

Национальный исследовательский  
Томский государственный университет  
Кемеровский государственный университет  
Кемеровский научный центр СО РАН  
Институт вычислительных технологий СО РАН  
Филиал Кемеровского государственного университета  
в г. Анжеро-Судженске

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
(ИТММ–2013)**

**Материалы XII Всероссийской  
научно-практической конференции  
с международным участием  
29–30 ноября 2013 г.**

**Часть 2**

2013

УДК 519

ББК 22.17

И74

Редколлегия:

*Р. Т. Якупов*, д-р физ.-мат. наук, профессор;

*А. А. Назаров*, д-р техн. наук, профессор;

*И. Р. Гарайшина*, канд. физ.-мат. наук, доцент.

**Информационные** технологии и математическое моделирование  
И74 (ИТММ–2013): Материалы XII Всероссийской научно-практической  
конференции с международным участием имени А. Ф. Терпугова  
(29–30 ноября 2013 г.). – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2013. – Ч. 2. –  
164 с.

**ISBN**

В часть 2 вошли материалы докладов, представленные на XII Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» на секциях «Вероятностные методы и модели», «Математическое моделирование в науке и технике».

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

**УДК 519**

**ББК 22.17**

*Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-07-06065)*

**ISBN**

© Филиал Кемеровского государственного университета  
в г. Анжеро-Судженске, 2013

# ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

## EFFECTIVE ENVELOPES FOR GAUSSIAN QUEUES

*O. Lukashenko<sup>1,2</sup>, E. Morozov<sup>1,2</sup>, M. Pagano<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>*IAMR KarSC RAS*

<sup>2</sup>*Petrozavodsk State University*

<sup>3</sup>*University of Pisa*

Gaussian processes are rather popular models to describe the traffic dynamics of a wide class of the modern telecommunication networks. These models can take into account such specific properties as self-similarity and long-range dependence inherent to network traffic [7, 11]. Self-similarity means invariance in the distribution under suitable scaling of time and space, while long-range dependence implies a slow decay of the autocorrelation function. These properties make difficult the probabilistic analysis of the related queueing systems and, as a consequence, obtaining the key characteristics in an explicit form. One of the main performance parameters is the overflow probability, i.e. the probability that the workload process exceeds a given (finite) threshold. In Gaussian queueing systems with infinite buffer, the analysis of the overflow probability is reduced to the analysis of the extremes of the Gaussian processes.

We consider the so-called fluid queue with a constant service rate  $C$  driven by the input process  $A(t)$ , which is defined as follows:

$$A(t) = mt + X(t), \quad (1)$$

where  $m > 0$  is the mean input rate and the process  $X$  is a centered Gaussian process with stationary increments. Physically,  $A(t)$  describes the amount of data (input traffic) arrived into a communication node within time interval  $[0, t]$ ,  $t \geq 0$ . Denote the variance by  $Var X(t) := v(t)$ . In the following we only assume that the function  $v(t)$  is regularly varying at infinity with index  $V \in (0, 2)$ , i. e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(\alpha t)}{v(t)} = \alpha^V. \quad (2)$$

for any  $\alpha > 0$ .

We consider the following important cases of Gaussian inputs, which obey to the previous condition:

1. Fractional Brownian Motion (FBM). In this case  $v(t) = t^{2H}$ , with Hurst parameter  $H \in (0, 1)$  (in the teletraffic framework usually  $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , corresponding to traffic processes with long-range dependence). It has been shown in [9] that FBM arises as the scaled limit process when the cumulative workload is a superposition of on-off sources with mutually independent heavy-tailed on and/or off periods.

2. Sum of independent FBMs with  $v(t) = \sum_{i=1}^n t^{2H_i}$ . The use of this model is also motivated by the fundamental result in [9] in case of heterogeneous on-off sources.

3. Integrated Ornstein-Uhlenbeck process (IOU) with  $v(t) = t + e^{-t} - 1$ . IOU is the Gaussian counterpart of the well-known Anick-Mitra-Sondi fluid model [1], and its relevance is further motivated in [6].

It is well-known that the stationary workload  $Q$  is distributed as

$$Q =_d \sup_{t \geq 0} (A(t) - Ct) \quad (3)$$

There are no explicit expressions for (3) in case of general Gaussian input (some results are available only for specific simple case like standard Brownian motion), but there are several asymptotic results for the tail probability [2, 3, 4].

A relatively new approach, based on stochastic network calculus and sample path envelopes [8, 9], can provide non-asymptotic performance bounds for Gaussian queues. Such bounds have been derived by Rizk and Fidler [9] for the case of FBM traffic. The goal of this work is to enlarge their results to general Gaussian inputs, in order to take into account heterogeneous traffic flows and different correlation structures.

The effective bandwidth of an arrival process is defined as [5]:

$$\alpha(\theta, t) = \frac{1}{\theta t} \log E \left[ e^{\theta A(t)} \right]$$

and for our Gaussian model (1) it is easy to obtain that

$$\alpha(\theta, t) = m + \frac{\theta}{2t} v(t).$$

Local (point-wise) effective envelopes  $E(t)$  are statistical upper bounds in an arbitrary but fixed interval of length  $t$  of arrival of the form

$$P(A(t) - E(t) > 0) \leq \varepsilon.$$

There is duality between effective envelopes and effective bandwidth:

$$E(t) = \inf_{\theta > 0} \left\{ t\alpha(\theta, t) - \frac{\log \varepsilon}{\theta} \right\}.$$

From the last equation we have

$$E(t) = mt + \sqrt{-2 \log \varepsilon \cdot v(t)}.$$

By definition, a global (sample path) envelope satisfies the following relationship:

$$P \left( \sup_{t \geq 0} (A(t) - E(t)) \geq 0 \right) \leq \varepsilon_s.$$

It then follows that

$$P \left( \sup_{t \geq 0} (A(t) - E(t)) \geq 0 \right) \leq \sum_{\tau=1}^{\infty} P(A(\tau) > E(\tau)).$$

Due to Markov's inequality we have for any  $\theta > 0$

$$P(A(\tau) > E(\tau)) \leq e^{-\theta E(\tau)} e^{\theta m \tau + \frac{\theta^2}{2} v(\tau)}.$$

Minimizing over  $\theta > 0$  yields  $\theta^* = \frac{E(\tau) - m\tau}{v(\tau)}$ . We will find envelope of the

following form:

$$E(t) = m\tau + \sqrt{-2 \log \eta \cdot f(\tau)v(\tau)},$$

where parameter  $\eta \in (0,1)$ . We should choose function  $f$  appropriately to fulfill the following condition

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{E(t)}{t} < C \quad (4)$$

for a constant service rate  $C$ . Finally we have following bound

$$P\left(\sup_{t \geq 0} (A(t) - E(t)) \geq 0\right) \leq \sum_{\tau=1}^{\infty} \eta^{f(\tau)} \leq \int_0^{\infty} \eta^{f(\tau)} d\tau.$$

For practical aims it is reasonable to require

$$\int_0^{\infty} \eta^{f(\tau)} d\tau < 1.$$

In case of regularly varying variance with index  $V \in (0,2)$  we can choose the function  $f(\tau) = \tau^\beta$ . Note that condition  $V \in (0,2)$  leads to (4). In this case

$$E(t) = m\tau + \sqrt{-2 \log \eta \cdot \tau^\beta v(\tau)}.$$

We consider a global envelope such that  $E(t) \leq b + Ct$  for all  $t \geq 0$ ; then, by definition of overflow probability, we have

$$\begin{aligned} P(Q > b) &\leq P\left(\sup_{t \geq 0} (A(t) - Ct - b) \geq 0\right) \leq \\ &\leq P\left(\sup_{t \geq 0} (A(t) - E(t)) \geq 0\right) \leq \sum_{\tau=1}^{\infty} \eta^{f(\tau)} \leq \int_0^{\infty} \eta^{\tau^\beta} d\tau. \end{aligned}$$

Given  $b$  and  $C$ , it is possible to find the largest envelope that satisfies the condition  $E(t) \leq b + Ct$  solving the following system of non-linear equations

$$\begin{cases} E'(t) = C, \\ E(t) = b + Ct. \end{cases} \quad (5)$$

This system can be solved by numerical methods and as a result the value of parameter  $\eta \in (0,1)$  can be found. Below two numerical results are presented to verify the accuracy of the upper bound for different values of the service rate  $C$  in comparison with simulation results. In more detail, Figure 1 refers to the sum of two independent FBMs (the following values of parameters were used:  $H_1 = 0,75$ ;  $H_2 = 0,6$ ;  $m = 1$ ;  $b = 0,3$ ), while IOU is considered in Figure 2 (here the value of buffer size was  $b = 10$ ).

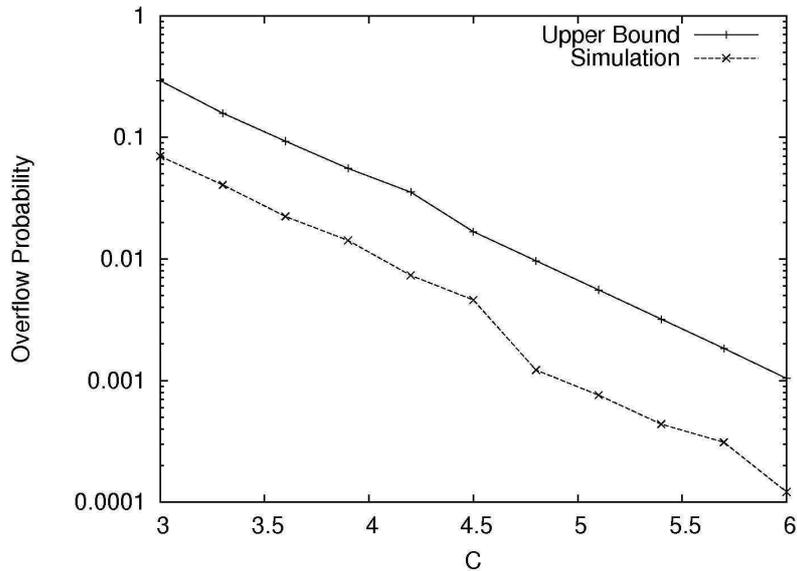


Fig. 1. Simulation vs. Upper bound: sum of FBMs

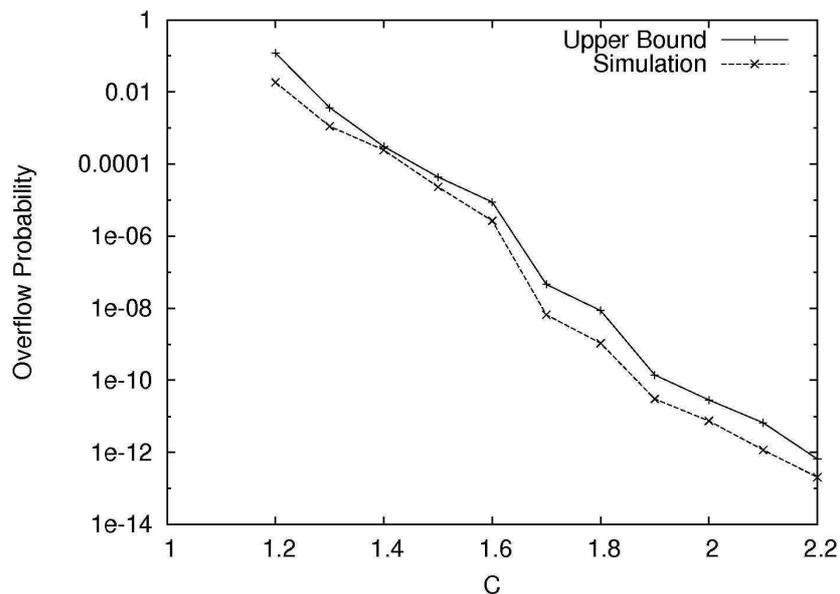


Fig. 2. Simulation vs. Upper bound: IOU

#### References

1. Addie R., Mannersalo P., Norros I. Most probable paths and performance formulae for buffers with Gaussian input traffic. *European Transactions in Telecommunications*, 2002. Vol. 13. P. 183–196.
2. Debicki K. A note on LDP for supremum of Gaussian processes over infinite horizon. *Stat. Probab. Lett.* 1999. Vol. 44. P. 211–220.
3. Duffield N., O’Connell N. Large deviations and overflow probabilities for the general single server queue, with applications. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1995. Vol. 118. P. 363–374.
4. Duffy K., Lewis J. T., Sullivan W. G. Logarithmic asymptotics for the supremum of a stochastic process. *Ann. Appl. Probab.* 2003. Vol. 13. No 2. P. 430–445.
5. Kelly F. *Notes on Effective Bandwidths*. 1996.
6. Kulkarni V., Rolski T. Fluid model driven by an Ornstein-Uhlenbeck process. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1994. Vol. 8. P. 403–417.

7. Leland W. E., Taqqu M. S., Willinger W., Wilson D. V. On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version). IEEE/ACM Transactions of Networking. 1994, 2(1). P. 1–15.
8. Li C., Burchard A., Liebeherr J. A network calculus with effective bandwidth. IEEE/ACM Trans. Netw. 2007. vol. 15, no. 6, P. 1442–1453.
9. Rizk A., Fidler M. Sample path bounds for long memory FBM traffic. INFOCOM'10 Proceedings of the 29th conference on Information communications. 2010. P. 61–65.
10. Taqqu M. S., Willinger W., Sherman R. Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling. Computer communication review. 1997. 27. P. 5–23.
11. Willinger W., Taqqu M. S., Leland W. E., Wilson D. Self-similarity in high-speed packet traffic: analysis and modeling of Ethernet traffic measurements. Statistical Sciences. 1995. 10. No 1. P. 67–85.

## **МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧНОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ УСТРОЙСТВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ РАДИОСВЯЗИ**

*С. В. Бартош, А. Т. Козут, А. А. Любченко*

*Омский государственный университет путей сообщения*

Работоспособное состояние устройств технологической радиосвязи (ТРС) обеспечивается системой технического обслуживания и ремонта (ТОР). Система ТОР представляет совокупность взаимосвязанных средств, документации, исполнителей и мероприятий, необходимых для поддержания и восстановления работоспособности оборудования, обеспечения его надежной и безопасной эксплуатации, снижения эксплуатационных затрат и повышения производительности.

Организация процесса эксплуатации устройств ТРС выполняется в соответствии с положениями регламента для рассматриваемой технической системы. Регламент представляет собой набор правил и рекомендаций по ТО, определяющий объем и периодичность профилактических мероприятий. Выбор и обоснование периодичности ТО как одного из регламентируемых параметров осуществляются на этапе выполнения конструкторских работ заводом-изготовителем, а также могут быть скорректированы в период нормальной эксплуатации изделий радиосвязи.

Одним из способов повышения надежности и безопасности функционирования изделий ТРС являются организационные мероприятия по проведению планового технического обслуживания (ТО).

Согласно регламенту [1] периодичность ТО устройств ТРС составляет 1 год. Если проводить ТО с меньшей периодичностью, то уменьшается количество отказов и, соответственно, уменьшаются затраты на ремонт устройств ТРС, но в тоже время возрастают расходы на проведение ТО. Если проводить ТО с большей периодичностью, то увеличивается количество отказов устройств ТРС и, соответственно, возрастают затраты на ремонт, но в тоже время уменьшаются расходы на проведение ТО. Результаты анализа, представленного в работе [2], доказывают необходимость со-

вершенствования используемых при организации ТО моделей, в частности, существенным остается влияние человеческого фактора на надежность функционирования радиоэлектронного оборудования. Следовательно, при оптимизации сроков ТО необходимо использовать несколько критериев.

В работе [3] представлена имитационная модель процесса эксплуатации и технического обслуживания устройств ТРС, позволяющая давать оценку рациональной периодичности ТО средств связи на основе надежных критериев, регламентируемых ГОСТ 27.003-90, а именно на основании коэффициента готовности  $K_G$  и коэффициента технического использования  $K_{ТИ}$ . Зависимости значений комплексных характеристик  $K_G$  и  $K_{ТИ}$  от периодичности обслуживания  $T_{об}$  представлены целевыми функциями коэффициента готовности  $K_G(T_{об})$  и технического использования  $K_{ТИ}(T_{об})$ , соответственно. Типовые графики функций  $K_G(T_{об})$  и  $K_{ТИ}(T_{об})$ , получаемые с помощью имитационной модели [3], представлены на рис. 1.

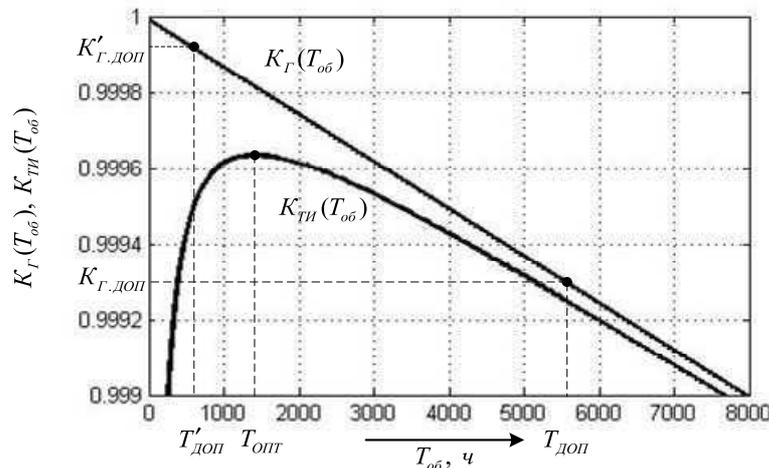


Рис. 1. Целевые функции коэффициента готовности и коэффициента технического использования

Значение рациональной периодичности ТО определялось как наименьшее время между допустимой и оптимальной периодичностью обслуживания устройств технологической радиосвязи. Значение допустимой периодичности ТО ( $T_{доп}$ ) определяется по формуле:

$$T_{доп} = K_G^{-1}(K_{Г.доп})T, \quad (1)$$

где  $K_G^{-1}$  — обратная функция коэффициента готовности  $K_G(T_{об})$ .

Оценка оптимальной периодичности ТО ( $T_{опт}$ ) осуществляется на основе выражения:

$$T_{опт} = \arg \max K_{ТИ}(T_{об}). \quad (2)$$

Использование данного подхода дает широкий диапазон значений, на котором можно провести дополнительную оптимизацию (рисунок 1). Для повышения точности оценки рациональной периодичности ТО необходимо введение еще одного критерия оптимизации. В соответствии с ре-

комендациями ГОСТ 27.003-90 в качестве дополнительного критерия оптимизации используется стоимость эксплуатации ТРС.

Процесс эксплуатации и ТО устройств ТРС представлен в виде случайной последовательности переходов  $\xi(t)$  из текущего фазового состояния  $S_i$  в последующее  $S_j$  [3]. Процессу  $\xi(t)$  соответствует граф состояний, приведенный на рисунке 2. Вершины графа соответствуют следующим возможным состояниям: S1 – работоспособное состояние, S2 – состояние разрегулировки системы, S3 – неработоспособное состояние (явный отказ), S4 – ТО работоспособной системы, S5 – ТО разрегулированной системы, S6 – состояние скрытого отказа, S7 – состояние ТО системы в скрытом отказе, S8 – состояние ложного отказа.

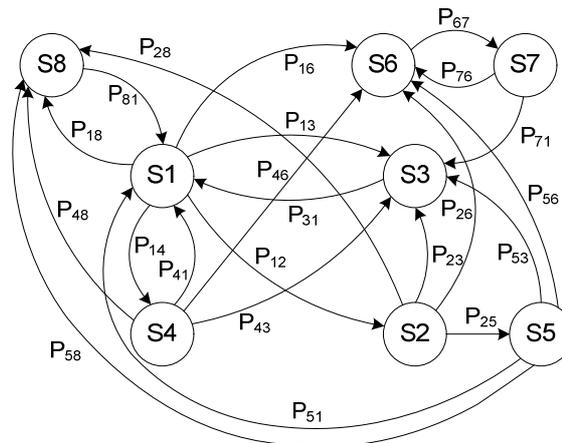


Рис. 2. Граф процесса эксплуатации и технического обслуживания восстанавливаемых устройств технологической радиосвязи

Для математического описания последовательности переходов используются модели теории марковских процессов, в соответствии с которой последовательность случайных переходов может быть представлена марковской цепью с непрерывным временем и дискретным пространством состояний.

Далее проводится моделирование процесса эксплуатации и ТО устройств ТРС в течение времени  $T_k$  для каждого значения периодичности ТО, изменяющегося с заданным шагом. При этом осуществляется сбор статистических данных: 1) количество переходов в каждое из состояний; 2) общее количество переходов; 3) время пребывания в каждом состоянии. На основании статистических данных вычисляются оценки одной реализации функций готовности  $K_r(T_{об})$  и технического использования  $K_{ТИ}(T_{об})$  [3].

Предложенные в [3, 4] имитационная модель и программное обеспечение были усовершенствованы путем введения стоимостного критерия с целью повышения точности оценки рациональной периодичности ТО. Для этого на основе получаемых статистических данных проводится расчет значений стоимостной функции при различных значениях периодичности ТО.

Следовательно, была составлена матрица  $C(T,U)$ , которая определяет затраты за единицу времени пребывания устройства ТРС в  $i$ -м состоянии и затраты на переход из  $i$ -го состояния в  $j$ -ое состояние. Тогда затраты на пребывание и выход устройства ТРС из  $i$ -го состояния будут:

$$C_i = C_{ii} \cdot T_i + C_{ij} \cdot N_{ij}, \quad (1)$$

где  $T_i$  – продолжительность пребывания устройства ТРС в соответствующих состояниях процесса ТО;  $N_{ij}$  – количество переходов из  $i$ -го состояния в  $j$ -ое.

Удельные прямые эксплуатационные расходы процесса ТО за единицу времени пребывания устройства ТРС имеют вид:

$$C_{ydi} = \frac{C_i}{T}, \quad (2)$$

где  $T$  – время моделирования.

Для расчетов значений стоимостных коэффициентов использовались данные функционального блока, входящего в состав возимой радиостанции РВ-1М, использовавшегося в исследовательской работе [5].

В результате проведения моделирования процесса эксплуатации и ТО получены оценки значений коэффициента технического использования, коэффициента готовности и стоимостной функции (рисунок 3). Как видно из приведенных графиков, стоимостная функция имеет экстремальный характер, что позволяет проводить оптимизационные процедуры с целью повышения точности оценки рациональной периодичности ТО.

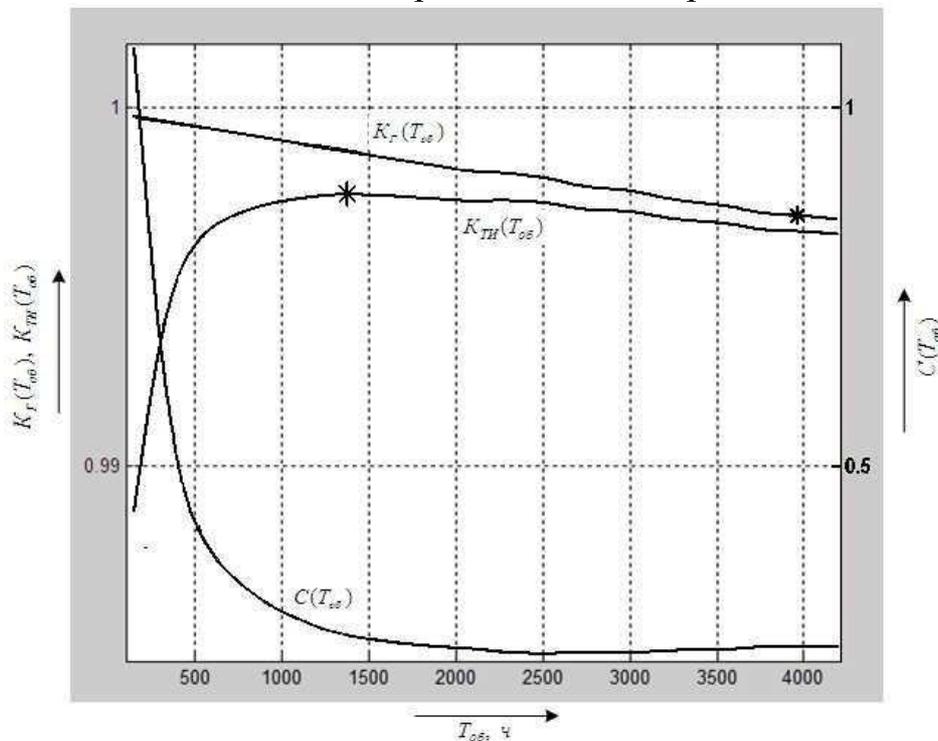


Рис. 3. Графики коэффициента технического использования, коэффициента готовности и стоимостной функции

Анализ графиков на рисунке 3 позволяет предположить, что введение стоимостного критерия позволяет добиться как минимум двукратного повышения точности в оценке рациональной периодичности ТО.

Таким образом, в работе рассмотрена многокритериальная оптимизация периодичности ТО устройств ТРС на основе коэффициентов готовности, технического использования и стоимостной функции. Проведено усовершенствование имитационной модели процесса эксплуатации и ТО устройств ТРС за счет введения стоимостного критерия. Использование стоимостной функции позволит проводить более точную оценку рациональной периодичности ТО устройств ТРС – диапазон значений оценки оптимального значения периодичности ТО сокращается в два раза.

#### Литература

1 Инструкция по техническому обслуживанию и ремонту радиостанции РВ-1М / ИЖ1.101.043 ИО.

2 Любченко А. А. Анализ отказов оборудования систем технологической радиосвязи / А. А. Любченко, С. Г. Разумный, И. А. Никитин // Известия Транссиба, № 2 (14) / Омск : Изд-во ОмГУПС, 2013. – С. 96-102.

3 Любченко А.А. Анализ процессов технического обслуживания элементов сложных технических систем / А. А. Любченко // Известия Транссиба, №1 (5) / Омск : Изд-во ОмГУПС, 2011. – С. 88-94.

4 Любченко А. А. Система автоматизации проектирования регламента профилактического обслуживания промышленных средств технологической радиосвязи / А. А. Любченко // Инженерный Вестник Дона. – 2012. – № 1. – Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/magazine/latest/n1y2012/657/>

5 Лутченко С. С. Оптимизация контроля и технического обслуживания изделий технологической радиосвязи / С. С. Лутченко / дис. ... канд. техн. наук: 05.11.13 Омск, 2000. – 134 с.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ММРР|M| $\infty$ С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

*Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов (Рис. 1), на вход которой поступает марковский модулированный поток (ММРР), управляемый цепью Маркова  $k(t)$ , заданной матрицей инфинитезимальных характеристик  $Q = \|q_{ij}\|$ .

Продолжительности обслуживания заявок имеют экспоненциальное распределение с параметром  $\mu$ . Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание, заявка с вероятностью  $1-r$  покидает систему и с вероятностью  $r$  возвращается в неё для повторного обслуживания.

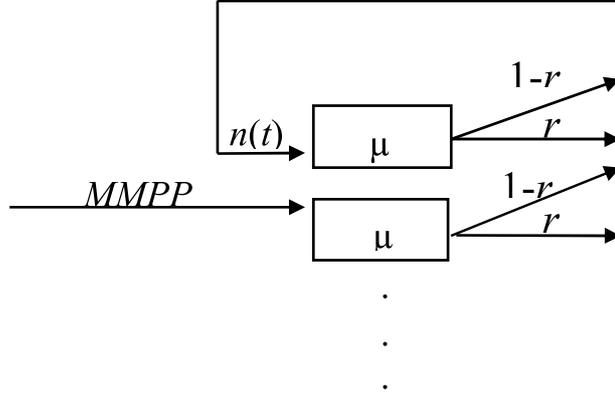


Рис. 1. Система массового обслуживания  $MMPP|M|\infty$  с повторным обращением к блоку

Обозначим  $i(t)$  – число занятых приборов в момент времени  $t$ ,  $n(t)$  – число повторных заявок, обратившихся за время  $t$  [1-3]. Полученный трехмерный случайный процесс  $\{k(t), i(t), n(t)\}$  является марковским [4]. Для его распределения вероятностей  $P(k, i, n, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, n(t) = n\}$  получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, i, n, t)}{\partial t} = & -\lambda_k P(k, i, n, t) - i\mu P(k, i, n, t) + \lambda_k P(k, i-1, n, t) + \\ & + \mu(1-r)(1+i)P(k, i+1, n, t) + \mu irP(k, i, n-1, t) + \sum P(v, i, n, t)q_{vk}. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции [6, 7]

$$H(k, u, w, t) = \sum_i \sum_n e^{ju_i} e^{jwn} P(k, i, n, t).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial u} &= j \sum_i \sum_n i e^{ju_i} e^{jwn} P(k, i, n, t), \\ \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial w} &= j \sum_i \sum_n n e^{ju_i} e^{jwn} P(k, i, n, t), \end{aligned}$$

тогда из (1) имеем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial t} + \mu j \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial u} (-1 + (1-r)e^{-ju} + re^{jw}) = & - \\ = H(k, u, w, t)[\lambda_k (e^{ju} - 1)] + \sum H(v, u, w, t)q_{vk}. \end{aligned}$$

Запишем данную систему в виде матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial t} + j\mu(-1 + (1-r)e^{-ju} + re^{jw}) \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u, w, t)[(e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}], \quad (2)$$

где

$$\mathbf{H}(u, w, t) = [H(1, u, w, t), H(2, u, w, t), \dots, H(K, u, w, t)],$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdot & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdot & q_{2K} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{K1} & q_{K2} & \cdot & q_{KK} \end{bmatrix}.$$

Используя уравнение (2) можно определить основные характеристики рассматриваемой системы, в частности – моменты любого порядка для числа занятых приборов и числа заявок, повторно обратившихся в систему для обслуживания.

*а) Момент первого порядка.*

Дифференцируя (2) по  $u$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial t \partial u} + j\mu(-1 + (1+r)e^{-ju} + re^{jw}) \frac{\partial^2 \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial u^2} + j\mu(-j(1-r)e^{-ju}) \frac{\partial \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial u} = \\ = \frac{\partial \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial u} [(e^{ju} - 1)\Lambda + \mathbf{Q}] + je^{ju} \mathbf{H}(k, u, w, t)\Lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначив

$$\left. \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ w=0}} = jms_1(k, t), \quad \left. \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial w} \right|_{\substack{u=0 \\ w=0}} = jmp_1(k, t),$$

и учитывая начальные условия  $\mathbf{H}(0) = \mathbf{R}$ , получаем систему дифференциальных уравнений для нахождения вектора начальных моментов первого порядка:

$$\frac{\partial \mathbf{ms}_1(t)}{\partial t} = [-\mu(1-r)\mathbf{I} + \mathbf{Q}]\mathbf{ms}_1(t) + \mathbf{R}\Lambda, \quad (4)$$

умножив обе части (3) на единичный вектор  $\mathbf{E}$  получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial ms_1(t)}{\partial t} = -\mu(1-r)ms_1(t) + \mathbf{R}\Lambda\mathbf{E}. \quad (5)$$

Введем следующее обозначение:

$$\lambda = \mathbf{R}\Lambda\mathbf{E}.$$

Решая уравнение (5) находим среднее число занятых приборов в системе в момент времени  $t$

$$ms_1(t) = \frac{\lambda}{\mu(1-r)}(1 - e^{-\mu(1-r)t}).$$

Аналогично находим функцию  $mp_1(t)$ , характеризующую среднее число повторных обращений в систему за время  $t$

$$mp_1(t) = \frac{\lambda r}{1-r}t + \frac{\lambda r}{\mu(1-r)^2}(e^{-\mu(1-r)t} - 1).$$

*б) Момент второго порядка.*

Для нахождения момента второго порядка числа занятых приборов, дифференцируем по  $u$  выражение (3)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial t \partial u^2} + j\mu(-1 + (1+r)e^{-ju} + re^{ju}) \frac{\partial^3 \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial u^3} + \\
& + 2j\mu(-j(1-r)e^{-ju}) \frac{\partial^2 \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial u^2} + j\mu(-1-r)e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial u} = \\
& = \frac{\partial^2 \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial u^2} [(e^{ju} - 1)\Lambda + \mathbf{Q}] + je^{ju} \frac{\partial \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial u} \Lambda + \\
& + je^{ju} \frac{\partial \mathbf{H}(k, u, w, t)}{\partial u} \Lambda - e^{ju} \mathbf{H}(k, u, w, t) \Lambda.
\end{aligned}$$

Введя следующее обозначение

$$\left. \frac{\partial^2 H(k, u, w)}{\partial u^2} \right|_{\substack{u=0 \\ w=0}} = j^2 ms_2(k, t), \quad \left. \frac{\partial^2 H(k, u, w)}{\partial w^2} \right|_{\substack{u=0 \\ w=0}} = j^2 mp_2(k, t),$$

получаем дифференциальное уравнение, позволяющее определить второй момент числа занятых приборов в системе

$$\frac{\partial ms_2(t)}{\partial t} = -2\mu(1-r)ms_2(t) + \overline{ms_1(t)}[2\Lambda + \mu(1-r)\mathbf{I}]\mathbf{E} + \mathbf{R}\mathbf{L}\mathbf{E}.$$

Аналогично получаем уравнение для нахождения второго момента числа заявок, повторно обратившихся в систему.

#### Литература

1. Жидкова Л. А., Моисеева С. П. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам. // Известия Томского политехнического университета. Том 322, № 6, 2013 – Томск: Изд-во ТПУ, 2013. – 5 с.
2. Моисеева С. П., Морозова А. С., Назаров А. А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – 173 с.
3. Моисеева С. П., Морозова А. С. Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета 2005 г. – № 287. – 46 с.
4. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории Марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
5. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.
6. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.
7. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.

# О ЦИКЛИЧЕСКОМ ОБСЛУЖИВАНИИ НЕОРДИНАРНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОТОКОВ

*А. В. Зорин*

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
– национальный исследовательский университет*

## 1. Введение

Многие реальные потоки требований обладают следующей особенностью: интервалы между поступлением требований оказываются зависимы и имеют различный закон распределения. Поэтому получить классическое математическое описание входного потока в виде совокупности конечномерных распределений интервалов между моментами поступления требований не удаётся. В связи с этим, в Нижегородском госуниверситете им. Н. И. Лобачевского развивается новый подход к построению математических моделей входных потоков, называемый *нелокальным* [1]. В рамках этого подхода входной поток требований описывается в виде точечного процесса  $\{(\tau_i, \eta_i); i = 1, 2, \dots\}$ , где  $\tau_0 = 0$  и  $\tau_i, i = 1, 2, \dots$  — выбираемые исследователем моменты наблюдения за потоком,  $\eta_i$  — число требований потока, поступивших за промежуток  $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ . В работах [2, 3] предлагаются некоторые механизмы возникновения реальных транспортных потоков. В транспортном потоке выделяют «медленные» и «быстрые» машины, причем «медленные» машины образуют рекуррентный, а «быстрые» машины маневрируют и совершают обгоны при наличии возможности. Догнав движущуюся группу с «медленной» машиной во главе, «быстрая» машина движется вместе с группой, дожидаясь случая для обгона. В настоящее время рядом авторов [4, 5] изучались системы управления конфликтными транспортными потоками в предположении, что нелокальное описание тождественно с неординарными потоками Пуассона. В настоящей работе рассматривается случай, когда нелокальное описание приводит к неординарным рекуррентным потокам.

## 2. Построение математической модели

Имеется  $m < \infty$  конфликтных входных потоков  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ . Обозначим  $\tau'_{j,n}, n = 1, 2, \dots$  моменты поступления «медленных» машин по потоку  $\Pi_j$  к стоп-линии перекрестка,  $j = 1, 2, \dots, 2m$ . Моменты поступления машин  $n$ -ой группы располагаются между моментами  $\tau'_{j,n}$  и  $\tau'_{j,n+1}$ . Будем считать, тем не менее, что все требования  $n$ -ой группы поступают одновременно в момент  $\tau'_{j,n}$ . Тогда нелокальное описание входного потока  $\Pi_j$  будет иметь вид  $\{(\tau'_{j,n}, \eta'_{j,n}); n = 0, 1, \dots\}$ , где  $\eta'_{j,n}$  — число машин в группе с  $n$ -ой «медленной» машиной. Интервалы  $\tau'_{j,n} - \tau'_{j,n-1}, n = 1, 2, \dots$  независимы и одинаково распределены с плотностью  $a_j(t)$ . Размеры групп  $\eta'_{j,n}, n = 1, 2, \dots$  независимы и одинаково распределены. Распределение

размера группы задано производящей функцией  $f_j(z) = \sum_{b=1}^{\infty} z^b \mathbf{P}\{\eta'_{j,n} = b\}$ . Таким образом, в качестве математической модели входного потока получаем неординарный рекуррентный поток. Требования потока  $\Pi_j$  помещаются в накопитель  $O_j$  неограниченного объёма. Обслуживание требований осуществляется единственным прибором с  $2m$  состояниями  $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}$ . В состоянии  $\Gamma^{(2j-1)}$  обслуживаются требования только из очереди  $O_j$ . В состоянии  $\Gamma^{(2j)}$  осуществляется акт переналадки с целью разрешения конфликтности. Длительность пребывания в состоянии  $\Gamma^{(r)}$  равна  $T_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, 2m$ . Обслуживание требований осуществляется в классе циклических алгоритмов, то есть смена состояний обслуживающего устройства происходит по схеме  $\dots \rightarrow \Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma^{(2m)} \rightarrow \Gamma^{(1)} \rightarrow \dots$ .

Длительности обслуживания требований могут быть зависимыми величинами с различными законами распределения. Поэтому для задания процесса обслуживания используем потоки насыщения  $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_m$ . При состоянии прибора  $\Gamma^{(2j-1)}$  поток насыщения  $\Pi'_j$  содержит  $\ell_j$  требований за время  $T_{2j-1}$ , а при прочих состояниях — 0 требований.

Все случайные величины предполагаются заданными на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ . Будем наблюдать за системой в моменты  $\tau_0 = 0, \tau_1, \dots$  смены состояний обслуживающего устройства. Пусть  $\Gamma_0$  — состояние обслуживающего прибора в момент 0. Обозначим  $\Gamma_n$  состояние обслуживающего устройства на промежутке  $(\tau_{n-1}, \tau_n]$ ,  $\kappa_{j,n}$  — число требований в очереди  $O_j$  в момент  $\tau_n$ ,  $\zeta_{j,n}$  — оставшееся время до поступления следующей после  $\tau_n$  группы требований потока  $\Pi_j$ ,  $\eta_{j,n}$  — число поступивших за промежуток  $(\tau_n, \tau_{n+1}]$  требований потока  $\Pi_j$ ,  $\xi_{j,n}$  — число требований потока насыщения  $\Pi'_j$  на промежутке  $(\tau_n, \tau_{n+1}]$ . Введём векторы  $\kappa_n = (\kappa_{1,n}, \kappa_{2,n}, \dots, \kappa_{m,n})$ ,  $\zeta_n = (\zeta_{1,n}, \zeta_{2,n}, \dots, \zeta_{m,n})$ ,  $\eta_n = (\eta_{1,n}, \eta_{2,n}, \dots, \eta_{m,n})$ .

Обозначим  $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}\}$  множество состояний обслуживающего устройства. Введем отображение  $u(\cdot): \Gamma \rightarrow \Gamma$  равенствами  $u(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(r+1)}$ ,  $1 \leq r < 2m$  и  $u(\Gamma^{(2m)}) = \Gamma^{(1)}$ . Тогда динамика обслуживающего устройства описывается рекуррентным по  $n = 0, 1, \dots$  соотношением

$$\Gamma_{n+1} = u(\Gamma_n). \quad (1)$$

Введем отображение  $v(\cdot): \Gamma \rightarrow \{T_1, T_2, \dots, T_{2m}\}$  равенством  $v(\Gamma^{(r)}) = T_r$ . Тогда последовательность моментов наблюдения порождается рекуррентным соотношением

$$\tau_{n+1} = \tau_n + v(\Gamma_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

При экстремальной стратегии обслуживания длина очереди изменяется по закону

$$\kappa_{j,n+1} = \max\{0, \kappa_{j,n} + \eta_{j,n} - \xi_{j,n}\}. \quad (3)$$

Обозначим условное распределение вектора  $(\eta_{j,n-1}, \zeta_{j,n})$  через

$$\nu_j(b, y; r, t) = \mathbf{P}(\{\eta_{j,n-1} = b, \zeta_{j,n} < y\} | \{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t\}).$$

Рассмотрим вспомогательные независимые и одинаково распределенные случайные величины  $e_1, e_2, \dots$  с плотностью распределения  $a_j(t)$ , положим  $S_0 = 0, S_b = S_{b-1} + e_b, b = 1, 2, \dots$ . Введем в рассмотрение функцию  $G_b(t, y) = \mathbf{P}\{S_b \leq t < S_{b+1} < t + y\}$ . Тогда совместные условные распределения пар  $(\eta_{j,n-1}, \zeta_{j,n})$  находятся из двойного преобразования Лапласа – Стилтеса

$$\sum_{b=0}^{\infty} \int_0^{\infty} z^b e^{-sy} d_y \nu_j(b, y; r, t),$$

имеющего выражение  $e^{-s(t-T_{r+1})}$  при  $r < 2m$  и  $t > T_{r+1}$ , а выражение

$$\int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_j(z))^{b+1} e^{-sy} d_y G_b(T_{r+1} - t, y)$$

при  $r < 2m$  и  $t \leq T_{r+1}$ . При  $r = 2m$  следует заменить  $r+1$  на 1. Пусть  $X = \{0, 1, \dots\}^m$  —  $m$ -мерная неотрицательная целочисленная решётка,  $R_+^m = \{(t_1, t_2, \dots, t_m) : t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \dots, t_m \geq 0\}$ ,  $x^{(0)} \in X, x^{(1)} \in X, \dots, x^{(n)} \in X$ ,  $t^{(0)} \in R_+^m, t^{(1)} \in R_+^m, \dots, t^{(n)} \in R_+^m$ ,  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$ ,  $t^{(i)} = (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots, t_m^{(i)})$ ,  $1 \leq r_i \leq 2m, 0 \leq i \leq n$ . В силу предположения о независимости входных потоков имеем:

$$\mathbf{P}\left(\{\eta_{n-1} = x^n, \zeta_n < t^n\} \mid \bigcap_{i=0}^{n-1} \{\Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x^i, \zeta_i = t^i\}\right) = \prod_{j=1}^m \nu_j(x_j^n, t_j^n; r_{n-1}, t_j^{n-1}).$$

Маркированный точечный процесс

$$\{(\tau_n, \Gamma_n, \kappa_{1,n}, \kappa_{2,n}, \dots, \kappa_{m,n}, \zeta_{1,n}, \zeta_{2,n}, \dots, \zeta_{m,n}); n = 0, 1, \dots\}$$

описывает изменение состояния обслуживающего устройства и длин очередей при обслуживании конфликтных потоков в классе циклических алгоритмов управления.

**Теорема 1.** *Последовательность*

$$\{(\Gamma_n, \kappa_{1,n}, \kappa_{2,n}, \dots, \kappa_{m,n}, \zeta_{1,n}, \zeta_{2,n}, \dots, \zeta_{m,n}); n = 0, 1, \dots\} \quad (4)$$

является однородной цепью Маркова.

Пусть  $E = \Gamma \times \{0, 1, \dots\}^m \times [0, \infty)^m$  и  $\mathbf{E}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая множества вида  $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : y < y^1\}$ ,  $r = 1, 2, \dots, 2m, x \in X, y^1 \in R^m$ . Тогда измеримое пространство  $(E, \mathbf{E})$  является пространством состояний цепи Маркова (4). В следующем разделе будет изучено предельное поведение цепи (4). Назовем множество  $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : y \in R_+^m\}$  для краткости и образности  $(\Gamma^{(r)}, x)$ -слоем.

### 3. Анализ предельных свойств длин очередей

Обозначим  $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$  нулевой вектор из  $X$ . Пусть  $r \oplus 1 = r + 1$  при  $r < 2m$  и  $2m \oplus 1 = 1$ . Из рекуррентных соотношений (1)–(3) находим, что стохастическое ядро, отвечающее переходной вероятности цепи Маркова (4), задается соотношениями

$$P((\Gamma^{(r)}, x, t); \{(\Gamma^{(s)}, w, y) : y < y^1\}) = \begin{cases} \sum_{b=0}^{\ell_j - x_j} v_j(b, y_j^1; r, t) \prod_{l \neq j} v_j(w_l - x_l, y_l^1; r, t), & r = 2j - 2, s = r \oplus 1, w = \bar{0}; \\ v_j(w_j + \ell_j - x_j, y_j^1; r, t) \prod_{l \neq j} v_j(w_l - x_l, y_l^1; r, t), & r = 2j - 2, s = r \oplus 1, w \neq \bar{0}; \\ \prod_{l=1}^m v_j(w_l - x_l, y_l^1; r, t), & r \neq 2j - 2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

**Теорема 2.** Пусть  $a_j(t) > 0$  для всех  $t > 0$ . Определим меру  $\varphi(\cdot)$  на  $(E, \mathcal{E})$  соотношением

$$\{(\Gamma^{(s)}, w, y) : y < y^1\} = \begin{cases} y_1^1 y_2^1 \times \dots \times y_m^1, & s = 1, w = \bar{0}, y^1 \in R_+^m; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда стохастическое ядро  $P(\cdot, \cdot)$   $\varphi$ -неприводимо. Каждое множество вида  $\{(\gamma, x, y) : y \in R_+^m\}$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $x \in X$  является  $\psi$ -положительным.

Из вида стохастического ядра  $P(\cdot, \cdot)$  следует, что в пространстве  $E$  состояний цепи Маркова (4) содержится  $2m$ -цикл  $E_0, E_1, \dots, E_{2m-1}$  с

$$E_r = \{(\Gamma^{(r+1)}, x, y) : x \in X, y \in R_+^m\}.$$

**Теорема 3.** Пусть функции  $a_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  непрерывны для всех  $t > 0$ . Тогда каждое множество вида  $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : 0 \leq y^1 \leq y < y^2\}$ ,  $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$ ,  $x \in X$  с достаточно малой величиной  $\max\{y_1^2 - y_1^1, y_2^2 - y_2^1, \dots, y_m^2 - y_m^1\}$  является минорантным.

Доказательство теорем 2, 3 заключается в проверке определения неприводимости цепи и определения минорантного множества [4, 5].

Следующая теорема содержит основной результат работы: условия на интенсивности входных потоков, потоков насыщения и длительности состояний приборов, при которых цепь Маркова (4) имеет единственное стационарное распределение вероятностей. Обозначим  $\lambda_j^{-1} = \int_0^\infty t a_j(t) dt$  среднее время между поступлениями групп требований потока  $\Pi_j$ ,  $\bar{\lambda}_j = \lambda_j f_j'(1)$  среднюю интенсивность неординарного рекуррентного потока  $\Pi_j$ ,  $T_0 = T_1 + T_2 + \dots + T_m$  длительность одного цикла работы прибора.

**Теорема 4.** Для существования единственного стационарного распределения цепи Маркова (4) достаточно выполнения неравенств  $\bar{\lambda}_j T_0 - \ell_j < 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Доказательство теоремы 4 состоит из нескольких лемм.

**Лемма 1.** Пусть для всех  $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$ ,  $x \in X$  и независимо от начального распределения цепи (4) имеет место равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_n = x\} = 0$ . Тогда среднее число требований в системе  $\mathbf{M}(\kappa_{1,n} + \kappa_{2,n} + \dots + \kappa_{m,n})$  неограниченно возрастает при  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 2.** Пусть плотности  $a_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  положительны и непрерывны для всех  $t > 0$ . Если не существует стационарного распределения цепи Маркова (4), то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_n = x\} = 0$  независимо от распределения случайного элемента  $(\Gamma_0, \kappa_0, \zeta_0)$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\bar{\lambda}_j T_0 - \ell_j < 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Тогда средние длины очередей  $\mathbf{M}\kappa_{j,n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  ограничены по  $n$ .

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-1-90409.*

#### Литература

1. Анисимова Л. Н., Федоткин М. А. Надежность управляющей системы и статистический анализ сбоев ее элементов // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского «Математическое моделирование и оптимальное управление», вып. 1(22), Нижний Новгород. – 2000. – С. 14-22.
2. Кудрявцев Е. В., Федоткин М. А. Построение и исследование математической модели неоднородного дорожного трафика // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети : материалы междунар. науч. конф. «Современные вероятностные методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 2011. – Вып. 21 / редкол. : А. Н. Дудин (отв. ред.) [и др.]. – Минск : Изд. центр БГУ, 2011. – С. 76-81.
3. Рачинская М. А., Федоткин М. А. Investigation of Traffic Flows Characteristics in Case of the Small Density // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети : материалы междунар. науч. конф. «Современные вероятностные методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 2011. – Вып. 21 / редкол. : А. Н. Дудин (отв. ред.) [и др.]. – Минск : Изд. центр БГУ, 2011. – С. 82-87.
4. Федоткин М. А., Федоткин А. М. Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко – Коваленко // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 12. – С. 92-108.
5. Пройдакова Е. В., Федоткин М. А. Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 6. – С. 96-106.
6. Meyn S. P., Tweedie R. L. Markov chains and stochastic stability. – 2<sup>nd</sup> ed. – London: Springer-Verlag, 1993. – 566 p.
7. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. – М.: Мир, 1989. – 207 с.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЛУБИНЫ НЕБЛОКИРУЕМОСТИ КЭША ДЛЯ ТРЁХУРОВНЕВОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ПАМЯТИ

*Н. А. Иванов, С. П. Сущенко*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Эффективность доступа к иерархической памяти может характеризоваться не только базовыми показателями, такими как быстродействие и ёмкость отдельных уровней подсистемы памяти, но и определенным набором архитектурных параметров. Среди прочих особый интерес представляет параметр *глубины неблокируемости кэш-памяти*.

Для оценки влияния глубины неблокируемости кэш-памяти на операционные характеристики многоуровневой подсистемы памяти необходимо рассмотреть соответствующую по ключевым аспектам математическую модель. В [1] рассмотрена двухуровневая подсистема памяти, описана модель на основе марковской цепи системы массового обслуживания (СМО) и даны выводы основных вероятностно-временных характеристик.

На сегодняшний день распространение процессоров различных производителей с несколькими уровнями кэша, как минимум L1-кэш и L2-кэш, стало давно обыденностью и плотно вошло в эксплуатацию в промышленных масштабах. Отсутствие каких-либо исследований, аналогичных [1] (для глубины неблокируемости), но только в рамках трёх и более уровней подсистемы памяти приводит к необходимости исследования такого рода подсистем.

Рассмотрим трёхуровневую память, имеющую кэш неблокирующего типа. Будем полагать, что процессором порождается неограниченный поток обращений к подсистеме памяти и вероятности промаха для кэша первого и второго уровней составляют  $R_1$  и  $R_2$  соответственно. Работа подобного рода памяти может быть описана с помощью трёхстадийного конвейера. Первая стадия моделирует тракт «процессор-КЭШ1». На данном участке происходит обращение к кэш-памяти первого уровня. Полагаем, что обращения происходят к различным блокам кэш-памяти. Длительность данной стадии равна времени доступа к кэшу  $t$ . В случае попадания адресуемого объекта в кэш первого уровня выполняется следующий запрос к памяти. В случае промаха одновременно происходит обработка текущего запроса на второй стадии (тракт «КЭШ1-КЭШ2») и следующего – на первой. Далее, после обработки очередного запроса на второй стадии, если адресуемый объект обнаруживается в кэше второго уровня, происходит дальнейшая обработка оставшихся запросов на данной стадии. В случае промаха, аналогично предыдущей стадии – одновременная обработка текущего запроса на третьей стадии (тракт «КЭШ2-ОЗУ») и следующего на второй (если таковой имеется).

Таким образом, факт обработки транзакции доступа к иерархической памяти на второй и третьей стадиях является случайным событием. Время обработки транзакции на второй и третьей стадиях в  $K_1$  и  $K_2$  раз

превышает время обработки транзакции на первой стадии соответственно таким образом, что  $1 < K_1 < K_2$ .

При глубине неблокируемости  $N \geq 1$  многоуровневая иерархическая память имеет буфер ёмкости  $N$  для хранения запросов к памяти, которые последовательно обрабатываются на второй и третьей стадиях конвейера. Если общее количество запросов, обрабатываемых на второй и третьей стадиях, совпадает с  $N$ , то кэш-память блокируется на первой стадии конвейера. Таким образом, к подсистеме памяти перестают поступать новые транзакции от процессора. Разблокирование первой стадии происходит при успешной обработке запроса на второй стадии и/или обработке запросе на третьей стадии.

Для описания процесса обработки запросов к подсистеме памяти будем моделировать стадии доступа к кэшу второго уровня и ОЗУ марковской СМО с дискретным временем, конечным накопителем, двумя многоэтапными обслуживающими приборами [2] и детерминированным временем обслуживания. Первый обслуживающий  $K_1$ -этапный прибор работает на второй стадии конвейера, а второй  $K_2$ -этапный – на третьей стадии. Длительность цикла дискретной СМО составляет время  $t$ .

Таким образом, интенсивности входного потока для каждой стадии конвейера составят:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{t}, \quad \Lambda_2 = K_1 R_1 \Lambda_0, \quad \Lambda_3 = \frac{K_2 R_2}{K_1^2} \Lambda_2.$$

Выходной поток предыдущей стадии становится входным потоком для следующей стадии и является отфильтрованным (на следующую стадию заявка не поступает, если была успешно обработана на предыдущей стадии). Наконец интенсивность обслуживания на всех стадиях является величина  $\mu = 1/t$ .

Считаем, что доступ к многоуровневой памяти выполняется только на чтение (для кэша со сквозной или обратной записью) или только на запись (для кэша с обратной записью). На каждом цикле выполняется запрос к кэшу первого уровня (при рабочей первой стадии конвейера). С вероятностью  $R_1$  в СМО поступает заявка на вторую стадию со временем обработки  $K_1 t$ . Аналогично, с вероятностью  $R_2$  (после очередной обработки запроса на второй стадии) в СМО поступает заявка на третью стадию со временем обработки  $K_2 t$ .

Так как обработка различных запросов к подсистеме памяти выполняется параллельно на различных уровнях, цепь Маркова будет описывать динамику количества этапов обработки на второй и третьей стадиях конвейера. Таким образом, имеем двумерную марковскую цепь, где состояние с индексами  $(i, j)$  соответствует количеству этапов обслуживания в кэше второго уровня и ОЗУ соответственно. Вероятность того, что в стационарном режиме система находится в состоянии  $(i, j)$  обозначим через  $P_{ij}$ . В связи с тем, что одновременно количество транзакций обрабатываемых на

различных уровнях памяти не должно превышать  $N$ , максимальное количество этапов обработки не будут превышать:

$$i_{\max} = \begin{cases} K_1, & N = 1, \\ NK_1 - 1, & N > 1, \end{cases} \quad j_{\max} = \begin{cases} K_2, & N = 1, \\ NK_2 - K_1, & N = 2, \\ NK_2 - K_1 - 1, & N > 2. \end{cases}$$

Множество индексов возможных состояний, в которых может находиться система может быть грубо оценено следующим образом:

$$S = \left\{ (i, j) \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \left[ \frac{i}{K_1} \right] + \left[ \frac{i}{K_2} \right] \leq N \right\}.$$

С другой стороны, если разместить все возможные состояния системы в виде двумерной регулярной решетки (где пара индексов состояния выступает в качестве координаты в рамках решетки). Тогда следующие множество индексов (для  $N > 2$ )  $V = \{(0, 0), (NK_1 - 1, 0), ((N - 1)K_1 - 1, K_2), \dots, (0, NK_2 - K_1 - 1)\}$  образует выпуклую оболочку над множеством индексов всех возможных состояний системы.

Рассмотрим переходные вероятности цепи Маркова для частного случая кэша блокирующего типа ( $N = 1$ ):

$$\pi_{lk} = \begin{cases} R_1, & l = (0, 0), \quad k = (K_1, 0), \\ R_2, & l = (1, 0), \quad k = (0, K_2), \\ 1 - R_1, & l = k = (0, 0), \\ 1 - R_2, & l = (1, 0), \quad k = (0, 0). \end{cases}$$

Тогда система уравнений равновесия для вероятностей  $P_{ij}$  стационарного режима функционирования выражается следующим образом:

$$\pi_{lk} = \begin{cases} P_{00}R = (1 - R_2)P_{10} + P_{01}, \\ P_{l0} = P_{l+1,0}, \quad l = \overline{1, K_1 - 1}, \\ P_{K_1,0} = R_1P_{00}, \\ P_{0k} = P_{0,k+1}, \quad k = \overline{1, K_2 - 1}, \\ P_{0K_2} = R_2P_{10}. \end{cases}$$

Решение данной системы будет выглядеть следующим образом:

$$\pi_{lk} = \begin{cases} P_{00} = \frac{1}{1 + R_1(K_1 + K_2R_2)}, \\ P_{l0} = \frac{R_1}{1 + R_1(K_1 + K_2R_2)}, \quad l = \overline{1, K_1}, \\ P_{0k} = \frac{R_1R_2}{1 + R_1(K_1 + K_2R_2)}, \quad k = \overline{1, K_2}. \end{cases}$$

Определим две из множества важнейших характеристик для трёх-уровневой подсистемы памяти. Первая из них *вероятность блокировки*,

определяющая долю времени, в течение которого не доступен межуровневый интерфейс:

$$Q(N, K_1, K_2) = \sum_{(i,j) \in S'} P_{ij},$$

$$S' = \left\{ (i, j) \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \left\lfloor \frac{i}{K_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{K_2} \right\rfloor = N \right\}.$$

Вторая характеристика описывает *пропускную способность* и определяется следующей зависимостью:

$$C(N, K_1, K_2) = \frac{1 - Q(N, K_1, K_2)}{t}.$$

Тогда, для кэша блокирующего типа данные характеристики примут следующий вид:

$$Q(1, K_1, K_2) = \frac{R_1(K_1 + K_2 R_2)}{1 + R_1(K_1 + K_2 R_2)},$$

$$C(1, K_1, K_2) = \frac{1}{t(1 + R_1(K_1 + K_2 R_2))}.$$

На основе полученных результатов становится возможным оценить оптимальное значение параметра глубины неблокируемости в зависимости от временных характеристик обработки транзакции на различных уровнях подсистемы памяти. Также, результаты дают оценку вероятности блокирования памяти и ее пропускной способности в зависимости от базовых параметров кэш-памяти, что позволяет выявить оптимальные соотношения параметров для достижения максимальной эффективности кэш-памяти.

#### Литература

1. Сущенко М. С., Сущенко С. П. Математические модели иерархической памяти вычислительных систем. – Томск: Изд-во НТЛ, 2012. –148 с.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛУМАРКОВСКИМ ПОТОКОМ

*В. А. Ивницкий*

*Московский государственный университет путей сообщения*

### 1. Неоднородный полумарковский поток

Для определения неоднородного полумарковского потока рассмотрим двумерный Марковский случайный процесс  $\{k(d), \xi(d)\}$  с дискретным временем (шагом)  $1, 2, \dots$ . Его первая компонента  $k(d)$  принимает значения из дискретного множества  $(0, 1, 2, \dots)$  и является цепью Маркова с матрицей  $P = ((p_{k_1, k_2}^{(d)}))$  переходных вероятностей на  $d$ -ом шаге,  $d = 1, 2, \dots$

Его вторая компонента  $\xi(d)$  непрерывна и принимает неотрицательные значения.

Марковской переходной функцией  $F(k_2, x; k_1, y, d)$  двумерного Марковского процесса  $\{k(d), \xi(d)\}$  является функция

$$F(k_2, x; k_1, y, d+1) = P\{k(d+1) = k_2, \xi(d+1) < x \mid k(d) = k_1, \xi(d) = y\}.$$

Далее рассматриваются двумерные случайные процессы  $\{k(d), \xi(d)\}$ , для Марковских переходных функций которых выполняются равенства

$$F(k_2, x; k_1, y, d) = F(k_2, x; k_1, d) = A_{k_1, k_2}^{(d)}(x).$$

Обозначим через  $z_{k_{d-1}, k_d}^{(d)}$  случайную величину - длину интервала между последовательными моментами поступления требований потока на шаге с номером  $d$  цепи Маркова при условии, что в начале этого интервала вложенная цепь Маркова приняла значение  $k_{d-1}$ , а в конце его примет значение  $k_d$ . Пусть  $A_{k_1, k_2}^{(d)}(x)$  представляется в виде  $A_{k_{d-1}, k_d}^{(d)}(x) = F_{k_{d-1}, k_d}^{(d)}(x) p_{k_{d-1}, k_d}^{(d)}$ ,  $A_{k_{d-1}, k_d}^{(d)}(\infty) = p_{k_{d-1}, k_d}^{(d)}$ , где  $F_{k_{d-1}, k_d}^{(d)}(x)$  - условная функция распределения случайной величины  $z_{k_{d-1}, k_d}^{(d)} > 0$ .

С помощью ранее введенных совокупностей характеристик  $F_{k_{d-1}, k_d}^{(d)}(x)$  и  $p_{k_{d-1}, k_d}^{(d)}$  случайный поток событий образуется следующим образом. В момент  $t_0 = 0$  задается начальное состояние цепи Маркова  $k_0$ , с вероятностями  $p_{k_0, k}^{(1)}$ ,  $k \in (0, 1, 2, \dots)$  разыгрывается следующее состояние цепи Маркова  $k_1$ , определяется случайная величина  $z_{k_0, k_1}^{(1)}$  с функцией распределения  $F_{k_0, k_1}^{(1)}(x)$ , момент  $t_1$  определяется, как  $t_1 = t_0 + z_{k_0, k_1}^{(1)}$ , на этом первый шаг заканчивается. Далее с вероятностями  $p_{k_1, k}^{(2)}$ ,  $k \in (0, 1, 2, \dots)$  разыгрывается следующее состояние цепи Маркова  $k_2$ , определяется случайная величина  $z_{k_1, k_2}^{(2)}$  с функцией распределения  $F_{k_1, k_2}^{(2)}(x)$ , момент  $t_2$  определяется как  $t_2 = t_1 + z_{k_1, k_2}^{(2)}$ , и т.д. Итак, получается последовательность точек на временной оси  $t_0, t_1, t_2, \dots$

**Определение.** Случайный поток событий с моментами поступления требований  $t_1 < t_2 < \dots < t_d < t_{d+1} < \dots$  называется *неоднородным полумарковским* потоком или *неоднородным SM-потоком*.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим процедуру моделирования однолинейной системы массового обслуживания (СМО) с ожиданием для нахождения распределения числа требований в этой системе. Обозначим через  $\nu(t)$  число требований в системе в момент  $t - 0$ ,  $\nu(0) = a_0$ ,  $\nu_1(t)$  - число поступивших требований в систему до момента  $t$  вместе с  $k_0$  требованиями и  $\nu_2(t)$  - число обслужившихся требований системой до момента  $t$ . Имеем  $\nu(t) = \nu_1(t) + a_0 - \nu_2(t)$ .

Для обслуживания  $n$ -го требования,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , поступающего потока с учетом  $a_0$  требований, находящихся в СМО в начальный момент  $t = 0$ , необходимо выполнить работу, величина которой  $\xi_{n+a_0+1}$  является случайной с распределением  $B(x) = P(\xi_{n+a_0+1} < x)$ ,  $B(0) = 0$ , и величины работ  $\xi_1, \dots, \xi_{n+a_0+1}, \dots$  есть независимые в совокупности случайные величины. Требования, находящиеся в СМО в начальный момент  $t = 0$ , становятся в очередь на обслуживание и для  $i$ -ого из них необходимо выполнить работу, величина которой  $\xi_i$  является случайной с распределением  $B(x) = P(\xi_i < x)$ ,  $B(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, a_0$ . Предполагаем, что последовательности  $(z_{k-1, k}^{(n)})$  и  $(\xi_n)$  взаимно независимы.

Если в момент  $t$  в СМО находится  $k$  требований и  $\xi_{k,n}(t)$  – количество работы, которое осталось выполнить с момента  $t$  для завершения обслуживания  $n$ -го требования, которое в этот момент обслуживается, то скорость его обслуживания равна  $\alpha_{k,n} \beta_{k,n}(\xi_{k,n}(t))$ ,  $\alpha_{k,n} > 0$ ,  $\beta_{k,n}(x) > 0, x > 0$ , т.е.  $\frac{d\xi_{k,n}(t)}{dt} = -\alpha_{k,n} \beta_{k,n}(\xi_{k,n}(t))$ . Необходимо найти методом моделирования распределение числа требований в системе.

### 3. Нахождение методом моделирования распределения числа требований в системе

Перейдем к построению моделирующего алгоритма для нахождения методом моделирования распределения числа требований в системе. Обозначим через  $t'_1 < t'_2 < \dots < t'_n < \dots$  моменты времени, в которые процесс  $\nu(t)$  претерпевает скачки, т.е. когда поступает новое требование или уходит из системы обслужившееся требование. У всякой модели есть свое модельное время, т.е. время моделирования, в котором происходят изменения состояний моделируемого процесса. В рассматриваемом случае модельное время изменяется скачками в моменты времени  $t'_1 < t'_2 < \dots < t'_n < \dots$  и принимает эти значения  $t'_1 < t'_2 < \dots < t'_n < \dots$ .

Введем 5 счетчиков: 1) счетчик числа требований в СМО в текущий момент времени и длительностей интервалов пребывания СМО при этом числе требований, 2) счетчик числа моментов и самих моментов поступления требований потока на оси времени  $t$ , 3) счетчик числа моментов и самих моментов ухода из СМО обслуженных требований на оси времени  $t$ , 4) счетчик числа скачков процесса  $\nu(t)$ , 5) счетчик, фиксирующий состояние Марковской цепи в момент поступления последнего требования перед текущим моментом модельного времени. В первом счетчике определяется  $\nu(t)$  и соответствующие интервалы, во втором счетчике определяется  $\nu_1(t)$  и соответствующие интервалы, в третьем счетчике –  $\nu_2(t)$  и соответствующие интервалы (конечно,  $\nu_2(t)$  можно определить и по формуле  $\nu_2(t) = \nu_1(t) - \nu(t) + a_0$ , но по данным этого счетчика можно исследовать выходящий поток требований, поэтому его целесообразно оставить).

Рассмотрим алгоритм перехода процесса  $\nu(t)$  из состояния  $\nu(t'_i)$  в момент времени  $t'_i$  в состояние  $\nu(t'_{i+1})$  в момент времени  $t'_{i+1}$ . Для того чтобы описать вышеуказанный алгоритм перехода процесса  $\nu(t)$  из состояния в момент времени  $t'_i$  в состояние в момент времени  $t'_{i+1}$ , введем векторный Марковский процесс  $\zeta(t) = (\nu(t), \nu_1(t), k(t), \gamma(t), \xi_{\nu(t), \nu_2(t)+1}(t))$ , где  $\nu(t)$  – число требований в СМО в момент  $t$ ,  $\nu_1(t)$  – число поступивших требований в СМО до момента  $t$ ,  $k(t)$  – состояние цепи Маркова в момент  $t$ ,  $\gamma(t)$  – длительность интервала времени с момента  $t$  до момента поступления следующего требования входящего потока,  $\xi_{\nu(t), \nu_2(t)+1}(t)$  – количество оставшейся работы, которую ещё нужно выполнить с момента  $t$  для окончания обслуживания требования, которое обслуживалось в момент времени  $t$  и имело номер  $\nu_2(t)+1$  при состоянии системы  $\nu(t)$ . В момент времени  $t$  состояние цепи Маркова  $k(t)$  будет то же самое, что и в последний момент изменения ее состояния перед  $t$ . Величина  $\xi_{\nu(t), \nu_2(t)+1}(t)$  равна 0, если канал обслуживания в момент времени  $t$  был свободен. Если в этот момент времени он был занят, то  $\xi_{\nu(t), \nu_2(t)+1}(t) > 0$ . Величина  $\nu_2(t)$  – число обслуженных СМО требований до момента  $t$ , определяется по формуле

$$\nu_2(t) = \nu_1(t) + a_0 - \nu(t).$$

Будем рассматривать значения процесса  $\zeta(t)$  в моменты времени  $t'_1 < t'_2 < \dots < t'_n < \dots$ , т. е. имеем дело со значениями процесса  $\zeta(t'_1), \dots, \zeta(t'_n), \dots$ . Найдем условное время с момента  $t'_i$  до момента окончания обслуживания требования, которое имело номер  $n$  и в момент  $t'_i$  обслуживалось на канале обслуживания при состоянии системы  $\nu(t'_i)$ ,  $\eta_{\nu(t'_i), n}(t'_i)$  при условии, что до окончания его обслуживания не было смены состояния процесса  $\nu(t'_i)$ .

Длительность интервала остаточного времени обслуживания  $\eta_{\nu(t'_i), n}(t'_i)$  определяется следующим алгоритмом по соответствующему дифференциальному уравнению  $\frac{d}{dt} \xi_{\nu(t'_i), n}(t) = -\alpha_{\nu(t'_i), n} \beta_{\nu(t'_i), n}(\xi_{\nu(t'_i), n}(t))$ . Число  $\xi_{\nu(t'_i), n}(t'_i)$  задано.

1. Решаем дифференциальное уравнение  $\frac{d}{dt} \xi_{\nu(t'_i), n}(t) = -\beta_{\nu(t'_i), n}(\xi_{\nu(t'_i), n}(t))$  с начальным условием  $\xi_{\nu(t'_i), n}(t'_i)$ . Решение можно получить либо точное в аналитическом виде, либо приближенное с помощью известных приближенных методов вычислений. В итоге получаем решение  $\xi_{\nu(t'_i), n}(t)$ .

2. Величина  $\eta_{\nu(t'_i), n}(t'_i)$  определяется из уравнения  $\xi_{\nu(t'_i), n}(\eta_{\nu(t'_i), n}(t'_i)) = 0$ . Нахождение величины  $\eta_{\nu(t'_i), n}(t'_i)$  из этого уравнения упрощается тем обстоятельством, что функция  $\xi_{\nu(t'_i), n}(t)$  является монотонно уменьшающейся функцией, т.е. корень будет один и его можно найти одним из приближенных методов нахождения корней такого типа уравнений.

За интервал времени  $(t_1, t_2)$ , если обслуживание требования на  $l$ -ом канале не закончилось в этом интервале и не изменилось  $\nu(t)$ , уменьшение количества оставшейся работы по его обслуживанию  $\Delta(t_1, t_2)$  составит величину  $\xi_{\nu(t_1), n}(t_1) - \xi_{\nu(t_2), n}(t_2)$ .

Из начального количества работы вычитаются все последовательные уменьшения количества работы, определяемые вышеуказанной формулой, на интервалах смены состояния процесса  $\nu(t)$  вплоть до момента, когда  $\xi_{\nu(t_1), n}(t)$  станет равным 0.

Пусть в момент времени  $t'_l$  имеем состояние процесса  $\zeta(t'_l)$ , равное  $(\nu(t'_l), \nu_1(t'_l), k(t'_l), \gamma(t), \xi_{\nu(t), \nu_2(t)+1}(t))$ . Опишем алгоритм перехода  $\zeta(t'_l)$  к состоянию процесса  $\zeta(t)$  в момент времени  $t'_{l+1}$ , т.е. алгоритм нахождения значений всех компонент процесса  $\zeta(t)$  в момент времени  $t'_{l+1}$ , а именно,  $\zeta(t'_{l+1}) = (\nu(t'_{l+1}), \nu_1(t'_{l+1}), k(t'_{l+1}), \gamma(t), \xi_{\nu(t), \nu_2(t)+1}(t))$ .

Алгоритм имеет следующий вид.

1. Пусть  $\nu(t'_l) \geq 1$ ,  $\xi_{\nu(t'_l), \nu_2(t'_l)+1}(t'_l) > 0$ . По  $\xi_{\nu(t'_l), \nu_2(t'_l)+1}(t'_l)$  определяем  $\eta_{\nu(t'_l), \nu_2(t'_l)+1}(t'_l)$  в соответствии с вышеприведенным алгоритмом, в котором определяется функция  $\xi_{\nu(t'_l), \nu_2(t'_l)+1}(t)$  на интервале  $(t'_l, t'_{l+1})$ , исходя из соответствующего дифференциального уравнения.

2. Находим  $\min(\gamma(t'_l), \eta_{\nu(t'_l), \nu_2(t'_l)+1}(t'_l))$ . Если  $\min(\gamma(t'_l), \eta_{\nu(t'_l), \nu_2(t'_l)+1}(t'_l)) = \gamma(t'_l)$ , то поступает новое требование; в счетчик числа скачков процесса  $\nu(t)$  добавляется 1; в счетчик числа моментов и самих моментов поступления требований на оси времени  $t$ , где хранится  $\nu_1(t)$ , добавляется 1 и момент поступления требования  $t'_{l+1}$ ; модельное время увеличивается на величину  $\gamma(t'_l)$ , т.е.  $t'_{l+1} = t'_l + \gamma(t'_l)$ ; в момент  $t'_l$  состояние цепи Маркова равно  $k(t'_l)$ , далее с вероятностями  $p_{k(t'_l), k}^{(\nu_1(t'_l))}$  разыгрывается следующее состояние цепи Маркова  $k(t'_{l+1})$ ; в ячейку для  $\gamma(t'_l)$  заносится величина интервала до момента поступления следующего требования  $z_{k(t'_l), k(t'_{l+1})}^{(\nu_1(t'_{l+1}))}$ , имеющая функцию распределения  $F_{k(t'_l), k(t'_{l+1})}^{(\nu_1(t'_{l+1}))}(x)$ ; в ячейку для  $\nu(t'_l)$  заносится величина  $\nu(t'_l) + 1$ . Величина  $\eta_{\nu(t'_l), \nu_2(t'_l)+1}(t'_l)$  в этом случае больше 0, поэтому она уменьшается на величину  $\gamma(t'_l)$ ; в ячейку для  $\nu(t'_l)$  заносится величина  $\nu(t'_l) + 1$ .

Рассчитывается новое значение оставшейся величины работы на канале обслуживания  $\xi_{\nu(t'_{l+1}), \nu_2(t'_{l+1})+1}(t'_{l+1})$  по формуле  $\xi_{\nu(t'_{l+1}), \nu_2(t'_{l+1})+1}(t'_{l+1}) = \xi_{\nu(t'_{l+1}), \nu_2(t'_{l+1})+1}(t'_l + \gamma(t'_l))$ . Итак, у значения векторного процесса  $\zeta(t'_{l+1}) = (\nu(t'_{l+1}), \nu_1(t'_{l+1}), k(t'_{l+1}), \gamma(t'_{l+1}), \xi_{\nu(t'_{l+1}), \nu_2(t'_{l+1})+1}(t'_{l+1}))$  будут следующие компоненты

$$(\nu(t'_{l+1}) = \nu(t'_l) + 1, \nu_1(t'_{l+1}) = \nu_1(t'_l) + 1, k(t'_{l+1}), z_{k(t'_l), k(t'_{l+1})}^{(\nu_1(t'_{l+1}))}, \xi_{\nu(t'_{l+1}), \nu_2(t'_{l+1})+1}(t'_{l+1})).$$

В счетчик числа требований в СМО и длительностей интервалов заносится пара  $(\nu(t'_l), \gamma(t'_l))$ .

3. Если  $\nu(t'_i) > 1$  и  $\min(\gamma(t'_i), \eta_{\nu(t'_i)\nu_2(t'_i)+1}(t'_i)) = \eta_{\nu(t'_i)\nu_2(t'_i)+1}(t'_i)$ , то в счетчик числа скачков процесса  $\nu(t)$  добавляется 1; в счетчик числа моментов и самих моментов ухода из СМО обслуженных требований на оси времени  $t$ , где хранится  $\nu_2(t)$ , добавляется 1 и момент ухода обслуженного требования  $t'_i$ ; модельное время увеличивается на величину  $\eta_{\nu(t'_i)\nu_2(t'_i)+1}(t'_i)$ , т.е. становится равным  $t'_{i+1} = t'_i + \eta_{\nu(t'_i)\nu_2(t'_i)+1}(t'_i)$ ; в ячейку для  $\gamma(t'_i)$  заносится величина  $\gamma(t'_{i+1}) = \gamma(t'_i) - \eta_{\nu(t'_i)\nu_2(t'_i)+1}(t'_i)$ ; в ячейку для  $\nu(t'_i)$  заносится величина  $\nu(t'_i) - 1$ ; в ячейку для  $\xi_{\nu(t'_{i+1}),\nu_2(t'_{i+1})+1}(t'_{i+1})$  заносится значение потребного количества работы  $\xi_{\nu_2(t'_i)+2}$  по обслуживанию следующего требования, которое было первым требованием в очереди и имеет функцию распределения  $B(x)$ . Для этого требования вырабатывается условное время выполнения работы по его обслуживанию  $\eta_{\nu(t'_{i+1}),\nu_2(t'_{i+1})+1}(t'_{i+1})$  которое определяется вышеприведенным алгоритмом. Таким образом,  $\zeta(t'_{i+1}) = (\nu(t'_{i+1}), \nu_1(t'_{i+1}), k(t'_{i+1}), \gamma(t'_{i+1}), \xi_{\nu(t'_{i+1}),\nu_2(t'_{i+1})+1}(t'_{i+1}))$  будет равен  $(\nu(t'_{i+1}) = \nu(t'_i) - 1, \nu_1(t'_{i+1}) = \nu_1(t'_i), k(t'_{i+1}) = k(t'_i), \gamma(t'_{i+1}) = \gamma(t'_i) - \eta_{\nu_2(t'_i)+1}(t'_i), \xi_{\nu(t'_{i+1}),\nu_2(t'_{i+1})+1}(t'_{i+1}))$ . В счетчик числа требований в СМО и длительностей интервалов заносится пара  $(\nu(t'_i), \eta_{\nu(t'_i)\nu_2(t'_i)+1}(t'_i))$ .

4. Если  $\nu(t'_i - 0) = 1$  и  $\nu(t'_i + 0) = 0$ , т.е. в момент времени  $t'_i$  из системы ушло обслуженное требование, то в счетчик числа скачков процесса  $\nu(t)$  добавляется 1; к  $\nu_2(t)$  добавляется 1 и система свободна от требований; модельное время увеличивается на величину  $\gamma(t'_i)$ , т.е.  $t'_{i+1} = t'_i + \gamma(t'_i)$ ; в момент  $t'_i$  состояние цепи Маркова равно  $k(t'_i)$ , далее с вероятностями  $p_{k(t'_i),k}^{(\nu_1(t'_i))}$  разыгрывается следующее состояние цепи Маркова  $k(t'_{i+1})$ ; в ячейку для  $\gamma(t'_i)$  заносится величина интервала до момента поступления следующего требования  $z_{k(t'_i),k(t'_{i+1})}^{(\nu_1(t'_{i+1}))}$ , имеющая функцию распределения  $F_{k(t'_i),k(t'_{i+1})}^{(\nu_1(t'_{i+1}))}(x)$ ; в ячейку для  $\nu(t'_i)$  заносится величина 1; генерируется случайная величина  $\xi_{\nu_1(t'_i)+1}$  и помещается в ячейку для  $\xi_{1,\nu_2(t'_{i+1})+1}(t'_{i+1})$ . В счетчик числа требований в СМО и длительностей интервалов заносится пара  $(0, \gamma(t'_i))$ . Далее переходим к п. 2.

5. По циклу переходим к п. 1.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ TCP RENO ЦЕПЬЮ МАРКОВА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

**В. В. Кокишенёв**

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Метод Reno является наиболее распространенной реализацией TCP [1]. В его основе находятся четыре режима функционирования процедуры управления потоком [2]: медленный старт (Slow Start, SS), обход перегрузки (Congestion Avoidance, CA), быстрая повторная передача (Fast Retrans-

mit) и быстрое восстановление (Fast Recovery, FR). Обнаружение потерь ведется по тайм-аут ожидания подтверждения и получению подтверждений-дублей [1, 2, 3].

Некоторые известные математические модели TCP Reno описаны в [4-10]. Однако лишь в [6,9,10] учитываются все режимы функционирования TCP (SS, CA, FR, TO). А реализация опции SACK [11,12] предложена только в [9]. Хотя все модели учитывают режим ожидания истечения таймера повторной передачи (TO), реализация алгоритма Карна [13,14] имеется только в [5, 7, 8, 9].

Предлагаемая в данной работе модель учитывает все режимы функционирования TCP (SS, CA, FR, TO), алгоритм Карна, опцию SACK и функцию быстрой повторной передачи, и подтверждает результаты, полученные в [9].

Ключевой операционной характеристикой транспортного соединения является его пропускная способность ( $B$ ):

$$B = \frac{E[seg\_send] - E[seg\_retr]}{RTT} MSS,$$

где  $E[seg\_send]$  – среднее количество сегментов, отправляемых за время круговой задержки,  $E[seg\_retr]$  – среднее количество сегментов, отправляемых повторно за время круговой задержки,  $RTT$  – время круговой задержки,  $MSS$  – максимальный размер сегмента.

Величины  $E[seg\_send]$  и  $E[seg\_retr]$  вычисляются на основе среднего значения окна отправителя и логики действий протокола в каждом из режимов (SS, CA, FR, TO).

Для оценки размера окна предлагается использовать двумерную цепь Маркова с дискретным временем. Тактом дискретизации является время, соответствующее круговой задержке. Моделирование выполнено с исходным предположением о том, что время круговой задержки является величиной постоянной, а обмен ведется сегментами одинакового размера, равного величине  $MSS$ . Также предполагается, что время, необходимое для отправки окна максимального размера, меньше  $RTT$ , что подтверждается наблюдениями, полученными в [15, 16]. А максимальное значение окна соответствует параметру  $W$ , анонсируемому приемником в процессе установления соединения.

Одно измерение цепи описывает динамику изменения параметра текущего окна отправителя  $CWND$ , второе – используется для учета изменений параметра  $SSTHRESH$ , управляющего переключением между режимами SS и CA.

Предложенная модель учитывает наличие потерь в прямом направлении передачи, и не учитывает наличие потерь в обратном канале, то есть сегменты, переносимые подтверждениями, никогда не теряются. Достоверность передачи в прямом направлении обозначим как  $F$ .

Значение  $S$  является величиной тайм-аута ожидания подтверждения, выраженной в количестве тактов дискретизации, и вычисляется с ис-

пользованием значений тайм-аута ожидания подтверждения  $RTO$  и величины круговой задержки  $RTT$ , выраженных в секундах:

$$S = \left\lfloor \frac{RTO}{RTT} \right\rfloor.$$

Кроме того модель учитывает экспоненциальный рост значения  $S$  после каждого истечения тайм-аута в соответствии с алгоритмом Карна и требованиями [13,14]. Для этого введена дополнительная переменная  $MK$ , задающая верхнюю границу роста значения тайм-аута: тайм-аут ожидания подтверждения принимает значения  $2^k S, k = \overline{0, MK}$ , где  $k$  можно трактовать как количество предшествующих истечений таймера ожидания подтверждения.

Для реализации опции SACK предложенная модель использует параметр  $ML$ , обозначающий количество потерянных сегментов, которые TCP способен обнаружить и передать повторно во время фазы быстрого восстановления. Для группового отказа  $ML$  равен 1, для селективного –  $ML$  равен 4.

В соответствии с правилами функционирования режимов SS, CA, FR и TO переходные вероятности цепи Маркова  $\pi_{in}^{jm}$  принимают следующий вид:

$$\pi_{in}^{jm} = \begin{cases} F^i : i = 2^k \Big|_{k=0, \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}, n = 2, \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, j = \min(2i, n), m = n; \\ 1 - F^i : i = \overline{1, 3}, n = \overline{2, 3}, j = i, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1 \\ 1 - F^i : i = \overline{1, 2}, n = 4, \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, j = i, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1 \\ \sum_{x=0}^2 C_i^x F^x (1-F)^{i-x} : i = 2^k \Big|_{k=2, \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}, n = 2, \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, j = i, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1; \\ 1 - \sum_{x=\max(3, i-ML)}^i C_i^x F^x (1-F)^{i-x} - \sum_{x=0}^2 C_i^x F^x (1-F)^{i-x} : \\ i = 2^k \Big|_{k=2, \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}, n = 2, \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, j = 1, m = \max\left(2, \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right); \end{cases}$$

$$\pi_{in}^{jm} = \left\{ \begin{array}{l}
\sum_{x=\max(3,i-ML)}^{i-1} C_i^x F^x (1-F)^{i-x} : i = 2^k \Big|_{k=2, \lceil \log_2 n \rceil - 1}, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = i, m = 1 \\
F^i : i = \overline{n, W-1}, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = i+1, m = n; \\
F^W : i = W, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = W, m = n; \\
\sum_{x=0}^2 C_i^x F^x (1-F)^{i-x} : i = \overline{\max(4, n), W}, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = i, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1; \\
1 - \sum_{x=\max(3,i-ML)}^i C_i^x F^x (1-F)^{i-x} - \sum_{x=0}^2 C_i^x F^x (1-F)^{i-x} : \\
\quad i = \overline{\max(4, n), W}, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = 1, m = \max\left(2, \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right); \\
\sum_{x=\max(3,i-ML)}^{i-1} C_i^x F^x (1-F)^{i-x} : i = \overline{\max(4, n), W}, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = i, m = 1 \\
1 : i = \overline{4, W}, n = 1, j = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor, m = \max\left(2, \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right) \\
1 : i = \overline{1, W}, n = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + S - 1, j = i, m = n + 1; \\
1 : i = \overline{1, W}, n = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + S, j = W + 1, m = \max\left(2, \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right); \\
F : i = W + 1, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = i + 1, m = n; \\
1 - F : i = W + 1, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = i, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1; \\
F^2 : i = W + 2, n = \overline{2, 3}, j = 3, m = n; \\
F^2 : i = W + 2, n = 4, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = 4, m = n; \\
2(1-F)F : i = W + 2, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = 2, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1; \\
(1-F)^2 : i = W + 2, n = 2, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil, j = i, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1; \\
F : k = \overline{2, MK}, i = W + 2k - 1, n = 2, j = i + 1, m = n;
\end{array} \right.$$

$$\pi_{in}^{jm} = \left\{ \begin{array}{l} 1-F : k = \overline{2, MK}, i = W + 2k - 1, n = 2, j = i, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1; \\ F^2 : k = \overline{2, MK}, i = W + 2k, n = 2, j = 3, m = n; \\ 2(1-F)F : k = \overline{2, MK}, i = W + 2k, n = 2, j = 2, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1; \\ (1-F)^2 : k = \overline{2, MK}, i = W + 2k, n = 2, j = i, m = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1; \\ 1 : k = \overline{1, MK}, i = \overline{W + 2k - 1, W + 2k}, n = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 2^k S - 1, \\ \quad j = i, m = n + 1; \\ 1 : k = \overline{1, MK - 1}, i = \overline{W + 2k - 1, W + 2k}, n = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 2^k S, \\ \quad j = W + 2k + 1, m = 2 \\ 1 : i = \overline{W + 2MK - 1, W + 2MK}, n = \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor + 2^{MK} S, \\ \quad j = W + 2MK - 1, m = 2; \end{array} \right.$$

Добавляя условие нормировки, и решая систему уравнений равновесия численным методом, получаем вероятности состояний цепи Маркова ( $P_{ij}$ ). На их основе вычисляем значения  $E[seg\_send]$  и  $E[seg\_retr]$ :

$$E[seg\_send] = \sum_{(i,j) \in SS \cup CA} iP_{ij} + \sum_{(i,j) \in FR} P_{ij} \left( \frac{\sum_{k=1}^i \left( \left\lfloor \frac{i+k-1}{2} \right\rfloor + 1 \right)}{i} \right),$$

$$E[seg\_retr] = \sum_{j=2}^{\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor} P_{1j} + \sum_{(i,j) \in FR} P_{ij} \left( \frac{\sum_{k=1}^{ML} k \frac{C_i^k F^{i-k} (1-F)^k}{\sum_{n=1}^{ML} C_i^n F^{i-n} (1-F)^n} \right).$$

Анализ полученных численных результатов модели для селективных и групповых подтверждений показал, что селективные подтверждения позволяют получить прирост производительности до 6-7.5 % в рассматриваемых условиях. Тем больше положительный эффект SACK, чем выше потери и чем меньше время круговой задержки.

Кроме того было произведено сравнение полученных результатов моделирования с реальными измерениями пропускной способности TCP соединений под управлением алгоритма Reno. В среднем прогноз модели отличается от значений реальной пропускной способности на 9.2 %, что

качественно подтверждает выводы, полученные в [15] при имитационном моделировании TCP Reno.

#### Литература

1. Kevin R. Fall, W. Richard Stevens: TCP/IP Illustrated, Volume 1: The Protocols (2nd Edition), Addison-Wesley Professional Computing Series, 2012.
2. Allman, M., Paxson, V., Blanton, E.: TCP Congestion Control, Internet RFC 5681, September 2009.
3. Postel, J. :Transmission Control Protocol, Internet RFC 0793/STD 0007, September 1981.
4. Lakshman, T.V., Madhow, U.: The performance of TCP/IP for networks with high bandwidth-delay products and random loss. ACM/IEEE Trans. on Networking 5, 336-350 (1997).
5. Kumar A.: Comparative Performance Analysis of versions of TCP in a Local Network with a Lossy Link. ACM/IEEE Trans. of Networking 6, 485-498 (1998).
6. Nimbe L. Ewald, Andrew H. Kemp: Analytical Model of TCP NewReno through a CTMC. J.T. Bradley (Ed.): EPEW 2009, LNCS 5652, pp. 183-196, 2009.
7. Padhey, J., Firoiu, V., Towsley, D., Kurose, J.: Modeling TCP Throughput: A simple Model and Its Empirical Validation, UMASS CMPSI Tech Report TR98-008, Feb. 1998.
8. Padhey, J., Firoiu, V., Towsley, D.: A stochastic model of TCP Reno congestion avoidance and control, Tech. Rep. UMASS-CS-TR-1999-02.
9. Wierman, A., Osogami, T., Olsen, J.: A Unified Framework for Modeling TCP-Vegas, TCP-SACK, and TCP-Reno. Proceedings of the 11TH IEEE/ACM International Symposium on Modeling, Analysis and Simulation of Computer Telecommunications Systems (MASCOTS'03). 1526-7539/03.
10. Casetti, C., Meo, M.: An analytical framework for the performance evaluation of TCP Reno connections. Computer Networks, 37: 669-682, 2001.
11. M. Mathis, J. Mahdavi, S. Floyd, A. Romanow: TCP Selective Acknowledgement Options, Internet RFC 2018, Oct. 1996.
12. S. Floyd, J. Mahdavi, M. Mathis, M. Podolsky: An Extension to the Selective Acknowledgement (SACK) Option for TCP, Internet RFC 2883, July 2000.
13. Karn, P., Partridge, C.: Improving Round-Trip Time Estimates in Reliable Transport Protocols, SIGCOMM 87.
14. V. Paxson, M. Allman, J. Chu, M. Sargent "Computing TCP's Retransmission Timer", KAC6298, June 2011.
15. K. Fall, S. Floyd: Simulation-based comparison of Tahoe, Reno, and SACK TCP. Computer Communication Review, 26(3), July 1996.
16. V. Paxson: Automated packet trace analysis of TCP implementations. In proceedings of SIGCOMM'97, 1997.

## АНАЛИЗ ГРУППОВОГО РЕЖИМА ОТКАЗА ТРАНСПОРТНОГО ПРОТОКОЛА В НАГРУЖЕННОМ ТРАКТЕ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

*В. В. Кокшениев, С. П. Сущенко*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Данная работа является развитием результатов, полученных в [1,2]. Рассмотрим процесс передачи данных между абонентами транспортного протокола, функционирующего в режиме группового отказа. Предположим, что звенья тракта передачи данных имеют одинаковое быстродействие в обоих направлениях. Пусть длина тракта передачи данных, выраженная в количестве участков переприема, равна  $D$ . Обратный канал, по которому доставляются подтверждения отправителю о корректности приема последовательности сегментов данных, также имеет длину  $D$ . Заданы вероятности искажения кадра в канале связи для прямого  $R_n(d), d = \overline{1, D}$  и обратного  $R_0(d), d = \overline{1, D}$  направлений передачи каждого участка переприема. Тогда достоверности передачи сегментов данных вдоль тракта от источника до адресата и обратно составят  $F_n = \prod_{d=1}^D (1 - R_n(d))$  и

$F_0 = \prod_{d=1}^D (1 - R_0(d))$  соответственно. Передача данных на каждом участке переприема выполняется в соответствии с алгоритмом решающей обратной связи. Время обработки пакетов в узлах тракта одинаково. Взаимодействующие абоненты имеют неограниченный поток пакетов для передачи, а обмен выполняется информационными пакетами одинаковой длины. Подтверждения получателя о корректности приема данных переносятся в информационных пакетах встречного потока. Полагаем, что потерь кадров из-за отсутствия буферной памяти в узлах тракта не происходит. Задана функция вероятностей  $b_n, n = \overline{0, N}$  того, что каждый пакет из потока анализируемого соединения в транзитном узле встретит очередь размера  $n \leq N$ , где  $N$  – максимальный размер очереди, определяемый емкостью буферных пулов транзитных узлов.

Функционирование виртуального соединения, управляемого транспортным протоколом, в нагруженном многозвенном тракте передачи данных с очередями сегментов перед отправляемыми данными или подтверждениями может быть описано марковизированным процессом, в котором размер очереди перед прямым или обратным потоком данных исследуемого соединения является дополнительной переменной марковского процесса. В состоянии цепи Маркова  $(i, n)$  источник отправил последовательность размера  $i$ - $n$  сегментов, которая в процессе переноса в одном из звеньев встретила очередь длиной  $n$  пакетов. Значениям координаты  $i = \overline{0, W + n}, n = \overline{0, N}$  состояний цепи Маркова соответствует количество переданных, но не подтвержденных получателем сегментов и время от нача-

ла передачи последовательности, а значениям  $i = \overline{W + n + 1}, S - 1, n = \overline{0}, N$  – время, в течение которого отправитель не активен и ожидает получение квитанции о корректности приема переданной последовательности из  $W$  сегментов.

Обозначим через  $P(i, n), i = \overline{0}, S - 1, n = \overline{0}, N$ , – вероятности состояний цепи Маркова. Тогда последовательность переданных, но не подтвержденных сегментов данных рассматриваемого виртуального соединения при очереди нулевой длины растет до состояния цепи Маркова с координатами  $(2D - 1, 0)$  с вероятностью  $b_0$ . Дальнейший рост размера этой последовательности происходит с вероятностью  $b_0(1 - F_0)$ . В состояниях  $(i, n), i = \overline{2D - 1 + n}, S - 1, n = \overline{0}, N$  возможно получение отправителем квитанции и в зависимости от результатов доставки отправитель передает новые сегменты (при положительной квитанции), либо повторно – искаженные. Поскольку отправленная последовательность сегментов исследуемого виртуального соединения может встретить очередь ненулевой длины в любой момент процесса передачи (на пути последовательности до адресата или при переносе подтверждения отправителю информационного потока), то переход из состояния  $(i, 0), i = \overline{0}, S - 2$  в состояние  $(i, n), i = \overline{0}, S - 2, n = \overline{1}, N$  происходит с вероятностью  $b_n$ . Переходные вероятности цепи Маркова  $\pi_{in}^{jm}$  из исходного состояния  $(i, n)$  в измененное состояние  $(j, m)$ , описывающие динамику процесса передачи информационного потока в режиме группового отказа имеют вид:

$$\pi_{in}^{jm} = \begin{cases} b_0, i = \overline{0}, 2D - 2, n = 0; j = i + 1, m = 0; \\ b_0(1 - F_0), i = \overline{2D - 1}, S - 2, n = 0; j = i + 1, m = 0; \\ b_n, i = \overline{0}, S - 2, n = 0; j = i, m = \overline{1}, N; \\ b_0 F_0 F_n^i, i = \overline{2D - 1}, W - 1, n = 0; j = 2D - 1, m = 0; \\ b_0 F_0 F_n^i, i = \overline{W}, W + 2D - 3, n = 0; j = W + 2D - 2 - i, m = 0; \\ b_0 F_0(1 - F_n^i), i = \overline{2D - 1}, W + 2D - 3, n = 0; j = 0, m = 0; \\ b_0 F_0, i = \overline{W + 2D - 2}, S - 2, n = 0; j = 0, m = 0; \\ 1, i = S - 1, n = \overline{0}, N; j = 0, m = 0; \\ 1, i = \overline{0}, 2D - 2 + n, n = \overline{1}, N; j = i + 1, m = n; \\ 1 - F_0, i = \overline{2D - 1 + n}, S - 2, n = \overline{1}, N; j = i + 1, m = n. \\ F_0 F_n^i, i = \overline{2D - 1 + n}, W - 1 + n, n = \overline{1}, N; j = 2D - 1, m = 0; \\ F_0 F_n^i, i = \overline{W + n}, W + n + 2D - 3, n = \overline{1}, N; j = W + n + 2D - 2 - i, m = 0; \\ F_0(1 - F_n^i), i = \overline{2D - 1 + n}, W + n + 2D - 3, n = \overline{1}, N; j = 0, m = 0; \\ F_0, i = \overline{W + n + 2D - 2}, S - 2, n = \overline{1}, N; j = 0, m = 0. \end{cases}$$

Пропускная способность виртуального соединения, управляемого транспортным протоколом, определяется как отношение среднего объема данных, передаваемых между двумя последовательными получениями квитанций, к среднему времени получения квитанции [2]. Вклад в быстродействие виртуального соединения дают те состояния цепи Маркова, для которых возможно получение квитанции. Нормированная на единицу пропускная способность виртуального соединения в нагруженном тракте, определяется отношением среднего количества сегментов данных, передаваемых отправителем между поступлениями двух последовательных квитанций, к среднему времени между поступлениями квитанций, выраженному в количестве интервалов длительности  $t$ :  $Z(W, S) = \bar{V} / \bar{T}$ . Поскольку квитанции переносятся в каждом сегменте независимо и поступают к отправителю каждый такт  $t$  при условии, что они не искажены на пути длины  $D$  от получателя до отправителя информационного потока, то среднее время между приходами квитанций распределено по геометрическому закону с параметром  $F_0$  и составит:  $\bar{T} = 1/F_0$ . Средний объем передаваемых между поступлениями квитанций данных с учетом того, что каждый пакет исследуемого соединения с вероятностью  $b_n, n = 0, N$  встречает очередь размера  $n$  и дает вклад в объем переданной информации обратно пропорциональный величине  $n + 1$ , задается соотношением вида 
$$\bar{V} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} \left[ \sum_{l=2D-1+n}^{W+2D-2+n} \bar{l} P(l, n) + \sum_{l=W+2D-1+n}^{S-1} \bar{W} P(l, n) \right].$$
 Величины  $\bar{l}$  и  $\bar{W}$  определяются средним количеством сегментов достигших адресата при групповой процедуре организации повторных передач искаженных сегментов: 
$$\bar{l} = \frac{F_n (1 - F_n^{l-2D-n+2})}{1 - F_n}, \quad \bar{W} = \frac{F_n (1 - F_n^W)}{1 - F_n}.$$
 Тогда пропускная способность виртуального соединения примет вид:

$$Z_T(W, S) = \frac{F_n F_0}{1 - F_n} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} \left[ \sum_{l=2D-1+n}^{S-1} P(l, n) - \sum_{l=2D-1+n}^{W+2D-2+n} F_n^{l-2D-n+2} P(l, n) - F_n^W \sum_{l=W+2D-1+n}^{S-1} P(l, n) \right].$$

В стационарных условиях найдены вероятности состояний цепи Маркова, описывающей процесс переноса данных в виртуальном канале в режиме группового отказа для набора протокольных параметров и характеристик тракта  $W \geq 1, S > W$  и  $D = 1$ . При  $F_n = 1$  найденное решение ожидаемо приводит к результатам, полученным для режима селективного отказа [2].

Получить аналитическое решение для общего случая произвольных значений протокольных параметров, характеристик тракта передачи данных и мешающего потока не удастся. Найдем решение для тракта произвольной длины  $D$  при следующих условиях:  $b_0 = 0, W > 2D + N, S > W$ . Система уравнений равновесия, описывающая процесс переноса данных в

виртуальном канале в режиме группового отказа в соответствии с переходными вероятностями (1) принимает вид:

$$P(0,0) = \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{i=2D+n-1}^{W+2D+n-3} P(i,n)F_0 \left(1 - F_n^{i-2D-n+2}\right) + \sum_{i=W+2D+n-2}^{S-2} P(i,n)F_0 + P(S-1,n) \right\};$$

$$P(i,0) = \sum_{n=1}^N P(W+n+2D-2-i,n)F_0F_n^{W-i}, i = \overline{1, 2D-2};$$

$$P(2D-1,0) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=2D+n-1}^{W+n-1} P(i,n)F_0F_n^{i-2D-n+2};$$

$$P(0,n) = b_n P(0,0), n = \overline{1, N};$$

$$P(i,n) = P(i-1,n) + b_n P(i,0), i = \overline{1, 2D-1}, n = \overline{1, N};$$

$$P(i,n) = P(i-1,n), i = \overline{2D, 2D+n-1}, n = \overline{1, N};$$

$$P(i,n) = (1-F_0)P(i-1,n), i = \overline{2D+n, S-1}, n = \overline{1, N}.$$

Для вероятностей состояний отсюда находим:

$$P(i,0) = P(0,0) \frac{F_0 F_n [1 - F_n(1 - F_0)] (F_n(1 - F_0))^{W-i-1}}{1 - F_n + F_0 F_n (F_n(1 - F_0))^{W-1}}, i = \overline{1, 2D-2};$$

$$P(2D-1,0) = P(0,0) \frac{F_0 F_n \left[1 - (F_n(1 - F_0))^{W-2D+1}\right]}{1 - F_n + F_0 F_n (F_n(1 - F_0))^{W-1}};$$

$$P(i,n) = P(0,0) b_n \frac{1 - F_n + F_0 F_n (F_n(1 - F_0))^{W-i-1}}{1 - F_n + F_0 F_n (F_n(1 - F_0))^{W-1}}, i = \overline{1, 2D-2}, n = \overline{1, N};$$

$$P(i,n) = P(0,0) b_n \frac{1 - F_n(1 - F_0)}{1 - F_n + F_0 F_n (F_n(1 - F_0))^{W-1}}, i = \overline{2D-1, 2D+n-1}, n = \overline{1, N};$$

$$P(i,n) = P(0,0) b_n \frac{[1 - F_n(1 - F_0)] (F_n(1 - F_0))^{i-2D-n+1}}{1 - F_n + F_0 F_n (F_n(1 - F_0))^{W-1}}, i = \overline{2D+n-1, S-1}, n = \overline{1, N}.$$

Из условия нормировки для вероятности начального состояния получаем:

$$P(0,0) = \frac{(1 - F_n(1 - F_0)) \left[1 - F_n + F_0 F_n (F_n(1 - F_0))^{W-1}\right]}{U}, \text{ где}$$

$$U = F_n F_0 \left[ (F_n(1 - F_0))^{W-2D+1} - (F_n(1 - F_0))^W \right] + (1 - F_n(1 - F_0)) \left[ 1 + F_n F_0 + 2D(1 - F_n) + \bar{N}(1 - F_n(1 - F_0)) - \sum_{n=1}^N b_n (F_n(1 - F_0))^{S-2D-n+1} \right].$$

При  $F_n = 1$  отсюда получаем ожидаемое решение, совпадающее с вероятностями состояний для селективного повтора [2]. Быстродействие соединения согласно (2) определится соотношением:

$$Z_T(W, S) = \frac{F_0 F_n (1 - F_n (1 - F_0))}{(1 - F_n) U} \left\{ F_0 F_n (1 - F_n) \left[ 1 - (F_n (1 - F_0))^{W-2D+1} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n+1} \left[ \frac{(1 - F_n) \left[ 1 - (F_n^2 (1 - F_0))^W \right]}{1 - F_n^2 (1 - F_0)} - (1 - F_n^W) (F_n (1 - F_0))^{S-2D-n+1} \right] \right\}.$$

В случае  $F_0 = 1$  при  $W \geq 2D, S > W + N$  пропускная способность транспортного соединения определится зависимостью

$$Z_T(W, S) =$$

$$= \frac{F_n \left[ (1 - b_0) (F_n + (1 - F_n) b_0^{2D-1}) + (1 - b_0 (F_n + (1 - F_n) b_0^{2D-1})) \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n+1} \right]}{(1 - b_0) \left[ 2D + 1 - b_0^{2D} - F_n (2D - 1 + b_0 - b_0^{2D}) \right] + \bar{N} \left[ 1 - b_0^{2D} - F_n (b_0 - b_0^{2D}) \right]},$$

а при  $W < 2D, S > 2D + N$  – соотношением

$$Z_T(W, S) =$$

$$= \frac{F_n \left[ b_0^{2D-W} (1 - b_0) (F_n + (1 - F_n) b_0^{W-1}) + (1 - b_0^{2D-W+1} (F_n + (1 - F_n) b_0^{W-1})) \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n+1} \right]}{G},$$

$$G = (1 - b_0) \left[ 2D + 1 - b_0^{2D} - F_n (W - 1 + b_0^{2D-W+1} - b_0^{2D}) \right] + \\ + \bar{N} \left[ 1 - b_0^{2D} - F_n (b_0^{2D-W+1} - b_0^{2D}) \right].$$

Численные исследования показывают, что доступная виртуальному соединению полоса пропускания для  $W \geq 2D$  при прочих равных условиях несущественно зависит от длины тракта передачи данных, ощутимо снижаясь от области насыщения лишь при  $W < 2D$  и  $F_0 < 1$  в силу недогруженности доступной полосы пропускания. С ростом конкуренции между абонентами за полосу пропускания тракта передачи данных размер очереди увеличивается, и скорость информационного переноса быстро падает.

#### Литература

1. Белинский В. А., Кокшенев В. В., Сущенко С. П. Моделирование транспортного протокола с селективным режимом повтора в нагруженном тракте передачи данных // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2012): материалы XI Всерос. науч.-практ. конф. с международ. участием (г. Анжеро-Судженск, 23-24 нояб. 2012 г.). – Кемерово : Практика, 2013. – Ч. 2. С. 75-79.

2. Кокшенев В. В., Михеев П. А., Сущенко С. П. Анализ селективного режима отказа транспортного протокола в нагруженном тракте передачи данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 3(24). – С. 78-94.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ RQ-СИСТЕМЫ С ВХОДЯЩИМ ММРР-ПОТОКОМ И КОНФЛИКТАМИ ЗАЯВОК

*Т. В. Любина*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Рассмотрим марковскую динамическую RQ-систему с входящим ММРР-потокom и конфликтами заявок. На вход RQ-системы поступает ММРР-поток из внешнего источника, определяемый диагональной матрицей  $\Lambda$  условных интенсивностей  $\lambda_n$  и матрицей  $Q$  инфинитезимальных характеристик  $q_{vn}$  цепи Маркова  $n(t)$ , управляющей ММРР-потокom. Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ . По завершении обслуживания заявка покидает прибор. Если во время обслуживания некоторой заявки поступает другая, то в приборе возникает конфликт и обе заявки переходят в источник повторных вызовов (ИПВ). Из ИПВ, после случайной задержки, заявка с динамической (зависящей от состояния ИПВ) интенсивностью  $\gamma/i$  вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата,  $i$  – число заявок в ИПВ. Если прибор свободен, то заявка становится на обслуживание, если же он занят, вновь возникает конфликт заявок.

Состояние системы в момент времени  $t$  определяется трехмерной цепью Маркова  $\{k(t), n(t), i(t)\}$ , где  $i(t)$  – число заявок в ИПВ,  $n(t)$  – значения цепи Маркова, управляющей ММРР-потокom, а  $k(t)$  определяет состояние прибора следующим образом:  $k(t) = 0$ , если прибор свободен, и  $k(t) = 1$ , если прибор занят.

Обозначим  $P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\} = P(k, n, i, t)$  – вероятность того, что в момент времени  $t$  прибор находится в состоянии  $k$ , цепь Маркова в состоянии  $n$  и в ИПВ  $i$  заявок. Таким образом, распределение вероятностей  $P(k, n, i, t)$  удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0, n, i, t)}{\partial t} = -(\lambda_n + \gamma)P(0, n, i, t) + \mu P(1, n, i, t) + \gamma P(1, n, i - 1, t) + \\ + \lambda_n P(1, n, i - 2, t) + \sum_v P(0, v, i, t) q_{vn}, \\ \frac{\partial P(1, n, i, t)}{\partial t} = -(\lambda_n + \mu + \gamma)P(1, n, i, t) + \gamma P(0, n, i + 1, t) + \lambda_n P(0, n, i, t) + \\ + \sum_v P(1, v, i, t) q_{vn}. \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы уравнений Колмогорова (1) достаточно полно определяет функционирование динамической RQ-системы с входящим ММРР-потокom и конфликтами заявок. Допредельное исследование проведем методом производящих функций.

### Исследование методом производящих функций

Будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме, то есть  $P(k,n,i,t) \equiv P(k,n,i)$ . Запишем систему (1) для стационарного распределения в матричном виде. Обозначив вектор-строки

$$\mathbf{P}(k,i) = \{P(k,1,i), P(k,2,i), \dots, P(k,N,i)\},$$

получим

$$\begin{cases} \mathbf{P}(0,0)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}) + \mathbf{P}(1,0)\boldsymbol{\mu} = 0, & i = 0, \\ \mathbf{P}(1,0)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{I}) + \mathbf{P}(0,0)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}(0,1)\boldsymbol{\gamma} = 0, & i = 0, \\ \mathbf{P}(0,i)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I}) + \mathbf{P}(1,i)\boldsymbol{\mu} + \mathbf{P}(1,i-1)\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{P}(1,i-2)\mathbf{\Lambda} = 0, & i \geq 1, \\ \mathbf{P}(1,i)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{I} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I}) + \mathbf{P}(0,i)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}(0,i+1)\boldsymbol{\gamma} = 0, & i \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Чтобы решить систему (2), определим векторные производящие функции

$$\mathbf{G}(k,x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P(k,i), \quad k = 0, 1. \quad (3)$$

Из системы (2), с учетом равенства (3), получаем следующую систему для функций  $\mathbf{G}(k,x)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{G}(0,x)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I}) + \mathbf{G}(1,x)(\boldsymbol{\mu}\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}x\mathbf{I} + x^2\mathbf{\Lambda}) = -\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}(0,0) + \boldsymbol{\gamma}x\mathbf{P}(1,0), \\ \mathbf{G}(0,x)(\mathbf{\Lambda} + \frac{\boldsymbol{\gamma}}{x}\mathbf{I}) + \mathbf{G}(1,x)(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{I} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{x}\mathbf{P}(0,0) - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}(1,0), \end{cases} \quad (4)$$

Из системы (4) получаем выражения для  $\mathbf{G}(0,x)$  и  $\mathbf{G}(1,x)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(0,x) &= \mathbf{P}(0,0) \left\{ \frac{\boldsymbol{\gamma}}{x} + \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}) \right\} \left\{ (\boldsymbol{\mu}\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}x\mathbf{I} + x^2\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{I} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) + \mathbf{I} \right\} \times \\ &\times \left\{ \mathbf{\Lambda} + \frac{\boldsymbol{\gamma}}{x}\mathbf{I} - (\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I})(\boldsymbol{\mu}\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}x\mathbf{I} + x^2\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{I} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{G}(1,x) = - \left[ \mathbf{P}(0,0) \left\{ \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I} + \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\mu}}x(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}) \right\} + \mathbf{G}(0,x)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I}) \right] \left\{ \boldsymbol{\mu}\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}x\mathbf{I} + x^2\mathbf{\Lambda} \right\}^{-1}.$$

Обозначив матрицы

$$\mathbf{A}(x) = \left\{ \frac{\boldsymbol{\gamma}}{x} + \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}) \right\} \left\{ (\boldsymbol{\mu}\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}x\mathbf{I} + x^2\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{I} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) + \mathbf{I} \right\},$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{\Lambda} + \frac{\boldsymbol{\gamma}}{x}\mathbf{I} - (\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I})(\boldsymbol{\mu}\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}x\mathbf{I} + x^2\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{I} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}),$$

равенства для  $\mathbf{G}(0,x)$  и  $\mathbf{G}(1,x)$  перепишем в следующем виде

$$\begin{cases} \mathbf{G}(0,x) = \mathbf{P}(0,0)\mathbf{A}(x)\mathbf{B}^{-1}(x), \\ \mathbf{G}(1,x) = \\ = - \left[ \mathbf{P}(0,0) \left\{ \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I} + \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\mu}}x(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}) \right\} + \mathbf{G}(0,x)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{I}) \right] \left\{ \boldsymbol{\mu}\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}x\mathbf{I} + x^2\mathbf{\Lambda} \right\}^{-1}, \end{cases} \quad (6)$$

в которых неизвестным остается только лишь вектор  $\mathbf{P}(0,0)$ . Значения его компонент найдем следующим образом.

Производящая функция  $\mathbf{G}(0,x)$  определена для всех значений  $x \in [0,1]$ , но матрица  $\mathbf{V}(x)$  вырождена при  $x = x_v$ , где  $x_v$  – корни уравнения  $|\mathbf{V}(x)| = 0$ , принадлежащие рассматриваемому интервалу  $[0,1]$ .

Обратную матрицу  $\mathbf{V}^{-1}(x)$  запишем в виде  $\mathbf{V}^{-1}(x) = \frac{1}{|\mathbf{V}(x)|} \mathbf{D}^T(x)$ , где

элементами матрицы  $\mathbf{D}(x)$  являются алгебраические дополнения к элементам матрицы  $\mathbf{V}(x)$ . Из равенства нулю определителя  $|\mathbf{V}(x_v)| = 0$  следует, что компоненты вектора  $\mathbf{P}(0,0)$  удовлетворяют однородной системе линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{P}(0,0)\mathbf{A}(x_v)\mathbf{V}^T(x_v) = 0$ .

Эта система определяет значения компонент вектора  $\mathbf{P}(0,0)$  с точностью до мультипликативной постоянной, значение которой определяется условием нормировки. Таким образом, удалось найти выражения (5) для производящих функций  $\mathbf{G}(k,x)$ .

Для производящей функции  $G(x) = \mathbf{G}(x)\mathbf{E}$  распределения вероятностей  $P(i)$  числа заявок в ИПВ можно записать равенство

$$G(x) = \{\mathbf{G}(0,x) + \mathbf{G}(1,x)\}\mathbf{E} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P(i),$$

в котором функции  $\mathbf{G}(k,x)$  определены системой (6).

Разложение найденной производящей функции  $\mathbf{G}(x)$  в ряд по степеням переменной  $x$ , с целью нахождения значений вероятностей  $P(i)$ , представляет определённые технические проблемы, поэтому распределение вероятностей  $P(i)$  найдем следующим образом.

Распределение вероятностей  $P(i)$  числа заявок в ИПВ запишем, применяя обратное преобразование Фурье

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju i} h(u) du, \quad (7)$$

где скалярная характеристическая функция  $h(u)$  числа  $i(t)$  заявок в ИПВ определяется равенством

$$\{\mathbf{G}(0,x) + \mathbf{G}(1,x)\}\mathbf{E} = \{\mathbf{H}(0,u) + \mathbf{H}(1,u)\}\mathbf{E} = M e^{ju i(t)} = h(u). \quad (8)$$

Значения (7) определяется численно для широкого спектра значений исходных параметров  $\Lambda$ ,  $\mathbf{Q}$ , и  $\gamma$  рассматриваемой динамической RQ-системы с входящим ММРР-поток и конфликтами заявок.

### Нахождение значения пропускной способности $S$

Применение предельного условия большой загрузки  $\rho \uparrow S$  позволит найти пропускную способность  $S$  для RQ-системы [6].

Будем полагать, что выполнено условие

$$\mathbf{R} \Lambda \mathbf{E} = \mu,$$

где  $\mathbf{R}$  – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова  $n(t)$ , управляющей ММРР-поток, определяемое системой  $\mathbf{RQ} = 0$ ,  $\mathbf{RE} = 1$ , а матрица условных интенсивностей входящего ММРР-потока имеет вид  $\rho\Lambda$ . Такая нормировка матрицы  $\Lambda$  необходима для того, чтобы сомножитель  $\rho$  в произведении  $\rho\Lambda$  имел смысл загрузки RQ-системы.

Систему (4) с учётом (8) модифицируем следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{H}(0,u)(\mathbf{Q} - \rho\Lambda - \gamma\mathbf{I}) + \mathbf{H}(1,u)(e^{2ju}\Lambda + \gamma e^{ju}\mathbf{I} + \mu\mathbf{I}) = -\gamma\mathbf{P}(0,0) + e^{ju}\gamma\mathbf{P}(1,0), \\ \mathbf{H}(0,u)(\rho\Lambda + e^{-ju}\gamma\mathbf{I}) + \mathbf{H}(1,u)(\mathbf{Q} - \rho\Lambda - \mu\mathbf{I} - \gamma\mathbf{I}) = e^{-ju}\gamma\mathbf{P}(0,0) - \gamma\mathbf{P}(1,0), \end{cases} \quad (9)$$

где  $\rho$  – параметр, который используется для получения предельного условия большой загрузки RQ-системы.

Систему (9) будем исследовать, используя предельное условие большой загрузки  $\rho \uparrow S$ , где  $S$  – пропускная способность данной RQ-системы. Обозначив  $\varepsilon = S - \rho$ , будем полагать также  $\varepsilon \rightarrow 0$  и в системе (9) выполним замены

$$\rho = S - \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_k(u) = \mathbf{F}_k(w, \varepsilon), \quad \mathbf{P}(0,0) = \varepsilon\Pi(\varepsilon),$$

тогда систему (9) перепишем в виде

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)(\mathbf{Q} - (S - \varepsilon)\Lambda - \gamma\mathbf{I}) + \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)(e^{2j\varepsilon w}(S - \varepsilon)\Lambda + \gamma e^{j\varepsilon w}\mathbf{I} + \mu\mathbf{I}) = \\ = -\gamma\varepsilon\Pi(\varepsilon)\left(\mathbf{I} + \frac{e^{j\varepsilon w}}{\mu}(\mathbf{Q} - (S - \varepsilon)\Lambda)\right), \\ \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)((S - \varepsilon)\Lambda + e^{-j\varepsilon w}\gamma\mathbf{I}) + \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)(\mathbf{Q} - (S - \varepsilon)\Lambda - \mu\mathbf{I} - \gamma\mathbf{I}) = \\ = \gamma\varepsilon\Pi(\varepsilon)\left(e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I} + \frac{1}{\mu}(\mathbf{Q} - (S - \varepsilon)\Lambda)\right). \end{cases} \quad (10)$$

**Теорема.** *Значение пропускной способности  $S$  динамической RQ-системы с входящим ММРР-поток и конфликтами заявок равно значению корня уравнения*

$$\gamma(\mathbf{R}_0(S) - \mathbf{R}_1(S))\mathbf{E} - 2S\mathbf{R}_1(S)\Lambda\mathbf{E} = 0, \quad (11)$$

где вектор-строка  $\mathbf{R}_k(S)$  – совместное распределение вероятностей состояний прибора и значений цепи Маркова, управляющей входящим ММРР-поток, которое определяется равенствами

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0(S) = \mathbf{R}\{S\Lambda + (\mu + \gamma)\mathbf{I}\}\{\mu\mathbf{I} + 2(S\Lambda + \gamma\mathbf{I}) - \mathbf{Q}\}^{-1}, \\ \mathbf{R}_1(S) = \mathbf{R}\{\mathbf{I} - [S\Lambda + (\mu + \gamma)\mathbf{I}]\}\{\mu\mathbf{I} + 2(S\Lambda + \gamma\mathbf{I}) - \mathbf{Q}\}^{-1}, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\mathbf{R}$  – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова  $n(t)$ , определяемое системой  $\mathbf{RQ} = 0$ ,  $\mathbf{RE} = 1$ .

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы выполним в два этапа.

**Этап 1.** Обозначим  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) = \mathbf{F}_k(w)$ , выполнив в (10) указанный предельный переход, получим систему

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0(w)(\mathbf{Q} - S\mathbf{\Lambda} - \gamma\mathbf{I}) + \mathbf{F}_1(w)(S\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I} + \mu\mathbf{I}) = 0, \\ \mathbf{F}_0(w)(S\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I}) + \mathbf{F}_1(w)(\mathbf{Q} - S\mathbf{\Lambda} - \gamma\mathbf{I} - \mu\mathbf{I}) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение  $\mathbf{F}_k(w)$  системы (13) будем искать в виде

$$\mathbf{F}_k(w) = \mathbf{R}_k(S)\Phi(w), \quad (14)$$

где функция  $\Phi(w)$  на бесконечности равна нулю, а  $\mathbf{R}_k(S)$  – распределение вероятностей состояний прибора, определяемое системой

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0(S)(\mathbf{Q} - S\mathbf{\Lambda} - \gamma\mathbf{I}) + \mathbf{R}_1(S)(S\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I} + \mu\mathbf{I}) = 0, \\ \mathbf{R}_0(S)(S\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I}) + \mathbf{R}_1(S)(\mathbf{Q} - S\mathbf{\Lambda} - \gamma\mathbf{I} - \mu\mathbf{I}) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что

$$(\mathbf{R}_0(S) + \mathbf{R}_1(S))\mathbf{Q} = 0,$$

то есть  $\mathbf{RQ} = 0$ , где  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(S) + \mathbf{R}_1(S)$  и удовлетворяет условию нормировки  $\mathbf{RE} = 1$ , тогда  $\mathbf{R}_0(S)$  и  $\mathbf{R}_1(S)$ , зависящие от  $S$ , определяются равенствами

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0(S) = \mathbf{R}\{S\mathbf{\Lambda} + (\mu + \gamma)\mathbf{I}\}\{\mu\mathbf{I} + 2(S\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I}) - \mathbf{Q}\}^{-1}, \\ \mathbf{R}_1(S) = \mathbf{R}\{\mathbf{I} - [S\mathbf{\Lambda} + (\mu + \gamma)\mathbf{I}][\mu\mathbf{I} + 2(S\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I}) - \mathbf{Q}]^{-1}\}, \end{cases}$$

которые совпадают с (12).

**Этап 2.** Просуммируем по  $k$  и  $n$  все уравнения системы (10), получим уравнение

$$\mathbf{F}_0(w, \varepsilon)\varepsilon jw\gamma\mathbf{E} - \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)(2j\varepsilon wS\mathbf{\Lambda} + \varepsilon jw\gamma)\mathbf{E} = 0,$$

из которого имеем

$$\mathbf{F}_0(w, \varepsilon)\gamma\mathbf{E} - \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)2S\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)\gamma\mathbf{E} = 0.$$

Используя (14), получим равенство

$$\mathbf{R}_0(S)\Phi(w)\gamma\mathbf{E} - \mathbf{R}_1(S)\Phi(w)2S\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} - \mathbf{R}_1(S)\Phi(w)\gamma\mathbf{E} = 0,$$

откуда получаем выражение

$$\gamma(\mathbf{R}_0(S) - \mathbf{R}_1(S))\mathbf{E} - 2S\mathbf{R}_1(S)\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} = 0,$$

которое совпадает с (11) и определяет значение пропускной способности  $S$  динамической RQ-системы с конфликтами заявок. **Теорема доказана.**

Таким образом, проведено исследование динамической RQ-системы с входящим ММРР-потокм и конфликтами заявок. Методом производящих функций получено распределение вероятностей  $P(i)$  числа заявок в ИПВ в виде обратного преобразования Фурье (7). Решение систем уравнений (11)-(12) позволяет найти значение пропускной способности  $S$  для любых исходных параметров RQ-системы.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-90810-мол\_рф\_нр*

#### Литература

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial queueing systems: A computational approach. – Springer, 2008. – 309 p.
2. Falin G. I. A Survey of retrial queues // Queuing systems. – 1990. – V. 7. – P. 127-167.

3. Dudin A. N., Klimenok V. I., Kim C. S., Lee M. H. The SM/PH/N queueing system with broadcasting service // Proceedings of the 13th International conference on analytical and stochastic modeling techniques and applications. – Bonn, Germany, 2006. – P. 8–13.

4. Любина Т. В., Назаров А. А. Немарковская динамическая RQ-система с входящим MMR-потокм заявок // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 7. – С. 89-101.

5. Гарайшина И. Р., Моисеева С. П., Назаров А. А. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. – Томск: изд. НТЛ, 2010. – 204 с.

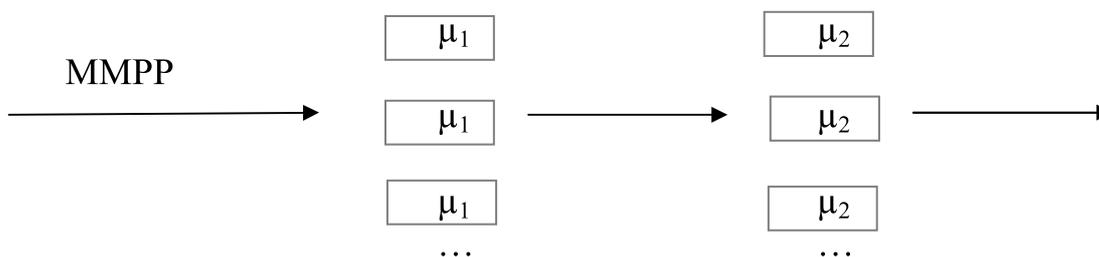
6. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СМО ММРР|(M|∞)<sup>2</sup> В УСЛОВИИ РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

*Н. В. Минаева*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Рассмотрим двухфазную СМО с входящим ММР-потокм, неограниченным числом приборов на каждой фазе, имеющих экспоненциальное время обслуживания с параметрами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Заявка, обслужившаяся на первой фазе, с вероятностью равной 1 попадает на вторую, а обслужившись на второй, покидает систему.



*Рис. 1. Система массового обслуживания ММРР|(M|∞)<sup>2</sup>*

Цель исследования – нахождение распределения вероятностей двумерного процесса  $\{i_1(t), i_2(t)\}$ , где  $i_k(t)$  – число заявок на  $k$ -ой фазе в момент времени  $t$ . Система рассматривается в условии растущего времени обслуживания (времена обслуживания на первой и второй фазе растут независимо друг от друга). Трехмерный случайный процесс  $\{i_1(t), i_2(t), k(t)\}$ , где  $k(t)$  – управляющая цепь Маркова входящего потока, является Марковским, а значит для него можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Обозначим  $P(i_1, i_2, k, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, k(t) = k\}$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(i_1, i_2, k, t)}{\partial t} = & P(i_1, i_2, k, t) \{q_{kk} - \lambda_k - i_1 \mu_1 - i_2 \mu_2\} + P(i_1 - 1, i_2, k, t) \lambda_k + \\ & + P(i_1, i_2 + 1, k, t) (i_2 + 1) \mu_2 + P(i_1 + 1, i_2 - 1, k, t) (i_1 + 1) \mu_1 + \sum_{v \neq k} P(i_1, i_2, v, t) q_{vk}. \end{aligned}$$

При переходе к стационарному режиму и матричным обозначениям, система принимает вид

$$\begin{aligned}
& -\bar{\mathbf{P}}(i_1, i_2) \{ \mathbf{\Lambda} + i_1 \mu_1 \mathbf{I} + i_2 \mu_2 \mathbf{I} \} + \bar{\mathbf{P}}(i_1 - 1, i_2) \mathbf{\Lambda} + \bar{\mathbf{P}}(i_1, i_2 + 1) (i_2 + 1) \mu_2 + \\
& + \bar{\mathbf{P}}(i_1 + 1, i_2 - 1) (i_1 + 1) \mu_1 + \bar{\mathbf{P}}(i_1, i_2) \mathbf{Q} = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\mathbf{\Lambda}$  и  $\mathbf{Q}$  – матрицы, задающие входящий ММР-поток,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, а  $P(i_1, i_2) = \{P(i_1, i_2, 1), P(i_1, i_2, 2), \dots, P(i_1, i_2, K)\}$ .

Вводим характеристическую функцию вида

$$\mathbf{H}(u_1, u_2) = \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} \bar{\mathbf{P}}(i_1, i_2)$$

и уравнение (1) переписывается как

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}(u_1, u_2) \{ \mathbf{Q} - (1 - e^{-ju_1}) \mathbf{\Lambda} \} + j(1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \mu_2 + \\
& + j(1 - e^{-j(u_1 - u_2)}) \frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \mu_1 = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

### Асимптотика первого порядка

Для выполнения условия растущего времени обслуживания, проведем замену переменных

$$\mu_l = \varepsilon v_l, \quad u_l = \varepsilon w_l, \quad \mathbf{H}(u_1, u_2) = \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon), \quad l = 1, 2,$$

где  $v_l$  – некоторые константы, определяющие скорость роста времени обслуживания. Тогда уравнение (2) запишется как

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon) \{ \mathbf{Q} - (1 - e^{jw_1 \varepsilon}) \mathbf{\Lambda} \} + j(1 - e^{-jw_2 \varepsilon}) \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} v_2 + \\
& + j(1 - e^{-j(w_1 - w_2) \varepsilon}) \frac{\partial \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} v_1 = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Выполним предельный переход (устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), получим

$$\mathbf{F}(w_1, w_2) \mathbf{Q} = 0$$

это значит что функция  $\mathbf{F}$  представима в виде  $\mathbf{F}(w_1, w_2) = \mathbf{R} \Phi(w_1, w_2)$ , где  $\mathbf{R} = \{R(1), R(2), \dots, R(K)\}$  – вектор стационарного распределения вероятностей управляющей цепи Маркова  $k(t)$ , а  $\Phi(w_1, w_2)$  – некоторая скалярная функция.

Умножив уравнение (3) на единичный вектор и подставив разложение функции  $\mathbf{F}$ , получим

$$\Phi(w_1, w_2) = \exp \left\{ j \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} \frac{w_1}{v_1} \right\} \exp \left\{ j \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} \frac{w_2}{v_2} \right\},$$

$$\mathbf{F}(w_1, w_2) = \mathbf{R} \exp \left\{ j \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} \frac{u_1}{\mu_1} \right\} \exp \left\{ j \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} \frac{u_2}{\mu_2} \right\}.$$

### Асимптотика второго порядка

Учитывая результат первой асимптотики, представим характеристическую функцию в виде

$$\mathbf{H}(u_1, u_2) = \mathbf{H}_2(u_1, u_2) e^{j \frac{\mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}}{\mu_1} u_1} e^{j \frac{\mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}}{\mu_2} u_2}.$$

Тогда уравнение (2) эквивалентно

$$\mathbf{H}_2(u_1, u_2) \{ \mathbf{Q} - (1 - e^{ju_1}) \mathbf{\Lambda} - [(1 - e^{-j(u_1 - u_2)}) + (1 - e^{-ju_2})] \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} \} + \\ + j(1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, u_2)}{\partial u_2} \mu_2 + j(1 - e^{-j(u_1 - u_2)}) \frac{\partial \mathbf{H}_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} \mu_1 = 0.$$

Выполним замену переменных

$$\mu_l = \varepsilon^2 \mathbf{v}_l, \quad u_l = \varepsilon w_l, \quad \mathbf{H}_2(u_1, u_2) = \mathbf{F}_2(w_1, w_2, \varepsilon), \quad l = 1, 2, \\ \mathbf{F}_2(w_1, w_2, \varepsilon) \{ \mathbf{Q} - (1 - e^{jw_1 \varepsilon}) \mathbf{\Lambda} - [(1 - e^{-j(w_1 - w_2) \varepsilon}) + (1 - e^{-jw_2 \varepsilon})] \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} \} + \\ + j(1 - e^{-jw_2 \varepsilon}) \frac{\partial \mathbf{F}_2(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} \varepsilon \mathbf{v}_2 + j(1 - e^{-j(w_1 - w_2) \varepsilon}) \frac{\partial \mathbf{F}_2(w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} \varepsilon \mathbf{v}_1 = 0 \quad (4)$$

и представим функцию  $\mathbf{F}_2$  следующим образом

$$\mathbf{F}_2(w_1, w_2, \varepsilon) = \Phi(w_1, w_2) \{ \mathbf{R} + j\varepsilon w_1 \mathbf{f}_1 + j\varepsilon w_2 \mathbf{f}_2 \} + o(\varepsilon)$$

Здесь  $\mathbf{f}_i = \{f(i), f(2), \dots, f(K)\}$ . А  $f(k)$  – функции некоторого вида зависящие от состояния управляющей цепи Маркова  $k(t)$ .

Решая уравнение (4), получаем условия для этих функций

$$\mathbf{f}_1 \mathbf{Q} = \mathbf{R} \{ (\mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}) \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} \},$$

$$\mathbf{f}_2 \mathbf{Q} = 0.$$

Представим функцию  $\Phi(w_1, w_2)$  в виде

$$\Phi(w_1, w_2) = \exp \left\{ \frac{1}{2} [(jw_1)^2 K_{11} + 2jw_1 jw_2 K_{12} + (jw_2)^2 K_{22}] \right\},$$

здесь  $K_{ij}$  – элементы матрицы ковариаций  $\mathbf{K}$  одномерных случайных процессов  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  ( $K_{12} = K_{21}$ ). Решая уравнение (4), имеем

$$K_{11} = \frac{1}{\mathbf{v}_1} \{ \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} + \mathbf{f}_1 [\mathbf{\Lambda} - (\mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}) \mathbf{I}] \mathbf{E} \},$$

$$K_{22} = \frac{1}{\mathbf{v}_2} \{ \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} + K_{12} \mathbf{v}_1 \},$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{1}{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2} (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) \{ \mathbf{\Lambda} - (\mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}) \mathbf{I} \} \mathbf{E}.$$

Таким образом, мы знаем вид функции  $\mathbf{F}$  при заданных характеристиках входящего потока  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  и характеристиках обслуживания  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , она имеет гауссовское распределение:

$$\mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon) = \exp \left\{ j \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} \left( \frac{w_1}{\mathbf{v}_1} + \frac{w_2}{\mathbf{v}_2} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} [(jw_1)^2 K_{11} + 2jw_1 jw_2 K_{12} + (jw_2)^2 K_{22}] \right\} \cdot \\ \cdot (\mathbf{R} + j\varepsilon w_1 \mathbf{f}_1 + j\varepsilon w_2 \mathbf{f}_2) + o(\varepsilon)$$

Следовательно, мы знаем вид характеристической функции  $H$ , а из нее можем получить распределение вероятностей  $P(i_1, i_2, k)$ . Искомые же характеристики системы получаются по формуле

$$P(i_1, i_2) = \sum_{k=1}^K P(i_1, i_2, k).$$

## Метод моментов

Также, для данной системы было проведено исследование по методу моментов. Первые моменты совпадают с результатами первой асимптотики

$$M\{i_1(t)\} = \mathbf{m}_1 \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_1} \mathbf{R} \Lambda \mathbf{E}, \quad M\{i_2(t)\} = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{R} \Lambda \mathbf{E},$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{H}(0,0,k)}{\partial u_l} = j m_l(k), \quad \mathbf{m}_l = \{m_l(1), m_l(2), \dots, m_l(K)\}, \quad l = 1, 2.$$

А корреляционный момент подтверждает независимость одномерных случайных процессов  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$

$$M\{i_1(t)i_2(t)\} = \mathbf{m}_{12} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{R} \Lambda^2 \mathbf{E}}{\mu_1 \mu_2} \quad \text{при} \quad M\{i_1(t)\} M\{i_2(t)\} = \frac{\mathbf{R} \Lambda \mathbf{E}}{\mu_1} \frac{\mathbf{R} \Lambda \mathbf{E}}{\mu_2} = \frac{(\mathbf{R} \Lambda \mathbf{E})^2}{\mu_1 \mu_2}.$$

Моменты второго порядка:

$$\mathbf{m}_1^{(2)} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{R} \Lambda \mathbf{E}}{\mu_1} + \frac{\mathbf{R} \Lambda^2 \mathbf{E}}{\mu_1^2}, \quad \mathbf{m}_2^{(2)} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{R} \Lambda \mathbf{E}}{\mu_2} + \frac{\mathbf{R} \Lambda^2 \mathbf{E}}{\mu_2^2}$$

где

$$m_l^{(2)}(k) = -\frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,0,k)}{\partial u_l^2}, \quad \mathbf{m}_l = \{m_l(1), m_l(2), \dots, m_l(K)\}, \quad l = 1, 2$$

### Литература

1. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 225 с.
2. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ. ДОПРЕДЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

*А. А. Назаров, Е. А. Дейс*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Понятие альтернативных (отрицательных заявок) впервые ввел Е. Геленбе в 1991 году. Альтернативной заявка называется в связи с тем, что поступая в систему, уничтожает положительную – при наличии таковых, либо же теряется, не вставая на прибор.

Рассмотрим следующую систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов:

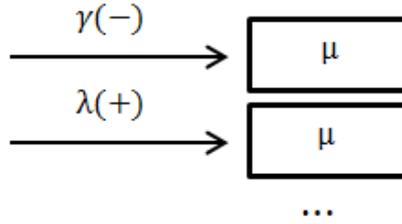


Рис. 1. Система с отрицательными заявками

На вход системы поступает простейший поток с параметрами  $\lambda$  для положительных и  $\gamma$  для отрицательных заявок, время обслуживания каждой положительной заявки случайно и распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ , а альтернативные заявки реализуют один из классов алгоритмов:

1. При поступлении в пустую систему, отрицательная заявка теряется.
2. При поступлении в пустую систему, отрицательная заявка ожидает прихода первой положительной заявки.
3. Отрицательная заявка, поступая в систему, ожидает прихода новой положительной заявки, находящиеся на приборах положительные заявки завершают обслуживание.

1. Система с потерей отрицательных заявок при отсутствии положительных.

Введем случайный процесс  $i(t)$  – число положительных заявок в системе. Обозначим:  $P\{i(t) = 1\} = P_i(t)$ . Процесс  $i(t)$  является марковским, поэтому для распределения вероятностей значений данного процесса можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -P_0(t)\lambda + P_1(t)(\mu + \gamma) \\ P_i'(t) = -P_i(t)(\lambda + i\mu + \gamma) + P_{i+1}(t)((i+1)\mu + \gamma) + P_{i-1}(t)\lambda \end{cases}$$

Или в стационарном режиме (при  $\gamma < \lambda$ ):

$$\begin{cases} 0 = -P_0\lambda + P_1(\mu + \gamma), \\ 0 = -P_i(\lambda + i\mu + \gamma) + P_{i+1}((i+1)\mu + \gamma) + P_{i-1}\lambda. \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы (1) имеет вид:

$$P_i = P_0 \prod_{n=1}^i \frac{\lambda}{\gamma + n\mu}; P_0 = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^i \frac{\lambda}{\gamma + n\mu} \right\}^{-1}$$

2. Система с накоплением заявок в нулевом состоянии.

$l(t)$  – число отрицательных заявок в системе,  $i(t)$  – число положительных заявок в системе. Обозначим  $P\{i(t) = i, l(t) = l\} = P(l, i, t)$ . Процесс  $\{l(t), i(t)\}$  – марковский. Заметим, что  $P(l, i, t) = 0$ , если  $i * l \neq 0$ .

Система уравнений Колмогорова для распределения  $P(l, i)$  вероятностей данного случайного процесса в стационарном режиме имеет вид:

$$\begin{cases} (\lambda + \gamma)P(l,0) = \gamma P(l-1,0) + \lambda P(l+1,0), \\ P(0,i)(\lambda + i\mu + \gamma) = P(0,i+1)((i+1)\mu + \gamma) + P(0,i-1)\lambda. \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы (2):

$$P(l,0) = \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^l P(0,0); P(0,i) = \left(\prod_{n=1}^i \frac{\lambda}{\gamma + n\mu}\right) P(0,0),$$

$$P(0,0) = \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\lambda}} + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^i \frac{\lambda}{\gamma + n\mu} \right\}^{-1}.$$

3. Система с ожиданием положительных заявок отрицательными.

В этом случае  $P(l,i,t) > 0, \forall i, l$ . Система уравнений Колмогорова для этого распределения вероятностей в стационарном режиме записывается следующим образом:

$$\begin{cases} -P(i,l)(\lambda + \gamma + i\mu) + P(i,l-1)\gamma + P(i,l+1)\lambda + P(i+1,l)(i+1)\mu = 0, \\ -P(i,0)(\lambda + \gamma + i\mu) + P(i+1,0)(i+1)\mu + P(i-1,0)\lambda = 0, \\ -P(0,0)(\lambda + \gamma) + P(1,0)\mu + P(0,1)\lambda = 0, \\ -P(0,l)(\lambda + \gamma) + P(0,l+1)\lambda + P(0,l-1)\gamma + P(1,l)\mu = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим

$$H(u,l) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ju} P(i,l); j = \sqrt{-1}. \quad (4)$$

Функции вида (4) будем называть частичными характеристическими функциями для случайного процесса  $\{l(t), i(t)\}$ . Перейдем от системы (3) к системе уравнений для  $H(u,l)$ .

$$\begin{cases} j\mu(1 - e^{ju}) \frac{\partial H(u,0)}{\partial u} - \lambda H(u,1) + [-(\lambda + \gamma) + e^{ju}\lambda] H(u,0) = 0, \\ j\mu(1 - e^{-ju}) \frac{\partial H(u,l)}{\partial u} - (\lambda + \gamma) H(u,l) + \lambda H(u,l+1) + \gamma H(u,l-1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Используя метод моментов, а также обозначая  $H(0,l) = R(l)$  – распределение числа отрицательных заявок в системе, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma)R(l) + \lambda R(l+1) + \gamma R(l-1) = 0, \\ -\lambda R(1) + [-(\lambda + \gamma) + \lambda]R(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Найдем решение методом Хинчина, получим:

$$R(l) = \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^l R(0); R(0) = \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\lambda}}.$$

Из системы (5), для моментов первого порядка система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} (\lambda + \gamma + \mu)m_1(l) + \lambda m_1(l+1) + \gamma m_1(l-1) = 0, \\ (\lambda + \gamma + \mu)m_1(0) + \lambda m_1(1) + R(0)\lambda = 0. \end{cases}$$

Система (5) – система однородных конечно-разностных уравнений с граничным условием, имеющая бесконечное число уравнений.

Решение системы (7) будем искать в виде:  $m_1(l) = \sum_{i=1}^n C_i z_i^l$ .

Характеристическое уравнение для рассматриваемой системы записывается следующим образом:  $(\lambda + \gamma + \mu)z + \lambda z^2 + \gamma = 0$ .

Корнями характеристического уравнения являются  $z_{1,2} = \frac{(\lambda + \gamma + \mu) \pm \sqrt{(\lambda + \gamma + \mu) - 4\lambda\gamma}}{2\lambda}$ , корни вещественные, простые.

Следовательно, решение системы (7) может быть представлено в виде:

$$m_1(l) = C_1 z_1^l + C_2 z_2^l.$$

Используя стандартное условие о том, что моменты  $m_1(l)$  не могут расти по геометрическому закону, можно полагать, что  $C_1 = 0$ .

Решение системы (7) имеет вид:

$$m_1(l) = C_2 z_2^l,$$

где  $z_2 = \frac{(\lambda + \gamma + \mu) - \sqrt{(\lambda + \gamma + \mu) - 4\lambda\gamma}}{2\lambda}$ ;  $C_2 = \frac{\lambda^2 - \lambda(\lambda - \gamma)z_1}{(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda - \gamma)}$ .

В дальнейшем планируется обобщить данные модели на случай произвольного входящего потока, рекуррентного обслуживания, применяя методы асимптотического анализа.

#### Литература

1. Gelenbe E., Glynn P., Sigman K. Queues with negative arrivals // Journal of Applied Probability. 1991. V.28. P. 245-250.
2. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ M|GI|1 С КОНФЛИКТАМИ ЗАЯВОК В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ

*А. А. Назаров, Н. А. Поморцева*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

В настоящей работе рассматривается однолинейная RQ-система с конфликтами заявок. Исследование RQ-систем с ситуацией конфликта подразумевает, что заявка, поступившая в систему и нашедшая прибор занятым и заявка, находящаяся на обслуживании, вступают в конфликт и обе переходят в источник повторных вызовов. Вопросами исследования RQ – систем с конфликтами заявок занимались Г. И. Фалин [3,9], Krishna Ku-

mar B., Vijayalakshmi G., Krishnamoorthy A., Sadiq Basha S. [8],  
 X. Л. Атаджанов, А. А. Назаров [1, 4-7].

### Постановка задачи

Рассмотрим однолинейную RQ-систему (Retrial Queueing System) с источником повторных вызовов (ИПВ), на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром  $\lambda$ , а время полного бесконфликтного обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения  $B(x)$ . Если поступившая заявка застаёт прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки попадают в ситуацию конфликта и переходят ИПВ, где осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\sigma$ . Из ИПВ после случайной задержки каждая заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в ИПВ.

Пусть  $i(t)$  – число заявок в ИПВ,  $k(t)$  определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Введем дополнительную компоненту  $z(t)$  – длина интервала от момента  $t$  до момента окончания полного бесконфликтного обслуживания заявки, стоящей на приборе в момент времени  $t$ , которая определяется только в те моменты, когда  $k(t) = 1$ .

Обозначим  $P\{k(t) = 0, i(t) = i\} = P_0(i, t)$  – вероятность того, что прибор в момент времени  $t$  свободен и в источнике повторных вызовов находится  $i$  заявок, а  $P\{k(t) = 1, i(t) = i, z(t) < z\} = P_1(i, z, t)$  – вероятность того, что прибор в момент времени  $t$  занят, до конца обслуживания заявки, стоящей на приборе в момент времени  $t$ , осталось время, меньшее, чем  $z$  и в источнике повторных вызовов находится  $i$  заявок. Процесс  $\{k(t), i(t), z(t)\}$  изменения во времени состояний данной системы является Марковским. Заметим, что это процесс с переменным числом компонент.

### Система уравнений Колмогорова

Для распределения вероятностей  $\{P_0(i, t), P_1(i, z, t)\}$  состояний  $\{k, i, z\}$  рассматриваемой RQ-системы запишем прямую систему уравнений Колмогорова в стационарном режиме:

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma)P_0(i) + \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} + \lambda P_1(i - 2, \infty) + (i - 1)\sigma P_1(i - 1, \infty) = 0, \\ -(\lambda + i\sigma)[P_1(i, z) - P_1(i, 0)] + \lambda B(z)P_0(i) + (i + 1)\sigma B(z)P_0(i + 1) + \\ + \frac{\partial P_1(i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

где  $P_0(i, t) \equiv P_0(i)$ ,  $P_1(i, z, t) \equiv P_1(i, z)$ .

В этой системе перейдем к частичным характеристическим функциям вида

$$H_0(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_0(i), \quad H_1(u, z) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{juiz} P_1(i, z),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

$$\text{Учитывая, что } \frac{\partial}{\partial u} H_0(u) = j \sum_i i e^{jui} P_0(i), \quad \frac{\partial}{\partial u} H_1(u, z) = j \sum_i i e^{juiz} P_1(i, z)$$

и обозначив  $\rho = \lambda b$ , запишем систему уравнений для частичных характеристических функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} j\sigma b \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} - j\sigma b e^{ju} \frac{\partial H_1(u, \infty)}{\partial u} - \rho H_0(u) + b \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \\ + \rho e^{2ju} H_1(u, \infty) = 0, \\ b \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - b \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} - j\sigma b B(z) e^{-ju} \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} + \\ + j\sigma b \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial u} + \rho B(z) H_0(u) - \rho H_1(u, z) = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

### Вывод асимптотических уравнений

Систему (1) будем решать методом асимптотического анализа в условии большой загрузки, то есть при  $\rho \uparrow S$ , где  $\rho$  – загрузка системы, а  $S$  – пропускная способность системы.

Определение. Пропускной способностью  $S$  системы называется точная верхняя граница тех значений загрузки, при которых в системе существует стационарный режим.

Введем обозначения  $\rho = S - \varepsilon$ ,  $u = \varepsilon w$ ,  $H_0(u) = F_0(w, \varepsilon)$ ,  $H_1(u, z) = F_1(w, z, \varepsilon)$ , тогда система (1) переписется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon(S - \varepsilon) F_0(w, \varepsilon) + j\sigma b \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + b\varepsilon \frac{\partial F_1(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} + \\ + \varepsilon(S - \varepsilon) e^{2jw\varepsilon} F_1(w, \infty, \varepsilon) - j\sigma b e^{jw\varepsilon} \frac{\partial F_1(w, \infty, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \\ b\varepsilon \frac{\partial F_1(w, z, \varepsilon)}{\partial z} - b\varepsilon \frac{\partial F_1(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} + \varepsilon(S - \varepsilon) B(z) F_0(w, \varepsilon) - \\ - j\sigma b B(z) e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} - \varepsilon(S - \varepsilon) F_1(w, z, \varepsilon) + j\sigma b \frac{\partial F_1(w, z, \varepsilon)}{\partial w} = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Для функций  $F_0(w, \varepsilon)$ ,  $F_1(w, z, \varepsilon)$  запишем разложения:

$$F_0(w, \varepsilon) = F_0(w) + \varepsilon f_0(w) + \varepsilon^2 g_0(w) + O(\varepsilon^3),$$

$$F_1(w, z, \varepsilon) = F_1(w, z) + \varepsilon f_1(w, z) + \varepsilon^2 g_1(w, z) + O(\varepsilon^3).$$

Обозначая  $f_1(w, \infty) = f_1(w)$ ,  $g_1(w, \infty) = g_1(w)$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему шести уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} j\sigma b \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} - j\sigma b \frac{\partial F_1(w, \infty)}{\partial w} = 0, \\ -j\sigma b B(z) \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} + j\sigma b \frac{\partial F_1(w, z)}{\partial w} = 0, \\ j\sigma b \left[ \frac{\partial f_0(w)}{\partial w} - \frac{\partial f_1(w)}{\partial w} \right] + b \frac{\partial F_1(w, 0)}{\partial z} + \sigma b w \frac{\partial F_1(w, \infty)}{\partial w} = 0, \\ j\sigma b \left[ \frac{\partial f_1(w, z)}{\partial w} - B(z) \frac{\partial f_0(w)}{\partial w} \right] + b \frac{\partial F_1(w, z)}{\partial z} - b \frac{\partial F_1(w, 0)}{\partial z} - \sigma b w B(z) \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} = 0, \\ j\sigma b \left[ \frac{\partial g_0(w)}{\partial w} - \frac{\partial g_1(w)}{\partial w} \right] + b \frac{\partial f_1(w, 0)}{\partial z} + S(f_1(w) - f_0(w)) + 2jw S F_1(w, \infty) + \\ + \sigma b w \frac{\partial f_1(w)}{\partial w} + \frac{j\sigma b w^2}{2} \frac{\partial F_1(w, \infty)}{\partial w} = 0, \\ j\sigma b \left[ \frac{\partial g_1(w, z)}{\partial w} - B(z) \frac{\partial g_0(w)}{\partial w} \right] + b \frac{\partial f_1(w, z)}{\partial z} - b \frac{\partial f_1(w, 0)}{\partial z} + S(B(z)f_0(w) - f_1(w, z)) - \\ - \sigma b w B(z) \frac{\partial f_0(w)}{\partial w} + \frac{j\sigma b w^2}{2} B(z) \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} = 0. \end{array} \right.$$

для шести неизвестных функций, из которых требуется найти только одну  $F(w) = F_0(w) + F_1(w)$ .

Для нахождения этой функции кроме имеющихся шести уравнений необходимо еще одно, которое получено следующим образом. Складываем уравнения системы (2) и полагаем  $z \rightarrow \infty$ , из результата выписываем коэффициенты при  $\varepsilon$ :

$$j\sigma b \left[ \frac{\partial g_0(w)}{\partial w} - \frac{\partial g_1(w)}{\partial w} \right] + \sigma b w \frac{\partial f_0(w)}{\partial w} + 2S f_1(w) + (jwS - 2)F_1(w, \infty) - \\ - \frac{j\sigma b w^2}{2} \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} = 0.$$

Решая полученные семь уравнений, можно показать, что пропускная способность системы

$$S = \frac{bB'(0)}{2},$$

а характеристическая функция числа заявок в ИПВ имеет вид

$$F(w) = (1 - jwS)^{\frac{S\sigma - SB'(0) - bB''(0)}{2S\sigma}},$$

то есть является характеристической функцией гамма-распределения с параметрами масштаба  $\beta = \frac{1}{S}$  и формы  $\alpha = \frac{S\sigma - SB'(0) - bB''(0)}{2S\sigma}$ .

### Заключение

Методом асимптотического анализа в условии большой загрузки была исследована система массового обслуживания M|GI|1 с конфликтами заявок. В результате данного исследования найдено значение пропускной

способности системы и получено, что распределение вероятностей числа заявок в ИПВ можно аппроксимировать гамма-распределением в этом асимптотическом условии.

#### Литература

1. Гарайшина И. Р., Моисеева С. П., Назаров А. А. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.
2. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005.
3. Artalejo J. R., Falin G. I., On the characteristics of the M/G/1 retrial queue, Nav. Res. Logist. 47 (1996) 1147–1161.
4. Назаров А. А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.
5. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
6. Назаров А. А., Судыко Е. А. Исследование марковской RQ-системы с конфликтами заявок и простейшим входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3(12). – С. 97–106.
7. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов: учебное пособие. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.
8. Krishna Kumar B., Vijayalakshmi G., Krishnamoorthy A., Sadiq Basha S. A single server feedback retrial queue with collisions. // Computer and operations research. 2010. – № 37. – P. 1247-1255.
9. Falin G. I., Tempeton J. G. C. Retrial Queues. – London: Chapman and Hall, 1997. – 328 p.

### **МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ 2-ГО ПОРЯДКА НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ RQ-СИСТЕМЫ $M|M|1$**

*А. А. Назаров, Е. А. Фёдорова*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Математическими моделями реальных информационных систем и сетей сотовой связи являются системы массового обслуживания с источником повторных вызовов (ИПВ) или так называемые Retrial Queueing System (RQ-системы) [1, 2].

В предыдущих работах [3, 4] для исследования однолинейных RQ-систем был предложен метод асимптотического анализа в условии большой загрузки. Однако, было показано, что этот метод имеет достаточно узкую область применимости: при загрузке  $\rho > 0.95$  расстояние Колмогорова  $\Delta \leq 0.05$ . В связи с этим предложено увеличить точность аппроксимации в виде получения асимптотики более высокого порядка.

При этом стоит отметить, что данные результаты не вытекают из систем асимптотических уравнений, полученных ранее [3, 4]. Таким обра-

зом для получения асимптотики 2-го порядка необходимо проводить заново исследование рассмотренных систем.

Рассмотрим (рис. 1) однолинейную систему с ИПВ, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром  $\lambda$ , время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ . Если поступившая заявка застаёт прибор свободным, то оно занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\sigma$ . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки.

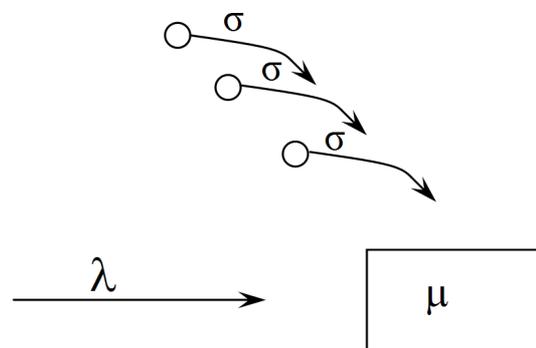


Рис. 1. Однолинейная RQ-система

Пусть  $i(t)$  – число заявок в ИПВ, а  $k(t)$  – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим  $P\{k(t)=k, i(t)=i\} = P(k, i, t)$  - вероятность того, что прибор в момент времени  $t$  находится в состоянии  $k$  и в источнике повторных вызовов находится  $i$  заявок.

Причем процесс  $\{k(t), i(t), z(t)\}$  изменения состояний данной системы во времени является Марковским с переменным числом компонент. Тогда ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы.

Для распределения вероятностей  $P(k, i, t)$  состояний рассматриваемой RQ-системы была составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова, которая в стационарном режиме имеет вид:

$$\begin{cases} \mu P(1, i) - (\lambda + i\sigma)P(0, i) = 0, \\ \lambda P(0, i) + (i+1)\sigma \cdot P(0, i+1) - (\lambda + \mu)P(1, i) + \lambda P(1, i-1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $P(k, i, t) \equiv P(k, i)$ .

Перейдем к характеристическим функциям  $H(k, u) = \sum_i e^{ju} P(k, i)$ .

Введем параметр  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , характеризующий загрузку системы. Тогда система уравнений (1) для характеристических функций переписывается в виде:

$$\begin{cases} H(1,u) - \rho H(0,u) = -\frac{\sigma}{\mu} j \frac{\partial H(0,u)}{\partial u}, \\ \rho H(0,u) + (\rho(e^{ju} - 1) - 1)H(1,u) = j \frac{\sigma}{\mu} e^{-ju} \frac{\partial H(0,u)}{\partial u}. \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы (2) было получено методом асимптотического анализа в условиях большой загрузки, то есть при  $\frac{\lambda}{\mu} = \rho \uparrow 1$  или при  $\varepsilon \downarrow 0$ , где  $\varepsilon = 1 - \rho > 0$  – бесконечно малая величина.

Введем обозначения  $u = \varepsilon w$ ,  $H(0,u) = \varepsilon G(w,\varepsilon)$ ,  $H(1,u) = F(w,\varepsilon)$ . Тогда система (2) переписывается в виде:

$$\begin{cases} F(w,\varepsilon) - (1-\varepsilon)\varepsilon G(w,\varepsilon) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial G(w,\varepsilon)}{\partial w} = 0, \\ (1-\varepsilon)\varepsilon G(w,\varepsilon) + ((1-\varepsilon)(e^{jw\varepsilon} - 1) - 1)F(w,\varepsilon) - j \frac{\sigma}{\mu} e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial G(w,\varepsilon)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Вывод асимптотических уравнений проведем в несколько этапов.

**1.** В (3) совершим предельный переход при  $\varepsilon \downarrow 0$ , обозначив  $F(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(w,\varepsilon)$  и  $G(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(w,\varepsilon)$ . Получим:

$$\begin{cases} F(w) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial G(w)}{\partial w} = 0, \\ -F(w) - j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial G(w)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

**2.** Запишем следующее разложение функций:

$$G(w,\varepsilon) = G(w) + \varepsilon \cdot g(w) + \varepsilon^2 \cdot \psi(w) + O(\varepsilon^3), \quad (5)$$

$$F(w,\varepsilon) = F(w) + \varepsilon \cdot f(w) + \varepsilon^2 \cdot \varphi(w) + O(\varepsilon^3), \quad (6)$$

где  $O(\varepsilon^3)$  – бесконечно малая величина порядка  $\varepsilon^3$ .

Подставим разложения (5), (6) в систему (3). Разложим  $e^{-jw\varepsilon}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\varepsilon = 0$ :  $e^{-jw\varepsilon} = 1 - jw\varepsilon + \frac{(jw\varepsilon)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ .

В результате несложных преобразований и совершая предельный переход при  $\varepsilon \downarrow 0$ , можно записать следующие системы уравнений при различных степенях  $\varepsilon$ :

$$\begin{cases} f(w) - G(w) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial g(w)}{\partial w} = 0, \\ G(w) - f(w) - j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial g(w)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \varphi(w) + G(w) - g(w) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial \psi(w)}{\partial w} = 0, \\ -G(w) + g(w) - jwF(w) + jwf(w) - \\ -\varphi(w) + j \frac{\sigma}{\mu} jw \frac{\partial g(w)}{\partial w} - j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial \psi(w)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

3. Суммировав уравнения системы (3), имеем:

$$(1 - \varepsilon)(e^{jw\varepsilon} - 1)F(w, \varepsilon) + j \frac{\sigma}{\mu} (1 - e^{-jw\varepsilon}) \frac{\partial G(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0.$$

Поделив на общий множитель, разложим  $e^{jw\varepsilon}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\varepsilon = 0$ :  $e^{jw\varepsilon} = 1 + jw\varepsilon + \frac{(jw\varepsilon)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ . Затем подставив разложения (5) и (6), имеем:

$$\begin{aligned} & -F(w) + (1 - \varepsilon) \cdot f(w) + \varepsilon(1 - \varepsilon) \cdot \varphi(w) + j \frac{\sigma}{\mu} (-jw + \frac{(jw)^2}{2} \varepsilon) \frac{\partial G(w)}{\partial w} + \\ & + j \frac{\sigma}{\mu} (1 - jw\varepsilon + \frac{(jw\varepsilon)^2}{2}) \frac{\partial g(w)}{\partial w} + j \frac{\sigma}{\mu} (1 - jw\varepsilon + \frac{(jw\varepsilon)^2}{2}) \varepsilon \frac{\partial \psi(w)}{\partial w} = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Совершив придельный переход при  $\varepsilon \downarrow 0$ , можно записать следующее уравнение:

$$-F(w) + f(w) - j \frac{\sigma}{\mu} jw \frac{\partial G(w)}{\partial w} + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial g(w)}{\partial w} = 0. \quad (10)$$

Подставляя (7) во второе уравнение системы (6), запишем:

$$\begin{cases} \varphi(w) + G(w) - g(w) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial \psi(w)}{\partial w} = 0, \\ -G(w) + g(w) - \varphi(w) - j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial \psi(w)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

4. Подставим в (9) уравнения (10) и (11) и разделим на  $\varepsilon$ . Совершая придельный переход при  $\varepsilon \downarrow 0$ , можно получить

$$-f(w) + \varphi(w) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{(jw)^2}{2} \frac{\partial G(w)}{\partial w} - j \frac{\sigma}{\mu} jw \frac{\partial g(w)}{\partial w} + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial \psi(w)}{\partial w} = 0. \quad (12)$$

В силу (7), (8), (10)-(12) получили восемь уравнений, среди которых (7) и (8), (11) – три пары одинаковых. Таким образом, имеем систему из пяти уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(w) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial G(w)}{\partial w} = 0, \\ -F(w) + f(w) - j \frac{\sigma}{\mu} jw \frac{\partial G(w)}{\partial w} + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial g(w)}{\partial w} = 0, \\ f(w) - G(w) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial g(w)}{\partial w} = 0, \\ G(w) - g(w) + \varphi(w) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial \psi(w)}{\partial w} = 0, \\ -f(w) + \varphi(w) + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{(jw)^2}{2} \frac{\partial G(w)}{\partial w} - j \frac{\sigma}{\mu} jw \frac{\partial g(w)}{\partial w} + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial \psi(w)}{\partial w} = 0. \end{array} \right. \quad (13)$$

Характеристическая функция  $H(u) = H(1, u) + H(0, u)$  в условиях большой загрузки может быть приближенно определена равенством:

$$H(u) \approx h(u) = F(w) + \varepsilon \{G(w) + f(w)\}.$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо найти функции  $F(w)$ ,  $G(w)$  и  $f(w)$  из полученной системы уравнений (13).

#### Исследование системы полученных уравнений

Суммируем 1-е и 2-е уравнения системы (13):

$$f(w) + j \frac{\sigma}{\mu} (1 - jw) \frac{\partial G(w)}{\partial w} + j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial g(w)}{\partial w} = 0. \quad (14)$$

Тогда подставив (14) в 3-е уравнение, получим дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно  $G(w)$ :

$$G(w) + j \frac{\sigma}{\mu} (1 - jw) \frac{\partial G(w)}{\partial w} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:  $G(w) = c(1 - jw)^{-\frac{\mu}{\sigma}}$ , где  $c = const$ . Тогда из 1-го уравнения:

$$F(w) = -j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\mu}{\sigma} c(1 - jw)^{\frac{\mu}{\sigma} - 1} j = c(1 - jw)^{\frac{\mu}{\sigma} - 1},$$

Так как  $h(0) \equiv 1$ , то можно полагать, что  $F(0) \equiv 1$  и  $G(0) + f(0) \equiv 0$ .

Тогда искомые функции имеют вид:  $F(w) = (1 - jw)^{\frac{\mu + \sigma}{\sigma}}$ ,  $G(w) = (1 - jw)^{-\frac{\mu}{\sigma}}$ .

Найдем функцию  $f(w)$  из трех последних уравнений системы (13). Из 3-го выразим  $f(w)$ :

$$f(w) = -j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial g(w)}{\partial w} + G(w). \quad (14)$$

Вычтем 4-е уравнение из 5-го системы (13) и подставим в полученное выражение (14):

$$g(w) + j \frac{\sigma}{\mu} (1 - jw) \frac{\partial g(w)}{\partial w} = 2G(w) - j \frac{\sigma}{\mu} \frac{(jw)^2}{2} \frac{\partial G(w)}{\partial w}.$$

Откуда получаем следующее уравнение:

$$g'(w) - j \frac{\mu}{\sigma} (1 - jw)^{-1} g(w) = -j \frac{\mu}{\sigma} (1 - jw)^{\frac{\mu}{\sigma} - 1} \left[ 2 + \frac{(jw)^2}{2(1 - jw)} \right]. \quad (15)$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами относительно  $g(w)$ . Решение будем искать в виде произведения:  $g(w) = C(w)(1 - jw)^{\frac{\mu}{\sigma}}$

Подставляя вид функции в (15), можно получить следующее:

$$C'(w) = -j \frac{\mu}{\sigma} (1 - jw)^{-1} \left[ 2 + \frac{(jw)^2}{2(1 - jw)} \right].$$

Нетрудно показать, что

$$(1 - jw)^{-1} \left[ 2 + \frac{(jw)^2}{2(1 - jw)} \right] = \frac{1}{(1 - jw)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - jw)^2}.$$

Отсюда

$$C(w) = -j \frac{\mu}{\sigma} \int_0^w (1 - jv)^{-1} \left[ 2 + \frac{(jv)^2}{2(1 - jv)} \right] dv = \frac{\mu}{\sigma} \left( \ln(1 - jw) - \frac{1}{2} jw - \frac{1}{2(1 - jw)} + \frac{1}{2} \right).$$

Тогда решение:

$$g(w) = \frac{\mu}{\sigma} \left( \ln(1 - jw) - \frac{1}{2} jw - \frac{1}{2(1 - jw)} + \frac{1}{2} \right) (1 - jw)^{\frac{\mu}{\sigma}}.$$

Из (14) получаем вид функции  $f(w)$ . Найдем выражение  $G(w) + f(w)$ :

$$\begin{aligned} G(w) + f(w) &= -j \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial g(w)}{\partial w} + 2G(w) = \\ &= (1 - jw)^{\frac{\mu}{\sigma} - 1} \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \ln(1 - jw) - jw - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\sigma} + 1 \right) jw - \left( \frac{\mu}{\sigma} + 1 \right) \frac{1}{2(1 - jw)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\sigma} + 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Совершая преобразования над найденным выражением, получим следующий конечный вид суммы функций  $G(w) + f(w)$ :

$$G(w) + f(w) = (1 - jw)^{\frac{\mu}{\sigma} - 1} \left\{ -jw + \frac{\mu}{\sigma} \ln(1 - jw) - \left( \frac{\mu}{\sigma} + 1 \right) \frac{jw - \frac{(jw)^2}{2}}{1 - jw} \right\}.$$

Вернемся к переменной  $u = \varepsilon w$  и параметру  $\rho$ .

$$h(u) = F\left(\frac{u}{1 - \rho}\right) + (1 - \rho) \left\{ G\left(\frac{u}{1 - \rho}\right) + f\left(\frac{u}{1 - \rho}\right) \right\} =$$

$$= \left(1 - \frac{ju}{1-\rho}\right)^{\frac{\mu}{\sigma}-1} \left\{ 1 - \frac{ju}{1-\rho} + \frac{\mu}{\sigma} \ln\left(1 - \frac{ju}{1-\rho}\right) - \left(\frac{\mu}{\sigma} + 1\right) \frac{\frac{ju}{1-\rho} - \frac{\left(\frac{ju}{1-\rho}\right)^2}{2}}{1 - \frac{ju}{1-\rho}} \right\}.$$

Можно показать, что данный результат совпадает с первыми слагаемыми разложения допредельной характеристической функции [1].

Таким образом, в работе было проведено исследование RQ-системы M|M|1 методом асимптотического анализа 2-го порядка в условии большой загрузки. Численное сравнение асимптотического (2-го порядка) и допредельного распределений показало, что область применения метода увеличивается в 4 раза: при загрузке  $\rho > 0.8$  расстояние Колмогорова  $\Delta \leq 0.05$ . Следовательно, целесообразно увеличить точность метода асимптотического анализа в условии большой загрузки для более сложных систем (например, MMPP|GI|1, MAP|GI|1).

#### Литература

1. Falin G.I, Templeton J.G.C. Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997.
2. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Springer, 2008.
3. Назаров А. А., Моисеева Е. А. Исследование RQ-системы M|GI|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Материалы международной научной конференции «Современные вероятностные методы анализа, проектирования и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», 22. – Минск: Издательский центр БГУ, 2013. – С. 106-113
4. Назаров А. А., Моисеева Е. А. Исследование RQ-системы MMPP|M|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Известия ТПУ. Математика и механика. Физика, 322, 2. – Томск: Изд-во ТПУ, 2013. – С. 19-23.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ RQ-СИСТЕМЫ M|GI|1 С ВЫТЕСНЕНИЕМ

*А. А. Назаров, Я. Е. Черникова*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

В теории систем массового обслуживания [1-3] различают системы с очередью, с потерями, смешанные, но особый интерес представляют системы с повторными вызовами (Retrial Queue Systems или RQ-системы). Это обусловлено их широким практическим применением. Системы с повторными вызовами используют для анализа и исследования процессов функционирования телекоммуникационных и компьютерных систем, проектировании телефонных сетей, мобильных сотовых радиосетей и во многих других областях.

Настоящая работа посвящена исследованию RQ-системы M|GI|1 с вытеснением заявки из прибора. Исследование проводится при помощи метода асимптотического анализа [14] в условии большой задержки.

Рассмотрим RQ-систему с источником повторных вызовов (ИПВ) (рис. 1).

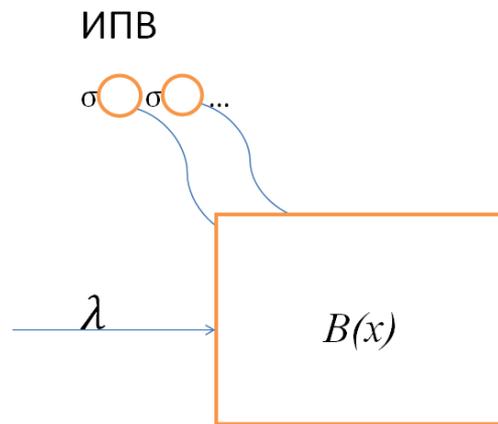


Рис. 1. RQ-система M|GI|1 с вытеснением

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени с функцией распределения  $B(x)$ . Если прибор занят, то поступившая заявка вытесняет обслуживаемую и сама встает на прибор, а заявка, которая обслуживалась переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\sigma$ . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь встает на прибор. Если прибор свободен, то заявка занимает его на случайное время обслуживания, если же он занят, то заявка из ИПВ вытесняет обслуживаемую, которая уходит в ИПВ.

Обозначим  $i(t)$  – число заявок в ИПВ,  $k(t)$  определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{прибор свободен,} \\ 1, & \text{прибор занят.} \end{cases}$$

Ставится задача исследования процесса  $\{k(t), i(t)\}$ . Так как исследуемый процесс не является марковским, то рассмотрим процесс с переменным числом компонент.

Если  $k(t) = 0$ , то рассматриваем процесс  $\{k(t), i(t)\}$ . Если  $k(t) = 1$ , то рассматриваем процесс  $\{k(t), i(t), z(t)\}$ , где  $z(t)$  остаточное время от момента  $t$  до момента окончания обслуживания.

Обозначим  $P\{k(t) = 0, i(t) = i\} = P(0, i, t)$  вероятность того, что прибор в момент времени  $t$  находится в состоянии 0 и в источнике повторных вызовов находится  $i$  заявок;  $P\{k(t) = 1, i(t) = i, z(t) < z\} = P(1, i, z, t)$  вероятность того, что прибор в момент времени  $t$  находится в состоянии 1, остаточное время обслуживания меньше  $z$  и в источнике повторных вызовов находится  $i$  заявок.

Для распределения вероятностей  $\{P(0,i,t), P(1,i,z,t)\}$  получим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова, полагая, что система функционирует в стационарном режиме

Запишем систему для стационарного распределения:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P(1,i,z)}{\partial z} + \frac{\partial P(1,i,0)}{\partial z} = \lambda B(z)P(0,i) - (\lambda + i\sigma)P(1,i,z) + \\ + i\sigma B(z)P(1,i,\infty) + \lambda B(z)P(1,i-1,\infty) + (i+1)\sigma B(z)P(0,i+1), \\ -\frac{\partial P(1,i,0,t)}{\partial z} = -(\lambda + i\sigma)P(0,i). \end{cases} \quad (1)$$

Перейдем в системе (1) к частичным характеристическим функциям.

Система уравнений переписывается в виде:

$$\begin{cases} -\frac{\partial H(1,u,z)}{\partial z} + \frac{\partial H(1,u,0)}{\partial z} = H(0,u)\lambda B(z) - \lambda H(1,u,z) + j\sigma \frac{\partial H(1,u,z)}{\partial u} - \\ - j\sigma B(z) \frac{\partial H(1,u)}{\partial u} - j\sigma B(z)e^{-ju} \frac{\partial H(0,u)}{\partial u} + \lambda B(z)H(1,u), \\ -\frac{\partial H(1,u,0)}{\partial u} = -\lambda H(0,u) + j\sigma \frac{\partial H(0,u)}{\partial u}. \end{cases} \quad (2)$$

Аналитически данную систему решить затруднительно. Будем решать ее методом асимптотического анализа в условии большой задержки ( $\sigma \rightarrow 0$ ).

### Асимптотика первого порядка

В системе (2) сделаем замены  $\sigma = \varepsilon, u = \varepsilon w, H(0,u) = F_1(0,w,\varepsilon), H(1,u,z) = F_1(1,w,z,\varepsilon)$  и получим

$$\begin{cases} \lambda B(z)F_1(0,w,\varepsilon) - \lambda F_1(1,w,z,\varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial F_1(1,w,z,\varepsilon)}{\partial(w\varepsilon)} - j\varepsilon B(z) \frac{\partial F_1(1,w,\infty,\varepsilon)}{\partial(w\varepsilon)} - \\ - j\varepsilon B(z)e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial F_1(0,w,\varepsilon)}{\partial(w\varepsilon)} + \lambda B(z)e^{jw\varepsilon} F_1(1,w,\infty,\varepsilon) = \\ = -\frac{\partial F_1(1,w,z,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(1,w,0,\varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^2), \\ -\lambda F_1(0,w,\varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial F_1(0,w,\varepsilon)}{\partial(w\varepsilon)} = -\frac{\partial F_1(1,w,0,\varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (3)$$

Сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 1.** Предельное (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) значение  $\{F_1(0,w), F_1(1,w,z)\}$  решения  $\{F_1(0,w,\varepsilon), F_1(1,w,z,\varepsilon)\}$  системы уравнений (3) имеет вид

$$\begin{aligned} F_1(0,w) &= R_0 e^{jw\kappa_1}, \\ F_1(1,w,z) &= R_1(z) e^{jw\kappa_1}, \end{aligned}$$

где величины  $R_0, R_1(z)$  удовлетворяют следующим выражениям:

$$R_0 = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda + \kappa_1)z} dB(z),$$

$$R_1(z) = e^{(\lambda + \kappa_1)z} (\lambda + \kappa_1) \int_0^z e^{-(\lambda + \kappa_1)x} (R_0 - B(x)) dx,$$

а  $\kappa_1$  является решением уравнения

$$\lambda = (\lambda + \kappa_1) \int_0^{\infty} e^{-(\lambda + \kappa_1)x} dB(x).$$

### Асимптотика второго порядка

Для более детального исследования рассматриваемой RQ-системы, найдем асимптотику второго порядка. В системе (2) выполним замены:

$$H(0, u) = H_2(0, u) e^{\frac{j u}{\sigma} \kappa_1}, \quad (4)$$

$$H(1, u, z) = H_2(1, u, z) e^{\frac{j u}{\sigma} \kappa_1},$$

Заменим

$$\sigma = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(0, u) = F_2(0, w, \varepsilon), \quad H_2(1, u, z) = F_2(1, w, z, \varepsilon). \quad (5)$$

получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda B(z) F_2(0, w, \varepsilon) - \lambda F_2(1, w, z, \varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial F_2(1, w, z, \varepsilon)}{\partial w} - \\ - \kappa_1 F_2(1, w, z, \varepsilon) - j\varepsilon B(z) \frac{\partial F_2(1, w, \infty, \varepsilon)}{\partial w} + \kappa_1 B(z) F_2(1, w, \infty, \varepsilon) - \\ - j\varepsilon B(z) e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial F_2(0, w, \varepsilon)}{\partial w} + \kappa_1 B(z) e^{-jw\varepsilon} F_2(0, w, \varepsilon) + \\ + \lambda B(z) e^{jw\varepsilon} F_2(1, w, \infty, \varepsilon) = -\frac{\partial F_2(1, w, z, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(1, w, 0, \varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^2), \\ -\lambda F_2(0, w, \varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial F_2(0, w, \varepsilon)}{\partial w} - \kappa_1 F_2(0, w, \varepsilon) = -\frac{\partial F_2(1, w, 0, \varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^2). \end{array} \right. \quad (6)$$

Сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Предельное (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) значение  $\{F_2(0, w), F_2(1, w, z)\}$  решения  $\{F_2(0, w, \varepsilon), F_2(1, w, z, \varepsilon)\}$  системы уравнений (6) имеет вид

$$F_2(0, w) = R_0 \Phi_2(w),$$

$$F_2(1, w, z) = R_1(z) \Phi_2(w),$$

где

$$\Phi_2(w) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2\right\},$$

$$\kappa_2 = \frac{\lambda R_1}{(R_0 - R_1^*(\lambda + \kappa_1))},$$

величины  $R_0, R_1(z), R_1, R_1^*(\lambda + \kappa_1)$  удовлетворяют следующим выражениям

$$R_0 = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\kappa_1)z} dB(z) = B^*(\lambda + \kappa_1),$$

$$R_1(z) = e^{(\lambda+\kappa_1)z} (\lambda + \kappa_1) \int_0^z e^{-(\lambda+\kappa_1)x} (R_0 - B(x)) dx,$$

$$R_1 = 1 - R_0,$$

$$R_1^*(\lambda + \kappa_1) = \int_0^{\infty} z e^{-(\lambda+\kappa_1)z} dB(z).$$

Найдем характеристическую функцию  $h(u)$  числа заявок в ИПВ. Выполнив обратные к (5) замены, получим

$$h(u) = (H_2(0, u) + H_2(1, u, \infty)) e^{j \frac{u}{\sigma} \kappa_1},$$

где

$$H_2(0, u) \approx R_0 \Phi_2\left(\frac{u}{\sqrt{\sigma}}\right),$$

$$H_2(1, u, \infty) \approx R_1 \Phi_2\left(\frac{u}{\sqrt{\sigma}}\right),$$

$$h(u) = \Phi_2\left(\frac{u}{\sqrt{\sigma}}\right) e^{j \frac{u}{\sigma} \kappa_1},$$

$$h(u) = \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2 \kappa_2}{2 \sigma}\right\}.$$

Мы получили характеристическую функцию нормального распределения с математическим ожиданием  $m = \frac{\kappa_1}{\sigma}$  и дисперсией  $D = \frac{\kappa_2}{\sigma}$ .

#### Литературы

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М. : КомКнига, 2007. – 336 с.
2. Кёниг Д., Рыков В., Штойян Д. Теория массового обслуживания (основной курс: марковские модели, методы марковизации): учеб. пос. по математике для студентов специальности 0647 «Прикладная математика». – М., 1979.
3. Кёниг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания. – М. : Радио и связь, 1981.
4. Гоштони Г. Сравнение вычисленных и моделированных результатов для пучков соединительных линий при наличии повторных попыток установления связи // 8-ой ИТС, 1977. № 1. Р. 1-16.
5. Templeton J. G. C. (Ed.) Retrial Queues // Queueing Systems 7, 1990. – №2. – Р. 125-227.
6. Falin G. I., Templeton J. G. C. Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997.

# ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ $M|GI|1|PH$ С ФАЗОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОВТОРНОГО ВРЕМЕНИ

*А. А. Назаров, Н. И. Яковлев*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

В работе рассмотрена RQ-система (Retrial Queueing System) с фазовым распределением повторного времени.

Актуальность исследований подобных систем определяется фундаментальной ролью повторного обращения заявок к обслуживающему прибору в таких реальных обслуживающих системах как: классические телефонные системы [5], колл-центры [6], мобильные телефонные системы [7], локальные компьютерные сети, управляемые протоколами случайного множественного доступа [8] и других коммуникационных систем.

Исследование RQ-систем с неэкспоненциальным повторным временем мотивировано реальными компьютерными и телекоммуникационными сетями, в которых повторное время вряд ли экспоненциально.

Для RQ-системы  $M|GI|1$  классическую повторную схему мы обобщаем, полагая, что повторное время (время пребывания заявки в источнике повторных вызовов) имеет PH-распределение или, как его еще называют, распределение фазового типа, поэтому в обозначениях Кендалла рассматриваемую систему массового обслуживания можно записать в виде  $M|GI|1|PH$ .

## 1. Математическая модель

В качестве математической модели RQ-системы рассмотрим марковскую однолинейную систему массового обслуживания. Имеется прибор, обслуживающий заявки случайное время, функция распределения которого равна  $B(x)$ . На вход системы поступает простейший пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda$ . Заявка, придя из потока, осуществляет попытку захвата прибора. Если прибор свободен, то попытка считается удачной и заявка встает на обслуживание. Если же прибор занят, то заявка отправляется в источник повторных вызовов, где получает случайное время задержки, распределенное согласно PH-закону с параметрами  $(\theta, V)$ , по истечении которого она опять осуществляет попытку захвата прибора. Подробное описание распределения фазового типа приведено в работе [4].

Пусть  $i_n(t)$  – число заявок на  $n$ -ой фазе PH-распределения,  $n = 1, 2, \dots, N$ , а  $k(t)$  – определяет состояние прибора как

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим

$$P\{k(t) = 0, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, \dots, i_N(t) = i_N\} = P_0(i_1, i_2, \dots, i_N, t) = P_0(i, z, t),$$

$$P\{k(t) = 1, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, \dots, i_N(t) = i_N, z(t) < z\} = P_1(i_1, i_2, \dots, i_N, z, t) = P_1(i, z, t)$$

– вероятность того, что в момент времени  $t$  прибор находится в состоянии  $k$  и в источнике повторных вызовов находится  $i$  заявок на каждой из фаз

РН-распределения, где  $i = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ ; при этом процесс  $z(t)$  является процессом остаточного времени обслуживания заявки на приборе.

Требуется найти распределение вероятностей значений процесса  $\sum i_n$  – числа заявок в ИПВ. Этот процесс является немарковским, поэтому его исследование выполним методом введения дополнительных компонент, рассматривая цепь Маркова  $\{k(t), \mathbf{i}(t), z(t)\}$  с переменным числом компонент и для распределения вероятностей  $P_0\{i, t\}, P_1(i, z, t)$  ее состояний составим систему уравнений Колмогорова и запишем ее для стационарного распределения

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \sum_{k=1}^N \theta_{k,0} i_k + \sum_{k=1}^N \sum_{v \neq k} \theta_{k,v} i_k) P_0(i) + \sum_{k=1}^N (i_k + 1) \sum_{v \neq k} \theta_{k,v} P_0(i + e_k - e_v) + \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} = 0, \\
& \frac{\partial P_1(i, z)}{\partial z} - \left[ \lambda + \sum_{k=1}^N i_k \sum_{v \neq k} (\theta_{k,v} V_v + \theta_{k,v}) \right] P_1(i, z) - \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} + \\
& + \sum_{k=1}^N (i_k + 1) \theta_{k,0} P_0(i + e_k) B(z) + \lambda P_0(i) B(z) + \\
& + \sum_{k=1}^N (i_k + 1) \sum_{v \neq k} (\theta_{k,0} V_v + \theta_{k,v}) P_1(i + e_k - e_v, z) + \lambda \sum_{k=1}^N V_k P_1(i - e_k, z) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

## 2. Характеристическая функция распределения вероятностей состояний системы

Применяя систему уравнений Колмогорова (1), составим систему уравнений для определения частичных характеристических функций

$$\begin{aligned}
H_0(u) &= \sum_i P_0(i) \exp \left\{ \sum_{k=1}^N u_k i_k \right\}, \\
H_1(u, z) &= \sum_i P_1(i, z) \exp \left\{ \sum_{k=1}^N u_k i_k \right\},
\end{aligned}$$

где  $u$  является вектором с компонентами  $u_1, u_2, \dots, u_N$ , а  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Из (1) получим

$$\left\{ \begin{aligned}
& -\lambda H_0(u) + \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + j \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_0(u)}{\partial u_k} \theta_{k,0} + j \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_0(u)}{\partial u_k} \sum_{v \neq k} \theta_{k,v} (1 - e^{j(u_v - u_k)}) = 0, \\
& \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - \lambda H_1(u, z) - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \lambda H_0(u) B(z) - \\
& - j \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_0(u)}{\partial u_k} e^{-ju_k} \theta_{k,0} B(z) + \lambda H_1(u, z) \sum_{k=1}^N V_k e^{ju_k} + \\
& + j \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial u_k} \sum_{v \neq k} (\theta_{k,0} V_v + \theta_{k,v}) (1 - e^{j(u_v - u_k)}) = 0.
\end{aligned} \right. \tag{2}$$

Уравнения в скалярной форме записи в дальнейшем приводят к довольно громоздким выкладкам. Поэтому осуществим переход к матричной форме записи системы уравнений (2).

Для этого введем ряд обозначений:

Диагональная матрица  $U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & u_N \end{bmatrix}$ .

Вектор-строка частных производных

$$\frac{\partial H_v(u)}{\partial u} = \left[ \frac{\partial H_v(u)}{\partial u_1} \quad \dots \quad \frac{\partial H_v(u)}{\partial u_N} \right].$$

Матрица  $\theta$  – неполная матрица инфинитезимальных характеристик. Вектор  $(-\theta E)$  имеет смысл интенсивностей обращений заявок к прибору с соответствующей фазы РН-распределения.

С учетом матричных обозначений, перепишем систему (2) в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda H_0(u) + \frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z} - j \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} \exp\{-jU\} \theta \exp(jU) E = 0, \\ \frac{\partial H_1(u,z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z} + \lambda H_0(u) B(z) + \lambda H_1(u,z) (V^T \exp\{jU\} - 1) + \\ + j \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} \exp\{-jU\} \theta E B(z) + \\ + j \frac{\partial H_1(u,z)}{\partial u} \exp\{-jU\} (\theta E V^T - \theta) \exp\{jU\} E = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

### 3. Асимптотика первого порядка

В системе (3) обозначим  $\theta = \theta'$  и будем полагать, что матрица  $\theta'$  имеет вид  $\theta = \frac{\theta'}{T}$ , где  $T$  – большой параметр,  $T \rightarrow \infty$ . Обозначим далее

$\frac{1}{T} = \varepsilon$  и выполним следующие замены:

$$u = \varepsilon w, \quad H_0(u) = F_0(w, \varepsilon), \quad H_1(u, z) = F_1(w, z, \varepsilon).$$

С учетом этого, перепишем систему уравнений (3) в условиях растущего повторного времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda F_0(w, \varepsilon) + \frac{\partial F_1(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} - j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \exp\{-j\varepsilon W\} \theta \exp(j\varepsilon W) E = 0, \\ \frac{\partial F_1(w, z, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} + \lambda F_0(w, \varepsilon) B(z) + \lambda F_1(w, z, \varepsilon) (V^T \exp\{j\varepsilon W\} - 1) + \\ + j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \exp\{-j\varepsilon W\} \theta E B(z) + \\ + j \frac{\partial F_1(w, z, \varepsilon)}{\partial w} \exp\{-j\varepsilon W\} (\theta E V^T - \theta) \exp\{j\varepsilon W\} E = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 1.** Предельные значения  $F_0(w), F_1(w, z)$  решений  $F_0(w, \varepsilon), F_1(w, z, \varepsilon)$  системы уравнений (4) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  определяются как

$$F_0(w) = R_0 \exp(jaw),$$

$$F_1(w, z) = R_1(z) \exp(jaw),$$

где  $R_1(\infty) = \lambda b$ ,  $R_0 + R_1(\infty) = 1$ . Величина  $b$  есть математическое ожидание времени обслуживания.

Вектор средних значений  $a$  определяется равенством

$$a = -\frac{\lambda R_1(\infty)}{1 - R_1(\infty)} V^T \theta^{-1}. \quad (5)$$

#### 4. Асимптотика второго порядка.

В системе (3) обозначим  $\theta = \theta'$  и будем полагать, что матрица  $\theta'$  имеет вид  $\theta' = \frac{1}{T} \theta$ , где  $T$  – большой параметр,  $T \rightarrow \infty$ . Теперь обозначим  $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$  и выполним следующую замену:

$$H_0(u) = H_0^{(2)}(u) \exp\{jau\}, \quad H_1(u, z) = H_1^{(2)}(u, z) \exp\{jau\}$$

Введя замены  $u = \varepsilon w$ ,  $H_0^{(2)}(u) = F_0(w, \varepsilon)$ ,  $H_1^{(2)}(u, z) = F_1(w, z, \varepsilon)$  и подставляя их вместе с предыдущими заменами в систему (3), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda F_0(w, \varepsilon) + \frac{\partial F_1(w, z, \varepsilon)}{\partial z} - \\ -j \left[ \frac{\partial F_0(w, z, \varepsilon)}{\partial w} \varepsilon + ja F_0(w, \varepsilon) \right] \exp\{-j\varepsilon W\} \theta \exp(j\varepsilon W) E = 0 \\ \frac{\partial F_1(w, z, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, z, \varepsilon)}{\partial z} + \lambda F_0(w, \varepsilon) B(z) + \lambda F_1(w, z, \varepsilon) (V^T \exp\{j\varepsilon W\} - 1) + \\ + j \left[ \frac{\partial F_0}{\partial w} \varepsilon + ja F_0(w, \varepsilon) \right] \exp\{-j\varepsilon W\} \theta E B(z) + \\ + j \left[ \frac{\partial F_1}{\partial w} \varepsilon + ja F_1(w, z, \varepsilon) \right] \exp\{-j\varepsilon W\} (\theta E V^T - \theta) \exp\{j\varepsilon W\} E = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

**Теорема 2.** Предельные значения  $F_0(w)$ ,  $F_1(w, z)$  решений  $F_0(w, \varepsilon)$ ,  $F_1(w, z, \varepsilon)$  в системе уравнений (6) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  определяются как

$$F_0(w) = R_0 \Phi(w), \quad F_1(w, z) = R_1(z) \Phi(w), \\ \Phi(w) = \exp\{-E^T W K W E\}.$$

При этом матрица ковариаций  $K$  является решением обратного матричного уравнения Ляпунова

$$KA + (KA)^T + B + B^T = 0, \quad (7)$$

где

$$A = \theta \left[ \left\{ R_1^2(\infty) - 2R_1(\infty) \right\} E V^T + I \right], \\ B = \frac{\lambda^3 b_2}{2} V V^T, \quad b_2 = \int_0^\infty (1 - B(x))^2 dx.$$

## 5. Сравнение с имитационным подходом

Для рассматриваемой RQ-системы реализована имитационная модель. С ее помощью получены распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов.

Определим исходные параметры системы следующим образом:

$$\lambda = 0.70, \quad V^T = [0.40 \quad 0.25 \quad 0.35], \quad \theta = \varepsilon \begin{bmatrix} -0.30 & 0.10 & 0.10 \\ 0.10 & -0.20 & 0.05 \\ 0.15 & 0.15 & -0.60 \end{bmatrix},$$

где параметр  $\varepsilon$  принимает значения  $\varepsilon = \{0.2, 0.1, 0.05, 0.01\}$ . При этом функция распределения времени обслуживания имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 2]$ .

Для сравнения с асимптотическими результатами, определяемыми формулами (5) и (7), установим критерий сравнения – расстояние Колмогорова

$$d = \max_{1 \leq m \leq \infty} \left| \sum_{i=1}^m P(i) - \sum_{i=1}^m G(i) \right|.$$

Приведем таблицу расстояний Колмогорова для указанных выше параметров:

**Значения расстояний Колмогорова  $d$**

$\varepsilon$	$d$
0.20	0.059
0.10	0.039
0.05	0.030
0.01	0.012

Данные таблицы указывают на то, что при уменьшении параметра  $\varepsilon$  расстояние между асимптотическим и имитационным распределениями вероятностей уменьшается. Полагая допустимым погрешность в 0.05, можно считать, что допустимым применение асимптотических результатов при значении  $\varepsilon$  менее 0.1.

### Заключение

В работе показана возможность гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов и получены параметры для данного приближения. Построены графики асимптотического и имитационного распределений вероятностей состояний системы. Приведены табличные данные расстояния Колмогорова между имитационным и асимптотическим распределениями вероятностей в условии неограниченно растущего повторного времени. Сделан вывод о том, что при увеличении повторного времени расстояние между распределениями вероятностей сокращается. Установлена область применимости гауссовской аппроксимации.

### Литература

1. Назаров А. А., Пичугин С. Б. Исследование спутниковой сети связи методом математического моделирования // Изв. вузов. Физика. – 1992. – № 9. – С.120-129.

2. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queue Systems. A Computational Approach, Springer-Verlag. – Berlin Heidelberg, 2008.
3. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. – Издательство РУДН, 1995. – С. 98-108.
4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – С. 131-134.
5. Elldin A., Lind G. Elementary Telephone Traffic Theory, Ericson Public Telecommunications. – 1967.
6. Stollez R. Performance Analysis and Optimization of Inbound Call Centers. Springer. – Berlin, 2003.
7. Wesolowski K. Mobile Communication Systems, John Wiley & Sons, New York, 2002.
8. Giambene G. Queueing Theory and Telecommunications: Networks and Applications, Springer, New York, 2005.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНО-ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ММРР-ПОТОКА РАЗНОТИПНЫХ ЗАЯВОК**

***Е. В. Панкратова, С. П. Мусеева***

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

В настоящее время одним из востребованных направлений является исследование систем массового обслуживания (СМО) с неординарными входящими потоками заявок. В данной работе предлагается исследование такого ММРР-потока, в котором возможно поступление заявок разного типа. Важно отметить, что заявки поступают по одиночке, затем происходит автоматическая классификация поступившей заявки и ее дальнейшая обработка. Таким образом, моменты начала обслуживания каждой заявки различны, в отличие от систем параллельного обслуживания кратных заявок [1]. СМО с подобными входящими потоками могут применяться для моделирования различных процессов в экономической, социальной или информационно-вычислительной сферах [2].

Рассмотрим ММРР-поток заявок с управляющей цепью Маркова  $k(t)$ , которая характеризуется матрицей инфинитезимальных характеристик  $\mathbf{Q}$ , и матрицей интенсивностей  $\mathbf{\Lambda}$  с элементами  $\lambda_k$  на главной диагонали. Заявка потока с вероятностью  $p_1$  является заявкой первого типа и образует поток заявок первого типа, а с вероятностью  $p_2$  – заявкой второго типа и образует поток заявок второго типа. Поставим задачу нахождения основных вероятностно-временных характеристик двумерного немарковского случайного процесса  $\{l_1(t), l_2(t)\}$  характеризующего число заявок первого и второго типа соответственно. Рассмотрим трехмерный марковский процесс  $\{k(t), l_1(t), l_2(t)\}$ , где  $k(t)$  состояние управляющей цепи Маркова.

Обозначим  $P(k, l_1, l_2, t) = P(k(t) = k, l_1(t) = l_1, l_2(t) = l_2)$  – вероятность того, что в момент времени  $t$  управляющая цепь Маркова находится в со-

стоянии  $k$ , в потоке первого типа  $l_1$  заявок, а в потоке заявок второго типа  $l_2$  заявок.

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для трехмерного случайного процесса  $\{k(t), l_1(t), l_2(t)\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, l_1, l_2, t)}{\partial t} = & (-\lambda_k + q_{kk})P(k, l_1, l_2, t) + \lambda_k p_1 P(k, l_1 - 1, l_2, t) + \\ & + \lambda_k p_2 P(k, l_1, l_2 - 1, t) + \sum_{v \neq k} q_{vk} P(v, l_1, l_2, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Начальные условия определим в виде  $P(k, l_1, l_2, 0) = P(k, 0, 0, t) = R(k)$ , где  $R(k)$  – стационарное распределение вероятностей цепи Маркова  $k(t)$ .

Рассмотрим характеристическую функцию вида  $H(k, u, w, t) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} e^{ju l_1} e^{jw l_2} P(k, l_1, l_2, t)$ , где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица. Тогда систему уравнений (1) можно переписать для характеристических функций в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial t} = & (-\lambda_k + q_{kk})H(k, u, w, t) + \lambda_k p_1 e^{ju} H(k, u, w, t) + \\ & + \lambda_k p_2 e^{jw} H(k, u, w, t) + \sum_{v \neq k} q_{vk} H(v, u, w, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим  $\mathbf{H}(u, w, t) = [H(1, u, w, t), H(2, u, w, t), \dots, H(K, u, w, t)]$  – вектор-строку характеристических функций для каждого состояния управляющей цепи Маркова,  $\mathbf{H}(0, 0, t) = \mathbf{R}$  – начальное распределение. Тогда систему (2) можно переписать в матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, w, t) [\mathbf{\Lambda}(p_1 e^{ju} + p_2 e^{jw} - 1) + \mathbf{Q}] \quad (3)$$

Обозначим  $\mathbf{fm}_1(t) = [fm_1(1, t), fm_1(2, t), \dots, fm_1(K, t)]$  – вектор-строку первых моментов для заявок потока первого типа.

Из свойств характеристической функции

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ w=0}} = j \mathbf{fm}_1(t).$$

Тогда, продифференцировав систему (3) по  $u$  при  $u = 0, w = 0$ , получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений (СЛНДУ)

$$\frac{\partial \mathbf{fm}_1(t)}{\partial t} = \mathbf{fm}_1(t) \mathbf{Q} + p_1 \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \quad (4)$$

для нахождения вектор-строки первых моментов для заявок первого типа.

Очевидно, что среднее число заявок первого типа определяется как

$$\mathbf{fm}_1(t) = p_1 \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} t = \kappa p_1 t,$$

где  $\mathbf{E}$  – единичный вектор-столбец, а  $\kappa = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}$  – интенсивность входящего потока [3].

Аналогично, дифференцируя (3) по  $w$  и полагая  $u = 0, w = 0$ , получим СЛНДУ для нахождения вектор-строки первых моментов для потока заявок второго типа  $\mathbf{fm}_2(t) = [fm_2(1,t), fm_2(2,t), \dots, fm_2(K,t)]$

$$\frac{\partial \mathbf{fm}_2(t)}{\partial t} = \mathbf{fm}_2(t)\mathbf{Q} + p_2\mathbf{R}\Lambda. \quad (5)$$

Из свойств характеристических функций

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u^2} \right|_{\substack{u=0 \\ w=0}} = j^2 \mathbf{sm}_1(t),$$

где  $\mathbf{sm}_1(t) = [sm_1(1,t), sm_1(2,t), \dots, sm_1(K,t)]$  – вектор-строка вторых моментов для потока заявок первого типа.

Продифференцировав (3) дважды по  $u$  и по  $w$  соответственно, положив  $u = 0$  и  $w = 0$ , получим для вторых моментов для потоков заявок первого и второго типа СЛНДУ

$$\frac{\partial \mathbf{sm}_1(t)}{\partial t} = \mathbf{sm}_1(t)\mathbf{Q} + 2p_1\mathbf{fm}_1(t)\Lambda + p_1\mathbf{R}\Lambda, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{sm}_2(t)}{\partial t} = \mathbf{sm}_2(t)\mathbf{Q} + 2p_2\mathbf{fm}_2(t)\Lambda + p_2\mathbf{R}\Lambda, \quad (7)$$

где  $\mathbf{fm}_1(t)$  и  $\mathbf{fm}_2(t)$  – решения систем (4) и (5) соответственно.

Рассмотрим систему (4) в частном случае, когда управляющая ММРР-поток цепь Маркова  $k(t)$  имеет два состояния. Общее решение системы (4) есть сумма общего решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений (СЛОДУ) и частного решения СЛНДУ. Общее решение СЛОДУ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{fm}_1(t) = \mathbf{C}\exp(t\mathbf{Q}),$$

где  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$  – вектор-строка, состоящая из произвольных констант, а  $\exp(t\mathbf{Q})$  – матричная экспонента.

Алгоритм нахождения вида матричной экспоненты состоит в следующем:

- 1) находим собственные  $\delta_i, i = \{1, 2\}$  значения матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -q_{12} & q_{12} \\ q_{21} & -q_{21} \end{bmatrix}; \quad \delta_1 = 0, \delta_2 = -(q_{12} + q_{21});$$

- 2) вычисляем собственные вектора

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{12}t \\ -q_{21}t \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} q_{12} \\ -q_{21} \end{pmatrix};$$

- 3) из  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$  составляем невырожденную матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & q_{12} \\ 1 & -q_{21} \end{bmatrix};$$

- 4) находим нормальную жорданову форму для матрицы  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{J} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{QH} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(q_{12} + q_{21}) \end{pmatrix};$$

5) составим матрицу  $\mathbf{exp}(t\mathbf{J}) = \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-(q_{12}+q_{21})t} \end{pmatrix};$

6) матрица  $\mathbf{exp}(t\mathbf{Q})$  имеет вид

$$\mathbf{exp}(t\mathbf{Q}) = \mathbf{Hexp}(t\mathbf{J})\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{q_{12} + q_{21}} \begin{pmatrix} q_{21} + q_{12}e^{-(q_{12}+q_{21})t} & q_{12} - q_{12}e^{-(q_{12}+q_{21})t} \\ q_{21} - q_{21}e^{-(q_{12}+q_{21})t} & q_{12} + q_{21}e^{-(q_{12}+q_{21})t} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Таким образом, общее решение СЛОДУ имеет вид  $\mathbf{fm}_1(t) = (C_1, C_2)\mathbf{exp}(t\mathbf{Q})$ , где  $\mathbf{exp}(t\mathbf{Q})$  имеет вид (8).

Для того чтобы найти частное решение СЛНДУ, положим  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(t) = (C_1(t), C_2(t))$ . Тогда, учитывая, что  $d\mathbf{fm}_1(t) = d\mathbf{C}(t)\mathbf{exp}(t\mathbf{Q}) + \mathbf{C}(t)\mathbf{exp}(t\mathbf{Q})\mathbf{Q}$ , система (4) примет вид  $d\mathbf{C}(t) = p_1\mathbf{R}\Lambda(\mathbf{exp}(t\mathbf{Q}))^{-1}$ .

Несложно показать, что  $(\mathbf{exp}(t\mathbf{Q}))^{-1} = \mathbf{exp}(-t\mathbf{Q})$ . Тогда имеем выражение для вычисления  $\mathbf{C}(t)$  следующего вида:

$$\mathbf{C}(t) = p_1\mathbf{R}\Lambda \int_0^t \mathbf{exp}(-x\mathbf{Q})dx.$$

Тогда общее решение СЛНДУ (4) имеет вид

$$\mathbf{fm}_1(t) = p_1\mathbf{R}\Lambda \int_0^t \mathbf{exp}(\mathbf{Q}(t-x))dx + \mathbf{Cexp}(t\mathbf{Q}),$$

где  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$  определяется из начальных условий  $\mathbf{fm}_1(0) = (0,0)$  и, следовательно,  $\mathbf{C} = (0,0)$ . Таким образом, имеем выражение для вектора первых моментов для потока заявок первого типа вида

$$\mathbf{fm}_1(t) = p_1\mathbf{R}\Lambda \int_0^t \mathbf{exp}(\mathbf{Q}(t-x))dx, \quad (9)$$

где вид  $\mathbf{exp}(\mathbf{Q}(t-x))$  определяется выражением(8).

Аналогично для потока заявок второго типа вектор-строка первых моментов будет иметь вид

$$\mathbf{fm}_2(t) = p_2\mathbf{R}\Lambda \int_0^t \mathbf{exp}(\mathbf{Q}(t-x))dx, \quad (10)$$

где вид матричной экспоненты также определяются выражением (8).

Для нахождения среднего числа заявок первого типа просуммируем все уравнения системы (9), получим

$$fm_1(t) = \mathbf{fm}_1(t)\mathbf{E} = p_1\mathbf{R}\Lambda \int_0^t \mathbf{exp}(\mathbf{Q}(t-x))dx\mathbf{E}.$$

Аналогично получается выражение для среднего числа заявок второго типа:

$$fm_2(t) = \mathbf{fm}_2(t)\mathbf{E} = p_2\mathbf{R}\Lambda \int_0^t \mathbf{exp}(\mathbf{Q}(t-x))dx\mathbf{E}.$$

Подставляя (9) и (10) соответственно в (6) и (7) можно записать следующие СЛНДУ:

$$\frac{\partial \mathbf{sm}_1(t)}{\partial t} = \mathbf{sm}_1(t)\mathbf{Q} + 2p_1^2 \mathbf{R}\Lambda \int_0^t \exp(\mathbf{Q}(t-x)) dx \Lambda + p_1 \mathbf{R}\Lambda, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{sm}_2(t)}{\partial t} = \mathbf{sm}_2(t)\mathbf{Q} + 2p_2^2 \mathbf{R}\Lambda \int_0^t \exp(\mathbf{Q}(t-x)) dx \Lambda + p_2 \mathbf{R}\Lambda. \quad (12)$$

Для нахождения корреляционного момента вспомним, что по свойству характеристической функции  $\left. \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, w, t)}{\partial u \partial w} \right|_{u=0, w=0} = j^2 \mathbf{m}(t)$ , где  $\mathbf{m}(t)$  – корреляционный момент. Тогда продифференцировав (3) по  $u$ , а затем по  $w$  и положив  $u = w = 0$ , учитывая выражения (9) и (10) получим следующее выражение:

$$\frac{\partial \mathbf{m}(t)}{\partial t} = \mathbf{m}(t)\mathbf{Q} + 2p_1 p_2 \mathbf{R}\Lambda \int_0^t \exp(\mathbf{Q}(t-x)) dx \Lambda,$$

откуда

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{m}(t)}{\partial t} \mathbf{E} = 2p_1 p_2 \mathbf{R}\Lambda \int_0^t \exp(\mathbf{Q}(t-x)) dx \Lambda \mathbf{E}.$$

Таким образом, полученные формулы позволяют найти допредельные характеристики двумерного немарковского случайного процесса, характеризующего число заявок первого и второго типа соответственно.

#### Литература

1. Sinyakova I. Investigation of output flows in the system with parallel service of multiple requests / S. Moiseeva, I. Sinyakova // Problems of Cybernetics and Informatics (PCI 2012) : IV International Conference. Baku, Azerbaijan. September 12-14, 2012. – Baku : Elm, 2012. – P. 180-181.
2. Моисеева С. П., Панкратова Е. В. Исследование вероятностных характеристик математической модели обслуживания разнотипных заявок телекоммуникационного потока // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием. – Москва, РУДН, 22-26 апреля 2013 года. – М. : РУДН, 2013. – С. 39-42.
3. Гарайшина И. Р. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания / Гарайшина И. Р., Моисеева С. П., Назаров А. А. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.
4. Электронный ресурс] // URL: <http://www.math24.ru/method-of-matrix-exponential.html> (дата обращения: 15.07.2013).

# **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СМО ДЛЯ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СОТРУДНИКОВ КОНТРОЛЬНО-ПРОПУСКНОГО ПУНКТА**

*Е. М. Петлина, А. А. Баикатов*

*Филиал Голицынского пограничного института ФСБ России  
в г. Ставрополе*

Исторически теория массового обслуживания берет начало от работ, в которых рассматривалась проблема перегрузки телефонных линий, весьма обострившаяся в начале прошлого столетия. С этого времени возрос интерес к проблемам массового обслуживания, поскольку задачи, рассматриваемые в данной теории, выходят за рамки сферы обслуживания и имеют широкую область применения: в экономике, биологии, экологии, военном деле, организации производства и т. д.

В практике пограничной деятельности регулярно возникают ситуации, в которых появляется потребность в массовом обслуживании. Поскольку КПП или таможенные органы располагают ограниченными возможностями удовлетворения спроса на обслуживание, то это приводит к созданию очередей. В этих ситуациях перед теорией стоит задача достаточно полно описать суть происходящих явлений и установить с необходимой для практики точностью количественную связь между числом приборов обслуживания, характеристиками входящего потока требований и качеством обслуживания.

Общей особенностью всех задач, связанных с массовым обслуживанием, является случайный характер исследуемых явлений. Так, заранее нельзя предсказать, сколько в течение месяца поступит сигналов тревог от сигнализационных средств, в какое время суток они поступят и с каких участков, сколько времени потребуется отделению пограничной заставы на реализацию поступившей информации.

Схематично систему массового обслуживания на примере досмотра на КПП или таможене можно представить в следующем виде (рис. 1). В зависимости от характера поведения заявки она может дожидаться, когда подойдет ее очередь на обслуживание (транспортные средства и пассажиры на пунктах пропуска) или же, застав СМО занятой, немедленно или через определенное время покинуть СМО необслуженной (т. е. отказаться от обслуживания либо попытаться пройти в обход).

Задачи теории массового обслуживания, допускающие получение окончательных аналитических зависимостей, обладают рядом положительных качеств: не привязаны к определенным числовым значениям параметров, позволяют находить приемлемые значения характеристик и делать общие заключения. Однако не все практические задачи массового обслуживания допускают аналитическое решение. В таких ситуациях неоценимую помощь оказывают методы моделирования систем массового обслуживания на ЭВМ, в частности система моделирования GPSS World.

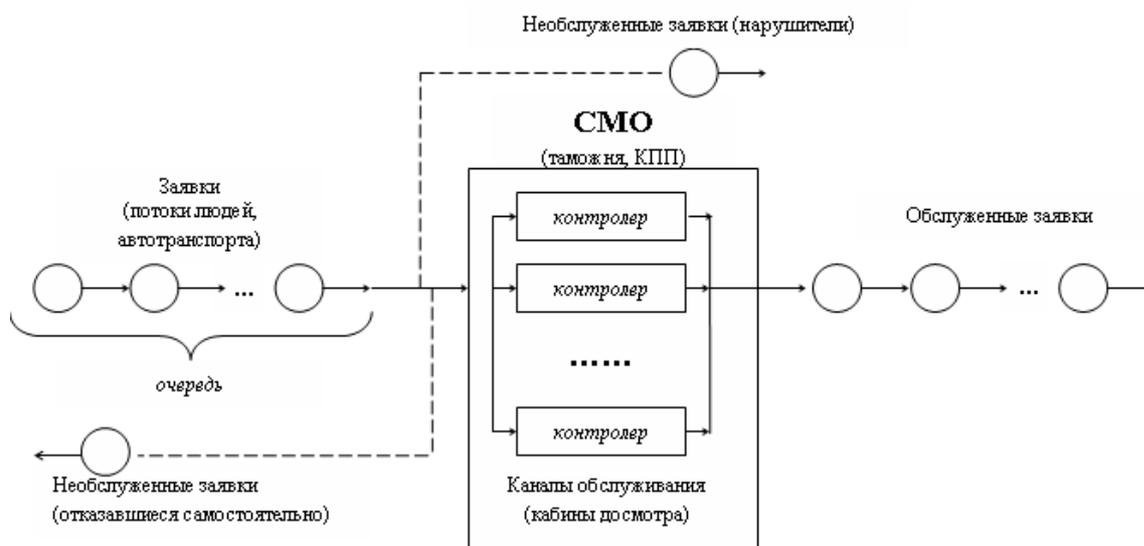


Рис. 1. Система массового обслуживания

Рассмотрим следующую задачу. Имеется пункт пропуска через государственную границу с одним контролером, который случайным образом проходят граждане. Если контролер свободен, он начинает досматривать гражданина сразу, если граждан, желающих пересечь границу, несколько, выстраивается очередь.

Определим возникающие здесь проблемы, которые заслуживают исследования.

На входе этой задачи случайный процесс прихода граждан на пункт пропуска государственной границы. Он является «марковским», т. е. промежутки между приходами любой последовательной пары граждан – независимые случайные события, распределенные по некоторому закону. Реальный характер этого закона может быть установлен путем многолетних наблюдений, на основе которых математическими методами устанавливается зависимость. В качестве простейшей модельной функции плотности вероятности можно взять равномерное распределение в диапазоне времени от 0 до некоторого  $T$  – максимально возможного промежутка времени между приходами двух последовательных граждан.

Второй случайный процесс в этой задаче, не связанный с первым, сводится к последовательности случайных событий – длительности досмотра каждого из граждан. Распределение вероятностей длительности обслуживания качественно имеет тот же вид, что и в предыдущем случае. Поэтому будем считать, что имеет место модель равномерностного распределения.

Таким образом, мы имеем модель простейшей системы массового обслуживания. Выделим в ней следующие основные события:

1. Появление требования в системе.
2. Вход требования в очередь.
3. Определение занятости канала обслуживания.
4. Выход требования из очереди.
5. Обслуживание требования в канале обслуживания.

6. Освобождение канала обслуживания.

7. Выход требования из системы.

Алгоритм работы КПП будет иметь стадий меньше и выглядит следующим образом:

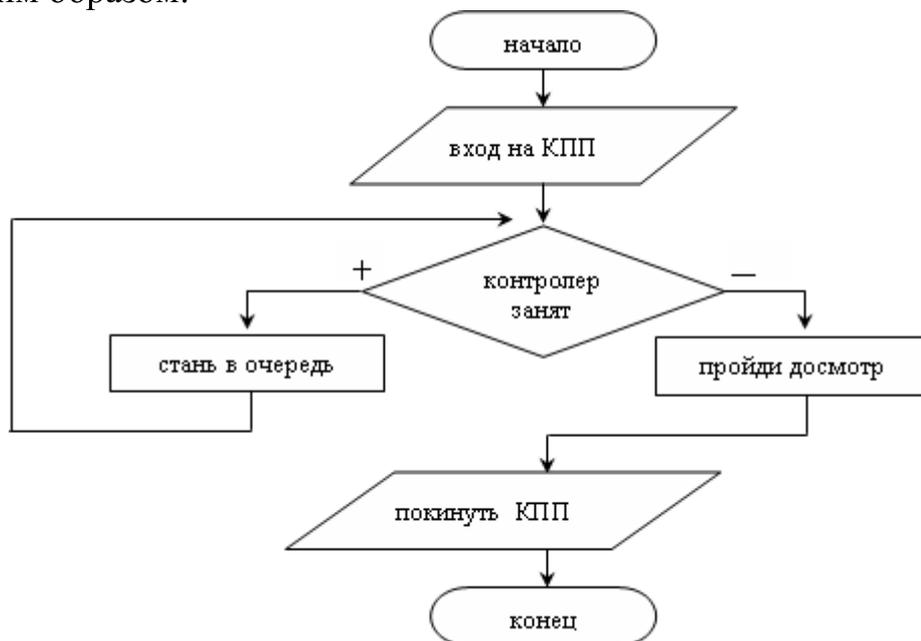


Рис. 2. Блок-схема работы КПП

Реализацию данного алгоритма на ЭВМ можно проводить с помощью языков программирования различного уровня сложности или с помощью систем моделирования. Предположим, что граждане прибывают на досмотр в КПП в интервале [5-9] мин. с равномерным распределением. А время досмотра колеблется в интервале [3-9] мин. также с равномерным распределением. При этом моделируется прохождение через КПП 200 человек. Тогда на языке системы моделирования GPSS World описанные выше события примут вид:

```
GENERATE 7,2  
QUEUE 1  
SEIZE Kontroler  
DEPART 1  
ADVANCE 6,3  
RELEASE Kontroler  
TERMINATE 1  
START 200
```

Использованные в программе операторы полностью соответствуют содержанию и логике моделируемой системы. Справа от операторов записаны параметры, которые характеризуют данное событие.

По результатам моделирования в системе GPSS World формируется стандартный отчет (см. рис. 3). В данном отчете имеется информация о моделируемых устройствах, об ожидании, будущих и текущих событиях.

```

GPSS World Simulation Report - Untitled Model 1.1.1
Wednesday, February 13, 2013 10:10:16
START TIME          END TIME  BLOCKS  FACILITIES  STORAGES
0.000              1415.579    7        1           0
NAME              VALUE
KONTROLER        10000.000
LABEL            LOC  BLOCK TYPE  ENTRY COUNT  CURRENT COUNT  RETRY
1                1    GENERATE    201          0           0
2                2    QUEUE      201          0           0
3                3    SEIZE      201          1           0
4                4    DEPART     200          0           0
5                5    ADVANCE    200          0           0
6                6    RELEASE    200          0           0
7                7    TERMINATE  200          0           0
FACILITY          ENTRIES  UTIL.   AVE. TIME  AVAIL.  OWNER  PEND  INTER  RETRY
DELAY
KONTROLER        201     0.846    5.958    1       201    0     0     0
0
QUEUE            MAX CONT.  ENTRY  ENTRY(0)  AVE. CONT.  AVE. TIME  AVE. (-0)
RETRY
1                1     1     201     114     0.130    0.914    2.111    0
SEC XN  PRI      ML      ASSEM  CURRENT  NEXT  PARAMETER  VALUE
201     0      1412.299  201     3        4
FEC XN  PRI      BIT      ASSEM  CURRENT  NEXT  PARAMETER  VALUE
202     0      1420.219  202     0        1

```

Рис. 3. Отчет по результатам моделирования

Изучив данные статистики, полученной в результате моделирования работы КПП, можно сделать вывод, что контролер проведет досмотр 200 граждан за 1415,579 мин. или 23,593 ч, т. е. практически за сутки, коэффициент занятости контролера составит 0,846. В среднем контролер проводит досмотр за 6 минут (в отчете цифра 5,958). Таким образом, если поток граждан через государственную границу не превышает 200 граждан, то можно сделать вывод, что контролер данного пункта пропуска с поставленной задачей справляется в полном объеме.

Изучая статистику очереди, можно увидеть, что из двухсот граждан 114 проходят досмотр, даже не находясь в очереди, а в среднем гражданин находится в процессе ожидания 0,914 мин., т. е. максимальное время нахождения в очереди 1 минута, что вполне допустимо и незатруднительно для граждан.

Таким образом, проанализировав полученные данные, можно сказать, что данный пропускной пункт работает в оптимальном режиме, может справиться и с большим пассажиропотоком, дополнительный контролер не требуется.

#### Литература

1. Елизарова Ю. М., Тихонова Н. А. Создание имитационных моделей в системе GPSS World: учеб. пособие. – Омск: ОмГТУ, 2011. – 104 с.
2. Шумов В. В. Применение математических методов и моделей для обоснования решений на охрану государственной границы: научно-практическое пособие. – М.: 2000. – 375 с.

# ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ММРР $|GI|_\infty$ С ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

*М. В. Севостьянова, А. Н. Мусеев, А. А. Назаров*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

## Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов [1], на вход которой поступает высокоинтенсивный ММРР-поток [2], а длительности интервалов обслуживания независимы, одинаково распределены и имеют функцию распределения  $B(x)$ . Входящий высокоинтенсивный ММРР-поток задан матрицей инфинитезимальных характеристик вида  $N\mathbf{Q} = \{Nq_{vk}\}_{v,k=1,K}$ , где  $K$  – число состояний управляющей цепи Маркова, а также условными интенсивностями  $N\lambda_1, \dots, N\lambda_K$ . Параметр  $N$  будем полагать неограниченно большим. Обозначим:  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$ ,  $\mathbf{E}$  – единичный вектор-столбец длины  $K$ . Матрица  $\mathbf{Q}$  обладает следующим свойством

$$\mathbf{Q}\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Ставится задача нахождения для рассматриваемой системы стационарного распределения вероятностей числа приборов, занятых обслуживанием. Решение этой задачи выполним с помощью метода просеянного потока [3] и асимптотического анализа в предельном условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока, то есть при  $N \rightarrow \infty$ .

## Метод просеянного потока

Зафиксируем некоторый момент времени  $T$ . Будем считать, что заявка, поступившая в систему в момент времени  $t < T$ , с вероятностью  $S(t) = 1 - B(T - t)$  формирует событие просеянного потока, а с вероятностью  $1 - S(t)$  не рассматривается. Обозначим:

$i(t)$  – число приборов, занятых обслуживанием в момент времени  $t$ ;

$n(t)$  – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени  $t$ .

Пусть в некоторый момент времени  $t_0 < T$  система массового обслуживания свободна, тогда для момента времени  $T$  имеет место равенство [3]:

$$i(T) = n(T), \quad (1)$$

то есть число приборов, занятых в системе в момент времени  $T$ , равно числу событий просеянного потока, наступивших до момента времени  $T$ . Полагая  $t_0 = -\infty$  для системы, функционирующей в стационарном режиме, в качестве результата получим стационарное распределение для процесса  $i(t)$ , так как момент времени  $T$  выбран произвольно.

## Вывод уравнения Колмогорова

Обозначим через  $k(t)$  случайный процесс, представляющий состояние цепи Маркова, управляющей входящим ММРР-поток (этот процесс принимает значения от 1 до  $K$ ). Двумерный случайный процесс  $\{k(t), n(t)\}$  является нестационарной двумерной цепью Маркова. Обозначим распределение вероятностей этого процесса через

$$P(k, n, t) = P\{k(t) = k, n(t) = n\}.$$

Применяя формулу полной вероятности для этого распределения, получаем уравнение Колмогорова

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(k, n, t)}{\partial t} = -\lambda_k P(k, n, t) S(t) + \lambda_k P(k, n-1, t) S(t) + \sum_v P(v, n, t) q_{vk}. \quad (2)$$

Начальное условие для решения его  $P(k, n, t)$  в момент времени  $t_0$  определим в виде

$$P(k, n, t_0) = \begin{cases} R(k), & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n > 0. \end{cases} \quad (3)$$

где  $R(k)$  – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова  $k(t)$ .

Составим систему уравнений, относительно частичных характеристических функций

$$H(k, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k, n, t), \quad k = \overline{1, K}.$$

Подставляя эти выражение в (2), с учетом (3) получим для этих функций задачу Коши для  $k = \overline{1, K}$ :

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial t} = \sum_v H(v, u, t) q_{vk} + S(t)(e^{ju} - 1) H(k, u, t) \lambda_k$$

$$H(k, u, t_0) = R(k). \quad (4)$$

Введя обозначения  $\mathbf{H}(u, t) = \{H(1, u, t), \dots, H(K, u, t)\}$  и  $\mathbf{R} = \{R(1), \dots, R(K)\}$ , запишем систему (4) в матричном виде:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t) \{ \mathbf{Q} + S(t)(e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} \}, \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(u, 0) = \mathbf{R},$$

причем вектор-строка  $\mathbf{R}$  удовлетворяет системе уравнений [4]:

$$\begin{cases} \mathbf{RQ} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{RE} = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Уравнение (5), определяющее характеристики рассматриваемой системы обслуживания, будем решать в асимптотическом условии растущей интенсивности входящего потока, то есть при  $N \rightarrow \infty$ .

### Асимптотический анализ

Обозначим  $\varepsilon = 1/N$  и в уравнении (5) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon). \quad (6)$$

Получим уравнение относительно  $\mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon)$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon) \{ \mathbf{Q} + S(t)(e^{j\varepsilon w} - 1)\mathbf{\Lambda} \}. \quad (7)$$

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого здесь опускаем.

**Теорема 1.** *Предельное, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , значение  $\mathbf{F}_1(w, t)$  решения  $\mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon)$  уравнения (7) имеет вид*

$$\mathbf{F}_1(w, t) = \mathbf{R} \exp \left\{ jw\kappa_1 \int_{t_0}^t S(z) dz \right\}, \quad (8)$$

где

$$\kappa_1 = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}.$$

Таким образом, в силу замен (6) и равенства (8), можно записать асимптотическое, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , приближённое равенство

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}_1(w, t, \varepsilon) \approx \mathbf{R} \exp \left\{ juN\kappa_1 \int_{t_0}^t S(z) dz \right\}.$$

Обозначим

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{H}_2(u, t) \exp \left\{ juN\kappa_1 \int_{t_0}^t S(z) dz \right\},$$

подставляя которое в (5), получим уравнение для  $\mathbf{H}_2(u, t)$ :

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}_2(u, t) \{ \mathbf{Q} + S(t)[(e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} - ju\kappa_1\mathbf{I}] \}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Обозначив  $\varepsilon^2 = 1/N$ , в уравнении (9) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon), \quad (10)$$

получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) \{ \mathbf{Q} + S(t)[(e^{j\varepsilon w} - 1)\mathbf{\Lambda} - j\varepsilon w\kappa_1\mathbf{I}] \}. \quad (11)$$

Можно показать, что имеет место следующее утверждение (доказательство которого здесь также опустим).

**Теорема 2.** *Предельное, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , значение  $\mathbf{F}_2(w, t)$  решения  $\mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon)$  уравнения (11) имеет вид*

$$\mathbf{F}_2(w, t) = \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[ \kappa_1 \int_{t_0}^t S(z) dz + \kappa_2 \int_{t_0}^t S^2(z) dz \right] \right\}, \quad (12)$$

где величина  $\kappa_2$  определяется равенством

$$\kappa_2 = 2\mathbf{f}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I})\mathbf{E},$$

а вектор  $\mathbf{f}$  удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{f}\mathbf{Q} + \mathbf{R}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I}) = 0.$$

В силу замен (10) и равенства (12) для  $\mathbf{H}_2(u, t)$  можно записать асимптотическое равенство (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ):

$$\mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{F}_2(w, t, \varepsilon) \approx \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{(ju)^2 N}{2} \left[ \kappa_1 \int_{t_0}^t S(z) dz + \kappa_2 \int_{t_0}^t S^2(z) dz \right] \right\},$$

Возвращаясь к функции  $\mathbf{H}(u, t)$ , получаем, что при достаточно больших значениях  $N$ , она имеет вид

$$\mathbf{H}(u, t) \approx \mathbf{R} \exp \left\{ juN\kappa_1 \int_{t_0}^t S(z) dz + \frac{(ju)^2 N}{2} \left[ \kappa_1 \int_{t_0}^t S(z) dz + \kappa_2 \int_{t_0}^t S^2(z) dz \right] \right\}.$$

Полагая  $t_0 = -\infty$ ,  $t = T$ , в силу (1) получаем, что стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в данной системе в условии высокой интенсивности входящего потока (при достаточно больших значениях  $N$ ) можно аппроксимировать гауссовским распределением с математическим ожиданием  $a = N\kappa_1 b$  и дисперсией

$\sigma^2 = N[\kappa_1 b + \kappa_2 \beta_2]$ , где  $b = \int_{-\infty}^T S(z) dz = \int_0^{\infty} (1 - B(z)) dz$  есть среднее время обслуживания, а  $\beta_2 = \int_{-\infty}^T S^2(z) dz = \int_0^{\infty} (1 - B(z))^2 dz$ .

### Численные результаты

В работе произведено исследование области применимости полученной гауссовской аппроксимации на практике. В качестве величины для оценки точности аппроксимации распределения выбрано расстояние Колмогорова [5]:

$$D_q = \sup_x |F_q(x) - F(x)|,$$

где  $F_q(x)$  – эмпирическая функция распределения, полученная на основе данных имитационного моделирования,  $F(x)$  – функция распределения нормальной случайной величины с найденными выше характеристиками  $a$  и  $\sigma^2$ . Исследование проводилось для различных параметров входящего потока и распределения времени обслуживания. Ниже представлен характерный пример моделирования. Параметры входящего потока и времени обслуживания подобраны таким образом, что время обслуживания меньше интенсивности входящего потока  $N\kappa_1$  ровно в  $N$  раз. Таким образом, параметр  $N$  в явном виде характеризует высокую интенсивность входящего потока.

Итак, пусть матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{\Lambda}$  имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Время обслуживания имеет гамма-распределение с параметрами  $\alpha = \beta = 2$ .

В таблице приведено сравнение результатов аналитических расчетов и имитационного моделирования для различных значений параметра  $N$ :

$N$	Аналитический расчет		Имитационное моделирование		Расстояние Колмогорова
	среднее	дисперсия	среднее	дисперсия	
1	1,0061	1,2501	1,0030	1,0550	0,3760
10	10,061	12,501	10,025	10,556	0,0823
30	30,182	37,504	30,440	33,130	0,0358
100	100,61	125,01	100,60	112,39	0,0282
1000	1006,1	1250,1	1005,7	1177,1	0,0162
10000	10061	12501	10081	11801	0,0127

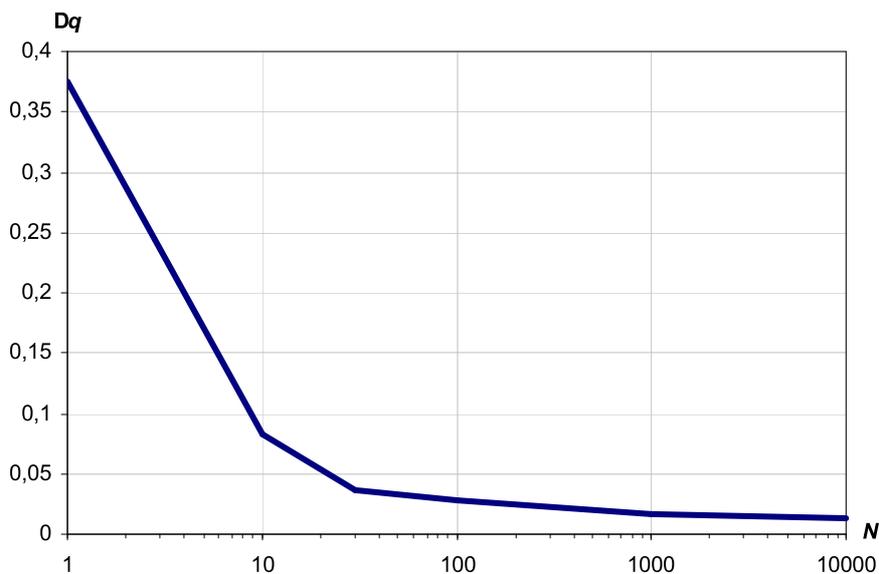


Рис. 1. Изменение расстояния Колмогорова  $D_q$  в зависимости от параметра  $N$  (шкала по  $N$  – логарифмическая)

График на рис. 1 демонстрирует убывание расстояния  $D_q$  в зависимости от параметра  $N$ .

На основе сравнения полученных результатов можно сделать вывод, что представленные в работе асимптотические формулы дают достаточно хорошую ( $D_q < 0,05$ ) аппроксимацию при значениях параметра  $N$  от 30 и выше.

### Заключение

В работе проведено исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, произвольным временем обслуживания и высокоинтенсивным входящим ММРР-поток. Показано, что в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока стационарное распределение числа занятых приборов аппроксимируется нормальным распределением, получены характеристики этого распределения. Анализ результатов, полученных по асимптотическим формулам и на основе имитационного моделирования, свидетельствует о достаточно низкой погрешности представленной в работе гауссовской аппроксимации при значениях  $N \geq 30$ .

### Литература

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – 3-е изд, испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.

2. Moiseev A., Nazarov A. Investigation of the High Intensive Markov-Modulated Poisson Process // Proc. Of The International Conference On Application Of Information And Communication Technology And Statistics In Economy And Education (ICAICTSEE-2012), Oct. 5-6, 2012, Sofia, Bulgaria. – Sofia: University Of National And World Economy, 2012, pp. 72–77.

3. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.

5. Рыков В. В., Иткин В. Ю. Математическая статистика и планирование эксперимента: Учебное пособие. – М.: МАКС Пресс, 2010. 308 с.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

## ПОТОКОВЫЙ МЕТОД КЛАССИФИКАЦИИ ТЕКСТОВ ХУДОЖЕСТВЕННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ НА ОСНОВЕ С-МЕРЫ

*М. Ф. Аиуров, В. В. Поддубный*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### 1. Введение

Задачи автоматической классификации текстов возникают как при создании и совершенствовании поисковых систем, так и в научных исследованиях, связанных с выявлением стиливых особенностей художественных или публицистических произведений, определением авторства текстов и т.п.

Формальное определение задачи классификации текстов приведено, например, в [1]. Для решения данной задачи уже разработано множество методов, однако многие авторы (например, [3, 6, 7]) разделяют все эти методы на признаковые и потоковые. Признаговые методы (feature-based approaches) работают с текстами не напрямую, а лишь с их численными представлениями – векторами значений признаков. Для того, чтобы применить любой признаковый метод классификации для обработки текстов, необходимо, прежде всего, определить достаточный набор признаков, по которому будет проходить классификация. В случае неудачного выбора такого набора результат классификации может оказаться крайне неудовлетворительным.

В отличие от признаковых методов, потоковые методы (stream-based approaches) не требуют задания каких-либо признаков для классификации текстов. Они непосредственно используют элементы текста. Элементы текста обычно представлены в виде некоторой структуры для облегчения доступа к этим элементам и ускорения их обработки, так как текст  $X$  рассматривается как последовательность (поток) из  $n$  элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  некоторого алфавита  $Q$ , при этом длина текстовой строки  $n = |X|$ . В качестве элемента текста  $x_n$  может быть выбран одиночный текстовый символ, слово, грамматический класс, любая группировка символов текста. В случае какой-либо группировки символов перед обработкой текста проводится его преобразование в новый вид – последовательность грамматических кодов.

Целью данной работы является исследование одного из методов потоковой классификации на примере текстов художественной литературы.

### 2. Потоковые методы классификации на основе С- и R-мер

В потоковых методах О. Г. Шевелев [1] выделяет два основных направления:

- подсчет повторений строк (R-, C- и другие меры);
- сжатие информации (off-the-shelf, PPM).

Первое направление видится как наиболее перспективное, так как позволяет наглядно анализировать характеристики исследуемого текста в момент классификации. Поточковые методы классификации используют вычисления меры близости между двумя текстами. Первоначально для использования этих методов производится конкатенация всех текстов класса, участвующих в обучении. Так формируются супертексты классов. Сам же процесс классификации происходит путем вычислением мер близости между исследуемым текстом и супертекстами каждого класса. Класс, имеющий наибольшее значение меры, и будет искомым классом.

Любая мера близости текста и супертекста является результатом подсчета определенных подстрок исследуемого текста, которые есть в супертексте.

Первоначально (по-видимому, В.Дж. Тианом и Д. Томасом в их неопубликованной работе, как указано в [1]) была предложена C-мера, которая подсчитывает только подстроки определенной длины:

$$c_k(X | S) = \sum_{i=k}^n c(x_{i-k+1} \dots x_n | S),$$

где  $X$  – исследуемый текст,  $S$  – супертекст класса,  $k$  – некоторая длина подстроки поиска,  $n = |X|$ ,

$$c(x_{i-k+1} \dots x_n | S) = \begin{cases} 1, & x_{i-k+1} \dots x_n \subset S \\ 0, & x_{i-k+1} \dots x_n \not\subset S \end{cases}$$

Чтобы убрать зависимость меры от длины текста, вводится нормализация для C-меры. Нормализованная C-мера представляется следующим образом:

$$c_k^{norm} = \frac{c_k(X | S)}{n - k}.$$

Д. В. Хмелёв [2, 4] предложил в качестве развития C-меры R-меру. В свою очередь она учитывает все возможные повторения всех подстрок одного текста в другом:

$$r(X | S) = \sum_{j=1}^n c_j(X | S).$$

Вычисления R- и C-мер сводятся к поиску подстрок текста  $X$  в супертексте  $S$ . Для C-меры и небольших строк такой поиск можно осуществлять прямым просмотром, во всех остальных случаях прямой просмотр будет слишком трудоемкой процедурой. Для ускорения подсчета можно использовать суффиксные массивы или суффиксные деревья. Построение как суффиксных деревьев [6], так и суффиксных массивов [7] происходит за линейное время. Преимущество деревьев в том, что поиск по ним будет в целом работать быстрее. Преимущество массивов состоит в том, что для их получения нужно меньше времени и памяти, их можно подготовить заранее и хранить на диске [7].

### 3. Исследование потокового классификатора, основанного на С-мере

Для первоначального анализа потоковых методов нами была выбрана классификация на основе С-меры, а для работы со строками – суффиксные массивы. В качестве классов для классификации выступили авторы русской прозы 19 в., исследуемые в работах [8, 9]. Всего в нашей работе использовалось 12 авторов, 156 произведений которых были выбраны в качестве «обучающей» выборки для построения соответствующих супертекстов, а несколько произведений тех же авторов использовались в качестве тестовой выборки.

Для проведения тестирования метода был спроектирован программный модуль, позволяющий проводить классификацию текстов на основе С-меры. Открытым оставался вопрос выбора длины подстроки поиска. Сами авторы С-меры отмечали [2], что данная мера неплохо работает лишь на подстроках длиной от 5 до 13 символов. Стоит отметить тот факт, что эти авторы проводили исследование метода, используя газетные статьи. Мы выбрали для анализа работы метода тексты художественных произведений и подстроки длины от 1 символа до 25 символов. Результаты классификации для текста, представленного в обучающей выборке, показаны на диаграмме рис. 1 (для наглядности на диаграмме проиллюстрированы лишь пять классов):

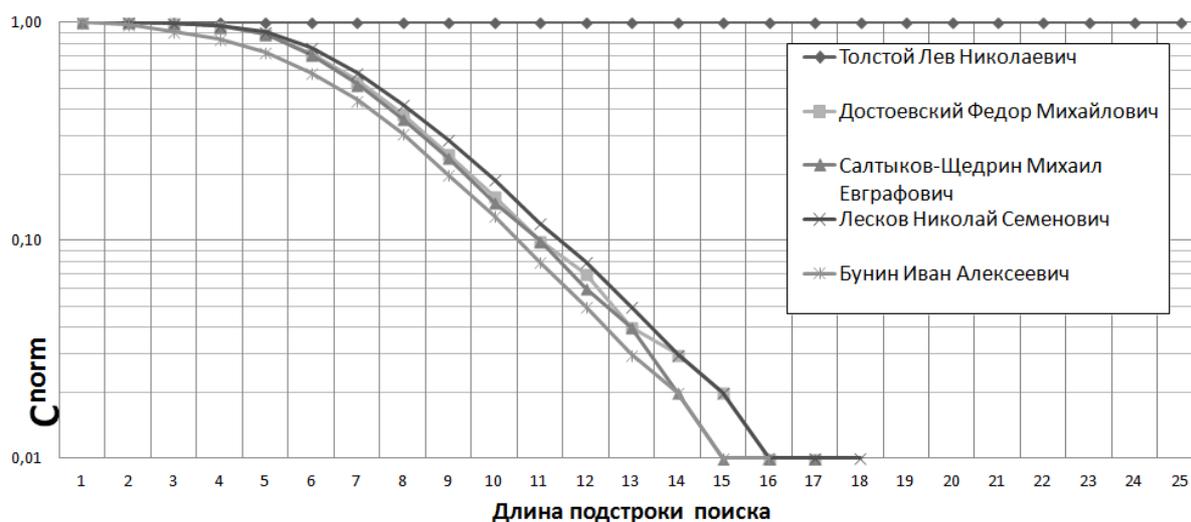


Рис. 1. Диаграмма значений С-меры для текста Л. Н. Толстого «Детство»

На диаграмме отлично видно, что какая бы длина подстроки ни была выбрана, С-мера дает полное совпадение с супертекстом своего класса, а, следовательно, идеальную принадлежность к своему классу.

Для текста же из тестовой выборки результаты представлены на диаграмме рис. 2.

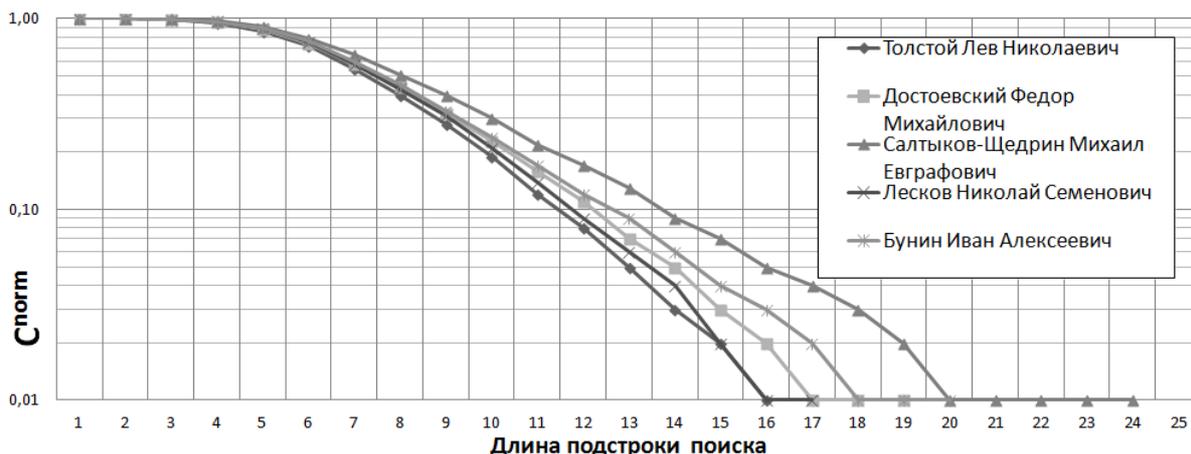


Рис. 2. Диаграмма значений С-меры для текста М.Е. Салтыкова-Щедрина «Пошехонская старина»

На диаграмме видно, что существенное различие в значениях С-меры наблюдается уже в подстроках длиной в 3 символа, а при достижении подстроки поиска в 24 символа различие значений становится крайне малым. При длине подстроки в 20 символов С-мера дает ошибку в определении класса, но по другим значимым параметрам дает правильный результат. Таким образом, С-мера при определенных параметрах длины строки может давать ошибки, что также отмечается в работе [2]. Для того, чтобы избежать ошибки такого типа, Д. В. Хмелёв и предложил использование R-меры.

В целом на художественных произведениях метод С-меры показал себя неплохо. Рабочим диапазоном длин для классификации методом С-меры стали длины подстроки от 3 до 20 символов.

Следующим этапом видится использование метода классификации на основе R-меры, являющегося развитием метода на основе С-меры. Однако использование данного метода сопряжено с определенной технической трудностью. Время, затрачиваемое для подсчета С-меры текста длиной порядка 500 тыс. символов (текст среднего объема художественного произведения), составляет порядка 2–3 сек для одного класса. Так как R-мера является суммой С-мер всех длин подстрок исследуемого текста, то, перемножая время подсчета одной С-меры на длину текста, получим общее время выполнения в наихудшем случае порядка 10 дней, что, естественно, неприемлемо для классификации в реальном времени.

#### 4. Арбитражный метод классификации на основе С-меры

В качестве развития метода С-меры нами предлагается метод классификации, который использует С-меру на одном из его этапов. На первом этапе для каждого класса строится вектор значений С-мер длин подстрок от 3 до 25 символов:  $c_{i,3}^{norm}$ ,  $c_{i,4}^{norm}$ , ...,  $c_{i,25}^{norm}$ . После чего для каждого  $k$  выбираем класс-победитель, у которого значение С-меры максимально:

$$Vic_k = \max c_{i,k}^{norm}.$$

На заключительном этапе выбирается финальный победитель – класс, к которому и относится исследуемый текст – методом большинства по всем  $k$ .

Данный метод улучшает качество классификации текстов, так как чаще всего  $S$ -мера определяет истинный класс верно. Но порядка 20% тестовых текстов классифицируется ошибочно. Это связано с тем, что нередко значения  $S$ -меры сразу у нескольких классов весьма близки на длинах подстроки от 3 до 17 символов, и только при увеличении длины подстроки с 17 символов начинает все больше доминировать значение  $S$ -меры для истинного класса.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-07-00776-а.*

#### Литература

1. Шевелев О. Г. Методы автоматической классификации текстов на естественном языке: Учебное пособие. Томск: ТМЛ-Пресс, 2007. – 144 с.
2. Khmelev D. V., Teahan W. J. Verification of text collections for text categorization and natural language processing // Technical Report АИА 03.1. School of Informatics, University of Wales. Bangor, 2003.
3. Humnissett D. and Teahan W. J. Context-based methods for text categorization // Proceedings of the 27th Annual International ACM SIGIR Conference (SIGIR), The University of Sheffield, UK, 2004.
4. Хмелев Д. В. Классификация и разметка текстов с использованием методов сжатия данных. Краткое введение. 2003. – [Электронный ресурс] // URL: <http://compression.graphicon.ru/download/articles/classif/intro.html>.
5. Shevelyov O. G., Poddubnyj V. V. Complex investigation of texts with the system "StyleAnalyzer" // Text and Language / Ed. by P. Grzyber, E. Kelih, J. Macutek. - Wien: Praesens Verlag, 2010. – P. 207-212.
6. Ukkonen E. Constructing Suffix-trees On-Line in Linear Time // Algorithms, Software, Architecture: Information Processing. – 1992. – № 1(92). – P. 484-92.
7. Kärkkäinen J. and Sanders P. Simple linear work suffix array construction // J.C.M. Baeten et al. (Eds.): ICALP 2003, LNCS 2719, pp. 943-955, 2003.
8. Поддубный В. В. Шевелев О. Г. Кравцова А. С. Фатыхов А. А. Словарно-аналитический блок системы «Стилеанализатор» // Научное творчество молодежи : материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции (15-16 апреля 2010 г.). – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 1. – С. 138-140
9. Шевелев О. Г. Разработка и исследование алгоритмов сравнения стилей текстовых произведений: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Том. гос. ун-т. – Томск, 2006. – 19 с.

## **МОДЕЛЬ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ АВТОСЕРВИСНОГО ОБОРУДОВАНИЯ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ**

***И. В. Бородулин***

*Омский государственный технический университет*

В современном мире автосервисное оборудование совершенствуется стремительными темпами, и сейчас устройства для проведения авторемонта значительно отличаются по функциональным возможностям от тех,

что были произведены еще несколько лет назад. С учетом технических характеристик новых моделей транспортных средств, их комплектации на сегодняшний день выпускается профессиональное авторемонтное оборудование, которое требует непрерывной диагностики и последующего анализа неисправностей, а также ремонта или устранения дефектов.

Диагностирование данного оборудования должно идти в определенном, заранее заданном в тесте темпе. Модель диагностирования на современном этапе развития техники может стать эффективной только в том случае, если она учитывает жесткие временные характеристики объекта контроля. Поэтому при построении модели диагностирования автосервисного оборудования необходимо учитывать требования к быстродействию как программной, так и аппаратной составляющей диагностического обеспечения. Разнообразие диагностической информации и необходимость детального анализа измеряемых параметров автосервисного оборудования также влияют на построение модели диагностирования. Обработка ряда оцениваемых параметров в реальном времени является принципиально важной задачей, так как при обработке таких параметров в диагностических системах, не позволяющих производить диагностику в реальном времени, возможна потеря информации, частичная или даже полная, как раз в те промежутки времени, когда она наиболее необходима. Рассматривая вопрос диагностирования автосервисного оборудования в режиме реального времени необходимо учитывать две составляющие части: непосредственно саму диагностируемую систему и диагностическое оборудование. Диагностическое оборудование подает на диагностируемое специальные диагностические сигналы и принимает ответные реакции. Данные сигналы принимаются и подаются в реальном времени, имеют определенную последовательность, форму и характеристики.

Для взаимодействия диагностической системы с аппаратными средствами диагностируемой системы в реальном масштабе времени используются драйверы ввода-вывода, поддерживающие аппаратные средства промышленной автоматизации, включая модули сбора данных и управления, а также ПК совместимые модульные контроллеры. Организация связи драйверов ввода-вывода с контроллерами может осуществляться с помощью COM-порта (в этом случае подключение будет производиться по протоколам RS-232, RS-422, RS-485) или встраиваемых плат, в том числе сетевой платы.

В общем случае для диагностической системы все возможные входные и выходные параметры и сигналы заданы всегда. Обозначим число обрабатываемых сигналов через  $N$ , а время обработки сигнала через  $T$ . Тогда процесс диагностирования системы в реальном времени сводится к одновременной подаче на объект контроля входных сигналов и обработке выходных сигналов. Чтобы избежать вероятности пропуска обработки какого-либо из сигналов осуществляется последовательная обработка всех диагностических сигналов. Поскольку на обработку каждого сигнала вы-

делено определенное время, значит каждый сигнал строго привязан к определенному времени в цикле обработки  $t_i$ . Представим цикл обработки сигналов S1 и S2 в виде графа, рассмотренного на рисунке 1.

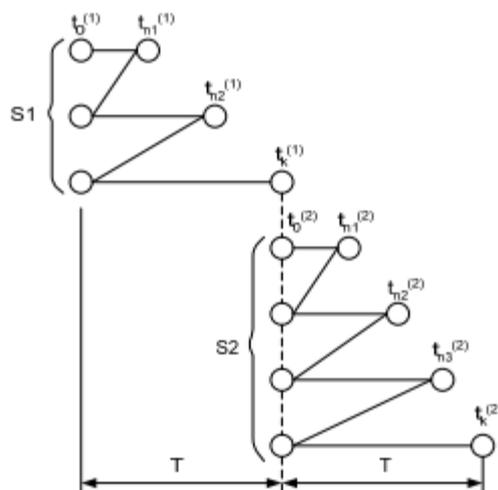


Рис. 1. Модель последовательной обработки двух диагностических сигналов со всеми возможными ситуациями

Вершины данного графа  $t_{nj}^j \in (0, \mu_j)$ , где  $\mu_j$  - возможные условия обработки  $j$ -ого сигнала,  $j \in (1, N)$ , соответствуют состояниям системы в моменты обработки диагностических сигналов при различных условиях, таким образом, это и есть время обработки  $i$ -го условия в  $j$ -ом диагностическом сигнале. Вершины  $t_0$  и  $t_k$  отображают все возможные варианты обработки диагностического сигнала.

Обхода графа, представленного на рис. 1 может быть произведено различными путями, следовательно, и время работы всего цикла может варьироваться, что для диагностирования в режиме реального времени не является допустимым, так как вследствие этого могут возникнуть задержки при обработке определенных сигналов и условий. К положительным сторонам данного метода следует отнести исключение пропуска обработки возможных ситуаций, которые могут возникнуть при диагностировании авторемонтного оборудования. Повышение производительности диагностирования достигается путем использования мультипрограммного режима работы, позволяющего обрабатывать некоторую группу диагностических сигналов за один момент времени. Применяя вышесказанное к системам диагностирования, следует отметить необходимость загрузки в систему сразу несколько диагностических параметров (рис. 2).

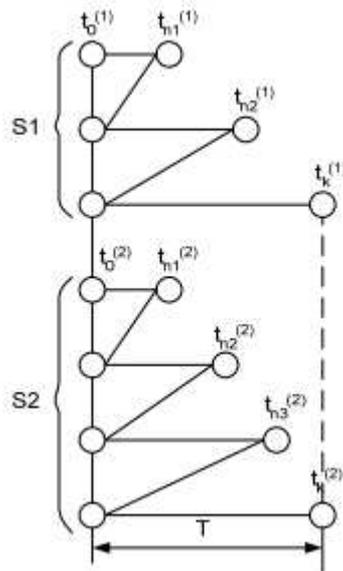


Рис. 2. Модель параллельной обработки двух диагностических сигналов со всеми возможными ситуациями.

Целесообразность применения такого подхода можно доказать, рассмотрев следующий пример: допустим в диагностируемой системе обрабатывается  $N$  сигналов и время затрачиваемое на обработку одного сигнала равно  $T$ . Также сделаем допущение, что все  $N$  диагностических сигналов обрабатываются за одинаковое время. При условии, что все сигналы обрабатываются одновременно, плюс данного метода будет очевиден. То есть теоретически в  $N$  раз, по сравнению с последовательным методом. Пока один сигнал обрабатывается, очевидно, другой сигнал может находиться в стадии приема или выдачи. В результате распараллеливания данных операций производительность этого метода диагностирования будет выше, чем у последовательного. Одновременная обработка нескольких сигналов влечет за собой соответствующие затраты, как аппаратные, так и программные. Задача по распараллеливанию процесса обработки нескольких диагностических сигналов решается, в то время как работу одного процессора в ЭВМ распараллелить нельзя. Таким образом, очевидно, что при параллельной обработке диагностических сигналов происходит распараллеливание самих процессов обработки данных сигналов, что требует применение моделей, учитывающих также приоритеты обработки диагностических параметров, т. к. может потребоваться необходимость обработки сразу нескольких сигналов в один и тот же момент времени.

Режим разделения времени в ЭВМ подразумевает что за счет обработки в течение минимального промежутка времени каждого из диагностических сигналов время выполнения обработки каждого сигнала существенно снижается, что влечет за собой необходимость исключения данной зависимости. Для решения вышеописанных трудностей необходимо использовать потоковый метод при обработке диагностических сигналов. Суть данного метода диагностирования заключается в следующем. Пусть имеется некоторая группа диагностических сигналов  $N$ . Для обработки

данных сигналов разработана специальная процедура, которая обладает свойствами инвариантности и универсальности. Универсальность заключается в том, что данной процедурой обрабатываются все диагностические сигналы. Инвариантность процедуры означает, что в какой последовательности сигналы будут подаваться для обработки и какой диагностический сигнал будет первым при обработке, для нее не существенно. Необходимо будет являться только полное прохождение по диагностическим сигналам и передача данных сигналов в процедуру обработки. Таким образом, следует организовать цикл обхода всех сигналов с условиями для обработки при возникновении определенных ситуаций. При использовании поточной организации процесса обработки диагностических сигналов время обработки всей совокупности оцениваемых параметров существенно снижается.

В качестве примера рассмотрим систему авторемонтного оборудования с  $n$  диагностическими сигналами и возможные модели их обработки:

1. Количество сигналов равно  $n$ . Начальная установка осуществляется параллельно, и затрачиваемое на установку время равно  $t_{yc}$ .

2. Количество сигналов равно  $n$ . Начальная установка осуществляется последовательно, и затрачиваемое на установку время равно  $nt_{yc}$ .

3. Как только установлен первый сигнал, сразу же начинается тест. В дальнейшем включение других сигналов, а также их обработка выполняются параллельно. От количества сигналов будет зависеть степень распараллеливания.

Последовательная модель:

$$T_{\sum}^{\text{поточн. max}} = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{M_j} t_{nj}^i + NT + \left(\sum_{j=1}^N \mu_j + N - n\right) * t_{yc}}{n} + n * t_{yc} \quad (1)$$

Параллельная модель:

$$T_{\sum}^{\text{поточн. min}} = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{M_j} t_{nj}^i + NT + \left(\sum_{j=1}^N \mu_j + N\right) * t_{yc}}{n} \quad (2)$$

Таким образом, выразим реальную величину суммарных временных затрат при поточной обработке диагностических сигналов, в зависимости от степени распараллеливания:

$$T_{\sum}^{\text{поточн. min}} \leq T_{\sum}^{\text{поточн.}} \leq T_{\sum}^{\text{поточн. max}} \quad (3)$$

Исходя из вышесказанного, наиболее подходящей моделью диагностирования авторемонтных систем, является модель потоковой обработки диагностических сигналов. Наиболее подходящими для описания данной модели являются сети Петри. Механизм сетей Петри отлично подходит для представления параллельных, детерминированных процессов.

При описании данной модели с помощью сетей Петри становится возможным совмещать описанный подход с аналитическим моделированием т. е. применять аналитические методы для расчета некоторых характе-

ристик, впоследствии используя эти результаты для имитационного моделирования.

#### Литература

1. Воробьев В. Г. Надежность и техническая диагностика авиационного оборудования. – Москва: Изд-во МГТУ ГА, 2010. – с.224-228.
2. Афанасьев А. Н Информатика, моделирование, автоматизация проектирования. Сборник научных трудов Российской школы-семинара аспирантов, студентов и молодых ученых ИМАП-2010, 2010 г.
3. Кучер В. Я. Основы технической диагностики и теории надежности. Москва: Изд-во Энергия, 1976. – 464 с.
4. Котов В. Е. Сети Петри. Москва: Изд-во Наука, 1984. – 160 с.

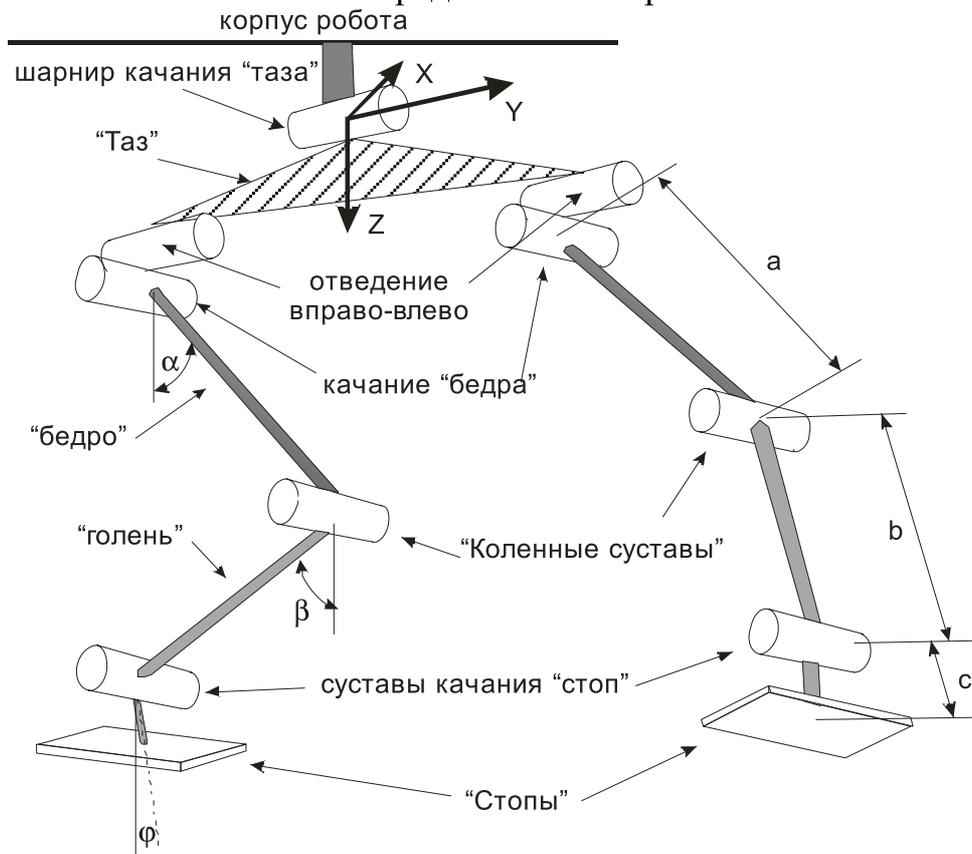
## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КИНЕМАТИКИ ШАГАЮЩЕГО РОБОТА

*И. А. Васильев*

*Центральный НИИ робототехники и технической кибернетики*

Шагающие транспортные средства можно условно разделить на два класса: двуногие и многоногие. Но в обоих случаях количество ног чётно. Поэтому рассмотрим пару ног отдельно.

Кинематическая схема представлена на рис. 1.



*Рис.1. Кинематическая схема пары ног*

Для комфортного движения желательно, чтобы, во-первых, амплитуда колебаний корпуса робота по вертикали была минимальна (желатель-

но – нулевая), и, во-вторых, чтобы колебания ног, как маятника, были близки к свободным [3].

Рассмотрим чисто кинематически такую задачу. Для кинематического рассмотрения не учитываются динамические параметры (силы, моменты и инерции), поэтому, считаем, что все маятники близки к математическим. Тем более что, как известно, математические маятники отличаются от физических лишь масштабированием.

Здесь, казалось бы, уместно применить формализм Денавита-Хартенберга для описания связей и, соответственно, координат звеньев, а затем, применив подход, разработанный автором [1,2], решить обратную кинематическую задачу. Такой общий метод даст все решения. Но в данном случае все решения не требуются: диапазоны изменений углов в шарнире качания «таза» и в шарнирах отведения довольно малы и ими будем пренебрегать, да и общий диапазон движения ограничен «нижним» полупространством.

Пусть базовая система координат (БСК) находится в центре поворота шарнира качания «таза». Пусть длины звеньев ног равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ , как показано на рисунке 1, и пусть величина угла в шарнире качания «бедра» обозначена символом  $\alpha$ , в «коленном» –  $\beta$ , а в качании «стопы» –  $\varphi$ . Предполагая подстилающую поверхность, плоской и горизонтальной, будем считать угол качания  $\varphi$  равным нулю. Тогда уравнения одной ноги следующие:

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \cos \beta &= H - h - c - f_z \\ a \sin \alpha + b \sin \beta &= f_y \end{aligned}$$

где  $H$  – расстояние от начала СК до подстилающей поверхности,  $h$  – расстояние от шарнира качания «бедра» до начала СК,  $f_z$  – требуемое текущее положение по вертикальной оси,  $f_y$  – требуемое текущее положение по горизонтальной оси.

Применяя стандартную замену через тангенсы половинных углов и, затем, восстанавливая, получаем решения:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= 2 \arctg\left(\frac{2 a f_y(t) \pm \sqrt{L_1}}{L_2}\right); \\ \beta(t) &= 2 \arctg\left(\frac{\pm 2 b f_y(t) + \sqrt{L_1}}{L_3}\right); \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$L_1 = (f_y^2(t) - (h_1 - f_z(t))(h_2 + f_z(t)))(-f_y^2(t) + (h_3 - f_z(t))(h_4 + f_z(t)));$$

$$L_2 = (f_y^2(t) - (h_1 - f_z(t))(h_3 + f_z(t)));$$

$$L_3 = (-f_y^2(t) + (h_3 - f_z(t))(h_2 + f_z(t)));$$

$h_i$  – константы.

Здесь углы и требуемые текущие положения показаны, как функции от времени.

Теперь надо сказать о манере ходьбы [4]. Пусть в момент соприкосновения «ступни» с опорной поверхностью, «ступня» движется по направ-

лению, близкому к нормали к её нижней поверхности от шарнира качания. Для чего это нужно будет объяснено чуть ниже. Ангулярные шарниры качания «бедра», «коленных суставов» и качания «стопы», вообще говоря, не могут гарантировать такое движение. Пусть перед моментом соприкосновения ступни с опорой нога вытянута (т.е.  $\alpha = \beta = \varphi = \text{const} \neq 0$ ) и начинает двигаться шарнир качания «таза» вниз (при этом, соответственно, немного «подыгрывает» шарнир отведения), чем и обеспечивается требуемое движение.

Рассмотрим варианты движений «ступни» при разных конфигурациях опорной поверхности – рисунок 2, на котором движение робота предполагается справа налево. На этом рисунке предполагается, что «ступня» до момента контакта двигалась по направлению белой стрелки, на рисунке 2 исходящей из шарнира.

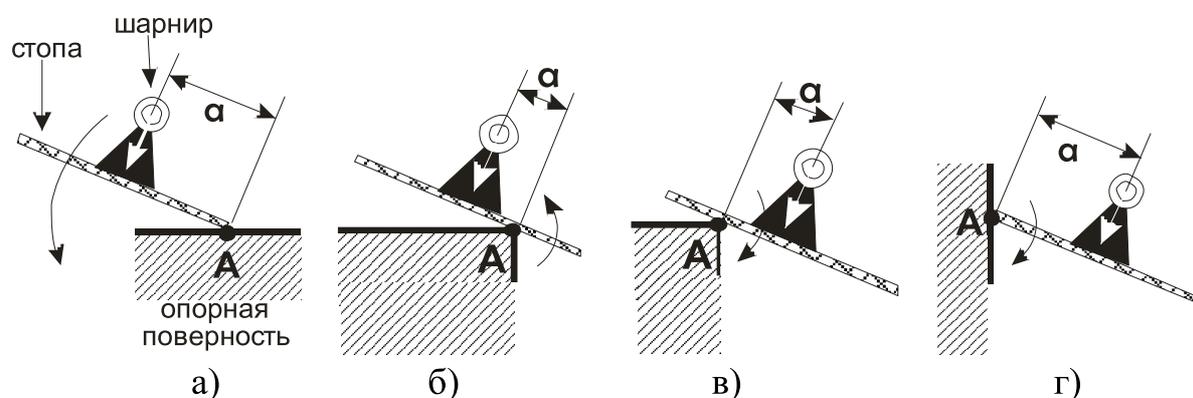


Рис. 2. Варианты движений ступни для разных контактов с опорой

На этих рисунках видно, что варианты а) и б) являются безопасными и можно продолжить движение до тех пор, пока «ступня» не станет твёрдо (т. е. перестанет поворачиваться). Вариант в) – хуже, так как найдётся ли опора под задней частью «стопы» не ясно. Поэтому в этом варианте лучше зафиксировать положение «стопы» и опираться лишь на точку А.

Вариант г) совсем плох – нет гарантии, что под «ступней» есть опора.

Рассмотрим условия этих вариантов более подробно. Пусть, как уже говорилось, нога вытянута и равномерно поворачивается лишь шарнир качания «таза». Пусть в момент касания «ступней» опоры «таз» имеет угол к нейтральной  $\theta$ , соответственно, нога при этом переместилась на величину  $s = P \sin(\theta)$  ( $P$  (pelvis – таз) – полуширина «таза»). Тогда можно сделать заключение:

- а) Если  $\varphi = \arctan\left(\frac{s}{F}\right)$  – следовательно, случился вариант а);
- б) Если  $0 < \varphi < \arctan\left(\frac{s}{F}\right)$  – вариант б);
- в) Если наоборот,  $\arctan\left(\frac{s}{F}\right) < \varphi < 0$  – вариант в);
- г)  $\varphi = -\arctan\left(\frac{s}{F}\right)$  – вариант г).

В этих формулах  $F$  (*foot* – стопа) – длина «стопы».

Теперь рассмотрим траекторию движения стопы в цикле шагания. Как было сказано выше, для комфортного движения удобно считать маятник двигающимся свободно. Поэтому в режиме опоры нога не сможет обеспечить прямолинейное движение «стопы». Пусть на этом этапе движение происходит по эллиптической траектории – нелинейность можно будет компенсировать шарниром качания «таза». На рисунке 3 показана траектория движения «стопы» без учёта компенсации «таза». Так как в момент контакта с опорной поверхностью нога предполагается выпрямленной (т. е. расстояние от шарнира качания «бедра» до стопы равно  $a+b+c$ ), то требуется, чтобы эта прямая пересекалась с требуемой траекторией «стопы» как касательная.

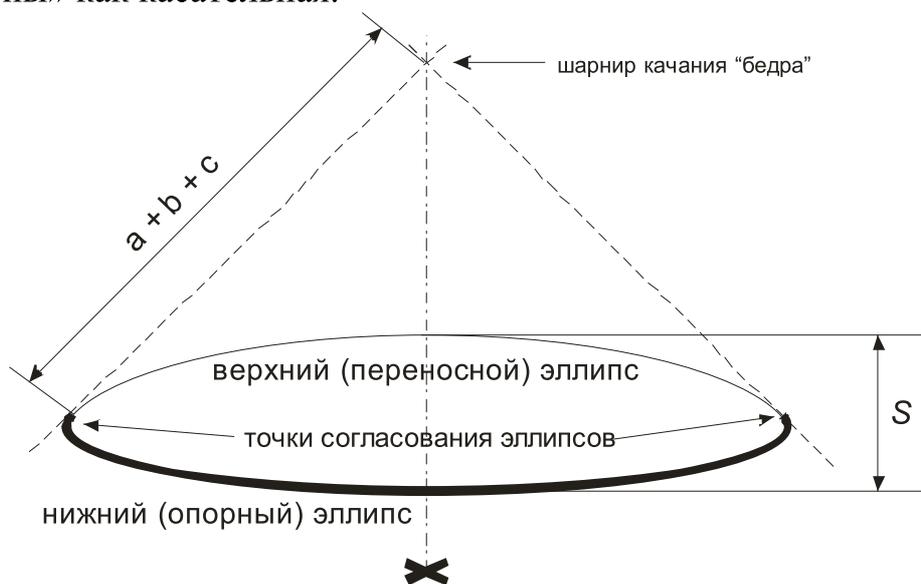


Рис. 3. Траектория движения стопы

Угловой коэффициент касательной к эллипсу, заданному параметрически, как известно, выглядит так:

$$\frac{R \operatorname{tg}(\rho)}{r}$$

где  $r$  и  $R$  – малый и большой радиусы эллипса,  $\rho$  – угловой параметр эллипса.

Следовательно, можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\mu) = -\frac{R \operatorname{tg}(\rho)}{r} \\ R \cos(\rho) \operatorname{tg}(\mu) + y_0 = r \sin(\rho) \end{cases}$$

где  $\operatorname{tg}(\mu)$  – угловой коэффициент касательной; а второе уравнение это касательная к эллипсу.

Подставляя первое уравнение во второе и упрощая, получаем решение:

$$\begin{aligned} \rho &= \arcsin\left(\frac{r y_0}{R^2 + r}\right), \\ \mu &= \operatorname{arctg}\left(-\frac{R}{r} \operatorname{tg}(\rho)\right). \end{aligned}$$

Шаг характеризуется двумя параметрами: длина и высота. Если длину мы учитываем как двойной радиус нижнего (опорного) эллипса (рис. 3), то высоту шага (на рис. 3 обозначена  $S$ ) надо задавать в уравнениях, в которых согласуются два эллипса.

Основное уравнение выглядит так:

$$y_{TC} + \Delta_{BЭ} = S - r_{НЭ},$$

где  $y_{TC}$  – ордината точки согласования;  $\Delta_{BЭ}$  – высота дуги верхнего эллипса;  $r_{НЭ}$  – малый радиус нижнего эллипса.

В этом уравнении неизвестная одна – это высота дуги верхнего эллипса.

Для однозначного решения требуется найти три параметра верхнего эллипса: оба радиуса и смещение эллипса от начала координат.

К несчастью, размер этой статьи не позволяет привести решение данной задачи.

В заключение можно сказать, что многоногий шагающий робот планируется разработать в ближайшее время и на нём будут использованы идеи, приведённые в данной статье.

#### Литература

1. Васильев И. А., Ляшин А. М. Классификация и аналитическое решение обратной кинематической задачи для шестизвенных манипуляторов. // «Искусственный интеллект». – №3. – 2004.
2. Vasilyev I., Lyashin A. Classification and analytical solution for inverse kinematical problem for 6-DOF manipulators // Труды конференции «Mechatronics & Robotics '04» Aachen – Germany, 2004.
3. Белецкий В. В. Двухногая ходьба. – М.: Наука, 1984.
4. Зациорский В. М., Аруин А. С., Селуянов В. Н. Биомеханика двигательного аппарата человека. – М.: Физкультура и спорт. – 1981.
5. Воробьев В. П. Атлас анатомии человека. – М.: МедГиз. – Т. 1, 1938.

## **ВЛИЯНИЕ ЗАРЯДНОГО ОБЪЕМА ГИДРОПНЕВМАТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА ПОДВЕСКИ НА ВИБРОНАГРУЖЕННОСТЬ АВТОМОБИЛЯ ПОВЫШЕННОЙ ПРОХОДИМОСТИ**

*А. С. Горбцов<sup>\*</sup>, Ю. А. Поляков<sup>\*\*</sup>, А. И. Лебедев<sup>\*\*\*</sup>*

*<sup>\*</sup>Волгоградский государственный технический университет*

*<sup>\*\*</sup>Национальный исследовательский*

*технологический университет «МИСиС», г. Москва*

*<sup>\*\*\*</sup>ООО «Военно-инженерный центр», г. Нижний Новгород*

Повышение эффективности решения задач, связанных с необходимостью совершенствования виброзащитных систем современных автотранспортных средств, неразрывно связано с необходимостью поиска новых технических решений, позволяющих широко использовать различные варианты управления жесткостными и демпфирующими характеристиками подвески непосредственно в процессе движения автомобиля. В связи с этим значительные перспективы имеет создание математических моделей автомобилей с адаптивными подвесками, дающими возможность отладки

конструкции подвески на этапе имитационного компьютерного моделирования.

Отличительной особенностью данной работы является постановка задачи в расширенной трактовке, что предполагает отказ от гипотезы малых перемещений тел, традиционно используемой при подобных расчетах, и позволяет осуществить достаточно полный учет в расчетной схеме автомобиля геометрической нелинейности движения элементов конструкции на базе дифференциально-алгебраических уравнений больших движений тел [1]. Под большими движениями здесь подразумевается общепринятый термин, означающий точное описание в уравнениях динамики угловой ориентации тела, без использования допущения о малости углов поворота.

Такой подход позволяет при создании динамической модели автомобиля более точно учитывать такие свойства, как пространственный характер движения, структуру расчетной схемы, различные нелинейности характеристик упругих и демпфирующих элементов, многомерные детерминированные и случайные возмущения, а также обеспечивать возможность включения моделей специфических взаимодействий, например, качение эластичного колеса.

Рассматривается многомассовая расчетная схема автомобиля повышенной проходимости с адаптивными гидропневматическими подвесками колес, учитывающая специфику кинематики элементов независимых подвесок и соответствующих упругодемпфирующих связей. Исследования динамики автомобиля проводились с помощью системы моделирования ФРУНД [1, 2].

Для динамической модели, расчетная схема которой представлена на рис. 1, все тела приняты абсолютно твердыми. Работа трансмиссии не учитывается, поэтому раздаточная коробка и соответствующие карданные валы в модели отсутствуют.

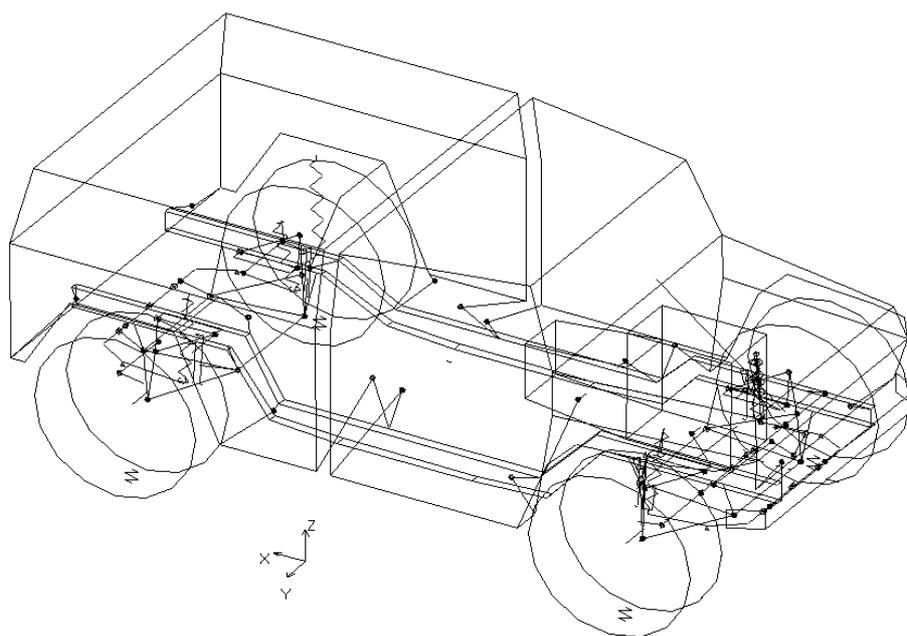


Рис. 1. Динамическая модель автомобиля с гидропневматическими подвесками

Динамическая модель рассматриваемого автомобиля содержит раму, кабину, фургон, силовой агрегат, направляющий аппарат подвески, элементы рулевого управления, колеса, связанные между собой соединительными элементами.

Кабина жестко крепится к раме в шести точках, кузов – также в шести точках. Продольно расположенный двигатель с коробкой передач в сборе установлен на раме на двух передних и двух задних виброизоляторах, имеющих одинаковые жесткостные и демпфирующие характеристики.

Особое внимание уделено независимым гидропневматическим подвескам колес (рис. 2). Функции упругого и демпфирующего устройств подвески совмещает в себе гидропневматический элемент. Его нижняя часть шарнирно крепится к оси нижнего рычага подвески, а верхняя – к кронштейну рамы автомобиля.

Направляющий аппарат подвески каждого из колес представлен двумя рычагами, качающимися в поперечной плоскости. Каждый верхний рычаг имеет V-образную форму, причем головки его крепления расположены в вершинах соответствующего треугольника. В отличие от верхнего, нижний рычаг подвески каждого колеса  $\nabla$ -образной конфигурации снабжен осью для шарнирного подсоединения к ней нижней головки крепления гидропневматического упругого элемента.

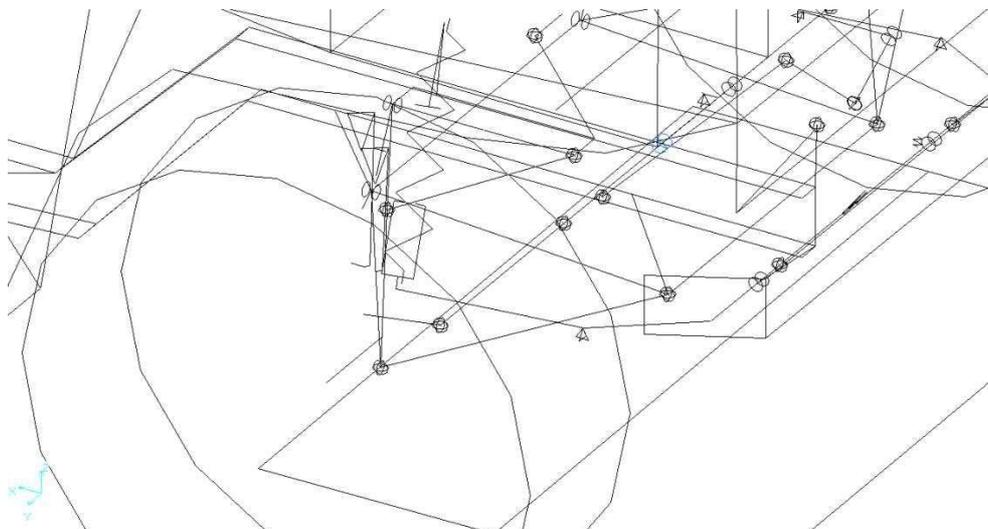


Рис. 2. Подвеска переднего правого колеса в составе динамической модели автомобиля

Две головки в основании рычага с помощью сайлент-блоков крепятся шарнирно к кронштейнам рамы. Чтобы подчеркнуть, что они имеют одну общую ось качания, в модели автомобиля каждый рычаг выполнен треугольным. Что касается головки в вершине рычага, то в составе передней подвески она шарнирно подсоединяется к цапфе поворотного кулака, который, в свою очередь, жестко крепится к ступице колеса. В конструкции задней подвески указанная головка рычага крепится шарнирно к цапфе ступицы заднего колеса.

Таким образом, в разработанной модели удастся учитывать особенности конфигурации направляющих рычагов и их крепления, что позволяет принимать во внимание особенности их кинематики.

Обеспечение противодействия поперечным кренам автомобиля достигается включением в состав модели переднего и заднего стабилизаторов поперечной устойчивости. Каждый из них представляется состоящим из двух половин, соединенных элементом с заданной крутильной жесткостью. Концевая часть каждой из таких половин с помощью серьги шарнирно подсоединяется к нижнему рычагу подвески, а средняя часть крепится через резиновые подушки к кронштейну рамы автомобиля.

Формирование уравнений движения системы тел основано на уравнениях Лагранжа первого рода [1]. Уравнения динамики механической системы состоят из уравнений свободного движения тел и уравнений связей от кинематических пар. Кроме кинематических пар, связи между телами могут задаваться силами от упруго-демпфирующих элементов, соединяющих тела.

Экспериментальные статические характеристики гидропневматического упругого элемента в виде зависимостей усилия от хода поршня в цилиндре (при различных зарядных объемах) приведены на рис. 3. Наибольшую жесткость характеристики, определяемую тангенсом угла наклона касательной к кривой в любой ее точке, имеет гидропневматический элемент с зарядным объемом  $700 \text{ см}^3$ . С увеличением зарядного объема жесткость характеристики значительно уменьшается.

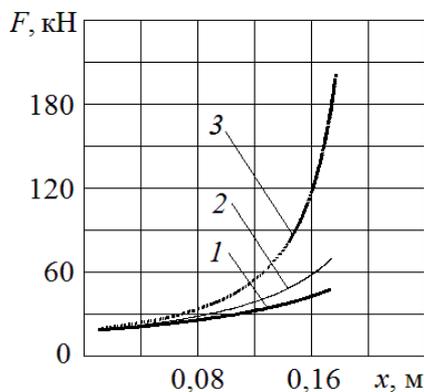


Рис. 3. Экспериментальные статические характеристики гидропневматического упругого элемента подвески при величине зарядного объема:  
 1 –  $1100 \text{ см}^3$ ; 2 –  $900 \text{ см}^3$ ; 3 –  $700 \text{ см}^3$

Уменьшение зарядного объема с  $900 \text{ см}^3$  до  $700 \text{ см}^3$  обуславливает значительное повышение уровня спектра вертикальных ускорений в низкочастотном диапазоне  $0,6 \dots 15 \text{ Гц}$  (рис. 4, 5), особенно в районе первого максимума, обусловленного эффектом базы [3, 4]. Наиболее близкие к экспериментальным данным результаты обеспечивает вариант с зарядным объемом  $900 \text{ см}^3$ .

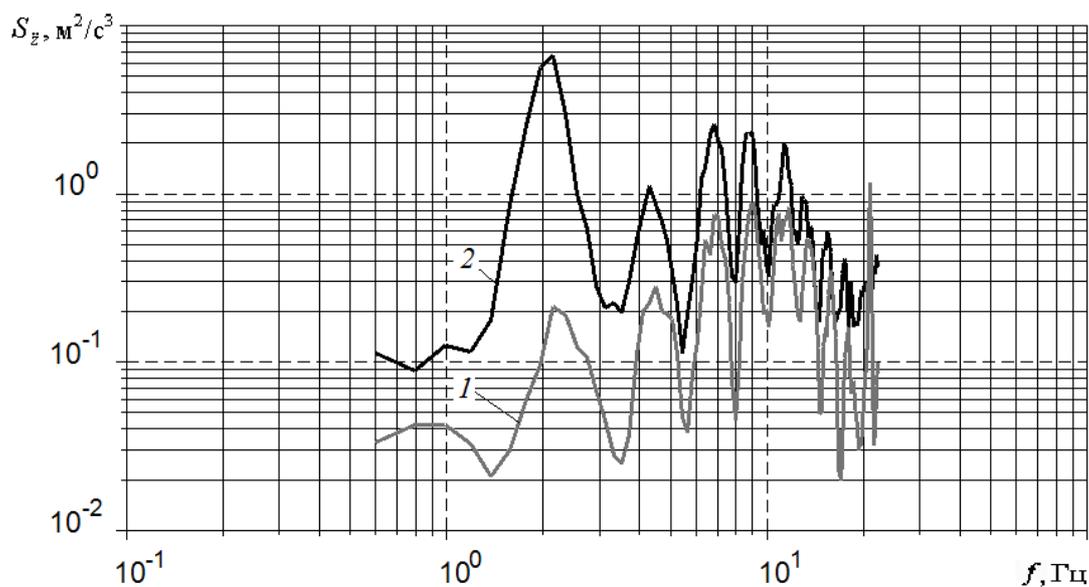


Рис. 4. Влияние зарядного объема гидропневматического элемента подвески на вибронгруженность автомобиля. Спектры вертикальных ускорений на полу кабины, под сиденьем водителя (ровный булыжник, 27 км/ч):

1 – расчет, зарядный объем 900 см<sup>3</sup>; 2 – расчет, зарядный объем 700 см<sup>3</sup>

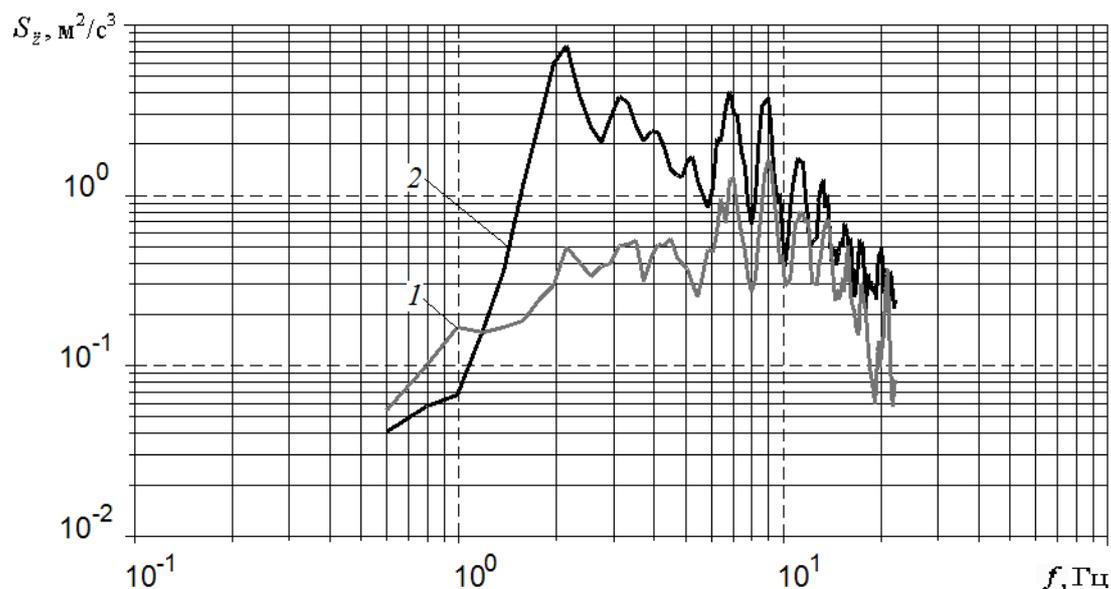


Рис. 5. Влияние зарядного объема гидропневматического элемента подвески на вибронгруженность автомобиля. Спектры вертикальных ускорений на левом лонжероне рамы, над задним левым колесом (ровный булыжник, 27 км/ч):

1 – расчет, зарядный объем 900 см<sup>3</sup>; 2 – расчет, зарядный объем 700 см<sup>3</sup>

### Выводы

1. Построена пространственная модель автомобиля повышенной проходимости с адаптивными гидропневматическими подвесками колес, которая позволяет выполнить оценку вибронгруженности конструкции с учетом больших движений твердых тел, точной кинематики элементов подвесок и особенностей их установки на автомобиле.

2. Уменьшение зарядного объема обуславливает значительное повышение уровня спектра вертикальных ускорений в низкочастотном диа-

пазоне 0,6...15 Гц, особенно в районе первого максимума, обусловленного эффектом базы [3, 4].

#### Литература

1. Горобцов А. С., Карцов С. К., Плетнев А. Е., Поляков Ю. А. Компьютерные методы построения и исследования математических моделей динамики конструкций автомобилей: монография. – М.: Машиностроение, 2011. – 463 с.
2. Горобцов А. С. Программный комплекс расчета динамики и кинематики машин как систем твердых и упругих тел // Справочник: инженерный журнал. – 2004. – № 9. – С. 40 – 43.
3. Ротенберг Р. В. Подвеска автомобиля. Колебания и плавность хода. – М.: Машиностроение, 1972. – 392 с.
4. Яценко Н. Н. Колебания, прочность и форсированные испытания грузовых автомобилей: монография. – М.: Машиностроение, 1972. – 372 с.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЦЕПНОГО И ТЕПЛОВОГО ВЗРЫВОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

*Е. А. Гришаева, А. В. Каленский, А. А. Звекон, И. Ю. Зыков*

*Кемеровский государственный университет*

Цели работы: Моделирование процессов цепного и теплового взрывов энергетических материалов; определение критериев, по которым можно судить о преобладании цепного или теплового механизмов самоускорения реакции.

Существуют две основные методики для определения природы взрывного разложения. Одна из них заключается в расчете и сравнении эффективных температур электронной и ионной подсистемы. Данная методика близка к исследованию состояния плазмы, когда электронная и ионная подсистема не находятся в равновесии. При цепном взрыве подобного равновесия также не наблюдается.

Если эффективная температура электронной подсистемы  $T_e$  значительно больше, чем температура  $T$  ионной подсистемы, то развивается цепной взрыв, если  $T_e \approx T$  – тепловой. В случае, когда обе температуры отличаются не более чем в 2 раза – цепно-тепловой взрыв.

Для вычисления эффективной электронной температуры используется выражение:

$$T_e = - \frac{E_g}{k \cdot \ln \left( \frac{n \cdot p}{Q_n \cdot Q_p} \right)}, \quad (1)$$

где  $E_g$  – термическая ширина запрещенной зоны,  $k$ -константа Больцмана,  $n$  и  $p$  – соответственно концентрация электронов и дырок, а  $Q_n$  и  $Q_p$  – эффективные плотности состояний электронов и дырок в зоне проводимости и валентной зоне соответственно.

Методика основана на описании электронной подсистемы с позиций статистики Максвелла-Больцмана, что делает ее обоснованной в пре-

деле малых концентраций электронных возбуждений. Вместе с тем существует и ряд недостатков такого подхода. В первую очередь, формула (1) применима только при относительно малых концентрациях электронов и дырок, когда они значительно меньше плотностей состояний в разрешенных зонах энергий. В противоположном пределе электронный газ становится вырожденным и для его описания должен использоваться квазиуровень Ферми. При большой концентрации, согласно (1), значение температуры оказывается отрицательным, а при  $n \cdot p / N_h \cdot N_e = 1$ , равной бесконечности. Наличие отрицательной температуры может рассматриваться как небольшое достоинство формулы, так как при равновесных условиях данные значения недостижимы. Соответственно, если эффективная температура отрицательна, значит взрыв – цепной.

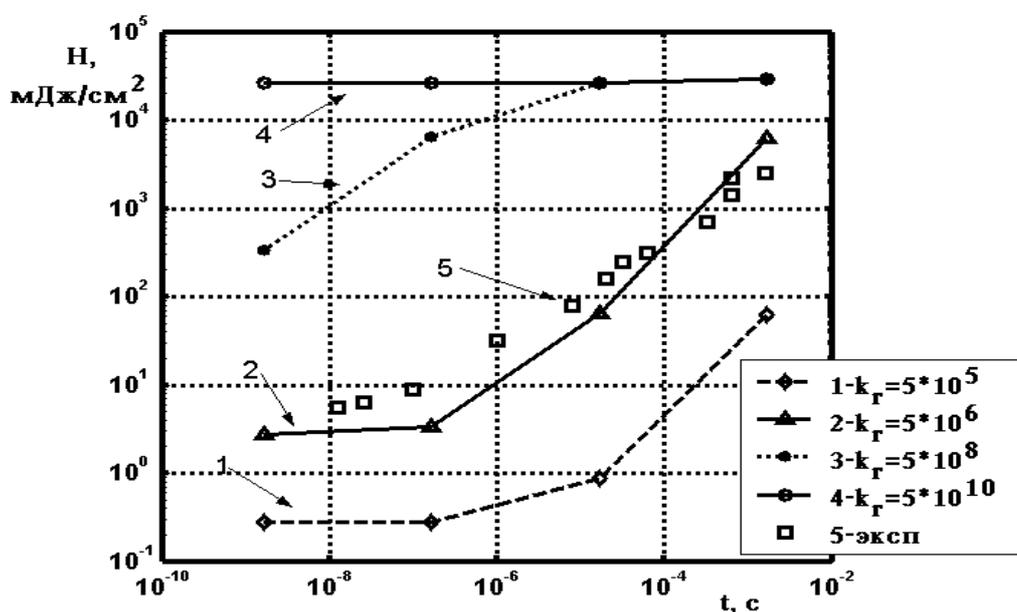


Рис. 1. Зависимость критической плотности энергии инициирования взрывного разложения от длительности импульса:  
1-4 – рассчитанные при различных константах скорости рекомбинации,  
5 – экспериментальная [2].

В случае появления бесконечной температуры происходит усложнение применения формулы при анализе численных результатов. Так же, формула (1) не учитывает степень выгорания и поэтому дает приблизительную оценку электронной температуры. Достоинством такого подхода является простота использования и наглядность результатов.

Следующая методика основана на анализе зависимости скорости реакции разложения от температуры образца. Как известно, температурная зависимость скорости термически активируемой реакции описывается уравнением Аррениуса. Это уравнение можно применить к полученным экспериментальным или расчетным данным и оценить эффективную энергию активации процесса. Предположим, что реакция развивается преимущественно по цепному механизму. Тогда быстрый рост скорости разложе-

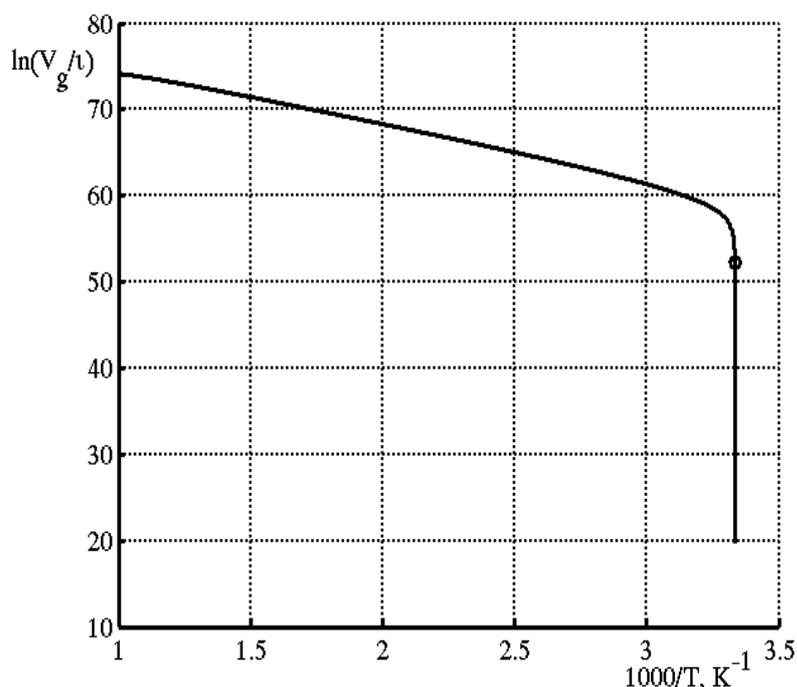
ния будет сопровождаться увеличением концентрации носителей цепи без ощутимого роста температуры. Соответственно, величина эффективной энергии активации будет очень большой. В противоположном случае теплового взрыва, эффективная энергия активации будет не столь велика, и ее значение будет приблизительно соответствовать энергии активации стационарного разложения (если смены лимитирующей стадии не происходит). Но, четких границ изменения эффективной энергии активации для цепного и теплового взрыва установить не удастся, поскольку они будут, определяется конкретным веществом.

В рамках неизотермической модели разветвленной цепной реакции взрывного разложения энергетических материалов [1] возможна преимущественная реализация как цепного, так и теплового механизма положительной обратной связи. Для определения условий, в которых разложение развивается преимущественно по цепному либо по тепловому механизму, была рассчитана зависимость критической плотности энергии от длительности импульса при различных значениях константы рекомбинации (рис. 1). Зависимости 1 и 2 соответствуют условиям низких и типичных для монокристаллов АС значениях константы рекомбинации. В этом случае реакция развивается преимущественно по цепному механизму. На начальном участке, когда константа рекомбинации много меньше обратной длительности импульса критерием инициирования является плотность энергии, которая линейно зависит от константы рекомбинации. При увеличении длительности импульса критерием становится плотность мощности излучения. На зависимости 3 наблюдается переход от цепного механизма инициирования при малой длительности импульса к тепловому при большой длительности. В случае зависимости 4 значение константы рекомбинации столь велико, что все носители цепи, генерирующиеся цепной реакцией гибнут. Соответственно в этой области процесс развивается по тепловому механизму, и порог инициирования определяется соотношением скоростей генерации тепла в химической реакции и теплоотвода. Следовательно, проявление цепного или теплового взрыва определяется произведением длительности воздействия и константы скорости рекомбинации носителей цепи.

Таким образом, при инициировании взрывного разложения излучением в зависимости от константы скорости рекомбинации электронно-дырочных пар и длительности импульса могут реализоваться цепной, тепловой и цепно-тепловой взрыв. На поздних стадиях, когда происходит значительный нагрев, может происходить переход к сугубо тепловому взрыву из-за характерной для него более сильной температурной зависимости скорости разложения.

Зависимость скорости реакции разложения (деленной на долю возбужденных узлов решетки –  $\nu$ ) от обратной температуры, приведенная на рис. 2, доказывает смену цепного механизма самоускорения на тепловой. На начальном участке, соответствующем импульсному воздействию,

происходит резкий рост скорости разложения при почти неизменной температуре. Эффективная энергия активации, составляющая на 1-м участке 82900 эВ, отражает быстрое ускорение реакции при почти неизменной температуре за счет увеличения концентрации реагентов, генерируемых импульсом. Следующий нелинейный участок зависимости продолжается практически до конца индукционного периода, при этом температура поднимается на 10 – 30 К. После этого наблюдается прямолинейный участок, отражающий переход к тепловому взрыву. Эффективная энергия активации уменьшается до 0.577 эВ и не совпадает ни с одной из энергий активаций элементарных стадий.



*Рис. 2. Рассчитанная зависимость скорости реакции взрывного разложения азида серебра от обратной температуры при иницировании импульсом длительностью 20 нс.*

Наличие первого участка определяется характерным временем трансформации энергии импульса в тепло ( $t$ ). Если поглощенная энергетическими материалами энергия в основном тратится на генерацию электронно-дырочных пар (примесное поглощение), то  $t \sim 10^{-6}$  с [3]. При длительности импульса  $10^{-8}$  с обязательно будет наблюдаться кинетический участок с аномально высокой эффективной энергией активации, который невозможно интерпретировать в рамках модели теплового взрыва.

В тех случаях, когда длительность импульса и время диссипации энергии в тепло сопоставимы, необходимо проводить исследования в рамках моделей цепно-теплового или теплового взрыва с изменяющимися в ходе процесса эффективными энергиями активации. Подобная ситуация

возникает, если поглощение импульсного излучения осуществляется преимущественно на металлических центрах; значительно увеличена константа скорости рекомбинации электронно-дырочных пар (например, в микрокристаллах за счет поверхностной рекомбинации); длина волны попадает в область собственного поглощения.

### Заключение

В рамках неизотермической модели разветвленной цепной реакции взрывного разложения энергетических материалов рассчитаны кинетические закономерности и зависимости критической плотности энергии от длительности импульса при различных значениях константы рекомбинации. Предложены критерии идентификации механизма взрыва. Первый из них использует зависимость скорости реакции разложения от текущей температуры образца, Второй основан на сопоставлении длительности воздействия и скорости рекомбинации носителей цепи. Критерии апробированы на модели цепно-теплового взрыва азида серебра. Определены области, в которых разложение развивается преимущественно по цепному механизму, либо по тепловому механизму.

Было показано, что цепной характер взрыва, инициированного излучением, может наблюдаться на начальных стадиях при коротких длительностях импульса и при относительно малых значениях константы рекомбинаций. Тепловой взрыв может наблюдаться при стационарных воздействиях и при больших значениях константы рекомбинаций. В промежуточной области возможны гибридные режимы цепно-теплового взрыва. На более поздних стадиях происходит переход к тепловому механизму, из-за более сильной температурной зависимости скорости разложения в случае теплового механизма.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-03-00897.*

### Литература

1. Гришаева, Е. А. Неизотермическая модель разветвленной цепной реакции взрывного разложения / Е. А. Гришаева, А. В. Каленский, М. В. Ананьева, А. А. Звекон // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения* – 2013. – т. 10. – № 1. – С. 44-49.
2. Александров, Е. И. Исследование влияния длительности возбуждающего импульса на чувствительность азид свинца к действию лазерного излучения / Е. И. Александров, В. П. Ципилев // *Физика горения и взрыва*. – 1984. – Т. 20. – № 6. – С. 104 – 108.
3. Кригер, В.Г. Единый механизм фото- и радиационно-стимулированного разложения азидов тяжелых металлов / В. Г. Кригер, А. В. Каленский, Ю. А. Захаров // *Материаловедение*. – 2005. – № 7. – С. 10 – 15.

**КЛАСТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССА РАЗЛОЖЕНИЯ  $\text{KN}_3$  И  $\text{AgN}_3$**   
*Ю. Н. Журавлев, Н. Г. Кравченко, А. С. Поплавной*  
*Кемеровский государственный университет*

Азиды металлов способны к различным видам медленного разложения (термолиз, радиолиз, фотолиз, электрополевое разложение, разложение под действием механических напряжений). Кроме того, в отличие от азидов щелочных металлов, азиды тяжелых металлов подвержены дополнительно и взрывному разложению и являются иницирующими взрывными веществами. Однако, несмотря на многочисленные исследования процессы, происходящие при разложении азидов так и остаются до конца не исследованными. В настоящее время существует несколько моделей разложения азидов металлов, которые носят мономолекулярный или бимолекулярный характер [1-7]. Считается, что во втором случае реакция идет через промежуточный продукт – комплекс  $\text{N}_6$ .

В теоретических исследованиях разложения азидов выделяется работа [8], где неэмпирическим методом молекулярной динамики с помощью программы VASP проведены исследования структуры и стабильности кристаллического азида серебра при температурах 298, 473, 498, 523, 548, и 573 К, моделирование проводилось для суперячейки  $2 \times 2 \times 2$  (128 атомов), начальные координаты атомов были взяты из данных рентгеноструктурного анализа. Показано, что при температурах от 0 до 473 К атомы колеблются, однако их среднее положение совпадает с кристаллическим. Проведенные в работе исследования показали, что разрыв связи N-N и разрушение анионной подрешетки происходит при температуре 523 К, а при температуре 573 К у азида серебра появляются металлические свойства. В работе предложен следующий механизм разложения: колебания  $\text{Ag}^+$  и  $\text{N}_3^-$  приводит к их столкновению, и заряд переносится с  $\text{N}_3^-$  на  $\text{Ag}^+$ . Затем азид распадается и формируется радикал азота:  $\text{Ag}^+ + \text{N}_3^- \rightarrow \text{Ag}-\text{N}-\text{N}-\text{N} \rightarrow \text{Ag}-\text{N}-\text{N} + \text{N}$ .

В настоящей работе с использованием теории функционала электронной плотности в приближении гибридного обменно-корреляционного функционала B3LYP в базисах TZV для азиды калия и 3-21G для азиды серебра с помощью квантово-химической программы Firefly [9-10] проведены теоретические исследования геометрической структуры кластеров азидов калия и серебра, а также сделана попытка моделирования с их помощью процессов разложения в азиды.

При рассмотрении процессов разложения азидов интерес представляют кластеры максимально геометрически близкие к фрагментам соответствующих кристаллов. В этом случае точечная симметрия кристаллографической ячейки по возможности должна сохраняться, а заряд кластера быть минимальным. В соответствии с указанными требованиями для моделирования были выбраны  $M_7(\text{N}_3)_8^-$  и  $M_7(\text{N}_3)_8^0$ , представленные на рис. 1.

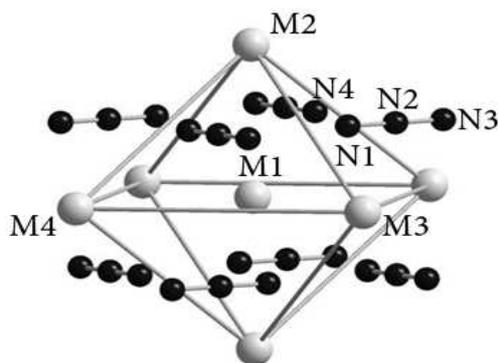


Рис. 1. Геометрическая структура кластеров  $M_7(N_3)_8^-$  и  $M_7(N_3)_8^0$  (M: K, Ag)

Полученные длины связей и валентные углы в сравнении с кристаллическими [11, 12], а также полная энергия для найденных равновесных структур представлены в табл. 1.

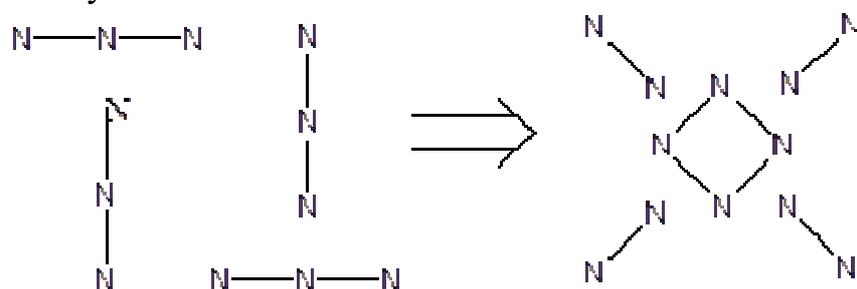
Таблица 1

**Геометрические характеристики и полная энергия  $E_t$  кластеров  $M_7(N_3)_8^-$  и  $M_7(N_3)_8^0$  (M: K, Ag)**

	$KN_3$ [11]	$K_7(N_3)_8^-$	$K_7(N_3)_8^0$
$E_t$ , Ha	-	-5514.35203	-5514.19663
$K_1-K_2$ (Å)	3.5315	3.25670	3.37497
$K_1-K_3$ (Å)	4.3515	3.83021	4.08077
$K_3-K_4$ (Å)	6.1540	5.41673	5.77107
$K_1-N_2$ (Å)	3.5476	3.73066	3.59425
$K_2-N_2$ (Å)	3.5476	3.54443	3.51370
$N_1-N_2$ (Å)	1.1736	1.18676	1.18663
$N_2-N_3$ (Å)	1.1736	1.16504	1.16280
$N_2-N_4$ (Å)	3.1779	3.41589	3.23662
$\angle N_1-N_2-N_3$	180°	179.188°	179.456°
$\angle N_3-N_2-N_4$	90.029°	97.706°	92.378°
	<b><math>AgN_3</math> [12]</b>	<b><math>Ag_7(N_3)_8^-</math></b>	<b><math>Ag_7(N_3)_8^0</math></b>
$E_t$ , Ha	-	-37540.99810	-37540.85831
$Ag_1-Ag_2$ (Å)	2.9990(5)	2.70382	2.70441
$Ag_1-Ag_3$ (Å)	4.0964(22)	3.49896	3.54612
$Ag_3-Ag_4$ (Å)	5.600(1), 5.980(6)	4.94828	4.45967
$Ag_1-N_2$ (Å), $Ag_1-N_4$ (Å)	3.3449(27), 3.1762(5)	3.35785	3.31094
$Ag_2-N_2$ (Å), $Ag_2-N_4$ (Å)	3.3449(27), 3.1762(5)	3.18097	3.16671
$N_1-N_2$ (Å)	1.1877(29)	1.21803	1.22043
$N_2-N_3$ (Å)	1.1877(29)	1.19233	1.18861
$N_2-N_4$ (Å)	2.9149(34)	2.99754	2.95186
$\angle N_1-N_2-N_3$	180°	177.765	177.215°
$\angle N_3-N_2-N_4$	90.820°	91.458	90.475°

В полученных кластерах расстояние  $N_2-N_4$  между соседними азидными группами по сравнению с кристаллическим увеличивается с  $3.177 \text{ \AA}$  ( $\text{KN}_3$ ),  $2.9149(34)$  ( $\text{AgN}_3$ ) до  $3.41589$ ,  $2.99754 \text{ \AA}$  (в  $M_7(N_3)_8^-$ ) и  $3.23662$ ,  $2.95186 \text{ \AA}$  (в  $M_7(N_3)_8^0$ ) соответственно. В самих азидных группах длины связей N-N становятся неэквивалентными, расстояние  $N_1-N_2$  увеличивается с  $1.1736$  ( $\text{KN}_3$ ) и  $1.1877(29) \text{ \AA}$  ( $\text{AgN}_3$ ) до  $1.18676$ ,  $1.21803$  в  $M_7(N_3)_8^-$  и  $1.18663$ ,  $1.22043 \text{ \AA}$  в  $M_7(N_3)_8^0$ . Длина связи  $N_2-N_3$  становится меньше чем  $N_1-N_2$  и сравнима с аналогичным расстоянием в кристалле. Расстояния между атомами металла уменьшаются: так, расстояния между катионными слоями и между ближайшими атомами одного катионного слоя в кристалле  $\text{KN}_3$  равны  $3.5315 \text{ \AA}$  и  $4.3515 \text{ \AA}$  соответственно, в кластерах  $K_7(N_3)_8^-$  и  $K_7(N_3)_8^0$  они составляют  $3.25670$ ,  $3.83021 \text{ \AA}$  и  $3.37497$ ,  $4.08077 \text{ \AA}$ . Для азида серебра наблюдается аналогичная картина: кристаллические расстояния составляют соответственно  $2.9990(5)$ ,  $4.0964(22)$ , в  $\text{Ag}_7(N_3)_8^-$  и  $\text{Ag}_7(N_3)_8^0$  они равны соответственно  $2.70382$ ,  $3.49896 \text{ \AA}$  и  $2.70441$ ,  $3.54612 \text{ \AA}$ .

В различных работах неоднократно выдвигались предположения о возможности образовании комплексов  $N_6$  при наличии катионной вакансии. Еще одна гипотеза касалась возможности образования подобных комплексов на поверхности кристалла, когда ее часть представляет собой анионный слой. В этом случае могла бы быть возможна следующая перестройка на поверхности азидов с выделением и последующим отделением концевых молекул азота:



Для исследования этих предположений возможно построить соответствующие модели на основе рассмотренного выше кластера  $M_7(N_3)_8^-$ , при этом в нем убирается один либо центральный атом (рис. 2а), либо верхний атом (рис. 2b) металла.

Расчеты показывают, что при оптимизации геометрии происходит перестройка структуры 2b таким образом, что центральные атомы металла «подтягиваются» и размещаются в центре анионных слоев так, что структура получается «трехслойной» и близкой к 2а: крайние слои состоят из четырех Т-образно размещенных азидных групп, в центре которых располагается атом металла (рис. 3). Средний слой образуют атомы металла. Таким образом, проведенные расчеты показали, что кластер со структурой типа «поверхность» существовать не может.

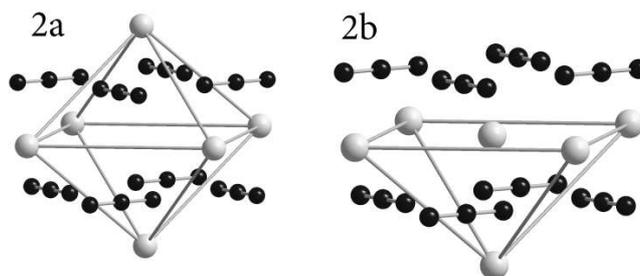


Рис. 2. Кластеры  $M_6(N_3)_8$  ( $M$ : K, Ag), моделирующие катионную вакансию и элемент поверхности

Следовательно, в кластерах  $M_7(N_3)_8^-$ ,  $M_7(N_3)_8^0$ ,  $M_6(N_3)_8$  принципиальной перестройки взаимного положения азидных групп по отношению к их расположению в кристалле не возникает, во всех случаях сохраняется их Т-образная ориентация. Кроме того, во всех рассмотренных кластерах сохраняется ось симметрии 4-го порядка.

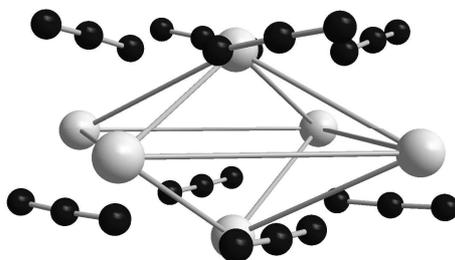


Рис. 3. Равновесная структура кластера  $M_6(N_3)_8$  ( $M$ : K, Ag).

На основе рассмотренного выше кластера  $M_7(N_3)_8^0$  была предпринята попытка провести моделирование процесса разложения азидов с участием атомарного азота. Как показано в [8], в результате термального распада азида серебра формируется атомарный азот. В этом случае может возникнуть ситуация, когда атом N окажется вблизи азидной группы и может возникнуть система  $+N$ . Проведенные вычисления показали, что атомарный азот присоединился к одной из азидных групп, вследствие чего происходит ее отделение и развал:  $N_3 + N = 2N_2$  (рис. 4).

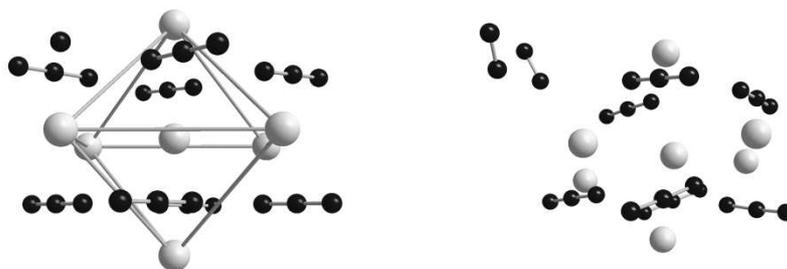


Рис. 4. К разложению азидов. Присоединение атомарного азота к кластеру  $M_7(N_3)_8^0$  с последующим отделением  $2N_2$ .

## Литература

1. Захаров В. Ю., Крашенинин В. И., Газенаур Е. Г., Гасанов А. И., Якунина В. И. Физико-химические процессы в азидах тяжелых металлов и дислокационная структура // Известия вузов. Физика. – 2002. – Т. 53. – №6. – С. 17.
2. Захаров Ю. А., Алукер Э. Д., Адуев Б. П., Белокуров Г. М., Кречетов А. Г. Предвзрывные явления в азидах тяжелых металлов. – М.: ЦЭИ “Химмаш”, 2002. – 115 с.
3. Бирюков А. С. Элементарные процессы при термическом разложении азидов натрия/ А. С. Бирюков, Е. Д. Булатов, С. А. Гридин, В. М. Марченко, А. М. Прохоров // Химическая физика. – 1985. – Т.4, №1. – С. 79.
4. Адуев Б. П., Алукер Э. Д., Белокуров Г. М., Захаров Ю. А., Кречетов А. Г. Исследование взрывного разложения азидов серебра методами спектроскопии с высоким временным разрешением // Известия вузов. Физика. – Т. 39. – 1996. – №11. – С. 162.
5. Willis J. S., Arsenault J. EPR measurements of the time dependence of color centers in potassium azide // Phys. Rev. B. – 1982. – Vol. 25. – P. 2843.
6. Workentin M. S., Wagner B. D., Negri F., Zgierski M. Z., Luszyk J., Siebrand W., Wayner D. D. M.  $N_6^{*}$ . Spectroscopic and Theoretical Studies of an Unusual Pseudohalogen Radical Anion // J. Phys. Chem. – 1995. – Vol. 99. – P. 94.
7. Schmidt C. L., Dinnebier R., Wedig U., Jansen M. Crystal Structure and Chemical Bonding of the High-Temperature Phase of  $AgN_3$  // Inorg. Chem. – 2007. – Vol. 46. – P. 907.
8. Weihua Z., Heming X. Ab Initio Molecular Dynamics Study of Temperature Effects on the Structure and Stability of Energetic Solid Silver Azide // J. Phys. Chem. C. – 2011. – Vol. 115. – P. 20782.
9. Alex A. Granovsky, Firefly version 7.1.G, www <http://classic.chem.msu.su/gran/firefly/index.html>
10. Schmidt M. W., Baldrige K. K., Boatz J. A., Elbert S.T., Gordon M. S., Jensen J. H., Koseki S., Matsunaga N., Nguyen K. A., Su S., Windus T. L., Dupuis M., Montgomery J. A. General atomic and molecular electronic structure system // J. Comput. Chem. – 1993. – Vol. 14. – P. 1347.
11. Zhu W., Xiao J., Xiao H. Comparative first-principles study of structural and optical properties of alkali-metal azides // J. Phys. Chem. B. – 2006. – Vol. 110. – P. 9856.
12. Guo G., Wang Q., Mak T. C. W. Structure refinement and Raman spectrum of silver azide // J. Chem. Crystallography. – 1999. – Vol. 29. – P. 561.

## КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ КОРОТКОПЕРИОДИЧНЫХ СВЕРХРЕШЕТОК $AlAs/AlP$

*А. В. Копытов, Е. Н. Малышева, А. В. Кособуцкий*  
*Кемеровский государственный университет*

В настоящей работе выполнены расчеты из первых принципов фоновых мод короткопериодичных сверхрешеток (СР)  $(AlAs)_n(AlP)_n$  (001) с числом монослоев  $n = 1 - 3$ .

Расчеты фоновых спектров проводились в рамках теории возмущения функционала плотности с использованием сохраняющих норму псевдопотенциалов. Электронные волновые функции раскладывались по плоским волнам с максимальной кинетической энергией 30 Ry; интегрирование по зоне Бриллюэна велось на  $k$ -сетке  $4 \times 4 \times 4$ . Обменно-

корреляционные эффекты учитывались в рамках приближения локальной плотности. Все численные результаты были получены с помощью программного пакета Quantum ESPRESSO [4].

Разность в значениях постоянных решеток объемных композитов приводит к появлению напряжения в слоях CP AlAs/AIP. Так, слои AIP растягиваются, а слои AlAs сжимаются, это приводит к более низкой симметрии ( $C_{2v}$ ), по сравнению с симметрией согласованных CP ( $D_{2d}$ ). Поэтому перед проведением расчетов колебательных мод CP выполнялась предварительная оптимизация их структурных параметров.

Результаты расчетов фононных спектров объемных кристаллов AIP и AlAs хорошо согласуются с экспериментальными данными. Так, полученные нами значения частот поперечных (TO) и продольной мод (LO) AIP в точке  $\Gamma - \omega_{TO} = 443 \text{ см}^{-1}$  и  $\omega_{LO} = 496 \text{ см}^{-1}$  близки к результатам комбинационного рассеяния (КР), которые дают  $\omega_{TO} = 440 \text{ см}^{-1}$ ,  $\omega_{LO} = 501 \text{ см}^{-1}$  [5]. Величина LO-TO расщепления AIP ( $53 \text{ см}^{-1}$  в настоящей работе и  $61 \text{ см}^{-1}$  из [5]) свидетельствует о его большой динамической ионности, связанной с величиной эффективного заряда Борна. При  $\mathbf{k} \rightarrow L$  по линии  $\Lambda$  происходит понижение LO ветви относительно TO ветви, чего не наблюдается в соединениях Al с более массивными атомами чем фосфор – AlAs.

Тетрагональная ячейка монослойной CP содержит четыре атома, поэтому фононный спектр  $(\text{AlAs})_1(\text{AIP})_1$  включает в себя 12 отдельных ветвей.

На рисунках 1–3 представлены спектры колебаний CP  $(\text{AlAs})_1(\text{AIP})_1$ ,  $(\text{AlAs})_2(\text{AIP})_2$ ,  $(\text{AlAs})_3(\text{AIP})_3$  в симметричных направлениях зоны Бриллюэна. Как видно из рис. 1, в спектре монослойной CP можно выделить два интервала разрешенных частот, верхняя граница находится при  $\sim 460 \text{ см}^{-1}$ . Акустические колебания объемных кристаллов AlAs и AIP находятся в одинаковом интервале частот, поэтому новая периодичность, накладываемая последовательностью слоев разных объемных компонентов, не оказывает влияния на распространение акустических фононов. Происхождение колебательных мод нижнего диапазона (до  $280 \text{ см}^{-1}$ ) связано со сверткой акустических ветвей объемных компонентов вследствие уменьшения зоны Бриллюэна CP. С увеличением числа монослоев наблюдается повышение верхней границы спектра исследуемых CP.

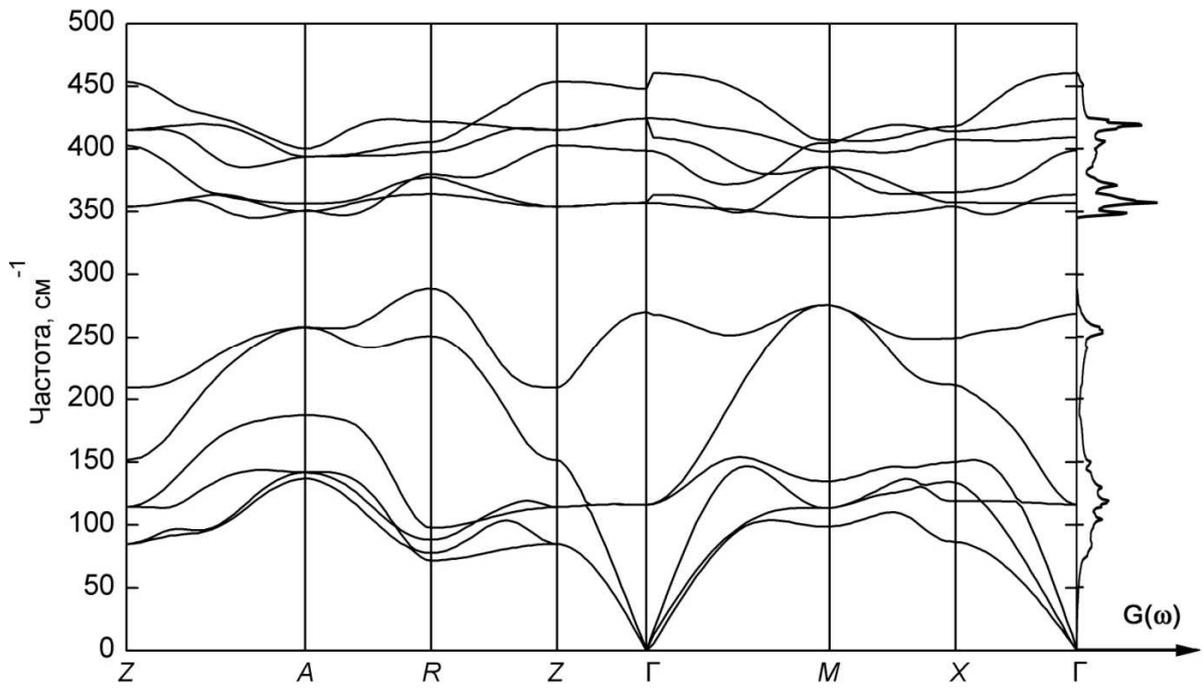


Рис. 1. Фононный спектр и плотность состояний монослойной CP (AlAs)<sub>1</sub>(AIP)<sub>1</sub>

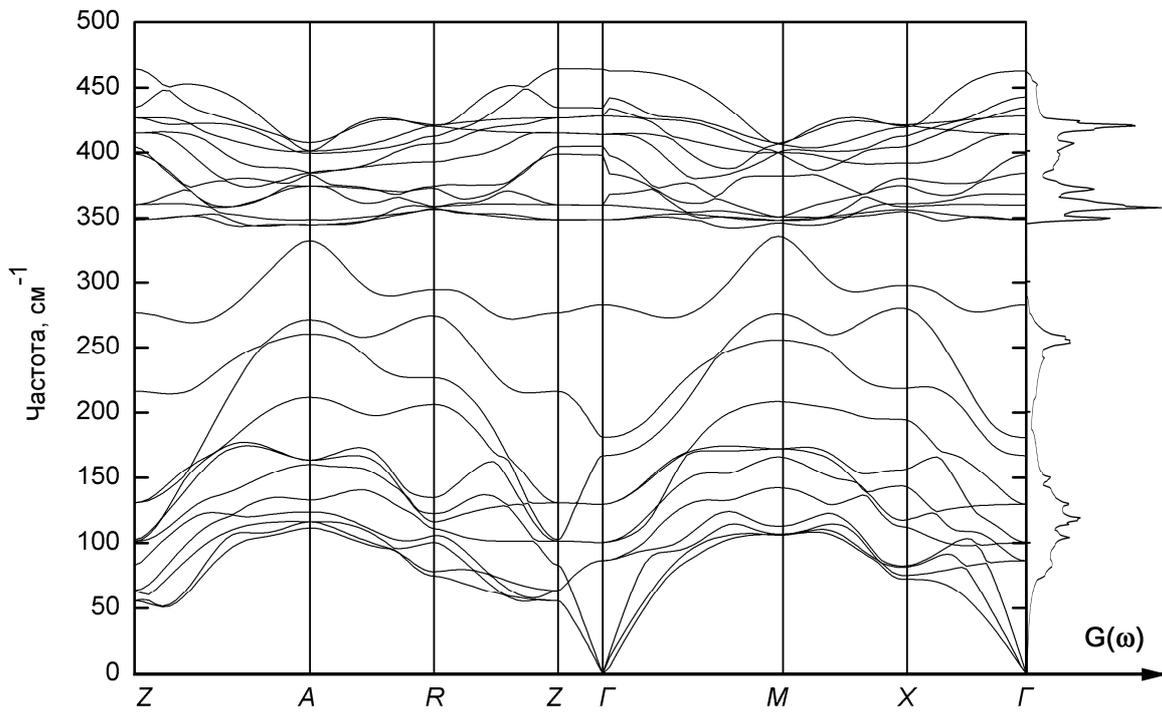


Рис. 2. Фононный спектр и плотность состояний CP (AlAs)<sub>2</sub>(AIP)<sub>2</sub>

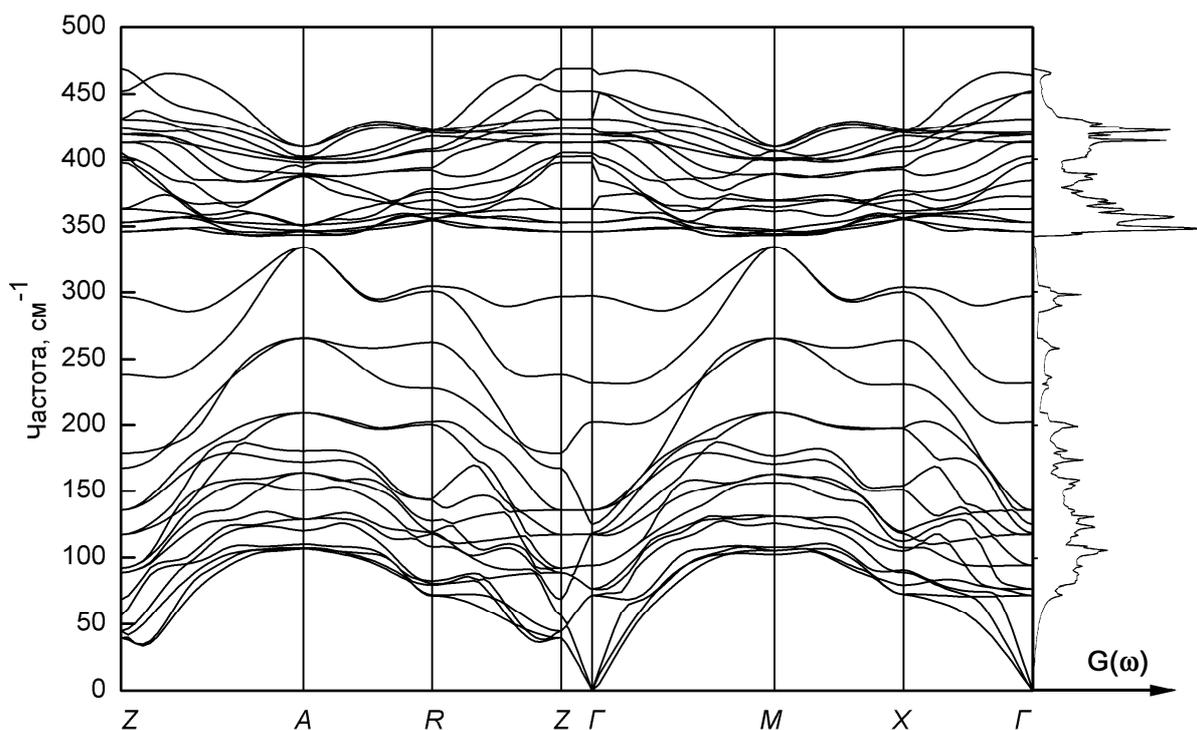


Рис. 3. Фононный спектр и плотность состояний СР  $(AlAs)_3(AIP)_3$

В табл. 1 представлены результаты расчетов периода решетки  $d$  и частот, активных в ИК-спектре в зависимости от числа монослоев. Теоретические результаты для величины  $d$  несколько меньше экспериментальных, что обусловлено применяемым в расчетах приближением локальной плотности, а также погрешностями эксперимента [3].

**Таблица 1.** Теоретический и экспериментальный период СР  $(AlAs)_n(AIP)_n$  в зависимости от числа монослоев  $n$  и рассчитанные частоты AlAs- и AIP-подобных ТО и LO-мод, активные в ИК-спектре.

Число монослоев	Период СР, Å		Частоты AlAs-подобных мод, $cm^{-1}$		Частоты AIP-подобных мод, $cm^{-1}$	
	Теория	Эксперимент [3]	ТО	LO	ТО	LO
1	5,458	5,60	357,1	–	424,4	448,0
2	10,908	11,1	360,0	404,9	428,2	464,3
3	16,362	16,6	363,2	405,4	431,1	469,1
4	21,820	21,9	365,2	405,8	433,0	471,0
5	27,272	26,6	366,4	405,9	434,1	472,4

На рис. 2 представлена в графическом виде зависимость AIP-подобных и AlAs-подобных LO-мод от числа монослоев в сравнении с результатами измерений. Соединяющая теоретические данные линия проведена для удобства. Квадратами отмечены экспериментальные значения [6], полученные методом КР-спектроскопии, кружки – наш расчет. Влияние эффектов размерного квантования на фононный спектр напряженных СР

AlAs/AlP проявляется в понижении частот AlAs- и AlP-подобных мод по сравнению с их значениями в объемных кристаллах. В случае рассогласования постоянных решеток, имеющегося в изучаемых системах, дополнительное влияние на сдвиг частот оказывает также механическое напряжение в слоях CP. Действие этих эффектов различно: для AlP-подобных мод вследствие растяжения слоев AlP в CP оба этих эффекта складываются, что приводит к занижению частот, тогда как в случае AlAs-подобных мод их влияния противоположно, поскольку слои AlAs в CP испытывают сжатие. Именно эти закономерности определяют вид кривых, изображенных на рис. 2.

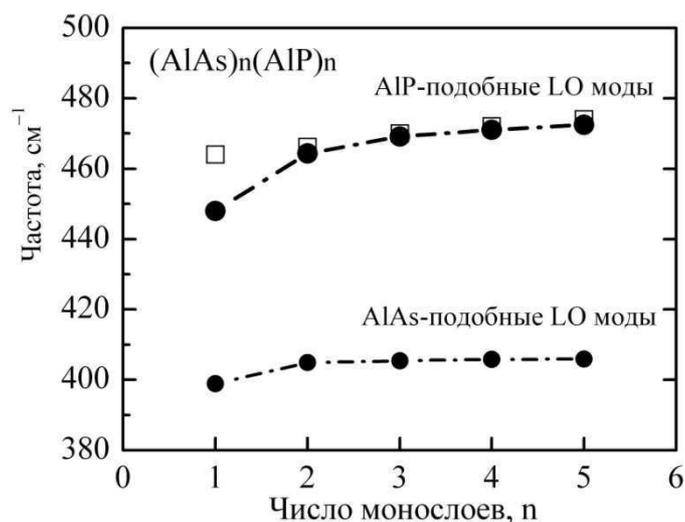


Рис. 2. Зависимость частот TO и LO фононов CP  $(AlAs)_n(AlP)_n$  от числа монослоев n. Линия соединяет теоретические значения (кружки). Квадраты – экспериментальные данные [6]

Как видно из рис. 2, наши значения хорошо согласуются с экспериментальными при  $n = 2-5$ , тогда как в случае монослойной CP между теоретическими и экспериментальными результатами наблюдается отличие. Одной из наиболее очевидных причин, по-видимому, является несовершенство кристаллической структуры исследованных в [3, 6] CP  $(AlAs)_1(AlP)_1$ . Согласно оценкам состояния гетерограницы, выполненным в [3] на основании рентгеноструктурных данных, ширина области с несовершенной структурой для  $(AlAs)_1(AlP)_1$  составляет  $0,17 \text{ \AA}$ . Перемешивание атомов на гетерогранице способно существенно повлиять на колебательные частоты, что особенно заметно в случае короткопериодных CP. Другой возможной причиной различий между теорией и экспериментом может быть влияние подложки, в качестве которой в [3] был выбран GaAs. Вследствие рассогласования постоянных решеток AlP и GaAs, материал подложки будет приводить к дополнительной деформации слоев AlP, что обеспечит сдвиг фононных частот.

Таким образом, в нашей работе на основе проведенных расчетов из первых принципов проведено численное моделирование фононных спек-

тров полупроводниковых СР AlAs/AIP. При этом естественным образом были учтены как эффекты размерного ограничения, так и напряжения в слоях СР. Полученные результаты могут быть использованы при анализе экспериментальных данных для изучаемых гетероструктур, например, при оценке состояния интерфейса.

#### Литература

1. Ohnuma T., Nagano M. Indirect-to-direct transition of (AlAs)<sub>n</sub>/(AlP)<sub>n</sub> strained short-period superlattices // Jpn. J. Appl. Phys. 2000. V. 39. L972. P. L972-L974.
2. Oishi Y., Nagano M., Ohnuma T. Structural characterization of AlAs/AIP superlattices // Appl. Phys. Lett. 2000. V. 76. P. 3885–3886.
3. Oishi Y., Nagano M., Ohnuma T. Epitaxial growth and structural characterization of AlAs/AIP superlattices // J. Cryst. Growth. 2001. V. 227-228. P. 271-274.
4. Giannozzi P., Baroni S., Bonini N. et al. QUANTUM ESPRESSO: a modular and open-source software project for quantum simulations of materials // J. Phys.: Condens. Matter. 2009. V. 21. № 39. P. 395502.
5. Mahan G.D., Gupta R., Xiong Q., Adu C.K., Eklund P.C. Optical phonons in polar semiconductor nanowires // Phys. Rev. B. 2003. V. 68. P. 073402.
6. Nagano M., Sugie R. Raman scattering in AlAs/GaP and AlAs/AIP strained short-period superlattices // J. Cryst. Growth. 2005. V. 278. P. 580-584.

## **ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АТМОСФЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ**

*А. М. Корнаторова, В. В. Чукин*

*Российский государственный гидрометеорологический университет*

### **Введение**

Начиная с первых полетов воздушных шаров в конце 18 века большой интерес представляло распределение метеорологических величин с высотой. Систематические инструментальные наблюдения начались только в начале прошлого века благодаря изобретению радиозонда П.А. Молчановым. При определении профиля атмосферного давления обычно используется законы гидростатики. В данной работе предпринята попытка учета влияния аэроионов на вертикальное распределение давления.

### **Профили основных величин используемых в модели**

Из уравнения Максвелла были получены формулы для расчета профиля напряженности электрического поля с учетом влияния тяжелых аэрозолей [2]:

$$E_i = E_{i+1} - \frac{dE}{dz} \Delta z, \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dz} = \frac{q \cdot (N_+ - N_-) + \rho_a}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

где  $q$  – единичный элементарный заряд, равный  $1.602 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $N_+$  – концентрация положительных легких ионов,  $1/\text{м}^3$ ;  $N_-$  – концентрация отрицатель-

ных легких ионов,  $\text{м}^{-3}$ ;  $\rho_a$  – объемная плотность заряда тяжелых ионов,  $\text{Кл}/\text{м}^3$ ;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная, равная  $8.85 \cdot 10^{-12}$   $\text{Ф}/\text{м}$ .

Формула для расчета профиля концентрации аэрозолей была получена исходя из общих представлений об экспоненциальном убывании концентрации аэрозолей с высотой:

$$N_A = N_0 \exp\left(\frac{-z}{H_A}\right), \quad (3)$$

где  $N_0$  – концентрация аэрозолей у земной поверхности,  $\text{м}^{-3}$ ;  $H_A$  – высота, на которой концентрация аэрозолей убывает в «e» раз, м.

Профиль концентрации положительных и отрицательных легких ионов вычисляем по профилю концентрации аэрозолей:

$$N_+ = \frac{\sqrt{\beta_+^2 N_A^2 + 4\alpha J_{ion}} - \beta_+ N_A}{2\alpha}, \quad (4)$$

$$N_- = \frac{\sqrt{\beta_-^2 N_A^2 + 4\alpha J_{ion}} - \beta_- N_A}{2\alpha}, \quad (5)$$

где  $J_{ion}$  – скорость ионизации атмосферы,  $\text{м}^{-3}\text{с}^{-1}$ ;  $\alpha$  – коэффициент рекомбинации легких ионов,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $\beta$  – эффективные значения коэффициентов прилипания положительных и отрицательных легких ионов к аэрозолям,  $\text{м}^3/\text{с}$ .

### Математический аппарат, используемый для расчета силы ионного ветра

Для оценки электрических сил действующих в атмосфере было использовано уравнение [1]:

$$F_e = m_{ion} \cdot v_{ion} \cdot N_{ion} \cdot Z_{12}, \quad (6)$$

где  $m_{ion}$  – масса иона, кг;  $v_{ion}$  – скорость ионов под действием электрического поля, м/с;  $N_{ion}$  – концентрация ионов,  $\text{м}^{-3}$ ;  $Z_{12}$  – число столкновений иона с нейтральными молекулами,  $\text{с}^{-1}$ .

В предположении сферичности частицы была использована следующая формула для расчета массы иона:

$$m_{ion} = \frac{4\pi r_{ion}^3 \rho}{3}, \quad (7)$$

где  $\rho$  – средняя плотность аэрозоля равная  $2500$   $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $r_{ion}$  – радиус ионов, м.

Скорость движения ионов под действием электрического поля прямо пропорциональна величине напряженности электрического поля, что видно из формулы [4]:

$$v_{ion} = b \cdot E, \quad (8)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля, В/м;  $b$  – подвижность ионов, В/(м·с).

Коэффициент пропорциональности в формуле (8) зависит от вязкости атмосферы и радиуса ионов следующим образом [5]:

$$b = \frac{Q}{6\pi\eta r_{ion} \frac{C_s C_m}{C_c C_a}}, \quad (9)$$

где  $Q$  – заряд иона, Кл;  $\eta$  – динамическая вязкость атмосферы, кг/(м·с);  $r_{ion}$  – радиус ионов, м;  $C_s$  – поправка к закону Стокса на вязкость атмосферы;  $C_m$  – поправка на вязкость частицы;  $C_c$  – поправка на ламинарность движения;  $C_a$  – поправка на массу частицы.

При расчетах были исключены поправки на вязкость и массу частицы в связи с тем, что их значения мало отличались от единицы при используемых параметрах модели.

Величина заряда частицы с радиусом  $r$  при отношении концентраций легких ионов  $N_+/N_-$  рассчитывается по формуле [6]:

$$Q = 2.762 \cdot 10^{-12} \ln \left( 0.725 \frac{N_+}{N_-} \right) r_{ion}. \quad (10)$$

Концентрация ионов определялась с учетом функции КЛ-распределения аэрозолей по размерам:

$$n(r_{ion}) = \frac{A}{\left( \frac{r_{ion}}{r_m} \right)^K + \left( \frac{r_m}{r_{ion}} \right)^L}, \quad (11)$$

$$A = \frac{N_a}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\left( \frac{r_{ion}}{r_m} \right)^K + \left( \frac{r_m}{r_{ion}} \right)^L} dr_{ion}}, \quad (12)$$

где  $N_a$  – концентрация аэрозолей в атмосфере, м<sup>-3</sup>;  $r_{ion}$  – радиус тяжелых ионов, м;  $r_m$  – модальный радиус аэрозолей, м;  $K = 2.7$ ;  $L = 0.5$ .

Исходя из предположения о равенстве электрических сил и сил сопротивления среды было получено уравнение для расчета числа столкновений иона с нейтральными молекулами:

$$Z_{12} = \frac{4.5\pi\eta}{r_{ion}^2 \rho}. \quad (13)$$

### **Вертикальный профиль атмосферного давления с учетом электрической силы**

В предположении постоянства градиента температуры из уравнения статики атмосферы была получена формула для распределения давления по высоте с учетом электрических сил [3]:

$$\frac{dP}{P - \frac{R_c \cdot T}{g} F_e} = \frac{-g}{R_c \cdot T} dz, \quad (14)$$

где  $P$  – давление воздуха, гПа;  $g$  – ускорение свободного падения, 9,8 м/с;  $T$  – температура воздуха, К;  $F_e$  – сила, обусловленная электрическими силами, гПа/м;  $R_c$  – удельная газовая постоянная сухого воздуха, 287 Дж/(мс).  
Заменяя температуру в левой части средней температурой слоя в результате интегрирования получим следующее уравнение:

$$P = \left( P_0 - \frac{RT_{cp}}{g} \cdot F_e \right) \cdot \left( \frac{T - \gamma z}{T} \right)^{g/R_c T} + \frac{R_c T}{g} \cdot F_e. \quad (15)$$

### Результаты математического моделирования

На основе представленного математического аппарата создана численная модель, позволяющая рассчитывать вертикальные профили параметров нейтральной атмосферы и электрические характеристики. На рис. 1, 2, 3 представлены для примера результаты работы численной модели.

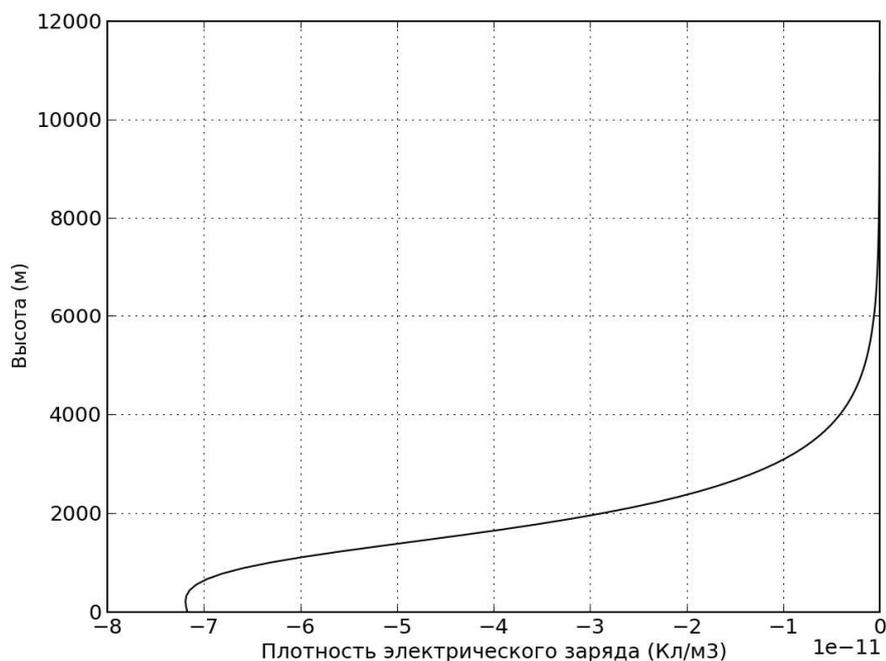


Рис. 1. Зависимость плотности электрического поля от высоты

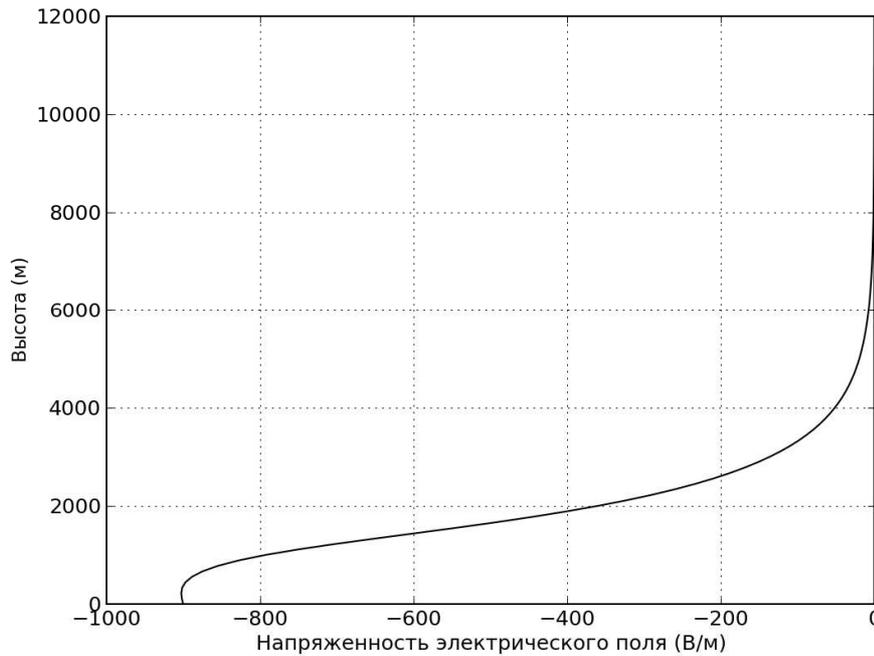


Рис. 2. Зависимость напряженности электрического поля от высоты

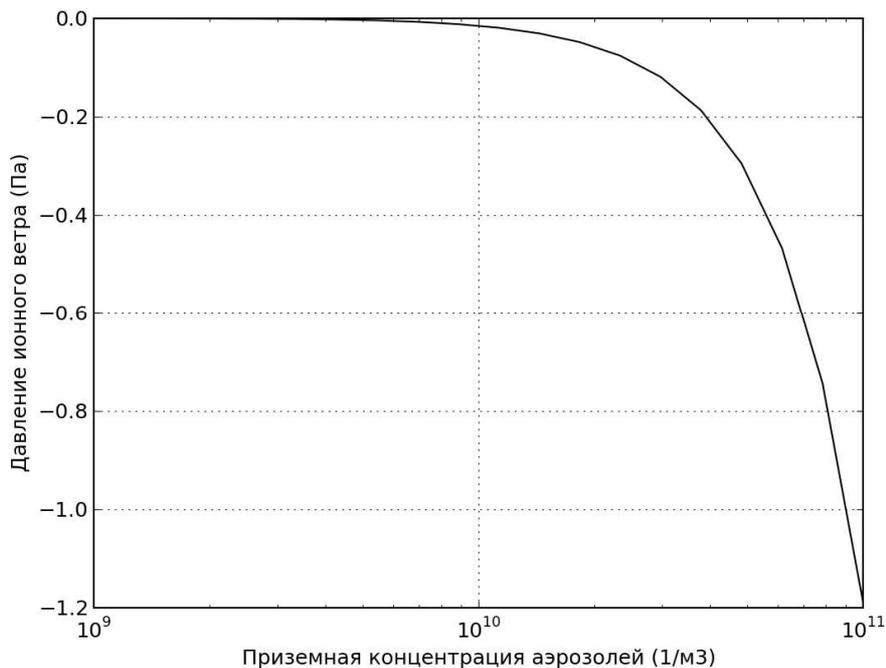


Рис. 3. Зависимость давления ионного ветра от приземной концентрации аэрозоля

### Заключение

Результаты моделирования показали, что тяжелые ионы оказывают большее влияние на нейтральную атмосферу по сравнению легкими ионами. Это объясняется тем, что тяжелые ионы обладают большим эффективным сечением и импульсом. Вертикальное распределение содержания аэрозолей (тяжелых ионов) влияет на профиль плотности электрического заряда и напряженности электрического поля. Повышение концентрации аэрозолей сопровождается увеличением давления, создаваемого ионами.

#### Литература

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Учебное пособие: Для вузов. В 5 т. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. – 5-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 544 с.
2. Морозов В.Н. Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ. Монография. РГГМУ. – СПб, 2011, 253 с.
3. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы. – СПб.: Гидрометиздат, 2000. – 777 с.
4. Электромагнитные предвестники землетрясений / Под ред. акад. М. А. Садовского. – М.: Наука, 1982. – 88 с.
5. Чукин, В. В. Физические свойства атмосферы. Библиотека функций meteo 19.09.2005. – СПб.: Система, 2005. – 112 с.
6. Shermuhamedov U. A., Chukin V. V., Aerosol charge distribution in bipolar atmosphere, in press.

### **РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФРОНТА РЕАКЦИИ ВЗРЫВНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

*В. Г. Кригер, А. В. Каленский, И. Ю. Зыков, А. П. Боровикова*  
*Кемеровский государственный университет*

Важнейшей задачей физической химии является исследование механизмов химических превращений и методов направленного регулирования их скорости при различных внешних воздействиях. Особенно актуальна данная задача для определения режимов и механизмов распространения реакции взрывного разложения взрывчатых веществ.

Пространственно-временные характеристики волны реакции взрывного разложения для наиболее изученного класса инициирующих материалов – азидов тяжелых металлов – исследовались экспериментально в работах [1-3]. Несмотря на различия в образцах, способах инициирования и методиках измерения, скорость движения фронта реакции практически одинакова и составляет 1 км/с. Наблюдаемые закономерности распространения реакции не могут быть объяснены с позиций теории детонации, теплового горения или диффузионного движения волны.

В данной работе сформулирована методика экспериментального исследования процесса зарождения и распространения реакции взрывного разложения азидов тяжелых металлов. Описаны методики обработки экспериментальных результатов. Рассчитаны пространственно-временные характеристики движения фронта волны реакции, проведено сравнение с экспериментом.

Для экспериментального исследования процесса распространения реакции взрывного разложения азидов серебра была использована подложка с эквидистантными отверстиями одинакового размера, позволяющими наблюдать взрывное свечение при прохождении волны реакции над ними. Образец инициировался лазерным импульсом. При прохождении фронта

волны реакции над отверстием фиксировался пик свечения. Это позволило определить скорость, с которой фронт реакции преодолел расстояние между соседними отверстиями. Благодаря такой ячейке можно измерить мгновенную скорость движущегося очага химического взаимодействия в конденсированной фазе.

Скорость волны на участке между соседними отверстиями может быть рассчитана по выражению:

$$V = (L + d) / \tau_1, \quad (1)$$

где  $L$  – расстояние между отверстиями,  $d$  – ширина отверстия,  $\tau_1$  – промежуток времени между двумя пиками свечения, возникающими при прохождении волны над соседними отверстиями.

Для определения параметров движущегося очага реакции взрывного разложения были сформулированы три взаимодополняющих подхода.

1. Для оценки ширины волны реакции использовалась величина временного промежутка между двумя пиками свечения, в течение которого сигнал отсутствует. Данный временной промежуток ( $\tau$ ) соответствует времени, которое требуется реакции для прохождения с известной скоростью ( $V$ ) расстояния, равного разности расстояний между отверстиями ( $L$ ) и удвоенной ширины волны ( $l$ ):

$$l = \frac{L - V\tau}{2}. \quad (2)$$

Такой способ позволяет оценить общую ширину волны, не давая информации о соотношении ширин переднего и заднего фронта.

2. Пространственная форма свечения волны реакции аппроксимировалась аналитическим выражением, содержащим ряд варьируемых параметров, значение которых определяется минимизацией суммы квадратов разности экспериментальной и теоретической кинетических зависимостей свечения. Обозначим  $y(x)$  распределение интенсивности свечения в волне реакции. Пусть волна реакции движется с постоянной скоростью  $V$  слева направо над прямоугольной щелью размером  $d$ . В качестве примера, рассмотрим следующее модельное распределение интенсивности свечения в волне:

$$y = \begin{cases} y_0 \exp(\gamma_1 x), & x \leq 0, \\ y_0 \exp(-\gamma_2 x), & x \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где максимум свечения  $y(x)$  соответствует  $x=0$ , параметры  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  характеризуют ширину заднего и переднего фронта соответственно. Фиксируемая кинетика свечения в этом случае определяется выражением:

$$I(t) = \begin{cases} \frac{y_0}{\gamma_1} (1 - \exp(-\gamma_1(d - Vt))), & t < 0 \\ \frac{y_0}{\gamma_1} (1 - \exp(-\gamma_1(d - Vt))) + \frac{y_0}{\gamma_2} (1 - \exp(-\gamma_2 Vt)), & 0 \leq t \leq d/V \\ \frac{y_0}{\gamma_2} \exp(-\gamma_2 Vt) \cdot (\exp(\gamma_2 d) - 1), & t > d/V \end{cases} \quad (4)$$

Решение (4) является непрерывным и непрерывно дифференцируемым при любых значениях  $t$ . Максимум фиксируемой интенсивности свечения наблюдается в момент времени:

$$t_m = \frac{d}{V} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}.$$

Полагая, что исследуемая кинетическая зависимость свечения была нормирована на максимум, имеем:

$$y_0 = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{\gamma_1 \gamma_2 d}{\gamma_1 + \gamma_2}\right) \right)}.$$

Параметры  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  определяются при сравнении с экспериментом.

3. Наблюдение движущейся волны реакции через отверстие в подложке равносильно ее преобразованию линейным оператором:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - Vt) \cdot y(x) dx. \quad (5)$$

Ядро оператора в (5) для экспериментальной ячейки, состоящей из непрозрачной подложки большой толщины  $b = 1$  см с прямоугольными отверстиями ширины  $d = 0.01$  см и прозрачной подложки толщины  $a = 0.09$  см (коэффициент преломления света  $n = 1.49$ ), имеет вид:

$$K(x - Vt) = \frac{1}{2\pi(a + n^{-1}b)} \cdot \begin{cases} 0, & x - Vt < 0; \\ n^{-1}b \cdot (x - Vt)/a, & 0 \leq x - Vt < x_m; \\ d, & x_m \leq x - Vt < x_m + d; \\ d - n^{-1}b \cdot (x - Vt)/a, & x_m + d \leq x - Vt < 2x_m + d; \\ 0, & 2x_m + d \leq x - Vt; \end{cases} \quad (6)$$

где  $x_m = nad/b$ .

Для подготовки сигнала вначале устранялись случайные шумы методом скользящего окна, затем из сигнала вырезалась область, в которой находился один из пиков свечения. После этого на вырезанный пик свечения действовали обратным оператором  $K_{ij}^{-1}$ . Для проверки правильности работы алгоритма на полученное распределение интенсивности свечения в волне реакции действовали прямым оператором  $K$ . Преобразование пола-

галось правильным, если полученная зависимость совпадала с исходным сигналом.

### Пространственные параметры волны реакции взрывного разложения азида серебра

Скорость распространения волны реакции взрывного разложения в нитевидных кристаллах азида серебра, рассчитанная по (1), составляет  $V = 1.2 \pm 0.2$  км/с, что хорошо совпадает с величинами, полученными в работах [1-3]. Значение ширины волны реакции по основанию, оцененное по выражению (2), составляет  $600 \pm 70$  мкм.

Сравнение экспериментальной и рассчитанной (4) кинетических зависимостей свечения для нитевидных кристаллов позволило определить значения параметров  $\gamma_1 = 120 \pm 40$  см<sup>-1</sup>,  $\gamma_2 = 150 \pm 30$  см<sup>-1</sup>. Соответствующие полуширины заднего и переднего фронта равны  $45 \pm 10$  и  $60 \pm 15$  мкм.

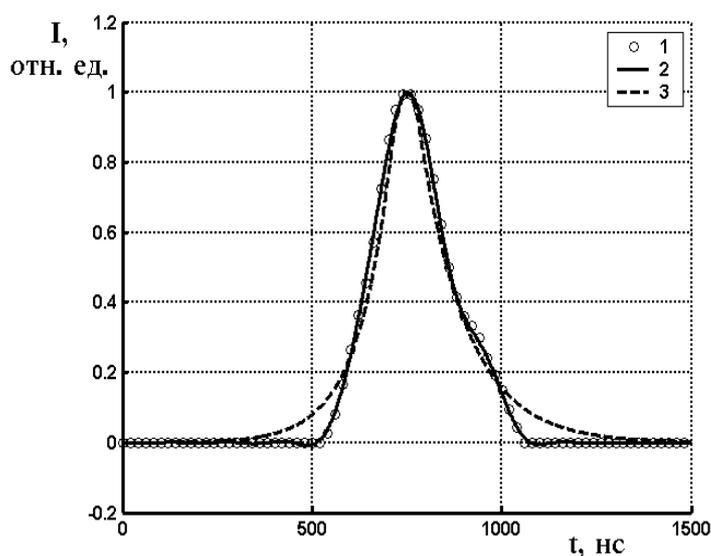


Рис. 1. Кинетическая зависимость взрывного свечения, возникающего при прохождении волны реакции над отверстием в подложке: 1 – исходная зависимость, 2 – зависимость, полученная из распределения интенсивности свечения в волне реакции, 3 – расчет по выражению (2).

Типичное распределение интенсивности свечения в волне реакции, движущейся по нитевидному кристаллу азида серебра со скоростью 1.25 км/с, которое было получено в результате обработки экспериментальных осциллограмм взрывного свечения с использованием оператора обратного преобразования (6), приведено на рис. 1 (2). Результат преобразования распределения интенсивности свечения в волне реакции в кинетическую зависимость свечения, приведенный на рис. 1, совпадает с исходной зависимостью, что говорит о корректности проделанных вычислений. Из рис. 1 (2) следует, что распределение практически симметрично. Для определения характерных параметров распределений вычислялась общая ширина волны на полувысоте, ширины заднего и переднего фронта на полу-

высоте и ширина волны по основанию. Значения параметров, полученных по различным методикам, согласуются между собой.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-03-00897.*

#### Литература

1. Корепанов В. И., Лисицын В. М., Олешко В. И., Ципилев В. П. К вопросу о кинетике и механизме взрывного разложения азидов тяжелых металлов // Физика горения и взрыва. – 2006. – Т. 42. – № 1. – С. 106-119.
2. Кригер В. Г., Каленский А. В., Звекон А. А., Ананьева М. В., Боровикова А. П. Диффузионная модель разветвленной цепной реакции взрывного разложения азидов тяжелых металлов // Химическая физика. – 2009. – Т. 28. – № 8. – С. 67-71.
3. Кригер В. Г., Каленский А. В., Звекон А. А., Боровикова А. П., Гришачева Е. А. Определение ширины фронта волны реакции взрывного разложения азидов серебра // Физика горения и взрыва. – 2012. – Т. 48. – № 4. – С. 129-136.

## БАЙЕСОВСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ С ОБУЧЕНИЕМ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОПУЛА-ФУНКЦИЙ

*А. И. Кубарев, В. В. Поддубный*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

### 1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим множество  $n$  объектов, каждый из которых принадлежит одному из  $K$  классов и характеризуется набором  $m$  числовых признаков  $a_1, \dots, a_m$ . Пусть имеется  $n_k$  объектов  $k$ -го класса, так что  $n = \sum_{k=1}^K n_k$ . Значение  $j$ -го признака  $i$ -го объекта из  $k$ -го класса обозначим  $x_{ijk}$ . Тогда этот объект можно охарактеризовать вектором-строкой  $x_{ik} = (x_{i1k}, \dots, x_{ijk}, \dots, x_{imk})$ . Эту строку будем рассматривать как  $i$ -ю реализацию векторной случайной величины  $\xi_k$ , подчиняющейся распределению вероятностей с плотностью  $p(x_1, \dots, x_m | k)$ , своей для каждого класса  $k$ .

Пусть теперь наблюдается объект, принадлежность которого к какому-либо классу неизвестна. Возникает проблема определения его «классовой принадлежности». Для решения этой задачи используют байесовский классификатор [1], вычисляющий апостериорную вероятность класса наблюдаемого объекта по формуле Байеса и относящего объект к апостериорно наиболее вероятному классу  $\hat{k}$ :

$$\hat{k} = \arg \max_k P(k | x_1, \dots, x_m) = \arg \max_k p(x_1, \dots, x_m | k) P(k), \quad (1)$$

где  $P(k)$  – априорная вероятность того, что объект относится к  $k$ -му классу.

Широко распространённый и справедливо критикуемый «наивный» байесовский классификатор [2] исходит из предположения о независимости значений признаков объекта, представляя совместную плотность распределения  $p(x_1, \dots, x_m | k)$  вектора признаков произведением  $\prod_{j=1}^m p(x_j | k)$ . Другая сторона «наивности» такого классификатора состоит в том, что

плотность распределения любого  $j$ -го признака  $p(x_j | k)$  предполагается известной. Эти два предположения резко сужают область применимости «наивного» байесовского классификатора.

Оба предположения «наивного» байесовского классификатора можно обойти, используя обучающую выборку наблюдений объектов, принадлежность которых к своим классам известна. Обучающая выборка в принципе даёт возможность получить статистическую оценку совместной плотности распределения признаков для каждого класса и построить байесовский классификатор уже без «наивных» предположений. Однако, для адекватной оценки совместной плотности распределения признаков может потребоваться слишком большая обучающая выборка, которой может не быть в природе. Поэтому в данной работе предлагается подход, основанный на гауссовых копула-функциях. Они позволяют учесть не всю статистическую зависимость признаков, а только её корреляционную составляющую, и привести в общем случае негауссовы маргинальные распределения наблюдений признаков к их совместно-гауссовой форме, обеспечивая возможность построения байесовского классификатора.

## 2. Эмпирическая функция распределения обучающей выборки и её кусочно-линейная аппроксимация

Набор  $n_k$  выборок  $(x_{i1k}, \dots, x_{imk})$ ,  $i = \overline{1, n_k}$ , из  $k$ -го класса, используемых в качестве обучающих, позволяет построить маргинальную эмпирическую функцию распределения  $\hat{F}_j(x | k)$  каждого  $j$ -го признака объекта  $k$ -го класса, являющуюся состоятельной статистической оценкой неизвестной маргинальной функции распределения  $F_j(x | k)$   $j$ -й компоненты вектора признаков объекта  $k$ -го класса:

$$\hat{F}_j(x | k) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{(1)}, \\ v/n_k, & x_{(v)} < x \leq x_{(v+1)}, \quad v = \overline{1, n_k - 1}, \\ 1, & x > x_{(n_k)}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_{(v)}$ ,  $v = \overline{1, n_k}$ , –  $v$ -ая порядковая статистика вариационного ряда наблюдений  $j$ -го признака объектов  $k$ -го класса,  $v$  – ранг соответствующего наблюдения.

Мажорируем сверху и снизу эту ступенчатую непрерывную слева функцию непрерывными кусочно-линейными функциями (ломаными линиями) с точками излома в угловых точках графика функции (2). Примем среднее арифметическое этих ломаных за сглаженную непрерывную эмпирическую оценку  $\tilde{F}_j(x | k)$  неизвестной непрерывной маргинальной функции распределения  $F_j(x | k)$ . Плотность  $\tilde{p}_j(x | k)$  сглаженного эмпирического распределения – кусочно-постоянная функция, значения которой на каждом интервале постоянства (между соседними значениями вариацион-

ного ряда) характеризуют скорости изменения сглаженной функции распределения  $\tilde{F}_j(x|k)$  на этих интервалах.

Аналогично можно было бы построить и многомерную эмпирическую (в том числе сглаженную) функцию распределения  $\hat{F}_{1,\dots,m}(x_1,\dots,x_m|k)$ . Однако при  $m \gg 1$  это практически невозможно, так как требует слишком большого объёма обучающей выборки. Поэтому мы ограничимся построением маргинальных эмпирических распределений, а для учёта статистической зависимости между признаками воспользуемся методом копула-функций [3].

### 3. Преобразование наблюдений при фиксированной гипотезе о классе к многомерному нормальному распределению методом копула-функций

Построив по обучающей выборке, соответствующей классу  $k$ , сглаженные эмпирические функции распределения  $\tilde{F}_j(x|k)$  для всех признаков,  $j = \overline{1,m}$ , найдём эмпирические оценки математических ожиданий  $\hat{\mu}_{jk} = 1/n_k \sum_{i=1}^{n_k} x_{ijk}$  и дисперсий  $\hat{\sigma}_{jk}^2 = 1/(n_k - 1) \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ijk} - \hat{\mu}_{jk})^2$  признаков. Маргинальную нормальную функцию распределения с этими параметрами обозначим  $\Phi_j(z|k)$ . Потребуем, чтобы наблюдаемое значение  $x_j$   $j$ -го признака испытуемого объекта и соответствующее ему значение  $z_j$  нормально распределённой случайной величины  $\zeta$  имели одинаковые вероятности:

$$\tilde{F}_j(x_j|k) = \Phi_j(z_j|k), \quad j = \overline{1,m}. \quad (3)$$

Это требование (правило (3)) приведёт к однозначному нелинейному преобразованию наблюдений  $x$ , в общем случае негауссовых, в эквивалентные в вероятностном смысле гауссовы наблюдения  $z$ .

Потребуем дополнительно, чтобы эти нормально распределённые эквивалентные наблюдения разных признаков были совместно-гауссовыми. Поскольку нормальная функция распределения – монотонно возрастающая, ранги наблюдений при преобразовании (3) не изменяются, так что ранговые корреляции компонент вектора  $(x_1, \dots, x_m)$  и соответствующего ему вектора  $(z_1, \dots, z_m)$  будут одинаковыми. Это позволяет найти матрицу коэффициентов ранговых корреляций обучающей выборки и приписать её многомерному нормальному распределению, соответствующему преобразованию (3). Учитывая, что корреляционная матрица Пирсона  $R$  нормального распределения однозначно связана с ранговой корреляционной матрицей Спирмена  $R_S$  известным соотношением  $R = 2 \sin(\pi R_S / 6)$  [4], можно получить корреляционную матрицу нормального распределения, соответствующего преобразованию (3), из преобразованной по этому правилу обучающей выборки:

$$(\hat{\rho}_k)_{jl} = \frac{(\hat{R}_k)_{jl}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{jk}^2 \cdot \hat{\sigma}_{jl}^2}}, \quad \hat{R}_k = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (z_{ik} - \hat{\mu}_k)^T (z_{ik} - \hat{\mu}_k), \quad (4)$$

где  $z_{ik} = (z_{i1k}, \dots, z_{imk})$  – вектор-строка преобразования (3) вектор-строки  $x_{ik} = (x_{i1k}, \dots, x_{imk})$  набора признаков  $i$ -го объекта  $k$ -го класса обучающей выборки,  $\hat{\mu}_k = (\hat{\mu}_{1k}, \dots, \hat{\mu}_{mk})$  – вектор-строка эмпирических оценок математических ожиданий значений признаков,  $\hat{\sigma}_{jk}^2$  – эмпирическая оценка дисперсии  $j$ -го признака,  $T$  – знак транспонирования.

За многомерное распределение обучающей выборки  $k$ -го класса примем гауссову копула-функцию [1, 7]:

$$C(x_1, \dots, x_m | k) = \Phi\left(\Phi_1^{-1}(\tilde{F}_1(x_1 | k)), \dots, \Phi_m^{-1}(\tilde{F}_m(x_m | k)) | \hat{\mu}_k, \hat{R}_k\right), \quad k = \overline{1, K}. \quad (5)$$

Обозначив  $z_k = (z_{1k}, \dots, z_{mk})$ , где  $z_{jk} = \Phi_j^{-1}(\tilde{F}_j(x_j | k))$ ,  $j = \overline{1, m}$ , запишем (с точностью до несущественного слагаемого) логарифм плотности многомерного распределения величин  $z_{1k}, \dots, z_{mk}$ , эквивалентных испытуемой выборке  $x_1, \dots, x_m$ , в предположении её принадлежности  $k$ -му классу:

$$\ln p(z_k | k) = -\frac{1}{2} \ln \det \hat{R}_k - \frac{1}{2} (z_k - \hat{\mu}_k) \hat{R}_k^{-1} (z_k - \hat{\mu}_k)^T, \quad (6)$$

где  $z_k$  и  $\hat{\mu}_k$  – вектор-строки длины  $m$ ,  $\hat{R}_k$  –  $m \times m$ -матрица.

#### 4. Алгоритм байесовской классификации с обучением

Алгоритм байесовской классификации с обучением состоит из следующих этапов.

Этап обучения. По обучающей выборке  $(x_{i1k}, \dots, x_{imk})$ ,  $i = \overline{1, n_k}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , для каждого класса  $k$  и каждого признака  $a_j$  находится маргинальная эмпирическая функция распределения (2) и соответствующая ей сглаженная маргинальная эмпирическая функция распределения  $\tilde{F}_j(x | k)$ , а также выборочные эмпирические оценки  $\hat{\mu}_{jk}$  и  $\hat{\sigma}_{jk}^2$  математического ожидания и дисперсии  $j$ -го признака. Затем обучающая выборка преобразуется по правилу (3) в нормально распределённую выборку  $(z_{i1k}, \dots, z_{imk})$  с  $\hat{\mu}_{jk}$  и  $\hat{\sigma}_{jk}^2$ , по которой находится эмпирическая оценка корреляционной матрицы  $\hat{R}_k$  для каждого класса  $k$ .

Обратим внимание, что объём обучающей выборки для каждого класса должен быть больше числа признаков. При  $n_k \leq m$  матрица  $\hat{R}_k$  становится вырожденной, и классификатор на основе соотношения (6) не может работать. В этом случае следует от исходной системы признаков  $a_1, \dots, a_m$  перейти к системе меньшей размерности (не большей, чем минимальное  $n_k$ ) с помощью некоторого линейного преобразования (например, используя метод главных компонент [5]). При использовании метода главных компонент обучающие выборки всех классов объединяются вместе. Если их общий объём  $n$  будет больше числа  $m$  исходных признаков, то по объединённой выборке можно построить эмпирическую оценку корреляционной матрицы исходного набора признаков. Собственные векторы этой матрицы образуют новый набор признаков – некоррелированные главные

компоненты, а собственные числа будут их дисперсиями. Однако эти новые признаки внутри каждого класса будут в общем случае коррелированными. Выбрав некоторое небольшое число первых главных компонент (это число не должно превышать минимального объёма обучающей выборки класса), будем рассматривать их как новые исходные признаки, то есть будем работать с ними, как с исходными. Их корреляционные матрицы для всех классов уже не будут вырожденными.

Этап классификации. Наблюдаемый вектор-строка признаков  $(x_1, \dots, x_m)$  испытуемого объекта по правилу (3) преобразуется в нормально распределённые векторы  $z_k = (z_{1k}, \dots, z_{mk})$ ,  $k = 1, K$  (для каждой гипотезы  $k$  о классе), по которым вычисляется логарифм функции правдоподобия каждого класса по формуле (6). В качестве класса, к которому принадлежит испытуемый объект, принимается максимально правдоподобный (или апостериорно максимально вероятный) класс  $\hat{k}$  в соответствии с решающим правилом (1) для эквивалентных признаков  $z$ . Качество классификации может быть оценено  $F$ -мерой Ван Ризбергена [6] на основе имитационного моделирования объектов по алгоритму, рассмотренному в работе [7].

### 5. Численный пример

В качестве примера рассмотрена задача байесовской классификации по авторскому стилю прозаических текстов русских классиков 19 века. В качестве обучающей выборки использовалось 155 текстов художественных произведений 17 авторов. Набором признаков стиля служили частоты употребления 54 служебных слов русского языка.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-07-00776-а.*

#### Литература

1. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: Справочное издание / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин / Под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 608 с.
2. McCallum, A., Nigam, K. A Comparison of Event Models for Naïve Bayes Text Classification. In AAAI/ICML-98 Workshop of Learning for Text Categorization, pp. 41–48. Technical Report WS-98-05. AAAI Press, 1998.
3. Nelsen, R.B. An Introduction to Copulas (Second Edition). – Berlin: Springer, 2006.
4. Ван дер Варден, Б.Л. Математическая статистика. – М.: Иностранная Литература, 1960. – 636 с.
5. Афифи, А., Эйзен, С. Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 488 с.
6. Van Rijsbergen, C.J. Information Retrieval. – London: Butterworths, 1979.
7. Поддубный, В.В., Пехтерев, А.С. Копулы сглаженных эмпирических распределений при наличии связей (совпадений) и их применение в имитационном моделировании // Труды XII Международной ФАМЭБ'2013 конференции. / Под ред. Олега Воробьева. – Красноярск: НИИППБ, СФУ, 2013. – С. 312–321.

## О ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

*Г. Е. Маркелов*

*Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана*

Подходы к построению адекватной математической модели, способы и методы её изучения изложены в обширной учебной и научной литературе. Однако в некоторых случаях возможности математического моделирования, подробно рассмотренные, например, в работах [1–3], используются не достаточно рационально. Одна из причин нерационального использования возможностей математического моделирования заключается в том, что построенные математические модели не обладают нужными свойствами. Набор таких свойств может включать кроме свойств полноты, точности, адекватности, продуктивности, экономичности, робастности и другие свойства.

Цель настоящей работы – изложение подхода, позволяющего строить математические модели, в достаточной мере обладающие нужными свойствами. В связи с этим целесообразно уточнить общеизвестное и широко используемое понятие математической модели объекта исследования, выделяя математическую модель в узком смысле. Такая модель в отличие от других математических моделей одного и того же объекта исследования в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию.

Построение математической модели в узком смысле предполагает выполнение требований, предъявляемых к математической модели. Такие требования противоречивы и на практике могут быть выполнены на основе разумного компромисса, что в значительной мере зависит от профессионального уровня исследователя, его творческого потенциала и интуиции.

Для построения математической модели в узком смысле следует выполнять правила и рекомендации, обобщающие практический опыт, накопленный при создании математических моделей. В этой связи особый интерес представляют принципы построения математических моделей, которые носят общий и универсальный характер. Так, в работе [4] сформулированы принципы, которые при их разумном использовании позволяют разработать математическую модель с нужными свойствами, уменьшая негативное влияние субъективного фактора при принятии решений на некоторых этапах математического моделирования.

Далее рассмотрен пример построения совокупности математических моделей одного и того же объекта исследования с целью выявления математической модели в узком смысле.

Выберем в качестве объекта исследования резистор, сопротивление и полная теплоёмкость которого зависит от его температуры. Резистор считаем высокотеплопроводным телом, температура  $T$  которого в начальный момент времени  $t_0$  равна  $T_0$ . На поверхности резистора площадью  $S$

происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна  $T_0$ , коэффициент теплоотдачи известен и равен  $\alpha$ . Пусть

$$R = R_0 [1 + \beta(T - T_0)], \quad C = C_0 [1 + \gamma(T - T_0)], \quad T \in [T_0, T_1],$$

где  $R$  и  $C$  – сопротивление и полная теплоёмкость резистора;  $R_0$  и  $C_0$  – сопротивление и полная теплоёмкость резистора при  $T = T_0$ ;  $\beta$  и  $\gamma$  – соответствующие температурные коэффициенты, причём  $\beta > 0$  и  $\gamma > 0$ . Через резистор протекает электрический ток, сила  $I$  которого равна

$$\frac{U}{R_0 [1 + \beta(T - T_0)]},$$

где  $U$  — постоянная разность электрических потенциалов.

Построим иерархию математических моделей рассматриваемого объекта исследования и определим условия, при выполнении которых с относительной погрешностью не более заданного значения  $\delta_0$  можно найти силу протекающего через резистор тока.

Если значение температурного коэффициента сопротивления  $\beta$  достаточно мало, то приходим к математической модели идеализированного резистора, сопротивление которого равно  $R_0$ . Силу протекающего через такой резистор тока, найдём по формуле

$$I_0 = \frac{U}{R_0}. \quad (1)$$

Определим условия, при которых модель (1) применима. Для этого сначала рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае мощность тепловыделения в материале резистора равна тепловому потоку, отводимому от резистора, т. е.

$$\frac{U^2}{R_0 [1 + \beta(\bar{T} - T_0)]} = \alpha(\bar{T} - T_0)S, \quad T_0 < \bar{T} \leq T_1,$$

где  $\bar{T}$  — установившееся значение температуры резистора. Из полученного равенства легко установить

$$\bar{T} = T_0 + \frac{1}{\beta} \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta U^2}{\alpha S R_0}} \right).$$

Это позволяет найти установившееся значение  $\bar{I}$  силы тока, протекающего через резистор. Действительно, при выполнении следующего неравенства

$$\frac{\beta U^2}{\alpha S R_0} \leq \beta^2 (T_1 - T_0)^2 + \beta (T_1 - T_0) \quad (2)$$

справедливо

$$\bar{I} = \frac{I_0}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta U^2}{\alpha S R_0}}}. \quad (3)$$

Очевидно, что с течением времени температура резистора возрастает, а сила тока убывает, приближаясь к установившемуся значению  $\bar{I}$ . Тогда для относительной погрешности значения  $I_0$  запишем

$$\delta(I_0) = \left| \frac{I - I_0}{I} \right| = \frac{I_0}{I} - 1 \leq \frac{I_0}{\bar{I}} - 1.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$\frac{I_0}{\bar{I}} - 1 \leq \delta_0$$

формулу (1) можно использовать для нахождения искомой силы тока с относительной погрешностью не более  $\delta_0$ . Тогда приходим к неравенству

$$\frac{\beta U^2}{\alpha S R_0} \leq \delta_0^2 + \delta_0. \quad (4)$$

Таким образом, математическую модель (1) можно использовать при выполнении неравенств (2) и (4).

Определим условия, при которых применима модель (3). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. В этом случае изменение температуры резистора во времени  $t$  описывает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$C_0 [1 + \gamma(T - T_0)] \frac{dT}{dt} = \frac{U^2}{R_0 [1 + \beta(T - T_0)]} - \alpha(T - T_0)S, \quad T \leq T_1,$$

а начальное условие имеет вид

$$T(t_0) = T_0.$$

Учитывая, что

$$I = \frac{I_0}{1 + \beta(T - T_0)},$$

приходим к следующей математической модели

$$\frac{C_0 I_0}{\beta I^2} \frac{dI}{dt} = \frac{\alpha S (I_0 - I) - \beta U I^2}{\gamma (I_0 - I) + \beta I}, \quad \frac{I_0}{1 + \beta(T_1 - T_0)} \leq I, \quad (5)$$

$$I(t_0) = I_0.$$

Формулу (3) можно использовать для нахождения искомой силы тока с относительной погрешностью не более  $\delta_0$  при выполнении условия

$$\delta(\bar{I}) = \frac{I - \bar{I}}{I} \leq \delta_0,$$

причём

$$\delta_0 < \frac{I_0}{\bar{I}} - 1,$$

так как в противном случае следует применять формулу (1). Затем, используя модель (5), найдем момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{C_0}{\alpha S} \left[ \frac{\gamma I_0}{\beta \bar{I}} \left( \delta_0 + \frac{\bar{I}}{I_0} - 1 \right) + \left( \frac{I_0}{2I_0 - \bar{I}} + \frac{\gamma I_0}{\beta \bar{I}} \frac{I_0 - \bar{I}}{2I_0 - \bar{I}} - 1 \right) \ln \left( 2 - \frac{\bar{I}}{I_0} - \delta_0 \right) - \left( \frac{I_0}{2I_0 - \bar{I}} + \frac{\gamma I_0}{\beta \bar{I}} \frac{I_0 - \bar{I}}{2I_0 - \bar{I}} \right) \ln \left( \frac{I_0}{I_0 - \bar{I}} \delta_0 \right) \right],$$

начиная с которого установившееся значение  $\bar{I}$  силы тока с относительной погрешностью не более  $\delta_0$  можно считать равным  $I(t)$ . Тогда модель (3) можно использовать при условии, что  $t \geq t_1$ .

Полученные результаты позволяют выявить из совокупности построенных математических моделей такую модель, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности. Сформулируем это в виде следующих утверждений.

**Утверждение 1.** Если справедливы неравенства (2) и (4), то модель (1) является математической моделью в узком смысле.

**Утверждение 2.** Если справедливо неравенство (2), не выполнено условие (4), а временным интервалом от  $t_0$  до  $t_1$  можно пренебречь, то математическая модель (3) является моделью в узком смысле.

**Утверждение 3.** Если справедливо неравенство (2), не выполнено условие (4), а временным интервалом от  $t_0$  до  $t_1$  пренебрегать нельзя, то модель (5) является математической моделью в узком смысле.

Сформулированные утверждения справедливы применительно к полученной совокупности математических моделей. Для иной совокупности моделей будут и другие утверждения.

Совокупность математических моделей данного объекта исследования получена с использованием в основном только одного принципа – принципа постепенного усложнения, что делает похожим изложенное в этом примере на «иерархический подход к построению математических моделей», описанный, например, в работе [3].

Таким образом, введено понятие математической модели в узком смысле и изложен подход, позволяющий строить такие модели. Рассмотрен пример построения иерархии математических моделей резистора, сопротивление и полная теплоёмкость которого зависит от его температуры. Сформулированы утверждения, которые позволяют выявить математическую модель в узком смысле. Такая модель в отличие от других математических моделей рассматриваемого резистора в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности применительно к конкретному исследованию.

Выявляя математическую модель в узком смысле, исследователь получает ценный интеллектуальный продукт – эквивалент изучаемого объекта для рассматриваемого им частного случая. Очевидно, что применение такой модели сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математиче-

ского моделирования при отсутствии богатого практического опыта построения математических моделей изучаемых объектов.

#### Литература

1. Зарубин В. С. Математическое моделирование в технике. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. – 495 с.
2. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. – 191 с.
3. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2005. — 316 с.
4. Маркелов Г. Е. Принципы построения математических моделей // Тихонов и современная математика: Мат. моделирование: Тезисы докладов междунар. конф. — М.: Издат. отд. фак. ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2006. — С. 128–129.

## **ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ МОБИЛЬНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ И ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ**

*А. В. Приступа<sup>\*</sup>, А. В. Петрухин<sup>\*\*</sup>*

*<sup>\*</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет*

*<sup>\*\*</sup>ООО «СибДор», г. Томск*

Автомобильные дороги являются важнейшей составной частью транспортной системы России. Диагностика и оценка их состояния, проводимые систематически через установленные промежутки времени, являются исходной базой для эффективного использования средств и материальных ресурсов, направляемых на реконструкцию, ремонт и содержание дорожной сети. Для получения исходных данных о геометрических параметрах дороги и состоянии дорожного полотна традиционно применяются полевые обследования, в ходе которых нужные замеры производят с помощью различных приборов (лазерная рулетка, рейка, нивелир и т. д.). На выполнение подобных работ тратится огромное время, что заставляет задумываться об ускорении данного процесса.

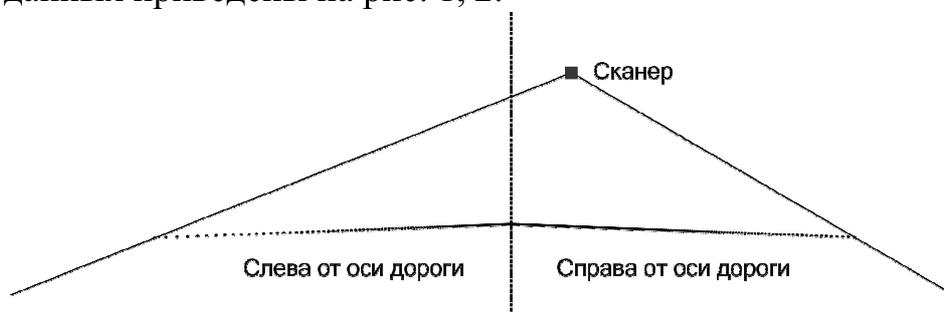
Наиболее перспективной технологией, которая может значительно ускорить данный процесс в настоящее время, является технология мобильного лазерного сканирования. МЛС во многом напоминает наземное лазерное сканирование, но в отличие от него, производится при движении сканера, установленного на транспортное средство. При этом скорость съемки совпадает со скоростью движения транспортного средства, а это десятки километров в час. Ни один другой метод не дает подобной производительности при сборе пространственной информации, обладая при этом малой погрешностью измерений ( $\pm 10$  мм). В данной статье рассматривается опыт применения данной технологии для диагностики и оценки состояния автомобильных дорог.

Для проведения экспериментов лазерный сканер был закреплен на заднюю часть крыши автомобиля «Газель». Принцип работы заключается в том, что для каждого угла, взятого с некоторым шагом в заданном диапа-

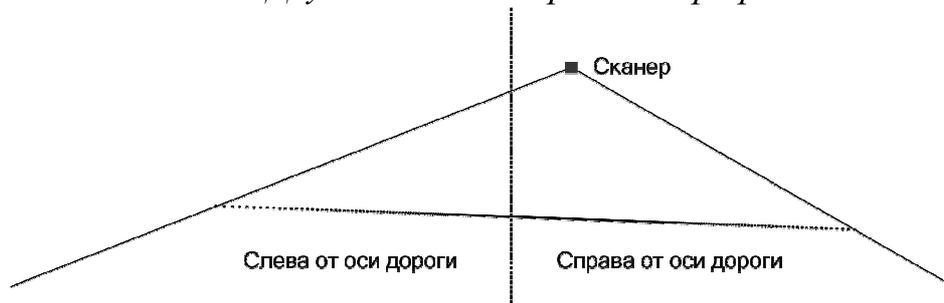
зоне, излучатель посылает луч лазера, который, отражаясь от поверхности объекта, через некоторое время возвращается обратно в приемник. На основе этого времени рассчитывается расстояние до объекта. Таким образом, каждое поперечное сечение представляет собой набор точек с известными координатами  $(Y, Z)$ , где  $Y$  (м) – положение точки в поперечном сечении, а  $Z$  (м) – ее высота (относительно места положения сканера). Кроме того, при движении машины вперед мы переходим к очередному поперечному сечению: так в нашей системе возникает третья координата  $X$  (м).

Зная расстояние от поверхности земли до сканера (в нашем случае 2,5 метра), а также приблизительную ширину исследуемой дороги, определяется диапазон углов сканирования. Эти параметры (ширина дороги, высота сканера) вводятся пользователем в разработанную для этих целей программу, в которой предусмотрен также и учет возможного смещения автомобиля от оси дороги на некоторое расстояние (ехать по центру дороги небезопасно). Так, например, если сканер находится правее оси дороги на 1 метр, то диапазон углов сканирования будет программно скорректирован соответствующим образом.

После ввода необходимых параметров осуществляется проезд по автомобильной дороге, в ходе которого с требуемой частотой формируются поперечные сканы. При этом возможны 2 подхода: сканирование по времени (например, 10 раз в секунду) или сканирование по сигналам, получаемым с датчика расстояния (например, каждый метр). Примеры полученных данных приведены на рис. 1, 2.



*Рис. 1. Двускатный поперечный профиль*



*Рис. 2. Односкатный поперечный профиль*

Таким образом, первой задачей, которая возникает при обработке результатов лазерного сканирования, является определение характеристик поперечного профиля. Для решения данной задачи необходимо найти значения уклонов слева и справа от оси дороги. Аппроксимируем с этой це-

лю наборы точек наиболее подходящими для этого прямыми, угловые коэффициенты которых и позволят определить поперечные уклоны.

Получить параметры оптимальных прямых можно методом наименьших квадратов, суть которого сводится к минимизации функции  $\sum_i (ax_i + by_i + c)^2$  при условии  $a^2 + b^2 = 1$ . Однако данный метод обладает существенным недостатком, а именно высокой зависимостью от исходных данных. Проблема состоит в том, что скан может содержать не только точки дорожного полотна, но и различного рода посторонние точки, например, точки обочины, дорожного ограждения или ошибочные точки, полученные в результате проезда встречного или обгоняющего автомобиля. В этой ситуации метод наименьших квадратов дает неверные результаты (рис. 3).

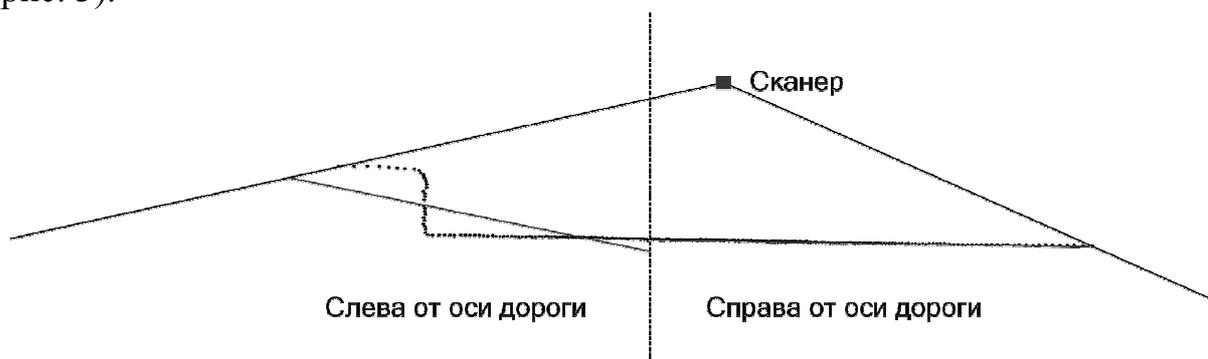


Рис. 3. Ошибочность аппроксимации методом наименьших квадратов

В этой связи для поиска параметров аппроксимирующих прямых целесообразнее использовать модифицированный метод наименьших квадратов (подробнее описан в [1]), идея которого состоит в изменении алгоритма расчета суммы квадратов расстояний от точек до прямой таким образом, что влияние каждой конкретной точки уменьшается по мере удаления ее от прямой. Для этого вводится специальная функция, чаще всего

имеющая вид  $p(r, \sigma) = \frac{r^2}{r^2 + \sigma^2}$ , где  $r$  – расстояние от точки до прямой, а  $\sigma$

– параметр, определяющий скорость уменьшения влияния точки. Учитывая то, что расстояние от точки до прямой можно записать в виде  $r = r(X, M)$ , где  $X$  – координатный вектор точки, а  $M$  – вектор параметров прямой, задача аппроксимации сводится к задаче минимизации суммы  $\sum_i p(r(X_i, M), \sigma)$ . Для этого на первом шаге обычным методом наимень-

ших квадратов определяется начальный вектор параметров прямой  $M^0$ , для которого рассчитывается начальное приближение  $\sigma^0$ . Как отмечено в [2], наилучшей оценкой параметра масштаба неизвестного распределения является значение, кратное медиане отклонений от медианы (*MAD – median absolute deviation*). Применительно к нашей задаче для оценки значения параметра  $\sigma$  будем использовать медиану расстояний до аппроксимирующей прямой  $\sigma^n = \text{Median}_i |r(X_i, M^n)|$ . Процесс пересчета значений  $M^n$  и  $\sigma^n$

повторяется итеративно до тех пор, пока вектор параметров прямой  $M^n$  существенно изменяется.

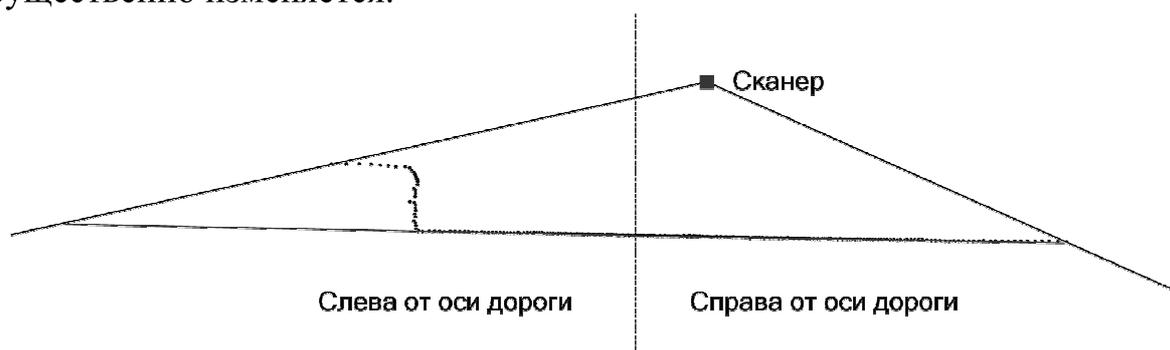


Рис. 4. Модифицированный метод наименьших квадратов

Как видно из рис. 4, ошибочные точки, имеющие значительное отклонение от интересующих нас точек дорожного покрытия, практически не оказали влияния на определение параметров аппроксимирующих прямых, что положительным образом сказалось на качестве результата.

Таким образом, нам удалось по набору точек получить коэффициенты уравнений прямых, осталось только разобраться, что делать с полученным результатом. Прежде всего, угловые коэффициенты этих прямых однозначно определяют величины поперечных уклонов слева и справа от оси дороги, которые сами по себе являются довольно важными характеристиками для оценки соответствия параметров автомобильной дороги нормативным требованиям на разных участках. Однако имеется одно ограничение, связанное с тем, что приведенные рассуждения основаны на том, что сканер направлен вертикально вниз, и на него действует только сила тяжести. На практике же при движении автомобиля сканер, как и сам автомобиль, неминуемо будет наклоняться в ту или иную сторону. Решение состоит в совместной обработке результатов лазерного сканирования с показаниями гироскопа и акселерометра, дополнительно установленных на автомобиль. Гироскоп позволяет с высокой точностью измерить угол, но в процессе интегрирования результатов накапливается ошибка, поэтому в течение длительного интервала времени измерять угол с помощью гироскопа нельзя. Акселерометр же, напротив, позволяет получить довольно точную постоянную составляющую (не накапливает ошибку), однако подвержен шумам вибрации. Совместное использование этих устройств позволяет обеспечить достаточную точность, нивелировав при этом эффект накопления ошибки.

Одной из сфер применения рассмотренной технологии является определение дефектов дорожного покрытия, таких как колейность (в этом случае точки поперечного сечения образуют «волну»), плохая продольная ровность (такая «волна» определяется на основе последовательности сканов), а также ямы и выбоины (точки, которые находятся ниже аппроксимирующей прямой и отстоят от нее на величину, превышающую некоторый заранее заданный порог  $\varepsilon$ ). Для получения дополнительной информации целесообразно использовать совместно со сканером также GPS-приемник

для определения реальных пространственных координат и IP-камеру высокого разрешения, которая будет делать фотоснимки дорожного полотна с заданным шагом. Тогда полученные точки  $(X, Y, Z)$  в трехмерном пространстве можно еще и раскрасить в цвета реального мира.

#### Литература

1. Stewart C. V. Robust Parameter Estimation in Computer Vision // SIAM REVIEW. – 1999. – Vol. 41. – №3. – pp. 513-537.

2. Шергин В. Л., Мирошниченко Т. А. Робастные методы оценивания числовых характеристик выборки // Бионика интеллекта: научно-технический журнал. – 2010. – №3 (74). – С. 90-93.

## РАЗРАБОТКА МОДУЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ХРОМАТОГРАФИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПРОЦЕССА КОМПАУНДИРОВАНИЯ ТОВАРНЫХ БЕНЗИНОВ

*Б. В. Сахневич, М. В. Киргина, Н. В. Чеканцев*

*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*

**Основная задача**, стоящая перед современной нефтеперерабатывающей промышленностью – повышение качества и объема выпускаемых товарных нефтепродуктов. В России общий объем бензинового фонда составляет 31,9 млн. тонн в год, большая часть бензинов, выпускаемых отечественными заводами, не соответствует европейским стандартам [1].

**Компаундирование** – процесс получения высокооктанового автомобильного бензина путем смешения прямогонных фракций с компонентами вторичных процессов переработки нефти, присадками и добавками.

Этот завершающий и наиболее ответственный процесс в формировании качественных и количественных показателей товарного бензина является чрезвычайно сложным с точки зрения оптимизации, что объясняется рядом факторов:

- наличием большого числа компонентов;
- отклонением от аддитивности физико-химических свойств компонентов смесей;
- трудностями создания математических моделей, адекватных процессу в широком диапазоне изменения свойств компонентов;
- постоянным изменением состава сырья.

На кафедре Химической технологии топлива и химической кибернетики Института природных ресурсов ТПУ была разработана математическая модель процесса компаундирования, учитывающая неаддитивность физико-химических свойств углеводородных потоков в процессе их смешения.

$$ОЧ_{см} = \sum_{i=1}^n (ОЧ_i \cdot C_i) + B; \quad B = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n B_i B_j C_i C_j; \quad B_i = \alpha (D_i / D_{max})^n \quad (1)$$

где  $ОЧ_{см}$  – октановое число смешения бензинов;  $C_i$  – концентрация  $i$ -го компонента, отн. ед.;  $B_i, B_j$  – величины, характеризующие склонность  $i$ -й молекулы к межмолекулярному взаимодействию с  $j$ -й молекулой;  $\alpha$  и  $n$  – кинетические параметры, определяющие интенсивность межмолекулярных взаимодействий в зависимости от дипольного момента  $D$ ;  $D_{max}$  – максимальный дипольный момент молекул углеводородов.

Однако неаддитивность при смешении проявляют не только углеводороды бензиновой фракции, но и добавки и присадки, вовлекаемые в процесс компаундирования, в силу их полярности.

На основе механизма действия присадок, который заключается в разрушении пероксидов, была разработана математическая модель процесса компаундирования, учитывающая влияние антидетонационных присадок на прирост октанового числа базового бензина:

$$ОЧ_i = ОЧ_0 + П \cdot \Delta ОЧ_{max} \cdot (1 - e^{-K_{эфф} \cdot C_{пр}}); C_{пр} = C_i / C_{max}, \quad (2)$$

где  $П$  – величина, характеризующая приемистость разного типа топлива к присадке;  $K_{эфф}$  – коэффициент эффективности присадки;  $C_{пр}$  – приведенная концентрация присадки, равная отношению концентрации присадки  $C_i$  к максимально допустимой концентрации присадки в бензине  $C_{max}$ .

На основе математической модели была создана компьютерная моделирующая система расчета процесса компаундирования высокооктановых бензинов «Compaunding», в основе которой лежит блок автоматизированной обработки хроматограмм, содержащий 69 компонентов, за исключением олефинов [2].

Было установлено, что олефины вносят существенный вклад в конечное октановое число бензина, которым нельзя пренебрегать. Учитывая это влияние, необходимым является расширение списка компонентов для формализованной обработки данных хроматографического анализа.

С целью учета влияния олефиновых углеводородов и большего соответствия реалиям производства был составлен *расширенный формализованный список углеводородов*, вносящих основной вклад в формирование октанового числа бензинов.

Процесс расширения списка компонентов для создания модуля автоматической обработки данных хроматографического анализа включал в себя следующие этапы:

**1. Составление «глобального» списка** путем анализа углеводородного состава потоков, вовлекаемых в процесс компаундирования на основе данных хроматографического анализа.

**2. Формализация компонентов** по совокупности четырех критериев:

- групповая принадлежность углеводородов;
- близость концентраций;
- близость углеводородной структуры молекул;
- близость октановых чисел компонентов.

Учитывая все выше перечисленное, был сформирован окончательный список компонентов, согласно которому будет происходить автоматизированная систематизация данных хроматографического анализа. Список включает в себя 110 компонентов, в том числе олефиновые углеводороды (табл. 1).

Таблица 1

### Сравнение наборов компонентов

Группы компонентов	Старый список	Новый список
Н-парафины	8	10
И-парафины	36	39
Олефины	0	32
Нафтены	19	15
Ароматические соединения	9	14
ИТОГО	69	110

На основе составленного набора компонентов, был разработан программный модуль автоматизированной обработки данных хроматографического анализа.

Основной блок программы разработан в среде Borland «Delphi 7». Среда «Delphi 7» позволяет создавать удобный для пользователя интерфейс в короткие сроки, не теряя при этом его функциональности. При разработке программы применялись такие функциональные элементы, как String Grid, позволяющие удобно хранить и обрабатывать информацию об углеводородах, входящих в состав потоков и их концентрациях, в виде таблиц.

Главное диалоговое окно программы представлено на рис. 1.

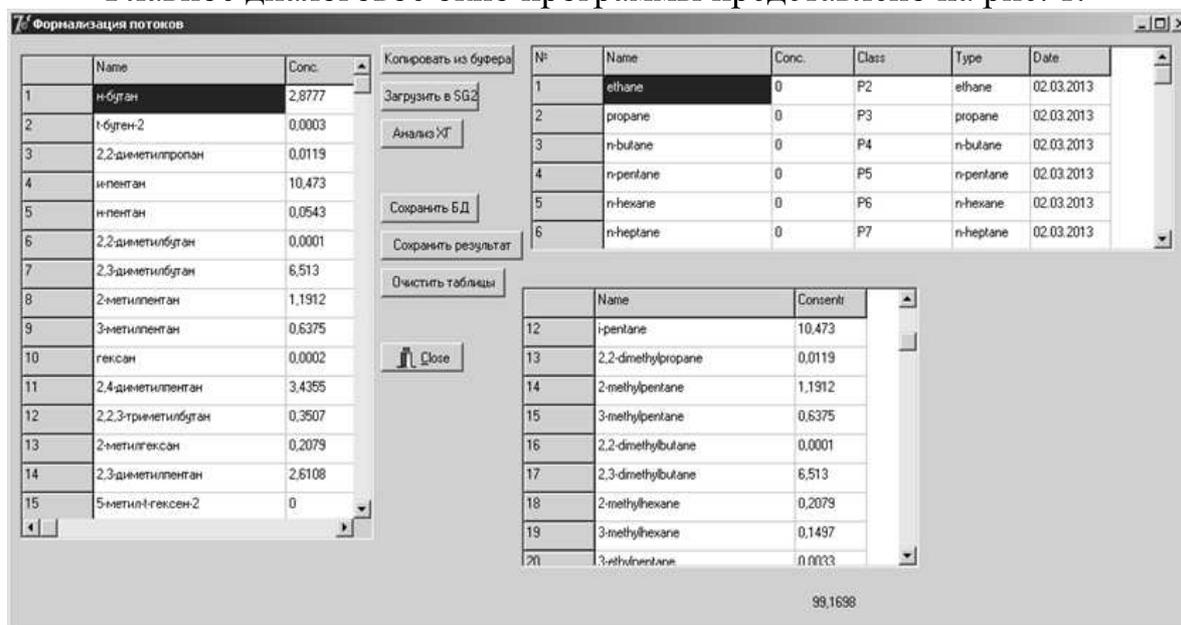


Рис. 1. Главное диалоговое окно программы

Для проверки разработанного набора компонентов на адекватность, с использованием моделирующей системы «Compounding» были рассчита-

ны октановые числа потоков с известными детонационными характеристиками (табл. 2).

Таблица 2

**Сравнение расчетных октановых чисел  
с экспериментальными данными**

Поток	ОЧИ <sub>расч</sub>	ОЧИ <sub>эксп</sub>	Δ
Алкилат	93,3	93,3	0,03
Риформат №1	94	94,5	0,53
Риформат №2	95,4	96	0,6
Бензин кат. Крекинга	85	86	1
Бензин газодифракционирующей установки	83,2	82,8	0,38
Бензин установки КАС	88,2	87,3	0,88

$$\Delta = |\text{ОЧИ}_{\text{эксп}} - \text{ОЧИ}_{\text{расч}}|$$

Анализ результатов представленных в табл. 2 показывает, что предложенная методика позволяет рассчитывать октановые числа с абсолютной погрешностью, не превышающей 1 пункт, что сопоставимо с погрешностью экспериментальных методов определения данного параметра. Таким образом, разработанный набор компонентов, согласно которому будет происходить автоматизированная систематизация данных хроматографического анализа, может быть использован для определения октановых чисел потоков на любом нефтеперерабатывающем предприятии.

Разработанный модуль автоматизированной обработки данных хроматографического анализа на основе формализованного списка 110 компонентов, в совокупности с программой «Compaunding» позволяет:

- Точно рассчитывать углеводородный состав потоков и ОЧИ бензина.
- Более четко реагировать на изменение состава сырья.
- Варьировать рецептуры смешения и вырабатывать рекомендации по вовлечению в компаундирование различного по составу сырья.

Точность разработанных рецептур обеспечивает экономию дорогостоящих компонентов бензинов: продукты установок изомеризации и алкилирования и антидетонационные присадки.

Литература

1. Капустин В. М. Глубокая переработка углеводородного сырья в условиях финансового кризиса // Мир нефтепродуктов, 2009. – №3. – С. 8-10.
2. Киргина М. В., Иванчина Э. Д., Долганов И. М., Смышляева Ю. А., Кровцов А. В., Фан Фу. Моделирование процесса приготовления товарных бензинов на основе учета реакционного взаимодействия углеводородов сырья с высокооктановыми добавками // Нефтепереработка и нефтехимия, 2012. – №4. – С. 3-8.

# ИССЛЕДОВАНИЕ СЫРЬЯ ПРОЦЕССА КОМПАУНДИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

*Е. В. Свиридова, М. В. Киргина*

*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*

Объем производимых бензинов в России растет с каждым годом, согласно правительственной программе по модернизации нефтеперерабатывающих заводов уже через несколько лет производители должны увеличить объем выпуска высококачественных нефтепродуктов в полтора раза. При этом качество выпускаемой продукции должно соответствовать мировым стандартам: к 2020 году нефтеперерабатывающие компании России обязались выпускать бензин стандарта Евро-5. Таким образом, повышение качества выпускаемых нефтепродуктов является приоритетной задачей для нефтяных компаний. Для этого необходимым является совершенствование технологии процесса компаундирования – заключительной стадии производства товарного бензина. Компаундирование представляет собой процесс смешения различных углеводородных потоков, таких как продукты каталитического риформинга, изомеризации, крекинга, алкилирования, а также антидетонационных присадок и добавок-оксигенатов.

Развитие производства бензинов в первую очередь связано со стремлением улучшить основное эксплуатационное свойство топлива – детонационную стойкость, численным эквивалентом которой является октановое число (ОЧ) бензина. Для повышения детонационной стойкости бензина используются различные методы, такие как: использование в качестве базовых компонентов бензинов наиболее высокооктановых вторичных продуктов переработки нефти; широкое использование компонентов с высокими детонационными характеристиками (изопарафины, ароматические углеводороды), а также применение антидетонационных присадок и добавок-оксигенатов [1]. Так как вовлечение различных компонентов, в частности ароматических углеводородов и бензола в производство бензина ограничивается экологическими стандартами, а добавки и присадки являются весьма дорогостоящими, любой производитель старается выбрать в качестве базовых компонентов бензина наиболее высокооктановые потоки. В связи с этим вопрос исследования сырья процесса компаундирования является крайне актуальным.

В процессе приготовления бензинов смешением различных потоков определяющая роль отводится октановым числам смешения, которые отличаются от взвешенной суммы октановых чисел отдельных компонентов, то есть октановые числа бензинов не подчиняются правилам аддитивности. Октановые числа смешения зависят от углеводородного состава потоков, содержания различных компонентов в смеси и других факторов. Ранее на кафедре Химической технологии топлива и химической кибернетики Института природных ресурсов ТПУ была разработана модель, позволяющая рассчитывать октановые числа потоков с учетом возникающих меж-

молекулярных взаимодействий, а также учитывать влияние добавок и присадок на прирост октанового числа товарного бензина [2].

В ходе работы были исследованы составы и свойства изомеризатов и алкилатов различных нефтеперерабатывающих предприятий страны. С использованием разработанной моделирующей системы «Compaunding» были рассчитаны октановые числа по моторному (ОЧМ) и исследовательскому (ОЧИ) методам (табл. 1, 2).

Таблица 1

### Характеристики изомеризатов

Характеристика	Изомеризат №1	Изомеризат №2	Изомеризат №3
<b>ОЧИ</b>	<b>87</b>	<b>81,9</b>	<b>74,3</b>
ОЧМ	85,3	80,2	72,3
Содержание веществ, мас. %			
н-пентан	9,7	14,8	23,5
н-гексан	0,3	4,9	11
изопентан	28,1	38,4	25,8
2,2-диметилбутан	25,7	10,3	2,9
2,3-диметилбутан	8	3,7	3,4
метилциклопентан	0,1	2,1	5,4

Сырьем для процесса изомеризации являются легкие алканы – н-пентан и н-гексан, из которых на выходе получают изомеры и циклические углеводороды, обладающие более высокой детонационной стойкостью. Расчеты показали, что изомеризат 1 имеет самое высокое октановое число, это обуславливается самым низким содержанием исходного сырья (н-пентана, н-гексана) и самым высоким содержанием высокооктановых продуктов данного процесса. Таким образом, можно сделать вывод о том, что чем больше в изомеризате углеводородов разветвленного строения и чем меньше легких алканов, тем выше ОЧ потока.

Таблица 2

### Характеристики алкилатов

Характеристика	Алкилат №1	Алкилат №2
<b>ОЧИ</b>	<b>99,2</b>	<b>95</b>
ОЧМ	90,3	85,6
Содержание веществ, мас. %		
2,2,3-триметилпентан	44,8	30,1
2,3,4-триметилпентан	14,3	12,7
2,2,3-триметилгексан	0,1	5,7

В процессе алкилирования из легких предельных (бутан, пентан) и непредельных углеводородов получают изоалканы с большим содержанием атомов углерода в цепи, обладающих более высокой детонационной стойкостью. Как видно из табл. 2, алкилат № 1 имеет более высокое ОЧ, что обуславливается большим содержанием изоалканов и меньшим содержанием легких алканов в потоке. Таким образом, можно сделать вывод о

том, что чем больше в алкилате содержится компонентов изостроения и чем меньше легких предельных углеводородов, тем выше ОЧ потока.

На завершающей стадии приготовления бензина главной задачей является составление оптимальных рецептур смешения, которые могут включать в себя более 20 углеводородных потоков, а также различные присадки и добавки. С использованием созданной моделирующей системы были разработаны рецептуры смешения бензина марки Регуляр-92, отвечающие всем требованиям ГОСТ Р 51866-2002 и Технического регламента. Сырьем для приготовления бензина выступили риформат типового состава (ОЧИ = 108,5), а также рассмотренные выше алкилаты и изомеризаты (табл. 3).

Таблица 3

**Рецептуры приготовления бензинов марки Регуляр-92**

Характеристика	Содержание компонентов, мас. %					
	1	2	3	4	5	6
<b>ОЧИ</b>	<b>92</b>					
Риформат	16,9					
Алкилат №1	7,6	29,6	45,9	–	–	–
Алкилат №2	–	–	–	11,2	39,3	55,4
Изомеризат №1	75,5	–	–	71,9	–	–
Изомеризат №2	–	53,5	–	–	43,8	–
Изомеризат №3	–	–	37,2	–	–	27,7
ДНП, кПа	81,9	72,2	58,3	79,5	65	51,5

Как видно из табл. 3, содержание катализата во всех рецептурах постоянно и равно 16,9 мас. %, это объясняется тем, что в катализате, в отличие от других потоков присутствует бензол, содержание которого в бензине регламентировано, и согласно Техническому регламенту не должно превышать 1 мас. %, поэтому количество катализата пропорционально количеству бензола в риформате. Причем соотношение содержания катализата в бензине к содержанию бензола в катализате можно описать формулой

$x = \frac{1}{y} \cdot 100\%$ , где  $y$  – содержание бензола в риформате;  $x$  – содержание катализата в бензине.

Так же можно заметить, что рецептуры № 1 и № 4 не могут быть использованы для приготовления бензина, так как у продукта полученного смешением по данным рецептурам завышен такой показатель, как давление насыщенных паров (ДНП), следовательно, они не соответствуют требованиям ГОСТ Р 51866-2002.

Пользуясь данными из табл. 1-3 можно осуществить общий анализ сырья процесса компаундирования.

Как уже было сказано, алкилат № 1 имеет более высокое октановое число, в связи с этим, как видно из табл. 3, содержание алкилата № 1 в рецептурах смешения бензина всегда меньше, чем алкилата № 2; при рас-

смотрении изомеризатов наблюдается обратное – чем выше октановое число потока, тем больше его количество в бензине. Такое вовлечение потоков объясняется тем, что алкилат по себестоимости является более дорогостоящим компонентом, чем изомеризат, поэтому для снижения стоимости товарного бензина и экономии потока алкилирования целесообразно вовлекать меньшее количество алкилата и большее количество изомеризата.

На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что невозможно создать универсальную рецептуру смешения бензина, так как углеводородные потоки в значительной степени отличаются друг от друга по составу. Для оптимального ведения процесса компаундирования необходимым является учет состава вовлекаемых потоков, что позволяет сделать разработанная компьютерная моделирующая система «Compounding».

#### Литература

1. Данилов А. М. Введение в химмотологию. – М.: Техника. ООО «ГУМА ГРУПП», 2003. – 464 с.
2. Киргина М. В., Иванчина Э. Д., Долганов И. М., Смышляева Ю. А., Кравцов А. В., Фан Фу. Моделирование процесса приготовления товарных бензинов на основе учета реакционного взаимодействия углеводородов сырья с высокооктановыми добавками // Нефтепереработка и нефтехимия, 2012. – № 4. – С. 3–8.

## МЕТОД КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

*А. М. Семахин*

*Курганский государственный университет*

Сетевое планирование и управление (СПУ) – методы научного планирования и управления выполнением работ с соблюдением сроков реализации. СПУ предназначено для управления комплексом взаимосвязанных работ, операций и разработок, требующих координации взаимодействия исполнителей [1].

Метод критического пути (critical path method, СРМ) – метод сетевого планирования, определяющий длительности и последовательности выполнения операций решения задачи. Время выполнения работ – детерминированная величина. Длина критического пути – минимально возможная продолжительность всего комплекса работ.

Алгоритм критического пути содержит этапы:

Этап 1. Определение процессов проекта, длительности и последовательности выполнения операций.

Этап 2. Определение сетевого графа.

Этап 3. Расчет ранних и поздних сроков совершения событий.

Этап 4. Определение временного графика реализации событий [2].

Разработаем сетевую математическую модель информационной системы и определим критический путь методом СРМ.

Постановка задачи формулируется следующим образом: провести сетевое моделирование и оптимизацию сетевого графика создания корпоративной информационной системы территориального фонда обязательного медицинского страхования по Курганской области (КИС ТФ ОМС).

Перечень выполняемых работ представлен в табл. 1.

Таблица 1

**Перечень выполняемых работ по совершенствованию КИС ТФ ОМС по Курганской области**

№ п/п	Код работы	Содержание работы
1	1-2	Разработка технического задания (ТЗ)
2	1-3	Разработка технического проекта (ТП)
3	2-3	Согласование ТЗ с ТП
4	4-2	Утверждение технического задания
5	3-4	Утверждение технического проекта
6	4-5	Обследование и анализ административных зданий в г. Кургане
7	4-6	Обследование и анализ административных зданий в районах
8	5-7	Проведение подготовительных работ в ТФ ОМС в г. Кургане
9	6-7	Проведение подготовительных работ в районах
10	7-8	Разработка структуры корпоративной компьютерной сети (ККС)
11	8-9	Выбор и обоснование сетевой архитектуры ККС
12	9-10	Выбор спутникового Internet провайдера
13	10-11	Покупка вычислительной техники, сетевого оборудования
14	10-12	Покупка спутникового оборудования.
15	10-13	Покупка программного обеспечения (ПО)
16	11-14	Доставка вычислительной техники в ТФ ОМС в г. Кургане
17	11-15	Доставка вычислительной техники в районные отделы
18	12-14	Доставка спутникового оборудования в ТФ ОМС в г. Кургане
19	12-15	Доставка спутникового оборудования в районные отделы
20	13-14	Доставка и прикладного программного обеспечения г. Курган
21	13-15	Доставка ПО в районные отделы (управления) ТФ ОМС
22	14-16	Монтаж сети в ТФ ОМС в г. Кургане
23	14-17	Монтаж спутникового оборудования в ТФ ОМС в г. Кургане
24	15-18	Монтаж сети в районных отделах (управлениях) ТФ ОМС
25	15-19	Монтаж спутникового оборудования в районных отделах
26	16-20	Подключение сетевого оборудования в ТФ ОМС в г. Кургане
27	17-20	Подключение спутникового оборудования в г. Кургане
28	18-21	Подключение сети в районных отделах (управлениях)
29	19-21	Подключение спутникового оборудования в районных отделах
30	20-22	Установка программного обеспечения в ТФ ОМС в г. Кургане
31	21-23	Установка программного обеспечения в районных отделах
32	22-24	Настройка оборудования в ТФ ОМС в г. Кургане
33	23-24	Настройка оборудования в районных отделах (управлениях)
34	23-24	Настройка оборудования в районных отделах (управлениях)
35	24-26	Тестирование корпоративной сети
36	25-27	Сдача экзаменов персоналом ТФ ОМС по Курганской области
37	26-27	Прием в эксплуатацию корпоративной информационной системы

На рис. 1 представлен сетевой график создания КИС ТФ ОМС с критическим путем.

Длина критического пути и топология определяются методом критического пути. Ранний срок совершения события  $j$  определяется по формуле

$$t_j^p = \max_{(i,j)} \{t_i^p + t_{ij}\},$$

где  $t_i^p$  – ранний срок совершения  $i$  события,  $t_{ij}$  – продолжительность выполнения  $i - j$  работы.

Поздний срок наступления  $i$  события определяется по формуле

$$t_i^n = \min_{(i,j)} \{t_j^n - t_{ij}\},$$

где  $t_j^n$  – поздний срок совершения  $j$  события.

Время завершения работ 89 дней, суммарная стоимость 297 человеко-дней.

Разработан временной график реализации проекта. Критические участки располагаются последовательно друг за другом без перекрытий и зазоров. Суммарная длительность критических участков равна длительности выполнения проекта. Некритические участки представлены максимальными интервалами выполнения, превышающие реальную длительность выполнения событий.

Оптимизация сетевого графика улучшает организацию производства работ с учетом сроков выполнения, сокращает длину критического пути и проводится за счет сокращения продолжительности работ, находящихся на критическом пути, использования резервов времени не критических работ, вкладывания дополнительных ресурсов в критические работы. На рис. 2 представлен сетевой график создания КИС ТФ ОМС после оптимизации с критическим путем.

Результаты проведенных исследований позволили сделать следующие выводы.

1. Разработан сетевой график выполнения работ, определены длина критического пути и топология, построен временной график.
2. Проведена оптимизация сетевого графика.
3. Сетевое моделирование позволяет эффективно спланировать и выполнить работы по созданию КИС ТФ ОМС с наименьшими затратами и в заданные сроки.

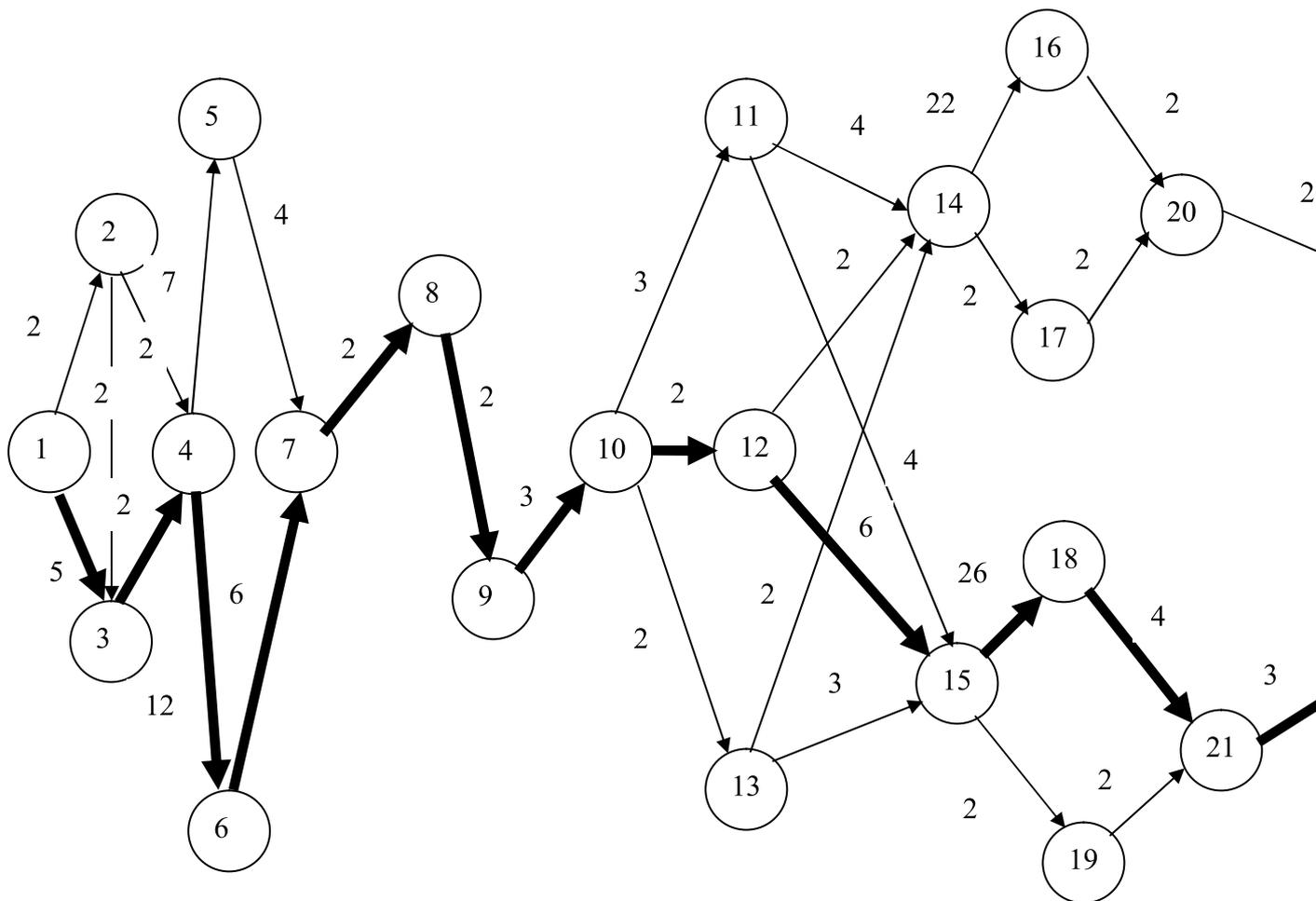


Рис. 1. Сетевой график создания КИС ТФ ОМС с критическим п

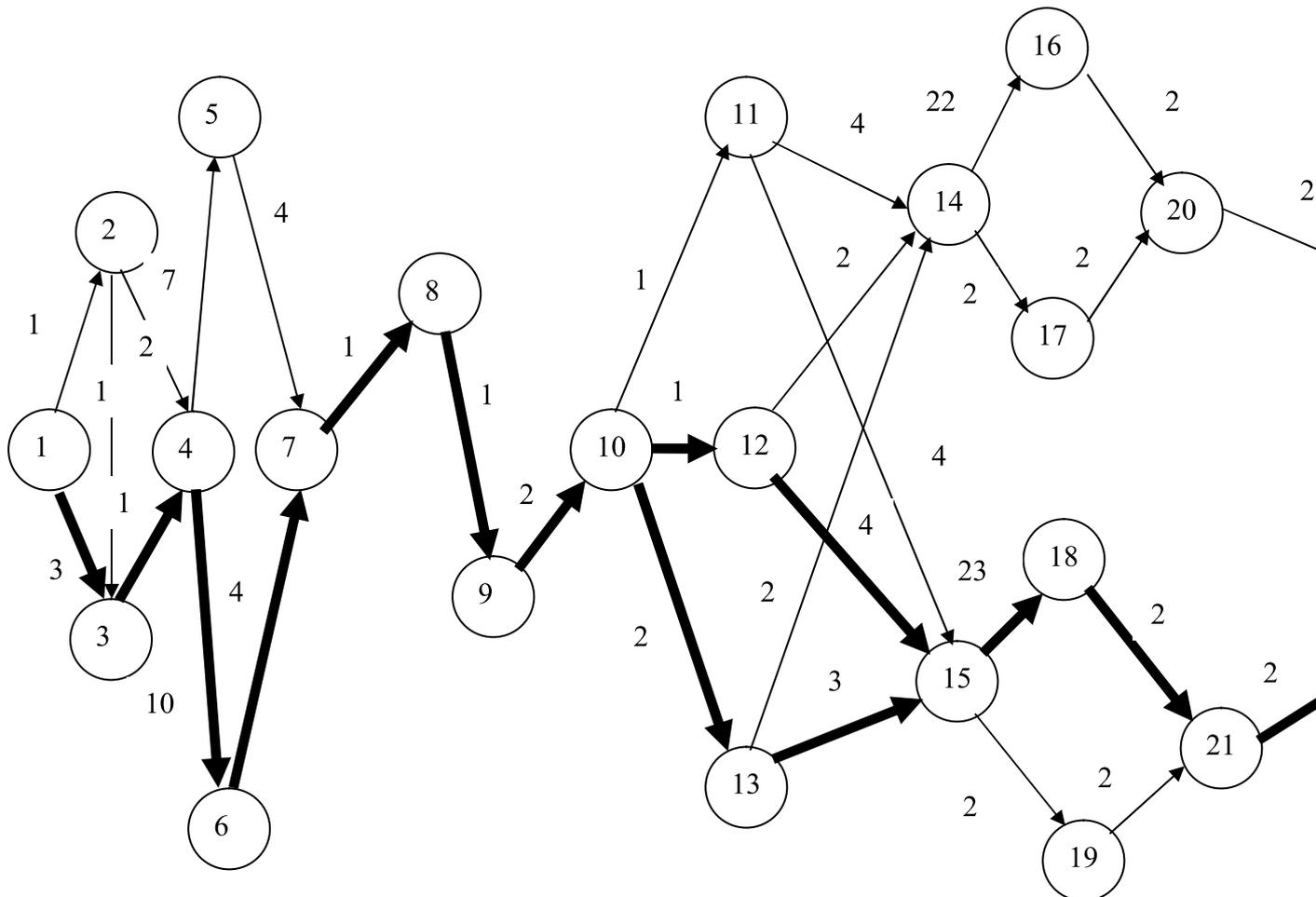


Рис. 2. Сетевой график создания КИС ТФ ОМС после оптимизации с критическим путем

#### Литература

1. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2001. 544 с.
2. Таха Х. А. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. М.: Издательский дом “Вильямс”, 2005 – 912 с.

## МЕТОД PERT В МОДЕЛИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

*А. М. Семахин*

*Курганский государственный университет*

Метод PERT (Program Evaluation and Review Technique) – метод сетевого планирования и управления, анализирующий проекты, для которых продолжительность работ случайная величина [1]. Был разработан фирмой «Буз, Ален и Гамильтон» и корпорацией «Локхид» в 1958 году.

В условиях неопределенности время  $t_{ij}$  является случайной величиной, подчиняющееся закону распределения случайной величины ( $\beta$ -распределение, нормальное распределение). Числовые характеристики случайной величины  $t_{ij}$  математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Математическое ожидание рассчитывается по формуле

$$M(t_{ij}) = \frac{t_{ij}^o + t_{ij}^n + t_{ij}^h}{6},$$

где  $t_{ij}^o$  – оптимистическое время (выполнение работы в благоприятных условиях),  $t_{ij}^n$  – пессимистическое время (выполнение работы в неблагоприятных условиях),  $t_{ij}^h$  – наиболее вероятное время (выполнение работы в нормальных условиях).

Дисперсия рассчитывается по формуле  $\sigma^2 = \left(\frac{t_{ij}^n - t_{ij}^o}{6}\right)^2$ , где  $t_{ij}^n$  – пессимистическое время,  $t_{ij}^o$  – оптимистическое время.

Среднеквадратическое отклонение рассчитывается по формуле  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ , где  $\sigma^2$  – дисперсия случайной величины  $t_{ij}$ .

Анализ сетевых графиков методом PERT включает расчет временных параметров и оценку вероятности того, что общий срок выполнения проекта  $T_{кр}$  не превысит директивного срока  $T_\delta$ . Если вероятность  $T_{кр} \leq T_\delta$  мала, например меньше 0,3, то выполнение комплекса работ в заданный срок  $T_\delta$  находится под угрозой срыва. Необходимо принять дополнительные меры: перераспределение ресурсов по сети, пересмотр состава работ и событий. Если  $T_{кр} \leq T_\delta$  значительна, например больше 0,85, то выполнение проекта в заданный срок можно прогнозировать с высокой степенью надежности.

Постановка задачи формулируется следующим образом: провести сетевое моделирование и вероятностный анализ сетевого графика создания корпоративной информационной системы территориального фонда обязательного медицинского страхования по Курганской области (КИС ТФ ОМС) методом PERT. Результаты расчетов параметров для проведения анализа методом PERT приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Расчетные данные для анализа сетевого графика методом PERT**

N п/п	Работа	Ожидаемое время, дн.	Дисперсия	Раннее начало	Позднее начало	Раннее окончание	Позднее окончание	Резерв
1	1-2	2,3333	0,4444	0	0,6667	2,3333	3,0000	0,6667
2	1-3	5,0000	0,4444	0	0	5,0000	5,0000	Крит.
3	2-3	2,0000	0,1111	2,3333	3,0000	4,3333	3,0000	0,6667
4	2-4	2,0000	0,1111	2,3333	5,1667	4,3333	7,1667	2,8333
5	3-4	2,1667	0,2500	5,0000	5,0000	7,1667	7,1667	Крит.
6	4-5	6,8333	0,2500	7,1667	14,500	14,000	21,333	7,333
7	4-6	12,167	0,6944	7,1667	7,1667	19,333	19,333	Крит.
8	3-7	4,0000	0,1111	14,000	21,333	18,000	25,333	7,333
9	6-7	6,000	0,4444	19,333	19,333	25,333	25,333	Крит.
10	7-8	2,0000	0,1111	25,333	25,333	27,333	27,333	Крит.
11	8-9	2,0000	0,1111	27,333	27,333	29,333	29,333	Крит.
12	9-10	3,1667	0,2500	29,333	29,333	32,500	32,500	Крит.
13	10-11	2,8333	0,2500	32,500	33,333	35,333	36,167	0,833
14	10-12	2,0000	0,1111	32,500	32,500	34,500	34,500	Крит.
15	10-13	2,0000	0,1111	32,500	35,333	34,500	37,333	2,8333
16	11-14	4,0000	0,1111	35,333	44,667	39,333	48,667	9,3333
17	11-15	4,1667	0,2500	35,333	36,167	39,500	40,333	0,8333
18	12-14	2,0000	0,1111	34,500	46,667	36,500	48,667	12,167
19	12-15	5,8333	0,2500	34,500	34,500	40,333	40,333	Крит.
20	13-14	2,0000	0,1111	34,500	46,667	36,500	48,667	12,167
21	13-15	3,0000	0,1111	34,500	37,333	37,500	40,333	2,8333
22	14-16	22,667	1,7778	39,333	48,667	62,000	71,333	9,3333
23	14-17	2,0000	0,1111	39,333	69,333	41,333	71,333	30,000
24	15-18	26,167	1,3611	40,333	40,333	66,500	66,500	Крит.
25	15-19	2,0000	0,1111	40,333	66,333	42,333	68,333	26,000
26	16-20	2,0000	0,1111	62,000	71,333	64,000	73,333	9,333
27	17-20	2,0000	0,1111	41,333	71,333	43,333	73,333	30,000
28	18-21	3,833	0,2500	66,500	66,500	70,333	70,333	Крит.
29	19-21	2,0000	0,1111	42,333	68,333	44,333	70,333	26,000
30	20-22	2,0000	0,1111	64,000	73,333	66,000	75,333	9,333
31	21-23	3,0000	0,1111	70,333	70,333	73,333	73,333	Крит.
32	22-24	4,0000	0,1111	66,000	75,333	70,000	79,333	9,333
33	23-24	6,0000	0,1111	73,333	73,333	79,333	79,333	Крит.
34	24-25	8,0000	0,4444	79,333	79,333	87,333	87,333	Крит.
35	24-26	2,0000	0,1111	79,333	84,333	81,333	86,333	5,000
36	25-27	2,0000	0,1111	87,333	87,333	89,333	89,333	Крит.
37	26-27	3,0000	0,1111	81,333	86,333	84,333	89,333	5,000

Время завершения 89,3337 дней, дисперсия 5,055556. Критический путь 1  $\xrightarrow{5,0000}$  3  $\xrightarrow{2,1667}$  4  $\xrightarrow{12,1670}$  6  $\xrightarrow{6,0000}$  7  $\xrightarrow{2,0000}$  8  $\xrightarrow{2,0000}$  9  $\xrightarrow{3,1667}$  10  $\xrightarrow{2,0000}$  12  $\xrightarrow{5,8333}$  15  $\xrightarrow{26,1670}$  18  $\xrightarrow{3,8333}$  21  $\xrightarrow{3,0000}$  23  $\xrightarrow{6,0000}$  24  $\xrightarrow{8,0000}$  25  $\xrightarrow{2,0000}$  27.

Проведем вероятностный анализ сетевого графика. Результаты вероятностного анализа представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Время завершения и вероятности окончания комплекса работ не позднее директивного срока**

№ п/п	Время завершения, дн	Вероятность	Дисперсия	Среднеквадратическое отклонение
1	100	0,99999	5.055556	2.248456
2	99	0,99998	5.055556	2.248456
3	98	0,99970	5.055556	2.248456
4	97	0,99960	5.055556	2.248456
5	96	0,99850	5.055556	2.248456
6	95	0,99496	5.055556	2.248456
7	94	0,98102	5.055556	2.248456
8	93	0,94850	5.055556	2.248456
9	92	0,88219	5.055556	2.248456
10	91	0,77072	5.055556	2.248456
11	90	0,61656	5.055556	2.248456
12	89	0,44106	5.055556	2.248456
13	88	0,27660	5.055556	2.248456
14	87	0,14896	5.055556	2.248456
15	86	0,06909	5.055556	2.248456
16	85	0,02698	5.055556	2.248456
17	84	0,00880	5.055556	2.248456
18	83	0,00243	5.055556	2.248456

Для выполнения работ по созданию КИС ТФ ОМС с высокой степенью надежности директивное время должно быть  $T_0 \geq 92$  дней (вероятность выполнения работ  $0,88219 > 0,85$ ). Суммарная стоимость работ 296 чел.-дней.

График зависимости вероятности выполнения работ по созданию КИС ТФ ОМС длины критического пути приведен на рис.1.

Результаты проведенных исследований позволили сделать следующие выводы:

1. Разработана сетевая модель. Получено решение методом PERT.
2. Проведен вероятностный анализ сетевого графика.

График зависимости вероятности выполнения комплекса работ в зависимости от длины критического пути

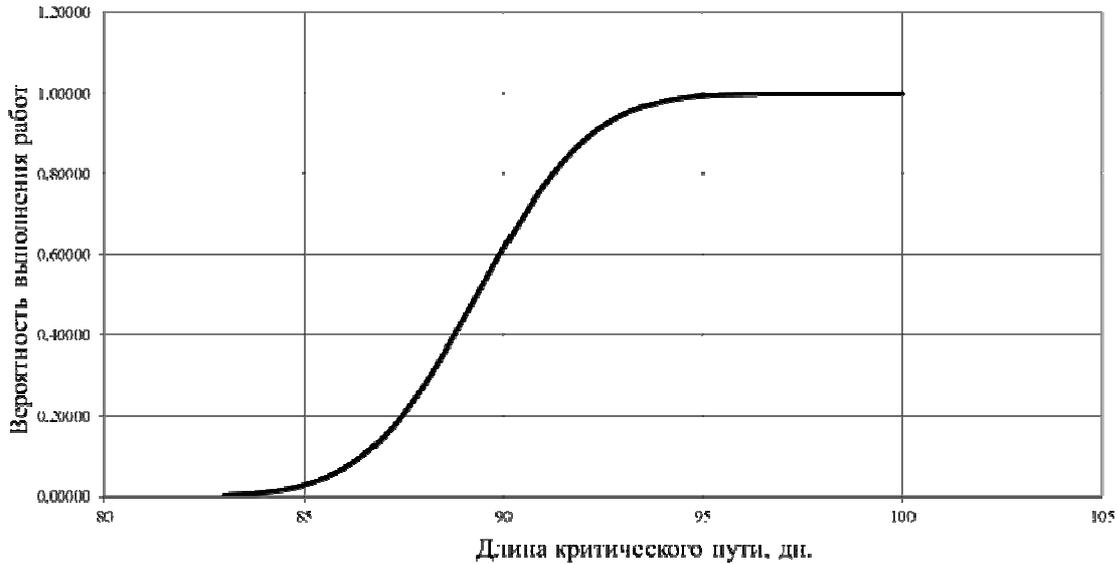


Рис. 1. Зависимость вероятности работ по созданию КИС ТФ ОМС от длины критического пути

Литература

1. Таха Х. А. Введение в исследование операций. 7-е издание.: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005 – 912 с.

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

*В. И. Смагин, О. О. Мухина*

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*

В работе рассматривается подход синтеза динамической системы управления для объекта с интервальными параметрами на основе вероятностного метода. Отметим, что в [1] описаны алгоритмы управления такими объектами на основе методов интервальной математики.

Пусть объект и канал наблюдений описываются уравнениями:

$$x(k+1) = (A + \sum_{i=1}^r A_i \theta_i) x(k) + (B + \sum_{i=1}^r B_i \theta_i) u(k) + q(k), x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$y(k) = Hx(k) + v(k), \quad (2)$$

где  $x(k) \in R^n$  – вектор состояний,  $u(k) \in R^l$  – управление,  $y(k) \in R^m$  – вектор измерений,  $x_0$  – начальные условия ( $M\{x_0\} = \bar{x}_0$ ,  $M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\} = P_{x_0}$ ),  $q(k)$  и  $v(k)$  – независимые гауссовские случайные последовательности ( $M\{q(k)\} = 0$ ,  $M\{v(k)\} = 0$ ,  $M\{q(k)q^T(j)\} = Q\delta_{k,j}$ ,  $M\{v(k)v^T(j)\} = V\delta_{k,j}$ ,  $\delta_{k,j}$  – символ Кронекера), мат-

рицы  $B$  и  $H$  полного ранга, пара матриц  $(A, B)$  управляема, пара матриц  $(H, A)$  – наблюдаема,  $\theta_i$  – неопределенные параметры интервального типа  $(-1 \leq \theta_i \leq 1)$ .

Оптимизируемый локальный критерий имеет вид [2].

$$J(k) = M \{ (x(k+1) - z(k))^T C (x(k+1) - z(k)) + u^T(k) D u(k) \}, \quad (3)$$

где  $C, D$  – весовые матрицы,  $z(k) \in R^n$  – отслеживаемый вектор, определяемый из уравнения:

$$z(k+1) = Fz(k) + q_z(k), z(0) = z_0. \quad (4)$$

В (4)  $q_z(k)$  – гауссовская случайная последовательность ( $M\{q_z(k)\} = 0$ ,  $M\{q_z(k)q_z^T(j)\} = Q_z \delta_{k,j}$ ),  $z_0$  – начальные условия ( $M\{z_0\} = \bar{z}_0$ ,  $M\{(z_0 - \bar{z}_0)(z_0 - \bar{z}_0)^T\} = P_{z_0}$ ). Требуется найти управление объектом (1), используя, наблюдения (2), минимизируя критерий (3).

Суть вероятностного подхода заключается в том, неопределенные интервальные параметры  $\theta_i$  заменяются независимыми случайными последовательностями  $\bar{\theta}(k)$ , с равномерным законом распределения на интервале  $[-1, 1]$ .

Динамический закон управления зададим в виде:

$$u(k) = K_0(k)w(k) + K_1(k)y(k) + K_2(k)z(k), \quad (5)$$

где переменная  $w(k)$  определяется с помощью наблюдателя Люенбергера [3,4] или динамического звена заданной размерности [5]

$$w(k+1) = \bar{A}(k)w(k) + \bar{B}(k)y(k), w(0) = 0. \quad (6)$$

Здесь  $w(k) \in R^p$  ( $1 \leq p \leq n$ ),  $\bar{A}(k) = (L + MBK_0(k))$ ,  $\bar{B}(k) = M(BK_1(k) + N)$ , матрицы  $L, M, N$  могут быть определены по методике, приведенной в [5].

**Теорема.** Если матрицы

$$\bar{D} = D + B^T C B + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^r B_i^T C B_i, \bar{V}(k) = \begin{bmatrix} P_w(k) & P_{wx}(k)H^T & P_{wz}(k) \\ HP_{wx}(k) & HP_x(k)H^T + V & HP_{wz}(k) \\ P_{zw}(k) & P_{zx}(k)H^T & P_z(k) \end{bmatrix}$$

положительно определены при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то оптимальные по критерию (3) коэффициенты передач для закона управления (5), (6) определяются по формулам

$$\begin{aligned} K_0^*(k) &= -\bar{D}^{-1} B^T C A (E - G_x(k) H^T \bar{V}^{-1}(k) H) G_{xw}(k) \times \\ &\quad \times (G_w(k) + G_{wx}(k) H^T \bar{V}^{-1}(k) H G_{xw}(k))^{-1}, \\ K_1^*(k) &= -(\bar{D}^{-1} B^T C A G_x(k) - K_0^*(k) G_{xw}(k)) H^T \bar{V}^{-1}(k), \\ K_2^*(k) &= -(\bar{D}^{-1} B^T C (A P_{xz}(k) - P_z(k)) + K_0^*(k) P_{wz}(k) + \\ &\quad + K_1^*(k) H P_{xz}(k)) P_z^{-1}(k), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $G_x(k) = P_x(k) - P_{xz}(k) P_z^{-1}(k) P_{zx}(k)$ ,  $G_{wx}(k) = P_{wx}(k) - P_{wz}(k) P_z^{-1}(k) P_{zx}(k)$ ,  $G_w(k) = P_w(k) - P_{wz}(k) P_z^{-1}(k) P_{zw}(k)$ ,  $\bar{V}(k) = H G_x(k) H^T + V$ , матрицы  $P_x(k)$ ,

$P_w(k)$ ,  $P_z(k)$ ,  $P_{zw}(k) = P_{wz}^T(k)$ ,  $P_{zx}(k) = P_{xz}^T(k)$ ,  $P_{wx}(k) = P_{xw}^T(k)$  определяются из системы матричных разностных уравнений с граничными условиями на левом конце.

Представляет интерес рассмотрение системы управления вида (5) с постоянными коэффициентами передачи. В этом случае должны существовать матрицы

$$K_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} K_i^*(k) \quad (i = \overline{0,2}),$$

где матрицы  $K_i^*(k)$  определены в (7). Отметим, в этом случае для асимптотической устойчивости замкнутой системы с управлением (5), (6) в среднем квадратическом необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы

$$(A + B(K_1^*H + K_0^*N))^T \otimes (A + B(K_1^*H + K_0^*N)) + \sum_{i=1}^r (A_i + B_i(K_1^*H + K_0^*N))^T \otimes (A_i + B_i(K_1^*H + K_0^*N)) \quad (8)$$

были бы по модулю меньше единицы. В (8) символ  $\otimes$  обозначает кронекеровское произведение матриц.

**Пример.** Пусть объект и локальный критерий описываются следующими матрицами и векторами:

$$A = \begin{bmatrix} 0,05 & 1 \\ -0,025 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,05 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, A_5 = A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ B_5 = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,25 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix}, \\ H = [0 \quad 1], V = 0,16, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0,2, z = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Для динамического звена (6) выбраны следующие параметры:

$$L = 0,5, N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}, M = [-5/9 \quad 1].$$

Оптимальные коэффициенты передачи для системы управления (7) следующие:

$$K_0^* = -0,1705, K_1^* = -0,5359, K_2^* = [0,04211 \quad ,4211]. \quad (9)$$

Для ряда значений параметров  $\theta$  (значения генерировались датчиком случайных чисел по равномерному распределению) сравнивалось качество двух систем управления. Первая система управления моделировалась с коэффициентами передачи (9), вторая с коэффициентами передачи

$$K_0^* = -0,0101, K_1^* = -0,2833, K_2^* = [0,01749 \quad ,1749], \quad (10)$$

которая рассчитывалась по номинальным значениям параметров (значения параметров выбирались равными середине интервала неопределенности). Как показало сравнение, точность слежения в системе управления с коэффициентами передачи (9) выше, чем в системе управления, синтезированной по номинальным значениям параметров (10). Для иллюстрации на рис.1 – 4 приведены реализации состояния  $x_1(k)$  и управлений  $u(k)$ . На рисунках графики, отмеченные цифрой 1 соответствуют следующим значениям параметров  $\theta$ :

$$\theta_1 = -0,513, \theta_2 = 0,023, \theta_3 = 0,766, \theta_4 = 0,973, \theta_5 = 0,960, \theta_6 = -0,110.$$

Графики, отмеченные цифрой 2 соответствуют значениям:

$$\theta_1 = -0,303, \theta_2 = 0,440, \theta_3 = -0,272, \theta_4 = 0,572, \theta_5 = -0,914, \theta_6 = -0,894.$$

Графики, отмеченные цифрой 3 соответствуют значениям:

$$\theta_1 = -0,645, \theta_2 = 0,478, \theta_3 = 0,798, \theta_4 = -0,734, \theta_5 = 0,130, \theta_6 = -0,533.$$

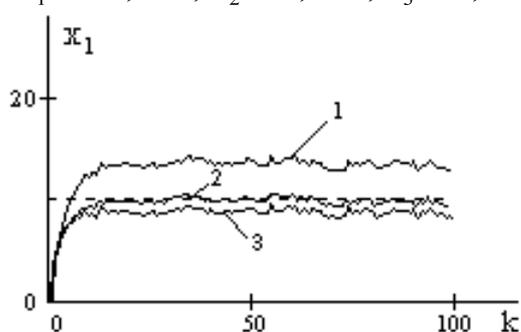


Рис. 1. Переходные процессы в оптимальной системе управления для объекта с интервальными параметрами

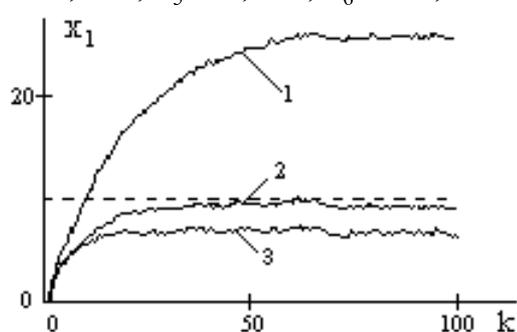


Рис. 2. Переходные процессы в оптимальной системе управления, синтезированной по номинальным значениям параметров

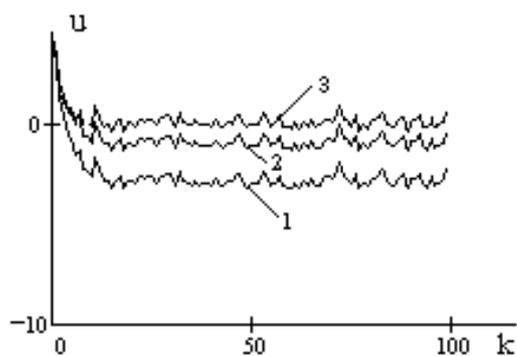


Рис. 3. Управления в оптимальной системе управления для объекта с интервальными параметрами

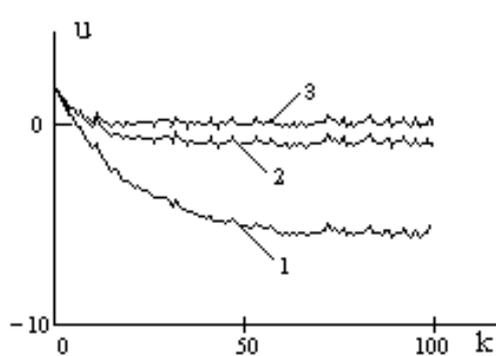


Рис. 4. Управления в оптимальной системе управления, синтезированной по номинальным значениям параметров

Как видно из графиков оптимальная система управления с постоянными коэффициентами передачи (9) обладает свойством робастности и обеспечивает более высокую точность слежения, при этом управление по абсолютной величине меньше, чем в системе управления, синтезированной по номинальным значениям параметров.

#### Литература

1. Patre V. M., Bandyopadhyay B. Robust control for two-time-scale discrete interval systems // *Reliable computing*. 2006. – № 12. – P.45-58.
2. Смагин В. И., Параев Ю. И. Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. – 171 с.
3. Luenberger D. G. An introduction to observers. *IEEE. Trans. Automatic Contr.* 1972. – V. AC-16. – № 6. – P. 596-602.
4. Браммер К., Зифлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. Пер. с нем. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 199 с.
5. Домбровский В.В. Понижение порядка систем оценивания и управления. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1994. – 175 с.

### **О РАЗРАБОТКЕ АЛГОРИТМА ВЫДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ В МУЗЫКАЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ, ЗАПИСАННЫХ ПАРТИТУРАМИ**

*Ю. А. Уфимцев*

*Омский государственный технический университет*

В настоящее время предпринимается всё больше попыток исследования музыкальных произведений при помощи различных математических аппаратов, от анализа методами статистики до попыток создания генераторов музыки.

В любом из имеющихся подходов к музыкальным произведениям, как полифоническим, так и монофоническим, существует большая проблема в том, что выбрать в качестве естественной акустической единицы. Если воспринимать музыкальное произведение как сложный объект, то применив методологию редукционизма, можно выделить в качестве единиц этого объекта ноты. Однако, с точки зрения системного подхода, на наш взгляд, ноты по отдельности не могут быть естественными единицами этого объекта [1]. Во многом от самих исследователей зависит, будет рассматриваться нота как единица, «буква» такого текста, или это будет дискретизированная по времени звуковая волна определённой частоты, или комбинация нот. Профессионалы выделяют в музыкальном тексте некоторые более сложные компоненты текста, называемые субмотивами, мотивами, фразами, фигурами, темами и т. п., способы и, тем более, алгоритмы выявления которых строго не определены [2, 3].

М. Г. Борода в качестве элемента музыкального текста предложил так называемый «формальный мотив», или Ф-мотив [4]. Такая единица формализована на основе глубокого знания теории музыки и уникального профессионального опыта. Также Борода описал формальную процедуру выделения такой единицы из отдельного голоса произведения. С её помощью любое музыкальное произведение можно однозначно сегментировать на Ф-мотивы.

Ю. К. Орлов же, проводя статистические исследования различных произведений человеческой культуры, таких, как литература, живопись и

музыка [4], взяв за основу предложенную Бородой единицу обнаружил общие для многих текстов закономерности. Эти закономерности, однако, учитывали лишь статистические характеристики, то есть они не опирались на взаимное расположение всех единиц рассматриваемого текста. Исходный материал попросту терял своё значение, его можно полностью превратить в бессмыслицу, если переставить элементы в нём местами хаотичным образом, и при этом сохранятся все числовые характеристики, определённые Орловым.

Процедура Бороды и статистический анализ Орлова предполагают при обработке полифонических произведений последовательное выделение единиц для каждой из инструментальных дорожек текста в отдельности. Такой подход к музыкальным произведениям, как к некоторой разворачиваемой во времени сущности, недопустим, поскольку теряется акустическая целостность произведения, задуманная автором.

А. В. Верховин, Д. И. Дорошенко и А. С. Гуменюк на основе процедуры, предложенной Бородой, разработали алгоритм, однозначно описывающий сегментацию монофонических музыкальных текстов на основе Ф-мотивов. Верховин разработал программный комплекс, реализующий этот алгоритм для автоматической сегментации монофонических произведений. Программная реализация прошла апробацию и продемонстрировала возможности для анализа произведений и составления музыкальных словарей [6]. Значительным ограничением этого алгоритма является запрет на присутствие в мелодии аккордов и созвучий □ слияний одновременно звучащих тонов [7].

Для того чтобы получить возможность исследования всего доступного набора музыкальных произведений в виде MIDI-файлов и партитур из открытых интернет-источников без ограничений по количеству голосов, необходимо было разработать алгоритм сегментации, учитывающий, по возможности, полученные ранее результаты работы с монофоническими произведениями. Было предложено ввести сходную музыкальному понятию «созвучие» сущность, которая представляла бы собой совокупность одновременно звучащих звуков во всём множестве голосов музыкального произведения. Такая сущность должна включать как консонансы, так и диссонансы. Поскольку данная сущность фактически является суперпозицией высот нот с одинаковой длительностью и не имеет в музыкальной терминологии специального имени, назовём её «мульти нотой». Процедура выделения мульти нот продемонстрирована на рис. 1.

Поскольку для мульти нот можно определить операцию сравнения, то преобразованная таким образом многотекстовая партитура музыкального произведения становится одномерной последовательностью символов определённого конечного алфавита музыкальным текстом. Характерными чертами каждого такого «символа» будут его положение в музыкальном такте и ритмическая длительность. Этим характеристикам достаточно, чтобы

применить алгоритм для сегментации монофонического произведения к такому тексту для выделения полифонических Ф-мотивов (ПФ-мотивов).

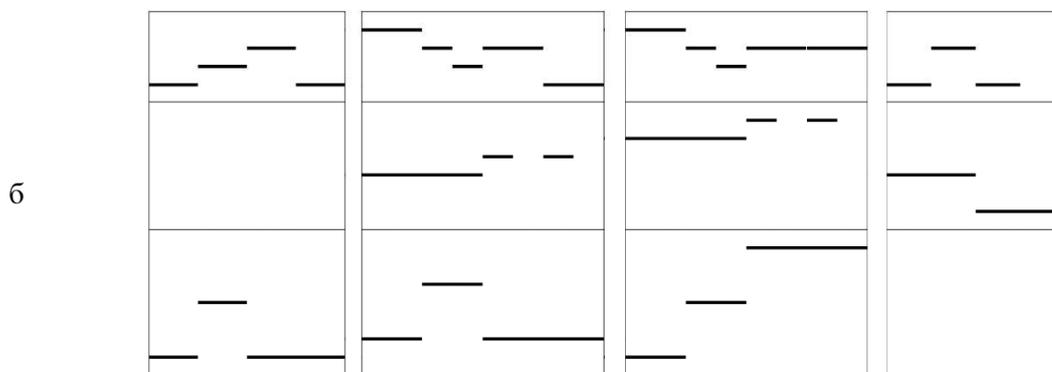
Алгоритм и его программная реализация прошли апробацию и показали способность к однозначному отображению партитуры в музыкальный текст. Результаты апробации приведены в таблице.

№	Произведение	L	Max P	Vp	Vt
1	Ludwig van Beethoven – Anglaise for piano in D major, Hess 61	132	0,1212	31	45
2	Johann Sebastian Bach – Invention No. 2 in C minor	219	0,0320	148	97
3	Muzio Clementi – Sonatina Op. 36, No. 1, first movement Allegro	251	0,0797	73	80
4	George Frideric Handel – Concerto Grosso Op. 6, No 1, second movement	462	0,0087	390	250
5	Carl Czerny – Etude in C major, op. 740 no. 1	674	0,0490	223	187
6	Ludwig van Beethoven – Bagatelle No. 25 in A minor	130	0,2077	19	38
7	Wolfgang Amadeus Mozart – Solfeggi, K.393	784	0,0740	250	190
8	George Frideric Handel – Music for the Royal Fireworks, second movement Bourree	201	0,0199	183	109
9	George Frideric Handel – Water Music, fifth movement	215	0,0140	203	131

Обозначения в таблице: L – длина произведений, измеренная числом ПФ-мотивов; Max P — вероятность самого частовстречающегося ПФ-мотива; Vp — практическая мощность словаря ПФ-мотивов; Vt — теоретическая мощность словаря ПФ-мотивов.



Потактовые временные диаграммы звучащих нот для трёх голосов:



Потактовые временные диаграммы очерёдности мульти нот:

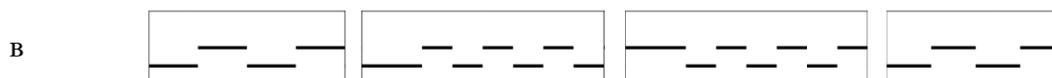


Рис. 1. Образование мульти нот из трёх голосов

В настоящее время создаётся выборка текстов и накапливаются словари ПФ-мотивов.

#### Литература

1. Шрейдер Ю. А., Шаров А. А. Системы и модели. – М.: Радио и связь, 1982. – 152 с.
2. Зарипов Р. Х. Решение задач по гармонии и анализ гармонизации на цифровой вычислительной машине // Проблемы кибернетики: сб. М: Наука, 1967. – №18. С. 91-128.
3. Виноград А. Гиперметрическая регулярность в ритме смены гармонических функций на примерах И.С. Баха // Музыкальный журнал «ИзраильXXI»: Электронный научный журнал. URL: [http://21israel-music.com/Bach\\_Harmony.htm](http://21israel-music.com/Bach_Harmony.htm)
4. Борода М. Г. К вопросу о метроритмической элементарной единице в музыке // Сообщение Академии Наук Грузинской ССР. – 1973. – № 3. – С. 71-72
5. Орлов Ю. К. Невидимая гармония // Сб. Число и мысль. – М.: Знание, 1980. – 73 с.
6. Верховин А. В., Гуменюк А. С. О средствах формального анализа структуры музыкальных текстов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – №3(24). С. 47-56.
7. [ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org) : Википедия — свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://ru.wikipedia.org/wiki/Созвучие>, свободный. – Загл. с экрана.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

<i>Lukashenko O., Morozov E., Pagano M.</i> Effective Envelopes for Gaussian Queues.....	3
<i>Бартош С. В., Козут А. Т., Любченко А. А.</i> Многокритериальная оптимизация периодичности обслуживания устройств технологической радиосвязи.....	7
<i>Жидкова Л. А., Моисеева С. П.</i> Исследование системы массового обслуживания ММРР M  $\infty$ с повторным обслуживанием.....	11
<i>Зорин А. В.</i> О циклическом обслуживании неординарных рекуррентных потоков.....	15
<i>Иванов Н. А., Сущенко С. П.</i> Исследование влияния глубины неблокируемости кэша для трёхуровневой иерархической памяти.....	20
<i>Ивницкий В. А.</i> Моделирование кусочно-непрерывной однолинейной системы массового обслуживания с неоднородным полумарковским потоком.....	23
<i>Кокшенёв В. В.</i> Моделирование TCP RENO цепью Маркова с дискретным временем.....	28
<i>Кокшенев В. В., Сущенко С. П.</i> Анализ группового режима отказа транспортного протокола в нагруженном тракте передачи данных.....	34
<i>Любина Т. В.</i> Исследование динамической RQ-системы с входящим ММРР-потоком и конфликтами заявок.....	39
<i>Минаева Н. В.</i> Исследование СМО ММРР (M  $\infty$ ) <sup>2</sup> в условии растущего времени обслуживания.....	44
<i>Назаров А. А., Дейс Е. А.</i> Исследование систем массового обслуживания с альтернативными заявками. Допредельные результаты.....	47
<i>Назаров А. А., Поморцева Н. А.</i> Асимптотический анализ RQ-системы M GI 1 с конфликтами заявок в условии большой загрузки.....	50
<i>Назаров А. А., Фёдорова Е. А.</i> Метод асимптотического анализа в условии большой загрузки 2-го порядка на примере исследования RQ-системы M M 1.....	54
<i>Назаров А. А., Черникова Я. Е.</i> Асимптотический метод исследования RQ-системы M GI 1 с вытеснением.....	60
<i>Назаров А. А., Яковлев Н. И.</i> Исследование RQ-системы M GI 1 PH с фазовым распределением повторного времени.....	65
<i>Панкратова Е. В., Моисеева С. П.</i> Исследование вероятностно-временных характеристик ММРР-потока разнотипных заявок.....	70
<i>Петлина Е. М., Башкатов А. А.</i> Использование СМО для анализа результатов деятельности сотрудников контрольно-пропускного пункта..	75
<i>Севостьянова М. В., Моисеев А. Н., Назаров А. А.</i> Исследование системы массового обслуживания ММРР GI  $\infty$ с высокоинтенсивным входящим потоком.....	79

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

<i>Ашуров М. Ф., Поддубный В. В.</i> Поточковый метод классификации текстов художественной литературы на основе С-меры.....	85
<i>Бородулин И. В.</i> Модель диагностирования автосервисного оборудования в режиме реального времени.....	89
<i>Васильев И. А.</i> Некоторые вопросы математического моделирования кинематики шагающего робота.....	94
<i>Горобцов А. С., Поляков Ю. И., Лебедев А. А.</i> Влияние зарядного объема гидропневматического элемента подвески на вибронагруженность автомобиля повышенной проходимости.....	98
<i>Гришаева Е. А., Каленский А. В., Звекон А. А., Зыков И. Ю.</i> Моделирование процессов цепного и теплового взрывов энергетических материалов.....	103
<i>Журавлев Ю. Н., Кравченко Н. Г., Поплавной А. С.</i> Кластерное моделирование процесса разложения $\text{KN}_3$ и $\text{AgN}_3$ .....	108
<i>Копытов А. В., Малышева Е. Н., Кособуцкий А. В.</i> Колебательные спектры короткопериодичных сверхрешеток $\text{AlAs}/\text{AlP}$ .....	112
<i>Коронатова А. М., Чукин В. В.</i> Влияние электрических характеристик на гидростатическое распределение атмосферного давления.....	117
<i>Кригер В. Г., Каленский А. В., Зыков И. Ю., Боровикова А. П.</i> Расчет пространственно-временных характеристик фронта реакции взрывного разложения энергетических материалов.....	122
<i>Кубарев А. И., Поддубный В. В.</i> Байесовская классификация с обучением на основе использования копула-функций.....	126
<i>Маркелов Г. Е.</i> О подходе к построению математической модели.....	131
<i>Пристиупа А. В., Петрухин А. В.</i> Применение технологии мобильного лазерного сканирования для диагностики и оценки состояния автомобильных дорог.....	135
<i>Сахневич Б. В., Киргина М. В., Чеканцев Н. В.</i> Разработка модуля автоматизированной обработки данных хроматографического анализа для процесса компаундирования товарных бензинов.....	139
<i>Свиридова Е. В., Киргина М. В.</i> Исследование сырья процесса компаундирования с использованием компьютерной моделирующей системы.....	143
<i>Семахин А. М.</i> Метод критического пути в моделировании информационной системы.....	146
<i>Семахин А. М.</i> Метод PERT в моделировании информационной системы.....	151
<i>Смагин В. И., Мухина О. О.</i> Динамические локально-оптимальные системы управления для объектов с интервальными параметрами.....	154

**Уфимцев Ю. А.** О разработке алгоритма выделения естественных акустических единиц в музыкальных произведениях, записанных парти-  
тура-  
ми.....

158