие условиям (1.3), программными движениями.

Будем предполагать, что ранг матрицы β равен k . Тогда нетрудно показать, что матрица $\beta\beta^*$ неособая [10]. Пусть δ – матрица размерности $\{r \times (r - k)\}$, с постоянными элементами, обладающая свойством: ее столбцы образуют базис в ортогональном дополнении подпространства, натянутого на строки матрицы β . Через δ_β обозначим множество таких матриц. Тогда для любой матрицы $\delta \in \delta_\beta$ имеем $\beta \cdot \delta = 0$.

Далее введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta^* (\beta\beta^*)^{-1}; \\ P_1(t) &= P(t) - Q(t)\beta_1\alpha(t); \\ Q_1(t) &= Q(t)\delta; \\ F_1(t) &= Q(t)\beta_1\gamma(t) + F(t). \end{aligned}$$

Пусть $Y(t)$ – фундаментальная матрица решений системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P_1(t)x$$

при начальном условии $Y(t_0) = E$, где E – единичная матрица. Далее введем матрицы

$$B(t) = Y^{-1}(t)Q_1(t); \quad A(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} B(\tau)B^*(\tau) d\tau.$$

Прежде чем переходить к решению задачи, поставленной выше, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Имеет место одно из двух утверждений: либо матрица $A(t_0, t_0 + T)$ неособая для всех $\delta \in \delta_\beta$, либо матрица $A(t_0, t_0 + T)$ особая для всех $\delta \in \delta_\beta$.*

Доказательство. Так как матрицы $B(t)$, $A(t_0, t_0 + T)$ зависят от δ , то введем обозначения:

$$B(t) = B(t, \delta),$$

$$A(t_0, t_0 + T) = A(t_0, t_0 + T; \delta).$$

Пусть матрица $A(t_0, t_0 + t; \bar{\delta})$ неособая для какой-либо матрицы $\bar{\delta} \in \delta_\beta$. Покажем, что тогда $A(t_0, t_0 + t; \delta)$ будет неособой для любой матрицы $\delta \in \delta_\beta$. Так как столбцы матриц $\delta \in \delta_\beta$ образуют базис в ортогональном дополнении подпространства, натянутого на строки матрицы β , то существует неособая матрица M размерности $\{(n - k) \times (n - k)\}$ – матрица перехода от одного базиса к другому – такая, что

$$\delta = \bar{\delta} \cdot M.$$

Тогда

$$\begin{aligned} B(t) = B(t, \delta) &= Y^{-1}(t)Q_1(t) = Y^{-1}(t)Q(t)\delta = \\ &= Y^{-1}(t)Q(t)\bar{\delta}M = \bar{B}(t)M, \end{aligned}$$

где $\bar{B}(t) = Y^{-1}(t)Q\bar{\delta}$. Известно [10], что матрица $A(t_0, t_0 + T)$ является неособой, положительно определенной, тогда и только тогда, когда строки матрицы $B(t)$ линейно независимы в промежутке $[t_0, t_0 + T]$. Тогда из предположения следует, что строки матрицы $\bar{B}(t) = B(t, \bar{\delta})$ линейно независимы. Покажем, что строки матрицы $B(t)$ также линейно независимы. Пусть $B_i(t)$, $\bar{B}_i(t)$ – строки матриц $B(t)$, $\bar{B}(t)$ соответственно, $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\begin{aligned} L \equiv \lambda_1 B_1(t) + \lambda_2 B_2(t) + \dots + \lambda_n B_n(t) &= (\lambda_1 \bar{B}_1(t) + \lambda_2 \bar{B}_2(t) + \\ &+ \dots + \lambda_n \bar{B}_n(t))M \equiv \bar{L}M; \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \end{aligned}$$

Здесь λ_i – вещественные постоянные, $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как M – неособая матрица, то $L = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{L} = 0$, но тогда получаем, что $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. строки матрицы $B(t)$ линейно независимы. Отсюда следует, что матрица $A(t_0, t_0 + T)$ неособая.

Второе утверждение леммы следует из первого. Действительно, если матрица $A(t_0, t_0 + T)$ является особой для какой-то матрицы $\delta \in \delta_\beta$, но неособой для некоторой другой матрицы $\bar{\delta} \in \delta_\beta$, то, согласно первому утверждению, она будет неособой для всех $\delta \in \delta_\beta$, что противоречит предположению. Лемма доказана. $\square$

Теперь сформулируем теорему, дающую решение поставленной задачи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ранг матрицы β в условии (1.2) равен k , $0 < k < r$. Тогда для того, чтобы существовало программное управление $u(t) \in \Omega(x, t)$, переводящее систему (1.1) из любого состояния x^0 в любое другое состояние x^1 за время T , необходимо и достаточно, чтобы матрица $A(t_0, t_0 + T)$ была неособой. Множества программных управлений и движений имеют вид:

$$\begin{aligned} u(t) &= \beta_1(\gamma(t) - \alpha x(t)) + \delta(B^*(t)c + \bar{v}(t)); \\ x(t) &= Y(t)[x^0 + A(t_0, t)c + \int_{t_0}^t B(\tau)\bar{v}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau]; \\ c &= A^{-1}(t_0, t_0 + T) \left[Y^{-1}(t_0 + T)x^1 - \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau - x^0 \right], \end{aligned}$$

где $\bar{v}(t)$ – суммируемая с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{t_0}^{t_0+T} B(\tau)\bar{v}(\tau)d\tau = 0.$$

Доказательство. Пространство $\mathbb{R}^r$ можно представить (см., например, [32], [14] и др.) в виде ортогональной суммы подпространств $\mathbb{R}^r = \mathbb{R}_\beta + \mathbb{R}_\delta^\perp$, где $\mathbb{R}_\delta^\perp$ – подпространство, натянутое на столбцы матрицы δ , $\mathbb{R}_\beta \subset \mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}_\beta$ – подпространство, натянутое на строки матрицы β (при этом не будем различать представление элементов арифметических пространств в виде столбцов или строк). Тогда, при каждом $t \in [t_0, t_0 + T]$ функцию $u(t)$ можно представить в виде

$$u(t) = \bar{u}(t) + \bar{u}_\perp(t),$$

где $\bar{u} \in \mathbb{R}_\beta$, $\bar{u}_\perp \in \mathbb{R}_\delta^\perp$.

Далее, учитывая, что строки матрицы β и столбцы матрицы δ образуют базисы в подпространствах $\mathbb{R}_\beta$ и $\mathbb{R}_\delta^\perp$, соответственно, можно представить $\bar{u}(t)$, $\bar{u}^\perp(t)$ в виде

$$\bar{u}(t) = \beta^* w(t), \quad \bar{u}^\perp(t) = \delta v(t),$$

где $w \in \mathbb{R}^k$, $v \in \mathbb{R}^{r-k}$ – некоторые векторы. Таким образом, любой вектор $u(t)$ можно представить в виде суммы

$$u(t) = \beta^* w(t) + \delta v(t). \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.2), получаем

$$\alpha x(t) + \beta \beta^* w(t) = \gamma(t).$$

Отсюда определяем вектор $w(t)$:

$$w(t) = (\beta \beta^*)^{-1} (\gamma(t) - \alpha x(t)). \quad (1.5)$$

Из (1.4), (1.5) следует, что если функция $u(t)$ удовлетворяет ограничению (1.2), то она имеет следующий вид:

$$u(t) = \beta^* (\beta \beta^*)^{-1} (\gamma(t) - \alpha x(t)) + \delta v(t). \quad (1.6)$$

Обратно, любая функция $u(t)$, имеющая вид (1.6), удовлетворяет ограничению (1.2). Таким образом, ограничение (1.2) эквивалентно равенству (1.6). Так как функция $u(t)$ суммируема с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$, то потребуем этого же для функции $v(t)$. Теперь можно сказать, что допустимым управлением $u(t)$ является любая функция, имеющая вид (1.6), где $v(t)$ – произвольная суммируемая с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ вектор-функция, $x(t)$ – решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x^0$.

Подставив (1.6) в (1.1), получим систему

$$\dot{x} = P_1(t)x + Q_1(t)v + F_1(t). \quad (1.7)$$

В системе (1.7) на функцию $v(t)$ не наложено никаких ограничений, кроме суммируемости с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$. Таким образом, задача свелась к следующей: показать, что неособенность матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ является необходимым и достаточным условием существования вещественной суммируемой с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ вектор-функции $v(t)$ такой, что система (1.7) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям (1.3). Такая задача решена в [10]. Следуя [10], кратко изложим ход дальнейших рассуждений.

Необходимость. Предположим, что для произвольных векторов $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ найдена функция $v(t)$ такая, что при подстановке ее в (1.7) эта система будет иметь решение, удовлетворяющее краевым условиям (1.3). Такую функцию будем называть вспомогательным программным управлением. Подставим вспомогательное программное управление $v(t)$ и соответствующее ему программное движение $x(t)$ в (1.7), умножив получившееся равенство слева на $Y^{-1}(t)$ и проинтегрировав его в пределах от t_0 до $t_0 + T$, получим

$$\int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau) [P_1(\tau)x(\tau) + Q_1(\tau)v(\tau) + F_1(\tau)] d\tau.$$

Интегрируя слева по частям, получим систему интегральных уравнений для определения $v(t)$:

$$\xi^1 - \xi^0 = \int_{t_0}^{t_0+T} B(\tau)v(\tau)d\tau, \quad (1.8)$$

где

$$\xi^0 = x^0, \quad \xi^1 = Y^{-1}(t_0 + T)x^1 - \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau.$$

Аналогично [10], будем искать решение системы (1.8) в виде

$$v(t) = B^*(t)c + \bar{v}(t), \quad (1.9)$$

где $c \in \mathbb{R}^n$, c – постоянный вектор; $\bar{v}(t)$ – вещественная вектор-функция, суммируемая с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяющая условию, которое будем называть условием ортогональности:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} B(\tau)\bar{v}(\tau)d\tau = 0.$$

Подставляя (1.9) в (1.8), получим систему линейных уравнений для определения компонент вектора c

$$A(t_0, t_0 + T)c = \xi^1 - \xi^0. \quad (1.10)$$

Так как $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ – произвольные векторы, то система (1.10) должна иметь решение при любых ξ^0, ξ^1 . Отсюда следует, что матрица $A(t_0, t_0 + T)$ должна быть неособой. При этом

$$c = A^{-1}(t_0, t_0 + T)(\xi^1 - \xi^0). \quad (1.11)$$

Достаточность. Пусть матрица $A(t_0, t_0 + T)$ неособая. Тогда система (1.10) имеет решение при любых ξ^1, ξ^0 , а значит и при

любых x^0, x^1 . Будем искать $v(t)$ в виде (1.9). Подставим c , определяемое в силу неособенности $A(t_0, t_0 + T)$ из (1.11), в (1.9)

$$v(t) = B^*(t)A^{-1}(t_0, t_0 + T)(\xi^1 - \xi^0) + \bar{v}(t).$$

Здесь $\bar{v}(t) \in L^2[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяет условию ортогональности. Далее, подставив последнее выражение для $v(t)$ в формулу Коши для системы (1.7), получим

$$x(t) = Y(t)[x^0 + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)[Q_1(\tau)v(\tau) + F_1(\tau)]d\tau].$$

Положив в этой формуле $t = t_0 + T$, придем к тому, что $x(t_0 + T) = x^1$. Значит, $v(t)$ – искомое вспомогательное управление. Подставим (1.9) в формулу Коши для системы (1.7). Тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= Y(t)[x^0 + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)[Q_1(\tau)v(\tau) + F_1(\tau)]d\tau] = \\ &= Y(t)[x^0 + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)[Q_1(\tau)(B^*(\tau)c + \bar{v}(\tau)) + F_1(\tau)]d\tau] = \\ &= Y(t)[x^0 + A(t_0, t)c + \int_{t_0}^t B(\tau)\bar{v}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau]. \end{aligned}$$

Подставив (1.9) в (1.6), получим выражение для программного управления. $\square$

Замечание 2. Согласно лемме 1, в условии теоремы 1 достаточно требовать, чтобы матрица $A(t_0, t_0 + T)$ была либо неособой, либо особой хотя бы для какой-либо матрицы $\delta \in \delta_\beta$, т. е. необходимое и достаточное условие существования программного управления $u(t) \in \Omega(x, t)$ не зависит от выбора матрицы $\delta \in \delta_\beta$.

Замечание 3. Множество программных управлений, задаваемое формулой из условия теоремы 1, зависит от матрицы δ и вектор-функции $\bar{v}(t)$:

$$u(t) = u(t, \delta, \bar{v}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система (1.1), (1.2) называется полностью управляемой, если для любых $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ найдется допустимое управление, переводящее систему из x^0 в x^1 за конечное время. Иначе будем говорить, что система (1.1), (1.2) не является полностью управляемой.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если при любом $t \in [t_0, t_0 + T]$ строки матрицы $Q(t)$ принадлежат пространству, натянутому на строки матрицы β , то система (1.1) с ограничением (1.2) не является полностью управляемой.

Доказательство. Действительно, при выполнении условия данного следствия будет выполняться равенство

$$Q \cdot \delta = 0.$$

Тогда система (1.7) примет вид:

$$\dot{x} = P_1(t)x + F_1(t),$$

т. е. эта система неуправляема, а значит и эквивалентная ей система (1.1) с ограничением (1.2) не полностью управляема. $\square$

2. НЕПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим снова систему (1.1) с ограничением (1.2). Будем теперь предполагать, что матрица $A(t_0, t_0 + T)$ особая. Тогда, согласно теореме 1, не существует программного управления $u(t) \in \Omega(x, t)$, переводящего систему (1.1) из любого состояния x^0 в любое состояние x^1 за время T . Изучим множество состояний, в которое можно перевести систему из данного состояния x^0 . Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем множеством достижимости системы (1.1), (1.2) совокупность всех концов $x(t_0 + T)$ траекторий этой системы при $u(t) \in \Omega(x, t)$, $x(t_0) = x^0$.

Будем обозначать это множество через $X(\Omega, x^0, T)$. Конечно, множество достижимости зависит и от системы (1.1), и от момента времени t_0 . Прежде, чем изучить структуру множества $X(\Omega, x^0, T)$, докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ остается неизменным при любом выборе матрицы $\delta \in \delta_\beta$.

Доказательство. В случае, когда ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ равен n , утверждение этой леммы следует из леммы 1. Поэтому можно предполагать, что ранг $A(t_0, t_0 + T)$ меньше n .

Покажем сначала, что число линейно независимых строк матрицы $B(t)$ не зависит от выбора матрицы $\delta \in \delta_\beta$. Предположим, что для некоторой матрицы $\bar{\delta} \in \delta_\beta$ число линейно независимых строк матрицы $B(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$ равно $m < n$. Пусть δ произвольная матрица из множества δ_β . При доказательстве леммы 1 было показано, что

$$B(t) = \bar{B}(t)M,$$

где $B(t) = B(t, \delta)$, $\bar{B}(t) = B(t, \bar{\delta}) = Y^{-1}(t)Q(t)\bar{\delta}$, M – неособая матрица размерности $\{(n - k) \times (n - k)\}$. Из последнего равенства следует, что число линейно независимых строк у матриц $B(t)$ и $\bar{B}(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$ одинаково, т. е. равно m . Теперь покажем, что ранг $A(t_0, t_0 + T)$ равен m . Заметим, что определитель матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ является определителем Грама для системы векторов $B_1(t)$, $B_2(t)$, $\dots$, $B_n(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$, где $B_i(t)$ – i -ая строка матрицы $B(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Главные (диагональные) миноры порядка m матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ являются определителями Грама для m вектор-строк матрицы $B(t)$. Следовательно, среди них есть ненулевые

миноры, а все главные миноры $m + 1$ -го порядка равны нулю, т. к. число линейно независимых строк матрицы $B(t)$ по предположению равно m . Учитывая, что матрица $A(t_0, t_0 + T)$ симметрична, а значит ее ранг равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров, получаем, что ранг $A(t_0, t_0 + T)$ равен m . Но m – число линейно независимых строк матрицы $B(t)$ – не зависит от выбора матрицы $\delta \in \delta_\beta$. Следовательно, ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ не зависит от выбора матрицы $\delta \in \delta_\beta$. $\square$

Структура множества достижимости $X(\Omega, x^0, T)$ описывается следующим утверждением.

ЛЕММА 3. Пусть ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ равен m . Тогда множество достижимости $X = X(\Omega, x^0, T)$ для системы (1.1) при $u(t) \in \Omega(x, t)$ имеет вид:

$$X = \left\{ \psi + \eta : \psi = Y(t_0 + T) \left[\int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau) F_1(\tau) d\tau + x^0 \right] ; \eta \in N^m \right\}, \quad (2.1)$$

где N^m – подпространство $\mathbb{R}^n$, размерности m , натянутое на m линейно независимых вектор-столбцов матрицы

$$Y(t_0 + T)A(t_0, t_0 + T).$$

Доказательство. Проведем всю изложенную выше процедуру для получения уравнения (1.10) с тем отличием, что теперь вектор x^1 не задан. Вместо x^1 будем везде брать $x(t_0 + T)$ – конечное состояние системы (1.1) при $u(t) \in \Omega(x, t)$. Тогда уравнение (1.10) примет вид

$$A(t_0, t_0 + T)c = \bar{\xi}^1 - \xi^0, \quad (2.2)$$

$$\text{где: } \bar{\xi}^1 = Y^{-1}(t_0 + T)x(t_0 + T) - \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau.$$

Система (2.1) имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ совпадает с рангом расширенной матрицы $(A(t_0, t_0 + T); \bar{\xi}^1 - \xi^0)$; получающейся приписыванием к $A(t_0, t_0 + T)$ справа столбца $\bar{\xi}^1 - \xi^0$. Это утверждение, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда столбец $\bar{\xi}^1 - \xi^0$ является линейной комбинацией линейно независимых столбцов матрицы $A(t_0, t_0 + T)$. Пусть $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ – линейно независимые столбцы матрицы $A(t_0, t_0 + T)$. Их число совпадает с рангом $A(t_0, t_0 + T)$. В силу вышесказанного, для разрешимости системы (2.2) необходимо и достаточно, чтобы $\bar{\xi}^1 - \xi^0 \in \bar{N}^m$, где $\bar{N}^m$ – подпространство, натянутое на $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$, т.е. необходимо и достаточно, чтобы

$$\bar{\xi}^1 - \xi^0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k A_{i_k},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – произвольные вещественные постоянные. Раскрывая обозначения $\bar{\xi}^1, \xi^0$, получаем:

$$\begin{aligned} x(t_0 + T) = Y(t_0 + T) \left[\int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau) F_1(\tau) d\tau + x^0 \right] + \\ + Y(t_0 + T) \sum_{k=1}^m \lambda_k A_{i_k} = \psi + \sum_{k=1}^m \lambda_k \bar{A}_{i_k} = \psi + \eta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\bar{A}_{i_k} = Y(t_0 + T) A_{i_k}$, $1 \leq k \leq m$, векторы $\bar{A}_{i_k}$ – линейно-независимые вектор-столбцы матрицы $Y(t_0 + T) A(t_0, t_0 + T)$. Тогда для любого $x^1 \in X(\Omega, x^0, T)$ и только для такого x^1 можно, используя доказательство теоремы 1, построить программное управление $u(t) \in \Omega(x, t)$, переводящее систему (1.1) из произвольного состояния x^0 в состояние $x^1 \in X(\Omega, x^0, T)$. Отличие от теоремы 1 будет состоять в том, что теперь вспомогательное управление $v(t) = B^*(t)c + \bar{v}(t)$ не будет для фиксированного $\bar{v}(t)$ единственным, т. к. согласно [10] решение системы (2.2),

где $x(t_0 + T)$ имеет вид (2.3), будет выражаться формулой

$$c = \tilde{A}^*(\tilde{A}\tilde{A}^*)^{-1}(\tilde{\xi}^1 - \tilde{\xi}^0) + \bar{c}, \quad (2.3)$$

где $\tilde{A}$ – матрица размерности $\{m \times n\}$, образованная из $A(t_0, t_0 + T)$ и состоящая из всех линейно независимых строк этой матрицы, т. е. в силу симметричности, имеющая строки $A_{i_1}^*, A_{i_2}^*, \dots, A_{i_m}^*$; $\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^0$ – векторы, образованные компонентами векторов $\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^0$ соответственно с теми номерами, которые имеют строки $A_{i_1}^*, A_{i_2}^*, \dots, A_{i_m}^*$; $\mathbb{R}^n \ni \bar{c}$ – вектор, обладающий свойством

$$\tilde{A} \cdot \bar{c} = 0.$$

□

Замечание 4. Из формулы (2.1) или (2.3) следует, что множество достижимости $X(\Omega, x^0, T)$ есть результат сдвига подпространства $N^m \subset \mathbb{R}^n$ на вектор ψ . Следовательно, геометрические свойства множества $X(\Omega, x^0, T)$ такие же, как у подпространства N^m .

Замечание 5. В силу леммы 2 структура множества достижимости $X(\Omega, x^0, T)$ не зависит от выбора матрицы $\delta \in \delta_\beta$.

Замечание 6. Пусть $x^1 \in X(\Omega, x^0, T)$. Тогда, проведя всю процедуру для построения программного управления $u(t)$ и движения $x(t)$, приведенную при доказательстве теоремы 1, получим, что $u(t)$ и $x(t)$ имеют вид, определяемый формулами из теоремы 1 с тем отличием, что теперь вектор c находится по формуле (2.4), в которой вектор $\tilde{\xi}^1$ заменен на вектор $\bar{\xi}^1$:

$$c = \tilde{A}^*(\tilde{A}\tilde{A}^*)^{-1}(\bar{\xi}^1 - \tilde{\xi}^0) + \bar{c},$$

где вектор $\bar{\xi}^1$ так же получается из вектора ξ^1 , как $\tilde{\xi}^1$ из $\bar{\xi}$.

Считая, по-прежнему, матрицу $A(t_0, t_0 + T)$ особой, изменим постановку задачи, данную в начале этой главы. Пусть требуется найти управление $u(t) \in \Omega(x, t)$, переводящее систему (1.1) из состояния x^0 в состояние $x(t_0 + T) \geq x^1$ за время T . Здесь $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ – заданные векторы, т. е. $u(t)$ должно переводить систему в область $\Lambda(x') = \{x : x \geq x', x, x' \in \mathbb{R}^n\}$. Неравенство $x \geq x^1$ понимается в том смысле, что $x_i \geq x_i^1$, $i = 1, 2, \dots, n$, где x_i, x_i^1 – компоненты векторов x, x^1 соответственно. Для решения поставленной задачи введем вектор дополнительных управлений $z \in \mathbb{R}^n$ с постоянными вещественными компонентами z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, определяемый равенством:

$$x(t_0 + T) = x^1 + z^2, \quad (2.4)$$

где $z^2 \in \mathbb{R}^n$ – вектор с компонентами z_i^2 , $i = 1, 2, \dots, n$. Замечаем, что на вектор z не наложено ограничений. Таким образом, неравенство $x(t_0 + T) \geq x^1$ эквивалентно равенству (3.5). Будем строить управление $u(t) \in \Omega(x, t)$, переводящее систему (1.1) из состояния x^0 в состояние $x^1 + z^2$ за время T , что будет эквивалентно переводу системы в область $\Lambda(x')$.

Прежде, чем переходить к выводу условий, при которых разрешима поставленная задача, рассмотрим подробнее структуру матрицы $A(t_0, t_0 + T)$. Поскольку $A(t_0, t_0 + T)$ вещественная симметричная матрица, то ортогональным преобразованием она приводится к диагональной форме. Вспоминая, что $A(t_0, t_0 + T)$ теперь особая матрица и предполагая, что ее ранг равен m , где $0 < m < n$, делаем вывод, что $A(t_0, t_0 + T)$ имеет нулевое собственное число кратности $n - m$.

Теперь изложим теорему, дающую решение поставленной выше задачи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ранг матрицы β равен k , $0 < k < r$, ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ равен m , $0 < m < n$. Пусть S_{l_i} – попарно ортогональные собственные вектор-строки, соответствующие нулевому собственному числу матрицы $A(t_0, t_0 + T)$

кратности $n - m$; $R = Y^{-1}(t_0 + T)z^2$, $i = 1, 2, \dots, n - m$. Тогда управление $u(t) \in \Omega(x, t)$, переводящее систему (1.1) из любого начального состояния x^0 в область $\Lambda(x^1)$ за время T , существует для тех и только тех векторов $x^1 \in \mathbb{R}^n$, для которых разрешима относительно z^2 система линейных уравнений:

$$\bar{S}Y^{-1}(t_0 + T)z^2 = \bar{S}(\xi^0 - \xi^1), \quad (2.5)$$

где $\bar{S}$ – матрица размерности $\{(n - m) \times n\}$, имеющая строки $S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_{n-m}}$; векторы $\xi^0, \xi^1 \in \mathbb{R}^n$ определены в (1.8). При этом множество программных управлений $u(t)$ и движений $x(t)$ задается формулами из теоремы 1 с тем отличием, что теперь:

$$c = \tilde{A}^*(\tilde{A}\tilde{A}^*)^{-1}(\tilde{\xi}^1 - \tilde{\xi}^0 + \tilde{R}) + \bar{c}, \quad (2.6)$$

где матрица $\tilde{A}$ определена в (2.3); $\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^0, \tilde{R}$ – векторы, образованные компонентами векторов ξ^1, ξ^0, R с теми номерами, которые имеют линейно независимые строки матрицы $A(t_0, t_0 + T)$, вектор $\bar{c}$ удовлетворяет условию $\tilde{A}\bar{c} = 0$.

Доказательство. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, сведем задачу управления системой (1.1) при условии $u(t) \in \Omega(x, t)$ к задаче управления системой (1.7), в которой на вспомогательное управление $v(t)$ не наложено никаких ограничений, кроме суммируемости с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$. Итак, будем строить вспомогательное программное управление $v(t)$, переводящее систему (1.7) из любого состояния $x^0 \in \mathbb{R}^n$ в область $\Lambda(x^1)$ или, что равносильно, в состояние $x^1 + z^2 \in \mathbb{R}^n$ за время T . По-прежнему будем искать $v(t)$ в виде

$$v(t) = B^*(t)c + \bar{v}(t),$$

где $\bar{v}(t) \in L^2[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяет условию ортогональности из теоремы 1, $\mathbb{R}^n \ni c$ – постоянный вектор. Для нахождения

вектора c , поступая так же, как в теореме 1, получаем систему линейных уравнений, аналогичную (1.10):

$$A(t_0, t_0 + T)c = \hat{\xi}^1 - \xi^0 \quad (2.7)$$

с тем отличием, что теперь

$$\hat{\xi}^1 = Y^{-1}(t_0 + T)(x^1 + z^2) - \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau. \quad (2.8)$$

Согласно введенным обозначениям, имеем

$$\hat{\xi}^1 = \xi^1 + R.$$

Тогда система (2.7) примет вид

$$A(t_0, t_0 + T)c = \xi^1 - \xi^0 + R. \quad (2.9)$$

Для существования программного управления $v(t)$ необходимо и достаточно, чтобы эта система имела решение, а она будет его иметь при условии совпадения ранга матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ с рангом расширенной матрицы $\{A(t_0, t_0 + T); \xi^1 - \xi^0 + R\}$.

Сделаем замену переменных:

$$c = S^* \cdot \hat{c}, \quad (2.10)$$

где S – матрица размерности $\{n \times n\}$, строки которой являются попарно ортогональными собственными векторами матрицы $A(t_0, t_0 + T)$. Подставив (2.10) в (2.9) и домножая полученное равенство слева на S , имеем:

$$A_J \cdot \hat{c} = S(\xi^1 - \xi^0 + R), \quad (2.11)$$

где $A_J = SA(t_0, t_0 + T)S^*$ – диагональная матрица, у которой в строках с номерами $l_1, l_2, \dots, l_{n-m}$ стоят нули. При этом $\text{rank } A_J = \text{rank } A(t_0, t_0 + T)$, так как S – неособая матрица.

$$\begin{aligned}\hat{A}_{i_{n+1}} &= S_i(\xi^1 - \xi^0 + R), i = 1, 2, \dots, n, \\ \hat{A}_{kk} &= \begin{cases} 0, k = l_1, l_2, \dots, l_{n-m} \\ \lambda_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, n, k \neq l_1, l_2, \dots, l_{n-m} \end{cases} \\ \hat{A}_{ip} &= 0, i \neq p, \quad i, p = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$
$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_{l_1}(\xi^1 - \xi^0 + R) & = & 0 \\ S_{l_2}(\xi^1 - \xi^0 + R) & = & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ S_{l_n-m}(\xi^1 - \xi^0 + R) & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\bar{S}(\xi^1 - \xi^0 + R) = 0. \quad (2.12)$$
$$\bar{S}Y^{-1}(t_0 + T)z^2 = \bar{S}(\xi^0 - \xi^1).$$

Таким образом, для существования программного управления $v(t)$ или $u(t)$ необходимо и достаточно, чтобы вектор дополнительных управлений $z \in \mathbb{R}^n$ удовлетворял условию (2.5). Теперь,

предполагая, что система (2.5) разрешима относительно z^2 , найдем решение системы (2.9). Будем искать его в виде

$$c = \tilde{A}^* \gamma + \bar{c}, \quad (2.13)$$

где $\mathbb{R}^m \ni \gamma$ – некоторый постоянный вектор; $\tilde{A}^*, \bar{c}$ определены в условии теоремы 3. В случае разрешимости система (2.9) равносильна системе

$$\tilde{A} \cdot c = \tilde{\xi}^1 - \tilde{\xi}^0 + \tilde{R},$$

где $\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^0, \tilde{R}$ определены в условии данной теоремы. Из двух последних равенств получаем:

$$\gamma = (\tilde{A} \tilde{A}^*)^{-1} (\tilde{\xi}^1 - \tilde{\xi}^0 + \tilde{R}).$$

Тогда из (2.13) следует, что

$$c = \tilde{A}^* (\tilde{A} \tilde{A}^*)^{-1} (\tilde{\xi}^1 - \tilde{\xi}^0 + \tilde{R}) + \bar{c}. \quad (2.14)$$

Далее, так же как и при доказательстве теоремы 1, получаем выражение для программного управления $u(t)$ и программного движения $x(t)$ с тем отличием, что теперь вектор c находится по формуле (2.14). Чтобы убедиться, что построенное управление переводит систему (1.1) из состояния x^0 в область $\Lambda(x^1)$, положим $t = t_0 + T$ в выражении для соответствующего ему программного движения $x(t)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} x(t_0 + T) &= Y(t_0 + T) [x^0 + A(t_0, t_0 + T)c + \int_{t_0}^{t_0+T} B(\tau) \bar{v}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau) F_1(\tau) d\tau] = Y(t_0 + T) [x^0 + \xi^1 - \xi^0 + R + \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau) F_1(\tau) d\tau] = x^1 + z^2 \geq x^1, \end{aligned}$$

т. е. $x(t_0 + T) \in \Lambda(x^1)$, что и требовалось доказать. Наконец, заметим, что при произвольном векторе $x^0 \in \mathbb{R}^n$ условие разрешимости системы (2.5) накладывает ограничение на вектор $x^1 \in \mathbb{R}^n$ и задача программного управления разрешима для тех и только тех векторов x^1 , для которых разрешима относительно z^2 система уравнений (2.5). $\square$

Замечание 7. Согласно лемме 2 ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ не зависит от выбора матрицы $\delta \in \{\delta\}_\beta$. Следовательно, условие (2.5) также не зависит от выбора $\delta \in \{\delta\}_\beta$.

Замечание 8. В условие (2.5) входит матрица $\bar{S}$, которая может быть неединственной. Покажем, что для различных матриц $\bar{S}$ условие (2.5) не изменяется. Пусть $\hat{S}_{k_1}, \hat{S}_{k_2}, \dots, \hat{S}_{k_{n-m}}$ – попарно ортогональные собственные вектор-строки матрицы $A(t_0, t_0 + T)$, соответствующие нулевому собственному числу кратности $n - m$ и отличные от $S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_{n-m}}$, для которых система (2.5) разрешима относительно z^2 при некоторых $x^1 \in \mathbb{R}^n$. Так как векторы $\hat{S}_{k_i}, S_{l_i}, i = 1, 2, \dots, n - m$ образуют базисы в $(n - m)$ -мерном подпространстве $\mathbb{R}^n$, то существует неособая матрица G такая, что:

$$\bar{\hat{S}} = G\bar{S},$$

где матрица G имеет размерность $\{(n - m) \times (n - m)\}$, $\bar{\hat{S}}$ – матрица, строки которой есть векторы $\hat{S}_{k_1}, \hat{S}_{k_2}, \dots, \hat{S}_{k_{n-m}}$. Подставляя $\bar{S} = G^{-1}\bar{\hat{S}}$ в (2.5), получим:

$$\bar{\hat{S}}Y^{-1}(t_0 + T)z^2 = \bar{\hat{S}}(\xi^0 - \xi^1).$$

Так как эта система эквивалентна системе (2.5), то множество векторов $x^1 \in \mathbb{R}^n$, для которых система (2.5) разрешима относительно z^2 , совпадает с аналогичным множеством для последней системы. Тем самым показано, что выбор собственных векторов $S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_{n-m}}$ или матрицы $\bar{S}$ не влияет на условие разрешимости системы (2.5).

Замечание 9. Обозначим через $X^+(\Omega, x^0, T)$ множество тех векторов $x^1 \in \mathbb{R}^n$, для которых система (2.5) имеет решение z^2 . Множество $X^+(\Omega, x^0, T)$ назовем множеством z^2 -достижимости.

Остановимся теперь на вопросе существования решений z^2 системы линейных уравнений (2.5).

ЛЕММА 4. Система (2.5) имеет решение z^2 тогда и только тогда, когда разрешимо относительно вектора $\sigma \in \mathbb{R}^m$ неравенство

$$Y(t_0 + T)\bar{\bar{S}}\sigma \geq Y(t_0 + T)(\xi^1 - \xi^0),$$

где $\bar{\bar{S}}$ – матрица размерности $\{n \times m\}$, столбцами которой являются попарно ортогональные собственные векторы $\bar{\bar{S}}_{k_1}, \bar{\bar{S}}_{k_2}, \dots, \bar{\bar{S}}_{k_m}$ матрицы $A(t_0, t_0 + T)$, соответствующие ненулевым собственным числам этой матрицы.

Доказательство. Сначала заметим, что система

$$\bar{S}Y^{-1}(t_0 + T)\bar{x} = \bar{S}(\xi^0 - \xi^1) \quad (2.15)$$

всегда имеет решение $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, так как строки матрицы $\bar{S}$ линейно независимы и, следовательно, ранг матрицы $\bar{S}Y^{-1}(t_0 + T)$ равен рангу расширенной матрицы $\{\bar{S}Y^{-1}(t_0 + T); \bar{S}(\xi^0 - \xi^1)\}$ и равен, в свою очередь, $n - m$. Так что вопрос заключается в существовании неотрицательных решений $\bar{x} \geq 0$ системы (2.15). Система (2.5) эквивалентна системе

$$\bar{S}(Y^{-1}(t_0 + T)z^2 - \xi^0 + \xi^1) = 0,$$

или

$$\bar{S} \cdot W = 0,$$

где $W = Y^{-1}(t_0 + T)z^2 - \xi^0 + \xi^1$.

Из последнего равенства получаем

$$z^2 = Y(t_0 + T)(W + \xi^0 - \xi^1).$$

Таким образом, существование решения z^2 системы (2.5) эквивалентно существованию решения W неравенства

$$Y(t_0 + T)(W + \xi^0 - \xi^1) \geq 0,$$

удовлетворяющего условию

$$\bar{S} \cdot W = 0,$$

откуда следует, что

$$W = \sigma_1 \bar{\bar{S}}_{k_1} + \sigma_2 \bar{\bar{S}}_{k_2} + \dots + \sigma_m \bar{\bar{S}}_{k_m},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ – произвольные вещественные постоянные, векторы $\bar{\bar{S}}_{k_1}, \bar{\bar{S}}_{k_2}, \dots, \bar{\bar{S}}_{k_m}$ определены в условии данной леммы. Из последнего равенства следует, что вектор W принадлежит подпространству $\mathbb{R}^n$, являющимся ортогональным дополнением полпространства, натянутого на векторы $S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_{n-m}}$. Далее из последних равенств получаем

$$Y(t_0 + T)(\bar{\bar{S}} \cdot \sigma + \xi^0 - \xi^1) \geq 0$$

или $Y(t_0 + T)\bar{\bar{S}} \cdot \sigma \geq Y(t_0 + T)(\xi^1 - \xi^0)$, где матрица $\bar{\bar{S}}$ определены в условии данной леммы, а вектор $\sigma \in R^m$ – вектор, имеющий компоненты $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. $\square$

Замечание 10. Если неравенство из леммы 4 имеет решение для какой-либо матрицы $\bar{\bar{S}}$, т. е. для какого-либо набора собственных векторов $\bar{\bar{S}}_{k_1}, \bar{\bar{S}}_{k_2}, \dots, \bar{\bar{S}}_{k_m}$, то оно разрешимо и для любого другого набора аналогичных собственных векторов $\bar{\bar{S}}'_{k_1}, \bar{\bar{S}}'_{k_2}, \dots, \bar{\bar{S}}'_{k_m}$. Покажем это. Так как векторы $\bar{\bar{S}}_{k_i}, \bar{\bar{S}}'_{k_i}$ образуют базисы в $\mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, m$, то существует неособая матрица $\bar{G}$ размерности $\{m \times m\}$ такая, что

$$\bar{\bar{S}}' = \bar{\bar{S}} \cdot \bar{G},$$

где $\bar{\bar{S}}'$ – матрица, столбцами которой являются векторы $\bar{\bar{S}}'_{k_i}$. Неравенство из леммы 4 с матрицей $\bar{\bar{S}}'$ имеет вид

$$Y(t_0 + T)\bar{\bar{S}}'\sigma \geq Y(t_0 + T)(\xi^1 - \xi^0).$$

Подставляя сюда $\bar{\bar{S}}'$ несложно получить неравенство

$$Y(t_0 + T)\bar{\bar{S}}\Theta \geq Y(t_0 + T)(\xi^1 - \xi^0),$$

где $\Theta = \bar{G}\sigma$. Но последнее неравенство с матрицей S по предположению имеет решение Θ . Следовательно, и неравенство из леммы 4 имеет решение $\sigma = \bar{G}^{-1}\Theta$, что и требовалось доказать.

Пользуясь результатами теории линейных неравенств [26], [44], можно без доказательства привести следующие утверждения.

ЛЕММА 5. Система линейных уравнений (2.5) имеет решение тогда и только тогда, когда неразрешима система неравенств

$$\begin{cases} y^* \bar{S} Y^{-1}(t_0 + T) & \geq 0, \\ y^* \bar{S}(\xi^0 - \xi^1) & < 0, \end{cases}$$

где $y \in \mathbb{R}^{n-m}$.

ЛЕММА 6. Система линейных неравенств из леммы 4 неразрешима тогда и только тогда, когда существует неотрицательное решение $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ системы

$$\begin{cases} \bar{y}^* Y(t_0 + T) \bar{S} & = 0, \\ \bar{y}^* Y(t_0 + T)(\xi^0 - \xi^1) & > 0. \end{cases}$$

3. ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ

Рассмотрим задачу распределения инвестиций, к решению которой применим разработанный аппарат построения программных управлений в линейной системе с линейными ограничениями смешанного типа, т.е. с ограничениями в виде систем равенств, содержащих состояние и управление. Пусть имеется n

производителей, например отраслей экономики (предприятий). Требуется распределить некоторую сумму инвестиций по отраслям (предприятиям) для их развития. Цель развития состоит в достижении отраслями некоторого нормативного (заданного) уровня в течение заданного промежутка времени. Истоки такой постановки восходят к экономической задаче, поставленной на заседании семинара по теории управления профессора В.И.Зубова (впоследствии члена-корреспондента АН СССР) на факультете прикладной математики-процессов управления Ленгосунiversитета (ныне СПбГУ) в 1970 г. представителями планового управления Ленгорисполкома. Успешное решение этой задачи математиками позволило экономистам разработать план пропорционального развития отраслей городского хозяйства на пять лет. Этот план также был успешно реализован. Для разработки экономического плана развития на следующие пять лет экономисты вновь обратились к сотрудникам университета, предоставив данные об уровне развития отраслей городского хозяйства на текущий год, т.е. на момент окончания реализации предыдущего плана. И что было поразительно: эти данные практически совпадали с рассчитанными математиками университета. Это яркий пример работоспособности математических методов в применении к решению глобальных экономических задач. Автору посчастливилось заниматься исследованием по дальнейшему развитию разработанных методов. Часть их представлена ниже.

Перейдем к формализации задачи [22]. Пусть $x_i(t)$ – количественная характеристика i -отрасли в момент времени t , $i = 1, \dots, n$, n – количество отраслей; $u_i(t)$ – скорость прироста инвестиций в отрасль i ; $a_i(t)$ – скорость прироста отрасли i на единицу капитала. Тогда уравнения развития отраслей можно представить в виде

$$\dot{x}_i = a_i(t)x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Источниками финансирования капиталовложений являются

собственные средства отраслей (предприятий), кредиты банка, бюджетные ассигнования. Тогда можно ввести следующее ограничение:

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \mu_i(t)x_i + g(t), \quad (3.2)$$

где $\mu_i(t)$ – скорость прироста собственных средств на единицу объема отрасли i , $g(t)$ – скорость прироста ассигнований из бюджета и кредит банка, выделяемых на развития отраслей. Последние две величины объединены в одну, поскольку они воспринимаются как внешнее воздействие на экономическую систему и их разделение в рассматриваемой задаче не требуется. Таким образом, представленное условие (3.2) отражает структуру инвестиций. Будем также полагать, что

$$u_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Это условие означает, что происходит развитие отраслей – монотонное возрастание $x_i(t)$.

Обобщим и уточним ограничение (3.2), учитывая технологическую структуру инвестиций (капиталовложений). Капитальные вложения складываются из следующих основных элементов: расходы на приобретение оборудования, инструмента и инвентаря; расходы на выполнение строительно-монтажных работ; прочие капиталовложения, к числу которых относятся проектно-изыскательские работы, заблаговременное проведение мероприятий по вводу сооружаемых объектов в эксплуатацию (подготовка для строящихся предприятий кадров основных профессий рабочих и др.). Соотношение перечисленных затрат и образует технологическую структуру капитальных вложений. В связи с этим заменим ограничение (3.2) следующим

$$\beta u = \sigma x + \gamma, \quad (3.4)$$

где β , σ – матрицы размерности $(k \times n)$; $\gamma \in \mathbb{R}^k$, $x, u \in \mathbb{R}^n$. Векторы x, u, γ имеют компоненты x_i, u_i, γ_j , соответственно,

$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$. Матрицы β, σ имеют элементы $\beta_{sl}, \sigma_{sl}, s = 1, 2, \dots, k; l = 1, 2, \dots, n$ соответственно. Будем предполагать, что β_{sl} – заданные постоянные, $\gamma_j = \gamma_j(t), \sigma_{sl} = \sigma_{sl}(t)$ заданные, непрерывные при $t \in [t_0, t_0 + T]$, функции, причем $\sigma_{sl}(t) \geq 0, \gamma_j(t) \geq 0, \gamma_j(t) \neq 0, \beta_{sl} > 0, \sum_{s=1}^k \beta_{sl} = 1$. Пусть ранг матрицы β равен $k, 0 < k < n$.

Величины β_{sl} являются весовыми коэффициентами, характеризующими распределение скорости прироста капиталовложений в l -ую отрасль по элементам технологической структуры; σ_{sl} – скорость прироста l -ой отрасли на единицу капитала s -го элемента технологической структуры; γ_j – скорость прироста капиталовложений j -го элемента технологической структуры за счет ассигнований из бюджета и кредита банка. Таким образом, векторно-матричное ограничение (3.2) отражает не только природу источников финансирования капиталовложений, но и их технологическую структуру, поскольку величина $\sum_{l=1}^n \beta_{sl} u_l$ характеризует суммарную скорость роста капиталовложений s -го элемента структуры, $\sum_{l=1}^n \sigma_{sl} x_l$ – суммарная скорость роста капиталовложений s -го элемента структуры за счет собственных средств.

Поставим задачу нахождения плана распределения капиталовложений u_i по отраслям, обеспечивающего переход последних из начальных состояний x_i^0 в конечные состояния x_i^1 за время T . При этом считаем, что величины u_i удовлетворяют условиям (3.2), (3.3) и вектор плана u – функция, суммируемая с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$. Для решения поставленной задачи применим результаты первого параграфа этой главы.

Обозначим через E_a матрицу размерности $\{n \times n\}$, по главной диагонали которой расположены элементы $a_i(t)$, остальные элементы – нули, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда уравнения (3.1) можно

записать в матричном виде:

$$\dot{x} = E_a \cdot u. \quad (3.5)$$

Матрица $B(t)$, определенная формулой в части 1 (лемма 1) будет иметь вид:

$$B(t) = Y^{-1}(t)E_a \cdot \delta, \quad (3.6)$$

где $Y(t)$ – фундаментальная матрица решений системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= E_a \beta_1 \sigma x, & Y(t_0) &= E, \\ \delta &\in \delta_\beta; & \beta_1 &= \beta^* (\beta \beta^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть, как и прежде

$$A(t_0, t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} B(\tau) B^*(\tau) d\tau.$$

Введем также следующие обозначения:

$$F_1(t) = E_a \beta_1 \gamma(t), \quad \delta_1 = (\delta^* \delta)^{-1} \delta^*.$$

Пусть $\mathbb{R}^n \ni x^0, x^1$ – векторы с компонентами x_i^0 , соответственно, $\xi^0 = x^0$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\xi^1 = Y^{-1}(t_0 + T)x^1 - \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau) F_1(\tau) d\tau.$$

Решение поставленной в этом параграфе задачи дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены следующие условия: 1) ранг матрицы β равен k , $0 < k < n$; 2) матрица $A(t_0, t_0 + T)$ неособая. Тогда для того, чтобы существовал план распределения инвестиций по отраслям $u_i(t) \geq 0, u_i(t) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, обеспечивающий развитие отраслей из начальных состояний x_i^0 в

конечные состояния x_i^1 , где $x_i^1 > x_i^0 \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, за время T , необходимо и достаточно, чтобы существовало решение $w^2(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, t_0 + T]$, системы интегральных уравнений

$$\beta w^2(t) = D(t) + \int_{t_0}^t C(t, \tau) w^2(\tau) d\tau, \quad (3.7)$$

удовлетворяющее ограничению:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} C_1(\tau) w^2(\tau) d\tau = \xi^1 - \xi^0, \quad (3.8)$$

где $w^2(t)$ – вектор-функция, суммируемая с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$, компонентами которой являются квадраты компонент вектора $w(t)$,

$$D(t) = \gamma(t) + \sigma(t)Y(t)x^0 + \sigma(t)Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau;$$

$$C(t, \tau) = \sigma(t)Y(t)B(\tau)\delta_1;$$

$C_1(t) = B(t)\delta_1$. При этом множество векторов планов распределения инвестиций имеет вид:

$$u = \beta_1(\gamma + \sigma x) + \delta(B^*c + \bar{v}), \quad \text{где} \quad (3.9)$$

$$\bar{v} = \bar{v}(t) = (\delta^*\delta)^{-1}\delta^*w^2(t) - B^*(t)c, \quad (3.10)$$

$$c = A^{-1}(t_0, t_0 + T)(\xi^1 - \xi^0).$$

Доказательство. Из условий 1), 2) данной теоремы и из теоремы 1 следует, что отрасли можно перевести из любого начального состояния в любое конечное состояние $x^1 > x^0$ за время T с помощью векторов планов распределения капиталовложений,

имеющих вид (3.9), где вектор-функция $\bar{v}(t) \in \mathbb{R}^{n-k}$ суммируема с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_{t_0}^{t_0+T} B(\tau)\bar{v}(\tau)d\tau = 0.$$

Из множества векторов планов, получаемых с помощью теоремы 1, согласно требованию теоремы, следует отобрать планы, удовлетворяющие условию (3.3), или $u(t) \geq \mathbf{0}, u(t) \neq \mathbf{0}, t \in [t_0, t_0 + T]$. Если переписать (3.9) в виде

$$u = u(\bar{v}) = \beta_1(\gamma + \sigma x(\bar{v})) + \delta(B^*c + \bar{v}), \quad (3.11)$$

то, очевидно, нужно из множества вектор-функций $\bar{v}$, суммируемых с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяющих условию ортогональности, отобрать такие, для которых будет выполняться условие (3.3). Для этого введем в рассмотрение вектор-функцию $w^2(t) \in \mathbb{R}^n$, имеющую своими компонентами квадраты компонент произвольной вектор-функции $w(t) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющую условию

$$u(t) = w^2(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Согласно теореме 1, вектор количественных характеристик отраслей $x(t)$, соответствующий вектору планов (3.11), имеет вид:

$$x(t) = Y(t)[x^0 + A(t_0, t)c + \int_{t_0}^t B(\tau)\bar{v}(\tau)d\tau + \\ + \int_{t_0}^t Y^{-1}F_1(\tau)d\tau], \text{ где: } A(t_0, t) = \int_{t_0}^t B(\tau)B^*(\tau)d\tau.$$

Из последних соотношений получаем:

$$w^2(t) = \beta_1[\gamma(t) + \sigma(t)Y(t)(x^0 + A(t_0, t)c + \int_{t_0}^t B(\tau)\bar{v}(\tau)d\tau + \\ + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau)] + \delta(B^*(t)c + \bar{v}(t)).$$

Далее, используя условие 1) теоремы и свойство матрицы δ , умножая последнее равенство слева сначала на β , а затем на δ^* , получаем, что

$$\beta w^2(t) = \gamma(t) + \sigma(t)Y(t)(x^0 + A(t_0, t)c + \int_{t_0}^t B(\tau)\bar{v}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau) \\ \bar{v}(t) = (\delta^*\delta)^{-1}\delta^*w^2(t) - B^*(t)c.$$

Таким образом, соотношение для $w^2(t)$ равносильно двум последним равенствам, из которых получаем интегральное уравнение (3.7). Далее, учитывая, что $\bar{v}(t)$ удовлетворяет условию ортогональности, получаем условие (3.8). Таким образом, если интегральное уравнение (3.7) имеет решение $w(t)$, то, подставляя выражение для $\bar{v}(t)$ в (3.9), получим требуемый вектор плана распределения инвестиций. $\square$

Поставим теперь задачу нахождения такого плана распределения капиталовложений, что вместо условия (3.3), выполняется условие

$$x(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (3.12)$$

Очевидно, при выполнении (3.3) последнее условие также выполняется, но теперь допускается спад в развитии отрасли i (если $u_i < 0$). Вопрос о существовании такого плана решается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 3.

Тогда для того, чтобы существовал план распределения капиталовложений, для которого выполняется условие (3.12), обеспечивающий переход отраслей из начальных состояний $x_i^0 \geq 0$ в конечные состояния $x_i^1 > x_i^0, i = 1, 2, \dots, n$, за время T , необходимо и достаточно, чтобы существовало решение $\bar{w}(t) \in R^n$ системы дифференциальных уравнений

$$\beta_1 \beta E_a^{-1} \dot{\bar{w}}^2 = \beta_1 (\gamma + \sigma \bar{w}^2),$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\bar{w}^2(t_0) = x^0, \quad \bar{w}^2(t_0 + T) = x^1,$$

где через $\bar{w}^2(t)$ обозначен вектор, компонентами которого являются квадраты компонент вектора $\bar{w}(t)$. При этом множество векторов планов распределения капиталовложений имеет вид (3.9), где вектор $\bar{v}$ является решением системы линейных уравнений

$$\delta \bar{v} = E_a^{-1} \dot{\bar{w}}^2 - \beta_1 \gamma - \beta_1 \sigma \bar{w}^2 - \delta B^* c.$$

где

$$c = A^{-1}(t_0, t_0 + T)(\xi^1 - \xi^0).$$

Доказательство. Из условий 1), 2) теоремы 3 и из теоремы 1 следует, что отрасли можно перевести из любого начального состояния $x^0 \geq 0$ в любое конечное $x^1 > x^0$ за время T , с помощью векторов планов распределения инвестиций (3.9), где $\bar{v}(t) \in \mathbb{R}^{n-k}$ суммируема с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяет условию ортогональности. Из этого множества векторов планов следует отобрать такие, для которых выполняется условие (3.12), т. е. из множества функций $\bar{v}(t)$, обладающих указанными выше свойствами, надо отобрать такие, для которых выполняется (3.12).

Введем в рассмотрение вектор-функцию $\bar{w}^2(t) \in \mathbb{R}^n$, имеющую своими компонентами квадраты компонент произвольной вектор-функции $\bar{w}(t) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющую условию:

$$x(t) = \bar{w}^2(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

При этом, естественно, будут выполняться граничные условия:

$$\bar{w}^2(t_0) = x^0, \quad \bar{w}^2(t_0 + T) = x^1. \quad (3.13)$$

Используя выражение для $x(t)$, полученное при доказательстве теоремы 3, получим:

$$Y(t)[x^0 + A(t_0, t)c + \int_{t_0}^t B(\tau)\bar{v}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau] = \bar{w}^2(t).$$

Умножая слева последнее равенство на $Y^{-1}(t)$, а затем дифференцируя обе части получившегося равенства, получаем, что интегральное относительно $\bar{v}(t)$ уравнение, эквивалентное следующему уравнению относительно $\bar{v}(t)$:

$$BB^*c + B\bar{v} + Y^{-1}F_1 = -Y^{-1}E_a\beta_1\sigma\bar{w}^2 + Y^{-1}\dot{\bar{w}}^2.$$

Умножая обе части последнего соотношения слева на $E_a^{-1}Y$, получаем уравнение относительно $\bar{v}$:

$$\delta\bar{v} = E_a^{-1}\dot{\bar{w}}^2 - \beta_1\gamma - \beta_1\sigma\bar{w}^2 - \delta B^*c := f. \quad (3.14)$$

Эта система имеет решение $\bar{v}$ тогда и только тогда, когда при любом $t \in [t_0, t_0 + T]$ ранг матрицы δ равен рангу расширенной матрицы $(\delta; f)$, что, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда вектор f при любом $t \in [t_0, t_0 + T]$ принадлежит подпространству, натянутому на столбцы матрицы δ . Рассмотрим ортогональное разложение вектора $E_a^{-1}\dot{\bar{w}}^2$:

$$E_a^{-1}\dot{\bar{w}}^2 = \eta_1 + \eta_2,$$

где $\eta_1 = \eta_1(t) \in \mathbb{R}_\beta, \eta_2 = \eta_2(t) \in \mathbb{R}_\delta^\perp; \mathbb{R}_\beta, \mathbb{R}_\delta^\perp$ введены в части 1.

При этом, очевидно:

$$\eta_1(t) = \beta^* \bar{\eta}_1(t), \quad \eta_2(t) = \delta \bar{\eta}_2(t).$$

Подставляя эти выражения для $\eta_1(t), \eta_2(t)$ в предыдущее соотношение и умножая слева на β^* получившееся равенство, найдем $\bar{\eta}_1(t)$:

$$\bar{\eta}_1(t) = (\beta\beta^*)^{-1} \beta E_a^{-1} \dot{w}^2.$$

Из вида f и из вышесказанного следует, что для разрешимости (3.14) относительно $\bar{v}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$\beta_1 \beta E_a^{-1} \dot{w}^2 = \beta_1 (\gamma + \sigma \bar{w}^2), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Это есть система дифференциальных уравнений из условия теоремы 4.

Таким образом, существование решения $\bar{w}(t)$ этой системы, удовлетворяющего граничным условиям (3.13), является необходимым и достаточным условием разрешимости системы (3.14) относительно функции $\bar{v}$, для которой будет выполняться (3.12). $\square$

4. ДОПУСТИМЫЙ ПЛАН В СЛУЧАЕ СКАЛЯРНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ

Вернемся теперь к задаче, поставленной в параграфе 3 этой главы, т. е. будем находить план распределения инвестиций для системы (3.1) или (3.5) при ограничениях (3.2), (3.3), без учета технологической структуры капиталовложений. Естественно, к данному случаю применимы результаты предыдущего параграфа, но можно упростить процесс построения плана и получить более наглядные выводы. Для этого будем искать u_i в виде

$$u_i(t) = v_i(t) + \mu_i(t)x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

где $v_i(t)$ —некоторая подлежащая нахождению функция. Подставляя u_i из (4.1) в (3.1) и (3.2), получаем

$$\dot{x}_i = a_i(t)v_i + a_i(t)\mu_i(t)x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i(t) = g(t). \quad (4.3)$$

Таким образом, задача нахождения плана $u_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, для системы (3.1) при ограничении (3.2) свелась к нахождению набора функций $v_i = v_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, который назовем вспомогательным планом для системы (4.2) при ограничении (4.3).

Как следует из параграфа 1 этой главы, большую роль при построении плана играет соответствующая фундаментальная матрица $Y(t)$ решений некоторой однородной системы дифференциальных уравнений. Применяя представление (4.1), для данного случая матрицу $Y(t)$ можно выразить в явном виде, а именно в диагональном виде. Покажем это. Перепишем систему (4.2) и ограничение (4.3) в матричном виде

$$\dot{x} = E_a \cdot v + E_{a\mu} \cdot x; \quad (4.4)$$

$$I \cdot v = g, \quad (4.5)$$

где диагональная матрица E_a имеет a_i на диагонали; $\mathbb{R}^n \ni v$ — вектор с компонентами v_i ; $E_{a\mu}$ —диагональная матрица размерности $\{n \times n\}$ с элементами $a_i(t)\mu_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ на главной диагонали; I — матрица размерности $\{1 \times n\}$, состоящая из единиц.

Теперь, следуя схеме, изложенной в параграфе 1, освободимся от связей (4.5). Для этого воспользуемся рассуждением, с помощью которого получено выражение (1.6). Аналогичное выражение для v , получающееся из (4.5), имеет вид:

$$v = v(t) = I^*(II^*)^{-1}g(t) + \bar{\delta}\bar{v}(t) = \frac{g(t)}{n}I^* + \bar{\delta}\bar{v}(t), \quad (4.6)$$

где $\bar{\delta}$ – матрица размерности $\{n \times (n-1)\}$, столбцы которой образуют базис в ортогональном дополнении подпространства, натянутого на вектор-строку I ; обозначим множество таких матриц через $\{\bar{\delta}\}_I$; $\mathbb{R}^{n-1} \ni \bar{v}(t)$ – произвольная, суммируемая с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ вектор-функция. Подставляя $v(t)$ из (4.6) в (4.4), получим систему:

$$\dot{x} = E_{a\mu}x + E_a\bar{\delta}\bar{v} + \frac{g(t)}{n}I_a^*, \quad (4.7)$$

где $I_a^* \in \mathbb{R}^n \ni a^*$ – вектор-столбец с элементами $a_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, система (4.4) с ограничением (4.5) сведена к равносильной системе (4.7) без ограничений. Как обычно, обозначим через $Y(t)$ фундаментальную матрицу решений системы

$$\dot{x} = E_{a\mu}x,$$

причем $Y(t_0) = E$. Очевидно, что вид $Y(t)$ – диагональная

матрица с элементами $e^{\int_{t_0}^t a_i(\tau)\mu_i(\tau)d\tau}$, $i = 1, 2, \dots, n$, на главной диагонали. Тогда обратная матрица $Y^{-1}(t)$ имеет элемен-

ты $e^{-\int_{t_0}^t a_i(\tau)\mu_i(\tau)d\tau}$ на главной диагонали. Введем, следуя общей схеме рассуждений, матрицы $B(t)$, $A(t_0, t_0 + T)$:

$$B(t) = Y^{-1}(t)E_a\bar{\delta}, \quad (4.8)$$

$$A(t_0, t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} B(\tau)B^*(\tau)d\tau. \quad (4.9)$$

Докажем утверждение об условиях особенности матрицы $A(t_0, t_0 + T)$.

ЛЕММА 7. *Для того, чтобы матрица $A(t_0, t_0 + T)$ была особой, необходимо и достаточно, чтобы существовали постоян-*

ные $d_j \neq 0, j = 2, 3, \dots, n$, такие, что выполняются равенства:

$$a_j e^{-\int_{t_0}^t a_j(\tau) \mu_j(\tau) d\tau} = d_j a_1(t) e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau};$$

$$j = 2, 3, \dots, n; t \in [t_0, t_0 + T].$$

Доказательство. Как известно [30], особенность матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ эквивалентна линейной зависимости строк матрицы $B(t)$. Далее, как следует из леммы 3, ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ не зависит от матрицы $\bar{\delta}$, обладающей указанными выше свойствами. Поэтому при доказательстве леммы в качестве $\bar{\delta}$ возьмем следующую матрицу:

$$\bar{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

т. е. если $\bar{\delta}_{il}$ — элементы матрицы $\bar{\delta}, i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n - 1$, то:

$$\bar{\delta}_{il} = \begin{cases} 1, & i = 1, & l = 1, 2, \dots, n - 1 \\ -1, & i = l + 1, & l = 1, 2, \dots, n - 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко проверить, что матрица $\bar{\delta}$ имеет свойства линейной независимости столбцов и их ортогональности вектор-строке I . Тогда:

$$B(t) = \begin{pmatrix} -\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau & -\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau & \cdots & -\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau \\ a_1(t) e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau} & a_1(t) e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau} & \cdots & a_1(t) e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau} \\ -\int_{t_0}^t a_2(\tau) \mu_2(\tau) d\tau & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\int_{t_0}^t a_n(\tau) \mu_n(\tau) d\tau \\ & & & a_n(t) e^{-\int_{t_0}^t a_n(\tau) \mu_n(\tau) d\tau} \end{pmatrix}$$

Линейная зависимость строк матрицы $B(t)$ означает, что существуют постоянные $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, среди которых есть ненулевые, такие, что выполняются соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 a_1(t) e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau} & = & \lambda_2 a_2(t) e^{-\int_{t_0}^t a_2(\tau) \mu_2(\tau) d\tau} \\ \lambda_1 a_1(t) e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau} & = & \lambda_3 a_3(t) e^{-\int_{t_0}^t a_3(\tau) \mu_3(\tau) d\tau} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \lambda_1 a_1(t) e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) \mu_1(\tau) d\tau} & = & \lambda_n a_n(t) e^{-\int_{t_0}^t a_n(\tau) \mu_n(\tau) d\tau} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

$$t \in [t_0, t_0 + T].$$

Если $\lambda_1 = 0$, то учитывая, что $a_i \neq 0, t \in [t_0, t_0 + T]$, получаем: $\lambda_i = 0, j = 2, 3, \dots, n$.

Если для некоторого $k : 2 \leq k \leq n, \lambda_k = 0$, то, очевидно, $\lambda_1 = 0$ и снова имеем $\lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, в случае линейной зависимости строк $B(t), \lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$. Вводя обозначение $d_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_j}, j = 2, 3, \dots, n$, из (4.11) получаем, что линейная зависимость строк матрицы $B(t)$ эквивалентна выполнению соотношений, сформулированных в данной лемме. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $a_i(t) = a_{i_0}, \mu_i(t) = \mu_{i_0}, i = 1, 2, \dots, n$, где a_{i_0}, μ_{i_0} - постоянные величины, то матрица $A(t_0, t_0 + T)$ будет особой тогда и только тогда, когда:

$$a_{i_0} \mu_{i_0} = a_{j_0} \mu_{j_0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.12)$$

Действительно, в этом случае соотношения из леммы 7 при-

нимают вид:

$$\begin{cases} d_2 a_{1_0}(t) e^{-a_{1_0} \mu_{1_0}(t-t_0)} & = & a_{2_0}(t) e^{-a_{2_0} \mu_{2_0}(t-t_0)} \\ d_3 a_{1_0}(t) e^{-a_{1_0} \mu_{1_0}(t-t_0)} & = & a_{3_0}(t) e^{-a_{3_0} \mu_{3_0}(t-t_0)} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ d_n a_{1_0}(t) e^{-a_{1_0} \mu_{1_0}(t-t_0)} & = & a_{n_0}(t) e^{-a_{n_0} \mu_{n_0}(t-t_0)} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$t \in [t_0, t_0 + T].$$

Так как соотношения (4.13) должны выполняться при любом $t \in [t_0, t_0 + T]$, то существование постоянных $d_j \neq 0, j = 2, 3, \dots, n$, для которых выполняется (4.13) эквивалентно выполнению соотношений (4.12).

Теперь сформулируем условия существования плана при заданной функции $g(t)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть не существует таких постоянных величин $d_j \neq 0, j = 2, 3, \dots, n$, что выполняются равенства из леммы 7. Тогда для того, чтобы существовал план распределения капиталовложений по отраслям $u_i(t) \geq 0, u_i(t) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, обеспечивающий их развитие из начальных состояний $x_i^0 \geq 0$ в конечные состояния $x_i^1 > x_i^0, i = 1, 2, \dots, n$, за время T , необходимо и достаточно, чтобы существовала вектор-функция $\bar{v}(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$, суммируемая с квадратом на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяющая условиям:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} B(\tau) \bar{v}(\tau) d\tau = 0; \quad (4.14)$$

$$u_i(t, \bar{v}) = \mu_i(t) x_i(t, \bar{v}) + \bar{\delta}_i^* (B^*(t) c + \bar{v}(t)) + a_i(t) \cdot \frac{g(t)}{n} \geq 0; \quad (4.15)$$

$$u_i(t, \bar{v}) \neq 0; \quad t \in [t_0, t_0 + T]; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.16)$$

где:

$$x_i(t, \bar{v}) = e^{\int_{t_0}^t a_i(\tau) \mu_i(\tau) d\tau} \cdot \left\{ x_i^0 + \int_{t_0}^t a_i(t) [\bar{\delta}_i^*(B^*(t)c + \bar{v}(t)) + \frac{g(t)}{n}] e^{-\int_{t_0}^t a_i(\tau) \mu_i(\tau) d\tau} dt \right\};$$

$\bar{\delta}_i^*$ – i -ая строка матрицы $\bar{\delta} \in \{\bar{\delta}\}_I$;

$$c = A^{-1}(t_0, t_0 + T)(Y^{-1}(t_0 + T)x^1 - \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau) \bar{F}_1(\tau) d\tau - x^0);$$

$$\bar{F}_1(t) = \frac{g(t)}{n} \cdot I_a^*.$$

При этом множество планов распределения имеет вид (4.15), а количественные характеристики отраслей определяются выражением для $x_i(t, \bar{v})$.

Доказательство. Условие несуществования d_j гарантирует, согласно лемме 7, неособенность матрицы $A(t_0, t_0 + T)$, а тогда из теоремы 1 следует существование плана, обеспечивающего переход отраслей из любого состояния $x^0 \geq 0$ в любое состояние $x^1 > x^0$ за время T .

Соотношения (4.15), (4.16) обеспечивают существование таких $\bar{v}(t)$, удовлетворяющих условию (4.14), что выполняется $u_i(t) \geq 0, u_i(t) \neq 0$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$. Соотношение (4.15) получается из (4.1) применением теоремы 1 к системе (4.4) с ограничением (4.5). Выражение для $x_i(t, \bar{v})$ получается после интегрирования i -го уравнения системы (4.7) при $\bar{v}(t) = B^*(t)c + \bar{v}(t)$. При этом, вследствие диагональности матрицы $E_{a\mu}$, интегрирование каждого уравнения системы (4.7) можно производить

независимо от других уравнений, что оправдывает применение преобразования (4.1). $\square$

Далее, сформулируем условия существования плана, для которого выполнено более слабое, по сравнению с (3.3), ограничение, а именно - $x(t) \geq 0$, $t \in [t_0, t_0 + T]$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть не существует постоянных $d_j \neq 0$, таких, что выполняются равенства из заключения леммы 7, $j = 2, 3, \dots, n$. Тогда для того, чтобы существовал план распределения капиталовложений, для которого $x(t) \geq 0$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, обеспечивающий переход отраслей из начальных состояний $x_i^0 \geq 0$ в конечные состояния $x_i^1 > x_i^0$, $i = 1, 2, \dots, n$ за время T , необходимо и достаточно, чтобы существовала вектор-функция $\bar{v}(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$, суммируемая с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяющая условиям (4.14), и

$$x_i(t, \bar{v}) \geq 0; \quad t \in [t_0, t_0 + T]; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $x_i(t, \bar{v})$ имеет такой же вид как в теореме 5.

При этом всевозможные планы распределения капиталовложений $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, задаются выражением (4.15).

Доказательство этой теоремы очевидно.

5. ПОСТРОЕНИЕ ДОПУСТИМОГО ПЛАНА В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Если матрица $A(t_0, t_0 + T)$ особая, то, распределения инвестиций имеет решение не всегда. Можно воспользоваться рассуждениями из параграфа 2 и получить условия разрешимости, но мы изменим постановку задачи. А именно: будем искать план, обеспечивающий переход отраслей за время T из состояний $x_i^0 \geq 0$ в состояния $x_i(t_0 + T) \geq x_i^1$, где $x_i^1 > x_i^0$. Таким образом, требуется построить такой план, чтобы отрасли к заданному моменту

времени имели количественные характеристики, не меньшие заданных.

Для того, чтобы использовать условия теоремы 2, сделаем следующие замечания. Пусть в формулировке этой теоремы матрица $A(t_0, t_0 + T)$ и фундаментальная матрица $Y(t)$, $Y(t_0) = E$ такие же как в теореме 3; $\Omega(x, t)$ —множество планов $u(t)$, определяемое для системы (3.5) с ограничением (3.4) так же, как соответствующее множество в теореме 2; векторы ξ^1 , ξ^0 задаются как обычно:

$$\xi^1 = Y^{-1}(t_0 + T)x^1 - \int_{t_0}^{t_0+T} Y^{-1}(\tau)F_1(\tau)d\tau; \quad \xi^0 = x^0,$$

где $F_1(t)$ такое же как в теореме 3.

Теперь сформулируем условия существования плана, переводящего отрасли в область $\Lambda(x^1) = \{x : x \geq x^1, x, x^1 \in R^n\}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть система (2.5) разрешима относительно z^2 . Тогда для того, чтобы существовал план распределения капиталовложений, удовлетворяющий условию (3.3) и переводящий отрасли из состояния $x^0 \geq 0$ в область $\Lambda(x^1)$ за время T , где $x^1 > x^0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала вектор-функция $w(t) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям теоремы 3. При этом вектор s теперь имеет вид (2.6), векторы планов и количественных характеристик отраслей задаются формулами из теоремы 3, условие (3.8) примет вид:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} C_1(\tau)w^2(\tau)d\tau = \xi^1 - \xi^0 + R.$$

Доказательство. Выполнение условий теоремы 2 гарантирует существование плана $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, переводящего отрасли

из состояния x^0 в область $\Lambda(x^1)$ (как указывалось в доказательстве теоремы 2, это возможно не для любых x^1). Существование же вектора $w(t)$, удовлетворяющего условиям теоремы 3, обеспечивает выполнение условия (3.3). $\square$

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены условия теоремы 2 и система (2.5) разрешима относительно z^2 . Тогда для того, чтобы существовал план распределения капиталовложений $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, для которого выполняется условие $x(t) \geq 0$, переводящий отрасли из состояния $x^0 \geq 0$ в область $\Lambda(x^1)$ за время T , где $x^1 > x^0$ необходимо и достаточно, чтобы существовала вектор-функция $\bar{w}(t) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям теоремы 4. При этом теперь вектор c имеет вид (2.6), граничные условия задаются следующим образом:

$$\bar{w}^2(t_0) = x^0; \quad \bar{w}^2(t_0 + T) = x^1 + z^2,$$

векторы планов и количественных характеристик отраслей задаются формулами из теоремы 3.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Рассмотрим вопрос существования плана в случае скалярного ограничения (3.2). Поскольку это частный случай ограничения (3.4), то для него справедливы результаты теорем 7, 8, но можно получить и более наглядные результаты, особенно для постоянных $a_i, \mu_i, i = 1, 2, \dots, n$, связанные с упрощением условия теоремы 2 о разрешимости системы (2.5) относительно z^2 .

Итак, пусть в системе (3.1) величины $a_i, \mu_i, i = 1, 2, \dots, n$ являются постоянными:

$$a_i(t) = a_{i_0} > 0, \quad \mu_i(t) = \mu_{i_0} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где a_{i_0}, μ_{i_0} — заданные константы.

ЛЕММА 8. Пусть матрица $A(t_0, t_0 + T)$ для системы (3.1) при ограничении (3.2) для постоянных a_i, μ_i является особой. Тогда для существования управления $u(t)$, переводящего систему (3.1) при ограничении (3.2) из произвольного состояния x^0 в область $\Lambda(x^1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$e^{-\eta(t_0+T)} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^1}{a_{i_0}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^0}{a_{i_0}} + \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\eta(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau,$$

$$\eta = a_{i_0} \mu_{i_0}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что равенство $\eta = a_{i_0} \mu_{i_0}, i = 1, 2, \dots, n$ имеет смысл, так как особенность матрицы $A(t_0, t_0 + T)$, согласно следствию леммы 7, эквивалентна равенству друг другу произведений $a_{i_0} \mu_{i_0}, i = 1, 2, \dots, n$. Через η обозначено их общее значение. Пусть сначала $\eta \neq 0$.

Итак, пусть система (3.1) с ограничением (3.2) приведена к системе (4.7). Для существования управления $\bar{v}(t)$, переводящего эту систему из состояния x^0 в состояние $x^1 + z^2$ за время T , необходимо и достаточно, как следует из доказательства теоремы 2, чтобы имела решение система (2.9). Определим конкретный вид входящих в систему (2.9) векторных и матричных величин для рассматриваемого случая. В качестве δ возьмем матрицу (4.10). Тогда получим:

$$B(t) = Y^{-1}(t) E \delta = e^{-\eta(t-t_0)} \begin{pmatrix} a_{1_0} & a_{1_0} & a_{1_0} & \dots & a_{1_0} \\ -a_{2_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{3_0} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n_0} \end{pmatrix};$$

$$A(t_0, t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-2\eta(\tau-t_0)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{pmatrix} (n-1)a_{1_0}^2 & -a_{1_0}a_{2_0} & -a_{1_0}a_{3_0} & \dots & -a_{1_0}a_{n_0} \\ -a_{1_0}a_{2_0} & a_{2_0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{1_0}a_{3_0} & 0 & a_{3_0}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1_0}a_{n_0} & 0 & 0 & \dots & a_{n_0}^2 \end{pmatrix} d\tau = \\
& = \frac{1 - e^{-2\eta T}}{2\eta} \begin{pmatrix} (n-1)a_{1_0}^2 & -a_{1_0}a_{2_0} & -a_{1_0}a_{3_0} & \dots & -a_{1_0}a_{n_0} \\ -a_{1_0}a_{2_0} & a_{2_0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{1_0}a_{3_0} & 0 & a_{3_0}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1_0}a_{n_0} & 0 & 0 & \dots & a_{n_0}^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Если ξ_i^1, ξ_i^0, R_i —компоненты векторов ξ^1, ξ^0, R (вектор R введен в условии теоремы 3) соответственно, то получим:

$$\xi_i^1 = e^{-\eta(t_0+T)} x_i^1 - \frac{a_{i_0}}{n} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\eta(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau,$$

$$\xi_i^0 = x_i^0,$$

$$R_i = e^{-\eta(t_0+T)} z_i^2, i = 1, 2, \dots, n,$$

где z_i^2 —компоненты вектора z^2 .

Легко показать, что ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ равен $n - 1$. Действительно, $A(t_0, t_0 + T)$ —особая матрица, а минор $n - 1$ порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{2_0}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{3_0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n_0}^2 \end{vmatrix}$$

равен $(a_{2_0} \cdot a_{3_0} \cdot \dots \cdot a_{n_0})^2$, т. е. не равен нулю.

Для разрешимости системы (2.9) относительно s необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $A(t_0, t_0 + T)$ равнялся рангу расширенной матрицы $\{A(t_0, t_0 + T); \xi^1 - \xi^0 + R\}$, полученной приписыванием к $A(t_0, t_0 + T)$ столбца $\xi^1 - \xi^0 + R$.

Имеем:

$$\{A(t_0, t_0 + T); \xi^1 - \xi^0 + R\} =$$

$$= \left\{ \frac{1 - e^{-2\eta T}}{2\eta} \begin{pmatrix} (n-1)a_{1_0}^2 & -a_{1_0}a_{2_0} & -a_{1_0}a_{3_0} & \dots & -a_{1_0}a_{n_0} \\ -a_{1_0}a_{2_0} & a_{2_0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{1_0}a_{3_0} & 0 & a_{3_0}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1_0}a_{n_0} & 0 & 0 & \dots & a_{n_0}^2 \end{pmatrix}; \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} e^{-\eta(t_0+T)}(x_1^1 + z_1^2) - \frac{a_{1_0}}{n} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\eta(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau - x_1^0 \\ e^{-\eta(t_0+T)}(x_2^1 + z_2^2) - \frac{a_{2_0}}{n} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\eta(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau - x_2^0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ e^{-\eta(t_0+T)}(x_n^1 + z_n^2) - \frac{a_{n_0}}{n} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\eta(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau - x_n^0 \end{array} \right\}$$

Умножим j -ую строку этой матрицы на $\frac{a_{1_0}}{a_{j_0}}, j = 2, 3, \dots, n$ и затем прибавим все строки к первой строке. Тогда первая строка примет вид:

$$\left(0 \ 0 \ \dots \ 0; e^{-\eta(t_0+T)} \left[x_1^1 + z_1^2 + \sum_{j=2}^n (x_j^1 + z_j^2) \frac{a_{1_0}}{a_{j_0}} \right] - \right.$$

$$\left. -a_{1_0} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\eta(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau - x_{1_0} - a_{1_0} \sum_{j=2}^n \frac{x_j^0}{a_{j_0}} \right) \equiv (0 \ 0 \ \dots \ 0; d).$$

Далее, умножим j -ый столбец получившейся матрицы на $\frac{a_{1_0}}{a_{j_0}}, j = 2, 3, \dots, n$ и прибавим эти столбцы к первому. Тогда первый столбец станет нулевым. Таким образом, после проведенных преобразований матрица $\{A(t_0, t_0 + T); \xi^1 - \xi^0 + R\}$ примет вид:

$$\left\{ \frac{1 - e^{-2\eta T}}{2\eta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2_0}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n_0}^2 \end{pmatrix}; \begin{array}{c} d \\ \xi_2^1 + R_2 - \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_n^1 + R_n - \xi_n^0 \end{array} \right\}$$

Единственный минор n -го порядка в этой матрице, который может не равняться нулю, это минор, составленный из всех столбцов, кроме первого. Величина этого минора равна $m_{(n)}$:

$$m_{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot d \left(\frac{1 - e^{-2\eta T}}{2\eta} \right)^{n-1} \cdot (a_{20} a_{30} \cdot \dots \cdot a_{n0})^2.$$

Для того, чтобы $m_{(n)} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $d = 0$, т. е. чтобы имело место равенство:

$$e^{-\eta(t_0+T)} \left[x_1^1 + z_1^2 + \sum_{j=2}^n (x_j^1 + z_j^2) \frac{a_{10}}{a_{j0}} \right] - a_{10} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\eta(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau - \\ - x_1^0 - a_{10} \sum_{j=2}^n \frac{x_j^0}{a_{j0}} = 0.$$

Разделив обе части последнего равенства на a_{10} , после очевидных преобразований, имеем:

$$e^{-\eta(t_0+T)} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{a_{i0}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^0}{a_{i0}} - e^{-\eta(t_0+T)} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^1}{a_{i0}} + \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\eta(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau.$$

Поскольку $z_i, i = 1, 2, \dots, n$ произвольные величины, то для того, чтобы имело место последнее равенство, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство из леммы 8.

Пусть теперь $\eta = 0$. Это может быть лишь когда выполняется $\mu_{i0} = 0, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда:

$$A(t_0, t_0 + T) = T \begin{pmatrix} (n-1)a_{10}^2 & -a_{10}a_{20} & \dots & -a_{10}a_{n0} \\ -a_{10}a_{20} & a_{20}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{10}a_{n0} & 0 & \dots & a_{n0}^2 \end{pmatrix};$$

$$\xi_i^1 = x_i^1 - \frac{a_{i0}}{n} \int_{t_0}^{t_0+T} g(\tau) d\tau; \quad R_i = z_i^2, i = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда легко получаем:

$$\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{a_{i0}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^0}{a_{i0}} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^1}{a_{i0}} + \int_{t_0}^{t_0+T} g(\tau) d\tau,$$

откуда следует условие из леммы 8 при $\eta = 0$.

Доказательство было проведено для матрицы δ , имеющей вид (4.11), но в замечании к теореме 2 было показано, что условие разрешимости системы (2.5) относительно z^2 не зависит от выбора δ . Таким образом, и условие из леммы 8 не зависит от выбора δ . $\square$

Замечание 11. При доказательстве леммы в качестве нулевых были получены первый столбец и первая строка матрицы $A(t_0, t_0+T)$. Легко видеть, что условие из леммы 8 не изменится, если нулевыми делать произвольный столбец и строку матрицы $A(t_0, t_0+T)$.

Замечание 12. Неравенство из леммы 8 накладывает ограничение на значения x_i^1 при произвольных x_i^0 . Множество векторов x^1 , компоненты которых x_i^1 удовлетворяют этому неравенству ранее было названо множеством z^2 -достижимости. Таким образом, из леммы 8 следует, что множество z^2 -достижимости для рассмотренной задачи является n -мерным полупространством.

Теперь сформулируем условие существования плана для скалярного ограничения (3.2) в случае постоянных $a_i, \mu_i, i = 1, 2, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполнены условия леммы 8. Тогда для того, чтобы существовал план распределения капиталовложений $u_i, i = 1, 2, \dots, n$, переводящий отрасли из состояния $x^0 \geq 0$ в область $\Lambda(x^1)$ за время T , где $x^1 > x^0$, удовлетворяющий:

1) условию (3.3) или

2) условию (3.12), необходимо и достаточно, чтобы существовала вектор-функция $\bar{v}(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$, суммируемая с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$, удовлетворяющая (4.14) и

1) условиям (4.15), (4.16) или

2) условию $x_i(t, \bar{v}) \geq 0$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, $i = 1, \dots, n$, соответственно. При этом план распределения имеет вид (4.15).

Доказательство проводится так же, как для теорем 5,6.

Пример. Построим планы, существование которых рассматривается в последней теореме в случае $a_{i_0} = a, i = 1, 2, \dots, n$, где a —заданная постоянная, $a > 0$. Для упрощения записи положим $a = 1$. При этом планы почти не изменяют вид. В качестве матрицы δ берем (4.11). Тогда при $\eta \neq 0$ (т. е. при $\mu_{i_0} = \mu \neq 0$) получим:

$$A(t_0, t_0 + T) = \frac{1 - e^{-2\mu T}}{2\mu} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь μ — общее значение $\mu_{i_0}, i = 1, 2, \dots, n$ —заданная постоянная. Далее:

$$\tilde{A} = \frac{1 - e^{-2\mu T}}{2\mu} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\tilde{A}$ получается из $A(t_0, t_0 + T)$ отбрасыванием первой строки. Следовательно $\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^0, \tilde{R}$ получаются из ξ^1, ξ^0, R соответственно отбрасыванием первых компонент.

$$(\tilde{A}\tilde{A}^*)^{-1} = -\frac{1}{n} \left(\frac{2\mu}{1 - e^{-2\mu T}} \right)^2 \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{pmatrix}.$$

Вектор $\bar{c}$ из (2.6), удовлетворяющий условию $\tilde{A}\bar{c} = 0$, имеет вид:

$$\bar{c} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. его компоненты равны одной произвольной постоянной c_0 . Пусть $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ —компоненты вектора c . Тогда из (2.6) получаем:

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{2\mu}{n(1-e^{-2\mu T})} & \left[e^{-\mu(t_0+T)} \sum_{i=1}^n (x_i^1 + z_i^2) - \frac{n-1}{n} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\mu(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n x_i^0 \right] + c_0; \\ c_j = \frac{2\mu}{n(1-e^{-2\mu T})} & \left\{ e^{-\mu(t_0+T)} \sum_{i=1}^n (x_i^1 + z_i^2) + \frac{3-2n}{n} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\mu(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n x_i^0 + (n-2)(e^{-\mu(t_0+T)}(x_j^1 + z_j^2) - x_j^0) \right\} + c_0; \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Далее, если $\bar{v}_i(t)$ —компоненты вектора $\bar{v} = B^*c + \bar{\bar{v}}$, то:

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(t) = (2-n) & \left[e^{-\mu(t_0+T)}(x_{i+1}^1 + z_{i+1}^2) - \frac{1}{n} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\mu(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau - \right. \\ & \left. - x_{i+1}^0 \right] + \bar{\bar{v}}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

где $\bar{\bar{v}}_i(t), i = 1, 2, \dots, n-1$ —компоненты вектора $\bar{\bar{v}}(t)$, суммируемые с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяющие условию:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\mu\tau} \bar{\bar{v}}_i(\tau) d\tau = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

которое следует из (4.14).

Окончательно получаем выражения для плана:

$$\begin{cases} u_1(t) &= \mu x_1(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{v}_j(t) + \frac{g(t)}{n} \\ u_k(t) &= \mu x_k(t) - \bar{v}_{k-1}(t) + \frac{g(t)}{n}; k = 2, 3, \dots, n, \end{cases}$$

где:

$$x_1(t) = e^{\mu(t-t_0)} \left[x_1^0 + \int_{t_0}^t \left(\sum_{j=1}^{n-1} \bar{v}_j(\tau) + \frac{g(\tau)}{n} \right) e^{-\mu(\tau-t_0)} d\tau \right];$$

$$x_k(t) = e^{\mu(t-t_0)} \left[x_k^0 + \int_{t_0}^t \left(-\bar{v}_{k-1}(\tau) + \frac{g(\tau)}{n} \right) e^{-\mu(\tau-t_0)} d\tau \right],$$

$k = 2, 3, \dots, n$; $v_j(t)$ находятся из полученных выше выражений, где в качестве $\bar{v}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ берутся функции, удовлетворяющие условию условиям ортогональности, приведенным выше, суммируемые с квадратом на $[t_0, t_0 + T]$, а также удовлетворяющие одному из следующих условий:

$$u_i(t) = u_i(t, \bar{v}) \geq 0$$

или

$$x_i(t) = x_i(t, \bar{v}) \geq 0,$$

в зависимости от требований, предъявляемых к плану. Кроме того, компоненты вектора x^1 должны удовлетворять неравенству из леммы 8:

$$e^{-\mu(t_0+T)} \sum_{i=1}^n x_i^1 \leq \sum_{i=1}^n x_i^0 + \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\mu(\tau-t_0)} g(\tau) d\tau.$$

Глава II

Гибридные системы

1. ЛИНЕЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

Задачи управления технологическими процессами приводят к построению сложных математических моделей, что обусловлено, в частности, многочисленностью взаимосвязей между различными подсистемами. Учет их приводит к динамическим системам, аналитическое исследование которых весьма затруднительно. Так, например, одной из причин отсутствия удовлетворительных моделей технологических процессов целлюлозно-бумажного производства связано с его многоступенчатостью. Производство целлюлозы можно разбить на стадии смешения, нагрева, диффузии, химических превращений и т.д. Очевидно, что взаимовлияние этих стадий определяет качество процесса, но желание учесть многостадийность приводит к громоздким системам уравнений с многочисленными ограничениями. Другим примером системы со структурными изменениями является процесс биологической очистки сточных вод. Активный ил, основной фактор этого процесса, представляет собой сложную систему различных видов микроорганизмов, между которыми существуют отношения хищничества, симбиоза, конкуренции. При этом структура ила усложняется при увеличении времени его нахождения в аэротенке. К системам, в которых важную роль играют изменяющиеся во времени взаимосвязи образующих их подсистем, также можно отнести крупные производственные комплексы, движущиеся объекты с переменным количеством работающих двигателей, процессы агрегирования

экономических показателей. В математической экологии активно развивается теория метапопуляций, исследующая процессы миграции, колонизации новых ареалов, вымирания популяций. Все эти и многие другие аналогичные системы имеют общие свойства: в процессе функционирования их структура изменяется. Это значит, что они состоят из некоторого количества взаимосвязанных подсистем, которые могут на различных промежутках времени находиться в пассивном или активном режиме.

В [15]–[19] был предложен подход для описания динамики структурных изменений в системе. Предположим, что в состав системы S могут входить подсистемы $S_i \in \{S_1, \dots, S_n\}$, подключаясь к S или отключаясь от нее. При этом подсистемы, входящие в S , взаимодействуют между собой. Введем вектор $\gamma(t) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ такой, что $\gamma_i(t) = 1$, если подсистема S_i в момент времени t входит в S , $\gamma_i(t) = 0$ – в противном случае. Вектор $\gamma(t)$ называется внешней структурой системы S в момент времени t . Для задания динамики структуры $\gamma(t)$ в [17], [18] предложено понятие системы со структурными изменениями (ССИ), которую можно отнести к классу гибридных систем. При этом для реализации ССИ был разработан метод динамической декомпозиции. Суть его состоит в том, что для описания динамики системы, помимо фазовых переменных, вводятся дополнительные переменные, задаваемые дифференциальными уравнениями. При достижении этими переменными некоторых пороговых значений происходит отключение или подключение подсистемы к системе. Тем самым система переходит в другое фазовое пространство, возможно, не мгновенно, а через некоторое время. Если допустимы только структуры вида $\gamma = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, где первые k элементов вектора структуры равны 1, а остальные – 0, и переход между структурами происходит добавлением $(k+1)$ -й единицы или исключением k -й единицы, то система S называется последовательной ССИ, или S -системой. Если возможны произвольные структуры и переходы между ними, то

S называется параллельной ССИ, или P -системой. Будем говорить, что S -система находится в состоянии $S(k)$, если она имеет структуру $\gamma = (1, \dots, 0, \dots, 0)$ с единицами на k первых местах. Рассмотрим линейную последовательную S -систему [15] со структурными изменениями (ССИ), которая при условии

$$y(t) \in \Delta_k = (y_k, y_{k+1}), \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.1)$$

где y_k – заданные постоянные (пороговые значения) при $k \neq 1, 2$, $y_1 = -\infty$, $y_{n+1} = +\infty$, задается уравнениями

$$\dot{X}_k = A_k X_k, \quad (1.2)$$

$$\dot{y} = B_k^T X_k, \quad (1.3)$$

где $X_k^T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $B_k^T = (b_1, b_2, \dots, b_k)$, $(\cdot)^T$ – символ операции транспонирования, A_k – квадратная матрица порядка k с постоянными элементами a_{ij} .

В этом случае будем говорить, что система S находится в стадии, или состоянии, S_k , или что S задается подсистемой S_k .

Замечание 1. Для простоты обозначений будем считать, что переменные x_i являются скалярными. Тогда S_i – одномерная подсистема, которой соответствует вектор состояния (x_i, y_i) . Но все дальнейшие построения и рассуждения останутся в силе, если считать, что x_i – вектор, а постоянные коэффициенты – матрицы соответствующих размерностей.

Далее, пусть при попадании траектории системы (1.2), (1.3) из области (1.1) на плоскость $y = y_k$ в некоторый момент времени t^- происходит переход от стадии S_k к стадии S_{k-1} при $2 \leq k \leq n$, а при попадании на плоскость $y = y_{k+1}$ в момент времени t^+ происходит переход от S_k к S_{k+1} при $1 \leq k \leq n-1$. При этом отображения $\varphi_{ij}, j = i+1$, осуществляющие переход от S_i к S_j , имеют вид:

$$\varphi_{k,k-1} : Z_k \rightarrow C(k-1, k)Z_k + E_{k-1}(-\varepsilon) = \tilde{Z}_{k-1} + E_{k-1}(-\varepsilon), \quad (1.4)$$

где $Z_k = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, y_k)^T$, $E_{k-1}(-\varepsilon) = (0, \dots, 0, -\varepsilon)^T$, ε - постоянная на k -ом месте, причем

$$0 \leq \varepsilon \leq \min_k (y_{k+1} - y_k), k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.5)$$

$$C(k-1, k) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} & 0 \\ c_{21} & \dots & c_{2k} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1,1} & \dots & c_{k-1,k} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

где c_{ij} - заданные постоянные, $i, j = 1, 2, \dots, n$,

$$\varphi_{k-1,k} : Z_{k-1} \rightarrow D(k, k-1)Z_{k-1} + E_k(\varepsilon) = \tilde{Z}_k + E_k(\varepsilon), \quad (1.7)$$

где

$$D(k, k-1) = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1,k-1} & 0 \\ d_{21} & \dots & d_{2,k-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k,1} & \dots & d_{k,k-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

d_{ij} - заданные постоянные, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

При этом компоненты векторов $Z_k = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, y_k)^T$ и Z_{k-1} вычислены в моменты времени t^-, t^+ , соответственно, а $\tilde{Z}_{k-1} + E_{k-1}(-\varepsilon)$, $\tilde{Z}_k + E_k(\varepsilon)$ являются векторами начальных данных при $t = t^- + 0$, и $t = t^+ + 0$ для стадий S_{k-1}, S_{k+1} , соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Отображения вида*

$$\varphi_{k,k-1} : (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, y_k) \rightarrow (x_1, \dots, x_{k-1}, y_k - \varepsilon), \quad (1.9)$$

$$\varphi_{k,k+1} : (x_1, \dots, x_k, y_{k+1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_k, y_{k+1} + \varepsilon), \quad (1.10)$$

где ε - достаточно малая заданная постоянная, удовлетворяющая условию (1.5), называются линейными отображениями перехода, понижающими и повышающими, соответственно, порядков системы на единицу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Динамическая система (1.1) – (1.8) называется линейной последовательной системой с разрывным переключением.

Поясним смысл введенного понятия. Системы S_k задают динамику отдельной стадии, переход между которыми осуществляют отображения (1.4), (1.7), в зависимости от состояния переменной $y(t)$, которая характеризует продолжительность стадии.

$$P_k(X_k, y) = \alpha^T X_k + \alpha_{k+1} y,$$

Доказательство. Запишем (1.2), (1.3) в виде

[illegible]

$$\alpha_1 a^1 + \dots + \alpha_k a^k + \alpha_{k+1} B_k = 0. \quad (1.12)$$

Умножая первое уравнение системы (1.11) на α_1 , второе – на α_2 и т.д., последнее – на α_{k+1} и складывая полученные уравнения, учитывая (1.12), получим:

$$\alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2 + \dots + \alpha_{k+1} \dot{y} = (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_{k+1} b_1)x_1 + (\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_{k+1} b_2)x_2 + \dots + (\alpha_1 a_{1k} + \alpha_2 a_{2k} + \dots + \alpha_{k+1} b_k)y = 0,$$

поскольку в каждой скобке имеем выражение, являющееся соответствующим компонентом вектора левой части равенства (1.12). Таким образом, из последнего равенства получаем интегральные гиперплоскости или первый интеграл

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{k+1} y = c, \quad (1.13)$$

где c – произвольная постоянная, определяемая начальной точкой

$$c = \alpha_1 x_{10} + \alpha_2 x_{20} + \dots + \alpha_{k+1} y_0.$$

□

ЛЕММА 10. Множество $B_k = \{(X_k, y) : B_k^T X_k = 0, y \in R\}$ является инвариантным для системы (1.2), (1.3).

Доказательство. Очевидно, вектор-функция $(X_k(t), y_{0k})$ является решением системы (1.2), (1.3), если $X_k(t)$ удовлетворяет условию $B_k^T X_k = 0$ и является решением системы (1.2), а y_{0k} – любая постоянная. Тогда $(X_k(t), y_{0k}) \in B_k$, что и требовалось доказать. □

СЛЕДСТВИЕ 3. Множество $B_k \cap \{(X_k, y_{0k}) : X_k \in R^k\}$ является инвариантным для системы (1.2), (1.3).

СЛЕДСТВИЕ 4. Множество $l_k = B_k \cap P_k$ является инвариантным для системы (1.2), (1.3).

Из этих утверждений следует, что множество l_k является границей двух областей

$$B^+ = \{(X_k, y) : (X_k, y) \in P_k, B_k^T X_k > 0\},$$

$$B^- = \{(X_k, y) : (X_k, y) \in P_k, B_k^T X_k < 0\},$$

т.е. в области B^+ имеем $\dot{y} > 0$ а в области B^- — $\dot{y} < 0$.

Рассмотрим примеры, в которых задана динамика систем при $k = 2$, $y(t) \in (y_2, y_3)$. Исследуем возможность переходов $S_2 \rightarrow S_3$ и $S_2 \rightarrow S_1$.

Пусть области $\Omega_{22}, \Omega_{21}, \Omega_{23}$, содержащие точки (x_1, x_2, y) слоя $y_2 < y < y_3$, для которых имеют место переходы стадий $S_2 \rightarrow S_2, S_2 \rightarrow S_1, S_2 \rightarrow S_3$, соответственно.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_2, \\ \dot{y} &= x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Система имеет первый интеграл $P_2 : x_1 + x_2 + y = c$. Положение равновесия $(0, 0)$ асимптотически устойчиво для системы $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -x_2$, поэтому траектории, находясь в интегральных плоскостях, неограниченно приближаются каждая к соответствующей точке $(0, 0, c)$, где $c = x_{10} + x_{20} + y_0$. Причем в области $B^+ = \{(x_1, x_2, y) : x_1 + x_2 + y = c, x_1 + x_2 > 0\}$ фазовая точка двигается вверх, а в области $B^- = \{(x_1, x_2, y) : x_1 + x_2 + y = c, x_1 + x_2 < 0\}$ — вниз. Тогда, если $c = x_{10} + x_{20} + y_0 > y_2$, откуда следует, что $x_{10} + x_{20} > y_3 - y_0 > 0$, т.е. начальная точка принадлежит области B^+ , то интегральная плоскость пересечет ось Y выше точки y_3 , а, значит, траектории, приближаясь к точке $(0, 0, c)$ снизу вверх ($\dot{y} > 0$), пересекут плоскость $y = y_3$, и произойдет переход $S_2 \rightarrow S_3$. Рассуждая аналогично, получаем, что при $x_{10} + x_{20} + y_0 < y_2$ произойдет переход $S_2 \rightarrow S_1$. Таким образом, область существования подсистемы S_2 , а именно

$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, y) : y \in (y_2, y_3)\}$, разбивается на три непересекающихся подмножества

$$\Omega_2 = \Omega_{21} \cup \Omega_{22} \cup \Omega_{23},$$

где

$$\Omega_{21} = \{(x_1, x_2, y) : x_1 + x_2 + y < y_2, y \in (y_2, y_3)\} -$$

область перехода $S_2 \rightarrow S_1$;

$$\Omega_{22} = \{(x_1, x_2, y) : y_3 \leq x_1 + x_2 + y \leq y_3, y \in (y_2, y_3)\} -$$

область сохранения состояния S_2 ;

$$\Omega_{23} = \{(x_1, x_2, y) : x_1 + x_2 + y > y_3, y \in (y_2, y_3)\} -$$

область перехода $S_2 \rightarrow S_3$.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2, \\ \dot{y} &= x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Первый интеграл $P_2(c) : x_1 + x_2 - y = c$. Положение равновесия $(0, 0)$ неустойчиво для системы, состоящей из первых двух уравнений. Трактории, находясь в интегральных плоскостях, будут пересекать плоскости $y = y_2$ или $y = y_3$. При этом

$$\begin{aligned}\Omega_{21} &= \{(x_1, x_2, y) : x_1 + x_2 < 0, y \in (y_2, y_3)\}, \\ \Omega_{23} &= \{(x_1, x_2, y) : x_1 + x_2 > 0, y \in (y_2, y_3)\}\end{aligned}$$

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{y} &= x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Первый интеграл $P_2 = x_1 - x_2 + y$. Траектории системы из первых двух уравнений - окружности $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. Возьмем гиперплоскость $P_2 = c$ пересекающую ось OY посередине между точками y_2, y_3 . Это будет $P_2(\tilde{y}) : x_1 - x_2 + y = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \equiv \tilde{y}$. Тогда замкнутая траектория ϑ , лежащая в $P_2(\tilde{y})$ и касающаяся обеих плоскостей $y = y_2, y = y_3$, делит $P_2(\tilde{y})$ на три области. Траектории (замкнутые), лежащие внутри ϑ , будут располагаться между плоскостями $y = y_2, y = y_3$. Траектории, лежащие снаружи от ϑ , пересекают обе эти плоскости. Найдем радиус R окружности - проекции ϑ на плоскость x_1x_2 . По существу, это радиус цилиндра, на котором располагается ϑ и все траектории, имеющие вместе с ней одну проекцию на плоскость x_1x_2 . Пусть ω - угол между $\tilde{P}_2$ и осью OY . Тогда нетрудно видеть, что $\sin \omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $(\frac{\pi}{2} - \omega)$ - угол между нормалью к интегральной плоскости и осью OY . Тогда $R = \frac{y_3 - y_2}{2} \tan \omega = \frac{y_3 - y_2}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{y}) \cap \Omega_{22} &= \{(x_1, x_2, y) : x_1^2 + x_2^2 < \left(\frac{y_3 - y_2}{2\sqrt{2}}\right)^2, x_1 - x_2 + y = \\ &= \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\} \equiv \sigma_{22}(\tilde{y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{y}) \cap \Omega_{23} &= \{(x_1, x_2, y) : x_1^2 + x_2^2 \geq \left(\frac{y_3 - y_2}{2\sqrt{2}}\right)^2, x_1 + x_2 > 0, \\ &x_1 - x_2 + y = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\} \equiv \sigma_{23}(\tilde{y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{y}) \cap \Omega_{21} &= \{(x_1, x_2, y) : x_1^2 + x_2^2 \geq \left(\frac{y_3 - y_2}{2\sqrt{2}}\right)^2, x_1 + x_2 < 0, \\ &x_1 - x_2 + y = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\} \equiv \sigma_{21}(\tilde{y}), \end{aligned}$$

Пусть теперь гиперплоскость $P^+(c)$ пересекает ось OY при $\tilde{y} < y < y_3$, т.е.

$$P^+(c) : x_1 - x_2 + y = c,$$

где $c \in (\tilde{y}, y_3)$. Тогда уже в плоскостях $\tilde{P}^+(c)$ нет замкнутых траекторий, касающихся обеих плоскостей $y = y_2, y = y_3$. Пусть $\vartheta^+(c)$ – замкнутая траектория, касающаяся плоскости $y = y_3$ и лежащая в плоскости $P^+(c)$. Заметим, что радиус проекции $\vartheta^+(c)$ равен $R^+(c) = (y_3 - c) \tan \omega = \frac{y_3 - c}{\sqrt{2}}$. Все остальные замкнутые траектории, лежащие в $P^+(c)$, лежат внутри $\vartheta^+(c)$. Таким образом, получаем область плоскости $P^+(c)$, состоящую из точек, начинаясь в которых, траектории не покидают слой, заключенный между плоскостями $y = y_2, y = y_3$, т.е. область сохранения состояния S_2 . Далее рассмотрим траекторию $\vartheta^-(c)$ этой же плоскости, касающуюся плоскости $y = y_2$. Радиус цилиндра, на котором она лежит, равен $R^-(c) = (c - y_2) \tan \omega$. Очевидно, что траектории, лежащие между $\vartheta^-(c)$ и $\vartheta^+(c)$ пересекают плоскость $y = y_3$. Итак, получаем области

$$P^+(c) \cap \Omega_{22} = \{(x_1, x_2, y) : x_1^2 + x_2^2 < (R^+(c))^2, c \in (\tilde{y}, y_3), \\ (x_1, x_2, y) \in P^+(c)\} \equiv \sigma_{22}^+(c),$$

$$P^+(c) \cap \Omega_{23} = \{(x_1, x_2, y) : (R^-(c))^2 \leq x_1^2 + x_2^2 < (R^+(c))^2, \\ c \in (\tilde{y}, y_3), (x_1, x_2, y) \in P^+(c)\} \cup \{(x_1, x_2, y) : x_1^2 + x_2^2 > (R^+(c))^2, \\ c \in (\tilde{y}, y_3), x_1 + x_2 > 0, (x_1, x_2, y) \in P^+(c)\} \equiv \sigma_{23}^+(c),$$

$$P^+(c) \cap \Omega_{21} = \{(x_1, x_2, y) : x_1^2 + x_2^2 > (R^+(c))^2, c \in (\tilde{y}, y_3), \\ x_1 + x_2 < 0, (x_1, x_2, y) \in P^+(c)\} \equiv \sigma_{21}^+(c).$$

Рассуждая аналогично, получаем следующие области для интегральной плоскости $P^-(c) : x_1 - x_2 + y = c$ для случая $c \in (y_2, \tilde{y})$

$$P^-(c) \cap \Omega_{22} = \{(x_1, x_2, y) : x_1^2 + x_2^2 < (\tilde{R}^-(c))^2, c \in (y_2, \tilde{y}), \\ (x_1, x_2, y) \in P^-(c)\} \equiv \sigma_{22}^-(c),$$

$$P^-(c) \cap \Omega_{21} = \{(x_1, x_2, y) : (\tilde{R}^-(c))^2 \leq x_1^2 + x_2^2 < (\tilde{R}^+(c))^2, \\ c \in (y_2, \tilde{y}), (x_1, x_2, y) \in P^-(c)\} \cup \{(x_1, x_2, y) : x_1^2 + x_2^2 > (\tilde{R}^+(c))^2, \\ c \in (y_2, \tilde{y}), x_1 + x_2 < 0, (x_1, x_2, y) \in P^-(c)\} \equiv \sigma_{21}^-(c),$$

$$P^+(c) \cap \Omega_{23} = \{(x_1, x_2, y) : x_1^2 + x_2^2 > (\tilde{R}^+(c))^2, c \in (y_2, \tilde{y}), \\ x_1 + x_2 > 0, (x_1, x_2, y) \in P^-(c)\},$$

где $\tilde{R}^-(c) = (c - y_2) \tan \omega$, $\tilde{R}^+(c) = (y_3 - c) \tan \omega$, $c \in (y_2, \tilde{y}) \equiv \sigma_{23}^-(c)$. Если $c \geq y_3$, то все траектории, кроме касающейся плоскости $y = y_2$, пересекают плоскость $y = y_3$. Пусть

$$\sigma_{23}(c) \equiv \{(x_1, x_2, y) : (x_1, x_2, y) \in P_2(c), c \geq y_3, y \in (y_2, y_3)\}.$$

Если $c \leq y_2$, то все траектории, кроме касающейся плоскости $y = y_3$, пересекают плоскость $y = y_2$. Пусть

$$\sigma_{21}(c) \equiv \{(x_1, x_2, y) : (x_1, x_2, y) \in P_2(c), c \leq y_2, y \in (y_2, y_3)\}.$$

Таким образом, получаем области, для точек которых имеем переходы состояний системы $S_2 \rightarrow S_2, S_2 \rightarrow S_3, S_2 \rightarrow S_1$, соответственно:

$$\Omega_{22} = \left(\bigcup_{c \in (y_2, \tilde{y})} \sigma_{22}^-(c) \right) \cup \left(\bigcup_{c \in (\tilde{y}, y_3)} \sigma_{22}^+(c) \right) \cup \sigma_{22}(\tilde{y}),$$

$$\Omega_{21} = \left(\bigcup_{c \in (y_2, \tilde{y})} \sigma_{21}^-(c) \right) \cup \left(\bigcup_{c \in (\tilde{y}, y_3)} \sigma_{21}^+(c) \right) \cup \left(\bigcup_{c \in (-\infty, y_2]} \sigma_{21}(c) \right) \cup \sigma_{21}(\tilde{y}),$$

$$\Omega_{23} = \left(\bigcup_{c \in (\tilde{y}, y_3)} \sigma_{23}^-(c) \right) \cup \left(\bigcup_{c \in (\tilde{y}, y_3)} \sigma_{23}^+(c) \right) \cup \left(\bigcup_{c \in [y_3, +\infty)} \sigma_{23}(c) \right) \cup \sigma_{23}(\tilde{y}).$$

Рассмотренные примеры мотивируют следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множеством состояний системы S , находящейся в стадии S_k , называется множество Ω_k вида

$$\Omega_k = \{(X_k, y) : X_k \in R^k, y \in \Delta_k\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Область перехода от стадии S_k к стадии S_{k+1} ($S_k \rightarrow S_{k+1}$) это подмножество $\Omega_{k,k+1} \subset \Omega_k$ таких точек, что траектории, начинающиеся в этих точках, попадают на гиперплоскость $y = y_{k+1}$.

Область перехода от стадии S_k к стадии S_{k-1} ($S_k \rightarrow S_{k-1}$) это подмножество $\Omega_{k,k-1} \subset \Omega_k$ таких точек, что траектории системы, начинающиеся в этих точках, попадают на гиперплоскость $y = y_k$.

Область сохранения стадии S_k ($S_k \rightarrow S_k$) это подмножество $\Omega_{k,k} \subset \Omega_k$ таких точек, что траектории, начинающиеся в этих точках, не попадают на гиперплоскости $y = y_k, y = y_{k+1}$.

Замечание 4. Можно рассмотреть систему $S = \{S_k\}, k = 1, 2, \dots$, т.е. систему с неограниченным количеством подсистем S_k . В этом случае пороговые значения образуют бесконечную последовательность $\{y_k\}, k = 1, 2, \dots, y_k < y_{k+1}$.

Замечание 5. Аналогично построенной выше системе можно рассмотреть систему с блочным вектором состояний $X_k^T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Тогда x_i – векторы.

2. УПРАВЛЕНИЕ СТРУКТУРОЙ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим задачу стабилизации некоторой стадии (состояния) S_m линейной последовательной системы, построенной в предыдущем параграфе. Для этого сначала введем управление u в уравнение (1.3), после чего система (1.2), (1.3) примет вид

$$\dot{X}_k = A_k X_k, \tag{2.1}$$

$$\dot{y} = B_k^T X_k + u, \quad (2.2)$$

где $u \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 1. Для любых $k, l \in \{1, \dots, n\}$ найдется управление в виде линейной обратной связи $u = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$, где p_j – кусочно-постоянные функции компонентов x_j вектора X_n , $j = 1, \dots, n$, обеспечивающее переход системы (2.1), (2.2) из состояния (стадии) S_k в состояние S_l за конечное время, $k, l \in \{1, \dots, n\}$, для любой начальной точки (X_{k0}, y_{0k}) , для которой $X_{k0} \neq 0$, $X_{k0} = (x_{10}, \dots, x_{k0})^T$. При этом система будет оставаться в состоянии S_l бесконечно долго.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Управление, удовлетворяющее условиям теоремы, будем называть допустимым.

Доказательство. Пусть система находится в состоянии (стадии) S_k . Предположим для определенности, что $l > k$. Покажем сначала, что найдется управление, обеспечивающее переход $S_k \rightarrow S_{k+1}$. По условию $X_{k0} \neq 0$. Значит, найдется $i \in \{1, \dots, k\}$ такое, что $x_i(t_0) = x_{i0} \neq 0$. В силу непрерывности решения найдется $\bar{t} > t_0$ такое, что при всех $t \in [t_0, \bar{t}]$ имеем $x_i(t) \neq 0$. Тогда при $t > \bar{t}$

$$\int_{t_0}^t |x_i(\tau)| d\tau > \int_{t_0}^{\bar{t}} |x_i(\tau)| d\tau = q > 0.$$

Пусть p_i выбирается таким, что $b_i + p_i = \bar{c}_i \cdot \text{sign} x_i$, т.е.

$$p_i = \bar{c}_i \cdot \text{sign} x_i - b_i, \quad (2.3)$$

где $\bar{c}_i$ – некоторые постоянные. Тогда, если, например, положить $p_j = -b_j$ для всех $j \neq i$, то получим из (2.2), (2.3)

$$y(t) = y_{0k} + \bar{c}_i \cdot \int_{t_0}^t x_i(\tau) \cdot \text{sign} x_i(\tau) d\tau = y_{0k} + \bar{c}_i \cdot \int_{t_0}^t |x_i(\tau)| d\tau > y_{0k} + \bar{c}_i \cdot q.$$

Итак, $y(t) > y_{0k} + \bar{c}_i \cdot q$ при $t > \bar{t}$. Выберем коэффициент $\bar{c}_i$ так, чтобы выполнялось неравенство $y_{0k} + \bar{c}_i \cdot q > y_{k+1}$, т.е.

$$\bar{c}_i > \frac{y_{k+1} - y_{0k}}{q}. \quad (2.4)$$

Тогда $y(t) > y_{k+1}$ при $t > \bar{t}$, а значит, найдется момент времени t^* такой, что $y(t^*) = y_{k+1}$, т.е. система S переходит от S_k к S_{k+1} , возможность чего и требовалось доказать. Доказательство показывает, что выбор $\bar{c}_i$ неоднозначен, вследствие неоднозначности выбора q .

Далее аналогично обеспечивается переход $S_{k+1} \rightarrow S_{k+2}$ и т.д., пока система не перейдет в состояние S_l . Для сохранения этого состояния надо переключать управление, на гиперплоскостях $y = y_l + \alpha\epsilon, y = y_l - \alpha\epsilon, 0 < \alpha < 1$, так, чтобы обеспечить возрастание или убывание $y(t)$, соответственно. Заметим, что построение управления, обеспечивающего убывание $y(t)$, производится так же, как и для рассмотренного при доказательстве теоремы случая. $\square$

Замечание 6. При доказательстве теоремы построено управление, стабилизирующее структуру $\gamma = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, в которой первые l компонент равны 1. Состояние S_l соответствует данной структуре.

Замечание 7. Пусть $X_{k0} = 0$. Тогда $X_{k0}(t) = 0$ при $t \geq t_0$ и управление $u = p_1x_1 + \dots + p_nx_n$ не позволяет перевести систему из состояния S_k в S_{k+1} , так как (1.2) примет вид $\dot{y} = 0$. Но если расширить класс управлений до вида $u = p_1x_1 + \dots + p_nx_n + u_0$, где u_0 – кусочно-постоянная функция времени, принимающая значения 1 или -1 , то в случае $X_{k0} = 0$ для перехода $S_k \rightarrow S_{k+1}$ достаточно положить $u = 1$ до попадания траектории на плоскость $y = y_{k+1}$.

Заметим также, что если допустимое управление имеет вид $u = p_1x_1 + \dots + p_nx_n + u_0$, то при любом X_{k0} для перехода $S_k \rightarrow S_{k+1}$ достаточно брать $p_i = -b_i, u_0 = 1$.

Перейдем к построению управления. Надо показать, что с помощью допустимого управления траектория может из любой начальной точки $M_0 = (X_{k0}, y_0)$, $X_{k0} \neq 0$, такой, что $y_0 \in \Delta_k$, попасть на гиперплоскости $y = y_k$ или $y = y_{k+1}$. Тогда, переходя по шагам от S_k к S_{k-1} или S_{k+1} , придем к требуемой системе S_l .

Подставим допустимое управление при $n = k$ в (2.2)

Тогда, согласно лемме 9, система (2.1), (2.5) имеет интегральные плоскости вида (1.13), где набор чисел $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k + 1$ является ненулевым решением системы

Если $\alpha_{k+1} = 0$, то, в силу условия $\det A_k \neq 0$, имеем: $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, k$. Поэтому в ненулевом решении системы (2.6) $\alpha_{k+1} \neq 0$.

Идея построения управления, решающего задачу стабилизации некоторого состояния (структуры) S_l , состоит в выборе за счет $(p_1, \dots, p_k)$ такого положения интегральной плоскости, при котором она пересекала бы ось OY при $y > y_{k+1}$ (или при $y < y_k$). Тогда в силу асимптотической устойчивости положения равновесия $X_k = 0$ системы (2.1) траектории, приближаясь к положению равновесия пересекут плоскость $y = y_{k+1}$ (или $y = y_k$). В результате произойдет переход к системе S_{k+1} (или S_{k-1}).

Пусть при $X_k = 0$ имеем $y = \bar{y}$. Тогда из уравнения интегральной гиперплоскости

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{k+1} y = \alpha_1 x_{10} + \alpha_2 x_{20} + \dots + \alpha_{k+1} y_0$$

получаем

$$\bar{y} = y_0 - \frac{1}{\alpha_{k+1}} (\alpha_1 x_{10} + \dots + \alpha_k x_{k0}). \quad (2.7)$$

Из системы (2.6) находим: $\alpha_i = \frac{\det \bar{A}_{ki}}{\det A_k}$, где

$$\bar{A}_{ki} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & -(b_1 + p_1)\alpha_{k+1} & \dots & a_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & \dots & -(b_k + p_k)\alpha_{k+1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

причем столбец, содержащий b_i, p_i стоит на i -ом месте. Тогда

$$\alpha_i = \frac{\alpha_{k+1}}{\det A_k} \cdot \det A_{ki}, \quad (2.8)$$

где

$$A_{ki} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & -(b_1 + p_1) & \dots & a_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & \dots & -(b_k + p_k) & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.8) в (2.7), получаем

$$\bar{y} = y_0 - \frac{1}{\det A_k} (\det A_{k1} x_{10} + \dots + \det A_{kk} x_{k0}). \quad (2.10)$$

Далее имеем:

$$\det A_{ki} = - \sum_{j=1}^k (b_j + p_j) \cdot \tilde{A}_{(k-1),i}(j),$$

где $\tilde{A}_{(k-1),i}(j)$ – алгебраическое дополнение элемента j -й строки, i -го столбца матрицы (2.9) или, что то же самое, – матрицы

A_k , $k - 1$ - порядок соответствующего минора. Тогда из (2.10) получаем:

$$\bar{y} = y_0 + \frac{1}{\det A_k} \left(\sum_{j=1}^k (b_j + p_j) \cdot \tilde{A}_{(k-1),1}(j) \cdot x_{10} + \dots \right. \\ \left. \dots + \sum_{j=1}^k (b_j + p_j) \cdot \tilde{A}_{(k-1),k}(j) \cdot x_{k0} \right). \quad (2.11)$$

Предположим, что надо перейти от S_k к S_{k+1} . Для этого следует решить относительно $p_1, \dots, p_k$ неравенство

$$y_0 + \frac{1}{\det A_k} \sum_{j=1}^k x_{i0} \cdot \sum_{j=1}^k (b_j + p_j) \cdot \tilde{A}_{(k-1),i}(j) > y_{k+1}. \quad (2.12)$$

После очевидных преобразований (2.12) сводится к неравенству

$$\sum_{j=1}^k p_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} > \det A_k \cdot (y_{k+1} - y_0) - \\ - \sum_{j=1}^k b_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0}. \quad (2.13)$$

ЛЕММА 11. *Существует такое $j \in \{1, \dots, k\}$, что $\sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} \neq 0$.*

Доказательство. Очевидно:

$$\sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{10} & \dots & x_{k0} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} = \det A_k(j),$$

где матрица $A_k(j)$ получена из A_k путем замены ее j -ой строки строкой X_{k0}^T . Доказательство проведем от противного. Предположим, что при всех $j \in \{1, \dots, k\}$, $\det A_k(j) \neq 0$. Тогда, раскладывая определители $\det A_k(j)$ по j -й строке каждый, получаем

систему равенств

$$\sum_{j=1}^k x_{i0} \cdot \tilde{A}_{(k-1),i}(j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.14)$$

Поскольку по условию $X_{k0} \neq 0$, то найдется $x_{i0} \neq 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $x_{10} \neq 0$. Далее, раскладывая $\det A_k$ по первому столбцу и выражая алгебраические дополнения, входящие в это разложение из равенств (2.14), получаем:

$$\begin{aligned} \det A_k &= \sum_{j=1}^k a_{j1} \cdot \tilde{A}_{(k-1),1}(j) = \sum_{j=1}^k a_{j1} \cdot \left(-\frac{1}{x_{10}}\right) \cdot (x_{20} \cdot \tilde{A}_{(k-1),2}(j) + \dots \\ &\quad \dots + x_{k0} \cdot \tilde{A}_{(k-1),k}(j)) = -\frac{1}{x_{10}} \cdot \sum_{j=1}^k x_{i0} \cdot \sum_{j=1}^k a_{j1} \cdot \tilde{A}_{(k-1),i}(j) = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство нулю обязано свойству определителей: сумма произведений элементов одного столбца матрицы A_k на соответствующие алгебраические дополнения элементов других столбцов равна нулю. Поскольку по предположению $\det A_k \neq 0$, то получили противоречие, доказывающее лемму. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть при некотором $j = l$ имеем $\sum_{j=1}^k x_{i0} \cdot \tilde{A}_{(k-1),i}(l) \neq 0$. Обозначим $\sum_{j=1}^k x_{i0} \cdot \tilde{A}_{(k-1),i}(l) \equiv A(l)$. Тогда для выполнения неравенства (2.13) достаточно, чтобы p_l удовлетворяло неравенствам

$$\begin{aligned} p_l &> \frac{1}{\sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(l) \cdot x_{i0}} \cdot (\det A_k \cdot (y_{k+1} - y_0) - \sum_{j=1}^k b_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} - \\ &\quad - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k p_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0}), \quad \text{если } A(l) > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_l < \frac{1}{\sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(l) \cdot x_{i0}} \cdot \left(\det A_k \cdot (y_{k+1} - y_0) - \sum_{j=1}^k b_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} - \right. \\
\left. - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k p_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} \right), \quad \text{если } A(l) < 0,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Итак, присваивая сначала коэффициентам управления $p_i, i = 1, \dots, k, i \neq l$ произвольные конечные значения, далее выбираем p_l , удовлетворяющее условию (2.15). Тогда имеем $\bar{y} > y_{k+1}$. В силу асимптотической устойчивости траектории, находясь в интегральной плоскости $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{k+1} y = \alpha_1 x_{10} + \alpha_2 x_{20} + \dots + \alpha_{k+1} y_0$, будут из области, для которой $y \in \Delta_k$, неограниченно приближаться к точке $(0, \bar{y})$ и при этом пересекут плоскость $y = y_{k+1}$, т.е. произойдет переход от S_k к S_{k+1} . Переход от S_k к S_{k+1} происходит аналогично, с той разницей, что вместо (2.15) должны выполняться условия

$$\begin{aligned}
p_l < \frac{1}{\sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(l) \cdot x_{i0}} \cdot \left(\det A_k \cdot (y_{k-1} - y_0) - \sum_{j=1}^k b_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} - \right. \\
\left. - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k p_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} \right), \quad \text{если } A(l) > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_l > \frac{1}{\sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(l) \cdot x_{i0}} \cdot \left(\det A_k \cdot (y_{k-1} - y_0) - \sum_{j=1}^k b_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} - \right. \\
\left. - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k p_j \cdot \sum_{j=1}^k \tilde{A}_{(k-1),i}(j) \cdot x_{i0} \right), \quad \text{если } A(l) > 0,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Таким образом, доказана теорема

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X_k = 0$ – единственное асимптотически устойчивое положение равновесия системы (2.1) при каждом $k = 1, \dots, n$. Тогда управление $u = p_1 x_1 + \dots + p_k x_k$, где коэффициенты $p_i, i = 1, \dots, k$, удовлетворяют (2.15), обеспечивают переход системы S от стадии S_k к S_{k+1} . Если же выполняется условие (2.16), то происходит переход системы S от стадии S_k к S_{k-1} .

Замечание 8. В силу неоднозначности значений коэффициентов управления $u = p_1 x_1 + \dots + p_k x_k$, можно поставить задачу оптимальной стабилизации структуры в смысле некоторого критерия.

Теперь рассмотрим систему вида

$$\dot{X}_k = A_k X_k + C_k u, \quad (2.17)$$

$$\dot{y} = B_k^T X_k, \quad (2.18)$$

где u – r -мерный вектор управлений; C_k – матрица размерности $k \times r$.

Рассмотрим случай скалярного управления. Тогда $C_k^T = (c_1, \dots, c_k)$. Будем искать управление в виде

$$u = m^T X_k, \quad (2.19)$$

где $m^T = (m_1, \dots, m_k)$, m_i – постоянные. Поставим задачу нахождения m такого, что система (2.17), (2.18), с помощью соответствующего управления (2.20) может быть переведена из любого начального состояния (стадии) S_k в любое конечное состояние S_l . Подставим (2.19) в (2.17). Получим

$$\dot{X}_k = (A_k + C_k m^T) X_k = M X_k,$$

где $M = A_k + C_k m^T$ Пусть $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} y = \alpha_1 x_{10} + \dots + \alpha_k x_{k0} + \alpha_{k+1} y_0$ – интегральная гиперплоскость, полученная аналогично тому, как это сделано выше. Тогда α_i находятся из системы уравнений

$$M^T \alpha = -\alpha_{k+1} B_k, \quad (2.20)$$

где $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Пусть точка пересечения интегральной гиперплоскости с осью y имеет координату $\bar{y}$. Потребуем, чтобы выполнялось $\bar{y} > y_{k+1}$, т.е.

$$\bar{y} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} \sum_{j=1}^k \alpha_j x_{j0} + y_{0k} > y_{k+1}. \quad (2.21)$$

Выше было показано, что $\alpha_{k+1} \neq 0$. Тогда ненулевое решение системы (2.20) имеет вид

$$\alpha = -\alpha_{k+1} (M^*)^{-1} B_k,$$

или

$$\alpha_i = -\alpha_{k+1} \frac{\det \tilde{M}_i}{\det M},$$

где $\det \tilde{M}_i$ – матрица, полученная из M заменой ее i -го столбца столбцом B_k . Тогда неравенство (2.21) равносильно следующему

$$-\frac{1}{\det M} \sum_{j=1}^k \det \tilde{M}_j x_{j0} + y_{0k} > y_{k+1}. \quad (2.22)$$

Как известно [41], если ранг матрицы

$$L_k = \{C_k \ A_k C_k \ A_k C_k^2 \ \dots \ A_k^{k-1} C_k^k\}$$

равен k , то можно так выбрать столбец m , что матрица M будет иметь заранее заданные собственные числа. Пусть у них будут отрицательные вещественные части, что обеспечит асимптотическую устойчивость системы (2.17), замкнутой управлением

(2.19). Как показано в [41], столбец коэффициентов обратной связи имеет вид

$$m = d^T P_k^{-1} L_k^{-1}, \quad (2.23)$$

где $P_k = \{I_k p + e_k, I_k^2 p + e_{k-1}, \dots, I_k^k p + e_1\}$, $p = -L_k^{-1} A_k^k C_k$, $I_k = \{\bar{0}, e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$, $\bar{0}, e_i$, соответственно, k -мерные нулевой столбец и столбец из нулей, кроме i -го компонента, равного единице. Компоненты вектора d равны

$$d_i = p_i - q_i,$$

где $i = 0, 1, \dots, k-1$, p_i — компоненты вектора p , q_i — коэффициенты многочлена $Q_k(\lambda)$ степени k с заранее заданными собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

$$Q_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k) = \lambda^k + q_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + q_1 \lambda + q_0.$$

Рассмотрим матрицу Гурвица

$$M_Q(k) = \begin{pmatrix} q_1 & q_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_3 & q_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Критерий гурвицевости многочлена $Q_k(\lambda)$ состоит в положительности главных диагональных миноров матрицы $M_Q(k)$

$$q_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} q_1 & q_0 \\ q_3 & q_2 \end{vmatrix} > 0, \dots \quad (2.24)$$

Тогда получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть а) $\text{rank} L_k = k$; б) $B_k^T X_{k0} > 0$. Если система неравенств (2.21), (2.24) имеет решение, то управление (2.19), (2.23) переводит систему (2.17), (2.18) из состояния S_k в состояние S_{k+1} при любых $X_k \neq 0$, таких, что $y_{0k} < y_{k+1}$.

Доказательство. Управление построено выше. В силу условия б), $B_k \neq 0$, что обеспечивает ненулевое решение системы уравнений (2.20), что было бы невозможно в силу невырожденности матрицы M , что, в свою очередь является следствием отрицательности вещественных частей ее собственных чисел. Тогда, поскольку в силу условия б) при всех $t, (X_k(t), y(t) \in B^+)$, то $\dot{y}(t) > 0$ и при возрастании y траектория неограниченно приближается к асимптотически устойчивому положению равновесия $(0, \dots, 0, \bar{y})$. При этом, поскольку $\bar{y} > y_{k+1}$, то траектория пересечет гиперплоскость $y = y_{k+1}$. В результате произойдет переход $S_k \rightarrow S_{k+1}$. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 для любого $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда для любого $l = 1, 2, \dots, n$ можно построить управление (2.19), переводящее систему (2.17), (2.18) из состояния S_k в состояние S_l . При этом состояние S_l сохранится сколь угодно долго.

Доказательство. Выполнение условий теоремы 3 обеспечивает возможность перевода системы из S_k в S_{k+1} (или S_{k-1}) до тех пор, пока она не перейдет в состояние S_l , а далее можно за счет переключений управления, как это предложено в конце доказательства теоремы 1, сохранить полученное состояние. $\square$

3. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ СИСТЕМА. СТАБИЛИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ

Введем в рассмотрение линейную параллельную систему, которая при условии

$$y_{s_k} > d_{s_k}, k = 1, \dots, m, \quad (3.1)$$

$$y_{s_j} < d_{s_j}, j = m + 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$m \in \{1, \dots, n\},$$

динамики переменных x_{s_k}

[illegible]

динамики переменных y_{s_k}

[illegible]

динамики переменных $y_{s_j}, j = m + 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{s_{m+1}} &= \tilde{b}_{s_{m+1}s_1}x_{s_1} + \dots + \tilde{b}_{s_{m+1}s_m}x_{s_m}, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{s_n} &= \tilde{b}_{s_ns_1}x_{s_1} + \dots + \tilde{b}_{s_ns_m}x_{s_m}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $d_k, a_{ir}, b_{ir}, \tilde{b}_{ir}$ – заданные постоянные. При этом будем говорить, что многостадийная система S находится в состоянии (стадии) $S(s_1, \dots, s_m)$. Здесь индексы в скобках – номера переменных x_{s_k} , входящих в данную стадию.

Замечание 9. Для простоты обозначений будем считать, что переменные x_i являются скалярными. Тогда s_i – одномерная подсистема, которой соответствует вектор состояния (x_i, y_i) . Но все дальнейшие построения и рассуждения останутся в силе, если считать, что x_i – вектор, а постоянные коэффициенты – матрицы соответствующих размерностей.

Замечание 10. Можно рассмотреть модель, для которой коэффициенты правых частей являются кусочно-постоянными функциями структуры $a_{ir} = a_{ir}(\gamma), b_{ir} = b_{ir}(\gamma), \tilde{b}_{ir} = \tilde{b}_{ir}(\gamma)$. Это не изменит дальнейших построений.

Отключение подсистемы S_l . Пусть при попадании траектории системы (3.3)-(3.5) в некоторый момент времени t^- из области (3.1), (3.2) на плоскость $y_{s_l} = d_{s_l}$ при некотором $l \in \{1, \dots, m\}$ происходит переход от стадии $S(s_1, \dots, s_m)$ к стадии $S(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m)$, где символом $\tilde{s}_l$ обозначен отсутствующий компонент в наборе индексов. Таким образом, стадия $S(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m)$ будет описываться системой (3.3)-(3.5), в которую не входит уравнение, задающее динамику переменной x_{s_l} , а уравнение, задающее динамику y_{s_l} , принимает вид

$$\dot{y}_{s_l} = \tilde{b}_{s_1 s_1} x_{s_1} + \dots + \tilde{b}_{s_1 s_m} x_{s_m}.$$

Причем в его правой части, а также в правых частях других уравнений отсутствуют слагаемые, содержащие переменную x_{s_l} . Для формального описания процесса уменьшения размерности введем следующие обозначения:

матрицы

$$A = \{a_{ij}\}; \quad i, j = 1, \dots, n;$$

$A(s_1, \dots, s_m | p_1, \dots, p_r)$ – матрица, состоящая из элементов A , стоящих на пересечении ее строк и столбцов с номерами $s_1, \dots, s_m$ и $p_1, \dots, p_r$, соответственно;

$A(s_1, \dots, s_m | s_1, \dots, s_m) \equiv A(s_1, \dots, s_m)$ – квадратная матрица порядка m , составленная из элементов матрицы A , стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами $s_1, \dots, s_m$;

$A(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m)$ – квадратная матрица порядка $m - 1$, полученная из $A(s_1, \dots, s_m)$ удалением из нее строки и столбца с номером s_l ;

$A(s_1, \dots, 0_{s_l}, \dots, s_m)$ – квадратная матрица порядка m , полученная из $A(s_1, \dots, s_m)$ заменой ее строки и столбца с номером s_l нулевой строкой и столбцом;

$A(s_1, \dots, s_m | \cdot)$ – матрица, составленная из элементов матрицы A , стоящих на пересечении ее строк с номерами $s_1, \dots, s_m$ и столбцов со всеми номерами, не равными $s_1, \dots, s_m$, т.е. с номерами множества $\{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, \dots, s_m\}$; $A(s_1, \dots, s_m | \cdot)$ имеет

размерность $m \times (n - m)$;

векторы

$$x(s_1, \dots, s_m) = (x_{s_1}, \dots, x_{s_m})^T \in \mathbb{R}^m;$$

$$x(s_1, \dots, s_m)(t) = (x_{s_1}(t), \dots, x_{s_m}(t))^T;$$

$x(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m)$ – вектор, полученный из $x(s_1, \dots, s_m)$ удалением из него компоненты с номером s_l , $x(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$;

$x(s_1, \dots, 0_{s_l}, \dots, s_m)$ – вектор, полученный из $x(s_1, \dots, s_m)$ заменой его компоненты с номером s_l нулем;

$B = \{b_{ij}\}$, $\tilde{B} = \{\tilde{b}_{ij}\}$, $C = \{c_{ij}\}$; $i, j = 1, \dots, n$, – заданные матрицы с постоянными элементами.

Тогда стадия $S(s_1, \dots, s_m)$, т.е. система (3.3)-(3.5), задается уравнениями

$$\dot{x}(s_1, \dots, s_m) = A(s_1, \dots, s_m) \cdot x(s_1, \dots, s_m), \quad (3.6)$$

$$\dot{y}(s_1, \dots, s_m) = B(s_1, \dots, s_m) \cdot x(s_1, \dots, s_m), \quad (3.7)$$

$$\dot{y}(s_{m+1}, \dots, s_n) = \tilde{B}(s_{m+1}, \dots, s_n | \cdot) \cdot x(s_1, \dots, s_m). \quad (3.8)$$

Стадия $S(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m)$ задается уравнениями

$$\dot{x}(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m) = A(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m) \cdot x(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m), \quad (3.9)$$

$$\dot{y}(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m) = B(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m) \cdot x(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m), \quad (3.10)$$

$$\dot{y}(s_l, s_{m+1}, \dots, s_n) = \tilde{B}(s_l, s_{m+1}, \dots, s_n | \cdot) \cdot x(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m). \quad (3.11)$$

Введем функции перехода $\varphi^-(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m)$ от $S(s_1, \dots, s_m)$ к стадии $S(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m)$. Пусть $z((s_1, \dots, s_m)(s_l)) = (s_1, \dots, s_m, y_{s_l})^T$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^-(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m) &: z((s_1, \dots, s_m)(s_l)) \rightarrow \\ &\rightarrow (\tilde{x}(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m), d_{s_l} - \varepsilon_{s_l})^T, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{x}(s_1, \dots, s_m) = C(s_1, \dots, 0_l, \dots, s_m | s_1, \dots, s_m) \cdot x(s_1, \dots, s_m), \quad (3.12)$$

ε_{s_l} – заданные положительные постоянные. При этом

$$x(s_1, \dots, \tilde{s}_l, \dots, s_m)(t^- + 0) = \tilde{x}(s_1, \dots, s_m)(t^-). \quad (3.13)$$

Подключение подсистемы S_p . Вернемся снова к области (3.1), (3.2) и к соответствующей ей системе (3.3)-(3.5). Пусть при попадании траектории этой системы в момент времени t^+ из области (3.1), (3.2) на плоскость $y_{s_p} = d_{s_p}$ при некотором $p \in \{m+1, \dots, n\}$ происходит переход от стадии $S(s_1, \dots, s_m)$ к стадии $S(s_1, \dots, s_m, s_p)$, которая будет описываться системой, задаваемой уравнениями

динамики переменных $x_{s_k}, k = 1, \dots, m, p$

$$\dot{x}_{s_k} = a_{s_k s_1} x_{s_1} + \dots + a_{s_k s_m} x_{s_m} + a_{s_k s_p} x_{s_p}, \quad (3.14)$$

динамики переменных $y_{s_k}, k = 1, \dots, m, p$,

$$\dot{y}_{s_k} = b_{s_k s_1} x_{s_1} + \dots + b_{s_k s_m} x_{s_m} + b_{s_k s_p} x_{s_p}, \quad (3.15)$$

динамики переменных $y_{s_j}, j = m+1, \dots, n, j \neq p$,

$$\dot{y}_{s_j} = \tilde{b}_{s_j s_1} x_{s_1} + \dots + \tilde{b}_{s_j s_m} x_{s_m} + \tilde{b}_{s_j s_p} x_{s_p}, \quad (3.16)$$

или

$$\dot{x}(s_1, \dots, s_m, s_p) = A(s_1, \dots, s_m, s_p) \cdot x(s_1, \dots, s_m, s_p), \quad (3.17)$$

$$\dot{y}(s_1, \dots, s_m, s_p) = B(s_1, \dots, s_m, s_p) \cdot x(s_1, \dots, s_m, s_p), \quad (3.18)$$

$$\dot{y}(s_{m+1}, \dots, \tilde{s}_p, \dots, s_n) = \tilde{B}(s_{m+1}, \dots, \tilde{s}_p, \dots, s_n | \cdot) \cdot x(s_1, \dots, s_m, s_p), \quad (3.19)$$

Введем функции перехода $\varphi^+(s_1, \dots, s_m, s_p)$ от $S(s_1, \dots, s_m)$ к стадии $S(s_1, \dots, s_m, s_p)$. Пусть $z((s_1, \dots, s_m), (s_l)) = (x_{s_1}, \dots, x_{s_m}, y_{s_l})^T$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^+(s_1, \dots, s_m, s_p): z((s_1, \dots, s_m), (s_l)) &\rightarrow (\bar{x}_{s_1}, \dots, \bar{x}_{s_m}, \bar{x}_{s_p}, d_{s_p} + \varepsilon_{s_p}) \equiv \\ &\equiv (\bar{x}(s_1, \dots, s_m, s_p), d_{s_p} + \varepsilon_{s_p})^T, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$\bar{x}(s_1, \dots, s_m, s_p) = D(s_1, \dots, s_m, s_p | s_1, \dots, s_m) \cdot x(s_1, \dots, s_m). \quad (3.21)$$

При этом

$$x(s_1, \dots, s_m, s_p)(t^+ + 0) = \bar{x}(s_1, \dots, s_m, s_p)(t^+). \quad (3.22)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Система (3.1) – (3.22) называется *линейной системой с параллельным переключением, или линейной параллельной системой (ЛПС)*.

Замечание 11. Линейную параллельную систему можно задать также следующим образом. Введем следующие обозначения. Пусть

$$a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n; \quad b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$a(b) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)^T \in \mathbb{R}^n; \quad \dot{a}(b) = (\dot{a}_1 b_1, \dots, \dot{a}_n b_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Далее, если дана матрица $A = (A_1^T, \dots, A_n^T)^T$, где A_i^T – i -я строка, то

$$A(b) = (b_1 A_1^T, \dots, b_n A_n^T)^T.$$

Если γ_i – компоненты вектора структуры $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$, то пусть

$$\bar{\gamma}_i = 1 - \gamma_i; \quad \bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда динамика ЛПС задается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(\gamma) &= A(\gamma) \cdot x(\gamma), \\ \dot{y}(\gamma) &= B(\gamma) \cdot x(\gamma), \\ \dot{y}(\bar{\gamma}) &= \tilde{B}(\bar{\gamma}) \cdot x(\gamma). \end{aligned} \quad (3.23)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Векторы

$$y(\gamma) = (\gamma_1 y_1, \dots, \gamma_n y_n)^T \in \mathbb{R}^n; \quad y(\bar{\gamma}) = (\bar{\gamma}_1 y_1, \dots, \bar{\gamma}_n y_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

назовем векторами активного и пассивного времени эволюции, соответственно.

Рассмотрим задачу стабилизации некоторой стадии линейной параллельной системы, построенной в настоящем параграфе. Для этого введем в нее управления $u = (u_1, \dots, u_r)^T \in \mathbb{R}^r$; $v = (v_1, \dots, v_s)^T \in \mathbb{R}^s$; $w = (w_1, \dots, w_p)^T \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(\gamma) &= A(\gamma) \cdot x(\gamma) + C(\gamma) \cdot u, \\ \dot{y}(\gamma) &= B(\gamma) \cdot x(\gamma) + \hat{C}(\gamma) \cdot v, \\ \dot{y}(\bar{\gamma}) &= \tilde{B}(\bar{\gamma}) \cdot x(\gamma) + \tilde{C}(\bar{\gamma}) \cdot w. \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $C, \hat{C}, \tilde{C}$ – постоянные матрицы размерностей $n \times r, n \times s, n \times p$, соответственно.

Рассмотрим сначала задачу синтеза управления, стабилизирующего некоторую структуру (стадию) системы. Возможны два случая.

1) Стадия S_l активна в момент времени $t = t_0$, т.е. $\gamma_l(t_0) = 1$. Тогда требуется построить управление, при котором $\gamma_l(t) = 1$ при всех $t \geq t_0$. Для этого достаточно удерживать переменную $\gamma_l(t)$ в области $\{y_l > d_l\}$.

2) Стадия S_l пассивна в момент времени $t = t_0$, т.е. $\gamma_l(t_0) = 0$. Тогда надо перевести систему в область $\{y_l \geq d_l\}$ и удерживать ее там.

В обоих случаях можно воспользоваться методом синтеза управления, предложенным выше.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия

- 1) $\gamma_l(t_0) = 1$; существует ненулевой элемент $\hat{c}_{lq} \neq 0$ строки $\hat{C}_l^T(\gamma)$ матрицы $\hat{C}(\gamma)$, или
- 2) $\gamma_l(t_0) = 0$; существует ненулевой элемент $\tilde{c}_{lh} \neq 0$ строки $\tilde{C}_l^T(\gamma)$ матрицы $\tilde{C}(\gamma)$.

Тогда найдется управление в виде линейной обратной связи $v = p_1x_1 + \dots + p_nx_n$ (в случае 1), или $w = p_1x_1 + \dots + p_nx_n$ (в случае 2), где p_j – кусочно-постоянные функции компонент $x_j, j = 1, \dots, n$, вектора X_n , такое, что система (3.24) за конечное время перейдет в любое заранее заданное состояние (стадию) S_l для любой начальной точки (X_{k0}, y_{0k}) , для которой $X_{k0} \neq 0, X_{k0} = (x_{10}, \dots, x_{k0})^T$.

Доказательство. Достаточно взять любое u , например, $u = 0$. Далее в случае 1) положить $v_s = 0, s \neq q$, а v_s строить так, как это сделано при доказательстве аналогичной теоремы для последовательной системы. В случае 2) достаточно положить $w_j = 0, j \neq h$ и аналогично строить w_h . $\square$

Пример. Пусть $n = 2$, управления u, v, w – скалярные величины. Тогда система (3.24) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + cu, \\ \dot{y}_1 &= b_{11}x_1 + \hat{c}_1v, \text{ если } \gamma = (1, 0) \equiv \gamma^1; \\ \dot{y}_2 &= \tilde{b}_{21}x_1 + \tilde{c}_1w, \\ \dot{x}_2 &= a_{12}x_2 + cu, \\ \dot{y}_1 &= \tilde{b}_{12}x_2 + \tilde{c}_2w, \text{ если } \gamma = (0, 1) \equiv \gamma^2; \\ \dot{y}_2 &= b_{22}x_2 + \hat{c}_2v. \end{aligned}$$

Для того чтобы перейти от структуры γ^1 к структуре γ^2 можно, например, положить

$$v = \frac{p_1}{\hat{c}_1}x_1, w = \frac{p_2}{\tilde{c}_1}x_1, p_1 = -\bar{c}_1 \cdot \text{sign}x_1 - b_{11}, p_2 = \bar{c}_2 \cdot \text{sign}x_2 - \tilde{b}_{21} \quad (\text{если } x_1(t_0) \neq 0).$$

Для перехода от γ^2 к структуре γ^1 можно положить

$$w = \frac{p_2}{\tilde{c}_2}x_2, v = \frac{p_1}{\hat{c}_2}x_2, p_1 = \bar{c}_1 \cdot \text{sign}x_1 - \tilde{b}_{12}, p_2 = -\bar{c}_2 \cdot \text{sign}x_2 - b_{22} \quad (\text{если } x_1(t_0) \neq 0),$$

где $\bar{c}_1, \bar{\bar{c}}_1, \bar{c}_2, \bar{\bar{c}}_2$ – постоянные, выбор которых предложен в доказательстве теоремы 1.

Заметим, что управление u не использовалось. Его можно брать произвольным или использовать для решения дополнительных задач.

В общем случае для $(0, x)$ - стабилизации структуры γ^* , для которой

$$\gamma_{i_s} = 1, s = 1, \dots, k, \gamma_{i_r} = 0, r \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, \dots, s_k\},$$

требуется построить управление, переводящее траекторию системы (3.25) в область

$$\{y_{i_s} > d_{i_s}\}, \{y_{i_r} < d_{i_r}\}.$$

Для этого достаточно применить метод, предложенный при доказательстве теоремы 1, используя для построения соответствующего управления 2-ю и 3-ю системы в (3.25).

4. МОДЕЛЬ ИНВЕСТИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Здесь рассмотрена задача управления производственной системой с переменным составом. Такую систему можно отнести к классу гибридных систем. Рассмотрим некоторую экономическую систему, изменение структуры которой происходит согласно правилам, устанавливаемым управляющим органом. Конкретизируем систему как производственное объединение (ПО), в состав которого входят предприятия, выпускающие однородную продукцию. Пусть, как и ранее, $x_i(t)$ – количественная характеристика состояния i -го предприятия в момент времени t , $x_i(t) \geq 0$. Будем считать, что динамика предприятия задается уравнением

$$\dot{x}_i = a_i(t)x_i + w_i(x_i, t), \quad (4.1)$$

где $a_i(t)x_i(t)$, $w_i(x_i, t)$ – скорости прироста инвестиций в предприятие i за счет его собственных средств и кредита банка, соответственно; $a_i(t)$ – скорость прироста собственных средств, направляемых на инвестирование, на единицу объема продукции; $w_i(x_i, t)$ – кусочно-непрерывные неотрицательные функции. Пусть t_0 – момент времени начала функционирования ПО. При этом в начальный момент времени имеется n предприятий в составе ПО. Введем переменные $y_i(t)$, отвечающие за состав ПО:

$$y_i(t) = y_{i0} + \int_{t_0}^t (c_i(x_i(\tau), \tau) - w_i(x_i(\tau), \tau)) d\tau, \quad (4.2)$$

где c_i, y_{i0} – заданные пороговые функции и постоянные, соответственно. Продифференцировав равенство (4.2), получим

$$\dot{y}_i = c_i(x_i, t) - w_i(x_i, t). \quad (4.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Будем называть предприятие i , динамика которого задается системой (4.1), (4.3), активным.

Введем постоянные пороги $d_i < y_{i0}$. Пусть найдется наименьший момент времени $t_r > t_0$, $r \in \{1, \dots, n\}$, такой что $y_r(t_r) = d_r$. Тогда в момент времени t_r происходит закрытие r -го предприятия. Поясним экономический смысл предложенной процедуры. Эффективно работающее предприятие должно в большей степени развиваться не за счет кредитов, а за счет собственных средств. Поэтому превышение функцией $w_r(x_r, t)$ порогового значения $c_r(x_r, t)$ означает, что r -е предприятие набирает слишком много кредитов, которые придется погашать, используя собственные средства. Это является признаком неэффективной деятельности, что приводит к принятию органом управления решения о приостановке предприятия. Возникает вопрос: когда закрывать предприятие? Если произвести закрытие в момент выполнения условия $w_r(x_r, t) = c_r(x_r, t)$, то процесс закрытия станет слишком чувствительным, реагируя на мгновенные сбои

в работе предприятия, приводящие к малозначительным снижениям его эффективности. Для органа управления желательно некоторое время наблюдать за деятельностью предприятия, прежде чем принимать решение. Поэтому наличие интеграла в условии закрытия $y_r(t_r) = d_r$ придает некоторую инерционность в принятии решения о закрытии предприятия, что дает последнему возможность отработать временные сбои. Напротив, если низкая эффективность его работы, что проявляется в выполнении условия $w_r(x_r, t) > c_r(x_r, t)$, наблюдается в течение достаточно длительного промежутка времени, то орган управления закрывает r -е предприятие в момент времени t_r , введенный выше. После закрытия r -го предприятия динамика ПО, состоящим теперь из n -го активного предприятия, задается уравнениями (4.1), (4.3), где $i \neq r$, а r -е предприятие переходит в пассивный режим, который задается системой

$$\dot{y}_r = c_r(x_r^-, t), \quad y_r(t_r + 0) = y_r^-, \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_r = -p_r w_r(x_r, t), \quad x_r(t_r + 0) = x_r^-, \quad x_r(t) > 0, \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_r = 0, \quad x_r(t) = 0, \quad (4.6)$$

где заданные постоянные y_r^-, p_r, x_r^- . Уравнения (4.5), (4.7) задают динамику накопления ресурсов и возврата кредитов, соответственно. Уравнение (4.7) соответствует закрытию предприятия r , не сумевшего погасить кредиты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем называть предприятие i , динамика которого задается системой (4.5) – (4.7), законсервированным или пассивным.

Таким образом, ПО состоит из активных предприятий, динамика которых задается уравнениями (4.1), (4.3), и пассивных (4.5)–(4.7).

Теперь рассмотрим процедуру возобновления работы предприятия r . Пусть на интервале $(t_r, \bar{t}_r)$ $y_r(t) < d_r$, и $y_r(\bar{t}_r) = d_r$.

Тогда в момент времени $\bar{t}_r$ орган управления переводит предприятие из пассивного в активный режим, и его динамика задается уравнениями (4.1), (4.3). При этом $x_r(\bar{t}_r + 0) = \bar{x}_r$, $y_r(\bar{t}_r + 0) = d_r + \delta_r$, где $\bar{x}_r, \delta_r$ – заданные положительные постоянные. Наличие постоянной δ_r приводит к скачкообразному изменению y_r при достижении ею порогового значения d_r . Предприятие получает начальный кредит на развитие, иначе может оказаться, что сразу после открытия его придется закрывать.

Рассмотрим задачу управления ПО с целью достижения предприятиями заданных уровней развития к заданному моменту времени. Назовем ее задачей развития ПО. Обозначим через $k(t)$ – количество активных предприятий, входящих в ПО в момент времени t . Пусть $k(t_0) = n$, при этом динамика ПО задается системой уравнений (4.1), (4.3). Будем считать постоянными c_i, a_i . В качестве управляющих воздействий рассмотрим функции $w_i(t)$, которые будем полагать кусочно-постоянными. Таким образом, получаем задачу построения управления $w = (w_1, \dots, w_n)$, переводящего систему (4.1) – (4.7) из начального состояния

$$z^0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{n0}, k(t_0))$$

в момент времени t_0 в конечное состояние

$$z^1 = (x_{11}, \dots, x_{n1}, y_{11}, \dots, y_{n1}, k(t_0 + T))$$

в момент времени $t_0 + T$. Из постановки задачи следует возможность изменения состава ПО в процессе его функционирования на промежутке $[t_0, t_0 + T]$. Если положить $k(t_0 + T) = n$, то требуется сохранить состав ПО к конечному моменту времени. В [20] получено решение этой задачи для случая $k(t_0) = k(t_0 + T) = n$.

Глава III

Разное

1. ПРОБЛЕМА БРОКЕТТА

Целью этого краткого параграфа является привлечение внимания читателей к интересной задаче нестационарной стабилизации линейной системы, которая, в отличие от стационарной стабилизации, еще не решена полностью. Нестационарная стабилизация, в частности, оказывается полезной в задачах управления каталитическими реакциями. Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, A, B – матрицы с постоянными элементами, размерности $n \times n$, $n \times m$, соответственно. Будем называть допустимым управление вида $u = Cx$, где C – постоянная матрица размерности $m \times n$. Задача линейной стабилизации системы состоит в нахождении такого допустимого управления, при замыкании которым системы (1.1), последняя будет асимптотически устойчивой. При этом замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = (A + BC)x. \quad (1.2)$$

Поставленная задача полностью исследована. Получены алгоритмы построения стабилизирующего управления, т.е. нахождения соответствующей матрицы C , которую можно назвать стабилизирующей. Р.Брокетт, один из ведущих специалистов в области теории управления, поставил следующую задачу. Пусть допустимое управление имеет вид $u = C(t)x$, т.е. матрица C

коэффициентов обратной связи не является постоянной. Требуется найти переменную стабилизирующую матрицу $C(t)$. Поскольку для постоянной матрицы C задача стабилизации системы (1.1) решена, то проблема Брокетта по сути состоит в следующем вопросе: насколько введение зависящей от времени матрицы $C(t)$ коэффициентов линейной обратной связи расширяет возможности стационарной стабилизации? Г.А.Леонв решил эту задачу для более узкого класса матриц $C(t)$, а именно, периодических и имеющих нулевое среднее на периоде $[0, T]$

$$\int_0^T C(t)dt = 0.$$

Изложим кратко основной результат Г.А.Леонова, следуя [28]–[30]. Предположим, что существуют вещественные постоянные матрицы C_1, C_2 такие, что системы

$$\dot{x} = (A + BC_i)x, \quad i = 1, 2, \quad (1.3)$$

имеют устойчивые инвариантные линейные многообразия L_i и инвариантные линейные многообразия M_i , $i = 1, 2$. При этом $M_i \cap L_i = 0$, $\dim M_i + \dim L_i = n$. Пусть для положительных чисел $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \chi_i$ выполнены условия

$$|x_i(t; x_0)| \leq \alpha_i |x_0| \exp(-\lambda_i t), \quad \forall x_0 \in L_i,$$

$$|x_i(t; x_0)| \leq \beta_i |x_0| \exp(\chi_i t), \quad \forall x_0 \in M_i,$$

где $x_i(t; x_0)$ – решение системы (1.3) с начальным условием $x_i(0; x_0) = x_0$. Пусть далее существует непрерывная матрица $\sigma(t)$ и число $\tau > 0$ такие, что фазовый поток $\theta_{t_0}^t$ системы

$$\dot{x} = (A + B\sigma(t))x,$$

за время от $t = 0$ до $t = \tau$ переводит многообразие M_1 в многообразие, лежащее в L_2 : $\theta_0^\tau M_1 \subset L_2$. Тогда основным результатом Г.А.Леонова составляет следующая теорема

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\lambda_1 \lambda_2 > \chi_1 \chi_2.$$

Тогда существует периодическая матрица $C(t)$ такая, что система

$$\dot{x} = (A + BC(t))x$$

является асимптотически устойчивой.

Здесь под фазовым потоком понимается семейство преобразований $\theta_{t_0}^t$, $t_0, t \in \mathbb{R}$, $\theta_{t_0}^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\theta_{t_0}^t x_0 = x(t; t_0, x_0)$ – решение системы (1.3), удовлетворяющее условию $x(t_0; t_0, x_0) = x_0 \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Применим приведенный результат к двумерным системам $\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y + u = 0$, $z = d_1 x + \dot{x}$. Запишем эту систему управления в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_1 x_1 - a_2 x_2 - u, \quad z = d_1 x_1 + x_2. \quad (1.4)$$

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix},$$

$B = (0 \ -1)^*$, $x = (x_1, x_2)^*$. Условия Рауса - Гурвица устойчивости многочлена (характеристического) гарантируют, что стационарная стабилизация системы (1.4) с помощью линейной обратной связи $u = s_0 z = s_0 d_1 x_1 + s_0 x_2$, $s_0 = \text{const} \neq 0$ возможна тогда и только тогда, когда

$$a_2 + s_0 > 0, \quad a_1 + d_1 s_0 > 0.$$

Число s_0 , удовлетворяющее этим неравенствам существует тогда и только тогда, когда либо $d_1 > 0$, либо $d_1 \leq 0$, $a_2 d_1 \geq a_1$. Предположим, что стационарная стабилизация невозможна, т.е. выполнены условия $d_1 \leq 0$, $a_2 d_1 \geq a_1$. Пусть выполнено условие $d_1^2 - a^2 d_1 + a_1 \neq 0$ (невырожденность передаточной функции системы (1.4)). Применив приведенную выше теоремы (это можно

выполнить в качестве полезного, но не простого, упражнения), можно показать, что если в качестве управления брать функцию $u = s(t)z$, где $s(t)$ – кусочно-постоянная периодическая функция с достаточно большим периодом, то необходимым и достаточным условием стабилизации системы является выполнение хотя бы одного из условий $d_1 > 0$ или $c_1 \leq 0$, $d_1^2 - a^2 d_1 + a_1 > 0$. Эти условия выделяют более широкую область в пространстве параметров $\{(a_1, a_2, d_1)\}$, чем область, определяемую условиями Рауса-Гурвица при стационарной стабилизации.

2. ОБРАЩЕНИЕ СУММЫ МАТРИЦ

Известное свойство

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

для неособых матриц A, B, C позволяет сравнительно легко обращать произведение матриц. Обращение суммы матриц значительно сложнее. Начнем с того, что $(A + B + C)^{-1}$ может не существовать несмотря на то, что существуют A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} . При этом $(A + B + C)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1} + C^{-1}$, причем равенство имеет место достаточно редко, только в специальных случаях. Даже для скаляров $\frac{1}{a+b+c} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ в общем случае. Но все же есть некоторая возможность в полезных для приложений случаях получить аналог формулы обращения произведения для обращения суммы матриц. Например, пусть A – неособая квадратная матрица порядка n , C, D – матрицы размерности $n \times k$ такие, что существует матрица $(E + D^T A^{-1} C)^{-1}$. Тогда

$$(A + CD^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(E + D^T A^{-1}C)^{-1}D^T A^{-1}$$

Это формула Шермана-Моррисона-Вудбери (J.Sherman - W.J.Morrison-M.Woodbury), полученная в 1940-50-х годах для решения задач математической статистики. Она может быть проверена прямым умножением.

Чтобы оценить полезность формулы Шермана-Моррисона предположим, что A^{-1} известно из предыдущих вычислений. Прибавим α к каждому элементу a_{ij} . Обратную матрицу можно найти и классическим способом, но формула Шермана-Моррисона показывает как из полученной ранее информации об A^{-1} с помощью несложных преобразований мы можем получить новую обратную матрицу. Пусть $c = e_i$ и $d = \alpha e_j$, где e_i и e_j являются i -м и j -м столбцами единичной матрицы, соответственно. У матрицы cd^T элемент (i, j) равен α , а все остальные элементы равны нулю, так что

$$B = A + cd^T = A + \alpha e_i e_j^T$$

является преобразованной матрицей. Из формулы Шермана-Моррисона

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \left(A + \alpha e_i e_j^T \right)^{-1} = A^{-1} - \alpha \frac{A^{-1} e_i e_j^T A^{-1}}{1 + \alpha e_j^T A^{-1} e_i} \\ &= A^{-1} - \alpha \frac{[A^{-1}]_{*i} [A^{-1}]_{j*}}{1 + \alpha [A^{-1}]_{ji}}. \end{aligned}$$

Из этой формулы видно, как изменяется A^{-1} при возмущении a_{ij} , и это дает хороший алгоритм для нахождения A^{-1} .

Пример. Задача: начать с известных матриц A и A^{-1} , данных ниже. Преобразовать матрицу A , прибавив 1 к элементу a_{21} , и далее воспользоваться формулой Шермана-Моррисона для преобразования A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: получаем преобразованную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = A + e_2 e_1^T.$$

Применяя формулу Шермана-Моррисона, получаем преобразованную обратную матрицу

$$\begin{aligned} B^{-1} &= A^{-1} - \frac{A^{-1} e_2 e_1^T}{1 + e_1^T A^{-1} e_2} = A^{-1} - \frac{[A^{-1}]_{*2} [A^{-1}]_{1*}}{1 + [A^{-1}]_{12}} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \end{pmatrix}}{1 - 7} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 - 14/3 & -7 + 49/6 \\ -1 + 4/3 & 2 - 7/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Перейдем к другой матричной комбинации $I - A$, которая часто требует обращения, но нужно иметь в виду, что матрица $(I - A)^{-1}$ не обязана существовать. Но об этом можно не беспокоиться, если элементы матрицы A достаточно малы. В частности, если считать, что элементы матрицы A настолько малы, что выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$, и, аналогично работе со скалярными величинами

$$(E - A) (E + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) = E - A^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} E.$$

В общем случае у нас нет никакой полезной формулы для $(A + B)^{-1}$, но с помощью ряда Неймана $(E + A + A^2 + \dots)$ мы можем получить разложение в том случае, если элементы матрицы B достаточно малы относительно элементов матрицы A . Например, пусть существует A^{-1} и пусть для элементов матрицы B выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^{-1} B)^n = 0$, тогда

$$(A + B)^{-1} = \left(A (E - [-A^{-1} B]) \right)^{-1} = \left(E - [-A^{-1} B] \right)^{-1} A^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} [-A^{-1}B]^k \right) A^{-1},$$

и в первом приближении получаем

$$(A + B)^{-1} \approx A^{-1} - A^{-1}BA^{-1}.$$

Следовательно, если матрица A возмущена малой матрицей B , что может быть следствием неточных практических вычислений, то погрешность для A^{-1} будет порядка $A^{-1}BA^{-1}$. Другими словами, при малом возмущении B погрешность результата увеличивается при умножении на A^{-1} с обеих сторон. Таким образом, если элементы A^{-1} велики, то малые возмущения матрицы A могут вызвать большое возмущение результата при обращении. Такого результата можно достичь даже при изменении одного элемента исходной матрицы.

3. ОБ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Проблема построения адекватных моделей управления является достаточно трудной в силу сложности описания на формальном уровне динамики реальных процессов. Учет многих факторов приводит к невозможности аналитического исследования модели и ее использования для решения задач управления и прогнозирования. Отсюда следует необходимость построения простых аналитических моделей, учитывающих только основные факторы, влияющие на процесс, что позволяет сократить затраты на идентификацию структуры и параметров. Рассмотрим несколько подходов к определению понятия адекватности моделей и объектов.

В работе [22] был предложен подход, на основании которого модель считается адекватной, если при одном и том же значении управляющего воздействия значения критерия качества для

модели и процесса отличаются в некотором смысле незначительно. Это значит, что критерий качества должен быть достаточно грубым. При этом вводится метрическое пространство, точки которого соответствуют математическим образцам, описывающим объект и его модель. Остановимся несколько подробнее на данном подходе. Пусть объект управления известен с точностью до значений параметров. Пусть целевое условие имеет вид

$$0 \leq \min_u J(u, a) \leq J(u, a) \leq \min_u J(u, a) + \varepsilon, \quad (3.1)$$

где a – вектор неизвестных параметров, u – векторное управление, $J(u, a)$ – критерий качества функционирования объекта управления, $0 < \varepsilon$ – заданная постоянная. Предположим, что a_0 – вектор истинных значений параметров объекта, $\tilde{a}$ – вектор значений (оценок) параметров математической модели объекта. Рассмотрим два множества управлений

$$U_1 = \{u : 0 \leq \min_u J(u, a_0) \leq J(u, a_0) \leq \min_u J(u, a_0) + \varepsilon,$$

$$U_2 = \{u : 0 \leq \min_u J(u, \tilde{a}) \leq J(u, \tilde{a}) \leq \min_u J(u, \tilde{a}) + \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что математическая модель адекватна объекту управления в смысле критерия (3.1), если $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Поясним смысл определения. Построив оптимальное в смысле (3.1) управление, применяем это управление к объекту, и если объект адекватен модели, то для него также будет выполняться (3.1). Таким образом, нас интересует близость объекта и модели в смысле близости их показателей качества при одном управлении. При этом близость выходов при одинаковых входах не требуется. Нетрудно показать [22], что адекватность в смысле предложенного определения равносильна грубости показателя качества [40] по отношению к изменению параметра.

Рассмотрим еще один подход к решению вопроса об адекватности модели и объекта для задач стабилизации. Будем предпо-

лагать, что динамика объекта и модели задаются соответственно уравнениями вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.2)$$

$$\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{B}v, \quad (3.3)$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$ – векторы состояний, $u, v \in \mathbb{R}^m$ – векторы управлений, $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Модель (3.3) адекватна объекту (3.2), если найдется такая постоянная матрица C , что при $u = Cx$, $y = Cv$, соответственно, системы (3.2), (3.3) асимптотически устойчивы.

Преимущество введенного определения состоит в возможности отказа от точной идентификации модели, предназначенной для целей управления. При этом реализуется принцип: для точного управления объектом не обязательно строить точную модель. Для проверки адекватности замкнем системы (3.2), (3.3) управлениями $u = Cx$, $y = Cv$, соответственно. Надо найти матрицу C такую, что система уравнений

$$\det(A + BC - \lambda E) = 0, \quad \det(\tilde{A} + \tilde{B}C - \lambda E) = 0$$

имеет решения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

В настоящем параграфе только намечены подходы к решению важной проблемы адекватности математических моделей объектам управления. Отличие их от традиционного понимания адекватности состоит в том, что не требуется сравнивать выходы модели и объекта при одинаковых входах.

Литература

- [1] *Антончик В. С.* Методы стабилизации программных движений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998.
- [2] *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
- [3] *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
- [4] *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
- [5] *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
- [6] *Воронов А. А.* Устойчивость. Управляемость. Наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
- [7] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
- [8] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966.
- [9] *Занг В. Б.* Синергетическая экономика. М.: Мир, 1999.
- [10] *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
- [11] *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. М.: Высшая школа, 1982.
- [12] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1999.
- [13] *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

- [14] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Линейная алгебра. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.
- [15] Кириллов А. Н. Управление многостадийными технологическими процессами// Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2006. Вып. 4. С. 127–131.
- [16] Кириллов А. Н. Нелинейная стабилизация динамических систем управления// Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. №12. С. 6–11.
- [17] Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделировании систем со структурными изменениями// Информационно - управляющие системы. 2009. №1. С. 20–24.
- [18] Кириллов А. Н. Динамические системы с переменной структурой и размерностью// Известия вузов. Приборостроение. 2009. Т.52. №3. С. 23–28.
- [19] Кириллов А. Н. Моделирование динамики структур гибридных систем// Информационно-управляющие системы. 2011. №4. С. 42–46.
- [20] Кириллов А. Н. Модель инвестирования экономической системы с переменной структурой// Труды института системного анализа РАН. 2007. С. 281–287.
- [21] Кириллов А. Н. Одна математическая модель распределения капитальных вложений// Экономика и математические методы. 1982. Т.18. Вып. 5. С. 922–925.
- [22] Кириллов А. Н., Юсупов Р. М. Об оценке адекватности моделей объектов в задачах управления// Труды ВИКИ им.А.Ф.Можайского. 1979. Вып. 592. С. 18–21.
- [23] Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.

- [24] *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
- [25] *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
- [26] *Ланкастер К.* Математическая экономика. М.: Сов. радио, 1972.
- [27] *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1973.
- [28] *Леонов Г. А.* Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений// Алгебра и анализ. 2001. №4. С. 134–155.
- [29] *Леонов Г. А.* Стабилизационная проблема Брокетта// Автоматика и телемеханика. 2001. №5. С. 190–193.
- [30] *Леонов Г. А.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005.
- [31] *Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
- [32] *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
- [33] *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
- [34] *Матросов В. М., Васильев С. Н., Москаленко А. И.* Нелинейная теория управления и ее приложения. М.: Физматлит, 2003.
- [35] *Мееров Н. В.* Системы многосвязного регулирования. М.: Наука, 1965.
- [36] *Москаленко А. И.* Оптимальное управление моделями экономической динамики. Новосибирск: Наука, 1999.

- [37] *Охтилев М. Ю., Соколов Б. В., Юсупов Р. М.* Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой технических объектов. М.: Наука, 2006.
- [38] *Петров А. А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1996.
- [39] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.
- [40] *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981.
- [41] *Смирнов Е. Я.* Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.
- [42] *Стрэнг Г.* Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980.
- [43] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [44] *Черников С. Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
- [45] *Шильяк Д. Д.* Децентрализованное управление сложными системами. М.: Мир, 1994.