

Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Кемеровский научный центр СО РАН
Институт вычислительных технологий СО РАН
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
(ИТММ-2010)**

**Материалы IX Всероссийской
научно-практической конференции
с международным участием
19–20 ноября 2010 г.**

Часть 1

Издательство Томского университета

2010

УДК 519
ББК 22.17
И74

Редколлегия:

И. Р. Гарайшина, канд. физ.-мат. наук, доцент (отв. ред.);

Р. Т. Якупов, д-р физ.-мат. наук, профессор;

А. С. Шкуркин, канд. техн. наук, доцент

Информационные технологии и математическое моделирование
И74 (ИТММ-2010): Материалы IX Всероссийской научно-практической
конференции с международным участием (19–20 ноября 2010 г.). –
Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 1. – 172 с.

ISBN 978–5–7511–1948–5

В часть 1 вошли материалы секций «Вероятностные методы и модели», и
«Экономико-математические модели».

Для специалистов в области информационных технологий и математиче-
ского моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

*Конференция проводится при поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований (проект № 10–07–06095-г)*

ISBN 978–5–7511–1948–5

© Томский государственный университет, 2010
© Кемеровский государственный университет,
2010
© Кемеровский научный центр СО РАН, 2010
© Институт вычислительных технологий СО РАН,
2010
© Филиал Кемеровского государственного
университета в г. Анжеро-Судженске, 2010

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОТОКОВ КЛИЕНТОВ ТАКСОПАРКА

И. А. Ананина

Томский государственный университет

Рассмотрим потоки клиентов некоторой организации, осуществляющей коммерческую деятельность по предоставлению транспортных услуг, к примеру обычного таксопарка. Имеется поток новых клиентов, впервые решивших воспользоваться услугами данной компании. Эти клиенты обращаются в компанию независимо друг от друга, и их количество достаточно велико, так что будем полагать, что этот поток является простейшим с параметром λ . Совершив поездку, клиент некоторое время в услугах такси не нуждается. В терминах теории массового обслуживания это время назовем временем обслуживания. По истечении этого времени клиент вновь желает совершить поездку. При этом он с вероятностью r_k повторно обратится в данную компанию, а с вероятностью $1 - r_k$ предпочтет пользоваться услугами другого таксопарка. При этом k – это количество поездок, уже совершенных данным клиентом. То есть, как логично предположить, вероятность обратиться вновь в эту компанию зависит от того, сколько клиент уже обслуживался этой организацией. Будем полагать, что время обслуживания независимо и одинаково распределено для всех клиентов и имеет функцию распределения $B_k(x)$, так же зависящую от числа предыдущих обращений в компанию.

Обозначим $n_k(t)$ – число клиентов компании, совершивших свою k -ю поездку, обратившихся за время наблюдения t .

Таким образом, в качестве математической модели потоков клиентов такой коммерческой организации рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторными обращениями с учетом номера попытки (рис. 1).

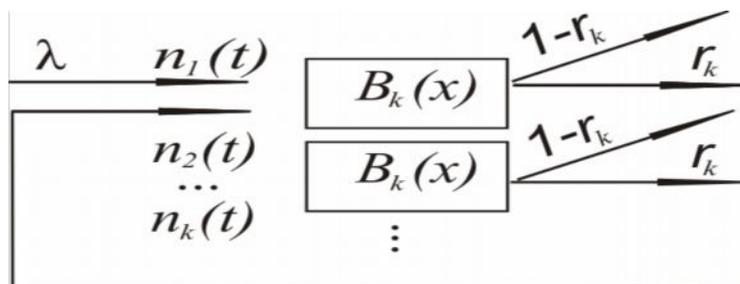


Рис. 1. СМО с неограниченным числом приборов и повторными обращениями с учетом номера попытки

Так как входящий поток заявок (новых клиентов компании) является простейшим, то величина $n_1(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром λt . Найдем совместное распределение случайного вектора $n(t) = \{n_1(t), n_2(t), \dots, n_k(t), \dots\}$ с неограниченным числом компонент.

Для решения поставленной задачи предлагается метод предельной декомпозиции [1], согласно которому перейдем к рассмотрению совокупности N независимых однолинейных СМО с отказами, на вход каждой из которых поступает простейший с параметром λ/N поток (рис. 2).

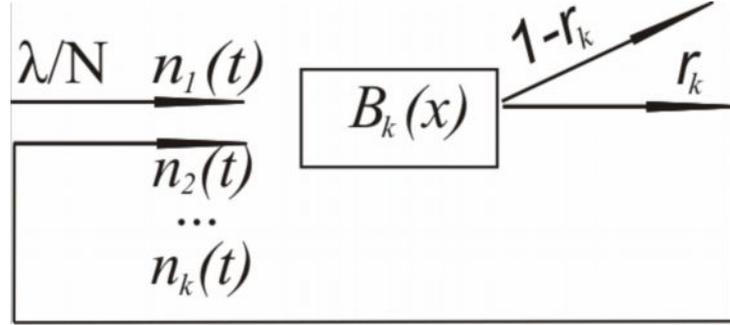


Рис. 2. Однолинейная СМО с повторными обращениями с учетом номера попытки

Для этой системы рассмотрим аналогично случайный вектор $n(t) = \{n_1(t, N), n_2(t, N), \dots, n_k(t, N), \dots\}$ с неограниченным числом компонент.

Для его марковизации определим дополнительно две компоненты: $k(t)$ – состояние прибора в рассматриваемой однолинейной СМО, полагая $k(t) = 0$, если прибор свободен, и $k(t) = k > 0$, если он занят заявкой, обслуживающейся в k -й раз.

$z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента окончания текущего обслуживания, если прибор занят.

Случайный процесс $\{k(t), z(t), n_1(t, N), n_2(t, N), \dots, n_k(t, N), \dots\}$ является марковским, поэтому для его распределения вероятностей составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(n_1, n_2, \dots, t)}{\partial t} &= -\frac{\lambda}{N} P_0(n_1, n_2, \dots, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-r_k) \frac{\partial P_k(0, n_1, n_2, \dots, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial P_1(z, n_1, n_2, \dots, t)}{\partial t} &= \frac{\partial P_1(z, n_1, n_2, \dots, t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(0, n_1, n_2, \dots, t)}{\partial z} + \\ &\quad + \frac{\lambda}{N} B_1(z) P_0(n_1 - 1, n_2, \dots, t), \\ \frac{\partial P_k(z, n_1, n_2, \dots, t)}{\partial t} &= \frac{\partial P_k(z, n_1, n_2, \dots, t)}{\partial z} - \frac{\partial P_k(0, n_1, n_2, \dots, t)}{\partial z} + \\ &\quad + r_{k-1} B_k(z) \frac{\partial P_{k-1}(0, n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим функции

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots P_0(n_1, n_2, \dots, t) = H_0(x_1, x_2, \dots, t),$$

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots P_k(z, n_1, n_2, \dots, t) = H_k(z, x_1, x_2, \dots, t), \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (2)$$

Они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных [3]:

$$\frac{\partial H_0(x_1, x_2, \dots, t)}{\partial t} = -\frac{\lambda}{N} H_0(x_1, x_2, \dots, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-r_k) \frac{\partial H_k(0, x_1, x_2, \dots, t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial H_1(z, x_1, x_2, \dots, t)}{\partial t} = \frac{\partial H_1(z, x_1, x_2, \dots, t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(0, x_1, x_2, \dots, t)}{\partial z} +$$

$$+ x_1 \frac{\lambda}{N} B_1(z) H_0(x_1, x_2, \dots, t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_k(z, x_1, x_2, \dots, t)}{\partial t} = \frac{\partial H_k(z, x_1, x_2, \dots, t)}{\partial z} - \frac{\partial H_k(0, x_1, x_2, \dots, t)}{\partial z} +$$

$$+ x_k r_{k-1} B_k(z) \frac{\partial H_{k-1}(0, x_1, x_2, \dots, t)}{\partial z}, \quad k = \overline{2, \infty},$$

решение которой будем искать в виде

$$H_0(x_1, x_2, \dots, t) = 1 + \frac{1}{N} F_0(x_1, x_2, \dots, t) + o(N^{-2}),$$

$$H_k(z, x_1, x_2, \dots, t) = \frac{1}{N} F_k(z, x_1, x_2, \dots, t) + o(N^{-2}). \quad (4)$$

Перейдем к системе дифференциальных уравнений для $F_0(x_1, x_2, \dots, t)$, $F_k(z, x_1, x_2, \dots, t)$, $k = \overline{1, \infty}$, в которой уже нет зависимости от N . Воспользовавшись начальными условиями

$$F_0(x_1, x_2, \dots, 0) = F_0(1, 1, \dots, t) = R_0,$$

$$F_k(z, x_1, x_2, \dots, 0) = F_k(z, 1, 1, \dots, t) = R_k(z), \quad (5)$$

решение полученной задачи Коши найдем в виде

$$F_0(x_1, x_2, \dots, t) = -\lambda \left\{ b_1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \prod_{i=1}^{k-1} r_i \right\} - \lambda t + \sum_{k=1}^{\infty} (1-r_k) \int_0^t f_k(x_1, x_2, \dots, s) ds,$$

$$F_1(z, x_1, x_2, \dots, t) = \lambda \int_0^{z+t} (1-B_1(u)) du + \int_0^t [\lambda x_1 B_1(z+t-s) - f_1(x_1, x_2, \dots, s)] ds, \quad (6)$$

$$F_k(z, x_1, x_2, \dots, t) = \lambda \prod_{i=1}^{k-1} r_i \int_0^{z+t} (1-B_k(u)) du +$$

$$+ \int_0^t [x_k r_{k-1} B_k(z+t-s) f_{k-1}(x_1, x_2, \dots, s) - f_k(x_1, x_2, \dots, s)] ds,$$

где

$$f_1(x_1, x_2, \dots, t) = \lambda (1 + (x-1) B_1(t)),$$

$$f_k(x_1, x_2, \dots, t) = \lambda \prod_{v=1}^{k-1} r_v \left(1 + \sum_{i=1}^k (x_i - 1) \prod_{j=i+1}^k x_j B_{i \dots k}(t) \right), k = \overline{2, \infty}, \quad (7)$$

а $B_{i \dots k} - (k - i) -$ кратная свертка распределений $B_i(t), B_{i+1}(t), \dots, B_k(t)$.

Избавимся от не интересующих нас компонент случайного вектора. При $z \rightarrow \infty$ имеем:

$$F(x_1, x_2, \dots, t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x_1, x_2, \dots, t) = \lambda t (x_1 - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} r_k (x_{k+1} - 1) \int_0^t f_k(x_1, x_2, \dots, s) ds.$$

Учитывая, что

$$G(x_1, x_2, \dots, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N} F(x_1, x_2, \dots, t) + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \right)^N,$$

можно найти производящую функцию $G(x_1, x_2, \dots, t)$ случайного вектора $n(t) = \{n_1(t), n_2(t), \dots, n_k(t), \dots\}$ с неограниченным числом компонент, характеризующего количество клиентов компании, обслуживавшихся в данной компании один, два, k , и т. д. обслуживаний:

$$G(x_1, x_2, \dots, t) = \exp \left\{ \lambda t (x_1 - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} r_k (x_{k+1} - 1) \int_0^t f_k(x_1, x_2, \dots, s) ds \right\}. \quad (8)$$

Предположим теперь, что рассматриваемая коммерческая организация с целью привлечения клиентов проводит акцию « l -я поездка бесплатно». Тогда функция прибыли во время действия такой акции приобретет вид:

$$S(t) = (1 - \delta) \left\{ \sum_{i=1}^{n_1(t)} \xi_i^1 + \sum_{i=1}^{n_2(t)} \xi_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^{n_{l-1}(t)} \xi_i^{l-1} \right\} - \delta \sum_{i=1}^{n_l(t)} \xi_i^l + \\ + (1 - \delta) \left\{ \sum_{i=1}^{n_{l+1}(t)} \xi_i^{l+1} + \sum_{i=1}^{n_{l+2}(t)} \xi_i^{l+2} + \dots + \sum_{i=1}^{n_{2l-1}(t)} \xi_i^{2l-1} \right\} - \delta \sum_{i=1}^{n_{2l}(t)} \xi_i^{2l} + \dots,$$

где δ – доля себестоимости поездки.

Полагая стохастическую независимость величин ξ_i^k , принимающих свои значения в различные моменты времени наступления платежей для различных получателей ренты, а также их одинаковые по всем i распределения, для характеристической функции процесса изменения прибыли получим

$$H(\alpha, t) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \left(Me^{-\alpha(1-\delta)\xi_i^1} \right)^{n_1} \left(Me^{-\alpha(1-\delta)\xi_i^2} \right)^{n_2} \dots \left(Me^{\alpha\delta\xi_i^l} \right)^{n_l} \dots P(n_1, n_2, \dots, t) = \\ = G(x_1((1-\delta)\alpha), x_2((1-\delta)\alpha), \dots, x_l(\delta\alpha), \dots),$$

то есть определяется из формулы (8).

Обозначим среднюю стоимость поездки $M\xi_i = a$. Тогда среднюю величину прибыли выразим из найденной характеристической функции с учетом выражений (7) и (8):

$$MS(t) = \lambda at \left\{ (1 - \delta) \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \prod_{i=1}^{k-1} r_i(l) \right] - \sum_{\substack{k=nl \\ n=1,2,\dots}} \prod_{i=1}^{k-1} r_i(l) \right\}. \quad (9)$$

Предположим следующую зависимость вероятностей возвращения клиентов от частоты предоставления бесплатной услуги:

$$r_k(l) = 1 - (1 - r_1) \left(\frac{l - k}{l} \right)^2,$$

где r_1 – вероятность первого возвращения клиента, когда он еще не знает о проведении акции, так как не является постоянным клиентом компании.

Пусть в компанию обращается в среднем 30 человек в день. Средняя стоимость поездки составляет 150 руб., при ее себестоимости около 50 руб. Изменение величины месячной прибыли компании в зависимости от параметра l проводимой акции показано на рис. 3.

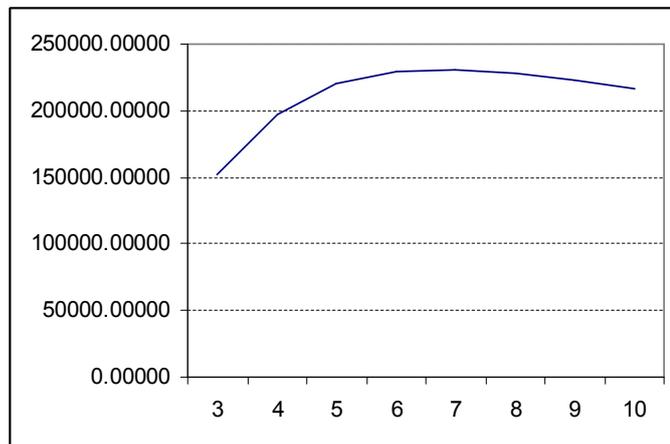


Рис. 3. Изменение прибыли компании от номера l бесплатной поездки

Из полученного графика изменения прибыли видно, что максимальной величины она достигает при объявлении каждой седьмой поездки бесплатной. При таких условиях прибыль компании составит 231200 руб. в месяц.

Литература

1. Морозова А. С., Моисеева С. П., Назаров А. А. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. – 2005. – Т. 13, вып. 5. – С. 88–92.
2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 448 с.
3. Эльцгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТИМУЛИРОВАНИЯ СБЫТА ПРОДУКЦИИ ПУТЕМ ПРЕДОСТАВЛЕНИЯ ПРЕМИИ

М. Д. Ахметгареева, А. С. Морозова

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

1. Постановка задачи

Рассмотрим торговую компанию, которая в целях привлечения клиентов проводит акцию «подарок за покупку». В маркетинге данная акция носит название «стимулирование натурой» [1], это есть предложение потребителю дополнительного количества какого-либо товара без прямой увязки с ценой. При этом преследуются следующие цели:

- дать потребителю дополнительное количество товара, что принципиально отличается от снижения цен, целью которого является экономия денег;
- придать более разносторонний и предметный характер контактам между производителем и потребителем.

Рассмотрим торговую компанию, которая объявляет следующую акцию: «Покупатель, совершивший покупку на сумму не менее заданной величины, получает подарок (премию) на сумму M рублей». При этом преследуется цель увеличения объемов сбыта продукции посредством увеличения числа потенциальных покупателей, что в итоге приведет к увеличению дохода.

Ставится задача нахождения оптимального значения цены подарка по отношению к стоимости покупки, обеспечивающей наибольшую прибыль.

2. Математическая модель

Пусть поток клиентов, впервые обратившихся в торговую компанию и совершивших покупку, описывается простейшим потоком с параметром λ [2]. После посещения торговой компании клиент некоторое время обдумывает, обратиться ли ему в эту компанию повторно или выбрать другую. Будем считать, что продолжительности интервалов времени обдумывания являются независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения, одинаковой для всех клиентов с параметром μ [3].

После обдумывания клиент с вероятностью r повторно обращается в данную торговую компанию, с вероятностью $1-r$ покидает ее. Вероятность повторного обращения зависит от маркетинговой политики торговой компании. В качестве математической модели, описывающей суммарный поток первичных и повторных клиентов, обращающихся в торговую компанию, будем рассматривать СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов с повторным обращением [4–5] (рис. 1)

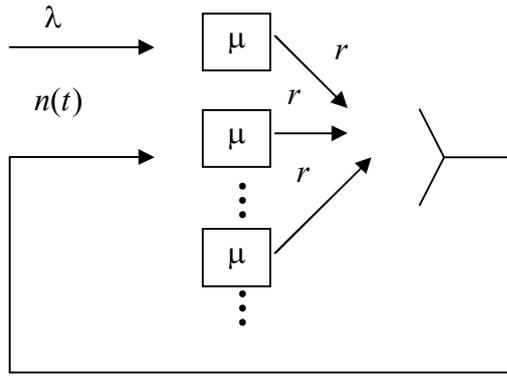


Рис. 1. Бесконечнолинейная система массового обслуживания

Очевидно, что при объявлении компанией акции «Подарок за покупку», вероятность возвращения увеличивается с увеличением цены подарка. Будем полагать, что зависимость вероятности возврата r от M имеет вид

$$r(M) = r_1 - (r_1 - r_0) \left(1 - \frac{M}{a_1}\right)^2,$$

где $M \leq a_1$; r_0 – вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию, работающую в обычном режиме; r_1 – максимально возможная вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию за время проведения акции.

Ставится задача определения оптимального значения премии M , обеспечивающей максимальный доход за время t проведения акции.

Пусть цена покупки, обеспечивающая премию, есть случайная величина ξ , $M\xi = a_1$, $M\xi^2 = a_2$ [6], тогда при такой покупке покупатель получает подарок на сумму M руб., $S(t)$ – суммарный доход торговой компании, полученный за время t от клиентов, участвующих в акции; $n(t)$ – количество клиентов, участвующих в акции торговой компании.

Тогда

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n(t)} (\xi_i - M). \quad (1)$$

Среднее значение $MS(t)$ и дисперсия $DS(t)$ величины $S(t)$ – суммарного дохода компании, полученного за время t – проведения акции «Подарок за покупку», определяется равенствами

$$MS(t) = a_1 \lambda \left(1 + (1 - K) \left(\frac{r(K)}{1 - r(K)}\right)\right) t$$

и

$$DS(t) = \frac{\lambda}{1 - r(K)} a_2 (1 - r(K) + r(K)(1 - K)^2) t + \frac{2\lambda r(1 - K) a_1^2 (1 - r(K) + r(1 - K))}{(1 - r(K))^2} \left\{ t - \frac{1}{\mu(1 - r(K))} (1 - e^{-\mu(1 - r(K))t}) \right\}.$$

Ставится задача определения оптимального значения величины K отношения цены подарка M к среднему значению стоимости покупки a_1 , обеспечивающей максимальную прибыль за время t проведения акции.

Обозначим

$$MS(t) = f(K) = a_1 \lambda \left\{ 1 + (1-K) \frac{r(K)}{1-r(K)} \right\} t,$$

здесь

$$r(K) = r_1 - (r_1 - r_0)(1-K)^2, \quad (2)$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(K)}{\partial K} &= a_1 \lambda \left\{ -\frac{r(K)}{1-r(K)} + (1-K) \frac{r'(K)(1-r(K)) + r(K)r'(K)}{(1-r(K))^2} \right\} t = \\ &= a_1 \lambda \left\{ -\frac{r(K)}{1-r(K)} + (1-K) \frac{r'(K)}{(1-r(K))^2} \right\} t. \end{aligned}$$

Из необходимого условия $f'(K) = 0$ получим для K уравнение

$$(1-K)r'(K) - r(K)(1-r(K)) = 0,$$

которое в силу (2) перепишем в виде

$$(r_1 - r_0)^2 x^2 + (2r_1 - 3r_0 + r_0 r_1)x - r_1(1 - r_1) = 0,$$

где $x = (1-K)^2$, откуда нетрудно найти оптимальное значение K .

Литература

1. Афанасьев М. П., Маркетинг – стратегия и практика фирмы. – М.: Финстатинформ, 1995. – 104 с.
2. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.
3. Кокс Д. Р., Смит У. Л. Теория очередей: пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – 218 с.
4. Моисеева С. П., Морозова А. С. Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. – 2005. – № 287. – С. 46–51.
5. Моисеева С. П., Морозова А. С., Назаров А. А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – С. 173–175.
6. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ $SM|D|_{\infty}$

А. Е. Горбатенко, С. В. Лопухова
Томский государственный университет

Рассмотрим систему с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает SM-поток [1], который определяется полумарковской матрицей $A(x)$ или двумя матрицами $G(x)$ и P .

Основной задачей исследования систем массового обслуживания является нахождение распределения вероятностей числа занятых приборов в системе.

Обозначим процесс $i(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t . Данный процесс является немарковским. Для его марковизации применим метод просеянного потока.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших на интервале $[t_0, t]$.

В некоторый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ заявка входящего потока, поступившая в систему, с вероятностью $S(t)=1-B(t_1-t)$ формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1-S(t)$ не рассматривается. Здесь $S(x)=1-B(x)=P\{\xi>x\}$ – вероятность того, что время обслуживания заявки больше величины x .

Обозначим $z(t)$ – длину интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в SM-потоке; случайный процесс $s(t)$ – процесс с кусочно-постоянными реализациями, непрерывными слева, определенный равенством

$$s(t) = \xi(m+1), \text{ если } t_m < t \leq t_{m+1}.$$

Здесь $\xi(m)$ – эргодическая цепь Маркова с дискретным временем и матрицей $P = [p_{vk}]$ вероятностей перехода за один шаг.

Для рассматриваемой системы трёхмерный случайный процесс $\{s(t), n(t), z(t)\}$ является марковским, Для распределения вероятностей трёхмерного случайного процесса $\{s(t), n(t), z(t)\}$

$$P(s, n, z, t) = P\{s(t) = s, n(t) = n, z(t) < z\}$$

можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(s, n, z, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(s, n, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(s, n, 0, t)}{\partial z} + \\ & + \sum_v \left\{ \frac{\partial P(v, n-1, 0, t)}{\partial z} S(t) + \frac{\partial P(v, n, 0, t)}{\partial z} (1-S(t)) \right\} A_{vs}(z). \end{aligned} \quad (1)$$

Начальные условия для решения этой системы в момент времени t_0 определим равенством

$$P(s, n, z, t_0) = \begin{cases} R(s, z), & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где функция $R(s, z)$ – стационарное распределение вероятностей двумерного марковского процесса $\{s(t), z(t)\}$.

Функция распределения времени обслуживания для детерминированной случайной величины имеет следующий вид:

$$B(t) = \begin{cases} 0, & t \leq b, \\ 1, & t > b. \end{cases}$$

Вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени $t_0 \leq t \leq t_1 = t_0 + b$, попадет в просеянный поток, равна

$$S(t) = 1 - B(t_1 - t) = 1.$$

С учетом вида функции $S(t)$ систему (1) перепишем в виде

$$\frac{\partial P(s, n, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(s, n, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(s, n, 0, t)}{\partial z} + \sum_v \frac{\partial P(v, n-1, 0, t)}{\partial z} A_{vs}(z). \quad (3)$$

Теорема. Распределение вероятностей $P(i)$ числа занятых приборов в системе $SM|D|\infty$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} P(0) = 1 - \frac{ar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2} (1 - e^{-jyb}) (I - A^*(y)) E dy, \\ P(i) = \frac{ar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2} (1 - e^{-jyb}) (1 - A^*(y))^2 A^{*i-1}(y) E dy, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$A^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} dA(z),$$

величина a определяется равенством

$$a = \frac{1}{rAE}, \quad (5)$$

матрица A имеет вид

$$A = \int_0^{\infty} (P - A(x)) dx, \quad (6)$$

a вектор r – это вектор стационарного распределения вероятностей цепи Маркова $\zeta(m)$.

Доказательство. Так как в момент времени t_1 , число событий, наступивших в посеянном потоке, равно числу занятых приборов в системе $SM|D|\infty$ задача нахождения распределения вероятностей числа занятых приборов в системе $SM|D|\infty$ сводится к задаче нахождения распределения веро-

ятностей числа событий, наступивших в просеянном потоке до момента времени t_1 .

Число событий, наступивших в просеянном потоке системы $SM|D|_{\infty}$ до момента времени t_1 , равно числу событий, наступивших в стационарном SM-потоке за время b .

Распределение вероятностей числа событий, наступивших в SM-потоке за время t , найдено в работе [2] и имеет вид

$$\begin{cases} P(0,t) = 1 - \frac{ar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2} (1 - e^{-jyt}) (I - A^*(y)) E dy, \\ P(n,t) = \frac{ar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2} (1 - e^{-jyt}) (1 - A^*(y))^2 A^{*n-1}(y) E dy, \end{cases} \quad (7)$$

где a имеет вид (5), а матрица A определяется формулой (6). Положим $t = b$, получим равенства (4). Теорема доказана.

Таким образом, было получено допредельное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе $SM|D|_{\infty}$.

Литература

1. Gorbatenko A., Lopuchova S. $SM|M|_{\infty}$ in special limit conditions // The third international conference "Problems of cybernetics and informatics" (PCI'2010), Baku, Azerbaijan. – 6–8 September, 2010. – Baku: ELM, 2010. – Vol. 2. – P. 213–217.
2. Лопухова С. В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: дис ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Томский гос. ун-т. – Томск, 2008. – 167 с.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

МОДЕЛЬ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С ПУАССОНОВСКИМ ПОТОКОМ ВЗНОСОВ И С УЧЕТОМ ИЗДЕРЖЕК, РАВНОМЕРНЫХ ПО ВРЕМЕНИ

Е. В. КАПУСТИН, М. С. МИХАЙЛЕНКО

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

При описании работы страховой компании можно использовать хорошо известную классическую модель, а также модель с пуассоновским потоком взносов [1]. Эти модели достаточно точно описывают функционирование страховой компании и в то же время доступны для исследования. Однако модель страховой компании должна учитывать, что компания расходует денежные средства на заработную плату сотрудникам, аренду помещений, налоговые отчисления и прочие издержки. Для простоты расходование средств на издержки можно считать равномерным по времени. В классической модели это означает лишь уменьшение скорости поступления капитала в компа-

нию, но модель с пуассоновским потоком взносов и с учетом издержек уже имеет существенные отличия, требующие дополнительного исследования.

Пусть денежные средства расходуются на обязательные отчисления со скоростью c , поток страховых взносов имеет интенсивность λ_1 , поток страховых выплат имеет интенсивность λ_2 , величина страхового взноса имеет экспоненциальное распределение с плотностью

$$p(y) = \frac{1}{a} e^{-\frac{y}{a}}, \quad y \geq 0, \quad (1)$$

величина страховой выплаты имеет плотность распределения $\pi(x)$ и начальные моменты 1-го и 2-го порядка m_1 и m_2 .

Несложно показать, что $S(t)$ – величина капитала компании в момент времени t , имеет математическое ожидание

$$M\{S(t)\} = S_0 - ct + (\lambda_1 a - \lambda_2 m_1)t, \quad (2)$$

где $S_0 = S(0)$ – начальный капитал компании, и дисперсию

$$D\{S(t)\} = (2\lambda_1 a^2 + \lambda_2 m_2)t. \quad (3)$$

Рассмотрим вероятность разорения страховой компании [1]. Так как в нашей модели потоки взносов и выплат пуассоновские постоянной интенсивности, то вероятность разорения определяется лишь величиной капитала. Обозначим вероятность разорения компании при уровне капитала S через $P(S)$. Применяя стандартный Δt -метод, можно показать, что $P(S)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} cP'(S) + (\lambda_1 + \lambda_2)P(S) = & \lambda_1 \int_0^{\infty} P(S+y)p(y)dy + \\ & + \lambda_2 \left[\int_0^S P(S-x)\pi(x)dx + \int_S^{\infty} \pi(x)dx \right] \end{aligned} \quad (4)$$

и граничному условию

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S) = 0. \quad (5)$$

Применяя операционный метод [2], можно показать, что если выполняется условие нормального функционирования компании

$$\lambda_1 a > c + \lambda_2 m_1, \quad (6)$$

то задача (4)–(5) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0 \leq P(S) \leq 1$, причем его изображение (преобразование Лапласа) имеет вид

$$\tilde{P}(p) = \frac{1}{p} \frac{c - \frac{1}{1-pa}(c + \lambda_2 m_1) + \lambda_2 \frac{1 - \tilde{\pi}(p)}{p}}{c - \lambda_1 \frac{a}{1-pa} + \lambda_2 \frac{1 - \tilde{\pi}(p)}{p}}. \quad (7)$$

Теперь, чтобы найти вероятность разорения компании $P(S)$, нужно найти оригинал функции $\tilde{P}(p)$. Предположим, что страховые выплаты имеют экспоненциальное распределение:

$$\pi(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x \geq 0. \quad (8)$$

Тогда

$$m_1 = \theta, \quad (9)$$

$$\tilde{\pi}(p) = \frac{1}{\theta p + 1},$$

$$\frac{1 - \tilde{\pi}(p)}{p} = \frac{\theta}{\theta p + 1}, \quad (10)$$

поэтому (7) принимает вид

$$\tilde{P}(p) = \frac{ca(\theta p + 1) + \lambda_2 \theta(a + \theta)}{c(\theta p + 1)(pa - 1) + \lambda_1 a(\theta p + 1) + \lambda_2 \theta(pa - 1)}. \quad (11)$$

Условие нормального функционирования компании в случае экспоненциального распределения выплат имеет вид

$$\lambda_1 a > c + \lambda_2 \theta. \quad (12)$$

Несложно показать, что если выполняется (12), то знаменатель дроби в правой части (11) имеет два различных вещественных отрицательных корня, то есть (11) имеет вид

$$\tilde{P}(p) = \frac{p + \alpha}{(p + k_1)(p + k_2)}, \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{ca + \lambda_2 \theta(a + \theta)}{ca\theta}, \quad (14)$$

$$0 < k_1 < k_2.$$

Отсюда

$$\tilde{P}(p) = \frac{-k_1 + \alpha}{-k_1 + k_2} \frac{1}{p + k_1} + \frac{-k_2 + \alpha}{-k_2 + k_1} \frac{1}{p + k_2},$$

поэтому вероятность разорения страховой компании при уровне капитала S равна

$$P(S) = \frac{\alpha - k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 S} + \frac{k_2 - \alpha}{k_2 - k_1} e^{-k_2 S}. \quad (15)$$

Заметим, что если выполняется (12), то

$$k_1 < \alpha < k_2, \quad (16)$$

поэтому множители, стоящие в (15) перед экспонентами, положительны.

Правильность полученных результатов проверена с помощью имитационного моделирования. При этом были получены точечные и асимптотические интервальные оценки математического ожидания и дисперсии вели-

чины капитала компании, а также вероятности разорения страховой компании [3, 4].

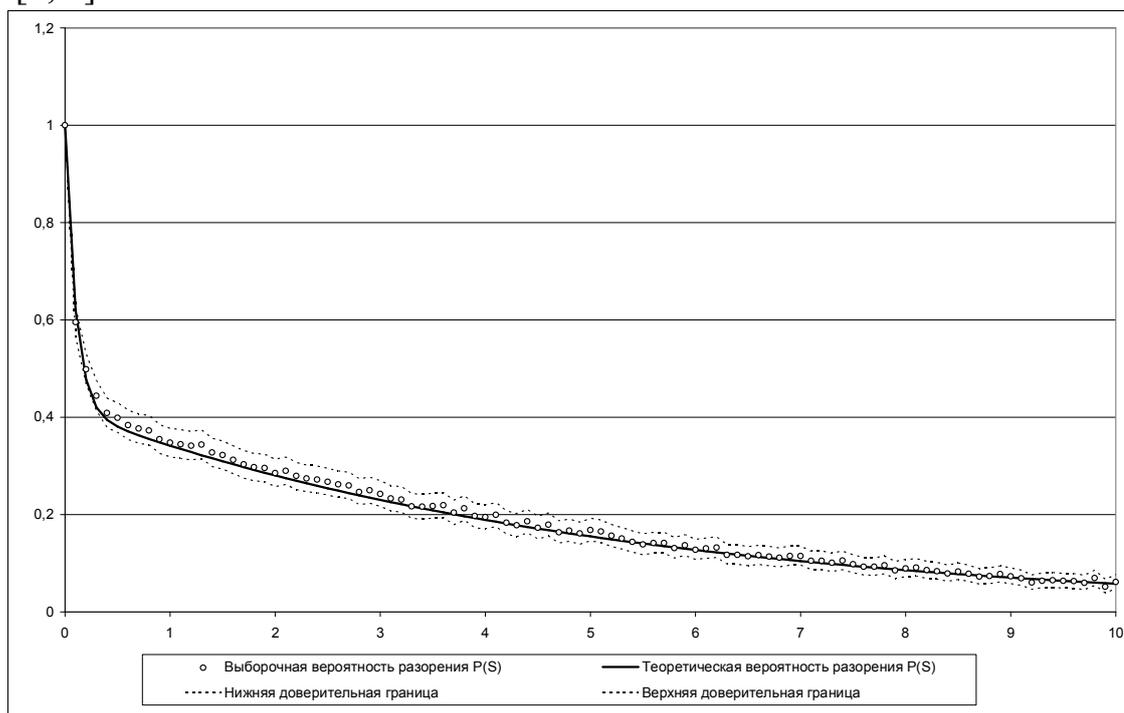


Рис. 1. Графики выборочной и теоретической вероятности разорения компании

На рис. 1 видно, что теоретическая вероятность разорения не выходит за границы доверительного интервала. Это означает, что выборочная вероятность разорения компании согласуется с теоретической.

Литература

1. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 180 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Орлов А. И. Непараметрическое точечное и интервальное оценивание характеристик распределения // Заводская лаборатория. – 2004. – Т. 70, – № 5. – С. 65–70.
4. Грачева М. В., Фадеева Л. Н., Черемных Ю. Н. Количественные методы в экономических исследованиях: учеб. для вузов / Под ред. М. В. Грачевой, Л. Н. Фадеевой, Ю. Н. Черемных. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 791 с.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

**ВЫБОР РАЗМЕРА ОКНА ПЕРЕДАЧИ И ТАЙМ-АУТА ОЖИДАНИЯ
ПОДТВЕРЖДЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ПРОЦЕДУРЫ
ПРОТОКОЛА ТРАНСПОРТНОГО УРОВНЯ
ПРИ СЕЛЕКТИВНОМ РЕЖИМЕ ОТКАЗА
В МНОГОЗВЕННОМ ТРАКТЕ**

*В. В. Кокшенёв, С. П. Сущенко
Томский государственный университет*

Важным показателем быстродействия протокола транспортного уровня является пропускная способность, используемая межузловым соединением. На пропускную способность оказывают влияние как состояние сети, так и реализация механизмов решающей обратной связи, заложенных в управляющую процедуру протокола транспортного уровня. К параметрам, описывающим состояние сети, относятся:

- D – длина многозвенного тракта передачи от источника к адресату;
- R_n – вероятность искажения сегмента в прямом направлении передачи многозвенного тракта;
- R_o – вероятность искажения сегмента в обратном направлении передачи многозвенного тракта.

К параметрам, определяющим поведение механизмов решающей обратной связи, относятся размер окна передачи ω и величина тайм-аута ожидания подтверждения S ($S \geq \omega$). Согласно исследованиям и выводам, опубликованным в [1–3], неудачный выбор данных параметров приводит к существенному снижению коэффициента используемой полосы пропускания и значительному повышению нагрузки на сеть.

В [4] предложена модель селективной процедуры управления звеном передачи данных в виде марковской цепи с дискретным временем, учитывающая влияние длительности тайм-аута ожидания подтверждения S и размера окна ω на пропускную способность многозвенного межузлового транспортного соединения. На основании результатов [4] предложена схема вычисления оптимальных значений ω и S , исходя из анализа достигнутого коэффициента использования полосы пропускания.

Согласно [4], для однородной цепи Маркова, описывающей динамику очереди переданных, но не подтвержденных сегментов в установившемся режиме для селективной процедуры отказа, коэффициент использования полосы пропускания Z_C имеет следующий вид:

$$Z_C(\omega, S, D) = \frac{(1 - R_n)(1 - R_o^\omega - \omega R_o^{S-2D+1}(1 - R_o))}{1 + R_o^{\omega-2D+1} - R_o^\omega - R_o^{S-2D+1}}.$$

Функция Z_C является монотонно возрастающей с ростом размера окна и тайм-аута ожидания подтверждения, поэтому теоретический максимум

коэффициента использования полосы пропускания достигается при бесконечных ω и S :

$$Z_C(\infty, \infty, D) = 1 - R_n.$$

Ввиду условий моделирования, допущенных в [4], система не учитывает возможность существования очередей в транзитных узлах, а также возможность асимметричной маршрутизации в сети, поэтому использование бесконечно больших размеров ω и S в реальных системах невозможно. Поэтому рациональное значение размера окна ω_o предлагается найти из условия

$$Z_C(\omega_o, \infty, D) = xZ_C(\infty, \infty, D),$$

где x – уровень достигнутой полосы пропускания относительно теоретического максимума, $x \in [0,1)$. А рациональное значение тайм-аута ожидания подтверждения S_o находить из условия

$$Z_C(\omega_o, S_o, D) = yZ_C(\omega_o, \infty, D),$$

где y – уровень достигнутой полосы пропускания относительно теоретического максимума при заданном оптимальном значении ω_o , $y \in [0,1)$.

Используя предложенные условия, а также учитывая целочисленную природу параметров, находим ω_o и S_o :

$$\omega_o = \left\lceil \frac{\ln(1-x) - \ln(x + (1-x)R_o^{2D-1})}{\ln(R_o)} \right\rceil + 2D - 1,$$

$$S_o = \left\lceil \frac{\ln(1 - R_o^{\omega_o}) + \ln(1-y) - \ln[\omega_o(1 - R_o) - y \frac{(1 - R_o^{\omega_o})}{(1 + R_o^{\omega_o - 2D + 1} - R_o^{\omega_o})}]}{\ln(R_o)} \right\rceil + 2D - 1,$$

где $\lceil \dots \rceil$ означает округление до большего целого.

В таблице приведены значения ω_o и S_o при $x = y = 0,9$ для разных вероятностей искажения в обратном направлении передачи и для широкого спектра длин многозвенного тракта. Требуемый уровень использования полосы пропускания для различных условий в сети достигается уже при $\omega_o = 2D + 1$ и $S_o = 2D + 4$. Это объясняется отсутствием в данной модели «бокового» трафика, выражающегося наличием очередей в транзитных узлах тракта. Следовательно, если подтверждение на сегмент не пришло вовремя (через $2D$ итераций), нет необходимости его ждать долго, т. к. сегмент скорее всего был искажен при передаче. Время ожидания подтверждения выбирается исходя из надежности обратного канала связи.

Значения ω_o и S_o для $x = y = 0,9$ при разных условиях в сети

R_o	D	ω_o	S_o
0,1	1	2	2
	3	6	7
	5	10	11
	10	20	22
0,2	1	3	3
	3	7	8
	5	11	12
	10	21	23
0,3	1	3	4
	3	7	9
	5	11	13
	10	21	24

На основании полученных данных, учитывая результаты [5], можно утверждать, что для ненагруженных сетей, имеющих каналы связи с высоким уровнем искажений, использование традиционного “backoff” алгоритма нахождения тайм-аута ожидания подтверждения, описанного в [3,6], ведет к значительному снижению коэффициента использования полосы пропускания и росту непроизводительных простоев управляющей процедуры. Высокий уровень использования полосы пропускания для различных условий в сети может быть достигнут уже при $\omega_o = 2D + 1$ и $S_o = 2D + 4$. В дальнейших исследованиях для расширения диапазона применимости предложенного метода необходимо учесть наличие очередей в транзитных узлах при моделировании.

Литература

1. David D. Clark. Window and Acknowledgement Strategy in TCP, RFC 813, MIT Laboratory for Computer Science, Computer Systems and Communications Group, July, 1982.
2. Nagle J. Congestion Control in IP/TCP Internetworks, RFC 896, FACC, January 1984.
3. Jacobson V. Congestion Avoidance and Control, SIGCOMM '88, Stanford, CA., August 1988.
4. Кокшенёв В. В. Пропускная способность селективного режима отказа протокола транспортного уровня в многозвенном тракте // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2008): Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (14–15 ноября 2008 г.). Ч. 2. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008.
5. Кокшенёв В. В. Анализ времени простоя управляющей процедуры протокола транспортного уровня при селективном режиме отказа в многозвенном тракте // Научное творчество молодежи: материалы XIII Всероссийской научно-практической конференции (15–16 апреля 2010 г.) Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010.
6. Postel J. Transmission Control Protocol – DARPA Internet Program Protocol Specification, RFC 793, DARPA, September 1981.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА СИСТЕМЫ $MAR | GI | \infty$ В УСЛОВИИ РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯ

И. Л. Лапатын

Томский государственный университет

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченным числом приборов. На вход этой системы поступает MAR -поток [1, 2] заявок, определяемый эргодической цепью Маркова $k(t)$ (заданной матрицей инфинитезимальных характеристик Q), набором неотрицательных чисел λ_k и вероятностями d_{vk} , причем $d_{kk} = 0$. Заявка, пришедшая в систему, занимает любой из свободных приборов, на котором обслуживается в течение случайного времени. Распределение вероятностей времени обслуживания поступающих заявок будет случайным с функцией распределения $B(x)$, одинаковым для всех заявок.

Если использовать символику, предложенную Д. Кендаллом [3], то рассматриваемая система будет обозначаться $MAR | GI | \infty$.

С одной стороны, если рассматривать систему с неограниченным числом приборов как модель, например, экономической системы (страховой, банковской), то информация о выходящем потоке дает возможность прогнозировать число обслуженных клиентов. С другой стороны, обслуженные одной системой заявки могут образовывать входящий поток для другой, что происходит в сетях массового обслуживания (СеМО). Поэтому исследование выходящих потоков актуально и для развития теории СеМО. На настоящий момент выходящие потоки систем массового обслуживания остаются малоизученными, что вызвано отсутствием общих подходов к их изучению, а результаты в этой области получены только для некоторых простейших систем, например [4, 5].

В данной работе будем исследовать выходящий поток системы $MAR | GI | \infty$. Будем полагать, что выходящий поток описывается через случайный процесс $m(t)$ – число заявок, закончивших обслуживание в системе за некоторое время t . Очевидно, что этот процесс не является марковским, а метод «внешнего» марковизирования, часто используемый в моделях с экспоненциальным временем обслуживания, здесь не применим. Для исследования выходящих потоков систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольным временем обслуживания был предложен метод просеянного потока [6]. Данный метод сводит исследование выходящего потока к исследованию так называемого просеянного потока. Подробное описание этого метода можно найти в работе [7].

Перейдем к исследованию просеянного потока. Пусть $T_1 > 0$, $T > 0$ – некоторые заданные величины, а $b = \int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx$ – среднее значение времени обслуживания заявки, тогда обозначим

$$S(t) = \begin{cases} B(T_1 - t + T) - B(T_1 - t), & 0 < t \leq bT_1, \\ B(T_1 - t + T), & bT_1 < t \leq bT_1 + T. \end{cases}$$

Будем полагать, что если событие входящего потока наступает в момент t , то с динамической (зависящей от момента времени t) вероятностью $S(t)$ эта заявка просеивается, то есть отправляется в просеянный поток, а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается.

Очевидно, что в просеянном потоке рассматриваются те заявки, которые формируют на интервале $[T_1, T_1 + T]$ события выходящего потока.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t , то есть на интервале $[0, t]$.

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна, то число событий просеянного потока к моменту времени $T_1 + T$ равно числу заявок, закончивших обслуживание на интервале $[T_1, T_1 + T]$, то есть выполняется равенство

$$n(T_1 + T) = m(T, T_1),$$

где $m(T, T_1)$ – число событий выходящего потока рассматриваемой системы, наступивших на интервале $[T_1, T_1 + T]$.

В силу начального условия о том, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна, рассматриваются переходной режим функционирования системы и нестационарный выходящий поток.

Для исследования стационарного выходящего потока будем полагать, что $T_1 \rightarrow \infty$, тогда функционирование системы массового обслуживания определяется финальным распределением и стационарным режимом.

Эргодическую цепь Маркова $k(t)$, определяющую входящий МАР-поток, будем называть управляющей, а ее состояния – состояниями МАР-потока.

Двумерный процесс $\{k(t), n(t)\}$ уже является марковским и для его распределения вероятностей

$$P(k, n, t) = P\{k(t) = k, n(t) = n\}$$

можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, n, t)}{\partial t} = & \lambda_k S(t) (P(k, n - 1, t) - P(k, n, t)) + \\ & + \sum_v \{P(v, n, t) + S(t) (P(v, n - 1, t) - P(v, n, t)) d_{vk}\} q_{vk}. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначив

$$H(k, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k, n, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, из системы (1) получим систему для $H(k, u, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial t} &= \lambda_k (e^{ju} - 1) S(t) H(k, u, t) + \\ &+ \sum_v H(v, u, t) \{1 + S(t)(e^{ju} - 1) d_{vk}\} q_{vk}, \end{aligned}$$

которую запишем в матричном виде и будем называть дифференциально-матричным уравнением:

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = H(u, t) [(e^{ju} - 1) S(t) B + Q], \quad (2)$$

где $H(u, t) = \{H(0, u, t), H(1, u, t), \dots\}$, Q – матрица инфинитезимальных характеристик q_{vk} , B – матрица с элементами λ_k на главной диагонали и элементами $d_{vk} q_{vk}$ вне главной диагонали.

Систему (2) будем решать методом асимптотического анализа.

В работе [7] система (2) рассматривалась в условии растущего времени обслуживания, то есть при b , стремящемся к бесконечности. Было получено, что выходящий поток системы $\text{MAP} | \text{GI} | \infty$ является асимптотически простейшим. Причем его интенсивность $\kappa_1 = RBE$ совпадает с интенсивностью входящего MAP-потока.

Совпадение интенсивностей входящего и выходящего потоков достаточно очевидно, так как рассматриваемая система является системой без потерь, функционирующей в стационарном режиме.

В данной работе рассмотрим нашу систему в условии растущего времени наблюдения за потоком. Учитывая результаты, полученные в работе [7], решение системы (2) будем искать в виде

$$H(u, t) = H_2(u, t) \exp \left\{ ju \kappa_1 \int_0^t S(x) dx \right\}. \quad (3)$$

Тогда соответствующая система для $H_2(u, t)$ примет вид

$$\frac{\partial H_2(u, t)}{\partial t} = H_2(u, t) \{ (e^{ju} - 1) S(t) B + Q - ju \kappa_1 S(t) \}. \quad (4)$$

Для исследования в условии растущего времени наблюдения за потоком в системе (4) сделаем следующие замены:

$$\varepsilon^2 = 1/T, \quad \varepsilon^2 t = \tau, \quad \varepsilon w = u, \quad H_2(u, t) = F_2(w, \tau, \varepsilon), \quad S(t) = S_1(\tau), \quad (5)$$

для $F_2(w, \tau, \varepsilon)$ получим дифференциально-матричное уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = F_2(w, \tau, \varepsilon) \{ (e^{j\varepsilon w} - 1) S_1(\tau) B + Q - j\varepsilon w \kappa_1 S_1(\tau) I \}. \quad (6)$$

Решая уравнение (6) в асимптотическом условии $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая замены (5) и (3), получим приближение характеристической функции числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t :

$$M\{e^{ju(t)}\} = H(u, t)E \approx \exp\left\{ju\kappa_1 \int_0^t S(x)dx + \frac{(ju)^2}{2} \left[\kappa_1 \int_0^t S(x)dx + 2f_2BE \int_0^t S^2(x)dx \right]\right\}, \quad (7)$$

где вектор-строка f_2 является решением системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} f_2Q + R(B - \kappa_1I) = 0, \\ f_2E = 0, \end{cases}$$

здесь I – единичная матрица, а E – единичный вектор-столбец.

Для того чтобы получить асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, обслуженных в системе $MAR | GI | \infty$ за некоторое время T , необходимо в равенстве (7) положить $t=T_1+T$ и устремить T_1 в бесконечность.

В результате мы получили асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, закончивших обслуживание в системе $MAR | GI | \infty$ в условии растущего времени наблюдения за выходящим потоком, что позволяет расширить область применимости уже имеющихся асимптотических результатов.

Литература

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 400 с.
2. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 109 с.
3. Kendall D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain// Ann. Math. Statist. – 1953. – Vol. 24. – P. 338–354.
4. Mirasol N. M. The output of an $M | G | \infty$ queueing system is Poisson // Operations Research. – 1963. – №11. – P. 282–284.
5. Burk P. J. The Output of Queueing System // Operations Research. – 1956. – Vol. 4. – P. 699–704.
6. Назаров А. А., Лапатин И. Л. Исследование выходящего потока системы $GI | GI | \infty$ методом просеянного потока // Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 4(9). – С. 59–64.
7. Назаров А. А., Лапатин И. Л. Асимптотический анализ выходящего потока системы $MAR|GI|\infty$ // Известия политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – Т. 315, №5. – С. 191–195.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

**ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ УСЛОВНОГО ВРЕМЕНИ
ДО РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ
ПРИ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ
СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ**

К. И. Лившиц, Я. С. Бублик

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Исчерпывающей характеристикой деятельности страховой компании является вероятность ее разорения на конечном временном интервале [1]. Однако более удобным представляется исследовать не вероятность разорения, а несколько иную характеристику – распределение условного времени до разорения при условии, что разорение происходит. В работе исследуется эта характеристика в предположениях, что страховые выплаты образуют дважды стохастический пуассоновский поток и что нагрузка страховой премии является малой.

Математическая модель страховой компании

В отличие от классической модели [1] будем считать, что интенсивность потока страховых выплат $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t) = \lambda_i$. Переход из состояния в состояние задаётся матрицей инфинитезимальных характеристик $Q = [q_{ij}]$ ранга $n-1$. Таким образом, переходы из состояния i в состояние j за малое время Δt имеют вероятности

$$P_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad i \neq j, \quad (1)$$

$$P_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n},$$

где $q_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} = 0. \quad (2)$$

Средняя интенсивность потока страховых выплат в стационарном режиме будет равна

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i, \quad (3)$$

где π_i – финальные вероятности состояний.

Будем считать далее, что страховые выплаты являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\psi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и моментами $M\{x^k\} = a_k, k = 2, 3$.

Наконец, как и в классической модели [1], будем считать, что страховые премии поступают непрерывно во времени с постоянной скоростью c , так что за время Δt приращение капитала за счет страховых премий равно $c\Delta t$.

Средний капитал страховой компании

При сделанных предположениях и $t \gg 1$ средний капитал страховой компании в момент времени t

$$\bar{S}(t) \approx S(0) + (c - \lambda_0 a)t. \quad (4)$$

Введем параметр θ соотношением

$$c = (1 + \theta)\lambda_0 a. \quad (5)$$

Очевидно, что капитал компании в среднем монотонно возрастает, если $\theta > 0$. При $\theta < 0$ компания разоряется. Параметр θ , как и в классической модели, – нагрузка страховой премии.

Производящие функции условного времени

Пусть в начальный момент времени капитал компании равен s и значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_i$. Обозначим через $\{S_\omega(t), \omega \in \Omega_i(s)\}$ – множество траекторий, приводящих к разорению страховой компании, и через $t_i(s, \omega)$ – время до разорения на траектории, приводящей к разорению.

Обозначим

$$\Phi_i(s, u) = \int_{\Omega_i(s)} e^{-ut_i(s, \omega)} P(d\omega), \quad (6)$$

и пусть

$$P_i(s) = \int_{\Omega_i(s)} P(d\omega) \quad (7)$$

есть вероятность разорения страховой компании на бесконечном временном интервале при условии, что в начальный момент времени капитал равен s и интенсивность потока выплат равна λ_i .

Тогда

$$\varphi_i(s, u) = \frac{\Phi_i(s, u)}{P_i(s)} \quad (8)$$

есть производящая функция условного времени до разорения, если начальный капитал равен s и значение интенсивности потока выплат в начальный момент времени $\lambda(0) = \lambda_i$.

Плотность распределения условного времени до разорения при этом определится выражением

$$g_i(t, s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \varphi_i(s, u) e^{ut} du, \quad (9)$$

а вероятность разорения компании на интервале времени величины t будет равна

$$P_i(s, t) = F_i(s, t)P_i(s), \quad (10)$$

где $F_i(t, s)$ – функция распределения условного времени до разорения.

Можно показать, что при сделанных предположениях о модели страховой компании функции $\Phi_i(s, u)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} c \frac{\partial \Phi_i(s, u)}{\partial s} = (\lambda_i + u) \Phi_i(s, u) - \\ - \sum_{j=1}^n q_{ij} \Phi_j(s, u) - \lambda_i \int_0^s \Phi_i(s-x, u) \psi(x) dx - \lambda_i \int_s^\infty \psi(x) dx \end{aligned} \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\Phi_i(s, 0) = P_i(s), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_i(s, u) = 0. \quad (12)$$

Случай малой нагрузки страховой премии

В общем случае найти решение системы уравнений (11) не удастся. Поэтому рассмотрим случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$. В случае малой нагрузки страховой премии решение системы уравнений (11) будем искать в виде

$$\Phi_i(s, u) = A(u, \theta) f_i\left(\frac{\theta s}{1 + \theta}, \frac{u}{\theta^2}, \theta\right), \quad (13)$$

с ограничением

$$\sum_{i=1}^n \pi_i f_i(0, u, \theta) = 1. \quad (14)$$

Используя подход, изложенный в [2], можно показать, что при $\theta \ll 1$

$$\Phi_i(s, u) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + u - \lambda_0 a \theta x_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right)} e^{x_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right) \frac{\theta}{1 + \theta} s} + O(\theta), \quad (15)$$

где

$$x_1(v) = \frac{-A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_1 v}}{2A_1}, \quad (16)$$

$$A_1 = \frac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0), \quad A_2 = \lambda_0 a, \quad (17)$$

$$R = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1,n-1} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & \dots & q_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (18)$$

откуда среднее значение условного времени будет равно

$$t_i^1(s) = \frac{s+a}{\lambda_0 a \theta} + O(1), \quad (19)$$

а дисперсия условного времени

$$D_i(s) = \frac{2A_1(s+a)}{\theta^3 A_2^3} + O(1). \quad (20)$$

Плотность распределения условного времени при нулевом начальном капитале

При нулевом начальном капитале страховой компании соотношения (8), (9) и (15) приводят к выражению для плотности распределения условного времени до разорения в виде

$$g_i(t, 0) = \frac{\lambda_0^2 (1+2\alpha) \sqrt{\beta}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\lambda_0 \beta x + 2\alpha(t-x))^2}{4\beta(t-x)} - \lambda_0 x} dx + O(\theta), \quad (21)$$

где α и β – некоторые постоянные, определяемые характеристиками модели.

Пусть $n=1$ и страховые выплаты имеют экспоненциальное распределение. Тогда плотность распределения условного времени до разорения (21) примет вид

$$g(t, 0) = \frac{\lambda \sqrt{\lambda} (1+\theta)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\lambda x - \frac{\lambda(x+\theta(t-x))^2}{4(t-x)}} dx + O(\theta). \quad (22)$$

Истинная плотность распределения условного времени до разорения $p(t, 0)$ в случае экспоненциального распределения страховых выплат имеет вид [1]

$$p(t, 0) = \sqrt{1+\theta} e^{-\lambda(2+\theta)t} I_1(2\lambda\sqrt{1+\theta}t). \quad (23)$$

Зависимость плотностей распределения $g_i(t, 0)$ и $p(t, 0)$ от t приведена на рис. 1. Параметр $\theta = 0.5$.

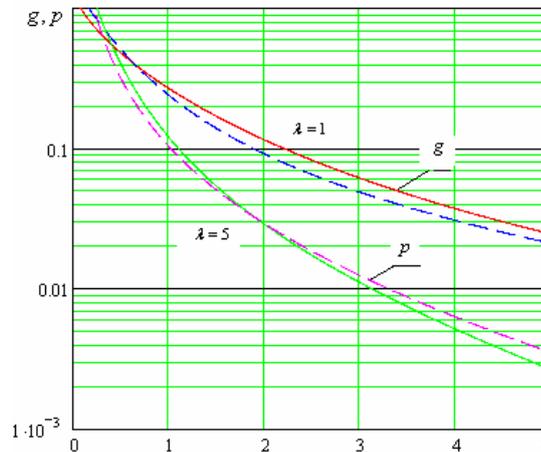


Рис. 1

**Плотность распределения условного времени
при неограниченно возрастающем начальном капитале**
Введем величину

$$z = \frac{t - ms}{\sigma\sqrt{s}}, \quad (24)$$

где

$$m = \frac{1}{\theta A_2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2A_1}{\theta^3 A_2^3}} \quad (25)$$

и пусть $\varphi_{i,z}(u, s)$ – производящая функция величины z .

Если

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta s(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{\frac{3}{2}} s(\theta) = 0, \quad (26)$$

то

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi_{i,z}(u, s) = e^{-\frac{u^2}{2}}. \quad (27)$$

Таким образом, если при $\theta \rightarrow 0$ начальный капитал компании возрастает согласованно с уменьшением θ , то случайная величина z имеет асимптотически нормальное распределение.

Литература

1. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – 180 с.
2. Лившиц К. И., Бублик Я. С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – Вып. 1 (10). – С. 66–77.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕМАРКОВСКОЙ
ДИНАМИЧЕСКОЙ RQ-СИСТЕМЫ**

Т. В. Любина, А. А. Назаров

Томский государственный университет

Рассмотрим однолинейную динамическую RQ-систему [1] массового обслуживания, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ (рис. 1). Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения $B(x)$. Если прибор занят, то поступившая заявка переходит в источник повторных вызовов. Из ИПВ после случайной задержки заявка с динамической (зависящей от состояния ИПВ) интенсивностью σ/i

вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его на случайное время обслуживания.

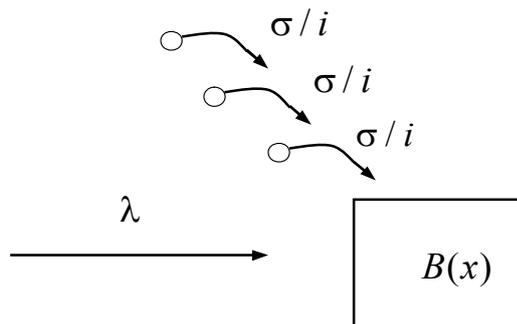


Рис. 1. Динамическая RQ-система с входящим ММР-потокм заявок

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $z(t)$ – длина интервала от момента t до момента окончания обслуживания заявки, стоящей на приборе в момент времени t , а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Компонента $z(t)$ определяется только в те моменты, когда $k(t)=1$. Обозначим

$$P\{k(t) = 0, i(t) = i\} = P(0, i, t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени свободен и в источнике повторных вызовов находится i заявок, а

$$P\{k(t) = 1, i(t) = i, z(t) < z\} = P(1, i, z, t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени t занят, до конца обслуживания заявки, стоящей на приборе в момент времени t , осталось время, меньшее, чем z , и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(k, i, z, t)$ состояний $\{k, i, z\}$ рассматриваемой RQ-системы по формуле полной вероятности составим систему равенств:

$$\begin{cases} P(0, 0, t + \Delta t) = P(0, 0, t)(1 - \lambda\Delta t) + P(1, 0, \Delta t, t) + o(\Delta t), \\ P(1, 0, z - \Delta t, t + \Delta t) = [P(1, 0, z, t) - P(1, 0, \Delta t, t)](1 - \lambda\Delta t) + P(0, 0, t)\lambda\Delta tB(z) + \\ + P(0, i, t)\sigma\Delta tB(z) + o(\Delta t), \\ \dots \\ P(0, i, t + \Delta t) = P(0, i, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \sigma\Delta t) + P(1, i, \Delta t, t) + o(\Delta t), \\ P(1, i, z - \Delta t, t + \Delta t) = [P(1, i, z, t) - P(1, i, \Delta t, t)](1 - \lambda\Delta t) + P(1, i - 1, z, t)\lambda\Delta t + \\ + P(0, i, t)\lambda\Delta tB(z) + P(0, i + 1, t)\sigma\Delta tB(z) + o(\Delta t), \end{cases} \quad (1)$$

применяя Δt -метод [2], получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова и запишем её для стационарного распределения $P(0, i, t) = P(0, i)$, $P(1, i, z, t) = P(1, i, z)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -P(0,0)\lambda + \frac{\partial P(1,0,0)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial P(1,0,z)}{\partial z} - \frac{\partial P(1,0,0)}{\partial z} - P(1,0,z) + P(0,0)\lambda B(z) + P(0,1)\sigma B(z) = 0, \\ \dots \\ -P(0,i)(\lambda + \sigma) + \frac{\partial P(1,i,0)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial P(1,i,z)}{\partial z} - \frac{\partial P(1,i,0)}{\partial z} - P(1,i,z)\lambda + P(1,i-1,z)\lambda + P(0,i)\lambda B(z) + \\ + P(0,i+1)\sigma B(z) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Чтобы решить систему (2), определим производящие функции

$$G(0, x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P(0, i), \quad G(1, x, z) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P(1, i, z). \quad (3)$$

Из системы (2) с учетом равенства (3) получаем следующую систему для функций $G(0, x)$ и $G(1, x, z)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -G(0, x)(\lambda + \sigma) + P(0,0)\sigma + \frac{\partial G(1, x, 0)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial G(1, x, z)}{\partial z} - \frac{\partial G(1, x, 0)}{\partial z} - G(1, x, z)\lambda + G(1, x, z)x\lambda + \\ + G(0, x)\lambda B(z) + G(0, x)\frac{\sigma}{x} B(z) - P(0,0)\frac{\sigma}{x} B(z) = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Выразим $\frac{\partial G(1, x, 0)}{\partial z}$ из первого уравнения системы (4) и подставим во

второе. Тогда, сгруппировав подобные слагаемые, получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G(1, x, 0)}{\partial z} = (\lambda + \sigma)G(0, x) - \sigma P(0,0), \\ \frac{\partial G(1, x, z)}{\partial z} - \lambda(1-x)G(1, x, z) = G(0, x) \left[\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B(z) \right] - \\ - \sigma P(0,0) \left[1 - \frac{1}{x} B(z) \right]. \end{array} \right. \quad (5)$$

Следовательно, выражение для $G(1, x, z)$ имеет вид

$$G(1, x, z) =$$

$$= e^{\lambda(1-x)z} \int_0^z e^{-\lambda(1-x)y} \left\{ G(0,x) \left[\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B(y) \right] - \sigma P(0,0) \left(1 - \frac{1}{x} B(y) \right) \right\} dy. \quad (6)$$

Так как $x \neq 1$, то $\lambda(1-x) > 0$, следовательно $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{\lambda(1-x)z} = \infty$, отсюда

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-x)y} \left\{ G(0,x) \left[\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B(y) \right] - \sigma P(0,0) \left(1 - \frac{1}{x} B(y) \right) \right\} dy = 0.$$

Тогда можно записать равенство, определяющее $G(0,x)$:

$$G(0,x) = \sigma P(0,0) \frac{\int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-x)y} \left(1 - \frac{1}{x} B(y) \right) dy}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-x)y} \left[\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B(y) \right] dy}. \quad (7)$$

Для того чтобы получить явное выражение для $G(0,x)$, необходимо найти интегралы, которые выразим через преобразование Лапласа – Стильтьеса функции $B(x)$. Значение величины $P(0,0)$ найдем ниже:

а) найдем интеграл, стоящий в числителе (7):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-x)y} \left(1 - \frac{1}{x} B(y) \right) dy &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-x)y} dy - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} B(y) e^{-\lambda(1-x)y} dy = \\ &= \frac{1}{\lambda(1-x)} - \frac{\frac{1}{x} B^*(\lambda(1-x))}{\lambda(1-x)} = \frac{1 - \frac{1}{x} B^*(\lambda(1-x))}{\lambda(1-x)}; \end{aligned}$$

б) найдем интеграл, стоящий в знаменателе (7):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-x)y} \left\{ \lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B(y) \right\} dy &= (\lambda + \sigma) \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-x)y} dy - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) \int_0^{\infty} B(y) e^{-\lambda(1-x)y} dy = \\ &= \frac{\lambda + \sigma}{\lambda(1-x)} - \frac{\left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B^*(\lambda(1-x))}{\lambda(1-x)} = \frac{(\lambda + \sigma) - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B^*(\lambda(1-x))}{\lambda(1-x)}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для $G(0,x)$ имеет вид

$$G(0,x) = \sigma P(0,0) \frac{1 - \frac{1}{x} B^*(\lambda(1-x))}{\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B^*(\lambda(1-x))}. \quad (8)$$

Найдем выражение для $G(1,x)$. Так как $G(1,x) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(1,x,z)$, то с учетом (6) имеем

$$G(1,x) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\int_0^z e^{-\lambda(1-x)y} \left\{ G(0,x) \left[\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B(y) \right] - \sigma P(0,0) \left[1 - \frac{1}{x} B(y) \right] \right\} dy}{e^{\lambda(x-1)z}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{G(0, x) \left[\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B(y) \right] - \sigma P(0, 0) \left[1 - \frac{1}{x} B(y) \right]}{\lambda(x-1)} = \\
&= \frac{G(0, x) \left(\sigma - \frac{\sigma}{x} \right) - \sigma P(0, 0) \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{\lambda(x-1)} = \frac{1}{x} \frac{[\sigma G(0, x) - \sigma P(0, 0)]}{\lambda} = \\
&= \frac{\sigma}{\lambda x} [G(0, x) - P(0, 0)].
\end{aligned}$$

Таким образом, $G(1, x)$ определяется равенством

$$G(1, x) = \frac{\sigma}{\lambda x} [G(0, x) - P(0, 0)], \quad (9)$$

где $G(0, x)$ определено равенством (8).

Далее найдем значение величины $P(0, 0)$. Используя условие нормировки $G(0, 1) + G(1, 1) = 1$, запишем следующее равенство:

$$G(0, 1) \left(\frac{\sigma}{\lambda} + 1 \right) - \frac{\sigma}{\lambda} P(0, 0) = 1,$$

ПОЭТОМУ

$$\sigma P(0, 0) \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x} B^*(\lambda(1-x))}{\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B^*(\lambda(1-x))} \left(\frac{\sigma}{\lambda} + 1 \right) - \frac{1}{\lambda} \right\} = 1.$$

Найдем

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x} B^*(\lambda(1-x))}{\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B^*(\lambda(1-x))} \left(\frac{\sigma}{\lambda} + 1 \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - B^*(\lambda(1-x))(-\lambda)}{\lambda + \sigma - \lambda B^*(\lambda(1-x)) - (\lambda x + \sigma) B^*(\lambda(1-x))(-\lambda)} = \\
&= \frac{1 + \lambda B^*(0)}{\lambda + \sigma - \lambda B^*(0) + \lambda(\lambda + \sigma) B^*(0)}.
\end{aligned}$$

Так как $B^*(\lambda(1-x)) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-x)y} dB(y)$, то

$$B^*(0) = \int_0^{\infty} e^{0y} dB(y) = B(y)|_0^{\infty} = B(\infty) - B(0) = 1,$$

$$B^{*'}(0) = \int_0^{\infty} e^{0y} (-y) dB(y) = - \int_0^{\infty} y dB(y) = -b,$$

где b – математическое ожидание времени обслуживания.

Получим

$$\sigma P(0,0) \left\{ \frac{1-b\lambda}{\sigma - \lambda b(\lambda + \sigma)} \left(\frac{\sigma}{\lambda} + 1 \right) - \frac{1}{\lambda} \right\} = 1.$$

Отсюда $P(0,0)$ примет следующий вид:

$$P(0,0) = 1 - \lambda b \frac{\lambda + \sigma}{\sigma}. \quad (10)$$

Найдем выражение для производящей функции $G(x)$. Так как $G(x) = G(0,x) + G(1,x)$, то

$$G(x) = \sigma P(0,0) \left[\frac{1 - \frac{1}{x} B^*(\lambda(1-x))}{\lambda + \sigma - \left(\lambda + \frac{\sigma}{x} \right) B^*(\lambda(1-x))} \left(1 + \frac{\sigma}{\lambda x} \right) - \frac{1}{\lambda x} \right], \quad (11)$$

где $P(0,0)$ определяется равенством (10).

Характеристические функции для распределения вероятностей $H(u)$ запишем в виде

$$h(u) = G(e^{ju}),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда распределение вероятностей $P(i)$ числа заявок в источнике повторных вызовов определяет равенство

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju i} h(u) du, \quad (12)$$

в котором

$$h(u) = \sigma \left(1 - \lambda b \frac{\lambda + \sigma}{\sigma} \right) \left\{ \frac{e^{ju} - B^*(\lambda(1 - e^{ju}))}{(\lambda + \sigma)e^{ju} - (\lambda e^{ju} + \sigma)B^*(\lambda(1 - e^{ju}))} \left(1 + \frac{\sigma e^{-ju}}{\lambda} \right) - \frac{e^{-ju}}{\lambda} \right\}.$$

Численное интегрирование [2] в (12) при заданных значениях параметров λ , σ , b и преобразовании Лапласа – Стильеса $B^*(\alpha)$ не представляет труда для широкого спектра значений i .

Литература

1. Любина Т. В., Назаров А. А. Исследование марковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3 (12). – С. 73–84.
2. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания: учеб. пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА КОМПЛЕКСНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ СРЕДСТВАМИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А. А. Любченко

Омский государственный университет путей сообщения

Проведение технического обслуживания (ТО) или профилактики восстанавливаемых систем является одним из способов повышения их надежности в процессе эксплуатации. Для количественной оценки надежности данной разновидности систем используются комплексные показатели надежности, коэффициент готовности K_G и коэффициент технического использования $K_{ТИ}$ [1, 2]. Изменение периодичности профилактики T оказывает влияние на значения приведенных показателей надежности. Применение статистического имитационного моделирования позволяет получить зависимости данных показателей от периодичности ТО, $K_{ТИ}(T)$ и $K_G(T)$ для систем, процесс эксплуатации которых характеризуется не только отказами, но и разрегулировкой по конкретному параметру.

Коэффициент технического использования $K_{ТИ}$ характеризует долю времени нахождения объекта в исправном состоянии относительно рассматриваемой продолжительности эксплуатации с учетом времени простоев, обусловленных ТО и восстановительными ремонтами:

$$K_{ТИ} = \frac{T_{ИСП}}{T_{ИСП} + T_{РЕМ} + T_{ТО}}, \quad (1)$$

где $T_{ИСП}$ – среднее время исправной работы объекта;

$T_{ТО}$ – среднее время простоя при ТО;

$T_{РЕМ}$ – среднее время, затраченное на восстановительные ремонты.

Коэффициент готовности K_G определяет вероятность того, что система окажется в исправном состоянии при длительной эксплуатации:

$$K_G = \frac{T_{ИСП}}{T_{ИСП} + T_{РЕМ}}. \quad (2)$$

Модель процесса эксплуатации обслуживаемых (восстанавливаемых) систем, например блоков радиоэлектронной аппаратуры, учитывающая разрегулировки, может быть представлена графом из пяти состояний [3] S_1 – исправное состояние, S_2 – состояние разрегулировки, S_3 – состояние явного отказа, S_4 – состояние ТО исправного элемента и S_5 – состояние ТО разрегулированного элемента (рис. 1).

Математическая модель для нахождения зависимостей $K_{ТИ}(T)$ и $K_G(T)$, представленная в [3], учитывает только один период жизненного цикла системы, называемый периодом нормальной эксплуатации.

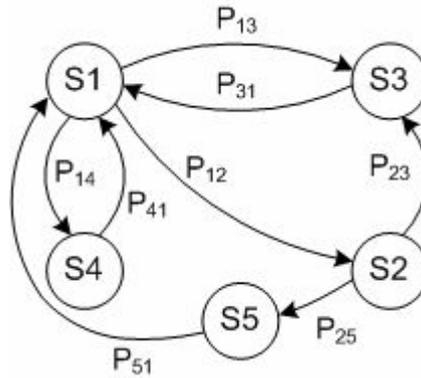


Рис. 1. Граф состояний процесса эксплуатации обслуживаемых элементов

Данный период характеризуется приблизительно постоянной интенсивностью отказов и экспоненциальным распределением наработки на отказ. Время безотказной работы подчиняется экспоненциальному распределению, если отказы возникают вследствие «пиковых» нагрузок и, соответственно, имеют внезапный характер [4]. Однако проведение профилактических мероприятий нецелесообразно для систем с экспоненциальным законом распределения безотказной работы, так как периодическое ТО приводит к снижению коэффициента готовности [2, 4].

В действительности жизненный цикл содержит три периода: приработка (обкатка), нормальная эксплуатация и период старения. Периоды приработки и старения, в отличие от нормальной эксплуатации, характеризуются повышенными интенсивностями отказов. Распределение времени безотказной работы с учетом всех трех периодов эксплуатации может быть описано универсальным распределением Вейбулла – Гнеденко [4].

Процесс, представленный на рис. 1, при экспоненциальном характере распределения времени пребывания в состоянии S_i , $i = \overline{1,5}$, может быть описан Марковским процессом, широко применяемым в теории надежности и теории систем массового обслуживания. Однако, учитывая распределение времени пребывания в состояниях S_1 и S_2 в виде распределения Вейбулла – Гнеденко и детерминированные значения времени пребывания в остальных состояниях для текущего шага процесса, необходимо обратиться к модели вложенной цепи Маркова, задаваемой следующими параметрами [5]:

– вектором начального состояния вложенной Марковской цепи:

$$\mathbf{P}(0) = \{P_1^0, P_2^0, P_3^0, P_4^0, P_5^0\}; \quad (3)$$

– матрицей-строкой плотностей распределения времени пребывания в состоянии S_i :

$$|\mathbf{A}| = \left\{ (\lambda_{01} + \lambda_{02})\alpha \cdot T^{\alpha-1} \cdot e^{-(\lambda_{01} + \lambda_{02})T^\alpha}, \lambda_{12}\alpha \cdot T^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda_{12}T^\alpha}, T_V, T_P, T_P + T_R \right\}, \quad (4)$$

где λ_{01} , λ_{02} – интенсивность постепенных и внезапных отказов, соответственно, 1/ч;

λ_{12} – интенсивность внезапных отказов разрегулированной системы, 1/ч;

α – параметр распределения Вейбулла – Гнеденко, определяющий его форму;

T_p – время проверки, ч;

T_R – время регулировки, ч;

T_V – время восстановления, определяемое по формуле (5).

$$T_V = T_A + T_S + T_R, \quad (5)$$

где T_S – время поиска неисправности, ч;

T_A – время аварийного ремонта, ч;

– матрицей переходных вероятностей:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & [1 - F_{02}(T)]F_{01}(T) & F_{02}(T) & [1 - F_{02}(T)][1 - F_{01}(T)] & 0 \\ 0 & 0 & F_{12}(T) & 0 & 1 - F_{12}(T) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $F_{01}(T) = 1 - e^{-\lambda_{01}T^\alpha}$ – функция распределения времени перехода из исправного состояния S_1 в состояние разрегулировки S_2 ;

$F_{02}(T) = 1 - e^{-\lambda_{02}T^\alpha}$ – функция распределения времени наработки на отказ;

$F_{12}(T) = 1 - e^{-\lambda_{12}T^\alpha}$ – функция распределения времени перехода из состояния разрегулировки S_2 в состояние явного отказа S_3 .

Событийный метод имитации, заключающийся в моделировании значимых точек процесса (переход из одного состояния в другое), для вложенной цепи Маркова может быть реализован с помощью обобщенного алгоритма имитации [5], дополненного условиями, учитывающими изменение интенсивностей отказов (λ -характеристик) с течением времени. В модель положено, что 3 и 5 % моделируемого времени приходится на периоды приработки и старения, соответственно, а оставшаяся часть времени соответствует нормальной эксплуатации.

Таким образом, проводя статистические эксперименты с модифицированным алгоритмом имитации вложенной цепи Маркова, можно оценить значения коэффициента технического использования и коэффициента готовности для конкретного периода проведения ТО, в виде среднего значения коэффициентов $\overline{K_{\text{ти}}}(T)$ и $\overline{K_{\text{г}}}(T)$, получаемых после обработки статистических данных по формулам:

$$\overline{K_{\text{ти}}}(T) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{T_1^j(T) + T_2^j(T)}{\sum_{i=1}^5 T_i^j(T)}, \quad (7)$$

$$\overline{K_{\text{г}}}(T) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{T_1^j(T) + T_2^j(T)}{T_1^j(T) + T_2^j(T) + T_3^j(T)}, \quad (8)$$

где T – периодичность технического обслуживания (профилактики);

T_i^j – суммарное время пребывания в состоянии S_i для j -го прогона модели.

Максимальное количество прогонов модели N с учетом предельной теоремы Бернулли для заданных величин доверительной вероятности и доверительного интервала может быть вычислено по формуле

$$N = \frac{0,25}{\varepsilon^2} \cdot (F^{-1}(Q))^2, \quad (9)$$

где F^{-1} – обратная функция Лапласа;

Q – доверительная вероятность;

ε – доверительный интервал.

График зависимости средних значений коэффициента технического использования и коэффициента готовности от периодичности профилактики, $\overline{K_{\text{ти}}}(T)$ и $\overline{K_{\text{г}}}(T)$, представлен на рис. 2.

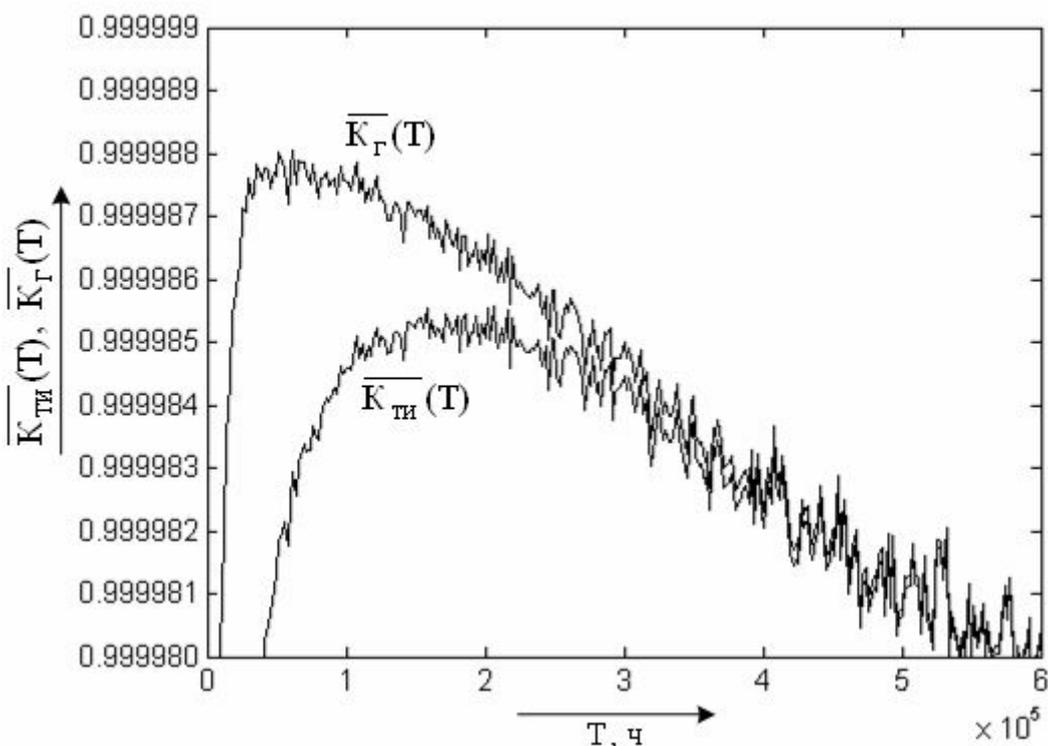


Рис. 2. Зависимости $\overline{K_{\text{ти}}}(T)$ и $\overline{K_{\text{г}}}(T)$ для $Q = 0,99$ и $\varepsilon = 0,05$

Таким образом, проведение статистических экспериментов с модифицированным алгоритмом имитации, учитывающим характер изменения λ -характеристик систем через распределение Вейбулла – Гнеденко, позволяет оценить значения комплексных показателей надежности восстанавливаемых объектов при проведении профилактики, а именно среднего значения коэффициента технического использования $\overline{K_{\text{ти}}}(T)$ и среднего значения коэффициента готовности $\overline{K_{\text{г}}}(T)$. Результаты моделирования подтверждают, что проведение периодического ТО повышает надежность систем и применительно

к рассмотренным показателям надежности существует оптимальная стратегия организации технического обслуживания, обусловленная экстремальным характером $\overline{K}_{\text{ти}}(T)$ и $\overline{K}_{\text{г}}(T)$.

Литература

1. Ямпурин Н. П. Основы надежности электронных средств: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 240 с.
2. Половко А. М. Основы теории надежности. – СПб.: БВХ-Петербург, 2008. – 704 с.
3. Держо Г. Г. Количественная оценка вклада систем связи в безопасность технологических процессов на железнодорожном транспорте. – М.: ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2007. – 130 с.
4. Герцбах И. Б., Кордонский Х. Б. Модели отказов. – М.: Советское радио, 1966. – 166 с.
5. Финаев В. И., Павленко Е. Н., Заргарян Е.В. Аналитические и имитационные модели: учеб. пособие. – Таганрог: Изд-во Технологического института ЮФУ, 2007. – 310 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛА ЛИЦ, ПОЛУЧАЮЩИХ ТРУДОВЫЕ ПЕНСИИ

В. А. Максимов, И. Р. Гарайшина

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Согласно Федеральному закону «О трудовых пенсиях в Российской Федерации» [1] устанавливаются следующие виды трудовых пенсий: трудовая пенсия по старости, трудовая пенсия по инвалидности, трудовая пенсия по случаю потери кормильца. Право на трудовую пенсию имеют граждане, застрахованные в соответствии с Федеральным законом «Об обязательном пенсионном страховании в Российской Федерации» [2]. Гражданам, имеющим право на одновременное получение трудовых пенсий различных видов, в соответствии с Федеральным законом «О трудовых пенсиях в Российской Федерации» устанавливается одна пенсия по их выбору. Порядок финансирования указанных трудовых пенсий определяется Федеральным законом «Об обязательном пенсионном страховании в Российской Федерации». Представляет интерес изучение процесса изменения числа лиц, охваченных пенсионным страхованием, и численности групп застрахованных, получающих тот или иной вид трудовой пенсии. В настоящей работе будем различать две группы лиц, получающих пенсионные выплаты, – имеющих трудовую пенсию по старости и лиц, которым назначены другие виды пенсии.

В качестве математической модели процесса изменения числа застрахованных лиц рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ , имеющий смысл потока заявок на страхование. Обслуживание заявки начинается с первой фа-

зы, соответствующей периоду выплаты страховых взносов, по завершению которой (при назначении пенсии) заявка с определённой вероятностью приступает к обслуживанию на второй фазе с двумя видами обслуживающих приборов, каждый из которых соответствует периоду выплаты одного из указанных видов пенсии. Вероятность перейти к обслуживанию на первом приборе равна r_1 , на втором – r_2 . Число приборов каждого вида неограничено. С вероятностью $1 - r_1 - r_2$ заявка покидает систему, не приступая к обслуживанию на второй фазе.

Считаем, что продолжительности обслуживания на каждом приборе имеют произвольные функции распределения $B_1(x)$ на первой фазе, $B_2(x)$ и $B_3(x)$ – на первом и втором приборе второй фазы соответственно (рис. 1).

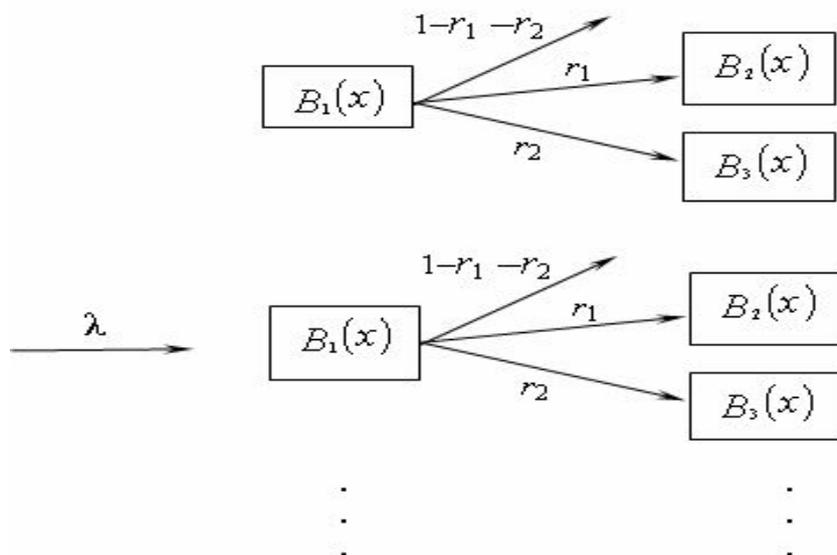


Рис. 1. Двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов

Обозначим число заявок в момент времени t на первой фазе $l(t)$, на первом приборе второй фазы – $m(t)$, на втором приборе – $n(t)$. Ставится задача исследования процесса изменения числа заявок, находящихся на обслуживании в данной двухфазной системе массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов с произвольным временем обслуживания.

Для решения поставленной задачи применим метод предельной декомпозиции, который заключается в следующем.

Входящий пуассоновский поток делится на N независимых простейших потоков с параметром λ/N . Рассмотрим исходную СМО как совокупность независимых однолинейных двухфазных систем массового обслуживания с входящим простейшим потоком с параметром λ/N , обслуживание на каждой из однолинейных систем осуществляется в порядке, указанном выше (рис. 2). Заявка, заставшая линию занятой, теряется, но при $N \rightarrow \infty$ вероят-

ность потери заявки стремится к нулю, поэтому потеря заявок не играет значительной роли в предельной ситуации.

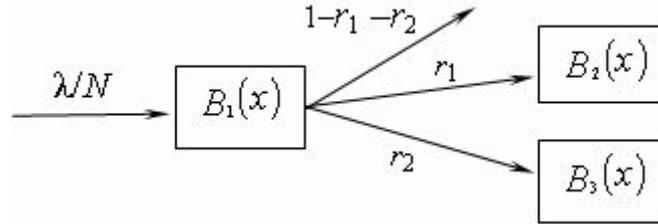


Рис. 2. Однолинейная двухфазная СМО

Таким образом, задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в бесконечнолинейной СМО сводится к решению задачи нахождения распределения вероятностей числа заявок в однолинейной СМО с отказами.

Сначала проведём исследование однолинейной двухфазной СМО с произвольным временем обслуживания заявок. Обозначим число заявок в момент времени t на первой фазе $l'(t)$, на первом приборе второй фазы – $m'(t)$, на втором приборе – $n'(t)$, $z(t)$ – остаточное время обслуживания на приборе, то есть интервал времени от текущего момента до окончания обслуживания.

Определим следующие вероятности для описания процесса обслуживания:

$P(0, t, N)$ – вероятность того, что в момент времени t однолинейная система была пуста;

$P(1, z, t, N)$ – вероятность того, что линия занята и заявка находится на первой фазе обслуживания, остаточное время обслуживания меньше z ;

$P(2, z, t, N)$ – вероятность того, что линия занята и заявка находится на первом приборе второй фазы обслуживания, остаточное время обслуживания меньше z ;

$P(3, z, t, N)$ – вероятность того, что линия занята и заявка находится на втором приборе второй фазы обслуживания, остаточное время обслуживания меньше z .

Для указанных вероятностей составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(0, t, N)}{\partial t} &= -\frac{\lambda}{N} P(0, t, N) + (1 - r_1 - r_2) \frac{\partial P(1, 0, t, N)}{\partial z} + \\ &\quad + \frac{\partial P(2, 0, t, N)}{\partial z} + \frac{\partial P(3, 0, t, N)}{\partial z}, \\ \frac{\partial P(1, z, t, N)}{\partial t} &= \frac{\lambda}{N} P(0, t, N) B_1(z) + \frac{\partial P(1, z, t, N)}{\partial z} - \frac{\partial P(1, 0, t, N)}{\partial z}, \\ \frac{\partial P(2, z, t, N)}{\partial t} &= r_1 \frac{\partial P(1, 0, t, N)}{\partial z} B_2(z) + \frac{\partial P(2, z, t, N)}{\partial z} - \frac{\partial P(2, 0, t, N)}{\partial z}, \\ \frac{\partial P(3, z, t, N)}{\partial t} &= r_2 \frac{\partial P(1, 0, t, N)}{\partial z} B_3(z) + \frac{\partial P(3, z, t, N)}{\partial z} - \frac{\partial P(3, 0, t, N)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных будем искать в виде

$$\begin{aligned} P(0,t,N) &= 1 - \frac{1}{N}F(0,t,N) + o(N^{-2}), \quad P(1,z,t,N) = \frac{1}{N}F(1,z,t,N) + o(N^{-2}), \\ P(2,z,t,N) &= \frac{1}{N}F(2,z,t,N) + o(N^{-2}), \\ P(3,z,t,N) &= \frac{1}{N}F(3,z,t,N) + o(N^{-2}). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив предложенный вид решения в систему, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(0,t,N)}{\partial t} &= \lambda - (1 - r_1 - r_2) \frac{\partial F(1,0,t,N)}{\partial z} - \frac{\partial F(2,0,t,N)}{\partial z} - \frac{\partial F(3,0,t,N)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F(1,z,t,N)}{\partial t} &= \lambda B_1(z) + \frac{\partial F(1,z,t,N)}{\partial z} - \frac{\partial F(1,0,t,N)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F(2,z,t,N)}{\partial t} &= r_1 \frac{\partial F(1,0,t,N)}{\partial z} B_2(z) + \frac{\partial F(2,z,t,N)}{\partial z} - \frac{\partial F(2,0,t,N)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F(3,z,t,N)}{\partial t} &= r_2 \frac{\partial F(1,0,t,N)}{\partial z} B_3(z) + \frac{\partial F(3,z,t,N)}{\partial z} - \frac{\partial F(3,0,t,N)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим

$$\frac{\partial F(1,0,t,N)}{\partial z} = h_1(t), \quad \frac{\partial F(2,0,t,N)}{\partial z} = h_2(t), \quad \frac{\partial F(3,0,t,N)}{\partial z} = h_3(t), \quad (4)$$

тогда система (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(0,t,N)}{\partial t} &= \lambda - (1 - r_1 - r_2)h_1(t) - h_2(t) - h_3(t), \\ \frac{\partial F(1,z,t,N)}{\partial t} &= \lambda B_1(z) + \frac{\partial F(1,z,t,N)}{\partial z} - h_1(t), \\ \frac{\partial F(2,z,t,N)}{\partial t} &= r_1 h_1(t) B_2(z) + \frac{\partial F(2,z,t,N)}{\partial z} - h_2(t), \\ \frac{\partial F(3,z,t,N)}{\partial t} &= r_2 h_1(t) B_3(z) + \frac{\partial F(3,z,t,N)}{\partial z} - h_3(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть в начальный момент времени система была пуста, тогда получаем начальные условия в виде

$$P(0,0,N) = 1.$$

Отсюда с учётом (2) получаем начальные условия для системы (5):

$$F(1,z,0,N) = 0, \quad F(2,z,0,N) = 0, \quad F(3,z,0,N) = 0, \quad F(0,0,N) = 0. \quad (6)$$

Из первого уравнения системы (5) получим выражение для $F(0,t,N)$:

$$F(0,t,N) = \lambda t - \int_0^t ((1 - r_1 - r_2)h_1(s) + h_2(s) + h_3(s)) ds. \quad (7)$$

Решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка для $F(1, z, t, N)$ определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{dF(1, z, t, N)}{\lambda B_1(z) - h_1(t)},$$

из которой с учётом начальных условий получаем:

$$F(1, z, t, N) = \lambda \int_0^t B_1(t + z - s) ds - \int_0^t h_1(s) ds.$$

Дифференцируя $F(1, z, t, N)$ по z в нуле, получаем выражение для $h_1(t)$:

$$h_1(t) = \left. \frac{\partial F(1, z, t, N)}{\partial z} \right|_{z=0} = \lambda B_1(t). \quad (8)$$

$$\text{Тогда } F(1, z, t, N) = \lambda \int_0^t (B_1(t + z - s) - B_1(s)) ds. \quad (9)$$

Решая аналогичным образом третье и четвёртое уравнения системы (5), получим:

$$F(2, z, t, N) = \lambda r_1 \int_0^t \left(B_1(s) B_2(t + z - s) ds - \int_0^s B_1(s) \beta_2(s - u) du \right) ds, \quad (10)$$

$$F(3, z, t, N) = \lambda r_2 \int_0^t \left(B_1(s) B_3(t + z - s) ds - \int_0^s B_1(s) \beta_3(s - u) du \right) ds, \quad (11)$$

$$h_2(t) = \lambda r_1 \int_0^t B_1(s) \beta_2(t - s) ds, \quad h_3(t) = \lambda r_2 \int_0^t B_1(s) \beta_3(t - s) ds, \quad (12)$$

$$\text{где } \beta_2(t - s) = \left. \frac{\partial B_2(t + z - s)}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \beta_3(t - s) = \left. \frac{\partial B_3(t + z - s)}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Тогда из равенства (7), учитывая (8) и (12), получаем выражение для $F(0, t, N)$:

$$\begin{aligned} F(0, t, N) = & \lambda t - (1 - r_1 - r_2) \lambda \int_0^t B_1(s) ds - \lambda r_1 \int_0^t \int_0^s B_1(u) \beta_2(s - u) du ds - \\ & - \lambda r_2 \int_0^t \int_0^s B_1(u) \beta_3(s - u) du ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Исходя из полученных выражений (9)–(11), (13) с учётом замены (2), нетрудно получить решение системы (1).

Производящая функция [3] числа занятых приборов в рассматриваемой однолинейной СМО при $z \rightarrow \infty$ определяется выражением

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1, x_2, x_3, t) &= M(x_1^{l'(t)} x_2^{m'(t)} x_3^{n'(t)}) = \\ &= P(0, t, N) + x_1 P(1, t, N) + x_2 P(2, t, N) + x_3 P(3, t, N), \end{aligned}$$

где $l'(t)$ – число заявок в момент времени t на первой фазе системы, $m'(t)$ – на первом приборе второй фазы, $n'(t)$ – на втором приборе.

Тогда для исходной системы в силу того, что процессы обслуживания для различных линий одинаковы и стохастически независимы, получаем производящую функцию вида

$$G(x_1, x_2, x_3, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} (P(0, t, N) + x_1 P(1, t, N) + x_2 P(2, t, N) + x_3 P(3, t, N))^N.$$

С учётом (2), очевидно, получаем:

$$H(x_1, \dots, x_n, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N} (-F(0, t) + x_1 F(1, t) + x_2 F(2, t) + x_3 F(3, t)) \right)^N,$$

а в силу равенства $F(0, t) = \sum_{k=1}^3 F(k, t)$ окончательно получаем, что производящая функция имеет вид

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_n, t) &= \exp((x_1 - 1)F(1, t) + (x_2 - 1)F(2, t) + (x_3 - 1)F(3, t)) = \\ &= \prod_{k=1}^3 \exp(x_k - 1)F(k, t). \end{aligned}$$

Зная вид производящей функции, нетрудно получить начальные моменты случайной величины – числа занятых приборов, например

$$m_1(l(t)) = \left. \frac{\partial H(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_2=1 \\ x_3=1}} = F(1, t),$$

аналогично получаем, что математические ожидания числа заявок, находящихся на обслуживании на первом и втором приборах второй фазы обслуживания в момент времени t , то есть числа граждан, получающих трудовую пенсию по старости, и граждан, которым назначена пенсия по инвалидности или по случаю потери кормильца, определяются функциями $F(2, t)$ и $F(3, t)$.

Литература

1. Федеральный закон «О трудовых пенсиях в Российской Федерации» от 17.12.2001 № 173-ФЗ.
2. Федеральный закон «Об обязательном пенсионном страховании в Российской Федерации» от 15.12.2001 № 167-ФЗ.
3. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

ОБ ИНДИВИДУАЛЬНОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ АБОНЕНТА БЕСПРОВОДНОЙ ЛВС, ОСНОВАННОЙ НА ТЕХНОЛОГИИ WIFI

П. А. Михеев, С. П. Сущенко

Томский государственный университет

Рассмотрим беспроводную локальную вычислительную сеть (ЛВС), основывающуюся на стандарте 802.11 [1]. Протокол, обеспечивающий работоспособность беспроводных ЛВС в распределенном режиме доступа (DCF) [1,2], схож с алгоритмом, организующим работу проводных ЛВС, построенных по семейству технологий *Ethernet*, однако имеется и ряд отличий, связанных прежде всего с невозможностью полного контроля среды передачи данных, необходимого для обнаружения конфликтов соперничающих станций [1].

В беспроводных ЛВС, также как и в проводных сетях *Ethernet*, отсрочка выполняется в длительностях, кратных размеру элементарного слота t_c . Кроме того, все интервальные механизмы между передачами данных основаны на временах, кратных целому числу длительностей t_c , и межкадровых промежутках различной длины, линейно связанных с t_c [3]. Беспроводные сети используют механизм доступа к среде, который называется «множественный доступ с контролем несущей и предотвращением коллизий» (*carrier sense multiple access with collision avoidance, CSMA/CA*). Данный механизм основан на том, что передающая станция проверяет, присутствует ли в среде сигнал несущей и, прежде чем начать отправку кадра, ожидает освобождения среды передачи данных. Беспроводные станции стандарта 802.11, в отличие от проводных *Ethernet*, не способны обнаруживать коллизии в среде передачи данных [3,4]. В силу этого обнаружение коллизий и бесконфликтных передач протокольных блоков данных основано на механизме таймаутов и алгоритме положительной решающей обратной связи.

Рассмотрим подробнее цикл передачи кадра данных от станции отправителя к станции получателя. Прежде всего, станция-отправитель прослушивает среду для определения ее занятости. При обнаружении незанятости среды отправитель ожидает в течение времени t_i (t_{DIFS} [1]), называемого межкадровым интервалом. По истечении этого интервала запускается алгоритм случайной задержки для выбора номера слота, в котором можно начать передачу данных. Номер слота равновероятно выбирается из промежутка $[0, S_N - 1]$, где S_N – размер конкурентного окна, измеряемого в слотовых интервалах и определяемого из соотношения $S_N = 2^{N_0 + N}$. Здесь N_0 – значение, определяющее начальный размер конкурентного окна, N – номер повторной передачи.

Очевидно, что начальное значение N_0 разумно выбирать таким образом, чтобы исходное число слотовых интервалов в конкурентном окне было

не менее количества соперничающих станций в сети: $N_0 \geq \log_2 K$. Указанный размер начальной области значений случайной задержки дает возможность рассеять начало передач конкурирующих абонентов по различным слотам и тем самым снизить вероятность конфликта. Номер выбранного слота присваивается значению таймера отсрочки t_{ots} , после чего начинают отсчитываться слотовые интервалы. В конце каждого слотового интервала таймер отсрочки уменьшается на единицу, при этом прослушивается среда. Как только фиксируется занятость среды, таймер отсрочки замораживается (останавливается) до тех пор, пока не освободится среда передачи данных. После освобождения среды таймер запускается со значения, зафиксированного непосредственно перед замораживанием. По истечении таймера отсрочки ($t_{ots} = 0$) станция-отправитель начинает передачу кадра данных. По окончании передачи отправитель ждет квитанции, а получатель, приняв неискаженный кадр (при отсутствии коллизии), выжидает интервал времени $t_{км}$ (t_{SIFS} [1]), называемый коротким межкадровым интервалом (t_i меньше $t_{км}$ на два слотовых интервала t_c), и высылает положительную квитанцию в служебном кадре подтверждения фиксированного размера.

Получатель, отправляя квитанцию, имеет преимущество при захвате среды передачи данных перед конкурентами за счет сокращенного периода ожидания t_{ei} до начала передачи служебного кадра с подтверждением. Если квитанция не пришла отправителю после завершения передачи кадра данных в течение тайм-аута ожидания квитанции $t_{out} = t_{км} + t_{ack}$, где t_{ack} – время, необходимое на отправку квитанции о принятом кадре данных, то произошла коллизия. Поскольку получатель данных отправляет только положительные квитанции на корректно принятые кадры (не искаженные конфликтом), то неполучение квитанции за время тайм-аута означает, что еще одна станция (или группа станций) выбрала тот же номер слота тайм-аута отсрочки, что и рассматриваемая нами станция-отправитель. Станции, не являющиеся участниками конфликта, продолжают конкурировать за среду передачи данных сразу же после завершения активности конфликтующих станций и истечения межкадрового промежутка. При обнаружении факта коллизии (непоступлении положительной квитанции от получателя) соперничающие станции увеличивают размер конкурентного окна вдвое, и процесс передачи возобновляется. После достижения конкурентным окном максимального размера, установленного производителем или администратором, дальнейшие повторные передачи выполняются при достигнутой величине окна.

Таким образом, технология WiFi имеет три существенных отличия от случайного метода доступа Ethernet. Во-первых, беспроводный метод передачи использует механизм положительной обратной связи. Во-вторых, в отличие от случайного метода доступа в проводных сетях технология WiFi уже при первой передаче использует механизм случайной отсрочки. И наконец, беспроводный протокол доступа использует механизм «замораживания»

счетчика отсрочки при обнаружении факта занятости среды до истечения таймера случайной задержки.

Рассмотрим функционирование беспроводной локальной сети до бесконфликтной передачи абонентом информационного кадра и получения квитанции об успешной доставке данных и, исходя из этого, найдем основные операционные характеристики системы. Предположим, что в беспроводной ЛВС имеется K станций – источников данных. Считаем, что все источники независимы, равноправны, всегда имеют кадры данных для отправки и действия их синхронизированы к слотовому периоду t_c .

Пусть все станции обмениваются кадрами одинакового размера. Тогда согласно последовательности протокольных действий элементарный цикл отправки кадра получателю определится размером межкадрового промежутка t_m , периодом случайной отсрочки t_{ois} , длительностью «заморозки» таймера случайной отсрочки $t_{зам}$, временем передачи информационного кадра t_k , коротким межкадровым интервалом $t_{км}$ и величиной тайм-аута ожидания положительной квитанции t_{ack} . Следует отметить, что среди указанных компонент цикла времена t_{ois} и $t_{зам}$ – являются функциями номера повторной передачи и их средние значения зависят от успешности очередной попытки передать кадр.

Среднее время передачи кадра $T(K)$ складывается из взвешенной суммы средних времен неудачных отправок и успешной передачи. Поскольку при неудачных передачах кадра получатель не отправляет подтверждений, то среднее время определится соотношением:

$$T(K) = \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ t_i + \sum_{n=0}^{N-1} [t(K, n) + t_{\hat{e}} + t_{out} + t_i] + \tau(K, N) + t_{\hat{e}} + t_{out} \right\} f(K, N) =$$

$$= t_i + t_{\hat{e}} + t_{out} + \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ N(t_{\hat{e}} + t_{out} + t_i) + \sum_{n=0}^{N-1} t(K, n) + \tau(K, N) \right\} f(K, N).$$

Здесь $t(K, N)$ и $\tau(K, N)$ – средние условные времена до N -й неудачной и успешной попытки отправить кадр соответственно, $f(K, N)$ – функция вероятностей продолжительности конкуренции между абонентами за эфир, которая определяется вероятностью успешной передачи кадра на N -м шаге после $N-1$ неудачной попытки послать отправление:

$$f(K, N) = P(K, N) \prod_{n=0}^{N-1} \pi(K, n),$$

где $P(K, N)$ – условная вероятность успешной передачи после $(N-1)$ -го конфликта K станций, а $\pi(K, N)$ – условная вероятность неудачи на N -м шаге. Для этих вероятностей выполняется следующее соотношение: $\pi(K, N) = 1 - P(K, N)$.

Численные исследования среднего времени передачи кадра абонентом показывают, что функция $T(K)$ имеет ярко выраженный минимум по координате

нате N_0 , определяющей начальный размер конкурентного окна и, как следствие, степень рассеяния станций по длительностям отсрочки перед началом процедуры соперничества.

Литература

1. Рошан П., Лиэри Д. Основы построения беспроводных локальных сетей стандарта 802.11. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 304 с.
2. Олифер В.Г., Олифер Н.А. Компьютерные сети. – СПб.: Питер, 2006. – 958 с.
3. Новиков Ю. В., Кондратенко С. В. Локальные сети: Архитектура, алгоритмы, проектирование. – М.: ЭКОМ, 2000. – 312 с.
4. Вишневский В. М., Ляхов А. И., Портной С. Л., Шахнович И. В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.

О БЫСТРОДЕЙСТВИИ СЕРВЕРНОГО СОЕДИНЕНИЯ КОММУТИРУЕМОЙ ЛВС

П. А. Михеев, С. П. Сущенко

Томский государственный университет

Введение. Наиболее массовые технологии построения современных локальных вычислительных сетей (ЛВС) основаны на методе случайного множественного доступа к разделяемой множеством абонентов среде передачи данных [1]. Данный метод обеспечивает простую топологию сети, однако при высоких нагрузках и большом числе абонентов операционные характеристики сети значительно ухудшаются [2]. Для повышения реального быстродействия ЛВС используется метод логической структуризации сети, основанный на сегментировании ее с помощью технологии коммутируемого доступа [1]. Кроме повышения производительности ЛВС, логическая структуризация с помощью коммутаторов упрощает управление сетью, увеличивает ее гибкость и повышает безопасность работы с прикладными данными в различных сегментах сети. Характерно применение коммутационных устройств в качестве концентратора, аккумулирующего трафик от настольных систем к файл-серверам, серверам баз данных и серверам приложений. В задачах синтеза структуры и параметров локальных сетей передачи данных важнейшим является сбалансированный выбор быстродействия каналов к прикладным серверным системам общего назначения, числа абонентов, подключаемых к таким приложениям, и технических параметров коммутационных устройств связи [1]. Математические модели локальной сети, мультиплексирующей абонентские потоки к сервисным службам, позволяют проводить анализ влияния параметров клиентского трафика на пропускную способность агрегирующих портов коммутатора с ограниченной памятью, расчет объема буферной памяти и исследование стратегий обеспечения качества сервиса, предоставляемого сетевыми службами.

Модель ЛВС с мультиплексированием трафика. Рассмотрим фрагмент локальной компьютерной сети, включающий M клиентов, подключенных к

серверу через сетевой коммутатор. Считаем, что к M однородным по скорости портам коммутатора подключены абоненты, порождающие поток кадров равной длины к серверной платформе, подсоединенной к коммутатору через $M+1$ -й порт с быстродействием, в $S \geq 1$ раз превышающим быстродействие абонентских портов. Считаем, что сетевые соединения абсолютно надежны, все клиентские источники данных независимы и работают синхронно с периодом t . Длительность этого периода определяется быстродействием портов для подключения абонентов и накладными расходами, связанными с коммутацией кадров между портами. Тогда за время полного цикла передачи кадра t по абонентским портам в серверный порт может быть отправлено $0 \leq i \leq S$ кадров. Будем считать, кроме того, что коммутатор работает в режиме полной промежуточной буферизации, и кадр, поступивший в коммутатор в текущем цикле t , начнет передаваться по выходному (серверному) порту только в следующем цикле. Будем полагать, что на абонентских портах информационные кадры возникают в каждый период t с вероятностями $B_m, m = \overline{1, M}$. Предположим также, что для хранения кадров в выходной очереди коммутатора к серверному порту выделен пул буферной памяти объема $K \geq M$. Тогда поведение рассматриваемого сетевого фрагмента представимо в виде Марковской системы массового обслуживания (СМО) с дискретным временем, конечным накопителем, неординарным входящим потоком и одним прибором с детерминированным групповым обслуживанием заявок [3]. Неординарный входящий поток СМО определяется вероятностями появления кадров в абонентских портах $B_m, m = \overline{1, M}$, а число обслуженных заявок – быстродействием серверного порта S . Динамика очереди к выходному каналу связи данной СМО описывается цепью Маркова. Множество возможных состояний цепи Маркова определяется размерами буферной памяти. Важнейшей характеристикой СМО ограниченной емкости является объем пропущенного (обслуженного) потока или загрузка. В рассматриваемом случае данная операционная характеристика определяется как доля быстродействия серверного соединения, достигаемая в условиях агрегирования трафика от M клиентов:

$$Z(K, S, M, \vec{B}) = \sum_{k=1}^S k P_k + S \sum_{k=S+1}^K P_k, \quad (1)$$

где $\vec{B} = \{B_1, \dots, B_M\}$ – вектор значений вероятностей $B_m, m = \overline{1, M}$, P_k – вероятности состояний цепи Маркова. В случае равенства вероятностей появления абонентских кадров в портах коммутатора $B_m = B, m = \overline{1, M}$ объем обслуженного потока будем обозначать как $Z(K, S, M, B)$.

ЛВС с однородными вероятностями порождения клиентских кадров. Начнем рассмотрение со случая, когда трафик от всех абонентов имеет одинаковые вероятности появления пакетов во входных портах $B_m = B, m = \overline{1, M}$. Тогда

переходные вероятности π_{ij} цепи Маркова, описывающей функционирование СМО, при $K \geq M \geq S \geq 1$ определяются следующими зависимостями:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \binom{M}{j} B^j (1-B)^{M-j}, i = \overline{0, S}, 0 \leq j \leq M; \\ \binom{M}{S+j-i} B^{S+j-i} (1-B)^{M-S+i-j}, i = \overline{S+1, K}, i-S \leq j \leq i+M-S, j < K; \\ \sum_{g=K+S-i}^M \binom{M}{g} B^g (1-B)^{M-g}, i = \overline{K+S-M, K}, j = K. \end{cases} \quad (2)$$

Проанализируем работу локальной сети при различных значениях параметров коммутатора. Начнем анализ со случая равенства числа источников информационных потоков (портов) и быстродействия серверного соединения $M = S$. В этом случае из определения переходных вероятностей (2) нетрудно видеть, что при $K \geq M$ достижимыми являются только состояния с номерами $i = \overline{0, M}$. Тогда решение системы уравнений локального равновесия (2) принимает следующий вид:

$$P_k = \binom{M}{k} B^k (1-B)^{M-k}, k = \overline{0, M}.$$

Пропущенный поток при этом согласно (1) прямо пропорционален числу источников (быстродействию серверного соединения) и интенсивности клиентского трафика: $Z(K, S, M, B) = MB$. Рассмотрим поведение коммутатора при числе агрегируемых информационных потоков, большем производительности серверного соединения $M > S$. Пусть $S=K$. Тогда вероятности состояний определяются зависимостями

$$P_k = \binom{M}{k} B^k (1-B)^{M-k}, k = \overline{0, K-1}, P_K = \sum_{k=M-S}^M \binom{M}{k} B^k (1-B)^{M-k}.$$

Операционный параметр $Z(K, S, M, B)$ определится выражением

$$Z(S, S, M, B) = M \sum_{k=1}^{S-1} \binom{M-1}{k-1} B^k (1-B)^{M-k} + S \sum_{k=M-S}^M \binom{M}{k} B^k (1-B)^{M-k}.$$

Для $S = 1$, $M = 2$ и $K \geq M$ вероятности состояний задаются соотношениями

$$P_1 = P_0 \frac{B(2-B)}{(1-B)^2}; P_k = P_0 \frac{B^{2(k-1)}}{(1-B)^{2k}}, k = \overline{2, K}; P_0 = \frac{(1-B)^{2K} (1-2B)}{(1-B)^{2K} - B^{2K}}.$$

$$\text{Пропущенный поток при этом составит: } Z(K, 1, 2, B) = \frac{2B(1-B)^{2K} - B^{2K}}{(1-B)^{2K} - B^{2K}}.$$

Из полученных соотношений нетрудно видеть, что индекс производительности

$Z(K, S, M, B)$ имеет монотонную зависимость от числа абонентов, параметров клиентского трафика и портов коммутатора.

ЛВС с неоднородными вероятностями порождения клиентских кадров. Начнем рассмотрение со случая двух клиентских потоков ($M=2$), мультиплексируемых в серверное соединение с быстродействием $S=2$. Для дискретной цепи Маркова, описывающей функционирование рассматриваемого фрагмента, достижимыми будут состояния с номерами $k = \overline{0, 2}$. Для финальных вероятностей состояний такой цепи Маркова справедливо: $P_0 = (1 - B_1)(1 - B_2)$; $P_1 = B_1 + B_2 - 2B_1B_2$; $P_2 = B_1B_2$. Пропущенный поток при этом определится суммой клиентских потоков: $Z(K, 2, 2, \vec{B}) = B_1 + B_2$. В случае произвольных значений параметров фрагмента, удовлетворяющих условию $M=S$, вероятности состояний цепи Маркова образуют полиномиальные элементы: $P_k = L_k$, где

$$L_k = \sum_{j_1=1}^{M-k+1} B_{j_1} \sum_{j_2=j_1+1}^{M-k+2} B_{j_2} \dots \sum_{j_k=j_{k-1}+1}^M B_{j_k} \prod_{l=1, l \neq \{j_n, n=1, k\}}^M (1 - B_l), k = \overline{0, M}, \quad (3)$$

а пропущенный поток (1) равен сумме вероятностей появления кадров в клиентских портах коммутатора $Z(K, S, M, \vec{B}) = \sum_{k=1}^M B_k$. Отсюда следует, что объем пропущенного потока при $M=S$ инвариантен к емкости буферного накопителя, превышающей число клиентских портов ($B > M$).

Рассмотрим локальную сеть с тремя клиентскими потоками ($M=3$), буферным накопителем коммутатора $K \geq M$ и скоростью серверного соединения $S=2$. Система уравнений равновесия с учетом введенных для L_k обозначений (3), принимает следующий вид

$$\begin{aligned} P_0(1 - L_0) &= P_1L_0 + P_2L_0; \\ P_1(1 - L_1) &= (P_0 + P_2)L_1 + P_3L_0; \\ P_2(1 - L_2) &= (P_0 + P_1)L_2 + P_3L_1 + P_4L_0; \\ P_3(1 - L_2) &= (P_0 + P_1 + P_2)L_3 + P_4L_1 + P_5L_0; \\ P_k(1 - L_2) &= P_{k-1}L_3 + P_{k+1}L_1 + P_{k+2}L_0, k = \overline{4, K-2}; \\ P_{K-1}(1 - L_2) &= P_{K-2}L_3 + P_KL_1; \\ P_K(1 - L_2 - L_3) &= P_{K-1}L_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Для объема буферной памяти $K=3$ решение системы (4) имеет вид

$$P_0 = \frac{L_0(L_1 + L_0)}{1 - L_2}; P_1 = \frac{L_1(L_1 + L_0) + L_0L_3}{1 - L_2}; P_2 = \frac{L_2(L_1 + L_0) + L_1L_3}{1 - L_2}; P_3 = \frac{L_3}{1 - L_2}.$$

Для пропущенного потока в этом случае согласно (1) получаем следующую зависимость: $Z(3, 2, 3, \vec{B}) = \frac{(L_1 + L_0)(L_1 + 2L_2) + L_3(2 + 2L_1 + L_0)}{1 - L_2}$.

При однородных клиентских потоках $B_m = B, m = \overline{1,3}$ данное соотношение упрощается: $Z(3,2,3,B) = \frac{3B - 9B^3 + 9B^4 - B^6}{1 - 3B^2 + 3B^3}$. Для буферного накопителя емкости $K=4$ сетевого фрагмента с параметрами $S=2, M=3$ решение системы уравнений равновесия (4) преобразуются к виду

$$P_0 = \frac{L_0 \left[(L_0 + L_1)^2 + L_0 L_3 \right]}{(1 - L_2)^2 - L_1 L_3}; P_1 = \frac{L_1 (L_0 + L_1)^2 + (L_0 + 2L_1) L_0 L_3}{(1 - L_2)^2 - L_1 L_3};$$

$$P_2 = \frac{L_2 (L_0 + L_1)^2 + [L_0(1 - L_0) + L_1^2] L_3}{(1 - L_2)^2 - L_1 L_3}; P_3 = \frac{(L_1 + L_0) L_3}{(1 - L_2)^2 - L_1 L_3}; P_4 = \frac{L_3^2}{(1 - L_2)^2 - L_1 L_3}.$$

Пропущенный поток в этом случае задается следующим выражением:

$$Z(4,2,3,\vec{B}) = \frac{(L_1 + L_0)^2 (L_1 + 2L_2) + L_3 (2L_1^2 + 2L_1 + 2L_1 L_0 + 4L_0 - L_0^2 + 2L_3)}{(1 - L_2)^2 - L_1 L_3}.$$

При одинаковых вероятностях $B_m = B, m = \overline{1,3}$ данная зависимость упрощается до соотношения

$$Z(4,2,3,B) = \frac{3B - 18B^3 + 18B^4 + 18B^5 - 36B^6 + 18B^7 - B^9}{1 - 6B^2 + 6B^3 + 6B^4 - 12B^5 + 6B^6}.$$

С дальнейшим увеличением значений параметров коммутатора S, M и K сложность аналитических выражений стремительно нарастает.

Обсуждение численных результатов. Численные исследования полученных соотношений показывают, что при равновероятном появлении информационных кадров в портах коммутатора функция пропущенного потока от объема трафика отдельного клиента B имеет вид кривой с насыщением. Сходная зависимость имеет место и от быстродействия серверного соединения и объема буферного накопителя коммутатора. Показано, что с ростом числа абонентов M насыщение пропущенного потока до предельного уровня происходит при более низкой интенсивности клиентского трафика B . Численный анализ свидетельствует о том, что при существенно неоднородной структуре клиентского трафика загрузка серверного соединения повышается по сравнению с равновероятным поступлением кадров от клиентских портов коммутатора. Минимум загрузки достигается для одинаковых интенсивностей абонентских потоков ($B_m = B, m = \overline{1,M}$). Наибольшее различие имеет место в окрестности условия равенства общего объема абонентского трафика и быстродействия серверного соединения. Вместе с тем с увеличением емкости буферной памяти коммутатора K различие в загрузке серверного соединения для различных наборов B_m значительно ослабляется. Из анализа функции загрузки следует, что пропущенный поток мажорируется ломаной прямой:

$$Z^*(K, S, M, \vec{B}) = \begin{cases} \sum_{m=1}^M B_m, \sum_{m=1}^M B_m \leq S; \\ S, \sum_{m=1}^M B_m > S. \end{cases} \quad (5)$$

В наибольшей мере реальная кривая отстоит от мажоранты при $\sum_{m=1}^M B_m = S$, однако с ростом емкости буферного накопителя K расстояние между значениями $Z(K, S, M, \vec{B})$ и $Z^*(K, S, M, \vec{B})$ быстро сокращается и при $K \geq 3M$ для практических расчетов вместо (1) можно использовать мажоранту (5).

Литература

1. Олифер В. Г., Олифер Н. А. Компьютерные сети. – СПб.: Питер, 2006. – 958 с.
2. Кустов Н. Т., Сущенко С. П. О пропускной способности метода случайного множественного доступа // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 1. – С. 91–102.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА ТРЕБОВАНИЙ НА ВЫПЛАТУ СТРАХОВЫХ СУММ

А. А. Назаров, Д. Д. Даммер

Томский государственный университет

Математическим моделям экономических систем и их исследованию в последнее время уделяется достаточно большое внимание. В стороне не остаются и модели актуарной математики, изучающей различные аспекты страхового дела. Так, в работе [2] исследуется классическая модель страховой компании, в [1, 2] рассматривается модель с ограниченным страховым полем и расходами на рекламу, в [3] – модель с неявной рекламой, когда интенсивность потока входящих рисков зависит от уже застрахованных в компании рисков. В этих работах находятся характеристики капитала, числа застрахованных рисков, а также вероятность разорения или выживания компании. В данной же работе исследуется такая характеристика, как суммарное число требований на выплату страховых сумм всеми застрахованными в компании рисками.

Рассмотрим модель страховой компании с неограниченным страховым полем в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. Пусть в компанию поступают риски, образуя простейший поток событий интенсивности λ . Каждый риск, находящийся в компании, на протяжении всего срока действия договора страхования независимо от других рисков генерирует с интенсивностью γ требования на выплату страховых сумм. Естественно считать, что требование риска на выпла-

ту определяется наступлением страхового случая. Длительность срока действия договора страхования для каждого риска, находящегося в компании, будем считать случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром μ .

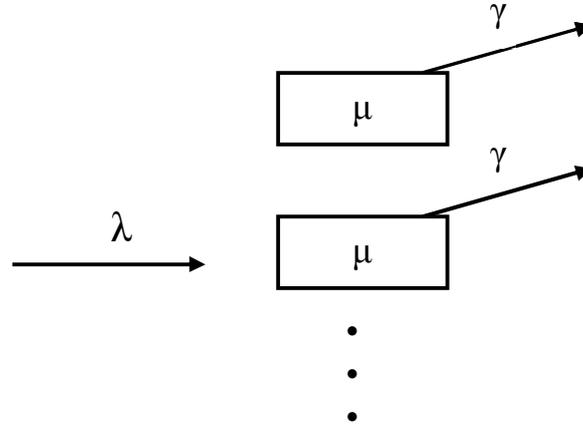


Рис. 1

Введем следующие обозначения:

$n(t)$ – суммарное число требований на выплату страховых сумм за интервал времени длины t , $i(t)$ – число занятых приборов в СМО (число действующих договоров страхования в компании) в момент времени t ;

$P(i, n, t) = P\{i(t)=i, n(t)=n\}$ – вероятность того, что в момент времени t число занятых приборов в СМО равно i и за интервал времени длины t поступило n требований на выплату страховых сумм.

Используя Δt -метод, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей. Запишем сначала допредельные равенства:

$$P(i, n, t + \Delta t) = P(i, n, t)(1 - \lambda\Delta t - i\mu\Delta t - i\gamma\Delta t) + P(i - 1, n, t)\lambda\Delta t + P(i + 1, n, t)(i + 1)\mu\Delta t + P(i, n - 1, t)i\gamma\Delta t + o(\Delta t),$$

перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial P(i, n, t)}{\partial t} = -P(i, n, t)(\lambda + i\mu + i\gamma) + P(i - 1, n, t)\lambda + P(i + 1, n, t)(i + 1)\mu + P(i, n - 1, t)i\gamma. \quad (1)$$

Для решения системы (1) определим производящую функцию

$$G(x, z, t) = \sum_{i, n=0}^{\infty} x^i z^n P(i, n, t),$$

для которой выполнены следующие свойства [4]:

$$\frac{\partial G(x, z, t)}{\partial x} = \sum_{i, n=0}^{\infty} i x^{i-1} z^n P(i, n, t),$$

$$G(x, z, 0) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}(x - 1)\right\}.$$

Тогда из системы (1) можно получить уравнение для производящей функции в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x,z,t)}{\partial t} = & -\lambda G(x,z,t) - (\mu + \gamma)x \frac{\partial G(x,z,t)}{\partial x} + \mu \frac{\partial G(x,z,t)}{\partial x} + \\ & + \gamma x z \frac{\partial G(x,z,t)}{\partial x} + \lambda x G(x,z,t). \end{aligned}$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{\partial G(x,z,t)}{\partial t} + [(\mu + \gamma - \gamma z)x - \mu] \frac{\partial G(x,z,t)}{\partial x} = \lambda(x-1)G(x,z,t). \quad (2)$$

Предположим, что решение уравнения (2) имеет вид

$$G(x,z,t) = \exp\{g(x,z,t)\}, \quad (3)$$

тогда после подстановки предполагаемого решения (3) в (2) получим уравнение

$$\frac{\partial g(x,z,t)}{\partial t} + [(\mu + \gamma - \gamma z)x - \mu] \frac{\partial g(x,z,t)}{\partial x} = \lambda(x-1) \quad (4)$$

с начальными условиями $g(x,z,0) = \frac{\lambda}{\mu}(x-1)$.

Для полученного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка система обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик имеет вид [5]

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{(\mu + \gamma - \gamma z)x - \mu} = \frac{dg}{\lambda(x-1)}.$$

Для этой системы найдем два первых интеграла. Один из них найдем из уравнения

$$(\mu + \gamma - \gamma z)dt = \frac{dx}{x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z}},$$

отсюда

$$\ln C_1 + (\mu + \gamma - \gamma z)t = \ln \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right),$$

и тогда

$$C_1 = \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right) e^{-(\mu + \gamma - \gamma z)t}. \quad (5)$$

Другой первый интеграл находим из уравнения

$$dg = \frac{\lambda(x-1)}{(\mu + \gamma - \gamma z)x - \mu} dx, \quad (6)$$

откуда получаем

$$g = C_2 + \frac{\lambda}{\mu + \gamma - \gamma z} \left\{ x + \frac{\gamma(z-1)}{\mu + \gamma - \gamma z} \ln \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right) \right\}.$$

Введем произвольную дифференцируемую функцию $\varphi(C_1) = C_2$, тогда общее решение уравнения (6) с учетом (5) будет иметь вид

$$g(x, z, t) = \varphi \left\{ \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right) e^{-(\mu + \gamma - \gamma z)t} \right\} + \\ + \frac{\lambda}{\mu + \gamma - \gamma z} x + \frac{\lambda \gamma (z - 1)}{(\mu + \gamma - \gamma z)^2} \ln \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right). \quad (7)$$

Найдем вид функции $\varphi(\cdot)$, используя начальное условие

$$g(x, z, 0) = (x - 1) \frac{\lambda}{\mu} = \varphi \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right) + \\ + \frac{\lambda}{\mu + \gamma - \gamma z} x + \frac{\lambda \gamma (z - 1)}{(\mu + \gamma - \gamma z)^2} \ln \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right).$$

Отсюда

$$\varphi \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right) = (x - 1) \frac{\lambda}{\mu} - \\ - \frac{\lambda}{\mu + \gamma - \gamma z} x - \frac{\lambda \gamma (z - 1)}{(\mu + \gamma - \gamma z)^2} \ln \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right).$$

Выполним замену переменных $x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} = y$, тогда

$x = y + \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z}$, и значит, можем записать:

$$\varphi(y) = \left(y + \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} - 1 \right) \frac{\lambda}{\mu} - \\ - \frac{\lambda}{\mu + \gamma - \gamma z} \left(y + \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right) - \frac{\lambda \gamma (z - 1)}{(\mu + \gamma - \gamma z)^2} \ln y.$$

После несложных преобразований получим

$$\varphi(y) = - \frac{\lambda \gamma (z - 1)}{\mu(\mu + \gamma - \gamma z)} y + \frac{\lambda \gamma (z - 1)}{\mu(\mu + \gamma - \gamma z)} - \\ - \frac{\lambda \mu}{(\mu + \gamma - \gamma z)^2} - \frac{\lambda \gamma (z - 1)}{(\mu + \gamma - \gamma z)^2} \ln y.$$

Таким образом, запишем окончательный вид функции:

$$\varphi \left\{ \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right) e^{-(\mu + \gamma - \gamma z)t} \right\} = - \frac{\lambda \gamma (z - 1)}{\mu(\mu + \gamma - \gamma z)} \left(x - \frac{\mu}{\mu + \gamma - \gamma z} \right) e^{-(\mu + \gamma - \gamma z)t} + \\ + \frac{\lambda \gamma (z - 1)}{\mu(\mu + \gamma - \gamma z)} - \frac{\lambda \mu}{(\mu + \gamma - \gamma z)^2} -$$

$$-\frac{\lambda\gamma(z-1)}{(\mu+\gamma-\gamma z)^2} \ln\left(x - \frac{\mu}{\mu+\gamma-\gamma z}\right) + \frac{\lambda\gamma(z-1)}{\mu+\gamma-\gamma z} t. \quad (8)$$

Используя (8), запишем вид функции $g(x, z, t)$:

$$g(x, z, t) = -\frac{\lambda\gamma(z-1)}{\mu(\mu+\gamma-\gamma z)} \left(x - \frac{\mu}{\mu+\gamma-\gamma z}\right) e^{-(\mu+\gamma-\gamma z)t} + \\ + \frac{\lambda\gamma(z-1)}{\mu(\mu+\gamma-\gamma z)} - \frac{\lambda\mu}{(\mu+\gamma-\gamma z)^2} + \frac{\lambda\gamma(z-1)}{\mu+\gamma-\gamma z} t + \frac{\lambda}{\mu+\gamma-\gamma z} x. \quad (9)$$

Следовательно, искомая производящая функция $G(x, z, t)$ имеет вид

$$G(x, z, t) = \exp\left\{-\frac{\lambda\gamma(z-1)}{\mu(\mu+\gamma-\gamma z)} \left(x - \frac{\mu}{\mu+\gamma-\gamma z}\right) e^{-(\mu+\gamma-\gamma z)t} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda\gamma(z-1)}{\mu(\mu+\gamma-\gamma z)} - \frac{\lambda\mu}{(\mu+\gamma-\gamma z)^2} + \frac{\lambda\gamma(z-1)}{\mu+\gamma-\gamma z} t + \frac{\lambda}{\mu+\gamma-\gamma z} x\right\}. \quad (10)$$

Теперь можем записать производящую функцию числа $n(t)$ требований на страховые выплаты, положив в (10) переменную $x = 1$. Таким образом, произведя некоторые несложные выкладки, имеем

$$G(z, t) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\gamma(z-1)}{(\mu+\gamma-\gamma z)}\right)^2 [1 - e^{-(\mu+\gamma-\gamma z)t}] + \frac{\lambda\gamma(z-1)}{(\mu+\gamma-\gamma z)} t\right\}. \quad (11)$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию числа $n(t)$.

Так как $M\{z^{n(t)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n, t) = G(z, t)$, то $\left.\frac{\partial G(z, t)}{\partial z}\right|_{z=1} = M\{n(t)\}$. Тогда

получим

$$M\{n(t)\} = \frac{\lambda}{\mu} \gamma t. \quad (12)$$

Для дисперсии запишем расчетную формулу $D\{n(t)\} = M\{n^2(t)\} - M^2\{n(t)\}$. С другой стороны,

$$\frac{\partial^2 G(z, t)}{\partial z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) z^n P(n, t),$$

тогда $\left.\frac{\partial^2 G(z, t)}{\partial z^2}\right|_{z=1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) P(n, t) = M\{n^2(t)\} - M\{n(t)\}$ и, следовательно,

дисперсию можно посчитать по формуле

$$D\{n(t)\} = \left.\frac{\partial^2 G(z, t)}{\partial z^2}\right|_{z=1} + M\{n(t)\} - M^2\{n(t)\}. \quad (13)$$

Так как $\left. \frac{\partial^2 G(z, t)}{\partial z^2} \right|_{z=1} = 2 \frac{\lambda \gamma^2}{\mu^2} t - 2 \frac{\lambda \gamma^2}{\mu^3} (1 - e^{-\mu t}) + \left(\frac{\lambda \gamma}{\mu} t \right)^2$ и все остальные

величины из (12) нам известны, то можем записать дисперсию числа требований на страховые выплаты:

$$D\{n(t)\} = \frac{\lambda \gamma}{\mu} \left(1 + 2 \frac{\gamma}{\mu} \right) t - 2 \frac{\lambda \gamma^2}{\mu^3} (1 - e^{-\mu t}). \quad (14)$$

Таким образом, в результате исследования модели получили формулу (11) для производящей функции числа требований на страховые выплаты, а также математическое ожидание и дисперсию числа требований на страховые выплаты, определяемые формулами (12) и (14).

Литература

1. Ахмедова Д. Д., Терпугов А. Ф. Математическая модель страховой компании с учетом расходов на рекламу // Известия вузов. Физика. – №1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. – С. 25–29.
2. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 180 с.
3. Даммер Д. Д. Характеристики капитала страховой компании с учетом инвестиций в безрисковые активы и при наличии неявной рекламы // Материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции г. Анжеро-Судженск (15–16 апреля 2010 г). – Томск. Изд-во Том. ун-та, – 2010. – С. 23–27.
4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.
5. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВХОДЯЩИМ ММР-ПОТОКОМ И НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ ПРИБОРОВ

А. А. Назаров, И. А. Семенова

Томский государственный университет

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковски модулированный пуассоновский поток заявок (ММР-поток), управляемый эргодической цепью Маркова $k(t)$, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик Q и набором неотрицательных величин $\lambda_k \geq 0$. Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют экспоненциальное распределение с параметром μ . Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание, заявка покидает систему (рис. 1).

Пусть система функционирует в стационарном режиме. Обозначим $i(t)$ – число приборов, занятых в момент времени t ; $k(t)$ – цепь Маркова, управляющая ММР-поток, тогда стационарное распределение вероятностей значений процесса $\{k(t), i(t)\}$ обозначим

$$P(k, i) = P\{k(t) = k, i(t) = i\}.$$

Для рассматриваемой системы двумерный случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$ является Марковским, тогда для его распределения вероятностей $P(k, i)$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, i, t)}{\partial t} = & (-\lambda_k - i\mu + q_{kk})P(k, i, t) + \lambda_k P(k, i-1, t) + \\ & + (i+1)\mu P(k, i+1, t) + \sum_{v \neq k} P(v, i, t) q_{vk}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для стационарного распределения $P(k, i)$ систему (1) запишем в виде

$$(-\lambda_k - i\mu)P(k, i) + \lambda_k P(k, i-1) + (i+1)\mu P(k, i+1) + \sum_v P(v, i) q_{vk} = 0. \quad (2)$$

Начальные условия определим в виде

$$P(k, i, 0) = P(k, 0, t) = R(k),$$

где $R(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$.

Составим систему уравнений определяющих характеристические функции:

$$H(k, u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(k, i) = M\{e^{ju i(t)} | k(t) = k\},$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Систему уравнений для характеристических функций запишем в матричном виде

$$\begin{aligned} j\mu(e^{-ju} - 1) \frac{\partial H(u)}{\partial u} = & H(u) \{Q + (e^{ju} - 1)\Lambda\}, \\ H(0) = & R, \end{aligned} \quad (3)$$

где $H(u)$ вектор-строка:

$$H(u) = \{H(1, u), H(2, u), \dots\},$$

Λ – диагональная матрица с элементами λ_k по главной диагонали, Q – матрица инфинитезимальных характеристик q_{vk} .

Метод моментов

Из свойств характеристических функций имеем

$$\left. \frac{\partial H(k, u)}{\partial u} \right|_{u=0} = j m_1(k), \quad \left. \frac{\partial^2 H(u)}{\partial u^2} \right|_{u=0} = j^2 m_2(k), \quad \left. \frac{\partial^3 H(u)}{\partial u^3} \right|_{u=0} = j^3 m_3(k).$$

Используя обозначения $\bar{m}_1 = [m_1(1), m_1(2), \dots]$, $\bar{m}_2 = [m_2(1), m_2(2), \dots]$ и $\bar{m}_3 = [m_3(1), m_3(2), \dots]$ – вектор-строки, можно записать, что $\bar{m}_1 E = \sum_k m_1(k) = m_1$, $\bar{m}_2 E = \sum_k m_2(k) = m_2$, $\bar{m}_3 E = \sum_k m_3(k) = m_3$, где m_1 – мате-

матическое ожидание числа заявок, находящихся в блоке обслуживания, которое имеет вид

$$m_1 = \frac{1}{\mu} R \Lambda E. \quad (4)$$

Равенство (3) будем называть моментом первого порядка. m_2 – второй момент числа заявок, находящихся на обслуживании:

$$m_2 = \frac{1}{2\mu} R \Lambda \{(\mu I - Q)^{-1} (2\Lambda - \mu I) E + E\}; \quad (5)$$

m_3 – момент третьего порядка числа заявок, находящихся на обслуживании

$$m_3 = \bar{m}_3 E = \frac{1}{3\mu} \{ \bar{m}_2 (\mu I + 3\Lambda) E + \bar{m}_1 (3\Lambda - \mu I) E + R \Lambda E \}. \quad (6)$$

Метод асимптотического анализа

Применяя различные асимптотические методы, можно получить удовлетворительное для практики приближенное решение задачи при весьма широких предположениях относительно входа и обслуживания даже при отсутствии явного вида распределений характеристик. Для дальнейшего исследования системы с входящим ММР-потокм воспользуемся уравнением (3), которое будем решать методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания, то есть $\mu \rightarrow 0$.

Для нахождения асимптотики первого порядка обозначим $\mu = \varepsilon$ и в уравнении (3) выполним замены:

$$u = \varepsilon w, \quad H(u) = F_1(w, \varepsilon),$$

для $F_1(w, \varepsilon)$ получим уравнение

$$j(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial F_1(w, \varepsilon)}{\partial w} = F_1(w, \varepsilon) \{ Q + (e^{j\varepsilon w} - 1) \Lambda \}. \quad (7)$$

Теорема 1. Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $F_1(w)$ решения $F_1(w, \varepsilon)$ уравнения (7) имеет вид

$$F_1(w) = R \cdot \exp\{jw\kappa_1\},$$

где R является решением системы

$$\begin{cases} RQ = 0, \\ RE = 1, \end{cases}$$

а величина κ_1

$$\kappa_1 = R \Lambda E. \quad (8)$$

Доказательство.

В уравнении (7) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$F_1(w)Q = 0,$$

решение $F_1(w)$ которых запишем в виде произведения

$$F_1(w) = R \Phi_1(w) = R \cdot \exp\{jw\kappa_1\}. \quad (9)$$

Сложив все уравнения системы (7) и выполнив предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что для $F_1(w)$ выполняется равенство

$$w \frac{\partial F_1(w)}{\partial w} E = F_1(w) jw \Lambda E,$$

подставив в которое произведение (9), получим уравнение, определяющее вид величины κ_1 :

$$\kappa_1 = R \Lambda E,$$

которое совпадает с равенством (8).

Теорема доказана.

Учитывая (9), запишем равенство для функции $H(u)$:

$$H(u) = F_1(w, \varepsilon) \approx F_1(w) = R \cdot \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu}\right\},$$

поэтому для характеристической функции стационарного процесса $i(t)$ запишем

$$H(u)E = \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu}\right\}.$$

Функцию

$$h_1(u) = \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu}\right\}$$

будем называть асимптотикой первого порядка характеристической функции $H(u)$ числа заявок $i(t)$ в блоке обслуживания.

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (3) выполним замену $H(u) = H_2(u) \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu}\right\}$, тогда для вектор-функции $H_2(u)$ получим уравнение

$$ju(e^{-ju} - 1) \frac{\partial H_2(u)}{\partial u} = H_2(u) \{Q + (e^{ju} - 1)\Lambda + \kappa_1(e^{-ju} - 1)I\}. \quad (10)$$

Теперь, в системе (10) обозначим $\mu = \varepsilon^2$, и выполним замены:

$$u = \varepsilon w, \quad H_2(u) = F_2(w, \varepsilon).$$

Получим задачу

$$j\varepsilon(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} = F_2(w, \varepsilon) \{Q + (e^{j\varepsilon w} - 1)\Lambda + \kappa_1(e^{-j\varepsilon w} - 1)I\}. \quad (11)$$

Теорема 2. Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $F_2(w)$ решения $F_2(w, \varepsilon)$ уравнения (11) имеет вид

$$F_2(w) = R \cdot \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2\right\},$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = f_1(\Lambda - \kappa_1 I)E + \frac{1}{2}R(\Lambda + \kappa_1 I)E, \quad (12)$$

в котором вектор f_1 является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$f_1 Q + R(\Lambda - \kappa_1 I) = 0. \quad (13)$$

Доказательство теоремы выполним в три этапа.

Этап 1. В задаче (11) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим уравнение

$$F_2(w)Q = 0,$$

решение $F_2(w)$ которого, запишем в виде произведения

$$F_2(w) = R\Phi_2(w) = R \cdot \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2\right\}, \quad (14)$$

где вектор R определен в теореме 1, а значение величины κ_2 определим ниже.

Этап 2. Решение $F_2(w, \varepsilon)$ системы (11) запишем в виде разложения:

$$F_2(w, \varepsilon) = \{R + j\varepsilon w f_1\} \Phi_2(w) + O(\varepsilon^2) = \{R + j\varepsilon w f_1\} \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2\right\} + O(\varepsilon^2), \quad (15)$$

где выполняется условие $f_1 Q = 0$. Разложение (15) подставим в уравнение (11), получим равенство

$$f_1 Q + R(\Lambda - \kappa_1 I) = 0. \quad (16)$$

Условием существования решения f_1 системы (16) является выполнение равенства

$$R(\Lambda - \kappa_1 I)E = 0.$$

Этап 3. Для нахождения значения величины κ_2 сложим все уравнения системы (11), домножив это равенство справа на единичный вектор E , получим

$$j\varepsilon(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} E = F_2(w, \varepsilon) \left\{ (e^{j\varepsilon w} - 1)\Lambda + \kappa_1(e^{-j\varepsilon w} - 1)I \right\} E.$$

Раскладывая в ряд экспоненты в этом равенстве и подставляя сюда разложение (15), получим следующее соотношение:

$$\kappa_2 = f_1(\Lambda - \kappa_1 I)E + \frac{1}{2} R(\Lambda + \kappa_1 I)E,$$

которое совпадает с (12).

Теорема доказана.

Учитывая (14), запишем равенство для функции $H_2(u)$:

$$H_2(u) = F_2(w, \varepsilon) \approx F_2(w) = R \cdot \exp\left\{\frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu}\right\},$$

откуда для $H(u)$ запишем

$$H(u) = H_2(u) \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu}\right\} = R \cdot \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu}\right\},$$

поэтому для характеристической функции стационарного процесса $i(t)$ запишем

$$H(u)E = \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu}\right\}.$$

Определение. Функцию

$$h_2(u) = \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu}\right\}$$

будем называть асимптотикой второго порядка характеристической функции $H(u)$ числа заявок $i(t)$ в блоке обслуживания.

Аналогичным образом для асимптотики третьего порядка была сформулирована и доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $F_3(w)$ решения $F_3(w, \varepsilon)$ уравнения*

$$j\varepsilon^2(e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial F_3(w, \varepsilon)}{\partial w} = F_3(w, \varepsilon) \{ Q + (e^{j\varepsilon w} - 1)\Lambda + (\kappa_1 + j\varepsilon w \kappa_2)(e^{-j\varepsilon w} - 1)I \}$$

имеет вид

$$F_3(w) = R \cdot \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \kappa_3 \right\},$$

где вектор R определен выше, а величина κ_3 определяется равенством

$$\kappa_3 = f_1[\Lambda + (\kappa_1 - 2\kappa_2)I]E + f_2(\Lambda - \kappa_1 I)E + \frac{1}{3}R[\Lambda - (\kappa_1 - 3\kappa_2)I],$$

в котором вектор f_1 определен в предыдущей теореме, а вектор f_2 определяется неоднородной системой линейных алгебраических уравнений

$$f_2 Q + 2f_1(\Lambda - \kappa_1 I) + R[\Lambda + (\kappa_1 - 2\kappa_2)I] = 0.$$

Определение. Функцию

$$h_3(u) = \exp \left\{ ju \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\mu} + \frac{(ju)^3}{6} \frac{\kappa_3}{\mu} \right\}$$

будем называть асимптотикой третьего порядка характеристической функции $H(u)$ числа заявок $i(t)$ в блоке обслуживания.

Таким образом, найдены моменты первого второго и третьего порядков, а также проведено исследование системы методом асимптотического анализа до третьего порядка.

Численная реализация позволит определить условие применимости асимптотического метода для анализа системы массового обслуживания с входящим ММР-поток и неограниченным числом обслуживающих приборов.

Литература

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.
2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 448 с.
3. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
4. Назаров А. А., Семенова И. А. Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №3 (12). – С. 85–96.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $\text{MAP}^{(2)}|\text{GI}_2|\infty$ МЕТОДОМ ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА

Е. С. Ронжина, И. А. Синякова

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Рассмотрим систему массового обслуживания с двумя блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. Пусть на вход системы обслуживания поступает MAP -поток сдвоенных заявок, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают две заявки. Будем считать, что MAP -поток определяется эргодической цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей Q – её инфинитезимальных характеристик $q_{k_1 k_2}$, набором неотрицательных величин $\lambda_k \geq 0$ и набором вероятностей $d_{k_1 k_2}$ для любых $k_1 \neq k_2$ [1].

Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, а другая, вторая, – во второй блок обслуживания и занимает любой из свободных приборов, на котором выполняется ее обслуживание. Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы и одинаково распределены для всех приборов соответствующего блока [2]. Пусть $B_1(x), B_2(x)$ – функции распределения времени обслуживания для первого и второго блоков соответственно.

Обозначим $i_1(t), i_2(t)$ – число приборов, занятых в момент времени t в первом и втором, соответственно, блоках обслуживания, а стационарное распределение вероятностей значений процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ обозначим

$$P(i_1, i_2) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\}.$$

Для рассматриваемой системы ни двумерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t)\}$ изменения во времени состояний системы, ни трехмерный случайный процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$ не являются марковскими.

Для исследования рассматриваемой системы $\text{MAP}^{(2)}|\text{GI}_2|\infty$ применим метод просеянного потока [1].

Предлагаемый метод позволяет проблеме исследования немарковской системы обслуживания с неограниченным числом приборов свести к задаче анализа нестационарного марковизируемого потока.

На оси времени t отметим моменты наступления событий этого потока. Выделим некоторый момент времени t_1 . Пусть $t_1 = 0$. Будем полагать, что заявки входящего потока, поступившие в систему в момент времени $t < t_1 = 0$, формируют события двумерного просеянного потока с вероятностями $S_1(t) = 1 - B_1(-t)$, $S_2(t) = 1 - B_2(-t)$, а с вероятностью $1 - S_1(t)$ и $1 - S_2(t)$ не рассматриваются.

Обозначим $\{n_1(t), n_2(t)\}$ – двумерный процесс, компоненты которого характеризуют число событий просеянных потоков, наступивших до момента времени t .

Если в некоторый начальный момент времени $t_0 < t_1$ система обслуживания свободна, то есть в ней нет обслуживаемых заявок, то для момента времени t_n выполняется равенство

$$i_1(t_1) = n_1(t_1), \quad i_2(t_1) = n_2(t_1),$$

то есть число $i_k(t_1)$ приборов, занятых в k -м блоке обслуживания в рассматриваемой системе обслуживания, равно числу $n_k(t_1)$ событий просеянного потока, наступивших до момента времени t_1 .

Для рассматриваемой системы трехмерный случайный процесс $\{k(t), n_1(t), n_2(t)\}$ является нестационарной двумерной цепью Маркова, для исследования которой естественно воспользоваться теорией марковских цепей. Здесь $k(t)$ – значения цепи Маркова, управляющей входящим МАР-потоком, а $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t .

Для распределения вероятностей

$$P(k, n_1, n_2, t) = P\{k(t) = k, n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2\}$$

запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, n_1, n_2, t)}{\partial t} = & P(k, n_1, n_2, t)(-\lambda_k + q_{kk}) + \{P(k, n_1 - 1, n_2 - 1, t)S_1(t)S_2(t) + \\ & + P(k, n_1 - 1, n_2, t)S_1(t)(1 - S_2(t)) + P(k, n_1, n_2 - 1, t)(1 - S_1(t))S_2(t) + \\ & + P(k, n_1, n_2, t)(1 - S_1(t))(1 - S_2(t))\}\lambda_k + \sum_{v \neq k} \{P(v, n_1, n_2, t)(1 - d_{vk}) + \\ & + [P(v, n_1 - 1, n_2 - 1, t)S_1(t)S_2(t) + P(v, n_1 - 1, n_2, t)S_1(t)(1 - S_2(t)) + \\ & + P(v, n_1, n_2 - 1, t)(1 - S_1(t))S_2(t) + P(v, n_1, n_2, t)(1 - S_1(t))(1 - S_2(t))\}d_{vk}. \end{aligned} \quad (1)$$

Начальное условие для решения $P(k, n_1, n_2, t)$ в момент времени t_0 определим в виде

$$P(k, n_1, n_2, t_0) = \begin{cases} R(k), & \text{если } n_1, n_2 = 0, \\ 0, & \text{если } n_1, n_2 > 0. \end{cases}$$

Обозначив

$$H(k, u, w, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{jun_1} e^{jwn_2} P(k, n_1, n_2, t) = R(k)M\{e^{jun_1} e^{jwn_2} | k(t) = k\},$$

из (1) для этих функций получим задачу Коши [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u, w, t)}{\partial t} = & \lambda_k [S_1(t)(e^{ju} - 1) + S_2(t)(e^{jw} - 1) + \\ & + (e^{ju} - 1)(e^{jw} - 1)S_1(t)S_2(t)] H(k, u, w, t) + \sum_v H(k, u, w, t) q_{vk} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_v H(v, u, w, t) \left\{ 1 + (e^{ju} - 1)S_1(t) + (e^{jw} - 1)S_2(t) + \right. \\
& \quad \left. + (e^{ju} - 1)(e^{jw} - 1)S_1(t)S_2(t)d_{vk} \right\} q_{vk}, \\
& \quad H(k, u, w, t_0) = R(k).
\end{aligned}$$

Эту систему запишем в матричной форме, обозначив вектор-строку $H(u, w, t) = \{H(1, u, w, t), H(2, u, w, t), \dots\}$,

и следующие матрицы:

Q – матрица инфинитезимальных характеристик $q_{k_1 k_2}$;

Λ – диагональная матрица с элементами λ_k по главной диагонали;

A – матрица из элементов $d_{k_1 k_2} q_{k_1 k_2}$;

$B = \Lambda + A$.

Тогда систему (2) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(u, w, t)}{\partial t} &= H(u, w, t) \left\{ Q + \left[(e^{ju} - 1)S_1(t) + (e^{jw} - 1)S_2(t) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (e^{ju} - 1)(e^{jw} - 1)S_1(t)S_2(t) \right] B \right\}, \\
H(u, w, t_0) &= R.
\end{aligned} \tag{2}$$

Моменты первого порядка

Продифференцируем уравнение (2) по u :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial H(u, w, t)}{\partial u} \right\} &= \frac{\partial H(u, w, t)}{\partial u} \left\{ Q + \left[(e^{ju} - 1)S_1(t) + (e^{jw} - 1)S_2(t) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (e^{ju} - 1)(e^{jw} - 1)S_1(t)S_2(t) \right] B \right\} + \\
& \quad + H(u, w, t) \left\{ j e^{ju} S_1(t) + (e^{jw} - 1) j e^{ju} S_1(t) S_2(t) \right\} B.
\end{aligned}$$

Подставляя $u = w = 0$ и обозначив

$$\left. \frac{\partial H(u, w, t)}{\partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ w=0}} = j m_1(t), \quad \left. \frac{\partial H(u, w, t)}{\partial w} \right|_{\substack{u=0 \\ w=0}} = j m_2(t),$$

получим систему для $m_1(t)$ следующего вида:

$$j \frac{\partial m_1(t)}{\partial t} = j m_1(t) Q + R B j S_1(t).$$

Суммируя все уравнения этой системы, запишем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m_1(t) E\} = m_1(t) Q E + S_1(t) R B E = S_1(t) R B E,$$

здесь $m_1(t)$ – среднее значение числа событий, наступивших в первом просеянном потоке до момента времени t .

Очевидно, что

$$m_1(t) E = \kappa_1 \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau,$$

а при $t = t_1 = 0$, $t_0 = -\infty$ среднее значение процесса $i_1(t)$ (числа занятых приборов в первом блоке) в стационарном режиме имеет вид

$$m_1 = \kappa_1 \int_{-\infty}^0 (1 - B_1(-z)) dz = \kappa_1 \int_0^{\infty} (1 - B_1(z)) dz = \kappa_1 b_1.$$

Аналогично для числа занятых приборов во втором блоке среднее значение процесса $i_2(t)$ в стационарном режиме имеет вид

$$m_2 = \kappa_1 \int_{-\infty}^0 (1 - B_2(-z)) dz = \kappa_1 \int_0^{\infty} (1 - B_2(z)) dz = \kappa_1 b_2.$$

Асимптотика первого порядка

Уравнение (2), определяющее характеристики рассматриваемой системы обслуживания, будем решать в асимптотическом условии растущего времени обслуживания, полагая, что среднее значение времени обслуживания в каждом блоке $b_1 \rightarrow \infty, b_2 \rightarrow \infty$.

Обозначим $b_1 = \frac{1}{\varepsilon}$, $b_2 = \frac{1}{\varepsilon}$ и в уравнении (2) выполним замены:

$$t\varepsilon = \tau, t_0\varepsilon = \tau_0, S_1(t) = S_1(\tau), S_2(t) = S_2(\tau), u = \varepsilon x, w = \varepsilon y, \\ H(u, w, t) = F_1(x, y, \tau, \varepsilon). \quad (3)$$

Для $F_1(x, y, \tau, \varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(x, y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = F_1(x, y, \tau, \varepsilon) \left\{ Q + \left[(e^{j\varepsilon x} - 1) S_1(\tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + (e^{j\varepsilon y} - 1) S_2(\tau) + (e^{j\varepsilon x} - 1)(e^{j\varepsilon y} - 1) S_1(\tau) S_2(\tau) \right] B \right\}. \quad (4)$$

Теорема. Предельное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) значение $F_1(x, y, \tau)$ решения $F_1(x, y, \tau, \varepsilon)$ уравнения (4) имеет вид

$$F_1(x, y, \tau) = R \exp \left\{ jx\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z) dz + jy\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_2(z) dz \right\}, \quad (5)$$

где величина κ_1 определена равенством

$$\kappa_1 = RBE. \quad (6)$$

Доказательство. В уравнении (4) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$F_1(x, y, \tau) Q = 0.$$

Поэтому ее решение имеет вид

$$F_1(x, y, \tau) = \Phi_1(x, y, \tau) R, \quad (7)$$

в котором скалярную функцию $\Phi_1(x, y, \tau)$ определим следующим образом.

Просуммируем все уравнения системы (4), тогда получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(x, y, \tau, \varepsilon)}{\partial t} E = \\ = F_1(x, y, \tau, \varepsilon) \left\{ (e^{j\varepsilon x} - 1) S_1(\tau) + (e^{j\varepsilon y} - 1) S_2(\tau) + (e^{j\varepsilon x} - 1)(e^{j\varepsilon y} - 1) S_1(\tau) S_2(\tau) \right\} BE.$$

Поделим левую и правую части этого равенства на ε и, полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что для $F_1(x, y, \tau)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial F_1(x, y, \tau)}{\partial \tau} E = F_1(x, y, \tau) \{jxS_1(\tau) + jyS_2(\tau)\} BE,$$

подставляя в которое (7) и учитывая (6) и то, что $RE = 1$, получим для функции $\Phi_1(x, y, \tau)$ линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial \Phi_1(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \Phi_1(x, y, \tau) \kappa_1 \{jxS_1(\tau) + jyS_2(\tau)\},$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_1(x, y, \tau) = \exp \left\{ jx\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z) dz + jy\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_2(z) dz \right\}.$$

Подставляя в (7), получим

$$F_1(x, y, \tau) = R \exp \left\{ jx\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z) dz + jy\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_2(z) dz \right\}.$$

В силу замен (3) и равенства (5) можно записать асимптотическое, при $\varepsilon \rightarrow 0$, приближенное равенство

$$\begin{aligned} H(u, w, t) = F_1(x, y, \tau, \varepsilon) &\approx F_1(x, y, \tau) = R \exp \left\{ jx\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z) dz + jy\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_2(z) dz \right\} = \\ &= R \exp \left\{ jx\kappa_1 \int_{t_0}^t S_1(z) dz + jy\kappa_1 \int_{t_0}^t S_2(z) dz \right\}, \end{aligned}$$

поэтому для характеристической функции величины $\{n_1(t), n_2(t)\}$ запишем

$$Me^{j(u+w)n_1(t)n_2(t)} = H(u, w, t)E = \exp \left\{ juk_1 \int_{t_0}^t S_1(z) dz + jwk_1 \int_{t_0}^t S_2(z) dz \right\}.$$

При $t = t_1 = 0$ для характеристической функции процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ в стационарном режиме получим

$$\begin{aligned} Me^{j(u+w)i_1(t)i_2(t)} &= H(u, w, 0)E = \exp \left\{ juk_1 \int_{-\infty}^0 (1 - B_1(z)) dz + jwk_1 \int_{-\infty}^0 (1 - B_2(z)) dz \right\} = \\ &= \exp \left\{ juk_1 \int_0^{\infty} (1 - B_1(z)) dz + jwk_1 \int_0^{\infty} (1 - B_2(-z)) dz \right\} = \exp \{juk_1 b_1 + jwk_1 b_2\}. \end{aligned}$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой первого порядка для системы обслуживания $MAR^{(2)}|GI_2|_{\infty}$ [4].

Литература

1. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

2. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.

3. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.

4. Ивановская И. А., Моисеева С. П. Исследование системы $MAR(2)|GI2|\infty$ методом просеянного потока // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: тезисы докладов Восьмой Российской конференции с международным участием. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – С. 33.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

СУБОРДИНАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

А. Т. Семенов

Новосибирский государственный университет экономики и управления

Концепция замены времени в случайном процессе была впервые предложена С. Бохнером в 1949 г. [7]. Дальнейшее развитие теория получила в его книге [8] и в работах других авторов [1–4, 11, 13], а затем была введена в финансовую литературу [9]. В настоящее время она является одним из стандартных инструментов финансового моделирования (см., например, [6, 10, 12]).

Пусть $\xi = \{\xi(t): t \geq 0\}$ – марковский случайный процесс и $T = \{T(t): t \geq 0\}$ – неотрицательный неубывающий процесс. Процесс

$$\zeta = \{\zeta(t) = \xi(T(t)): t \geq 0\},$$

полученный из марковского процесса ξ с помощью *случайной замены времени (субординации)* T , будет, вообще говоря, немарковским [1–2]. Он будет марковским, когда $T = \{T(t): t \geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями. Отметим, что если t рассматривать как реальное “*физическое*” время, то $T(t)$ можно интерпретировать как “*операционное*” время. Наиболее интересен частный случай, когда процесс ξ также имеет независимые приращения и не зависит от процесса T .

1. Пусть $\xi = \{\xi(t): t \geq 0\}$ – процесс Леви, т. е. однородный процесс с независимыми приращениями, $\xi(0) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать выборочные траектории процесса ξ непрерывными справа и имеющими пределы слева с вероятностью единица. Хорошо известно, что для таких процессов преобразование Лапласа допускает представление

$$E\{\exp(\lambda \xi(t))\} = \exp\{t \varphi_\xi(\lambda)\}, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0,$$

где *характеристический показатель* $\varphi_\xi(\lambda)$ выражается формулой Леви – Хинчина:

$$\varphi_\xi(\lambda) = a_\xi \lambda + \frac{\sigma_\xi^2}{2} \lambda^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x I_{(-1,1)}(x) \right) \nu_\xi(dx). \quad (1)$$

Отметим, что $\varphi_\xi(\lambda)$ определяется тремя характеристиками Леви – a_ξ , σ_ξ^2 , ν_ξ , и эта тройка, входящая в (1), определяется единственным образом. Здесь $a_\xi \in R$ и $\sigma_\xi^2 \geq 0$ – коэффициенты сноса и диффузии соответственно; $I_A(x)$ – индикатор множества A ; $\nu_\xi = \nu_\xi(dx)$ – неотрицательная мера Леви на R такая, что $\nu_\xi(\{0\}) = 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \min(1, x^2) \nu_\xi(dx) < \infty$. Если характеристика a_ξ “ответственна” за среднее движение процесса ξ , компонента σ_ξ^2 определяет дисперсию непрерывной составляющей процесса ξ , то мера Леви ν_ξ “ответственна” за поведение скачкообразной компоненты процесса ξ и показывает, как часто появляются скачки и какова их величина. Подчеркнем, что возможны как случай $\nu_\xi(R) < \infty$, так и случай $\nu_\xi(R) = \infty$.

1. Классическим примером непрерывного процесса Леви является стандартное броуновское движение (с $a_\xi = 0$, $\sigma_\xi^2 = 1$ и $\nu_\xi \equiv 0$).

2. Классическим примером разрывного процесса Леви является процесс Пуассона $\xi = \{\xi(t): t \geq 0\}$ с параметром $\mu > 0$. В этом случае $a_\xi = \mu$ ($= E\xi(t)/t$), $\sigma_\xi^2 = 0$ и мера Леви “сидит” в одной точке: $\nu_\xi(dx) = \mu I_{\{1\}}(dx)$. Представление (1) имеет здесь, очевидно, следующий вид:

$$\varphi_\xi(\lambda) = \mu(e^\lambda - 1).$$

3. Приведем другой пример скачкообразного процесса Леви с конечной мерой Леви $\nu_\xi(R) < \infty$. Пусть $N = \{N(t): t \geq 0\}$ – процесс Пуассона с параметром $\mu > 0$ и $\{\xi_i, i \geq 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (независимых также от N), распределение которых $P\{\xi_i \in dx\} = \nu_\xi(dx)/\mu$, где $\mu = \nu_\xi(R) < \infty$. Образует процесс $\xi = \{\xi(t): t \geq 0\}$, полагая

$$\xi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \xi(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i, \quad t > 0. \quad (2)$$

Прямой подсчет показывает, что $\varphi_\xi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\lambda x} - 1) \nu_\xi(dx)$, т. е. этот

процесс является процессом Леви. Процесс $\xi = \{\xi(t): t \geq 0\}$, образованный согласно (2), называется *обобщенным процессом Пуассона*. “Обычный” процесс Пуассона получается, если положить $\xi_i \equiv 1, i \geq 1$.

4. Процессом Леви с бесконечной мерой Леви $\nu_\xi(R) = \infty$ является, например, так называемый *гамма-процесс* $\xi = \{\xi(t): t \geq 0\}$, у которого $\xi(0) = 0$ и распределение вероятностей $P\{\xi(t) < x\}$ имеет плотность

$$p_t(x) = \frac{x^{t-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(t) \beta^t} I_{(0, \infty)}(x), \quad \beta > 0.$$

Рассмотрим преобразование Лапласа для вещественного $\lambda \leq 0$:

$$\begin{aligned}
E \left(e^{\lambda \xi(t)} \right) &= \int_0^{\infty} e^{\lambda x} p_t(x) dx = (1 - \beta\lambda)^{-t} = \exp \left\{ -t \ln(1 - \beta\lambda) \right\} = \\
&= \exp \left\{ -t \int_0^{\lambda} \frac{dy}{(1/\beta) - y} \right\} = \exp \left\{ -t \int_0^{\lambda} dy \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\beta} + yx} dx \right\} = \\
&= \exp \left\{ t \int_0^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 \right) \frac{e^{-x/\beta}}{x} dx \right\}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Аналитическое продолжение в комплексную область $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ предыдущего соотношения завершает вычисление преобразования Лапласа гамма-процесса $\xi = \{\xi(t): t \geq 0\}$.

Из (3) видно, что мера Леви $\nu_{\xi}(dx) = \frac{e^{-x/\beta}}{x} I_{(0, \infty)}(x) dx$. Ясно, что

здесь $\nu_{\xi}(0, \infty) = \infty$, но $\int_0^{\infty} \min(x^2, 1) \nu_{\xi}(dx) < \infty$.

2. При моделировании случайных процессов важное значение имеет вопрос об их представлении с помощью “простых”, “стандартных” процессов [как, например, в выражении (2)]. Одним из таких способов является субординация процессов Леви.

Процесс Леви называется *субординатором*, если его выборочные траектории не убывают с вероятностью единица. Согласно [5] (см. также [3]) процесс Леви $T = \{T(t): t \geq 0\}$ является субординатором тогда и только тогда, когда его характеристический показатель $\varphi_T(\lambda)$ допускает представление:

$$\varphi_T(\lambda) = a_T \lambda + \int_{0+}^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 \right) \nu_T(dx), \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \tag{4}$$

где $a_T \geq 0$ и $\nu_T = \nu_T(dx)$ – мера на $R_+ = [0, \infty)$, удовлетворяющая условиям $\nu_T(\{0\}) = 0$ и $\int_0^{\infty} \min(1, x) \nu_T(dx) < \infty$.

Процесс $\zeta = \{\zeta(t) = \xi(T(t)): t \geq 0\}$, полученный из процесса Леви $\xi(t)$ заменой реального времени t на субординатор $T(t)$, будем называть *субординированным процессом Леви*. Этот процесс является также процессом Леви (см. [3]) и для него преобразование Лапласа имеет вид

$$\begin{aligned}
E \left\{ \exp(\lambda \zeta(t)) \right\} &= E \left\{ E \left(e^{\lambda \xi(u)} / T(t) = u \right) \right\} = \\
&= \int_0^{\infty} e^{u \varphi_{\xi}(\lambda)} d_u P \{ T(t) < u \} = \exp \left\{ \varphi_T(\varphi_{\xi}(\lambda)) \right\}, \operatorname{Re} \lambda = 0.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойствами условного математического ожидания и независимостью процессов ξ и T . Следовательно, для характеристического показателя субординированного процесса Леви имеет место представление

$$\varphi_{\zeta}(\lambda) = \varphi_T(\varphi_{\xi}(\lambda)), \quad \text{Re } \lambda = 0. \quad (5)$$

Характеристическая тройка $(a_{\zeta}, \sigma_{\zeta}^2, \nu_{\zeta})$ процесса ζ выражается, в силу соотношения (5), через характеристические тройки $(a_{\xi}, \sigma_{\xi}^2, \nu_{\xi})$ и $(a_T, 0, \nu_T)$ процессов ξ и T соответственно следующим образом (см. также [3, 4]):

$$a_{\zeta} = a_{\xi} \cdot a_T, \quad \sigma_{\zeta}^2 = a_T \cdot \sigma_{\xi}^2, \quad \nu_{\zeta}(dx) = a_T \cdot \nu_{\xi}(dx) + \int_0^{\infty} F_{\xi}^*(u, x) \nu_T(du), \quad (6)$$

$$\text{где } F_{\xi}^*(u, x) = \begin{cases} -P\{\xi(u) \geq x\}, & x > 0, \\ P\{\xi(u) < x\}, & x < 0. \end{cases}$$

3. При построении вероятностных моделей распределения и эволюции финансовых индексов (обменных курсов валют, цен акций и т.п.) и в экономике важная роль отводится *устойчивым распределениям и процессам*. Значимость устойчивых распределений вызвана во многом тем, что они имеют более *тяжелые хвосты*, чем нормальные распределения. Отметим, что на бесконечности устойчивые распределения ведут себя так же, как распределения *Парето* с плотностью $p_{\alpha, b}(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} I_{(b, \infty)}(x)$, $\alpha > 0$, $b > 0$, которые широко применяются в финансах и экономике.

Оперировать, однако, с распределениями устойчивых процессов достаточно трудно, поскольку явный вид устойчивых плотностей известен только в трех случаях. Этими распределениями являются *нормальное* с плотностью $p(x) = \frac{1}{2\sigma \sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu)^2/4\sigma^2}$; *Коши* с плотностью

$$p(x) = \sigma/\pi ((x - \mu)^2 + \sigma^2)$$

и *одностороннее устойчивое* с показателем $\alpha = 1/2$ (называемое также *распределением Леви*) на (μ, ∞) с плотностью

$$p(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(x - \mu)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x - \mu)} \right).$$

В ряде случаев, тем не менее, можно указать, как получать устойчивые процессы, например из броуновского движения с помощью процедуры субординации.

1. Пусть $\xi(t)$ – броуновское движение (винеровский процесс) с $E\xi(t) = 0$, $E\xi^2(t) = 2t$ и $T(t)$ – положительный устойчивый процесс с показателем $\alpha = 1/2$, т. е. $\varphi_{\xi}(\lambda) = \lambda^2$ и $\varphi_T(\lambda) = \lambda^{1/2}$. Тогда $\zeta(t) = \xi(T(t))$ будет *процессом Коши*, так как в силу (5) $\varphi_{\zeta}(\lambda) = |\lambda|$.

2. Пусть $\xi(t)$ – винеровский процесс, $T(t)$ – положительный устойчивый процесс с показателем $\alpha/2$, т.е. $\varphi_{\xi}(\lambda) = \lambda^2$ и $\varphi_T(\lambda) = \lambda^{\alpha/2}$.

Тогда $\zeta(t) = \xi(T(t))$ – *симметричный α -устойчивый* процесс Леви, поскольку снова в силу (5) $\varphi_{\zeta}(\lambda) = |\lambda|^{\alpha}$. Процесс $\zeta(t)$ рассматривался в работе

[14] для описания поведения цен (так называемая модель Мандельброта – Тейлора).

3. Последний пример легко распространяется на произвольные устойчивые процессы $\xi(t)$ и $T(t)$ с показателями α и β соответственно. Здесь $\alpha \leq 2$, но так как величина $T(t)$ должна быть положительна, то необходимо $\beta < 1$. Имеем $\varphi_{\xi}(\lambda) = \lambda^{\alpha}$, $\varphi_T(\lambda) = \lambda^{\beta}$ и $\varphi_{\zeta}(\lambda) = \lambda^{\alpha\beta}$. Таким образом, α -устойчивый процесс, субординированный β -устойчивым процессом, дает $\alpha\beta$ -устойчивый процесс.

Литература

1. Волконский В. А. Случайная замена времени в строго марковских процессах // Теория вероятностей и ее применения. – 1958. – Т. 3, № 3. – С. 332–350.
2. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963.
3. Золотарев В.М. Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1958. – Т. 3, № 2. – С. 197–200.
4. Рогозин Б. А. О некоторых классах процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Т. 10, № 3. – С. 527–531.
5. Хилле Э., Р. Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962.
6. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. – Т. 1. Факты. Модели. – М.: ФАЗИС, 1998.
7. Bochner S. Diffusion equation and stochastic process // Proc. Nat. Acad. Sc. USA. – 1949. – Vol. 35. – P. 368–370
8. Bochner S. Harmonic analysis and the theory of probability. – Berkeley: University of California Press, 1955.
9. Clark P. K. A subordinated stochastic process model with fixed variance for speculative prices // Econometrica. – 1973. – Vol. 41. – P. 135–156.
10. Geman H. From measure changes to time changes in asset pricing // Journal of Banking and Finance. – 2005. – Vol. 29. – P. 2701–2722.
11. Itô K., McKean H.P. Diffusion processes and their sample paths. – Berlin: Springer-Verlag, 1965. [Русский пер: Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. – М.: Мир, 1968.]
12. Jeanblanc M., Yor M., Cherney M. Mathematical methods for financial markets. – Berlin: Springer Finance, 2009.
13. Lévy P. Processus stochastiques et mouvement brownien. – Paris: Gauthier-Villag, 1948. [Русский пер.: Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972.]
14. Mandelbrot B. B., Taylor H. H. On the distribution of stock price difference // Operations Research. – 1967. – Vol. 15, № 6. – P. 1057–1062.

АСПЕКТЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРАФИКА В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЯХ НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ

М. В. Семехина, А. М. Гудов

Кемеровский государственный университет

Постоянная потребность в развитии информационной инфраструктуры предприятий влечет за собой и рост требований к вычислительным сетям (ВС), как к транспортной платформе. Именно поэтому возникают задачи контроля и управления качеством ВС, использующие для своего решения методы анализа и моделирования.

В настоящей работе рассматривается имитационное моделирование ВС как стратегически важного информационного ресурса автоматизированного предприятия. Сети Петри (СП), как инструмент имитационного моделирования, хорошо зарекомендовали себя при исследовании сложных динамических систем с асинхронными, в общем случае, процессами, выполняющимися параллельно. Частным случаем таких систем являются ВС.

Представленный в работе имитационный подход к моделированию ВС на базе сетей Петри используется авторами в комплексе с аналитическими методами, для реализации системы моделирования компьютерных сетей. Система позволит оценить ВС на этапе ее проектирования или модернизации, а также будет полезна для оценки эффективности уже функционирующих сетей и выработки рекомендаций для их оптимизации. Сочетание различных методов при этом позволяет оптимальным образом решать широкий спектр задач моделирования. Для анализа качества работы ВС чаще всего используют следующие основные критерии [1, 3]:

- пропускная способность (емкость);
- скорость;
- надежность.

Для имитационного моделирования используются иерархические раскрашенные СП с временным механизмом [2, 4], где цвет (тип меток) соответствует типу трафика. Время в модели принимается дискретным и измеряется тактами.

Представление основных устройств сети

Функционально каждое сетевое устройство может выступать в нескольких «ролях»: передатчика, приемника или генератора трафика. Элементарную сеть Петри, выполняющую одну из перечисленных функций, будем называть ролевым функционалом. Это понятие вводится для удобства моделирования сетевых устройств, каждое из которых может выступать в одной или нескольких из перечисленных ролей. При таком подходе модель любого сетевого устройства строится из таких ролевых функционалов с помощью операций алгебры сетей Петри.

Формально определение ролевого функционала для нераскрашенной СП можно представить следующим образом:

$$F: \{m(p^{in}_1), \dots, m(p^{in}_n)\} \rightarrow \{m'(p^{in}_1), \dots, m'(p^{in}_n); m''(p^{out}_1), \dots, m''(p^{out}_s)\},$$

где $p^{in}_1, \dots, p^{in}_n$ – входные позиции F ; $p^{out}_1, \dots, p^{out}_s$ – выходные позиции F ; $m(p)$ – количество меток, входящих в позицию p извне; $m'(p)$ – количество меток, которые остаются в позиции p после одного срабатывания всех разрешенных переходов в F ; $m''(p)$ – количество меток, выходящих из позиции p за пределы F после одного срабатывания всех разрешенных переходов в F .

Основные ролевые функционалы представлены на рис. 1.

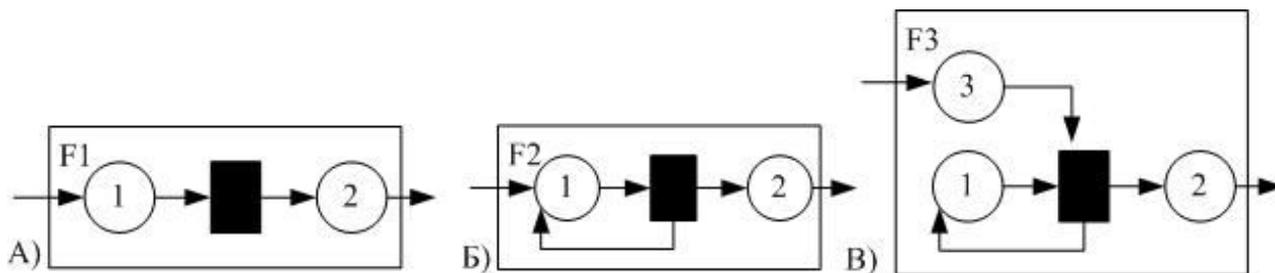


Рис. 1. Ролевые функционалы: а – приемник/передатчик трафика; б – независимый генератор трафика; в – зависимый генератор трафика

Функционал – приемник/передатчик трафика (рис. 1, а): элементарная сеть Петри, на основе которой строятся все остальные функционалы. Трафик поступает в позицию 1 и передается в позицию 2 через переход с задержкой обслуживания: $F(n, 0) = (0, n)$, т.е. при входе в позицию 1 n меток и после срабатывания t во входной позиции останется 0 сообщений, а в выходной позиции 2 появится n меток.

Функционал – генератор трафика, независимый вариант (рис. 1, б): момент поступления новых меток в позицию 2 зависит только от временной задержки перехода: $F(n, 0) = (n, n)$; т.е. при входе в позицию p_1 n меток и после срабатывания t_1 во входной позиции опять будет n сообщений, а в выходной позиции появятся n меток.

Функционал – генератор трафика, зависимый вариант (рис. 1, в): момент поступления новых меток в позицию 2 зависит от временной задержки перехода и от наличия в позиции 3 метки: $F(n, 0, m) = (n, 0, m+n)$, однако если для позиций 3 и 2 является разрешенным трафик только типа А, для позиции 1 – соответственно только трафик типа Б, то, с учетом этих наложенных ограничений $F(n, 0, m) = (n, 0, m)$.

Операции с сетями Петри

Для целей моделирования ВС используются (по аналогии с алгеброй сетей Петри, порождающей класс регулярных сетей [2,4]), следующие операции над элементами сетей A_i : позициями p_j , переходами t_k , дугами d_l ($i, j, k, l \in Z$): « \sim » (отождествление позиций), « \leftarrow » (связывание позиций – добавление дуги), « $! \rightarrow$ » (исключение дуги), « $\&$ » (объединение СП), « $\%$ » (расщепление СП).

Построение моделей

Построим СП для рабочей станции с одним сетевым интерфейсом. Пусть рассматриваемый сетевой узел принимает сообщения-запросы, обрабатывает их и отправляет в сеть сообщения-ответы. Узел является приемником трафика типа α и зависимым от меток типа α генератором трафика типа β (рис. 2,а). Получим сеть D путем связывания сети B и сети C' : $D=p_1(B) \rightarrow p_3(C')$.

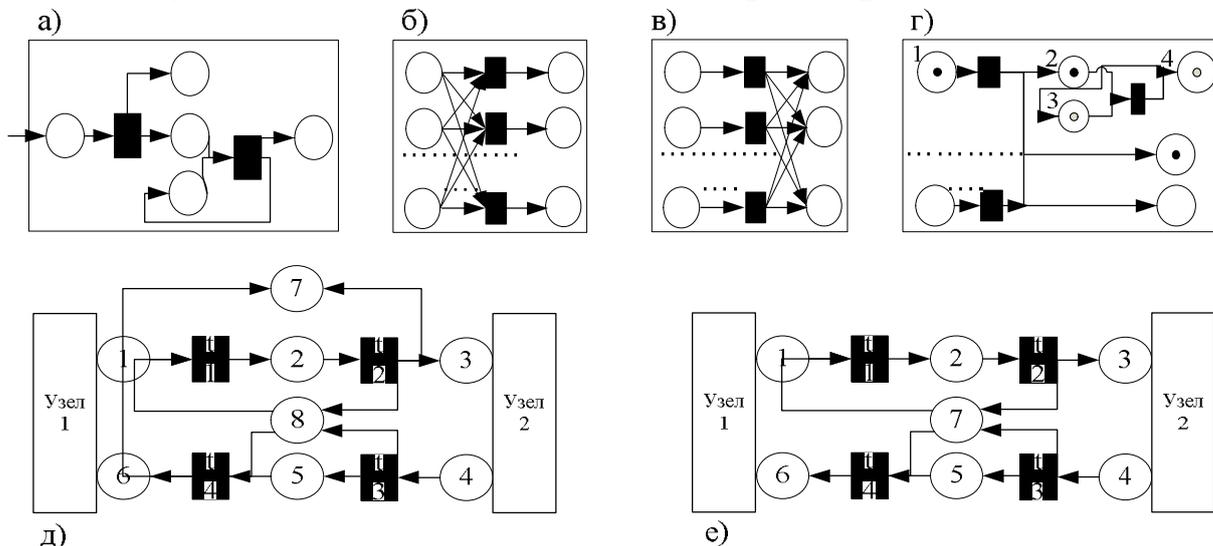


Рис. 2. Модели сетевых устройств: а – рабочая станция; б – концентратор; в – коммутатор-мост; г – маршрутизатор; д – полудуплексный канал связи; е – дуплексный канал связи

Формально построение устройства с использованием ролевых функционалов и операций между ними показан на примере полудуплексного канала передачи данных в ВС (рис. 2, д):

Прямой алгоритм построения такой сети следующий:

1. $V_1=B(t/t_1^0)$.
2. $V_2=A(p_1/p_2, p_2/p_3, t/t_2)$.
3. $V_3=B(p_1/p_8, t/t_1^0)$.
4. $V_4=B(p_1/p_2, p_2/p_8, t/t_2)$.
5. $V_5=B(p_1/p_2, p_2/p_7, t/t_2)$.
6. $V^'=p_2(V_1) \sim p_2(V_2)$.
7. $V^{''}=(t_1^0(V^') \sim t_1^0(V_3); p_2(V^') \sim p_2(V_3))$.
8. $V^{'''}=(t_2(V^{''}) \sim t_2(V_4); p_2(V^{''}) \sim p_2(V_4); p_8(V^{''}) \sim p_8(V_4))$.
9. $V=(p_2(V^{'''}) \sim p_2(V_5); t_2(V^{'''}) \sim t_2(V_5))$.
10. $W_1=B(p_1/p_4, p_2/p_5, t/t_4^0)$.
11. $W_2=A(p_1/p_5, p_2/p_6, t/t_2)$.
12. $W_3=B(p_1/p_8, t/t_4^0)$.
13. $W_4=B(p_1/p_5, p_2/p_8, t/t_3)$.
14. $W_5=B(p_1/p_5, p_2/p_7, t/t_3)$.
15. $W^'=p_5(W_1) \sim p_5(W_2)$.
16. $W^{''}=(t_4^0(W^') \sim t_4^0(W_3); p_5(W^') \sim p_5(W_3))$.
17. $W^{'''}=(t_3(W^{''}) \sim t_3(W_4); (p_5(W^{''}) \sim p_5(W_4); p_8(W^{''}) \sim p_8(W_4))$.
18. $W=(p_5(W^{'''}) \sim p_5(W_5); t_3(W^{'''}) \sim t_3(W_5))$.
19. $VW=(p_8(V) \sim p_8(W); p_7(V) \sim p_7(W))$.

Фрагмент ЛВС, построенный на основе предложенной модели для имитационного моделирования, изображен на рис. 3.

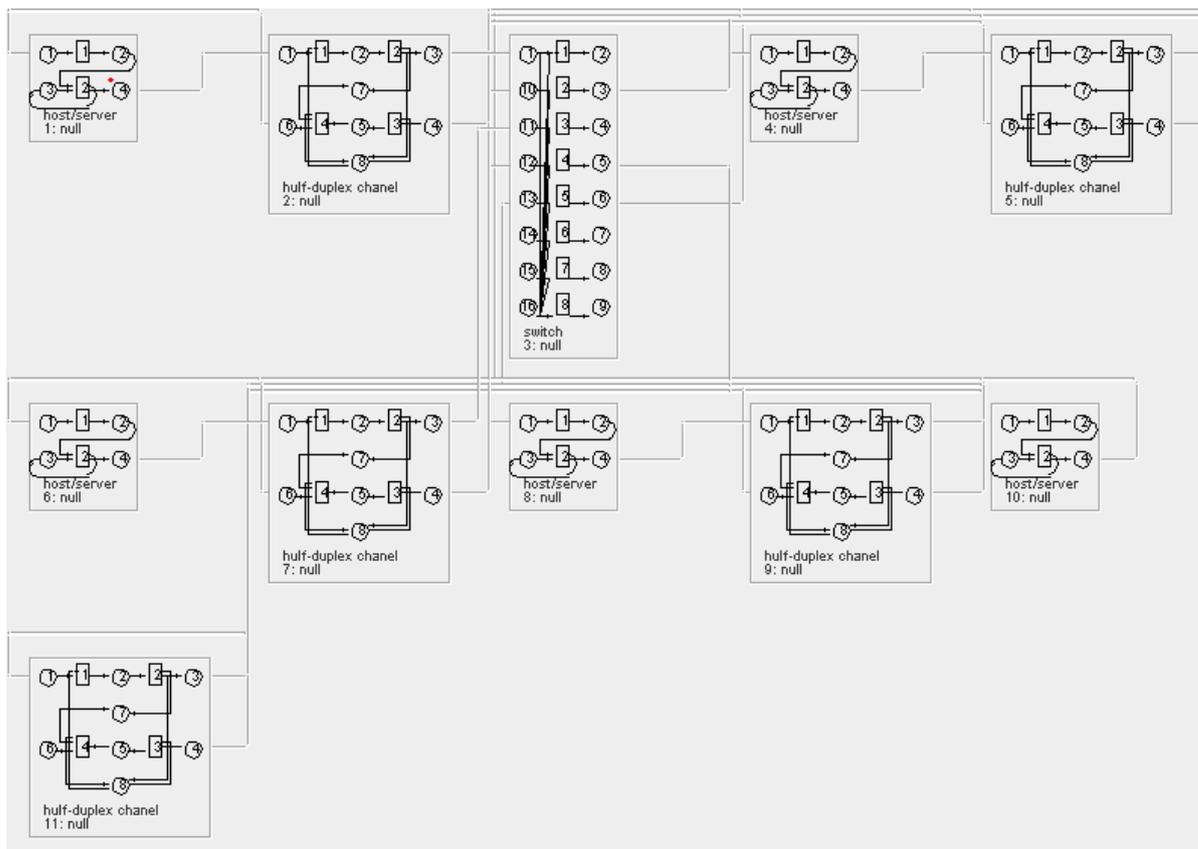


Рис 3. Пример модели ВС

Использование модели

В настоящее время проводится апробация предложенной модели, произведены тестовые расчеты на модели ЛВС из 5 рабочих станций и коммутатора типа мост (устройство №3). Приведены средние показатели по тройке имитационных экспериментов для двух вариантов запуска: в первом варианте время работы модели T выбрано 100 тактов (более грубые результаты), во втором – 1000 тактов (таблица), наглядная интерпретация результатов (рис. 4) позволяет предварительно оценить сходимость результатов. На текущем этапе работы проводятся исследования получаемых данных.

Результаты тестовых расчетов

Номер сетевого узла		1	2	3	4	5	6
Средний размер очереди сообщений в узле	$T=100$	0,0224	2,171	6,0184	0,0723	0,3601	0,8984
	$T=1000$	0,012	2,0284	6,849	0,0682	0,2001	0,723
Среднее время обработки сообщения в узле	$T=100$	0,3657	1,8791	2,6733	0,0969	0,1004	2,1321
	$T=1000$	0,2041	1,9789	2,5309	0,1144	0,1702	1,8802

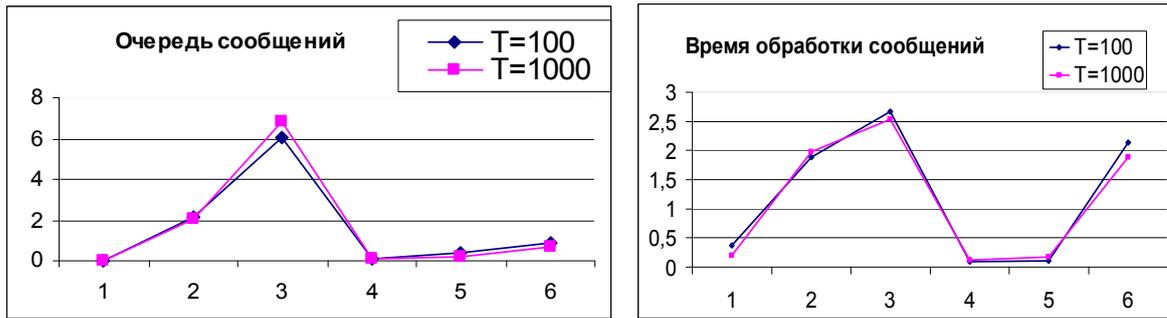


Рис. 4. Результаты тестовых расчетов

Рассмотренный подход реализуется в программном комплексе СИ-МАКС, который используется для анализа топологии и связностей корпоративной сети.

Литература

1. Вишнеvский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 114 с.
2. Котов В. Е. Сети Петри – М.: Наука, 1984. – 157 с.
3. Олифер Н. А., Олифер В. Г Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы. – СПб.: Питер, 2010. – 944 с.
4. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. – М.: Мир, 1984. – 264 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $GI^{(2)}|GI_2|_{\infty}$ МЕТОДОМ ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА

В. В. Сергеева, И. А. Синякова

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Рассмотрим СМО $GI(2)|GI_2|_{\infty}$ с двумя блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход системы поступает рекуррентный поток [2] сдвоенных заявок, заданный функцией распределения $A(x)$. Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, а другая, вторая, во второй блоки обслуживания и занимает любой из свободных приборов, на котором выполняется ее обслуживание. Время обслуживания в каждом блоке имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов. Поступающая заявка занимает любой из свободных приборов в своем блоке, и, завершив обслуживание, покидает систему.

Обозначим $i_1(t), i_2(t)$ – число приборов, занятых в момент времени t в первом или втором, соответственно, блоке обслуживания, а стационарное распределение вероятностей значений процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ обозначим

$$\Pi(i_1, i_2) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\}.$$

Для рассматриваемой системы двумерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t)\}$ изменения во времени состояний системы не является Марковским [1].

Для исследования рассматриваемой системы $GI^{(2)}|GI_2|_{\infty}$ применим метод просеянного потока [4]. Предлагаемый метод позволяет проблеме исследования немарковской системы обслуживания с неограниченным числом приборов свести к задаче анализа нестационарного марковизируемого потока.

На оси времени t отметим моменты наступления событий этого потока. Выделим некоторый момент времени t_1 . Пусть $t_1 = 0$. Будем полагать, что заявки входящего потока, поступившие в систему в момент времени $t < t_1 = 0$ формируют события двумерного просеянного потока, с вероятностями $S_1(t) = 1 - B_1(-t)$, $S_2(t) = 1 - B_2(-t)$, а с вероятностью $1 - S_1(t)$ и $1 - S_2(t)$ не рассматриваются.

Обозначим $\{n_1(t), n_2(t)\}$ – двумерный процесс, компоненты которого характеризуют число событий просеянных потоков, наступивших до момента времени t .

Если в некоторый начальный момент времени $t_0 < t_1$ система обслуживания свободна, то есть в ней нет обслуживаемых заявок, то для момента времени t_1 выполняется равенство

$$i_1(t_1) = n_1(t_1), \quad i_2(t_1) = n_2(t_1), \quad (1)$$

то есть число $i_k(t_1)$ приборов, занятых в k -м блоке обслуживания рассматриваемой системы обслуживания, равно числу $n_k(t_1)$ событий просеянного потока, наступивших до момента времени t_1 .

Пусть $z(t)$ – случайная величина, характеризующая время от момента t до наступления следующего события в рекуррентном потоке, тогда

$$A(z) = P\{z(t) < z\}.$$

Определим нестационарный трехмерный марковский процесс $\{n_1(t), n_2(t), z(t)\}$, для распределения вероятностей которого:

$$P(n_1, n_2, z, t) = P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, z(t) < z\},$$

по формуле полной вероятности запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2, z - \Delta t, t + \Delta t) = & \left[P(n_1, n_2, z, t) - P(n_1, n_2, \Delta t, t) \right] + \\ & + P(n_1 - 1, n_2 - 1, \Delta t, t) A(z) S_1(t) S_2(t) + P(n_1 - 1, n_2, \Delta t, t) A(z) (1 - S_2(t)) S_1(t) + \\ & + P(n_1, n_2 - 1, \Delta t, t) A(z) S_2(t) (1 - S_1(t)) + \\ & + P(n_1, n_2, \Delta t, t) A(z) (1 - S_1(t)) (1 - S_2(t)) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова [3]:

$$\frac{\partial P(n_1, n_2, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(n_1, n_2, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(n_1, n_2, 0, t)}{\partial z} +$$

$$\begin{aligned}
& + A(z) \left[S_1(t) S_2(t) \frac{\partial P(n_1 - 1, n_2 - 1, 0, t)}{\partial z} + S_1(t) (1 - S_2(t)) \frac{\partial P(n_1 - 1, n_2, 0, t)}{\partial z} + \right. \\
& \left. + S_2(t) (1 - S_1(t)) \frac{\partial P(n_1, n_2 - 1, 0, t)}{\partial z} + (1 - S_1(t)) (1 - S_2(t)) \frac{\partial P(n_1, n_2, 0, t)}{\partial z} \right]. \quad (2)
\end{aligned}$$

Начальные условия для решения этой системы в момент времени t_0 определим равенством

$$P(n_1, n_2, z, t_0) = \begin{cases} R(z), & \text{если } n_1, n_2 = 0, \\ 0, & \text{если } n_1, n_2 > 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$H(u, w, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun_1} e^{jwn_2} P(n_1, n_2, z, t). \quad (3)$$

Получим следующую задачу Коши

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H(u, w, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, w, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H(u, w, 0, t)}{\partial z} + \\
& + A(z) \left(S_1(t) S_2(t) e^{j(u+w)} \frac{\partial H(u, w, 0, t)}{\partial z} + (1 - S_1(t)) S_2(t) e^{jw} \frac{\partial H(u, w, 0, t)}{\partial z} + \right. \\
& \left. + (1 - S_2(t)) S_1(t) e^{ju} \frac{\partial H(u, w, 0, t)}{\partial z} + (1 - S_1(t)) (1 - S_2(t)) \frac{\partial H(u, w, 0, t)}{\partial z} \right), \quad (4)
\end{aligned}$$

$$H(u, w, z, t_0) = R(z).$$

Решив эту задачу Коши, найдём функцию $H(u, w, z, t)$, тогда в силу равенства (3) характеристическую функцию величины $n(t)$ определим в виде $Me^{jun_1(t)} = H(u, 0, \infty, t)$, $Me^{jwn_2(t)} = H(0, w, \infty, t)$. Полагая здесь $t = 0$, в силу равенства (1), характеристическая функция стационарного распределения вероятностей $\Pi(i_1, i_2)$ числа приборов, занятых в каждом блоке системы $GI^{(2)}|GI_2|\infty$, будут иметь следующий вид:

$$h(u, w) = Me^{j[ui_1(t) + wi_2(t)]} = Me^{j[un_1(0) + wn_2(0)]} = H(u, w, \infty, 0).$$

Моменты первого порядка

Учитывая свойства характеристических функций, имеем:

$$\left. \frac{\partial H(z, u_1, u_2)}{\partial u_1} \right|_{u_1=0, u_2=0} = jm_1^{(1)}(z), \quad \left. \frac{\partial H(z, u_1, u_2)}{\partial u_2} \right|_{u_1=0, u_2=0} = jm_1^{(2)}(z).$$

Дифференцируя уравнение (4) по u , получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H(u, w, z, t)}{\partial t \partial u} &= \frac{\partial^2 H(u, w, z, t)}{\partial z \partial u} - \frac{\partial^2 H(u, w, 0, t)}{\partial z \partial u} + A(z) \left[S_1(t) S_2(t) e^{jw} j e^{ju} \frac{\partial H(u, w, 0, t)}{\partial z} + \right. \\
&+ S_1(t) S_2(t) e^{j(u+w)} \frac{\partial^2 H(u, w, 0, t)}{\partial z \partial u} + (1 - S_1(t)) S_2(t) e^{jw} \frac{\partial^2 H(u, w, 0, t)}{\partial z \partial u} + \\
&+ j(1 - S_2(t)) S_1(t) e^{ju} \frac{\partial H(u, w, 0, t)}{\partial z} + (1 - S_2(t)) S_1(t) e^{ju} \frac{\partial^2 H(u, w, 0, t)}{\partial z \partial u} + \\
&\left. + (1 - S_1(t))(1 - S_2(t)) \frac{\partial^2 H(u, w, 0, t)}{\partial z \partial u} \right]. \quad (5)
\end{aligned}$$

Положим $u = 0$, $w = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_1^{(1)}(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial m_1^{(1)}(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial m_1^{(1)}(0, t)}{\partial z} + A(z) \left[S_1(t) S_2(t) \frac{\partial R(0)}{\partial z} + S_1(t) S_2(t) \frac{\partial m_1^{(1)}(0, t)}{\partial z} + \right. \\
&+ (1 - S_1(t)) S_2(t) \frac{\partial m_1^{(1)}(0, t)}{\partial z} + (1 - S_2(t)) S_1(t) \frac{\partial R(0)}{\partial z} + \\
&\left. + (1 - S_2(t)) S_1(t) \frac{\partial m_1^{(1)}(0, t)}{\partial z} + (1 - S_1(t))(1 - S_2(t)) \frac{\partial m_1^{(1)}(0, t)}{\partial z} \right].
\end{aligned}$$

Выполнив преобразования, получим

$$\frac{\partial m_1^{(1)}(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial m_1^{(1)}(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial m_1^{(1)}(0, t)}{\partial z} (A(z) - 1) + \frac{\partial R(0)}{\partial z} A(z) S_1(t).$$

Устремив $z \rightarrow \infty$, получим выражение для первого момента случайного процесса $n_1(t)$:

$$m_1^{(1)}(t) = \frac{\partial R(0)}{\partial z} \int_{t_0}^t S_1(x) dx = \lambda \int_{t_0}^t S_1(x) dx.$$

Аналогично для момента первого порядка числа случайного процесса $n_2(t)$ можно записать равенство

$$m_2^{(1)}(t) = \frac{\partial R(0)}{\partial z} \int_{t_0}^t S_2(x) dx = \lambda \int_{t_0}^t S_2(x) dx,$$

а при $t = t_1 = 0$ и $t_0 = -\infty$, среднее значение процесса $i_k(t)$ (числа занятых приборов в k -м блоке) в стационарном режиме будет определяться выражениями

$$\begin{aligned}
m_1^{(1)} &= \lambda \int_{-\infty}^0 S_1(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^0 (1 - B_1(-x)) dx = \lambda \int_0^{\infty} (1 - B_1(x)) dx = \lambda b_1, \\
m_1^{(2)} &= \lambda \int_{-\infty}^0 S_2(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^0 (1 - B_2(-x)) dx = \lambda \int_0^{\infty} (1 - B_2(x)) dx = \lambda b_2.
\end{aligned}$$

Асимптотика первого порядка

Обозначим $\varepsilon_1 = \frac{1}{b_1} = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{b_2} = q\varepsilon$ и в уравнении (4) выполним замены:

$$t\varepsilon = \tau_0, \quad t_0 = \tau_0, \quad S(t) = S_1(\tau), \quad u = \varepsilon x, \quad w = q\varepsilon y, \quad H(z, u, w, t) = F_1(z, x, y, \tau, \varepsilon).$$

Для $F_1(x, y, z, \tau, \varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(z, x, y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_1(z, x, y, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0, x, y, \tau, \varepsilon)}{\partial z} [A(z) - 1 + A(z) \{S_1(\tau)S_2(\tau)(1 - e^{j\varepsilon x})(1 - e^{jq\varepsilon y}) + S_1(\tau)(e^{j\varepsilon x} - 1) + S_2(\tau)(e^{jq\varepsilon y} - 1)\}]. \quad (6)$$

В уравнении (5) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$0 = \frac{\partial F_1(z, x, y, \tau)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0, x, y, \tau)}{\partial z} \{A(z) - 1\}.$$

Следовательно, $F_1(x, y, z, \tau)$ имеет вид

$$F_1(x, y, z, \tau) = R(z)\Phi(x, y, \tau). \quad (7)$$

В (5) выполним предельный переход при $z \rightarrow \infty$, получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(\infty, x, y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_1(0, x, y, \tau, \varepsilon)}{\partial z} (S_1(\tau)S_2(\tau)(1 - e^{j\varepsilon x})(1 - e^{jq\varepsilon y}) + S_1(\tau)(e^{j\varepsilon x} - 1) + S_2(\tau)(e^{jq\varepsilon y} - 1)).$$

Выполним в последнем уравнении замену (7), получим:

$$\varepsilon R(\infty) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \Phi \frac{\partial R(0)}{\partial z} (S_1(\tau)S_2(\tau)(1 - e^{j\varepsilon x})(1 - e^{jq\varepsilon y}) + S_1(\tau)(e^{j\varepsilon x} - 1) + S_2(\tau)(e^{jq\varepsilon y} - 1)),$$

$$\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\partial R(0)}{\partial z} \Phi (S_1(\tau)S_2(\tau)(jx\varepsilon)(jqy\varepsilon) + S_1(\tau)(jx\varepsilon) + S_2(\tau)(jqy\varepsilon) + o(\varepsilon)^2),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\partial R(0)}{\partial z} \Phi (S_1(\tau)jx + S_2(\tau)jqy),$$

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \lambda [S_1(\tau)jx + S_2(\tau)jqy] d\tau,$$

$$\Phi = \exp \left\{ \lambda \left[jx \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(\xi) d\xi + jqy \int_{\tau_0}^{\tau} S_2(\xi) d\xi \right] \right\}.$$

В силу выполненной замены, а также равенства (7) можно записать приближённое (асимптотическое) равенство

$$H(z, u, w, t) = F_1(z, x, y, \tau, \varepsilon) \approx R(z) \exp \left\{ \lambda j \left[x \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(\xi) d\xi + qy \int_{\tau_0}^{\tau} S_2(\xi) d\xi \right] \right\} =$$

$$= R(z) \exp \left\{ \lambda j \left[u \int_{t_0}^t S_1(\xi) d\xi + w \int_{t_0}^t S_2(\xi) d\xi \right] \right\},$$

из которого для маргинальных характеристических функции процессов $n_1(t), n_2(t)$ в стационарном режиме, получим

$$Me^{ju n_1(t)} = H(u, 0, \infty) = \exp \left\{ \lambda j u \int_{t_0}^t S_1(\xi) d\xi \right\},$$

$$Me^{jw n_2(t)} = H(0, w, \infty) = \exp \left\{ \lambda j w \int_{t_0}^t S_2(\xi) d\xi \right\}.$$

При $t = t_1 = 0$, $t_0 = -\infty$ для характеристических функции процессов $i_1(t)$, $i_2(t)$ в стационарном режиме получим

$$Me^{ju i_1(t)} = H(u, 0, \infty) = \exp \left\{ \lambda j u \int_{-\infty}^0 S_1(\xi) d\xi \right\} = \exp \{ ju \lambda b_1 \},$$

$$Me^{jw i_2(t)} = H(0, w, \infty) = \exp \left\{ \lambda j w \int_{-\infty}^0 S_2(\xi) d\xi \right\} = \exp \{ jw \lambda b_2 \}.$$

Полученные равенства будем называть асимптотикой первого порядка для системы обслуживания $GI^{(2)}|GI_2|\infty$.

Литература

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.
2. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.
3. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.
4. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ С ОПОВЕЩЕНИЕМ О КОНФЛИКТЕ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДО ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. А. Судыко

Томский государственный университет

В данной работе исследуется RQ-система с конфликтами заявок и оповещением о конфликте методом асимптотического анализа до второго порядка.

Рассмотрим однолинейную марковскую RQ-систему (Retrial queues), на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания, продолжительность которого имеет экспоненциальное с параметром μ_1 распределение. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт и переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), где осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ , а на приборе начинается этап оповещения о конфликте, продолжительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_2 . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания. Графическая схема функционирования системы представлена на рис. 1.

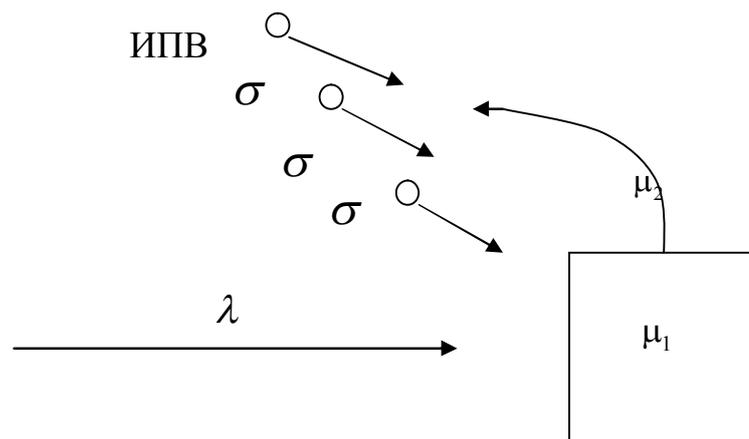


Рис. 1. Графическое представление исследуемой RQ-системы

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят,} \\ 2, & \text{если прибор находится в состоянии оповещения о конфликте.} \end{cases}$$

Обозначим

$$P\{k(t) = 0, i(t) = i\} = P(0, i, t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k ($k(t)=k$) и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Процесс $\{k(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(k, i, t)$ состояний $\{k, i\}$ рассматриваемой RQ-системы составим, применяя формулу полной вероятности, следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P(0, i, t) + \mu_1 P(1, i, t) + \mu_2 P(2, i, t), \\ \frac{\partial P(1, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma + \mu_1)P(1, i, t) + \lambda P(0, i, t) + \sigma(i+1)P(0, i+1, t), \\ \frac{\partial P(2, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu_2)P(2, i, t) + \lambda P(1, i-2, t) + \sigma(i-1)P(1, i-1, t) + \lambda P(2, i-1, t). \end{cases}$$

Перепишем эту систему для функции $H(k, u) = \sum_i e^{ju} P(k, i)$, $k = \overline{0, 2}$,

следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial H(0, u, t)}{\partial t} + \lambda H(0, u, t) - j\sigma \frac{\partial H(0, u, t)}{\partial u} = \mu_1 H(1, u, t) + \mu_2 H(2, u, t), \\ \frac{\partial H(1, u, t)}{\partial t} + \lambda H(1, u, t) + \mu_1 H(1, u, t) - j\sigma \frac{\partial H(1, u, t)}{\partial u} = \\ = \lambda H(0, u, t) - je^{-ju} \sigma \frac{\partial H(0, u, t)}{\partial u}, \\ \frac{\partial H(2, u, t)}{\partial t} + \lambda H(2, u, t) + \mu_2 H(2, u, t) = \\ = \lambda e^{2ju} H(1, u, t) - je^{ju} \sigma \frac{\partial H(1, u, t)}{\partial u} + \lambda e^{ju} H(2, u, t). \end{cases} \quad (1)$$

Представим систему (1) в матричном виде, обозначив вектор-строку $H(u, t) = \{H(0, u, t), H(1, u, t), H(2, u, t)\}$. Тогда получим

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} + j\sigma \frac{\partial H(u, t)}{\partial u} A(ju) = H(u, t) B(ju), \quad (2)$$

где матрицы $A(ju)$ и $B(ju)$ имеют вид

$$A(ju) = \begin{bmatrix} -1 & e^{-ju} & 0 \\ 0 & -1 & e^{ju} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(ju) = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda e^{2ju} \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матрицы допускают следующие разложения:

$$A(ju) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} A_v, \quad B(ju) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} B_v.$$

Вид матриц A_v , B_v очевидно определяется из (3):

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_v = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}, \quad B_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 2^v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученное равенство (2) будем называть основным уравнением, решение $H(u, t)$ которого найдем при помощи метода асимптотического анализа в условии растущего времени задержки в источнике повторных вызовов (ИПВ), предлагаемого в данной работе для предложенной к исследованию модели.

Асимптотический анализ. Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка в уравнении (2) выполним следующие замены:

$$\sigma = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \tau = \sigma t, \quad H(u, t) = F_1(w, \varepsilon, \tau). \quad (4)$$

Тогда равенство (2) примет вид

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w, \varepsilon, \tau)}{\partial \tau} + j \frac{\partial F_1(w, \varepsilon, \tau)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_1(w, \varepsilon, \tau) B(j\varepsilon w). \quad (5)$$

Теорема 1. Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $F_1(w, \tau)$ решения $F_1(w, \varepsilon, \tau)$ уравнения (5) имеет вид

$$F_1(w) = \text{Re} e^{jw\kappa_1(\tau)}, \quad (6)$$

где вектор R является решением системы

$$R(B_0 + \kappa_1(\tau)A_0) = 0, \quad (7)$$

удовлетворяющим условию нормировки

$$RE = 1, \quad (8)$$

а величина $\kappa_1(\tau)$ является решением дифференциального уравнения

$$\kappa_1'(\tau) = R(B_1 + \kappa_1(\tau)A_1)E, \quad (9)$$

где вектор $R = R(\kappa_1(\tau))$ зависит от $\kappa_1(\tau)$.

Эман 1. При $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначив $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, \varepsilon, \tau) = F_1(w, \tau)$, перепишем равенство (5) следующим образом:

$$j \frac{\partial F_1(w, \tau)}{\partial w} A_0 = F_1(w, \tau) B_0, \quad (10)$$

решение $F_1(w, \tau)$ которого запишем в виде произведения

$$F_1(w, \tau) = R \Phi_1(w, \tau) = R \exp\{jw\kappa_1(\tau)\}, \quad (11)$$

где неизвестный вектор R будет определен ниже. Вектор $R = \{R(0), R(1), R(2)\}$ имеет смысл распределения вероятностей значений процесса $k(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Эман 2. Решение (11) подставим в (10), получим

$$R\{B_0 + \kappa_1(\tau)A_0\} = 0, \quad (12)$$

определяющую вектор $R = R(\kappa_1(\tau))$, удовлетворяющий условию нормировки $RE = 1$.

Найдем функцию $\kappa_1(\tau)$. Для этого сложим уравнения системы (5), умножив справа на единичный вектор E , получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w, \varepsilon, \tau)}{\partial \tau} E + j \frac{\partial F_1(w, \varepsilon, \tau)}{\partial w} A(j\varepsilon w) E = F_1(w, \varepsilon, \tau) B(j\varepsilon w) E.$$

Затем, раскладывая матрицы $A(j\varepsilon w)$, $B(j\varepsilon w)$ по малому параметру ε и подставляя в полученное равенство произведение (11), получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\kappa_1(\tau)$:

$$\kappa_1'(\tau) = R(B_1 + \kappa_1(\tau)A_1)E,$$

совпадающее с (9). Теорема доказана.

Асимптотика второго порядка

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (2) выполним замену

$$H(u, t) = H_2(u, t) \exp\left\{\frac{ju}{\sigma} \kappa_1(\sigma t)\right\}, \quad (13)$$

для неизвестной вектор-функции $H_2(u, t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial H_2(u, t)}{\partial t} + j\sigma \frac{\partial H_2(u, t)}{\partial u} A(ju) = H_2(u, t) \{B(ju) + \kappa_1(\sigma t)A(ju) - ju\kappa_1'(\sigma t)I\}, \quad (14)$$

в котором выполним замены

$$\sigma = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad \tau = \sigma t, \quad H_2(u, t) = F_2(w, \varepsilon, \tau). \quad (15)$$

Уравнение (14) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, \varepsilon, \tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon \frac{\partial F_2(w, \varepsilon, \tau)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = \\ = F_2(w, \varepsilon, \tau) \{B(j\varepsilon w) + \kappa_1(\tau)A(j\varepsilon w) - j\varepsilon w\kappa_1'(\tau)I\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Теорема 2. Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $F_2(w, \tau)$ решения $F_2(w, \varepsilon, \tau)$ уравнения (16) имеет вид

$$F_2(w) = R \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2(\tau) \right\}, \quad (17)$$

где вектор R определен в теореме 1, а функция $\kappa_2(\tau)$ является решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \kappa_2'(\tau) = & \kappa_2(\tau) \left(RA_1 + h_2(B_1 + \kappa_1(\tau)A_1) - \kappa_1'(\tau)I \right) E + \\ & + R(B_2 + \kappa_1(\tau)A_2)E + 2h_1(B_1 + \kappa_1(\tau)A_1 - \kappa_1'(\tau)I)E, \end{aligned} \quad (18)$$

в котором векторы h_1 и h_2 являются решениями следующих систем уравнений:

$$\begin{aligned} h_1(B_0 + \kappa_1(\tau)A_0) + R(B_1 + \kappa_1(\tau)A_1 - \kappa_1'(\tau)I) &= 0, \\ h_2(B_0 + \kappa_1(\tau)A_0) + RA_0 &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Таким образом, в работе проведено исследование RQ-системы с конфликтами заявок и оповещением о конфликте методом асимптотического анализа до второго порядка при выполнении предельного условия растущего времени обслуживания в источнике повторных вызовов. Сформулированы теоремы для получения асимптотических семиинвариантов первых двух порядков и проведено доказательство теоремы для асимптотики первого порядка.

Литература

1. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.
2. Назаров А. А., Судыко Е. А. Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа // Проблемы передачи информации. – 2010. – № 1. – С. 94–111.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

ВЛИЯНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЭКОНОМИКИ

О. В. Вальц, Е. В. Новицкая

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

На рубеже XXI в. информация становится важнейшим фактором производства, посредством которого происходит вовлечение материальных ресурсов в общественное производство с целью повышения его эффективности. Наряду с этим немаловажную роль информация играет и в формировании социально-экономического потенциала общества.

В трудах Р. Хартли, К. Шеннона, Н. Винера, Л. Бриллюэна, У. Эшби и С. Голдмана, посвященных статистической теории информации, впервые она стала объектом исследования, связанного с техническими проблемами передачи данных. Такой подход учитывал лишь количественные аспекты информации.

Впоследствии отечественные ученые А. И. Анчишкин, Р. С. Абдеев, В. А. Виноградов, В. Н. Глушков, И. И. Гришкин, А. Д. Урсул и др. применили философский подход к исследованию информации и определили ее смысловую нагрузку.

Это привело к тому, что и экономическая наука в качестве предмета исследования выделила информационные аспекты: информационное производство, информационные ресурсы, информационная революция. В этих направлениях работали такие известные ученые, как Д. Белл, Дж. Мартин, Дж. Стиглер, Дж. Миллер, А. Тоффлер, Ф. Хайек, К. Эрроу и др.

Информация существенно отличается от таких факторов производства, как земля, труд, капитал и предпринимательские способности:

- информация влияет на эффективность производства, не требуя количественного увеличения основных факторов производства;
- информация влияет на процесс воспроизводства путем сокращения периодов производства и обращения;
- информация влияет на человека (характер и способности) как участника производственного процесса;
- информация, один раз родившись, может перетекать в знание, а затем опять в конкретную информацию и так до бесконечности;
- сложно определить оптимальное количество необходимой информации и ее цену.

К признакам, характеризующим информацию, относят: репрезентативность, содержательность, достаточность, доступность, актуальность, своевременность, точность, достоверность, устойчивость [1].

Таким образом, информация является «пятым элементом» и находится вне традиционных представлений о роли и значении информации. Информация – это совокупность сигналов, воспринимаемых сознанием человека, отражающих разнообразные свойства объектов и явлений окружающего мира. Посредством данных сигналов возникают индивидуальные возможности по сохранению, передаче, трансформации.

Именно поэтому не вся информация несет в себе ценность для обладателей при ее распространении. Это особенно значимо при функционировании неформальных рынков.

В процессе передачи информации от одного субъекта к другому происходит ее трансформация и искажение.

Одним из примеров является ситуация в трудовом коллективе. Некоторые сотрудники, склонные к сбору информации неформального характера, могут использовать ее по своему усмотрению: в виде шантажа, провокации или вредительства. В данном случае неформальные коммуникации имеют место в небольшом коллективе и существенного влияния на рыночные отношения не оказывают. Но информация, неправильно воспринятая и переданная в искаженном виде (относительно технологии, характеристик товара, побочных эффектов), оказывает более серьезное влияние на эффективность функционирования и затрудняет контроль над ситуацией на рынке. Стоит также отметить, что на неформальных рынках скорость передачи информации увеличивается. В этом случае искаженная информация в значительной степени уменьшает эффективность маркетинговых приемов.

Несмотря на выделенные недостатки, неформальные информационные потоки являются важным инструментом управления. Многие используют неформальные информационные связи, чтобы «притормозить» инициативы в бизнесе, которые им не нравятся, и, наоборот, продвинуть проекты, представляющиеся интересными, или такая информация используется при разработке новых продуктов, создании стратегических альянсов и т. п.

Литература

1. Стиглер Дж. Экономическая теория информации // Теория фирмы / Под ред. В. М. Гальперина. – СПб.: Экономическая школа, 1995. – 534 с.

ОПТИМИЗАЦИОННО-ИМИТАЦИОННЫЙ МЕТОД И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПРОМЫШЛЕННОЙ ПОЛИТИКИ РЕГИОНА

М. А. Горбунов

Сибирский государственный аэрокосмический университет

Промышленность региона включает множество направлений деятельности (добыча полезных ископаемых, обрабатывающие производства, производство электроэнергии, водоснабжение и т. д.). Высокий уровень капиталоемкости отраслей промышленности, в свою очередь, является причиной потребности в больших объемах реальных инвестиций в данные отрасли, что вызывает необходимость повышения эффективности управления данными инвестиционными потоками. Оценка эффективности капиталовложений можно повысить за счет использования экономико-математических моделей, позволяющих определять наиболее перспективные направления вложения инвестиционных ресурсов.

Наиболее распространенным инструментарием являются системы поддержки принятия решений в области инвестиционного финансирования. Любой программный продукт, используемый для оценки и анализа инвестиционной деятельности, основан на экономико-математической модели. В настоящее время целесообразно выделить три метода моделирования инвестиционного процесса (инвестиционной деятельности):

- имитационный;
- оптимизационный;
- оптимизационно-имитационный.

Имитационному методу соответствуют программные продукты, основанные на имитационных математических моделях; оптимизационному – прикладные программы, построенные на базе оптимизационных моделей; оптимизационно-имитационному – прикладные программы, базирующиеся на комбинированной математической модели, сочетающей в себе элементы оптимизационного и имитационного методов.

В настоящее время наиболее распространенным методом моделирования инвестиционных проектов является имитационный метод. В рамках этого метода созданы такие программные продукты, как Project Expert, «Альт-Инвест», Comfar и др., широко применяющиеся для оценки и анализа инвестиционных проектов [1]. Указанные программные продукты, как правило, используются для анализа инвестиционных вложений на уровне отдельно взятого предприятия, но могут применяться также для анализа инвестиционной деятельности группы предприятий, отрасли и т. д.

Задача расчета денежных потоков, формируемых в процессе инвестиционной деятельности, в оптимизационном режиме является более сложной задачей, поскольку она направлена на формирование оптимальных денежных

потоков, которые приводят к максимальному значению показателей эффективности инвестиционной деятельности.

Следует отметить, что при использовании оптимизационного метода математическая сложность моделирования накладывает существенные ограничения на уровень детализации расчетов и их соответствие законодательным методикам. В этой связи предлагается использовать оптимизационно-имитационный метод, который сочетает в себе черты оптимизационного и имитационного методов, при этом приоритет отдается оптимизационному методу.

Целесообразность применения оптимизационно-имитационного метода при оценке и анализе эффективности инвестиционной деятельности проявляется в следующем:

1. Система поддержки принятия решений, построенная на основе оптимизационно-имитационного метода, сохраняет в целом оптимизационный характер. Следовательно, она позволяет рассчитывать оптимальные показатели эффективности инвестиционного проекта и определять наилучший сценарий развития проекта.

2. Комбинирование двух методов делает возможным приведение в соответствие методик расчетов финансовых показателей деятельности предприятия законодательным методикам. Поэтому расчет показателей эффективности проекта становится более точным и адекватным действительности.

3. Использование оптимизационно-имитационного метода позволяет уменьшить размерность оптимизационной модели, что делает возможным более широкий горизонт планирования и уровень детализации исходных данных.

При использовании оптимизационно-имитационного метода ключевым является понятие производственно-технологической единицы (ПТЕ). Под ПТЕ подразумевается минимальный набор объектов основных производственных фондов (ОПФ), включающий в себя количество разных видов ОПФ, необходимых для начала производства продукции. Таким образом, для запуска проекта необходима хотя бы одна ПТЕ. На практике в качестве ПТЕ может рассматриваться участок, цех, поточная линия и т. д., которые способны выпускать готовую продукцию.

Экономико-математическая модель, построенная на базе оптимизационно-имитационного метода, может быть использована при анализе инвестиционной деятельности на региональном уровне (например, для оценки эффективности реальных инвестиций отраслей промышленности). Это возможно с использованием приемов агрегирования потоков циркулирующих экономических ресурсов в более крупные потоки. В частности, показатели эффективности инвестиционной деятельности определяются заданными правилами начисления прибыли, амортизации, налогообложения и т. п. на уровне бухгалтерских и юридических особенностей деятельности отдельного предприятия. Учитывая многочисленность таких особенностей, целесообразно

выбрать ограниченный, базовый набор характеристик производственных активов, на основе которых агрегировать основные денежные потоки экономических агентов региональной экономики. Агрегирование позволяет строить математические модели и решать задачи стратегического развития и управления регионом (в частности, управления промышленной политикой), а детализация – достаточно подробно учитывать экономически обоснованные правила функционирования производственных активов и экономических агентов вплоть до учета бухгалтерских и юридических особенностей, определение источников финансирования инвестиционных проектов и т. п. При агрегировании применяется метод усреднения показателей деятельности производственных подразделений региональной экономики, когда в качестве технико-экономических показателей отраслей регионального производственного сектора используются средние значения соответствующих микроэкономических показателей их предприятий. В этом случае регион (промышленность региона) можно рассматривать как совокупность макроОПФ (отраслей, территориальных подразделений в зависимости от признака усреднения – по типу производства, территориальной принадлежности совокупности предприятий, видов экономической деятельности и т. д.).

Применение методов усреднения и агрегирования обосновывает правомерность использования алгоритма начисления прибыли производственных предприятий региона при формировании показателей деятельности отраслевой социально-экономической структуры, несмотря на то, что она не является предприятием в юридическом смысле термина. Более подробное описание экономико-математической модели, построенной на базе оптимизационно-имитационного метода моделирования, содержится в [1].

Данная модель реализована в системе поддержки принятия решений [2], позволяющей в том числе производить оценку и анализ эффективности инвестиционной деятельности отраслей промышленности региона, определять оптимальную структуру инвестиционных вложений.

Литература

1. Горбунов М. А. Комбинирование оптимизационного и имитационного подходов при оценке и анализе проектов реальных инвестиций / М. А. Горбунов, А. В. Медведев // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева. – 2009. – Вып. 1 (22), Ч. 2. – С. 134–138.

2. Конструктор и решатель дискретных задач оптимального управления (Карма). Программа для ЭВМ. Свидетельство о государственной регистрации в Роспатенте № 2008614387 от 11.09.2008 г. Правообладатели: А. В. Медведев, П. Н. Победаш, А. В. Смольянинов, М. А. Горбунов.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ УРОВНЯ ОБРАЗОВАНИЯ РУКОВОДИТЕЛЯ НА ЭКОНОМИЧЕСКУЮ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Т. А. Горская, Е. О. Яковченко

Кемеровский государственный университет

Главной задачей предприятия, объединения, отрасли является удовлетворение производственных и других потребностей в определенных видах товаров и услуг. Объективная оценка производственных возможностей предприятий, а также параметров и характеристик их производственного потенциала имеет непреходящее значение для принятия решений.

Управление производственными объектами при этом превращается в задачу, требующую применения специальных средств анализа и планирования. Одним из таких средств является экономико-математическое моделирование. Его суть состоит в замене реального объекта некоторой математической моделью, в том или ином смысле отражающей характерные черты моделируемого процесса.

Основной идеей было выявить влияние уровня образования руководителя на прибыль сельскохозяйственных предприятий, производящих зерно, на основе кластерного и дискриминантного анализа.

На основе проверки зависимости ряда переменных от значения прибыли были выбраны шесть из них: затраты, имущество, численность рабочих, площадь земли, кредиты и займы, оценка уровня образования руководителя.

Для классификации объектов использовался кластерный анализ методом k -средних с разбиением на три группы. Полученные классы оказались отчетливо делимы по принципу наибольшей прибыли и, соответственно, наилучшего образования руководителя.

Для описания взаимосвязи прибыли предприятий и их производственных факторов была выбрана функция прибыли типа Кобба – Дугласа, коэффициенты которой показали большое влияние образования руководителя на прибыль предприятия. С целью проверки данных, полученных ранее, был использован дискриминантный анализ, также были подсчитаны коэффициент корреляции, коэффициент детерминации, матрица чувствительности решающих правил. По их значениям можно судить о правильности разбиения на классы.

С помощью разбиения на кластеры, функции типа Кобба – Дугласа и дискриминантного анализа был сделан вывод, что чем выше значение функции прибыли, тем более высок уровень образования руководителя и тем выше производственный потенциал предприятия.

СМЕШАННОЕ РАСШИРЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Н. Н. Данилов

Кемеровский государственный университет

Пусть переменная t , которую будем называть «временем», принимает лишь дискретные значения: $t=0, 1, \dots, T$. Рассмотрим некоторую управляемую систему, изменение состояния которой происходит в дискретные моменты времени t и описывается уравнением

$$x(t) = f^t(x(t-1), u_1(t), u_2(t)), \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

из заданного начального состояния

$$x^0 = x(0). \quad (2)$$

В (1)–(2) $x(t) \in R^k$ – вектор состояния; $u_1(t) \in R^{l_1}$, $u_2(t) \in R^{l_2}$ – векторы управления в момент t ; $f^t: R^k \times R^{l_1} \times R^{l_2} \rightarrow R^k$ – вектор-функция, характеризующая динамические возможности системы.

Предполагается, что управляющие параметры удовлетворяют условиям

$$u_1(t) \in U_1^t, \quad u_2(t) \in U_2^t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3)$$

где $U_1^t \subset R^{l_1}$, $U_2^t \subset R^{l_2}$ – заданные непустые конечные множества.

Соотношения (1)–(3) определяют дискретную систему с двумя управлениями. Будем считать, что выбором управления

$$u_1(\cdot) = \{u_1(1), \dots, u_1(T)\}$$

распоряжается игрок I, а выбором управления $u_2(\cdot) = \{u_2(1), \dots, u_2(T)\}$

игрок II. Множества допустимых управлений игроков есть соответственно

$$U_1 = U_1^1 \times \dots \times U_1^T, \quad U_2 = U_2^1 \times \dots \times U_2^T.$$

Предполагается, что каждой паре управлений $u_2(\cdot) = \{u_2(1), \dots, u_2(T)\}$ соответствует единственная последовательность

$$x(\cdot) = x(\cdot, x^0, u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \{x^0, x(1), \dots, x(T)\}$$

решений системы (1)–(2), которую будем называть траекторией. Множество всех траекторий (1)–(2) обозначим символом $X(x^0, T)$.

Введем в рассмотрение множество

$$G(x(t-1), t) = \left\{ x(t) = x(t, x(t-1), u_1(t), u_2(t)) \mid x(t-1) \in G(x(t-2), t-1), u_1(t) \in U_1^t, u_2(t) \in U_2^t \right\},$$

которое будем называть множеством достижимости t -го уровня, $t=1, \dots, T$ (будем считать, что $G(x(-1), 0) = x^0$). Множество $G(x^0, T) = \bigcup_{t=1}^T G(x(t-1), t)$ будем называть множеством достижимости системы (1)–(3). Считается, что $x^0 \in G(x^0, T)$ по определению.

Пусть в каждой точке $x=x(t)$ ($t=1, \dots, T$) множества достижимости $G(x^0, T)$ системы (1)–(3) определена матрица выигрышей игрока I:

$$h(x(t)) = \begin{pmatrix} a_{11}(x(t)) & a_{12}(x(t)) & \dots & a_{1n}(x(t)) \\ a_{21}(x(t)) & a_{22}(x(t)) & \dots & a_{2n}(x(t)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(x(t)) & a_{m2}(x(t)) & \dots & a_{mn}(x(t)) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

($h(x^0) = \|0\|_{m \times n}$ – $m \times n$ -матрица с нулевыми элементами, где m и n – конечные числа). Целью игрока I является максимизация значения функции

$$H(x(\cdot)) = \sum_{t=1}^T a_{i_t, j_t}(x(t)), \quad (5)$$

где $i_t(j_t)$ – номер строки (столбца) матрицы $h(x(t))$, выбираемой игроком I (выбираемого игроком II). Целью игрока II является минимизация значения функции (5).

Пусть $\xi(x(t)) = (\xi_1(x(t)), \dots, \xi_m(x(t)))$ – смешанная стратегия игрока I в матричной игре $h(x(t))$; аналогично $\eta(x(t)) = (\eta_1(x(t)), \dots, \eta_n(x(t)))$ – смешанная стратегия игрока II в той же игре. Ожидаемый выигрыш игрока I в игре $h(x(t))$ для ситуации $(\xi(x(t)), \eta(x(t)))$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x(t), \xi(x(t)), \eta(x(t))) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}(x(t)) \cdot \xi_i(x(t)) \cdot \eta_j(x(t)). \end{aligned}$$

Определение. Смешанной стратегией игрока I (II) в игре (1)–(5) будем называть отображение $\psi_1(\psi_2)$, которое каждому моменту t и реализуемому в этот момент состоянию $x(t)$ ставит в соответствие некоторое допустимое управление $u_1(t+1) \in U_1^{t+1}$ ($u_2(t+1) \in U_2^{t+1}$) и выбранную игроком I (II) смешанную стратегию $\xi(x(t))$ ($\eta(x(t))$) в игре $h(x(t))$, $t = 1, \dots, T-1$.

Таким образом, смешанные стратегии игроков в игре (1)–(5) можно записать так:

$$\begin{aligned} \psi_1(\cdot) &= \{(u_1(1), \xi(x(1))), \dots, (u_1(T), \xi(x(T)))\} \\ \psi_2(\cdot) &= \{(u_2(1), \eta(x(1))), \dots, (u_2(T), \eta(x(T)))\}. \end{aligned}$$

Множество всех таких стратегий обозначим соответственно Ψ_1 и Ψ_2 .

Ожидаемый выигрыш игрока I в игре (1)–(5) для ситуации $(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)) \in \Psi_1 \times \Psi_2$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{J}(x^0, \psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)) &= \sum_{t=1}^T \tilde{H}(x(t)) = \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}(x(t)) \cdot \xi_i(x(t)) \cdot \eta_j(x(t)), \end{aligned}$$

где $x(\cdot) = x(\cdot, x^0, u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \{x^0, x(1), \dots, x(T)\}$ – траектория системы (1), порожденная парой допустимых управлений $(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$, соответствующих стратегиям $\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)$.

Игра в нормальной форме

$$\tilde{\Gamma}(x^0, T) = \langle \sum(x^0, T); \Psi_1, \Psi_2; \tilde{J} \rangle, \quad (6)$$

где $\sum(x^0, T)$ – символическое обозначение системы (1)–(2) является смешанным расширением игры (1)–(5).

В докладе излагаются основные результаты, полученные автором относительно игры (6) (определение и применение принципа минимакса, необходимые и достаточные условия оптимальности смешанных стратегий в игре (6), а также условие существования оптимальной (в смысле принципа минимакса) траектории).

Данная работа является продолжением статьи автора «Представление динамической матричной игры в форме задачи конфликтного управления», опубликованной в журнале «Вестник КемГУ» (2009. – Вып. 2).

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА НА ФАКТИЧЕСКОЕ КОНЕЧНОЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ ДОМОХОЗЯЙСТВ

А. В. Корицкий

Сибирский университет потребительской кооперации

В последние пятнадцать – двадцать лет в России наблюдался рост дифференциации доходов и потребления населения разных регионов. Какими причинами они вызывается? Среди факторов, используемых для объяснения различий в доходах населения разных стран, называют различия в уровнях накопленного физического и человеческого капитала, социальные и географические факторы, различия в уровнях технологического и социального развития и т. п. В частности, такие объяснения можно встретить в работах Ф. Каселли [1], Р. Холла и Ч. Джонса [2], М. Абреу, Х. де Гроота и Р. Флоракса [3, 4], а также других экономистов. С помощью эконометрических методов оцениваются частные нормы отдачи образования для разных стран, которые составляют от 6 до 12 % на каждый год прироста среднего уровня образования занятого в экономике разных стран населения [см., например, работу Г. Псахаропулоса и Х. Патриноса (2002)] [5].

Регионы России существенно различаются по величине накопленного физического и человеческого капитала, технологического потенциала, уровню экономического развития и природно-климатическим условиям. Такое разнообразие приводит к значительной вариации душевых доходов и других экономических переменных. В какой мере эти факторы влияют на дифференциацию доходов и конечного потребления населения в регионах России? Попытаемся ответить на этот вопрос, используя эконометрические методы. Построим эконометрическую модель и используем в расчётах реальные экономические показатели: фактическое конечное потребление домашних хозяйств в расчёте на одного занятого в экономике региона (y), фондовооружённость труда занятого населения (k) и долю занятых с высшим образованием в общей численности занятого в экономике региона населения (h).

Соответствующее уравнение регрессии записывается в виде

$$\ln y_i = \ln A + \alpha \ln k_i + \gamma h_i + a_1 d_1 + \varepsilon_i. \quad (1)$$

Для учёта специфических особенностей российских регионов, которые могут существенно различаться по степени урбанизации, введена фиктивная пе-

ременная, где d_1 – фиктивная переменная, характеризующая особенности экономики регионов, включающих крупные индустриальные и научные центры – города-миллионеры (регионы (субъекты РФ), включающие Волгоград, Ростов-на-Дону, Уфу, Пермь, Нижний Новгород, Казань, Самару, Челябинск, Екатеринбург, Омск, Новосибирск, имеют её равной 1 и 0 для всех прочих).

Фиктивные переменные должны уловить эффект экстерналий человеческого капитала в условиях городских агломераций. В регионах, включающих города-миллионеры, агломерационные эффекты и экстерналии человеческого капитала, как можно ожидать, должны проявляться в повышенных объёмах конечного фактического потребления домашних хозяйств (в расчёте на одного занятого).

В табл. 1 приведены результаты расчёта регрессионных уравнений по формуле (1), с использованием фиктивных переменных и зависимой переменной «фактическое конечное потребление домохозяйств (всего) в расчёте на одного занятого» в экономике регионов.

Для учёта различий в уровнях экономического развития и масштабов экономики регионов используется «взвешенная» регрессия, в качестве «весов» используется переменная «численность занятого в экономике регионов населения» в соответствующие годы. Коэффициенты детерминации колеблются в пределах 72–78 %, все коэффициенты при независимых переменных статистически значимы, причём при основных переменных «фондовооружённость труда» и «доля занятых с высшим образованием» в общей численности занятых в экономике регионов статистическая значимость очень высока – свыше 99,9 %.

Из результатов данных расчётов можно сделать вывод, что уровень образования населения, занятого в экономике регионов России, оказывает заметное положительное и статистически значимое влияние на уровень фактического конечного потребления населения в этих регионах. Вклад переменной «доля занятых с высшим образованием» в расчёте на одного занятого в экономике регионов в вариацию зависимой переменной «фактическое конечное потребление домохозяйств» в расчёте на одного занятого колеблется от 57 % в 2008 г. до 83 % в 2000 г., то есть от половины до четырёх пятых различий в уровнях конечного потребления домохозяйств регионов России объясняются различиями долей работников с высшим образованием в общей численности занятого в экономике этих регионов населения (коэффициент γ (Beta)). Отдача высшего образования (коэффициент γ (B)) довольно высока, на рост доли работников с высшим образованием на 1 процентный пункт фактическое конечное потребление домохозяйств (в расчёте на одного занятого) растёт от 2 до 5 процентов (см. табл. 1) с явной тенденцией к снижению со временем. В начале рассматриваемого периода, в 2000–2001 гг., рост зависимой переменной составлял 4,7–4,9 % на каждый процентный пункт роста доли работников с высшим образованием в общей численности работников, занятых в экономике регионов России, но к 2008 г. составил только 2,1 %. Тенденция к снижению отдачи человеческого капитала была очень чёткой и плавной.

Таблица 1

Взаимосвязь фактического конечного потребления домохозяйств (всего) в расчёте на одного занятого с фондовооружённостью труда, долей работников с высшим образованием в общей численности занятого в экономике регионов России населения в 2000–2008 гг.¹

Показатели регрессии	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Константа ln A	6,793*	7,644*	8,117*	8,121*	8,249*	8,676*	9,175*	9,466*	10,162*
Станд. ошибка	0,416	0,344	0,361	0,362*	0,297	0,238	0,254	0,240	0,229
t-статистика	16,309	22,199	22,456	22,462	27,793	36,472	36,073	39,414	44,399
Значимость	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Коэф. α (B)	0,537*	0,402*	0,360*	0,396*	0,407*	0,381*	0,351*	0,328*	0,138*
Станд. ошибка	0,072	0,057	0,058	0,058	0,047	0,037	0,040	0,038	0,045
Beta	0,415*	0,390*	0,379*	0,410*	0,460	0,490*	0,479*	0,481*	0,171*
t-статистика	7,492	7,038	6,199	6,855	8,667	10,229	8,804	8,682	3,092
Значимость	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003
Коэф. γ (B)	0,047*	0,049*	0,046*	0,041*	0,040*	0,035*	0,029*	0,028*	0,021*
Станд. ошибка	0,003	0,003	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,003	0,002
Beta	0,835*	0,817*	0,793*	0,740*	0,737*	0,717*	0,662*	0,613	0,570*
t-статистика	14,970	14,572	12,707	12,189	13,699	14,795	12,020	11,015	9,113
Значимость	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Коэф. α_1 (B)	0,125**	0,152**	0,182*	0,167*	0,161*	0,151*	0,146*	0,139*	0,272*
Станд. ошибка	0,061	0,060	0,064	0,061	0,051	0,044	0,048	0,045	0,036
Beta	0,114**	0,142	0,178	0,166*	0,170*	0,164	0,163*	0,162	0,466*
t-статистика	2,038	2,527	2,846	2,727	3,155	3,404	3,021	3,089	7,495
Значимость	0,045	0,014	0,006	0,008	0,002	0,001	0,003	0,003	0,000
Коэф. детерминации	0,767	0,763	0,711	0,725	0,784	0,827	0,783	0,793	0,770
F	85,702	83,924	64,009	68,448	94,590	123,875	93,818	99,333	86,953
R-уровень	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Кол-во регионов	82	82	82	82	82	82	82	82	82

*Параметр имеет 1 % значимость.

** Параметр имеет 5 % значимость.

*** Параметр имеет 10% значимость.

¹ Все расчёты проводились с использованием статистических данных, содержащихся в Центральной статистической базе данных (ЦСБД) на официальном сайте Росстата.

Данную тенденцию можно попытаться объяснить наличием двух процессов, протекающих в экономике России. Во-первых, быстрым ростом численности работников с высшим образованием, и, соответственно, ростом их доли в общей численности работающего населения. Эта доля для экономики России в целом выросла с 21,5 % в 2000 г. до 27,1 % в 2008 г., то есть происходила, с одной стороны, замена разных поколений работников с высшим образованием и, с другой, насыщение экономики специалистами высшей квалификации. Во-вторых, возможно, параллельно происходило снижение качества подготовки этих специалистов. Об опасности тенденций снижения качества высшего образования в России пишут многие российские экономисты, см., например, работы Г. И. Ханина, Н. В. Загладина, Р. И. Капелюшникова, М. Кольчугиной, и П. П. Лузана [6–10].

Коммерциализация высшего образования, то есть вовлечение в финансирование образования частных лиц и организаций, возможно, способствует падению качества образования, так как руководство вузов стремится пополнить их бюджеты любой ценой, в том числе, за счёт снижения требовательности к уровню знаний учащихся.

Очевидно, что в России, как и развитых странах, образование является важным фактором экономического развития и определяет уровень фактического конечного потребления домохозяйств. Очевидно также, что без увеличения объёмов государственного финансирования образования невозможно повышение его качества и уровня образованности населения. В табл. 2 приводятся данные о расходах на образование в ряде стран в долл. США (в пересчёте по паритету покупательной способности). Из неё видно, что расходы на образование в расчёте на одного учащегося (или студента) в России во много раз ниже, чем в развитых странах Европы и Америки, мы также в несколько раз отстаём от бывших социалистических стран Восточной Европы.

Таблица 2

Расходы на одного учащегося (или студента) (в долл. США в пересчёте по паритету покупательной способности, 2005 г.) [11]

Страна	Всё среднее образование	Всё высшее образование
ОЭСР (в среднем)	7276	11100
ЕС 19 (в среднем)	7236	10191
США	9938	22476
Россия	1615	2562
Швеция	8039	16218
Дания	8849	15225
Польша	2889	4412
Нидерланды	7541	13846
Венгрия	3692	7095

Решение задач создания в России инновационной экономики требует существенного роста инвестиций в человеческий капитал, и в первую очередь увеличения государственных расходов на образование. Низкие заработки преподавателей заставляют их искать «приработки» в виде работы в других вузах, репетиторства, работы консультантами в коммерческих фирмах и даже – взяточничества. На научную работу у преподавателей времени не остаётся, да и материально она никак не стимулируется. Хороший репетитор за «сезон» может заработать на новую машину, а что можно «заработать» научными исследованиями? Если не считать незначительного числа небольших грантов РГНФ какое-либо финансирование научных исследований в области социальных наук в российских университетах отсутствует. Повышение уровня благосостояния населения России немыслимо без технологического прогресса, то есть производства, накопления, распространения и использования новых знаний, без глубокого и качественного образования, которое невозможно без научных исследований, в том числе в высших учебных заведениях. Без существенного роста государственных инвестиций в образование, то есть в человеческий капитал, невозможно повышение конкурентоспособности российской экономики, невозможен выход её на передовые технологические позиции.

Литература

1. Caselli F. Accounting for Cross – Country Income Differences // CEP Discussion. – 2005. Paper № 67, – January
2. Hall R. E., Jones Ch. I. Why do some countries produce so much more output per worker than others? // NBER Working Paper Series, Working Paper 6564, May 1998.
3. Barro R.J. Economic growth in cross-section of countries // Quarterly Journal of Economics. – 1991. – P. 106.
4. Becker G., Murphy K. and Tamura R. Economic growth, human capital and population growth // Journal of Political Economy. – 1990. – P. 98.
5. Psacharopoulos G., Patrinos H.A., Returns to Investment in Education: A Further Update. The World Bank, Policy Research Working Paper, 2881, September 2002.
6. Ханин Г. И. Высшее образование и российское общество // ЭКО. – 2008. – № 8, 9.
7. Загладин Н. В. Проблема избыточности интеллектуального потенциала России // Человеческий капитал и Россия/Иванов Н. П., Марцинкевич В. И. и др. – М.: ИМЭМО-РАН, 2005. – 64 с.
8. Капелюшников Р. И. Записка об отечественном человеческом капитале: Препринт WP3/2008/01. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2008.
9. Кольчугина М. Нацпроект «Образование»: инноватизация подготовки кадров // МЭиМО. – 2009. – № 9. – С. 64–72.
10. Лузан П. П. Высшее образование в России: от разрушения к развитию // ЭКО. – 2009. – № 12.
11. Education at a Glance 2008/ OECD Indicators [Электронный ресурс] // URL: www.oecd.org/edu/eag 2008.

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО НАБОРА ОЧИСТНЫХ КОМБАЙНОВ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИНВЕСТИЦИЙ

Д. С. Коровин

Кемеровский государственный университет

Целью данной работы является решение задачи нахождения оптимального набора очистных комбайнов. Для этого необходимо:

1) Провести преобразование модели Марковица в модель, с помощью которой можно вычислить оптимальный набор очистных комбайнов.

2) Разработать программу, реализующую полученную модель.

В зависимости от состояния s горнотехнических условий, с вероятностью его наступления p_s , производительность комбайна j -го типа принимается равной c_{js} . Тогда математическое ожидание производительности

$$E[c_j] = \sum_{s=1}^n c_{js} p_s, \quad (1)$$

где n – кол-во состояний горнотехнических условий. Дисперсия производительности j -го комбайна:

$$Var[c_j] = \sum_{s=1}^n (c_{js} - E[c_j])^2 p_s. \quad (2)$$

Риск невыполнения плана будем измерять средним квадратическим отклонением от его производительности

$$\sigma [c_j] = \sqrt{\sum_{s=1}^n (c_{js} - E[c_j])^2 p_s}. \quad (3)$$

Математическое ожидание производительности набора равно

$$E[c_p] = \sum_{s=1}^n c_{js} p_s = \sum_{s=1}^n p_s \sum_{j=1}^m w_j c_{js} = \sum_{j=1}^m w_j E[c_j]. \quad (4)$$

Дисперсия производительности набора определяется по формуле

$$Var[c_p] = \sum_{j=1}^m w_j^2 Var[c_j]. \quad (5)$$

Общая формула риска

$$\sigma [c_p] = \sqrt{\sum_{j=1}^m w_j^2 Var[c_j]}. \quad (6)$$

Задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом:

$$Var[c_p] = \sum_{j=1}^m w_j^2 Var[c_j] \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m w_j E[c_j] \geq Pl, \\ \sum_{j=1}^m w_j P_j \leq C, \\ w_j \geq 0, j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (8)$$

где Pl – необходимое количество добытого угля; P_j – цена комбайна j -го типа; C – имеющийся бюджет.

Разработана программа, реализующая полученную модель по алгоритму:

Блок 1: считывание условий задачи.

С данных, введённых в форму, считываются: вероятности наступления горнотехнических условий, кол-во типов комбайнов, производительность каждого типа комбайна при каждом состоянии горнотехнических условий, цена каждого типа комбайна, бюджет и необходимое кол-во добытого угля по плану.

Блок 2: расчёт средней производительности и дисперсии.

Блок 3: проверка комбинаций.

Проверка всех возможных комбинаций на удовлетворение ограничениям и на доставление минимума функции риска.

Блок 4: вывод результата.

Проведена её верификация с помощью «ручных» вычислений и при помощи пакета оптимизации из среды Maple.

Литература

1. Николаева Е. А. Математические модели инвестиций. Рынок ценных бумаг: Методическая разработка для студентов 3-го курса математического факультета специальности 01.02 «Прикладная математика» / Е. А. Николаева. – ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет». – Кемерово, 2004. – 34 с.
2. Казаков В. А. Портфельное инвестирование «Модели формирования портфеля акций в современной теории инвестиций» // Финансы и кредит. – 2006. – № 5 (209).
3. Крянев А. В., Черный А. И. Математические модели задач оптимизации портфелей инвестиций. – М.: Препринт / МИФИ, 005–7, 1997. – 16 с.
4. Касимов Ю. Ф. Введение в теорию оптимального портфеля ценных бумаг. – М., Анкил, 2005.
5. Крянев А. В., Черный А. И. Численные решения оптимизационных задач для математических моделей теории инвестиций. – М.: Препринт / МИФИ, 005–7, 1997. – 16 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ГОРОДСКИМ ПАССАЖИРСКИМ ТРАНСПОРТОМ

М. Е. Корягин

Кузбасский государственный технический университет

Актуальным направлением являются исследование и оптимизация рынка городских пассажирских перевозок в России. Требуется учесть интересы различных сторон, участвующих в процессе функционирования рынка: определить равновесную политику пассажиров, транспортных операторов и муниципальных органов власти.

Участники системы городского пассажирского транспорта

В настоящее время в России недостаточно исследовано поведение главного участника системы общественного транспорта – пассажира. Однако переход к рыночной экономике говорит о том, что общественный транспорт должен удовлетворять потребности пассажиров. Поэтому в первую очередь рассмотрим систему «Пассажиры».

Варианты стратегий, которые может использовать человек: выбрать способ и маршрут передвижения. Целевой функцией являются потери пассажиров (дискомфорт, время, стоимость проезда), выраженные в денежной форме.

Для транспортных операторов и муниципалитета множество стратегий в целом совпадает. Выделим два основных инструмента управления: уровень тарифов и расписание движения. Например, муниципалитет может устанавливать тариф, а транспортные операторы – расписание движения.

Целью транспортного оператора является максимизация прибыли, а для муниципалитета важно учитывать отрицательное воздействие транспортной системы на городскую среду, а также потери времени населения на перемещение.

Основные параметры моделей управления системой городского пассажирского транспорта

Введем основные параметры, описывающие городскую транспортную систему. Во-первых, необходимо определиться с количеством участников системы городских пассажирских перевозок.

Очевидно, что сторону муниципалитета представляет один участник. На самом деле, несколько органов власти, муниципальных предприятий и общественных организаций могут определять и реализовывать городскую транспортную политику. Однако в этом случае должна быть принята программа развития пассажирского транспорта, работающего в интересах города.

Основные параметры системы городского пассажирского транспорта:

N – количество пассажиропотоков;

x_i – стратегия пассажиропотока i ;

X_i – множество стратегий пассажиропотока i ;

y – стратегия муниципалитета;

Y – множество стратегий муниципалитета;

K – количество транспортных операторов.

z_k – множество стратегий транспортного оператора k ;

Z_k – стратегии транспортного оператора k ;

H_k – прибыль транспортного оператора;

G_i – потери пассажиропотока i ;

F – потери муниципального образования.

Очевидно, что все участники влияют друг на друга, поэтому функции прибыли и потерь зависят от всех параметров.

Постановки задач управления системой городского пассажирского транспорта

В настоящее время существует три варианта функционирования рынка:

1. Административная модель подразумевает управление городской транспортной системой муниципалитетом, т.е. все основные параметры работы транспорта решаются на уровне городской администрации.

2. Свободный рынок означает невмешательство городских органов власти в работу транспортной системы. Транспортные операторы определяют правила работы исходя из взаимного влияния, т.е. конфликта интересов.

3. Смешанный рынок содержит элементы двух предыдущих моделей. Например, муниципальным транспортом управляет администрация города, а маршрутные такси функционируют по правилам свободного рынка.

Данная классификация применима в различных секторах экономики. Однако математические модели рынка городских пассажирских перевозок практически не исследуются [5]. Поэтому целью данной работы является описание систем управления ГПТ в общем виде.

Классификация систем управления представлена в таблице.

Вариант	Модели управления ГПТ	Обобщение моделей управления с участием пассажиропотоков
Административная модель	$F(y) \rightarrow \min_{y \in Y}$	$F(y, \{x_i\}_{i=\overline{1, N}}) \rightarrow \min_{y \in Y},$ $G_i(x_i, y) \rightarrow \min_{x_i \in X_i}, i = \overline{1, N}$
Смешанный рынок	$F(y, \{z_m\}_{m=\overline{1, K}}) \rightarrow \min_{y \in Y},$ $H_k(y, \{z_m\}_{m=\overline{1, K}}) \rightarrow \max_{z_k \in Z_k},$ $k = \overline{1, K}$	$F(y, \{z_m\}_{m=\overline{1, K}}, \{x_i\}_{i=\overline{1, N}}) \rightarrow \min_{y \in Y},$ $G_i(y, x_i, \{z_m\}_{m=\overline{1, K}}) \rightarrow \min_{x_i \in X_i}, i = \overline{1, N},$ $H_k(y, \{x_i\}_{i=\overline{1, N}}, \{z_m\}_{m=\overline{1, K}}) \rightarrow \max_{z_k \in Z_k},$ $k = \overline{1, K}$

Свободный рынок	$H_k \left(\{z_m\}_{m=1, \overline{K}} \right) \rightarrow \max_{z_k \in Z_k},$ $k = \overline{1, K}$	$G_i \left(x_i, \{z_m\}_{m=1, \overline{K}} \right) \rightarrow \min_{x_i \in X_i}, i = \overline{1, N},$ $H_k \left(\{x_i\}_{i=1, \overline{N}}, \{z_m\}_{m=1, \overline{K}} \right) \rightarrow \max_{z_k \in Z_k},$ $k = \overline{1, K}$
-----------------	--	--

Только одна из моделей имеет единственный критерий. Поэтому возникает необходимость в решении многокритериальных задач оптимизации системы городского пассажирского транспорта. Наличие множества участников приводит к необходимости использования аппарата теории игр для решения оптимизационных задач. Решением игры является ситуация равновесия Нэша.

Основные работы автора направлены на постановки задач и доказательство существования равновесия Нэша в чистых стратегиях. В настоящее время разработаны модели каждого типа. Например, модель свободного рынка описана для обычной модели в [2], а обобщение представлено в [1]. Административная модель рассмотрена в [4], смешанная обобщенная модель – в [3].

Литература

1. Корягин М. Е. Конкуренция потоков общественного транспорта // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 8. – С. 120–130.
2. Корягин М. Е. Конкуренция транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 3. – С. 143–152.
3. Зварыч Е. Б., Корягин М. Е. Математическая модель рынка городских пассажирских перевозок с участием муниципального и коммерческих операторов // Системы. Методы. Технологии. – 2010. – № 1. – С. 89–92.
4. Корягин М. Е. Минимизация суммарных затрат времени пассажиров и городского пассажирского транспорта // Устойчивость и процессы управления. – Т. 3: Секция 9–10: Труды Международной конференции (Санкт-Петербург, 29 июня – 1 июля 2005) / Под ред. Д. А. Овсянникова, Л. А. Петросяна. – СПб.: СПбГУ, НИИ ВМ и ПУ, ООО ВВМ, 2005. – С. 1557–1565.
5. Hollander Y. & Prashker, J. N. The Applicability of Non-Cooperative Game Theory in Transport Analysis // Transportation. – 2006. – Vol. 33 (5). – P. 481–496.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ВИДЕ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М. В. Косенкова

Кемеровский государственный университет

В работе рассматривается динамическая модель социальной системы, функционирующей на временном интервале $[0, T]$, разбитом на промежутки $[0, 1], [1, 2], \dots, [T-1, T]$.

Социальная система может быть формально представлена как совокупность классов $R_i, i = 1, \dots, m$, объединяющих объекты, обладающие одним и тем же сочетанием некоторого набора признаков и отношений между классами, характеризующих возможность перехода из класса в класс с определенной вероятностью. Структура социальной системы представлена в виде графа F , где множество его вершин соответствует классам группировки, а множество дуг – возможные переходы из класса в класс.

Под динамикой социальной системы (социальным процессом) будем понимать изменение численности объектов в классах R_i с течением времени. Обозначим $r_i(t)$ – ожидаемое количество объектов в классе R_i в момент времени t . Следовательно, $r_i(t-1)p_{ij}(t)$ – ожидаемое количество объектов, переходящих из класса i в класс j .

Тогда в момент времени t величина $r_i(t)$ определяется следующим образом:

$$r_i(t+1) = r_i(t) + \sum_{j=1}^m p_{ji}(t)r_j(t-1) - \sum_{j=1}^m p_{ij}(t)r_i(t-1), \quad i = 1, \dots, m; \quad t = 1, \dots, T.$$

Будем предполагать, что вероятность перехода зависит от различных факторов, т. е. можно записать $p_{ij}(t) = f(u_{ij}(t))$. И рассмотрим случай, когда

$f(u_{ij}(t))$ линейна, т. е. $f(u_{ij}(t)) = \sum_{k=1}^s \alpha_{ij}^k u_{ij}^k(t)$ и для любого $t = 1, \dots, T$ зависимость не меняется.

Тогда математическая модель социальной системы описывается следующими соотношениями:

$$r_i(t+1) = r_i(t) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s \alpha_{ji}^k u_{ji}^k(t)r_j(t-1) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s \alpha_{ij}^k u_{ij}^k(t)r_i(t-1), \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad t = 0, \dots, T-1;$$

$$r_i(0) = r_i^0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\alpha_i^t / N \leq r_i(t) \leq \beta_i^t / N; \quad t = 1, \dots, T; \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s \alpha_{ij}^k u_{ij}^k(t)r_i(t-1) \leq r_i(t-1); \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, m; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^s \alpha_{ij}^k u_{ij}^k(t) r_i(t-1) \geq 0, \quad j=1, \dots, m; \quad t=1, \dots, T; \quad i=1, \dots, m; \quad (5)$$

$$V(r^0, u) = M\left(\sum_{t=0}^{T-1} v^t(r(t), u(t))\right) \rightarrow \max, \quad (6)$$

где $r_i(t)$ – ожидаемое число объектов в классе R_i в момент времени t ; $u(t) = \left\| u_{ij}^k(t) \right\|_{m \times m \times s}$, $u_{ij}(t) = (u_{ij}^1(t), u_{ij}^2(t), \dots, u_{ij}^s(t)) \in U_t$ – вектор факторов, влияющий на переход объектов из класса R_i в класс R_j в момент времени t ; U_t – множество допустимых управлений в момент времени t , $t=1, \dots, T$; α_i^t, β_i^t – фиксированные числа, выражающие ограничения на численность класса R_i ; $v^t(\cdot)$ – заданная числовая функция, характеризующая эффективность t -го шага. Условия (4) отражают тот факт, что из класса не может выйти больше объектов, чем в нем есть, (5) – количество переходящих объектов из класса в класс не может быть отрицательно, (6) – математическое ожидание от суммарной эффективности каждого шага.

Таким образом, построена математическая модель социальной системы в виде дискретной задачи оптимального управления. Решение данной задачи может быть найдено с помощью метода динамического программирования, в результате применения которого получим оптимальное управление системой и соответствующую ему оптимальную траекторию, а также максимальное значение критерия качества.

Литература

1. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 400 с.
2. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М.: Наука, 1973. – 446 с.
3. Злобина С. Л. Динамическая модель формирования заданных структурных характеристик социальной системы // Обработка данных и управление в сложных системах: Сборник статей. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. – С. 32–41.
4. Миркин Б. Г. Анализ качественных признаков и структур. – М.: Статистика, 1980. – 319 с.
5. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. – М., 1973. – С. 115–118.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛИЕНТА НА ПАРАМЕТРЫ КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ В КОММЕРЧЕСКОМ БАНКЕ

И. С. Котова

Кемеровский государственный университет

Развитие кредитных операций требует повышения качества управления кредитным риском. Кредитные организации должны реализовать меры по формированию и совершенствованию системы оценки качества выданных ссуд, а также кредитного портфеля в целом.

Наиболее часто в статистике используются количественные признаки (возраст, доход и т. п.). С количественными признаками допустимы все арифметические операции. Однако качественные признаки также допускают измерение: можно подсчитать количество объектов, попадающих в ту или иную категорию данного признака (то есть подсчитать частоту встречаемости этой категории).

Имеются три основные (количественные) модели для качественных данных: распределения (многомерные таблицы сопряженности) признаков, таблицы «объект-признак», матрицы связи между объектами.

Таблицей сопряженности называется прямоугольная таблица (матрица), по строкам которой указываются категории одного признака, а по столбцам – категории другого. Такие таблицы называют таблицами «признак-признак». Каждый объект совокупности попадает в какую-либо из клеток этой таблицы в соответствии с тем, к какой категории он относится по каждому из двух признаков. В зависимости от характера распределения этих частот внутри таблицы можно судить о том, существует ли связь между признаками.

Существуют также таблицы «объект-объект» и «объект-признак».

Итак, таблица «объект-признак» представляет собой модель данных, в которой каждый объект задан своим номером $i = 1, 2, \dots, N$ и значениями признаков x^1, x^2, \dots, x^n на этом объекте. Каждый признак x^k материализуется в таблице «объект-признак» в виде столбца его значений на объектах, в котором сосредоточена вся информация о признаке, содержащаяся в таблице. Иначе говоря, столбцы таблицы представляют собой модели признаков. Аналогично строки этой таблицы являются моделями объектов.

Проверка независимости

Даже если между признаками нет никакой связи, из этого еще не следует, что они независимы, поскольку в игру может вмешаться случайная вариация. Поэтому нужны средства проверки независимости.

Пусть в таблице «объект-признак» существуют I возможных категорий для переменной A , обозначаемых A_1, A_2, \dots, A_I , и J возможных категорий для B (B_1, B_2, \dots, B_J). Определим, независимы ли две переменные. f_{ij} – наблю-

даемая частота объектов, попавших в ячейку (A_i, B_j) . Данные представляют собой наблюдаемые частоты, распределенные по IJ ячейкам.

Наблюдаемые частоты для $I \times J$ данных:

	B_1	B_2	:	B_j	Всего
A_1	f_{11}	f_{12}	:	f_{1j}	f_{10}
A_2	f_{21}	f_{22}	:	f_{2j}	f_{20}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_I	f_{i1}	f_{i2}	:	f_{ij}	f_{i0}
Всего	f_{01}	f_{02}	:	f_{0j}	f_{00}

В этой таблице введены некоторые обозначения для сумм. Символ f_{i0} выбран для (частной) суммы всех объектов, попавших в категорию A_i , и аналогично f_{0j} – для суммы относящихся к категории B_j ; тогда как f_{00} – это общий итог всех рассмотренных случаев. Или математически:

$$f_{i0} = \sum_j f_{ij}, f_{0j} = \sum_i f_{ij}, f_{00} = \sum_i f_{i0} + \sum_j f_{0j} = \sum_i \sum_j f_{ij}.$$

Если A и B независимы, то ожидается, что их доли в j -м столбце, как и в i -й строке, будут более или менее одинаковыми для всех столбцов, т. е.

$$\frac{f_{ij}}{f_{0j}} \cong \frac{f_{i0}}{f_{00}}$$

для всех i и j .

Пусть p_{ij} – вероятность того, что случайно выбранный объект попадет в ячейку (i, j) . Если A и B независимы, то

$$P_{ij} = p_{i0} p_{0j}; i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J.$$

Хотя значения $\{p_{ij}\}$ и неизвестны, отношения $\{f_{ij}/f_{00}\}$ служат им оценками, и эти оценки вполне можно использовать для заключений об ожидаемых частотах ячеек при условии независимости A и B . Они имеют вид

$$e_{ij} = \frac{f_{i0} f_{0j}}{f_{00}}.$$

Чтобы установить независимость между A и B , применяют широко известную статистику X^2 , то есть определяют, значимо ли различаются множества $\{e_{ij}\}$ и $\{f_{ij}\}$. Для этого необходимо знать соответствующее число степеней свободы, которое здесь равно $(I-1)(J-1)$.

Отсюда для критерия X^2 получаем результат:

$$X^2 = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}.$$

Затем вычисляется табличное значение критерия χ^2 с вероятностью p и степенью свободы $(I-1)(J-1)$. Если значение $X^2 < \chi^2$, то наблюдаемое множество чисел проявляет существенные признаки того, что А и В независимы.

Таким образом, установлена зависимость выбора кредита и задолженности по ним от некоторых личных характеристик заемщика.

Разработаны программы построения таблиц сопряженности и проверки независимости признаков средствами VBA, которые дают возможность работать с другими аналогичными данными, т. е. можно установить зависимость между признаками за другой период времени.

Литература

Аптон Г. Анализ таблиц сопряженности. – М., 1982.

Миркин Б. Г. Анализ качественных признаков. – М., 1976. – С. 3–18.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДВИЖЕНИЯ ТОВАРА НА РЫНКЕ БЕНЗИНА

И. А. Курынова

Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова

Исследования последних лет показали важность математического моделирования процессов торговых сетей, занимающихся распределением товара и донесением его до конечного потребителя, что необходимо в первую очередь участникам этих сетей – производителям, посредникам, конечным продавцам, новым компаниям, ищущим своё место на рынке, руководителям любой цепочки сети для прогнозирования последствий своих управленческих решений.

Производители, посредники и потребители рынка одного продукта образуют единую связанную торговую сеть, которую можно представить в виде связного конечного ориентированного графа $G = \langle V, X, H \rangle$, где V – множество вершин графа; X – множество дуг; H – отображение $H: X \rightarrow V \times V$.

Вершины $i \in E$ интерпретируются как микрорынки, где устанавливаются цены Y_i , согласно которым осуществляется обмен продукцией между различными субъектами-дугами графа.

На рис. 1 представлена цепочка торговой сети, где e_i – покупатель; e_j – продавец; X_{ij} , X_{jk} – объёмы реализуемого товара, идущего по соответствующим дугам; F – финансовые средства, поступающие от покупателя к продавцу.

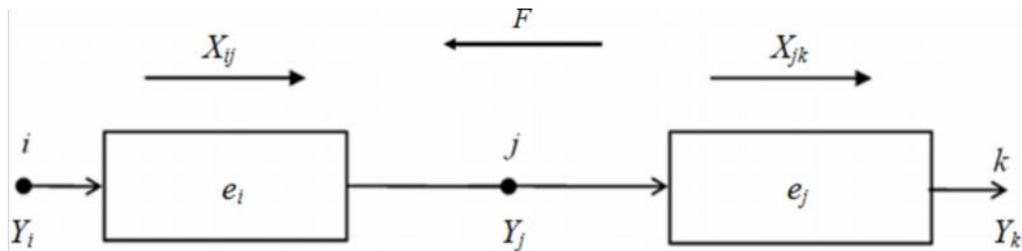


Рис. 1. Цепочка торговой сети

Закономерности продвижения товара в торгово-посреднической сети имеют родственную природу с законами Ома и Кирхгофа в электрических цепях и не зависят от природы преобразуемой энергии.

Для составления математической модели продвижения товарных потоков по сети используются следующие законы: закон сохранения материального потока в узле сети и закон сохранения стоимости товара.

Небольшие цепочки системы «продавец – покупатель» в торгово-посреднической сети рассматривались на рынке топлива Республики Хакасия. Данные по продаже бензина Аи-92 были получены на автозаправочной станции г. Абакана.

Рынок топлива – удобный объект для приложения предложенной модели, т.к. пространственно-временные масштабы его существования позволяют рассматривать систему как непрерывную проводящую среду с устанавливающимися потоками.

Цепь последовательного соединения «продавец – конечный потребитель» можно описать системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{1}{a_2} X(t) + rX'(t) = X_0(t), \\ \frac{1}{a_2} Y(t) + rY'(t) = Y_0(t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$, где $a_2 = \frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{X_0 - X_1}{Y_1 - Y_0}$ – коэффициент, характеризующий изменения объема от изменения цены.

Проведено моделирование системы с шагом $\Delta t_1 = 1$ нед при значениях коэффициентов:

$$a_2 = \frac{X_0 - X_y}{Y_0 - Y_y} = 79,902 > 0, \quad E_s = \frac{X_0 - X_y}{Y_0 - Y_y} \cdot \frac{Y_y}{X_y} = 0,949 > 0.$$

При изменении цены продавца в процессе купли-продажи наблюдается движение к устойчивому состоянию (рис. 2). Доказано, если значения $Y_0 < Y_y$ и $X_0 < X_y$, то функции цены и объема возрастают до установившихся значений.

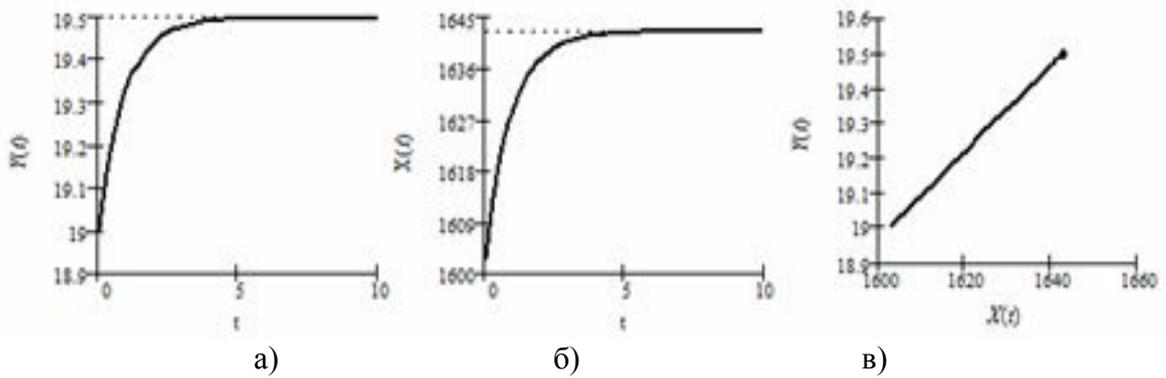


Рис. 2. Изменения функций во времени: а) – цены $X(t)$; б) – объёма $Y(t)$; в) – на плоскости $(X(t), Y(t))$

При решении задачи моделирования цепи последовательного соединения «продавец – покупатель (посредник)» составляется система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} rX(t) + a_1X'(t) = X_0(t) \\ rY(t) + a_1Y'(t) = Y_0(t) \end{cases}, \quad (2)$$

с начальными условиями $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$, где $a_1 = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_1 - Y_0}{X_0 - X_1}$ – коэффициент, характеризующий изменения цены в зависимости от изменения объемов потребления товара.

При моделировании системы использовались данные:

$$a_1 = \frac{Y_y - Y_0}{X_0 - X_y} = 0,000022 > 0, \quad E_D = \frac{Y_y - Y_0}{X_0 - X_y} \cdot \frac{X_y}{Y_y} = 0,0618 > 0, \quad r = 0,00037.$$

При изменении цены в системе «продавец – конечный потребитель» наблюдается движение к устойчивому состоянию (рис. 3). Было доказано, если значения $Y_0 > Y_y$ и $X_0 < X_y$, то функция $Y(t)$ убывает, а функция $X(t)$ возрастает до установившихся значений.

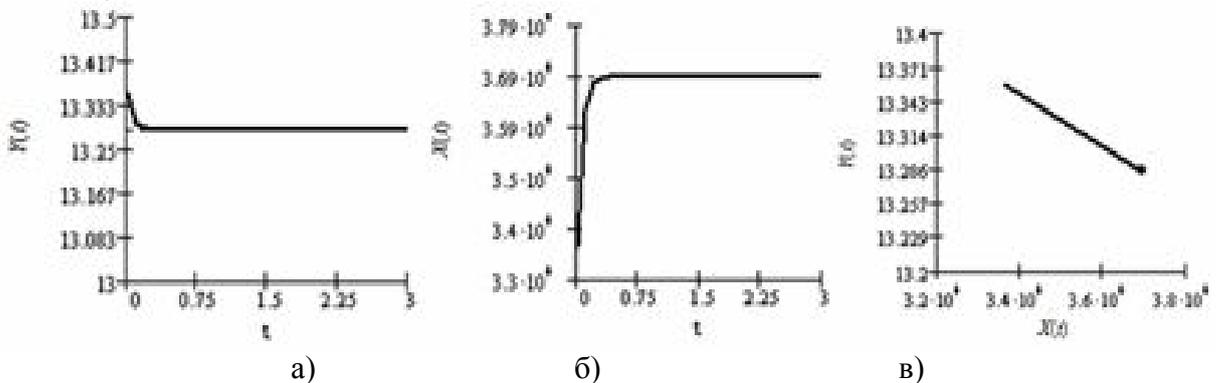


Рис. 3. Изменения функций во времени: а) – цены $X(t)$; б) – объёма $Y(t)$; в) – на плоскости $(X(t), Y(t))$

При последовательном соединении цепи «посредник – конечный потребитель», где посредник рассматривается как покупатель и продавец, со-

ставляется система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

На основе теории линейных электрических цепей, теории спроса и предложения была разработана математическая модель динамики цен и объёмов продаж, позволяющая оценивать устойчивость взаимосвязи «продавец – покупатель» и выявлять границы возможностей субъектов рынка.

Литература

1. Дулесов А. С. Моделирование парных взаимодействий «продавец – покупатель» в торгово-посреднических сетях // Информационные технологии: особенности применения и приоритетные направления развития / Под общ. ред. С. С. Чернова. – Новосибирск: ЦРНС, Сибпринт, 2008. – 179 с.

2. Дулесов А. С., Курынова И. А. Анализ динамики взаимодействий «посредник – конечный потребитель» в торгово-посреднической сети // Вестник ИжГТУ. – 2009. – № 4 (44). – С. 178–182.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ АДМИНИСТРАТИВНО-ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО ДЕЛЕНИЯ РЕГИОНА

В. В. Мешечкин, А. Н. Павличук

Кемеровский государственный университет

Административно-территориальное деление (АТД) – это разделение территории унитарного государства или субъекта федеративного государства на части (административно-территориальные единицы, АТЕ), в соответствии с которым строится система местных органов власти. Оно обусловлено природными, политическими, экономическими, национальными и иными факторами.

Целью данной работы является построение математической модели для оптимизации АТД некоторого региона, позволяющей на основе строгих формализованных методов выявить положительные и отрицательные стороны различных вариантов деления и рассчитать наиболее оптимальное решение.

В качестве критерия оптимальности АТД берется минимизация издержек на поддержание его структуры без учета стоимости перестройки системы из одной структуры в другую. Вследствие этого учитываются только дорогие и сложно изменяемые элементы регионов, такие как населенные пункты (НП), вынесенные за их границы экономические объекты, а также связывающие их системы передачи управленческих решений (команд, ресурсов, товаров и т. п.). Но так как все объекты как юридические лица имеют привязку к населенному пункту, то в дальнейшем они считаются единым целым с НП. Поэтому в результате остаются только две группы объектов: НП и управленческие сети. Каждый НП характеризуется численностью населения в нем, а сеть определяется расходами на передачу управлений между НП.

Задача заключается в том, чтобы из числа всех НП выбрать административно-территориальные центры (АТЦ) и подчинить им оставшиеся пункты, образовав тем самым ряд административно-территориальных единиц. При этом оптимальность назначения центров и выделения отдельных единиц должна пониматься с точки зрения минимизации суммарных административно-управленческих расходов, состоящих из затрат на содержание административного аппарата в центрах и на деятельность центров по управлению подчиненными им НП.

Введем необходимые обозначения.

Общее число НП обозначим через n , а число выделяемых АТЦ (и, соответственно, количество АТЕ) – через m . Естественно считать, что $m \leq n$.

Тогда процесс административно-территориального деления будет эквивалентен разбиению множества всех НП $N = \{1, \dots, n\}$ на m непересекающихся подмножеств D_j , $j = 1, \dots, m$, каждое из которых соответствует отдельной АТЕ:

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^m D_j &= N, \\ D_j \cap D_k &= \emptyset, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad j \neq k, \\ D_j &\neq \emptyset, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Каждый НП должен быть подчинен какому-нибудь административно-территориальному центру, причем только одному. Для определения отношения подчинения введем переменные R_{ij} ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$), которые принимают значение 1 при условии подчиненности i -го НП j -му АТЦ, и 0 – в противном случае:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in D_j; \\ 0, & \text{если } i \notin D_j. \end{cases}$$

При этом считается, что всякий АТЦ также является НП в некоторой АТЕ и подчинен самому себе.

Из этих переменных составляется матрица подчиненности R , имеющая размерность $n \times m$:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nm} \end{pmatrix}.$$

Требование подчиненности каждого i -го НП равно одному АТЦ и будет выражаться соотношением

$$\sum_{j=1}^m R_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Количество НП в разных АТЕ может варьироваться. Предположим, что минимально возможное число НП в составе отдельной АТЕ (считая центр) равняется q ($0 < q < n$), тогда должно выполняться условие

$$q \leq \sum_{i=1}^n R_{ij} \leq n - (m-1)q, \quad j = 1, \dots, m.$$

Как частный случай можно взять $q = 1$, тогда в отдельную АТЕ может быть выделен один АТЦ без подчиненных ему НП (например, при его значительной удаленности и обособленности).

Общее число НП остается неизменным (и равным n), поэтому

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij} = n. \quad (2)$$

Однако условие (2) напрямую может быть получено из (1) путем суммирования по i , поэтому при построении математической модели оно является избыточным и в дальнейшем использоваться не будет.

Как уже говорилось, оптимальность АД, а следовательно, оптимальность выбора значений переменных R_{ij} , будем оценивать с позиции минимизации суммарных административно-управленческих расходов, состоящих из двух компонент: затрат на содержание самих центров и затрат на деятельность центров по управлению подчиненными им НП.

При определении первой составляющей будем считать, что расходы на поддержание каждого АТЦ постоянны и не зависят от размеров НП, выступающего в роли центра, размеров соответствующей АТЕ или каких-либо других факторов. Величину этих издержек, которые будем называть административными, для каждого АТЦ примем равной C . Тогда часть суммарных административно-управленческих расходов, отвечающая затратам на содержание административного аппарата в центрах, будет зависеть только от общего числа АТЦ и определяться формулой

$$F_1(m) = mC. \quad (3)$$

Вторая часть расходов (на административное управление) может быть определена как издержки на передачу управленческих решений населению подчиненных НП, транспортировку ресурсов и товаров и другие подобные нужды.

Обозначим количество жителей i -го НП через S_i , удельные (на одного человека) расходы на передачу управления i -му НП от k -го НП – через P_{ik} . Значение коэффициента P_{ik} отражает возможность и целесообразность установления отношения подчиненности между данными пунктами: чем оно выше, тем более затруднено управление i -м НП со стороны k -го. Это позволяет принимать во внимание различные географические, национальные и прочие особенности в пределах территории рассматриваемого региона. Как один из вариантов определения величины P_{ik} можно предложить учет степени уда-

ленности НП друг от друга (расстояние между ними) с поправкой на природные, политические, экономические, национальные и иные факторы (коэффициенты сходства или различия).

Тогда управленческие издержки всех АТЕ будут равны:

$$F_2(m, R) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} S_i R_{ij} . \quad (4)$$

Суммируя (3) и (4), найдем общие административно-управленческие расходы:

$$F(m, R) = F_1(m) + F_2(m, R) = mC + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} S_i R_{ij} , \quad (5)$$

которые и будем минимизировать в задаче.

Объединяя приведенные выше соотношения, получаем модель следующего вида:

$$F(m, R) = mC + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} S_i R_{ij} \rightarrow \min , \quad (6)$$

$$q \leq \sum_{i=1}^n R_{ij} \leq n - (m - 1)q , \quad j = 1, \dots, m , \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^m R_{ij} = 1 , \quad i = 1, \dots, n , \quad (8)$$

$$R_{ij} \in \{0, 1\} , \quad i = 1, \dots, n , \quad j = 1, \dots, m , \quad m = 1, \dots, n . \quad (9)$$

Условия (6)–(9) образуют оптимизационную задачу с целочисленными переменными m и R_{ij} – задачу целочисленного (дискретного) программирования.

Зафиксировав в ней конкретное значение m , получим задачу параметрического программирования, решая которую, найдем оптимальные значения $R_{ij}^*(m)$ и складывающуюся из них матрицу подчиненности $R^*(m)$, т. е. определим оптимальное (в смысле решаемой задачи) АТД региона для заданного количества АТЕ.

Подставив $R_{ij}^*(m)$ в (4) и (5), получим выражения для функций управленческих издержек и общих административно-управленческих расходов относительно m :

$$F_2^*(m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} S_i R_{ij}^*(m) , \quad (10)$$

$$F^*(m) = F_1(m) + F_2^*(m) = mC + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} S_i R_{ij}^*(m) . \quad (11)$$

Функция (10) для любого m неотрицательна и монотонно убывает по m . А так как функция (3) линейна по m и возрастает, то функция суммарных расходов (11), являющаяся их суммой, ограничена снизу.

Следовательно, задача (6)–(9) имеет оптимальное решение, найдя которое, мы определим, на сколько АТЕ нужно разбить рассматриваемый регион, какие населенные пункты назначить центрами и как подчинить им остальные пункты.

ОБЗОР МОДЕЛЕЙ СТИМУЛИРОВАНИЯ СБЫТА ПРОДУКЦИИ

А. С. Морозова, М. Д. Ахметгареева

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Стимулирование сбыта – это система мер, направленных на стимулирование покупательского спроса, ускорение и интенсификацию процесса реализации товаров или услуг. Перед стимулированием сбыта всегда ставится задача активизировать процесс продаж. Поэтому оно рассматривается как действия, мероприятия, акции, направленные на возникновение дополнительной мотивации к совершению сделки в самое ближайшее время.

По результатам исследований Россия занимает четвертое место в рейтинге привлекательности развивающихся рынков для глобальных розничных сетей, находясь в группе стран, на рынки которых рекомендуется входить немедленно [5, 14]. По мнению М. Роджерса, под напором крупных сетей количество независимых продавцов розницы будет сокращаться, последние не смогут удерживать конкурентоспособную торговую наценку и будут вытеснены с рынка [9]. Многие западные торговые компании в качестве своих конкурентов планируют видеть мелкооптовые рынки и ярмарки [3, 4]. Таким образом, в результате усложнения экономических процессов и возрастания конкуренции в отечественной торговой отрасли проблема разработки и внедрения научно обоснованных методов принятия решений для управления торговыми компаниями представляется весьма актуальной. Особую актуальность представляет исследование процесса принятия решений в сложноорганизованных торговых компаниях (в специальной литературе используется термин «двухуровневые торговые компании») [11].

В настоящее время накоплен значительный научный и практический потенциал моделирования торгово-экономических процессов. Важный вклад в разработку методологии экономико-математического моделирования процессов в торговле внесли М. И. Баканов, В. П. Воронин, К. К. Гордеев, А. И. Гребнев, М. М. Дарбинян, В. Я. Канторович, С. М. Капелюш, А. В. Орлов, В. А. Сокович, А. А. Спирин, А. Ф. Шулежко, А. И. Файницкий и др. [6]. Отечественная экономико-математическая школа внесла значительный вклад в мировую науку [12]. По ряду причин в 1990-х гг. количество исследований в этой области значительно сократилось. В качестве основных причин называются функциональные изменения в экономике и изменение структуры платежеспособного спроса на результаты экономических исследований в России [8]. Эффективность является оценкой степени достижения целей торговой

компании в результате управления. Проблемам эффективности управления и деятельности компаний уделено внимание в работах Л. Антосенковой, В. Архипова, Л. Зайверта, Г. Попова, Ю. Семенова, Г. Слезингера, А. Сильченкова, В. Чернова, В. Шкатуллы и др.

Значительная часть исследований в области математического моделирования и оптимизации деятельности компаний уделена исследованию проблемы управления запасами как существенного фактора эффективного функционирования производственной или торговой системы. Подходы к определению функции спроса и издержек на хранение, используемые в задаче управления запасами, могут быть применимы и для оптимизации товарного ассортимента. Исследованию проблем формирования товарных запасов посвящены работы таких отечественных ученых, как М. В. Алябьева, И. И. Гармаш, Е. Р. Добронрави, А. Н. Ищенко, В. К. Калугин и др. Собственно проблема оптимальности товарного ассортимента рассматривалась такими авторами как Н. Н. Анохина, Б. Г. Балмаев, А. П. Бобович, А. Богданов, Э. Ван Херпен, А. Гош, Б. Е. Кан, А. А. Корнеев, А. Крамарев, Л. Макалистер, А. Мерсер, Р. Питере, Д. Рафтри, Б. Т. Рэчфорд, А. Рябцев, И. Трушков, М. Ю. Фортуна, С. Дж. Хоч, М. Элтон и др. [10, 13].

Основное внимание при оптимизации ассортимента уделялось маркетинговым инструментам. Лишь немногие авторы данного направления исследований связывали оптимизацию товарного ассортимента с эффективностью деятельности торговой компании, так же как и исследования в области спроса не связывали в единую цепь моделирование рентабельности компании с учетом принципов управленческого учета, оптимальности товарного ассортимента и определения потенциального спроса. Большая часть исследований, направленных на изучение спроса, исходила из определенности функции спроса. Сфера обращения играет существенную роль в рыночной экономике. Анализ тенденций развития сферы обращения на Западе позволяет сделать прогноз о перспективах развития отечественной торговой отрасли. С уверенностью следует ожидать увеличения конкуренции и специализации, укрупнения торговых компаний и уменьшения их количества, снижения нормы прибыли, уменьшения уровня розничных цен и торговой наценки. Существенный вклад в усиление конкуренции и снижение доходов компаний вносит «информационная революция», благодаря которой покупатель получает информацию о товаре и ценах конкурентов с большей скоростью и меньшими издержками, возрастает чувствительность покупателя к разнице цен на один товар у различных продавцов. В новых условиях значительно возрастает необходимость в применении передовых научно обоснованных методов принятия решений по управлению торговыми компаниями. Об обострении конкуренции и необходимости внесения изменений в практику управления отечественными компаниями свидетельствуют снижение доходности торгового бизнеса, увеличивающиеся товарные остатки и все более ранние распродажи. Западные компании успешно используют ме-

тоды уменьшения товарных запасов, увеличения их оборачиваемости, оптимизации заказа товаров, изучения потребностей покупателей, широко применяют информационные технологии (сканирование, внутрифирменные сети и др.). Использование подобного инструментария позволяет существенно повышать эффективность торговых компаний, снижать уровень розничных цен, издержек и торговой наценки. Советские предприятия в условиях централизованного планирования народного хозяйства, по мнению Н. Алексеева, не нуждались в выработке реакции на изменение условий хозяйственной деятельности.

Для эффективного управления торговой компанией М. Д. Кулинич предлагает использовать рефлексивный подход, сущность которого заключается не только в реагировании на изменение условий внешней среды, но и в активном воздействии на неё для формирования благоприятных для компании условий. Для торговой компании рефлексивный подход заключается не только в удовлетворении потребностей покупателей, но и в активном их формировании. М. В. Алябьева отмечает, что в современной экономической ситуации большинство отечественных торговых фирм подходят интуитивно к вопросу обоснования цены реализации товара, устанавливая на все товары примерно одинаковый размер торговой наценки.

Наиболее близкими к тематике исследования являются работы по управлению запасами и по так называемой микроструктуре рынка. Теория управления запасами является в настоящее время очень подробно разработанным разделом экономико-математических моделей [3, 7, 19–21]. В данных работах основным является учет потерь при хранении запасов на складах, а также потери от переполнения и опустошения склада. В торговле другие критерии оптимальности – получение максимальной выгоды в единицу времени, возможность регулировать спрос, изменяя розничную цену. Проводится исследование математических моделей регулирования спроса. Имеется классическая теория ценообразования, которая излагается во всех учебниках по микроэкономике и которая построена на основании соотношений спрос – цена и производство – цена [1, 2, 18]. Эти зависимости определяют так называемую равновесную цену, т. е. ту цену, по которой продается товар в состоянии равновесия рынка.

Однако этой равновесной цены еще надо достичь. Поэтому имеется целый ряд моделей [7] (паутинообразная модель, модель с прогнозированием цены, модель с учетом складов), в которых описывается процесс достижения равновесной цены. Однако эти модели не имеют практического применения.

Таким образом, несмотря на значительное количество исследований по отдельным направлениям эффективности и управления торговыми компаниями, применения математических методов для моделирования деятельности компаний и использования информации управленческого учета в качестве инструмента управления, существует необходимость рассмотрения про-

цессов формирования цены на товар и влияние скидок на эффективность работы торговой компании в смысле максимизации прибыли.

Литература

1. Asmussen S. On the Ruin Problem for Some Adapted Premium Rules // Probabilistic Analysis of Rare Events: Theory and Problems of Safety, Insurance and Ruin. – Riga, 1999. – P. 3–15.
2. Buss. Component Based Simulation Modeling. Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference, ed., J.A. Joines, R.R. Barton, K. Kang and P.A. Fishwick. Institute of Electrical and Electronics Engineers, Piscataway, New Jersey, U.S.A.
3. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 368 с.
4. Болт Г. Дж. Практическое руководство по управлению сбытом: Пер. с англ. / Под ред. Ф. А. Крутикова. – М.: Экономика, 1991. – 503 с.
5. Гармаш И. И. Анализ и принятие решений в сфере обращения потребительских товаров: концепция, моделирование, эффективность. – СПб., 1997. – 339 с.
6. Глухов В. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб., 2005. – 350 с.
7. Данилов Н.Н. Курс математической экономики: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2002. – 444 с.
8. Добронрави Е.Р. Организация работы сбытовых цепей. – М.: Мир, 2004. – 184 с.
9. Дон Пепперс и Марта Роджерс. Управление отношениями с клиентами. Managing Customer Relationships: A Strategic Framework by Don Peppers, 2000.
10. Иванов А.Е., Уланов В.А. Методы оптимизации и некоторые вопросы планирования хозяйственной деятельности. – СПб, ТЭИ, 1996.
11. Котлер Ф. Основы маркетинга: Пер. с англ. – М.: Бизнес книга; Има – Кросс Плюс, 1995. – 702 с.
12. Кочетыгов А. А. Финансовая математика: учеб. пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2004. – 477 с.
13. Моделирование производственно-инвестиционной деятельности фирмы: учеб. пособие для вузов / Под ред. Г. В. Виноградова. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 319 с.
14. Моисеева А. К., Аниськин Ю. П. Современное предприятие, конкурентоспособность, маркетинг, обновление. – М.: Внешторгиздат, 1993.
15. Морозова А. С., Моисеева С. П., Назаров А. А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 49–52.
16. Морозова А. С., Моисеева С. П., Одинцов К. М. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции (20–21 апреля 2007 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – Ч. 1. – С. 37–39.
17. Морозова А. С., Ронжина А. Н., Федосеева М. Г. О роли скидок в товарном обращении торгового предприятия // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции (20–21 апреля 2007 г.). Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – С. 39–40.
18. Терпугов А. Ф. Математика рынка ценных бумаг. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 164 с.

19. Фомин Г. П., Шарипов Г. С., Матрьюкова Л. И. Экономико-математическое моделирование явлений и процессов в торговле: учеб. пособие для студентов-дипломников всех фак. 1983. 31 с.
20. Фомин Г. П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 144 с.
21. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учеб. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.

ИЗУЧЕНИЕ ЗАНЯТОСТИ НАСЕЛЕНИЯ КЕМЕРОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Е. А. Николаева

Кемеровский государственный университет

Отношения в сфере занятости населения являются основополагающими в экономике любой страны и во многом определяют ее развитие. Достижение высокого уровня занятости – одна из основных целей макроэкономической политики государства. Экономическая система, создающая дополнительное количество рабочих мест, ставит задачу увеличить количество общественного продукта и тем самым в большей степени удовлетворить материальные потребности населения. При неполном использовании имеющихся ресурсов рабочей силы система работает, не достигая границы своих производственных возможностей. Немалый урон безработица наносит и жизненным интересам людей, не давая им приложить свое умение в том виде деятельности, в каком можно наилучшим образом проявить себя.

Предметом исследования является статистический анализ рынка труда Кемеровской области, направленный на оценку его состояния и развития.

Цель исследования – проведение комплексного статистического анализа занятости и безработицы в Кемеровской области.

В данной работе в качестве исследуемых временных рядов рассматриваются уровень занятости населения (в % к ЭАН) и уровень зарегистрированной безработицы (в % от ЭАН) Кемеровской области в течение 18 лет – с 1992 по 2009 г. включительно. Шагом ряда для них является 1 год.

Данные временные ряды являются интервальными, полными рядами относительных частных величин.

Все методы прогнозирования используют аппарат математической статистики, который требует от исходных данных, чтобы они были сопоставимы, достаточно представительны для проявления закономерности, однородны и устойчивы. Невыполнение одного из этих требований делает бессмысленным применение математического аппарата.

В данной работе были рассмотрены основные методы моделирования процессов и явлений, описываемых временными рядами.

Отклонение прогнозных значений уровня занятости населения (в % к ЭАН) и уровня зарегистрированной безработицы (в % от ЭАН) Кемеровской области в 2009 г. от фактических значений приведены в табл. 1.

Прогнозные значения

Название модели	$ \hat{y}_{18} - y_{18} $	
	Уровень занятости населения	Уровень зарегистрированной безработицы
Полином 1-го порядка	0,3213	0,2699
Полином 2-го порядка	5,9985	1,1949
Полином 3-го порядка	4,5147	1,3647
Простая экспоненциальная кривая	0,3091	0,7652
Логарифмическая парабола	6,1314	1,8181
Модифицированная экспонента	11,4467	0,4958
Кривая Гомперца	12,3884	0,5244
Логистическая кривая вида $\frac{1}{y_t} = k + ab^t$	13,5408	0,4632
Логистическая кривая вида $y_t = \frac{k}{1 + 10^{a+bt}}$	–	0,7191
Модель Маркова	2,3486	1,3977
Модель Юла	2,4273	1,7015
Модель Хольта	0,0988	0,0131
Модель Брауна	0,1231	0,0454

Наилучшие результаты дает модель Хольта. Следовательно, для прогнозирования значений исследуемых показателей в 2010–2011 гг. будем использовать эту модель.

Построим модель Хольта для ряда «Уровень занятости населения Кемеровской области (в % к ЭАН)» и ряда «Уровень зарегистрированной безработицы в Кемеровской области (в % от ЭАН)», используя все имеющиеся статистические данные (за 1992–2009 гг.). Построенные модели используем для прогнозирования на будущее (2010–2011 гг.).

Любой статистический прогноз носит приближенный характер. Поэтому при составлении прогнозов оперируют не точечной, а интервальной оценкой, определяя доверительные интервалы прогноза.

Интервальный прогноз для адаптивной модели Хольта строится как для линейной модели кривой роста.

$$U_y = y_{n+\tau} \pm t_\alpha S_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2\tau-1)^2}{n(n^2-1)}},$$

где τ – период упреждения; $y_{n+\tau}$ – точечный прогноз по модели на $(n + \tau)$ -й момент времени; t_α – табличное значение критерия Стьюдента для задан-

ного уровня значимости; S_y – среднее квадратическое отклонение прогнозируемого показателя; n – число наблюдений ряда.

Величина S_y определяется по формуле

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m}},$$

где y_i, \hat{y}_i – соответственно фактические и расчетные значения уровней временного ряда; n – число уровней ряда; m – количество параметров в уравнении тренда.

На основе точечного прогноза на 2010–2011 гг., полученного по модели Хольта, построим интервальный прогноз уровня занятости населения Кемеровской области (в % к ЭАН) и уровня зарегистрированной безработицы в Кемеровской области (в % от ЭАН) в виде 90 % доверительных интервалов.

В системе комплексного анализа занятости населения региона важны данные не только в целом по области, но и информация в разрезе городов и районов, которая чаще всего приводится в усредненных областных показателях.

В данной работе была проведена сравнительная оценка положения муниципальных районов Кемеровской области по показателям занятости населения в сопоставлении с данными по региону.

В основу многомерного анализа положен информационный массив, включающий годовые значения 4 показателей занятости 18 муниципальных районов Кемеровского региона в 2007 и 2008 гг.

Для анализа внутрирегиональной структуры и выявления наиболее близких по показателям занятости районов Кемеровского региона был применен кластерный анализ.

Классификацию проведем на основе 4 показателей:

X_1 – уровень зарегистрированной безработицы, в % к численности населения в трудоспособном возрасте;

X_2 – работающие неполное рабочее время по инициативе администрации, в % к среднесписочной численности;

X_3 – выбыло работников по сокращению штатов за год, в % к среднесписочной численности;

X_4 – нагрузка незанятого населения на одну заявленную вакансию, человек.

Данные, подвергаемые классификации, предварительно стандартизированы (табл. 2, 3).

Таблица 2

Распределение районов Кемеровской области по кластерам в 2007 г.

Кластер	Районы, вошедшие в кластер
1	Крапивинский, Ленинск-Кузнецкий, Тисульский, Тяжинский, Чебулинский, Юргинский, Яйский, Яшкинский
2	Беловский, Гурьевский, Кемеровский, Новокузнецкий, Прокопьевский, Таштагольский, Топкинский
3	Мариинский, Промышленновский, Ижморский

Таблица 3

Распределение районов Кемеровской области по кластерам в 2008 г.

Кластер	Районы, вошедшие в кластер
1	Гурьевский, Кемеровский
2	Тяжинский
3	Беловский, Новокузнецкий, Прокопьевский, Таштагольский, Крапивинский, Ленинск-Кузнецкий, Мариинский, Промышленновский, Чебулинский, Ижморский, Тисульский, Топкинский, Юргинский, Яйский, Яшкинский

Третий кластер представляют муниципальные районы региона с неблагоприятным состоянием по показателям занятости. Первый кластер представляют районы региона с умеренно неблагоприятным состоянием по показателям занятости. Второй кластер представляют районы региона, которые находятся в более благоприятном положении по показателям занятости населения по сравнению с двумя другими группировками.

Сравнивая состав кластеров 2007 и 2008 гг., можно сказать:

- Пять районов (Гурьевский, Новокузнецкий, Прокопьевский, Таштагольский, Топкинский) из числа районов с благоприятным положением по показателям занятости населения переместились в группу районов с умеренно неблагоприятным положением;

- Тяжинский район из числа районов с умеренно неблагоприятным положением по показателям занятости населения переместился в группу районов с неблагоприятным состоянием.

Еще одним из методов оценки занятости населения в регионе по достигнутому уровню развития является рейтинговый метод, т.е. оценка в сравнении со всем распределением совокупности. Оценка в сравнении не только со средней величиной, но и с распределением совокупности со всеми ее параметрами дает больше информации, позволяет более точно указать место региона по уровню достигнутого результата.

Рассматривались следующие показатели занятости:

X_1 – уровень зарегистрированной безработицы, в % к численности населения в трудоспособном возрасте;

X_2 – работающие неполное рабочее время по инициативе администрации, в % к среднесписочной численности;

X_3 – выбыло работников по сокращению штатов за год, в % к среднесписочной численности;

X_4 – нагрузка незанятого населения на одну заявленную вакансию, чел.

Подводя итог рейтингового анализа районов Кемеровского региона по показателям занятости за 2007 г., можно выделить наиболее благополучные районы, занимающие 3 первых места: Новокузнецкий, Кемеровский, Гурьевский. Яйский, Ижморский, Тяжинский районы по показателям занятости требуют особого внимания со стороны администрации, а за 2008 г. – Чебулинский, Беловский, Кемеровский. Тисульский, Тяжинский, Ленинск-Кузнецкий районы (табл. 4).

Таблица 4

Рейтинговые оценки

№ п/п	Муниципальный район	Итоговый рейтинг (2007 г.)	Итоговый рейтинг (2008 г.)
1	Беловский	6	2
2	Гурьевский	3	8
3	Ижморский	17	13
4	Кемеровский	2	3
5	Крапивинский	11	11
6	Ленинск-Кузнецкий	8	18
7	Мариинский	13	14
8	Новокузнецкий	1	4
9	Прокопьевский	7	6
10	Промышленновский	12	12
11	Таштагольский	9	5
12	Тисульский	15	16
13	Топкинский	4	7
14	Тяжинский	18	17
15	Чебулинский	14	1
16	Юргинский	5	9
17	Яйский	16	15
18	Яшкинский	10	10

По сравнению с 2007 г. итоговый рейтинг значительно повысился у районов: Беловский, Ижморский, Таштагольский, Чебулинский и значительно снизился у районов: Гурьевский, Ленинск-Кузнецкий, Новокузнецкий, Топкинский, Юргинский.

Сравнивая результаты, полученные при кластеризации районов региона по показателям занятости, с итоговым рейтингом районов, видим соответствие результатов.

Таким образом, в работе для прогнозирования уровня занятости населения и уровня зарегистрированной безработицы была выбрана адаптивная модель Хольта. С использованием полученной модели построили точечный и интервальный прогноз на 2010–2011 гг. Прогноз свидетельствует о том, что в ближайшие годы уровень занятости населения в Кемеровской области незначительно снизится, что соответствует фазе «стабилизации» экономического кризиса.

По результатам рейтингового и кластерного анализа было выявлено, что в период экономического кризиса положение по показателям занятости обострилось в Гурьевском, Ленинск-Кузнецком, Новокузнецком, Топкинском, Юргинском, Прокопьевском, Таштагольском, Тяжинском муниципальных районах.

Литература

1. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. – М.: Статистика, 1977. – 200 с.
2. Афанасьев В. Н. Анализ временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 228 с.

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ ТЕРРИТОРИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ ДЛЯ ПРОГНОЗА

И. В. Новикова, Р. Т. Якупов

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Пусть $x(t)$ – вектор размерности n возрастного состава населения территории (например, города) в конце временного отрезка t . Как известно [1], поведение этого вектора описывается разностным уравнением

$$x(t+1) = A(t)x(t) + y(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $M\{x_0\} = m_0^x$; $M\{(x_0 - m_0^x)(x_0 - m_0^x)^T\} = D_0^x$. Ненулевые элементы переходной матрицы $A(t)$ имеют смысл вероятностей (коэффициентов) рождения и дожития. Вероятности рождения считаются случайными величинами в силу того, что они малоинерционны и подвержены воздействию различных случайных факторов. Вероятности дожития в силу их инерционности при малом горизонте прогнозирования можно считать неслучайными величинами. Матрицу $A(t)$ представим в виде

$$A(t) = \bar{A}(t) + \tilde{A}(t),$$

где $\bar{A}(t) = M\{A(t)\}$, в \tilde{A} все элементы нулевые, кроме элементов первой строки, которая имеет вид

$$(0, \dots, 0, \tilde{b}_l, \tilde{b}_{l+1}, \dots, \tilde{b}_{l+m}, 0, \dots, 0) = \tilde{b}^T,$$

где \tilde{b}_i – случайные отклонения коэффициентов рождения от средних значений. Будем считать, что случайный вектор $\tilde{b}(t)$ подчиняется стохастическому разностному уравнению вида

$$\tilde{b}(t+1) = F(t)\tilde{b}(t) + G(t)w(t), \quad \tilde{b}(0) = 0,$$

где $F(t) = \text{diag}(\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$, в матрице $G(t)$ строки с номерами $i = \overline{1, l-1}$ и $i = \overline{l+m+1, n}$ нулевые, компоненты вектора w – независимые стандартные дискретные гауссовские белые шумы. Ковариационная матрица $\tilde{b}(t)$ описывается уравнением

$$D^b(t+1) = F(t)D^b(t)F^T(t) + G(t)G^T(t), \quad D^b(0) = 0. \quad (2)$$

Случайный вектор $y(t)$ характеризует миграцию, $M\{y(t)\} = m^y(t)$. Вектор $\tilde{y}(t) = y(t) - m^y(t)$, подчиняется разностному уравнению

$$\tilde{y}(t+1) = B(t)\tilde{y}(t) + C(t)\eta(t), \quad \tilde{y}(0) = 0,$$

где $M\{\tilde{y}(0)\tilde{y}^T(0)\} = 0$, $\eta(t)$ – вектор, компоненты которого являются независимыми стандартными дискретными гауссовскими белыми шумами.

Уравнение (1) является уравнением с мультипликативными шумами (вследствие случайности элементов матрицы A). Расчет статистических характеристик вектора x проводится в гауссовском приближении.

Для математического ожидания вектора x получаем уравнение

$$m^x(t+1) = \bar{A}(t)m^x(t) + r(t) + m^y(t), \quad m^x(0) = 0, \quad (3)$$

где $r(t) = M\{\tilde{A}(t)x(t)\} = M\{\tilde{A}(t)\tilde{x}(t)\}$. Заметим, что в силу специфики матрицы \tilde{A} , все компоненты $r(t)$ равны нулю, кроме первой.

Для ковариационной матрицы $D^x(t) = M\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\}$ получается уравнение

$$D^x(t+1) = \bar{A}(t)D^x(t)\bar{A}^T(t) + \bar{A}(t)M\{\tilde{x}(t)m^{xT}(t)\tilde{A}^T(t)\} + M\{\tilde{A}(t)m^x(t)\tilde{x}^T(t)\}\bar{A}^T(t) + \\ + D^y(t) - r(t)r^T(t) + \bar{A}(t)Q(t) + Q^T(t)\bar{A}^T(t) + m^y(t)r^T(t) + r(t)m^{yT}(t) + \\ + M\{\tilde{A}(t)m^x(t)m^{xT}(t)\tilde{A}^T(t)\} + M\{\tilde{A}(t)\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\tilde{A}^T(t)\}, \quad D^x(0) = 0.$$

где $D^y(t) = M\{\tilde{y}(t)\tilde{y}^T(t)\}$, $Q(t) = M\{\tilde{x}(t)\tilde{y}^T(t)\}$. Матрицы D^y и Q подчиняются разностным уравнениям

$$D^y(t+1) = B(t)D^y(t)B^T(t) + C(t)C^T(t), \quad D^y(0) = 0, \quad (4)$$

$$Q(t+1) = \bar{A}(t)Q(t)B^T(t) + D^y(t)B^T(t), \quad Q(0) = 0. \quad (5)$$

В случае малого разброса величин коэффициентов рождения и показателей миграции относительно средних значений можно слагаемым $M\{\tilde{A}(t)\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\tilde{A}^T(t)\}$ пренебречь.

Элементы матриц

$$\bar{A}(t)M\{\tilde{x}(t)m^{xT}(t)\tilde{A}^T(t)\} \text{ и } M\{\tilde{A}(t)m^x(t)m^{xT}(t)\tilde{A}^T(t)\}$$

находятся следующим образом:

$$[M\{\tilde{A}(t)m^x(t)m^{xT}(t)\tilde{A}^T(t)\}]_{ij} = \delta_{li}\delta_{lj}\sum_{p=l}^{l+m}\sum_{q=l}^{l+m}d_{pq}^b(t)m_p^x(t)m_q^x(t),$$

$$[\bar{A}(t)M\{\tilde{x}(t)m^{xT}(t)\tilde{A}^T(t)\}]_{ij} = \delta_{lj}\sum_{k=1}^n\bar{a}_{ik}(t)\sum_{s=l}^{l+m}m_s^x(t)M\{\tilde{x}_k(t)\tilde{b}_s(t)\},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Для $\gamma_{ij}(t) = M\{\tilde{x}_i(t)\tilde{b}_j(t)\}$ получается уравнение

$$\gamma_{ij}(t+1) = \beta_j\sum_{s=l}^{l+m}[\bar{a}_{is}(t)\gamma_{sj}(t) + \delta_{li}m_s^x(t)d_{ij}^b(t)], \quad \gamma_{ij}(0) = 0. \quad (6)$$

Здесь $d_{ij}^b(t)$ – элементы ковариационной матрицы $D^b(t)$.

Для элементов ковариационной матрицы D^x имеем уравнение

$$d_{ij}^x(t) = \sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n\bar{a}_{ip}(t)d_{pq}^x(t)\bar{a}_{qj}(t) + \delta_{lj}\sum_{k=1}^n\bar{a}_{ik}(t)\sum_{s=l}^{l+m}m_s^x(t)\gamma_{ks}(t) +$$

$$+ \delta_{li}\sum_{k=1}^n\bar{a}_{jk}(t)\sum_{s=l}^{l+m}m_s^x(t)\gamma_{ks}(t) - \delta_{li}\delta_{lj}r_1^2(t) + d_{ij}^y(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n\bar{a}_{ik}(t)q_{kj}(t) + \sum_{k=1}^nq_{ki}(t)\bar{a}_{jk}(t) + [\delta_{lj}m_i^y(t) + \delta_{li}m_j^y(t)]r_1(t) +$$

$$+ \delta_{li}\delta_{lj}\sum_{p=l}^{l+m}\sum_{q=l}^{l+m}d_{pq}^b(t)m_p^x(t)m_q^x(t), \quad d_{ij}^x(0) = 0, \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}), \quad (7)$$

где $r_1(t) = \sum_{s=l}^{l+m}\gamma_{ss}(t)$.

Таким образом, первый и второй центральные моменты вектора возрастного состава населения территории описываются системой уравнений (2)–(7). При отсутствии миграции аналогичные расчеты проводились в [2].

Эти уравнения могут быть использованы при построении поискового или нормативного прогноза движения возрастного состава населения территории. Для примера рассмотрим следующую задачу. Пусть средние значения коэффициентов рождения и показателей миграции в возрастных группах зависят от мероприятий, направленных на социальную поддержку, повышение качества жизни, социальной стабильности, поддержку семей с детьми, создание рабочих мест и т.д. Характеризуем эти мероприятия вектором управляющих воздействий $u(t)$: $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij}(t, u)$, $m^y = m^y(t, u)$. На управляющие воздействия накладываются ограничения:

$$u(t) \in U(t, S), \quad (8)$$

которые, например, могут означать ограниченность средств, направляемых на осуществление указанных выше мероприятий. Выбором параметра S можно ослаблять или усиливать ограничения. Например, S может означать суммарный объем выделенных средств. Управления выбираются так, чтобы на заданном горизонте управления $[0, T]$ максимизировать целевую функцию, характеризующую общую численность населения или численность опреде-

ленных (например, работоспособных) возрастных групп. Один из критериев оптимальности управления может быть записан так:

$$J(S) = \sum_{i=1}^n c_i m_i^x(T) - \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j d_{ij}^x(T)} \rightarrow \max_u, \quad (9)$$

где первое слагаемое характеризует среднюю численность выбранных возрастных групп. Так, если $c_i = 1 \forall i = \overline{1, n}$, оно означает общую среднюю численность населения; когда $c_i = 1$ для работоспособных групп, а для остальных групп $c_i = 0$, оно означает среднюю численность трудоспособного населения.

$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j d_{ij}^x(T)}$ – среднеквадратическое отклонение величины

$\sum_{i=1}^n c_i x_i(T)$; множитель λ , выбираемый экспертами, характеризует степень

учета разброса величины $\sum_{i=1}^n c_i x_i(T)$; «разумные» значения λ берутся обычно

от 1 до 3.

Получается задача оптимального управления дискретной динамической системой [3], определяемой уравнениями движения (2)–(7), критерием (9) и ограничениями на управление (8):

$$\begin{aligned} J(S) &= \sum_{i=1}^n c_i m_i^x(T) - \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j d_{ij}^x(T)} \rightarrow \max_u, \\ m^x(t+1) &= \bar{A}(t)m^x(t) + r(t) + m^y(t), \quad m^x(0) = 0, \\ d_{ij}^x(t) &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \bar{a}_{ip}(t)d_{pq}^x(t)\bar{a}_{qj}(t) + \delta_{1j} \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik}(t) \sum_{s=l}^{l+m} m_s^x(t)\gamma_{ks}(t) + \\ &+ \delta_{1i} \sum_{k=1}^n \bar{a}_{jk}(t) \sum_{s=l}^{l+m} m_s^x(t)\gamma_{ks}(t) - \delta_{1i}\delta_{1j}r_1^2(t) + d_{ij}^y(t) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik}(t)q_{kj}(t) + \sum_{k=1}^n q_{ki}(t)\bar{a}_{jk}(t) + [\delta_{1j}m_i^y(t) + \delta_{1i}m_j^y(t)]r_1(t) + \\ &+ \delta_{1i}\delta_{1j} \sum_{p=l}^{l+m} \sum_{q=l}^{l+m} d_{pq}^b(t)m_p^x(t)m_q^x(t), \quad d_{ij}^x(0) = 0, \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}); \\ \gamma_{ij}(t+1) &= \beta_j \sum_{s=l}^{l+m} [\bar{a}_{is}(t)\gamma_{sj}(t) + \delta_{1i}m_s^x(t)d_{ij}^b(t)], \quad \gamma_{ij}(0) = 0; \\ D^b(t+1) &= F(t)D^b(t)F^T(t) + G(t)G^T(t), \quad D^b(0) = 0; \\ D^y(t+1) &= B(t)D^y(t)B^T(t) + C(t)C^T(t), \quad D^y(0) = 0; \\ Q(t+1) &= \bar{A}(t)Q(t)B^T(t) + D^y(t)B^T(t), \quad Q(0) = 0; \\ u(t) &\in U(t, S). \end{aligned} \quad (10)$$

При небольшом горизонте управления задачу (10) может оказаться целесообразным рассматривать как задачу математического программирования.

Пусть при фиксированном S получилось оптимальное управление $u^*(S)$ и оптимальное значение показателя качества управления $J^*(S)$. При нормативном прогнозе обычно требуется, чтобы $J^*(S) = J_0$, где J_0 – целевой показатель, задаваемый извне. В этом случае задача оптимального управления формулируется как задача оптимального управления с критерием

$$\left[\sum_{i=1}^n c_i m_i^x(T) - \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j d_{ij}^x(T)} - J_0 \right]^2 \rightarrow \min_{u, S}.$$

Если ресурсный параметр S в результате решения задачи окажется неприемлемым, то эксперты должны поставить вопрос об уменьшении нормативного показателя J_0 .

Поскольку демографические прогнозы обладают большой степенью «приблизительности», то при использовании предложенной модели для целей прогнозирования можно решать приведенные оптимизационные задачи с помощью приближенных численных методов, вплоть до генерирования сценариев [4].

Литература

1. Тихомиров Н. П. Демография: Методы анализа и прогнозирования. – М.: Экзамен, 2005. – 256 с.
2. Новикова И. В. Расчет дисперсий численности возрастных групп в модели движения населения территории // Научное творчество молодежи: Материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции (15–16 апреля 2010 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 1. – С. 69–71.
3. Данилов Н. Н., Мешечкин В. В. Основы математической теории оптимальных процессов. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 219 с.
4. Козлова С. С. Оптимизирующий прогноз движения населения города // Научное творчество молодежи: Материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции (15–16 апреля 2010 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 1. – С. 46–48.

РЫНОК КАК ИНЕРЦИОННАЯ САМОУПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПРЕДСКАЗАНИЕМ СПРОСА ПО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

В. В. Поддубный, О. В. Романович
Томский государственный университет

Исследуется математическая модель инерционного рынка одного товара с запаздыванием поставок товара на рынок. Рассматривается стратегия поставки товара на рынок с поиском неподвижной точки отображения гипотетической цены товара в оптимальную, т. е. подбором объема заказа, равного объему спроса на момент поставки товара. Для решения задачи используется квазиньютоновский алгоритм оптимизации. Находится оптимальный объем заказа товара, максимизирующий прибыль продавца.

Рассмотрим рынок одного товара, функционирующий в дискретном времени $t = 0, 1, 2, \dots, T$. В классической теории рыночного равновесия [1] для

нахождения точки равновесия (Q^*, P^*) между объёмом продаж Q и ценой товара P используются две зависимости – зависимость объёма спроса от цены товара $Q^D(P)$ (линия спроса) и зависимость объёма предложения от цены товара $Q^Z(P)$ (линия предложения).

В состоянии рыночного равновесия объём спроса равен объёму предложения, и цена становится постоянной равновесной величиной P^* . Если спрос превышает предложение (товарный дефицит), цена товара растёт. Если объём спроса ниже объёма предложения (затоваривание рынка), цена товара уменьшается.

Линия спроса определяет поведение покупателя на рынке. Полагая, что она может быть идентифицирована по наблюдениям объёмов продаж при разных ценах, линию спроса будем считать известной. Обычно это монотонно убывающая функция цены P (в первом приближении и для простоты анализа делаем допущение, что она линейна: $Q^D(P) = Q_m - aP$, т. е. спрос линейно убывает с ростом цены и наоборот).

Линия предложения $Q^Z(P)$ определяется продавцом. В классической теории рыночного равновесия [1] она предполагается монотонно возрастающей (в первом приближении – линейно) функцией цены P . Определить линию предложения по наблюдениям за состоянием рынка затруднительно. Поэтому в рассматриваемой здесь модели рынка считаем линию предложения неизвестной. Очевидно, что линия предложения формируется поставщиком товара (продавцом) в соответствии с его стратегией поставки товара на рынок. Эта стратегия является управляющим фактором рынка, обеспечивающим его функционирование. В данной работе предлагается подход к организации поставок товара на рынок с использованием прогнозирования продавцом цены товара по динамической математической модели рынка. При построении математической модели рынка предполагается, что «невидимая рука» рынка (по меткому выражению Адама Смита из его книги «Богатство народов», изданной в 1776 г.) формирует цену товара по критерию максимума текущей прибыли продавца при любой стратегии поставки товара на рынок. Однако величина этого максимума зависит от стратегии поставки. В модели учитывается, что поставка товара на рынок может происходить с некоторым дискретным целочисленным запаздыванием $\tau \geq 0$. Считаем также, что рынок обладает определённой инерционностью, препятствующей резким изменениям цены товара.

Моделируется ситуация, когда рынок до некоторого «начального» момента времени t_0 находился в состоянии равновесия, а в момент t_0 выводится из равновесия (путём, например, резкого принудительного изменения цены товара). Продавец следит за ситуацией на рынке и может осуществлять любую стратегию поставки товара на рынок. Поскольку продавец хочет получить максимально возможную прибыль, он должен удовлетворять покупательский спрос (не обеспеченный товаром спрос приводит к недополучению прибыли, а излишние поставки – к лишним расходам). Поэтому продавец,

делая заказ товара, должен прогнозировать объем спроса на товар на момент доставки товара на рынок.

В работах [2, 3] мы рассмотрели несколько моделей рынка с разными стратегиями поставки товара на рынок. В частности, в работе [3] рассмотрена стратегия поставки, при которой объём заказа товара определялся через скользящее полиномиальное предсказание спроса на товар на момент появления товара на рынке.

В данной работе рассматривается модель рынка, в которой продавец прогнозирует спрос на товар на τ шагов вперед, осуществляя поиск неподвижной точки отображения предполагаемой цены товара в действительную цену. В работе исследуется динамика перехода рынка в равновесное состояние. В процессе перехода цена товара устанавливается в соответствии с критерием получения продавцом максимальной прибыли. Такую модель рынка назовём инерционной самоуправляемой моделью рынка с запаздыванием и предсказанием спроса по неподвижной точке.

Пусть цена товара в каждый момент дискретного времени есть $P(t)$. На цену товара накладываются ограничения:

$$0 \leq P_{\min} \leq P(t) \leq P_{\max}, \quad \forall t. \quad (1)$$

Продавец закупает товар по цене P_1 , причем для обеспечения рентабельности рынка P_{\min} должна быть не меньше цены закупки товара. Остатки непроданного товара хранятся на складе. Пусть цена хранения единицы товара равна P_2 . Естественно принять $P_{\min} = P_1 + P_2$ (цена не ниже затрат). При линейном спросе его объём определяется выражением $Q^D(t) = Q_m - aP(t)$, где $Q_m > 0$ – максимальное значение спроса на товар, $a > 0$ – абсолютное значение углового коэффициента линии спроса. Отсюда $P_{\max} = Q_m/a$ (цена не выше той, которую согласен платить покупатель).

Пусть $Q^S(t)$ – объём продаж товара в момент времени t , $Q^Z(t - \tau)$ – объём закупки товара продавцом в момент времени $t - \tau$, $Q(t)$ – объём непроданного товара, который продавец вынужден хранить на складе.

Тогда прибыль продавца на t -м интервале дискретного времени равна разности между выручкой от продажи товара и затратами продавца на закупку товара и хранение непроданных остатков товара на складе:

$$J(t) = Q^S(t)P(t) - Q^Z(t - \tau)P_1 - Q(t)P_2. \quad (2)$$

Рынок максимально рентабелен для продавца (оптимален), если в каждый текущий момент дискретного времени t он устанавливает цену, обеспечивающую максимум прибыли продавца с учетом ограничений (1) и штрафных санкций за изменение цены товара:

$$J^I(t) = J(t) - \frac{w}{2}(P(t) - P(t-1))^2 \Rightarrow \max_P. \quad (3)$$

Здесь второе слагаемое – штрафная функция, не позволяющая резко изменять цену товара (она определяет инерционность рынка), а $w \geq 0$ – весовой коэффициент «штрафа» за изменение цены.

Определим функции $Q^S(t)$, $Q^Z(t - \tau)$ и $Q(t)$. Будем считать, что продавец в каждый момент дискретного времени t прогнозирует цену товара $P(t + \tau)$ на τ шагов вперед и по этому прогнозу (в соответствии с линией спроса) прогнозирует спрос на товар на момент времени $t + \tau$. В соответствии с этой стратегией в момент $t - \tau$ продавец закупает товар в объеме $Q^Z(t - \tau) = \max(\widehat{Q}^D(t) - Q(t - \tau), 0)$, где $\widehat{Q}^D(t) = Q_m - a\widehat{P}(t)$ – прогноз спроса, а $\widehat{P}(t)$ – прогноз цены в момент времени $t - \tau$ на момент времени t . Заметим, что при $\tau = 0$ (в отсутствие запаздывания) прогнозирования не требуется. Функция, определяющая объем продаж в момент времени t , имеет вид: $Q^S(t) = \min(Q^D(t), Q(t) + Q^Z(t - \tau))$. Если количество товара, которое есть в наличии у продавца в текущий момент времени, больше спроса, т. е. $Q(t) + Q^Z(t - \tau) > Q^D(t)$, то спрос на товар удовлетворяется полностью и часть товара остается непроданной. Если же количество товара, которое есть в наличии у продавца, меньше спроса, то продается весь наличный объем товара $Q(t) + Q^Z(t - \tau)$, не покрывая спроса. Отметим, что в этом случае остается неудовлетворенным покупательский спрос и продавец недополучает часть прибыли. К началу $(t + 1)$ -го интервала времени на складе продавца остаётся непроданный товар (запас) в объеме $Q(t + 1) = Q(t) + Q^Z(t - \tau) - Q^S(t)$. Как уже отмечалось, этот объем отличен от нуля, только если предложение товара превышает спрос.

Поскольку $Q^Z(t - \tau)$ – функция с запаздывающим аргументом, для обеих переменных $Q(t)$ и $P(t)$ необходимо определить значения на начальном интервале $[-\tau, 0]$. Пусть до момента времени $t = 0$ рынок находился в состоянии равновесия (Q^*, P^*) , а в момент $t = 0$ скачкообразно перешёл в неравновесное состояние (Q_0, P_0) . Значения $(Q(t), P(t))$, таким образом, изменяются от значений $Q(t) = Q^* = 0$, $P(t) = P^* = (Q_m + aP_1)/(2a)$, $t = -\tau, -1$, до значений $Q(0) = Q_0$, $P(0) = P_0$,

Рассмотрим алгоритм формирования оптимального заказа $Q^Z(t + \tau)$ с помощью поиска неподвижной точки отображения гипотетической цены товара в действительную оптимальную цену.

Шаг 1: В каждый момент текущего времени t продавец начинает моделировать реакцию рынка на заказ товара в объеме, равном, например, $Q^{Z(0)}(t + \tau) = \max(Q_m - aP^* - Q(t), 0)$ (т.е. при цене P^*), и запускает алгоритм поиска оптимальной цены $P(t + \tau)$ согласно критерию оптимальности (3). Обозначим найденное значение цены $P^{(1)}(t + \tau)$ и соответствующий этой цене объем потребительского спроса (согласно линии спроса) как $Q^{D(1)}(t + \tau)$. Продавец сравнивает $Q^{Z(1)}(t + \tau) = \max(Q^{D(1)}(t + \tau) - Q(t), 0)$ и $Q^{Z(0)}(t + \tau)$. Если не выполняется условие $|Q^{Z(1)}(t + \tau) - Q^{Z(0)}(t + \tau)| \leq \varepsilon$, то происходит переход на следующий шаг.

Шаг i : Продавец смотрит на реакцию модели рынка при заказе товара в объеме $Q^{Z(i)}(t + \tau) = \max(Q_m - aP^{(i)}(t + \tau) - Q(t), 0)$ и снова запускает алго-

ритм поиска оптимальной цены при условии заказа товара в объеме $Q^{Z(i)}(t + \tau)$. В результате он получает значения

$$P^{(i+1)}(t + \tau) = \arg \max_P J^I(t + \tau), \quad (4)$$

$$Q^{Z(i+1)}(t + \tau) = \max(Q_m - aP^{(i+1)}(t + \tau) - Q(t), 0), \quad (5)$$

и, если не выполняется условие

$$|Q^{Z(i+1)}(t + \tau) - Q^{Z(i)}(t + \tau)| \leq \varepsilon, \quad (6)$$

то шаг i повторяется снова для значения $i = i + 1$.

Если на шаге n выполнится условие (6), то неподвижная точка найдена, и продавец делает реальный заказ в размере $Q^Z(t + \tau) = Q^{Z(n)}(t + \tau)$. Объем такого заказа будет с заданной точностью соответствовать объему потребительского спроса через τ шагов.

Таким образом, находится неподвижная точка отображения

$$P(t + \tau) = \arg \max_P J^I(P(t + \tau)) \quad (7)$$

и по полученной цене $P(t + \tau)$, согласно линии спроса, вычисляется размер заказа $Q^Z(t + \tau) = \max(Q_m - aP(t + \tau) - Q(t), 0)$.

Для решения задачи максимизации (7) использовался квазиньютоновский алгоритм оптимизации с численным определением градиента целевой функции и пересчётом на каждой итерации её гессиана (точнее, его аппроксимации) по BFGS-формуле Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно [4]. Расчеты проводились при $w = 50$, $Q_m = 4$, $a = 0,4$, $T = 50$, $\tau = 10$, $P_0 = 7$, $Q_0 = 0$, $P_1 = 3$, $P_2 = 0,1$, $P_{\min} = P_1 + P_2$, $P_{\max} = Q_m/a$, $P^* = (Q_m + aP_1)/(2a) = 6,5$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

На рис. 1–6 представлена динамика переменных оптимального рынка при рассмотренной выше стратегии поставки товара на рынок, причём пунктиром показаны предсказываемые значения.

На рис. 1, 3 видно, что в процессе перехода рынка в равновесное состояние присутствует некоторый интервал $t = [13, 24]$ подъёма цены и снижения спроса, что связано со снижением поставки товара на этом интервале (см. рис. 2) и распродажей остатков (см. рис. 4). На этом интервале отмечается падение продаж и прибыли (см. рис. 5, 6). Затем следует интервал, на котором происходит уменьшение цены до равновесной и переход рынка в состояние равновесия.

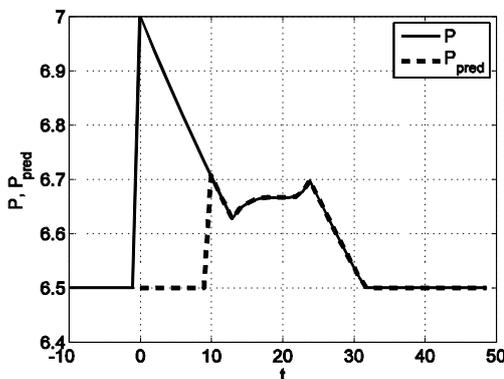


Рис. 1. Оптимальная динамика цены ($\tau = 10$)

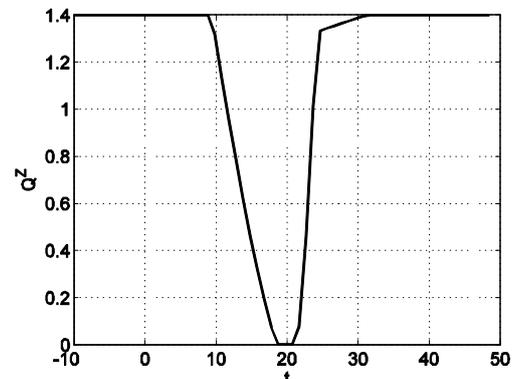


Рис. 2. Стратегия заказа товара ($\tau = 10$)

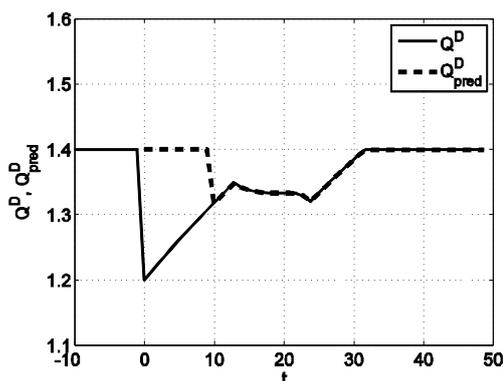


Рис. 3. Покупательский спрос
($\tau = 10$)

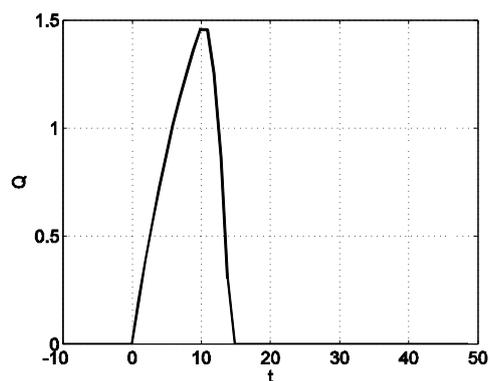


Рис. 4. Оптимальный запас товара
($\tau = 10$)

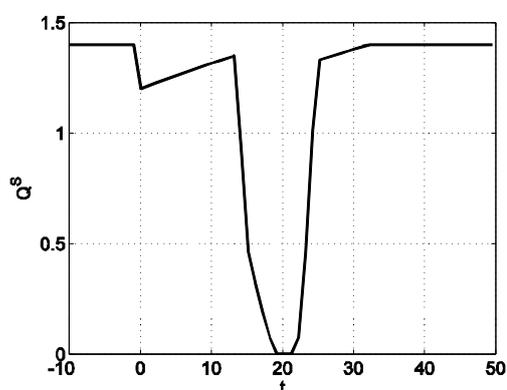


Рис. 5. Динамика продаж
($\tau = 10$)

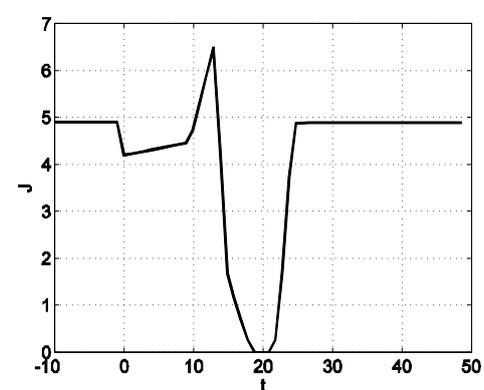


Рис. 6. Динамика прибыли
($\tau = 10$)

Литература

1. Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Морозов В. И. Микроэлектроника: В 2 т. / Под общ. ред. В. М. Гальперина. – СПб.: Экономическая школа, 2002. – Т. 1. – 349 с.
2. Поддубный В. В., Романович О. В. Рынок как самоуправляемая инерционная динамическая система с запаздыванием при сбалансированной стратегии поставки товара // Вестник ТГУ. УВТИ. – 2009. – № 4(9). – С. 5–16.
3. Поддубный В. В., Романович О. В. Рынок как инерционная самоуправляемая система с запаздыванием и скользящим полиномиальным предсказанием спроса // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009): Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (12–13 ноября 2009 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. – Ч. 1. – С. 302–308.
4. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ САРМ

М. Н. Прожикина

Кемеровский государственный университет

Инвесторы остаются весьма осторожными при принятии решений о покупке акций и облигаций, что вполне можно понять, учитывая негативный опыт, связанный с нестабильностью и инфляционными тенденциями в экономике.

Целью данной работы является: рассчитать прогнозные значения доходности ценных бумаг; с их помощью сформировать оптимальный портфель, используя модель Марковица, и исследовать компоненты этого портфеля на статистическую значимость.

Для построения моделей и прогнозирования взяты данные о ценах пятнадцати акций российских компаний: АвтоВаз, Аэрофлот, ВТБ, Газпром, Газпромнефть, ГМКНорНикель, Лукойл, МТС, ПлюсЗолото, Росбанк, Роснефть, Ростел, Сбербанк, Сибтлк, Сургнфгз. Исходные данные удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям.

При обработке временных рядов, как правило, наиболее ценной является информация последнего периода, т. к. необходимо знать, как будет развиваться тенденция, существующая в данный момент, а не тенденция, сложившаяся в среднем на всем рассматриваемом периоде. Адаптивные методы позволяют учесть различную информационную ценность уровней временного ряда, степень «устаревания» данных.

Важнейшим достоинством адаптивных методов также является построение самокорректирующихся моделей, способных учитывать результат прогноза, сделанного на предыдущем шаге. В основе адаптивных моделей лежит гипотеза о том, что прогноз может быть получен по уравнению

$$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau \hat{a}_{2,t},$$

где $\hat{a}_{1,t}, \hat{a}_{2,t}$ – текущие оценки коэффициентов адаптивного полинома первого порядка; τ – количество шагов прогнозирования.

Для адаптивной модели Хольта оценка коэффициентов производится следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{a}_{1,t} &= \alpha_1 y_t + (1 - \alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}); \\ \hat{a}_{2,t} &= \alpha_2 (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \alpha_2) \hat{a}_{2,t-1}, \\ 0 < \alpha_1 < 1; \quad 0 < \alpha_2 < 1,\end{aligned}$$

где α_1, α_2 – параметры экспоненциального сглаживания.

Модель Брауна является частным случаем модели Хольта. Оценка коэффициентов производится следующим образом:

$$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1} + (1 - \beta^2)e_t;$$

$$\hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + (1 - \beta)^2 e_t,$$

где $e_t = y_t - \hat{y}_t(t-1)$ – ошибка прогноза; β – коэффициент дисконтирования данных, отражающий большую степень доверия к более поздним данным. Его значение должно быть в интервале $(0,1)$. Такой процесс модификации модели в зависимости от ее текущих прогнозных качеств обеспечивает адаптацию к новым закономерностям развития. Для прогнозирования используется модель, полученная на последнем шаге (при $t=N$).

Если же модель Хольта усовершенствовать путем включения разности ошибок, то получим полную трехпараметрическую модель прогнозирования Дж. Бокса и Г. Дженкинса, где оценка коэффициентов производится следующим образом:

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1 - \alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}) + \alpha_3(e_t - e_{t-1}),$$

$$\hat{a}_{2,t} = \alpha_2(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \alpha_2)\hat{a}_{2,t-1},$$

$$0 < \alpha_1 < 1; 0 < \alpha_2; 0 < \alpha_3 < 1,$$

где $e_t = y_t - \hat{y}_t(t-1)$ – ошибка прогноза; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ являются параметрами модели.

О точности прогноза принято судить по величине погрешности прогноза – разности между прогнозируемым и фактическим значением исследуемой переменной.

Построив модель любого вида мы можем получить расчётные величины для каждой из точек временного ряда и сравнить их с наблюдаемыми. Погрешность в каждой точке ряда определяется соотношением вида

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i,$$

где \hat{y}_i обозначает рассчитанное по модели значение исследуемой переменной.

Определить справедливую доходность ценной бумаги помогает модель оценки долгосрочных активов, которая основывается на риске ценной бумаги.

Все помнят, что чем больше риск, тем больше доходность. Следовательно, если мы знаем потенциальный риск ценной бумаги, мы можем прогнозировать норму доходности. И наоборот, если нам известна доходность, то мы можем вычислить риск. Все расчеты такого рода относительно доходности и риска осуществляются при помощи модели оценки долгосрочных активов.

Взаимосвязь риска с доходностью согласно модели оценки долгосрочных активов описывается следующим образом:

$$D = D_f + \beta(D_m - D_f),$$

где D – ожидаемая норма доходности; D_f – безрисковый доход; D_m – доходность рынка в целом; β – специальный коэффициент бета.

Ожидаемая норма доходности – это та прибыль, которую Вы (или другой инвестор) ждете от финансового инструмента. Ожидаемая норма доходности также может описывать Ваши потребности, а не ожидания. Когда вам необходима определенная норма доходности (причины могут быть разные), то эта определенная норма доходности и будет ваша ожидаемая норма доходности. Таким образом, ожидаемая норма доходности – прибыль от инструмента.

Безрисковый доход – это та часть дохода, которая заложена во все инвестиционные инструменты. Безрисковый доход измеряется, как правило, по ставкам государственных облигаций, т. к. те практически без риска.

Общая доходность рынка – это норма доходности индекса данного рынка. В США, таковым бы выступил индекс S&P 500, в России – индекс РТС, в Украине – конечно же, индекс ПФТС.

Бета (β) – специальный коэффициент, который измеряет рискованность инструмента. В то время как предыдущие элементы формулы просты, понятны и найти их достаточно просто, то β найти не так просто; бесплатные финансовые сервисы не предоставляют β компаний.

Для составления портфеля мы берем только недооцененные активы (табл.1).

Таблица 1

Составление портфеля активов

Компании	Норма доходности	Доходность	R ²	Активы включенные в портфель
Автоваз (R1)	4,44	-0,008919	0,029	
Аэрофлот (R2)	5,67	58,19	0,1353	+
ВТБ (R3)	4,36	-38,66	0,0011	
Газпром (R4)	7,49	4,73	0,6966	
Газпромнефть (R5)	6,3	28,86	0,3848	+
ГМКНорНикель (R6)	6,08	57,69	0,3523	+
Лукойл (R7)	7,84	-14,04	0,7061	
МТС (R8)	6,86	34,08	0,5816	+
ПлюсЗолото (R9)	6,2	8,28	0,2745	+
Росбанк (R10)	6,25	1,62	0,2101	
Роснефть (R11)	7,28	-14,05	0,6583	
Ростел (R12)	6,66	33,89	0,2256	+
Сбербанк (R13)	4,5	-99,1	0,0442	
Сибтлк (R14)	6,34	-29,01	0,3675	
Сургнуфгз (R15)	6,56	-42,1	0,4864	

Рассмотрим задачу оптимизации портфеля ценных бумаг. Пусть у инвестора есть портфель из n активов, w_i – доля средств, вложенных в актив i .

Мы предполагаем, что w_i может быть отрицательно. Будем рассматривать только два момента времени: $t=0$ и $t=1$. Обозначим через $r = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$ – вектор доходностей активов за рассматриваемый период времени, а $w = (w_1, w_2 \dots w_n)^T$ – вектор, определяющий структуру портфеля.

Задача оптимизации портфеля математически выражается как следующая задача поиска минимума функции при наличии ограничений:

$$w^T \sum w \rightarrow \min, \text{ при условии } w^T m = \mu \text{ и } w^T (1, \dots, 1)^T = 1.$$

Решая данную задачу методом множителей Лагранжа, мы получили эффективные портфели, среди которых и выбираем оптимальный, строим фронт эффективных портфелей (границу эффективных портфелей) (рис. 1).

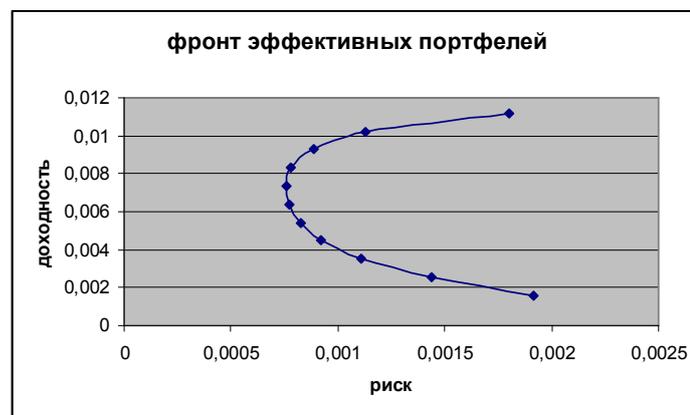


Рис. 1

Применяя модель САРМ мы оставили в рассмотрении только недооцененные рынком активы, т. к. именно они способны обеспечить доход. Рассмотрим все же все 15 активов и сравним полученные результаты.

Определяем структуру портфеля (табл. 2).

Таблица 2

Структура портфеля

Ожидаемая доходность	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	Целевая функция
-0,0190	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,0180
-0,0160	0	0	0	0	0	0	0	0,72	0	0	0	0,28	0	0	0	0,0112
-0,0130	0	0	0	0	0	0	0	0,45	0	0	0	0,55	0	0	0	0,0063
-0,0099	0	0	0	0	0,8	0	0	0,22	0	0	0	0	0	0	0	0,0037
-0,0069	0	0,03	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0023
-0,0039	0	0,19	0	0	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0019
-0,0009	0	0,28	0	0	0	0	0	0	0,72	0	0	0	0	0	0	0,0016
0,0021	0	0,31	0	0	0	0,2	0	0	0,49	0	0	0	0	0	0	0,0014
0,0051	0	0,26	0	0	0	0,53	0	0	0,21	0	0	0	0	0	0	0,0010
0,0081	0	0,35	0	0	0	0,65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0007
0,0111	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0017

В результате сравнения таблиц видно, что из 15 исходных в построении портфелей с положительной доходностью ненулевые доли имеют именно эти 6 бумаг.

При осуществлении инвестирования в ценные бумаги инвестор сталкивается с различными целями инвестирования.

Портфель ценных бумаг является тем инструментом, с помощью которого может быть достигнуто требуемое соотношение всех инвестиционных целей. С позиции отдельно взятой ценной бумаги это не достижимо и возможно только при их комбинации.

Использование же модели САРМ при построении портфеля позволило исключить переоцененные рынком активы, не приносящие доход еще на начальном этапе составления портфеля, что гораздо упростило задачу.

Литература

1. Кендэл М. Временные ряды. – М.: Финансы и статистика, 1981.
2. Кильдишев Г. С., Френкель А. А. Анализ временных рядов и прогнозирование. – М.: Статистика, 1973.
3. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. – М.: Статистика, 1979. – 251 с.
4. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Статистика, 1977. – 200 с.
5. Айвазян С. А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: учеб. для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
6. Пушкина Н. Б. Статистический анализ временных рядов: Метод. пособие. – Кемерово, КемГУ, 1999. – 40 с.
7. Сошникова Л. А., Тамашевич В. Н. Многомерный статистический анализ в экономике: учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999. – 598 с.
8. Джонстон Дж. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.
9. Шведов А. С. Теория эффективных портфелей ценных бумаг. – М.: ГУ ВШЭ, 1999. – 144 с.
10. Лякин А. Н., Лапинская А. А. Рынок ценных бумаг. – СПб.: Поиск, 2001.

УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

В. И. Смагин, М. Ю. Киселева

Томский государственный университет

В работе рассматривается задача синтеза прогнозирующего управления с учетом запаздывания по состоянию. Подобная задача для систем без запаздываний рассматривалась в [1] и для систем с запаздыванием по управлению в [2]. В настоящей работе приводятся результаты применения прогнозирующего управления для экономической системы производства, хранения и поставок товаров потребителям.

Пусть имеется объект, который в пространстве состояний описывается системой линейных разностных уравнений вида

$$x_{t+1} = Ax_t + \sum_{i=1}^r A_i x_{t-i} + Bu_t + w_t, \quad x_i = \bar{x}_i, \quad i = \overline{-r, 0}, \quad (1)$$

$$\psi_t = Hx_t + v_t, \quad (2)$$

$$y_t = Gx_t, \quad (3)$$

где $x_t \in R^n$ – состояние объекта, $u_t \in R^m$ – управление, $y_t \in R^p$ – выход, $\psi_t \in R^l$ – наблюдения, $x_i = \bar{x}_i$, $i = -r, \dots, -1, 0$ считаются заданными, r – величина запаздывания.

Далее будем полагать, что случайные возмущения w_t и шумы измерения v_t не коррелированы между собой и подчиняются гауссовскому распределению с нулевым средним и с соответствующими ковариациями $M\{w_t w_k^T\} = W\delta_{t,k}$, $M\{v_t v_k^T\} = V\delta_{t,k}$ (здесь $\delta_{t,k}$ – символ Кронекера).

Предполагается, что объект функционирует в условиях ограничений на векторы состояния и управления, заданных в виде

$$a_1 \leq S_1 x_t \leq a_2, \quad \varphi_1(x_t) \leq S_2 u_t \leq \varphi_2(x_t), \quad (4)$$

где S_1 и S_2 – структурные матрицы, состоящие из нулей и единиц, определяющие компоненты векторов x_t и u_t , на которые накладываются ограничения, $a_1, a_2, \varphi_1(x_t)$ и $\varphi_2(x_t)$ – заданные постоянные векторы и вектор-функции.

Модель (1)–(3) используется для прогнозирования поведения объекта на некоторый период, который называется горизонтом управления и обозначается N , используя информацию об управлении u_t и векторе наблюдений ψ_t до текущего момента времени t . Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям ψ_t определить стратегию управления, при которой вектор выхода системы y_t будет близок к заданному вектору \bar{y}_t с учетом ограничений (4).

Поскольку случайные возмущения w_t и шумы измерения v_t имеют гауссовское распределение, то можно выполнить прогнозирование поведения объекта и вектора выхода, используя экстраполятор Калмана. Пусть $\hat{x}_{i|j}$ и $\hat{y}_{i|j}$ – оценки состояния и вектора выхода в момент времени i , дающие информацию с j -го момента времени, $j \leq i$. Тогда

$$\hat{x}_{t+1|t} = A\hat{x}_{t|t-1} + \sum_{i=1}^r A_i \hat{x}_{t-i|t-i-1} + Bu_t + K_t(\psi_t - H\hat{x}_{t|t-1}), \quad \hat{x}_{k|k-1} = \bar{x}_k,$$

$$k = \overline{-r, 0},$$

$$\hat{y}_{t+1|t} = G\hat{x}_{t+1|t},$$

$$K_t = AP_t H^T (HP_t H^T + V)^{-1},$$

$$P_{t+1} = W + AP_t A^T - AP_t H^T (HP_t H^T + V)^{-1} HP_t A^T, \quad P_0 = P_{x_0}. \quad (5)$$

Модель прогнозирующего управления требует, чтобы оценки состояния были такими, чтобы можно было делать прогнозы на моменты времени $t+1, t+2, \dots, t+N$, основываясь на информации, имеющейся в момент времени

t . Из уравнений (5) можно получить $\hat{x}_{t+1|t}$, а также оптимальные оценки для моментов $t+2, \dots, t+N$:

$$\hat{x}_{t+i+1|t} = A\hat{x}_{t+i|t} + \sum_{j=1}^r A_j \hat{x}_{t+i-j|t-j-1} + Bu_{t+i|t}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (6)$$

$$\hat{y}_{t+i|t} = G \hat{x}_{t+i|t}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Здесь $u_{t+i|t}$ – управление, используемое для прогнозирования, в то время как u_{t+i} – действующее управление в момент $t+i$.

Уравнения (6)–(7) могут быть записаны через начальное состояние $\hat{x}_{t+1|t}$ и будущие управляющие воздействия $u_{t+i|t}$ следующим образом:

$$\hat{x}_{t+1|t}, \hat{x}_{t+i|t} = A^{i-1} \hat{x}_{t+1|t} + \sum_{k=1}^{i-1} A^{i-k-1} \sum_{j=1}^r A_j \hat{x}_{t+k-j|t-j-1} + \sum_{k=1}^{i-1} A^{i-k-1} Bu_{t+k|t}, \quad i = \overline{2, N}; \quad (8)$$

$$\hat{y}_{t+1|t}, \hat{y}_{t+i|t} = GA^{i-1} \hat{x}_{t+1|t} + G \sum_{k=1}^{i-1} A^{i-k-1} \sum_{j=1}^r A_j \hat{x}_{t+k-j|t-j-1} + G \sum_{k=1}^{i-1} A^{i-k-1} Bu_{t+k|t}, \quad i = \overline{2, N}. \quad (9)$$

Записанные уравнения для прогнозируемых векторов состояния и выхода могут быть представлены в векторно-матричной форме. Для этого введем следующие обозначения:

$$\hat{X}_t = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{x}_{t+N|t} \end{bmatrix}, \quad \hat{Y}_t = \begin{bmatrix} \hat{y}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+N|t} \end{bmatrix}, \quad U_t = \begin{bmatrix} u_{t+1|t} \\ \vdots \\ u_{t+N|t} \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} E_n \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} G \\ GA \\ GA^2 \\ \vdots \\ GA^{N-1} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A^{N-2}B & A^{N-3}B & \dots & B & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ GB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ GAB & GB & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ GA^{N-2}B & GA^{N-3}B & \dots & GB & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_i^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ AA_i & A_i & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A^{N-2}A_i & A^{N-3}A_i & \dots & A_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ GA_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ GAA_i & GA_i & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ GA^{N-2}A_i & GA^{N-3}A_i & \dots & GA_i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{X}_i^0 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1-i|t-i} \\ \vdots \\ \hat{x}_{t+N-i|t-i} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, r}, \quad (10)$$

где E_n – единичная матрица размера $n \times n$.

Тогда прогнозирующая модель (8)–(9) опишется следующей системой:

$$\begin{aligned}\hat{X}_t &= \Psi \hat{x}_{t+1|t} + \sum_{i=1}^r \Psi_i^0 \hat{X}_i^0 + \mathbf{P} U_t, \\ \hat{Y}_t &= \Lambda \hat{x}_{t+1|t} + \sum_{i=1}^r \Lambda_i^0 \hat{X}_i^0 + \Phi U_t.\end{aligned}\quad (11)$$

Оптимальное решение задачи предлагается искать, исходя из минимизации следующего критерия:

$$J(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \|\hat{y}_{t+k|t} - \bar{y}_t\|_C^2 + \|u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t}\|_D^2 \right\}, \quad (12)$$

где матрицы C и D – симметричные и положительно определенные.

Для получения квадратичной целевой функции в векторно-матричном виде преобразуем целевую функцию (12), введя вектор $\bar{Y}_t = [\bar{y}_{t+1} \ \dots \ \bar{y}_{t+N}]^T$.

Тогда с учетом (11) имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \|\hat{y}_{t+k|t} - \bar{y}_t\|_C^2 &= \frac{1}{2} \|\hat{Y}_t - \bar{Y}_t\|_{\bar{C}}^2 = \\ &= \frac{1}{2} U_t^T \Phi^T \bar{C} \Phi U_t + U_t^T [\Phi^T \bar{C} \Lambda \hat{x}_{t+1|t} + \Phi^T \bar{C} \sum_{i=1}^r \Lambda_i^0 \hat{X}_i^0 - \Phi^T \bar{C} \bar{Y}_t] + c_1,\end{aligned}\quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \|u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t}\|_D^2 = \frac{1}{2} U_t^T \bar{D} U_t - u_{t+1|t}^T D u_t + c_2, \quad (14)$$

где c_1, c_2 – постоянные составляющие, которые не зависят от U_t и $\hat{x}_{t+1|t}$, а \bar{C} и \bar{D} представимы следующим образом:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & C & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & C \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 2D & -D & 0 & \vdots & 0 \\ -D & 2D & -D & \vdots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & -D & 2D & -D \\ 0 & \dots & 0 & -D & 2D \end{bmatrix},$$

Таким образом, с учетом сделанных преобразований (13), (14) целевая функция запишется следующим образом:

$$J(t) = \frac{1}{2} U_{t-h}^T F U_{t-h} + U_{t-h}^T f + c_3, \quad (15)$$

где c_3 есть линейная комбинация c_1 и c_2 ,

$$F = \Phi^T \bar{C} \Phi + \bar{D}, \quad f = \Gamma \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \bar{Y}_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Du_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Phi^T \bar{C} \Lambda & \Phi^T \bar{C} \sum_{i=1}^r \Lambda_i^0 \hat{X}_i^0 & -\Phi^T \bar{C} \end{bmatrix}.$$

В результате получили задачу квадратичного программирования. Учет ограничений (4) может быть выполнен численно, например, используя для оптимизации (15) процедуру quadprog системы Matlab, приведя при этом ограничения в соответствующий вид.

В качестве примера рассмотрен вариант экономической системы, предназначенной для производства, хранения и поставок товаров потребителям:

$$\begin{aligned} q_{t+1} &= \bar{A}q_t + \bar{A}_1q_{t-1} + \varphi_t + \xi_t, \quad q_0 = \bar{q}_0, \quad q_1 = \bar{q}_1, \\ z_{t+1} &= z_t + \bar{B}\omega_t - \varphi_t + \zeta_t, \quad z_0 = \bar{z}_0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $q_t \in R^s$, $q_{i,t}$ – количество товара i -го типа у потребителя в момент времени t ($t = \overline{1, T}$, $i = \overline{1, s}$); $z_{i,t}$ – количество товаров i -го типа на складе производителя; $\omega_{i,t}$ – объем производства товаров i -го типа; $\varphi_{i,t}$ – объем поставок товаров i -го типа; ξ_t, ζ_t – векторные гауссовские случайные последовательности с характеристиками: $M\{\xi_t\} = 0$, $M\{\zeta_t\} = 0$, $M\{\xi_t \xi_k^T\} = \Sigma \delta_{t,k}$, $M\{\zeta_t \zeta_k^T\} = \Xi \delta_{t,k}$, $M\{\xi_t \zeta_k^T\} = 0$. \bar{A} и \bar{B} – матрицы, определяющие динамику производства и потребления.

В каждый момент времени t должны выполняться ограничения:

$$z_{\min} \leq z_t \leq z_{\max}, \quad 0 \leq \omega_t \leq \omega_{\max}, \quad 0 \leq \varphi_t \leq z_t. \quad (17)$$

Переменные ω_t и φ_t рассматриваются как управляющие воздействия. Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям определить стратегию управления производством, хранением и поставками товара, обеспечивающую количество товаров у потребителя q_t , близкое к заданному вектору \bar{q} , с учетом ограничений вида (17).

Путем несложных преобразований модель экономической системы (16) может быть сведена к модели (1), а ограничения (17) – к ограничениям (4). Оптимизационная задача решается на каждой итерации для спрогнозированных значений вектора состояния. При проведении минимизации критерия (15) численно в системе Matlab необходимо преобразить ограничения (16), выразив их через искомый в момент времени t вектор U_t , известные к данному моменту времени величины и оценку вектора состояния $\hat{x}_{t+1|t}$.

Моделирование проведено на следующих исходных данных:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0 \\ -0,25 & 0,9 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}, z_{\min} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, z_{\max} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix},$$

$$\omega_{\max} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,7 \end{bmatrix}, z_0 = z_1 = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}, q_0 = q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\omega_0 = \omega_1 = \varphi_0 = \varphi_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, N=5, H = E_4, W = 0,$$

$$V = \text{diag}\{0,0005; 0,0005; 0,0005; 0,0005\}.$$

Результаты численного моделирования приведены в виде графиков переходных процессов на рис. 1–3.

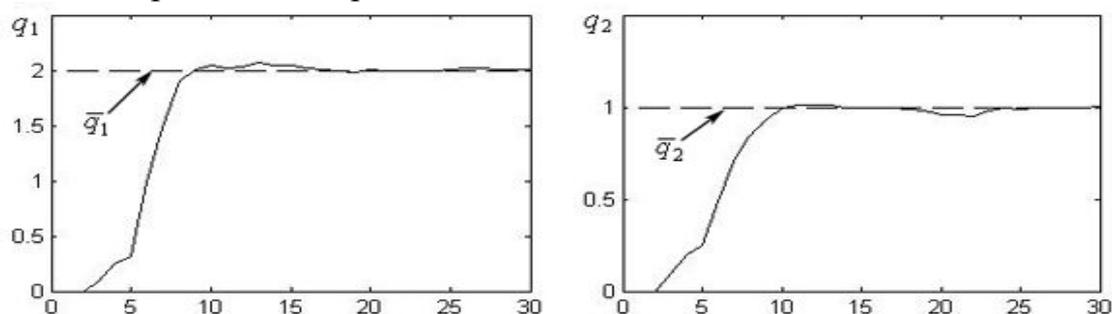


Рис. 1. Количество товара у потребителя

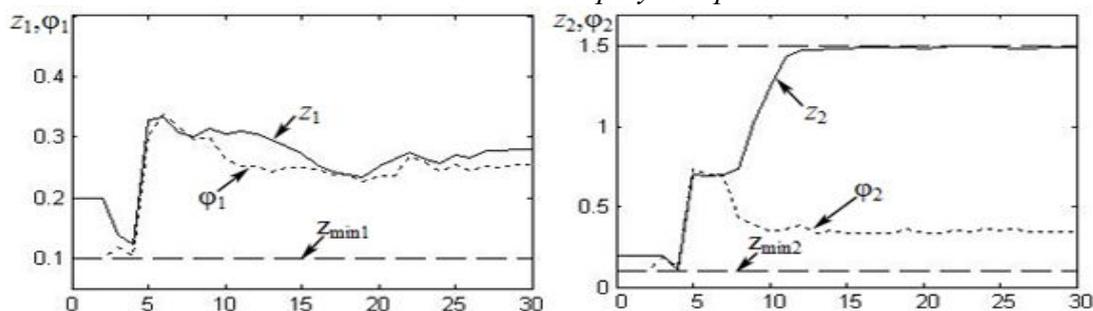


Рис. 2. Количество товара на складе производителя и объем поставок

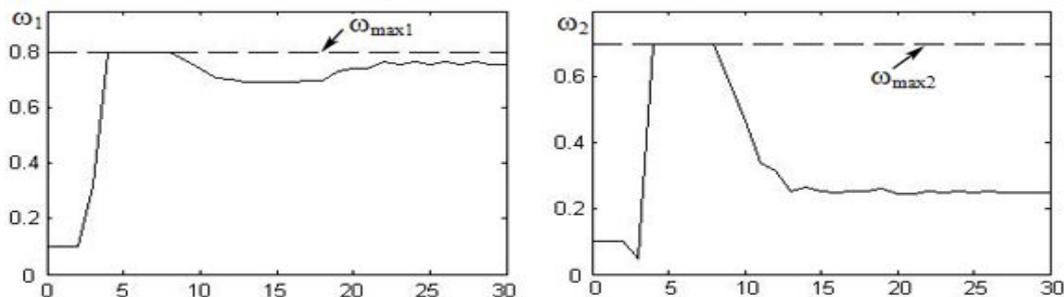


Рис. 3. Объем производства

Литература

1. Киселева М. Ю., Смагин В. И. Управление производством, хранением и поставками товаров на основе прогнозирующей модели выхода системы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 2(7). – С. 24–30.
2. Киселева М. Ю., Смагин В. И. Управление производством и поставками товаров с учетом запаздываний // Информационные технологии и математическое моделирование: Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (13–14 ноября 2009 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. – С. 272–276.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ СКЛАДОВ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ОПТОВОГО И РОЗНИЧНЫХ СКЛАДОВ

В. И. Смагин, О. О. Мухина
Томский государственный университет

В работе рассматриваются задачи управления запасами с учетом транспортных ограничений и транспортных запаздываний для структуры складов, содержащих оптовый склад.

Рассмотрим структурную схему системы складов, состоящую из оптового и N розничных складов:

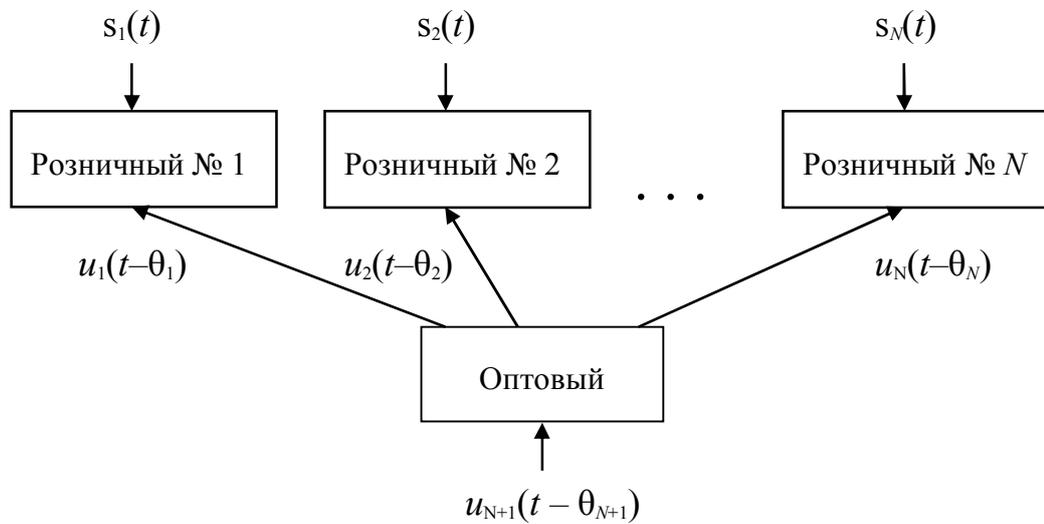


Рис. 1. Структурное расположение системы складов, состоящей из оптового и N розничных складов

Поставки $u_i(t)$ осуществляются с оптового склада на розничные. Спрос, поступающий на розничные склады в момент времени t , описывается величиной $s_i(t)$. Поставки осуществляются с запаздываниями θ_i . Оптовый склад имеет внешнего поставщика. Модель системы складов описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1 - k_1)x_1(t) + u_1(t - \theta_1) - s_1(t), \\ x_2(t+1) &= (1 - k_2)x_2(t) + u_2(t - \theta_2) - s_2(t), \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$x_{N+1}(t+1) = (1 - k_{N+1})x_{N+1}(t) + u_{N+1}(t - \theta_{N+1}) - u_1(t) - u_2(t) - \dots - u_N(t), \quad (1)$$

где $x_i(t)$ – уровень запаса i -го склада в момент времени t ; k_i – коэффициенты потерь при хранении товаров на складах.

Объемы поставок $u_i(t)$, $i = \overline{1, N+1}$, обеспечивающие заданные уровни запасов z_i на каждом складе, определяются с учетом следующих ограничений:

- на грузоподъемность транспортных средств;
- на страховой запас.

При этом дополнительно осуществляется минимизация издержек на хранение товаров на каждом складе.

Решение задачи определяется на основе минимизации локального критерия [1]:

$$I(k) = M \{ (x(k+1) - z(k))^T C (x(k+1) - z(k)) + u^T(k) D u(k) / X_0^k, S_0^k \}, \quad (2)$$

где $C > 0$, $D \geq 0$ – весовые матрицы,

$$X_0^k = \{x(0), x(1), \dots, x(k)\}, \quad S_0^k = \{s(0), s(1), \dots, s(k)\}.$$

Преобразовав модель с запаздываниями (1) к системе более высокого порядка, получим дискретную модель без запаздываний:

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k) + \bar{F}s(k). \quad (3)$$

При этом критерий (2) будет следующим:

$$\bar{I}(k) = M \{ (\bar{x}(k+1) - \bar{z}(k))^T \bar{C} (\bar{x}(k+1) - \bar{z}(k)) + u^T(k) \bar{D} u(k) / \bar{X}_0^k, S_0^k \}, \quad (4)$$

где $\bar{X}_0^k = \{\bar{x}(0), \bar{x}(1), \dots, \bar{x}(k)\}$.

Осуществив выбор весовых матриц в (4) по методике, приведенной в [2], получим закон локально-оптимального управления:

$$u^*(t) = -(\bar{B}^T H^T \bar{C} H \bar{B} + \bar{D})^{-1} \bar{B}^T H^T \bar{C} (H \bar{A} \bar{x}(k) - H \bar{F} s(k) - \bar{z}(k)). \quad (5)$$

Учет транспортных ограничений осуществляется следующим образом [2]:

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } u_i^*(t) < U_i^{(\min)}, \\ u_i^*(t), & \text{если } U_i^{(\min)} \leq u_i^*(t) \leq U_i^{(\max)}, \\ U_i^{(\max)}, & \text{если } u_i^*(t) > U_i^{(\max)}, \end{cases} \quad (6)$$

где $u_i^*(t)$ – оптимальные объемы поставок, введенные в (5); $U_i^{(\min)} = K_r U_i^{(\max)}$ –

минимально допустимые уровни поставок товаров; $U_i^{(\max)} = \frac{G_{\max i}}{p}$ – макси-

мально допустимые уровни поставок товаров; K_r – коэффициент использования грузоподъемности транспортных средств; p – вес единицы товара;

$G_{\max i}$ – максимальная грузоподъемность i -го транспортного средства.

В качестве примера рассмотрена задача управления запасами для системы складов, состоящей из оптового и 2 розничных складов. В этом случае модель системы складов имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1 - k_1)x_1(t) + u_1(t - \theta_1) - s_1(t), \\ x_2(t+1) &= (1 - k_2)x_2(t) + u_2(t - \theta_2) - s_2(t), \\ x_3(t+1) &= (1 - k_3)x_3(t) + u_3(t - \theta_3) - u_1(t) - u_2(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) можно преобразовать к виду (3), в котором запаздывания отсутствуют. Преобразование осуществляется путем расширения пространства состояний. Расширенный вектор состояния, учитывающий конкретные задержки, примет вид:

$$\bar{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad u_1(t-1) \quad u_1(t-2) \quad u_1(t-3) \quad u_2(t-1) \quad u_2(t-2) \\ u_2(t-3) \quad u_3(t-1) \quad u_3(t-2) \quad u_3(t-3)]^T.$$

Матрица динамики системы (3) \bar{A} размерности 12×12 состоит из элементов $\bar{a}_{i,i} = 1 - k_i, i = \overline{1,3}$; $\bar{a}_{7+i,4+i} = 1, i = \overline{0,5}$; $\bar{a}_{1,5}, \bar{a}_{2,9}, \bar{a}_{3,10} = 1$; $\bar{a}_{3,5}, \bar{a}_{3,9} = -1$, остальные элементы равны нулю. Матрица \bar{B} размерности 12×3 состоит из элементов $\bar{b}_{4,1}, \bar{b}_{5,2}, \bar{b}_{6,3} = 1$, а остальные элементы равны нулю. Матрица \bar{F} размерности 12×2 состоит из элементов $\bar{f}_{1,1}, \bar{f}_{2,2} = -1$, остальные элементы равны нулю.

При моделировании закон управления (6) для расширенной системы не обеспечил системе свойство астатизма. В работе предложено путем введения дополнительного критерия, оптимизация которого осуществляется на скользящем интервале, обеспечить корректировку управления с целью достижения свойства астатизма.

Уменьшение издержек на хранение товаров на складах достигается минимизацией среднего уровня количества товаров на складах при условии, что страховой запас остается неприкосновенным. Страховой запас может быть определен по методикам, описанным в [3].

На рис. 2, 3 приведены результаты моделирования для второго розничного склада.

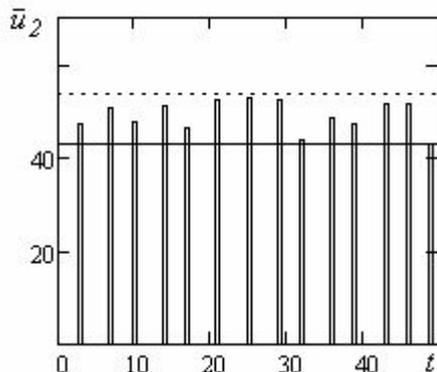


Рис. 2. Диаграмма поставок

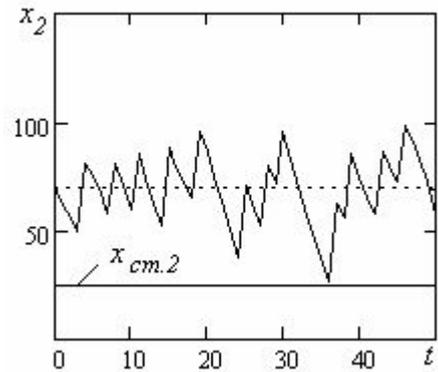


Рис. 3. Изменение количества товара

Как видно из графиков, количество товара на складе изменяется пилообразно, оставляя страховой запас неприкосновенным. Также объемы поставок на склад колеблются в заданных пределах, обеспечивая высокую загрузженность транспортного средства, что приводит к уменьшениям транспортных издержек.

Литература

1. Смагин В. И., Параев Ю. И. Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. – Томск: Изд-во. Том. ун-та., 1996. – 170 с.
2. Смагин В. И. Локально-оптимальное управление запасами: учеб.-метод. пособие / Том. гос. ун-т. – Томск, 2001. – 30 с.
3. Модели и методы теории логистики / Под ред. В. С. Лукинского. – СПб. : Питер, 2007. – 448 с.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОДАЖИ ТОВАРОВ В УСЛОВИЯХ РАЗВИТИЯ РОССИИ В ИННОВАЦИОННОМ РУСЛЕ

Н. В. Степанова

Томский государственный университет

Оптимизация продажи скоропортящейся продукции (молоко, творог и т. д.) представляет определенный практически интерес, так как продукцию, не реализованную в течение торговой сессии, в лучшем случае надо пускать в переработку, а в худшем случае – просто выбрасывать. Поэтому при реализации такой продукции возникает ряд вопросов:

- а) какой объем продукции надо завозить на торговую точку;
- б) по какой цене ее продавать;
- в) как управлять ценой продажи продукции, чтобы к концу торговой сессии она была полностью реализована.

Все эти задачи надо решать при вполне естественном критерии оптимальности – максимизации прибыли, получаемой от реализации продукции.

Математическая модель

Пусть в торговую точку завозится партия продукции объемом Q_0 , которая должна быть продана в течение торговой сессии длительностью T . Пусть d – объем затрат на выпуск единицы продукции, так что производителю эта партия стоила $Q_0 d$ рублей.

Пусть $c(t)$ есть цена, по которой продукция продается в момент времени t . В данной работе рассматривается вопрос управления ценой продажи $c(t)$ в зависимости от времени t и объема $Q(t)$ продукции, не реализованной к этому моменту времени. Цель этого управления – добиться того, что продукция будет реализована к концу торговой сессии и при этом будет получена максимальная прибыль.

Будем считать, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(c)$, зависящей от розничной цены c . Вид этой зависимости будет уточнен ниже.

Будем считать, что покупатели покупают товар независимо друг от друга и объем покупки ξ есть случайная величина с $M\{\xi\} = a_1$ и $M\{\xi^2\} = a_2$.

Пусть $Q(t)$ есть количество продукции, которая осталась не реализованной в момент времени t . Рассмотрим решение задачи в так называемом диффузионном приближении, когда $Q(t)$ аппроксимируется диффузионным

случайным процессом. Как показано Е.В. Новицкой, такую аппроксимацию следует брать в виде

$$dQ(t) = -a_1\lambda(c)dt + \sqrt{a_2\lambda(c)}dw(t), \quad (1)$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Именно эту аппроксимацию мы и исследуем ниже.

В настоящей работе будет исследован случай, когда управление розничной ценой определяется соотношением

$$a_1\lambda(c(t)) = \kappa \frac{Q(t)}{T-t} \quad (2)$$

Объединяя (1) и (2) можно сказать, что диффузионная аппроксимация процесса $Q(t)$ имеет вид

$$dQ(t) = -\kappa \frac{Q(t)}{T-t} dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \kappa \frac{Q(t)}{T-t}} dw(t). \quad (3)$$

Найдем сначала некоторые характеристики процесса $Q(t)$.

Математическое ожидание процесса $Q(t)$

Обозначим $M\{Q(t)\} = \bar{Q}(t)$. Для краткости записи, аргумент t у $Q(t)$ и $\bar{Q}(t)$ мы часто будем опускать. Усредняя уравнение (3) с учетом того, что для винеровского случайного процесса $M\{dw(t)\} = 0$, получим

$$d\bar{Q}(t) = -\kappa \frac{\bar{Q}(t)}{T-t} dt, \quad (4)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{Q}(t) = Q_0(1-t/T)^\kappa. \quad (5)$$

Дисперсия процесса $Q(t)$

Обозначим $Q_2(t) = M\{Q^2(t)\}$. Можно показать, что эта величина удовлетворяет уравнению

$$\frac{dQ_2}{dt} + 2\kappa \frac{Q_2}{T-t} = \frac{a_2}{a_1} \kappa \frac{\bar{Q}}{T-t}. \quad (6)$$

Нас будет интересовать дисперсия процесса $Q(t)$, то есть процесс $D_Q(t) = Q_2 - \bar{Q}^2$. Решая уравнение (6) с начальным условием $Q_2(0) = Q_0^2$, можно получить

$$D_Q(t) = \frac{a_2}{a_1} Q_0(1-t/T)^\kappa \left[1 - (1-t/T)^\kappa \right]. \quad (7)$$

Математическое ожидание выручки и его оптимизация

Рассмотрим случай, когда зависимость $\lambda(c)$ может быть аппроксимирована прямой линией

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1 \frac{c - c_0}{c_0}. \quad (8)$$

Здесь λ_0 имеет смысл некоторой «стандартной» цены, так что $\lambda(c_0) = \lambda_0$. Такая аппроксимация возможна, если отклонения цены c от c_0 незначительны.

В этом случае уравнение (2) приобретает вид

$$a_1 \lambda(c) = a_1 \left(\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_1 \frac{c}{c_0} \right) = \frac{\kappa Q}{T-t},$$

откуда

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\kappa Q}{a_1 \lambda_1 (T-t)} \right). \quad (9)$$

Так как в единицу времени в среднем совершается $\lambda(c)$ покупок, средний размер которых равен a_1 по цене c , то среднее значение выручки в единицу времени равно

$$ca_1 \lambda(c) = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\kappa}{a_1 \lambda_1} \frac{Q}{T-t} \right) \kappa \frac{Q}{T-t}. \quad (10)$$

Усредняя по объему партии товара $Q(t)$, имеющегося в наличии в момент времени t , получим

$$M\{ca_1 \lambda(c)\} = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \kappa \frac{Q_0}{T-t} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^\kappa - \frac{c_0 \kappa^2 Q_0}{a_1 \lambda_1 (T-t)^2} \times \\ \times \left\{ \frac{a_2}{a_1} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^\kappa \left[1 - \left(1 - \frac{t}{T} \right)^\kappa \right] + \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{2\kappa} Q_0^2 \right\}. \quad (11)$$

Отсюда средняя выручка за весь период торговой сессии равна

$$S = \int_0^T M\{ca_1 \lambda(c)\} dt.$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, получим

$$S = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) Q_0 - \frac{c_0 a_2 Q_0}{a_1^2 \lambda_1 T} \kappa^2 \left(\frac{1}{\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa-1} \right) - \frac{c_0 Q_0^2}{a_1 \lambda_1 T} \frac{\kappa^2}{2\kappa-1}. \quad (12)$$

Задача выбора оптимального значения κ принимает вид

$$\frac{c_0 Q_0}{a_1 \lambda_1 T} \left[\frac{a_2}{a_1} \kappa^2 \left(\frac{1}{\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa-1} \right) + Q_0 \frac{\kappa^2}{2\kappa-1} \right] \Rightarrow \min_{\kappa},$$

приравнявая нулю производную от этого выражения по κ , получим

$$\frac{a_1 Q_0}{a_2} = - \frac{\kappa(2\kappa^2 - 6\kappa + 3)}{2(\kappa-1)^3}, \quad (13)$$

которое надо решить в области $\kappa > 1$. Можно показать, что это уравнение имеет единственное решение.

Определение оптимального объема партии товара, выставяемой на продажу

Существует также оптимальный объем партии товара Q_0 , выставяемый на продажу. Так как себестоимость единицы продукции равна d , то прибыль, получаемая от продажи партии товара объема Q_0 , равна [с учетом (11)]

$$P = \int_0^T M \{ca_1\lambda(c)\} dt - d \cdot Q_0 = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) Q_0 - d \cdot Q_0 - \frac{c_0 a_2 Q_0}{a_1^2 \lambda_1 T} \frac{\kappa^3}{(\kappa - 1)(2\kappa - 1)} - \frac{c_0 Q_0^2}{a_1 \lambda_1 T} \frac{\kappa^2}{2\kappa - 1},$$

и оптимальный объем партии Q_0 определяется из условия $\partial P / \partial Q_0 = 0$:

$$Q_0 = \left(\left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - \frac{d}{c_0} - \frac{a_2}{a_1^2 \lambda_1 T} \frac{\kappa^3}{(\kappa - 1)(2\kappa - 1)} \right) / \left(\frac{2}{a_1 \lambda_1 T} \frac{\kappa^2}{2\kappa - 1} \right) = \frac{a_1 \lambda_1 T}{2} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{d}{c_0}\right) \frac{2\kappa - 1}{\kappa^2} - \frac{a_2}{2a_1} \frac{\kappa}{(\kappa - 1)}. \quad (14)$$

Можно решать и более глобальную оптимизационную задачу – максимизацию прибыли по величинам Q_0 и κ . Это означает, что мы должны решать совместно систему (13) и (14).

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} Q_0 = -\frac{\kappa(2\kappa^2 - 6\kappa + 3)}{2(\kappa - 1)^3}, \\ Q_0 = \frac{a_1 \lambda_1 T}{2} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{d}{c_0}\right) \frac{2\kappa - 1}{\kappa^2} - \frac{a_2}{2a_1} \frac{\kappa}{(\kappa - 1)}. \end{cases} \quad (15)$$

Эта система также имеет единственное решение.

Литература

1. Новицкая Е. В., Терпугов А. Ф. Оптимизация продажи скоропортящейся продукции. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 97 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ МЕЖДУ ПРЕДПРИЯТИЯМИ В ФОРМЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

С. В. Чаплинская

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

В работе [1] впервые был определен класс динамических матричных игр на дискретном интервале времени, были введены понятия стратегии, седловой точки, цена игры и найден необходимый и достаточный признак оптимальности стратегий.

В данной статье излагаются результаты исследования задачи последовательного (в течение T лет) инвестирования ограниченных финансовых средств в развитие двух предприятий, рассматриваемых как два подразделения одной и той же организации. Оптимальное распределение средств найдено с помощью моделирования этой задачи в форме многошаговой матричной игры.

Содержательное условие задачи следующее. Пусть в начальный момент времени совокупные средства, распределяемые между двумя подразделениями (предприятиями) организации, составляют x^0 . Средства $u_1(t)$ ($u_2(t)$), вложенные в предприятие 1 (предприятие 2), приносят к концу текущего года $t \in [1, T]$ доход $f_1(u_1(t))$ ($f_2(u_2(t))$) и возвращаются в размере $\varphi_1(u_1(t))$ ($\varphi_2(u_2(t))$) в следующем году и также могут быть вложены в одно из подразделений. По окончании года все оставшиеся средства заново перераспределяются между предприятиями, новых средств не поступает. Требуется найти оптимальный способ распределения имеющихся ресурсов при наличии следующих дополнительных условий:

1) Предполагается, что, исходя из специфических условий производства, на предприятии 1 существует ограничение (частичное регулирование «сверху») в выделении средств:

$$u_1(t) \in \{u_1^1(t), u_1^2(t), u_1^3(t)\}, t = 1, \dots, T. \quad (1)$$

2) Существует риск потери части дохода и, в зависимости от неблагоприятных факторов, учетная ставка (темп снижения доходности) может принимать одно из трех возможных значений:

$$d^k(t) = \frac{u_1^k(t)}{x(t-1)}, k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где $x(t-1)$ – количество средств, которые необходимо перераспределить в начале t -го года.

Рассматриваемую ситуацию будем моделировать в форме динамической матричной игры. За игрока I примем специалистов организации, принимающих решение о распределении средств, за игрока II – совокупность внешних обстоятельств, влияющих на уровень дохода организации. В таком случае данную игру можно классифицировать как игру с «природой», где игрок I действует сознательно и преследует цель максимизировать суммарный доход, полученный в результате инвестиционной деятельности от двух предприятий, а игрок II – «природа», безразличная к любым действиям игрока I.

Согласно условию (1), в каждый момент времени $t \in [1, T]$ игрок I предполагает тремя стратегиями, которые соответствуют трем возможным вариантам вложения средств. В свою очередь, «природа» может реализовать одно

из трех возможных состояний, обуславливающих снижение уровня дохода с учетной ставкой $d^1(t)$, $d^2(t)$ и $d^3(t)$ соответственно [условие (2)].

Таким образом, управляемая система – два предприятия с вложенными в них средствами. Система характеризуется одним параметром состояния $x(t-1)$, $t = 1, \dots, T$ и одним управляющим параметром $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, выбором которого в каждый момент времени $t \in [1, T]$ распоряжается игрок I (т. к. в данной игре интересы преследует только он). Поскольку средства ежегодно перераспределяются полностью, то $u_2(t) = x(t-1) - u_1(t)$.

В каждом состоянии $x(t)$ матрица выигрыша игрока I будет иметь вид

$$h(x(t)) = \begin{pmatrix} a_{11}^t(x(t)) & a_{12}^t(x(t)) & a_{13}^t(x(t)) \\ a_{21}^t(x(t)) & a_{22}^t(x(t)) & a_{23}^t(x(t)) \\ a_{31}^t(x(t)) & a_{32}^t(x(t)) & a_{33}^t(x(t)) \end{pmatrix}, t = 1, \dots, T,$$

где $a_{ij}^t(x(t))$ – доход организации в t -ом году при выборе i -го варианта вложения (стратегии $i(t)$) и темпе снижения доходности $d^j(t)$, определяемый по формуле

$$a_{ij}^t(x(t)) = \frac{1}{(1 + d^j(t))^t} [f_1(u_1^i(t) + f_2(x(t-1) - u_1^i(t)))] \quad (3)$$

Математическую модель задачи запишем следующем виде:

$$x(t) = \varphi_1(u_1(t)) + \varphi_2(x(t-1) - u_1(t)), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (4)$$

$$x(0) = x^0, \quad (5)$$

$$u_1(t) \in u_1^1(t), u_1^2(t), u_1^3(t), \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (6)$$

$$d(t) = \frac{u_1(t)}{x(t-1)}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (7)$$

$$H(x(\cdot)) = \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1 + d(t))^t} (f_1(u_1(t)) + f_2(x(t-1) - u_1(t))), \quad (8)$$

где (4) – уравнение движения, выражающее остаток средств после t -го года; (8) – критерий качества задачи, характеризующий доход, полученный от двух предприятий в течение T лет (выигрыш игрока I).

Поставленную задачу (4)–(8) решим при следующих исходных значениях параметров:

$$x^0 = 1 \text{ (млн. д. ед.)}, \quad T = 3, \quad \varphi_1(u_1(t)) = 0,7 \cdot u_1(t), \quad \varphi_2(u_2(t)) = 0,5 \cdot u_2(t),$$

$$u_1(t) \in U_1 = \{0,8x(t-1); 0,3x(t-1); 0,5x(t-1)\},$$

$$f_1(u_1(t)) = \{f_1^1(u_1(1)), f_1^2(u_1(2)), f_1^3(u_1(3))\} = \{2,3 \cdot u_1(1), 2,5 \cdot u_1(2), 2,7 \cdot u_1(3)\},$$

$$f_2(u_2(t)) = \{f_2^1(u_2(1)), f_2^2(u_2(2)), f_2^3(u_2(3))\} = \{2,1 \cdot u_2(1); 2,4 \cdot u_2(2); 2,3 \cdot u_2(3)\},$$

где $f_1^t(u_1(t))$ и $f_2^t(u_2(t))$ – доход, полученный от вложений в предприятия 1 и 2 соответственно в t -м году, $t = 1, 2, 3$.

Процесс решения задачи разобьем на этапы, соответствующие моменту времени, в котором решается вопрос о распределении средств между предприятиями.

Этап I. Для первого года значения параметров управления следующие:

$$u_1^1(1) = 0,8 \cdot x(0) = 0,8 \cdot 1 = 0,8;$$

$$u_1^2(1) = 0,3 \cdot x(0) = 0,3 \cdot 1 = 0,3;$$

$$u_1^3(1) = 0,5 \cdot x(0) = 0,5 \cdot 1 = 0,5.$$

Вычислим значения учётной ставки, соответствующие каждому из найденных параметров управления, воспользовавшись формулой (2):

$$d^1(1) = \frac{u_1^1(1)}{x(0)} = \frac{0,8}{1} = 0,8;$$

$$d^2(1) = \frac{u_1^2(1)}{x(0)} = \frac{0,3}{1} = 0,3;$$

$$d^3(1) = \frac{u_1^3(1)}{x(0)} = \frac{0,5}{1} = 0,5.$$

Подставляя найденные выше значения, а также параметры $f_1^1(u_1(1)) = 2,3 \cdot u_1(1)$, $f_2^1(u) = 2,1 \cdot u_2(1)$ в формулу (3), вычислим элементы матрицы выигрышей $h(x(0))$:

$$a_{11}(x(0)) = \frac{1}{(1+0,8)^1} \cdot (2,3 \cdot 0,8 + 2,1 \cdot (1-0,8)) = 1,2566;$$

$$a_{12}(x(0)) = \frac{1}{(1+0,3)^1} \cdot (2,3 \cdot 0,8 + 2,1 \cdot (1-0,8)) = 1,7402;$$

$$a_{13}(x(0)) = \frac{1}{(1+0,5)^1} \cdot (2,3 \cdot 0,8 + 2,1 \cdot (1-0,8)) = 1,5142;$$

$$a_{21}(x(0)) = \frac{1}{(1+0,8)^1} \cdot (2,3 \cdot 0,3 + 2,1 \cdot (1-0,3)) = 1,2096;$$

$$a_{22}(x(0)) = \frac{1}{(1+0,3)^1} \cdot (2,3 \cdot 0,3 + 2,1 \cdot (1-0,3)) = 1,6632;$$

$$a_{23}(x(0)) = \frac{1}{(1+0,5)^1} \cdot (2,3 \cdot 0,3 + 2,1 \cdot (1-0,3)) = 1,6632;$$

$$a_{31}(x(0)) = \frac{1}{(1+0,8)^1} \cdot (2,3 \cdot 0,5 + 2,1 \cdot (1-0,5)) = 1,2320;$$

$$a_{32}(x(0)) = \frac{1}{(1+0,3)^1} \cdot (2,3 \cdot 0,5 + 2,1 \cdot (1-0,5)) = 1,6940;$$

$$a_{33}(x(0)) = \frac{1}{(1+0,5)^1} \cdot (2,3 \cdot 0,5 + 2,1 \cdot (1-0,5)) = 1,4740.$$

Сформируем из полученных элементов матрицу:

$$h(x(0)) = \begin{pmatrix} 1,2566 & 1,7402 & 1,5142 \\ 1,2096 & 1,6632 & 1,4472 \\ 1,2320 & 1,6940 & 1,4740 \end{pmatrix}.$$

Найдем состояния системы $x^k(1)$, характеризующие совокупные средства, распределяющиеся между предприятиями в начале второго года в зависимости от выбранного управления $u_1^k(1)$, $k = 1, 2, 3$, подставляя параметры $\varphi_1(u_1(t)) = 0,7 \cdot u_1(t)$, $\varphi_2(u_2(t)) = 0,5 \cdot u_2(t)$ в уравнение (4):

$$x^1(1) = \varphi_1(u_1^1(1)) + \varphi_2(x(0) - u_1^1(1)) = 0,7 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot (1 - 0,8) = 0,66;$$

$$x^2(1) = \varphi_1(u_1^2(1)) + \varphi_2(x(0) - u_1^2(1)) = 0,7 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot (1 - 0,3) = 0,56;$$

$$x^3(1) = \varphi_1(u_1^3(1)) + \varphi_2(x(0) - u_1^3(1)) = 0,7 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot (1 - 0,5) = 0,6.$$

Этап II. После того как были найдены возможные состояния системы $x^k(1)$, $k = 1, 2, 3$, можно найти допустимые управления и норму дисконта для второго года. Обозначим за $u_1^{lk}(2)$ l -е значение допустимого управления при состоянии системы $x^k(1)$, $l = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$.

Тогда темп снижения доходности определим также по формуле (2):

$$d^{lk}(1) = \frac{u_1^{lk}(2)}{x^k(1)}.$$

Таким образом, значения параметров $u_1^{lk}(2)$ и $d^{lk}(2)$, $k, l = 1, 2, 3$ рассчитываются аналогично, как и на предыдущем этапе. Подставляя их для фиксированного значения $k = 1, 2, 3$ в формулу (3), можно построить матрицы выигрышей $h^k(x^k(1))$ в каждом состоянии $x^k(1)$, $k = 1, 2, 3$.

Совокупные средства, распределяемые между предприятиями в начале третьего года в зависимости от выбранного управления $u_1^{lk}(2)$, найдем из уравнения движения (4):

$$x^{lk}(2) = \varphi_1(u_1^{lk}(2)) + \varphi_2(x^k(1) - u_1^{lk}(2)), \quad k, l = 1, 2, 3.$$

Этап III. На последнем этапе (при $t = 3$) аналогично вычисляются соответствующие значения параметров $u_1(3)$, $d(3)$ и для всех значений $x^{lk}(2)$ определяются матрицы выигрышей $h^{lk}(x^{lk}(2))$ игрока I ($k, l = 1, 2, 3$).

В работе [1] доказано, что если исходные матрицы, определённые на всех этапах, имеют седловую точку в чистых стратегиях, то для определения оптимальной траектории можно применить принцип минимакса. Так как в рассматриваемой практической задаче эти условия не выполняются, то в данной работе предлагается следующий принцип поведения ЛПР.

Рассчитаем значение гарантированного выигрыша (нижнюю цену игры) матрицы $h(x(0))$:

$$\underline{v}(x(0)) = \max_i \min_j a_{ij}(x(0)) = 1,2566 = a_{11}(x(0)).$$

Следовательно, оптимальной стратегией игрока I на данном этапе будет стратегия $i^*(1) = 1$, которой соответствует управление $u_1^1(1) = 0,8$.

Действуя по аналогии, можно найти гарантированные выигрыши $\underline{v}^k(x(1))$, $\underline{v}^{lk}(x(2))$, а также оптимальные стратегии для остальных матриц $h^l(x(1))$, $h^{lk}(x(2))$, $l, k = 1, 2, 3$.

Рассчитаем суммарный гарантированный выигрыш игрока I вдоль каждой траектории по формуле:

$$v^{lk} = \underline{v}(x(0)) + \underline{v}^l(x^l(1)) + \underline{v}^{lk}(x^{lk}(2)), l, k = 1, 2, 3.$$

Так как организация (игрок I) стремится максимизировать свой суммарный доход, а интересы игрока II мы не учитываем, то из найденных значений логично выбрать максимальное:

$$\begin{aligned} \max_{l,k} v^{lk} &= \max \{ \underline{v}^{11}, \underline{v}^{12}, \underline{v}^{13}, \underline{v}^{21}, \underline{v}^{22}, \underline{v}^{23}, \underline{v}^{31}, \underline{v}^{32}, \underline{v}^{33} \} = \\ &= \max \{ 1,958, 1,9286, 1,9404, 1,8517, 1,8251, 1,8368, \\ &\quad 1,8943, 1,8675, 1,8782 \} = 1,958 = \underline{v}^{11}. \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальной в данной ситуации будет являться траектория, вдоль которой игрок I получит выигрыш $\underline{v}^{11} = 1,958$:

$$x^*(\cdot) = (x^0, x^1(1), x^{11}(2)) = (1, 0,66, 0,4356).$$

Оптимальная стратегия игрока I в данном случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} \xi_1^*(\cdot) &= \left((u_1^1(1), u_2^1(1)), i^*(1), (u_1^1(2), u_2^1(2)), i^*(2), (u_1^1(3), u_2^1(3)), i^*(3) \right) = \\ &= ((0,8, 0,2), 1), (0,528, 0,132), 1), (0,348, 0,0871), 1). \end{aligned}$$

Литература

1. Данилов Н. Н. Представление динамической матричной игры в форме задачи конфликтного управления // Вестник КемГУ. – 2009. – Вып. № 2 (38) – С. 39–42.
2. Данилов Н. Н. Теоретико-игровое моделирование конфликтных ситуаций. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. – 119 с.
3. Данилов Н. Н., Мешечкин В. В. Основы математической теории оптимальных процессов. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 219 с.

ОЦЕНКА УДОРОЖАЮЩИХ ФАКТОРОВ ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ НОРМАТИВОВ ФИНАНСИРОВАНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ИМУЩЕСТВА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Е. А. Червонная

Томский государственный университет

Одной из проблем функционирования системы общего образования является обеспечение достаточного, стабильного и обоснованного финансирования образовательных учреждений для реализации конституционных гарантий получения образования гражданами РФ, в том числе в части организации предоставления образования, находящейся в компетенции муниципалитета. Переход к нормативному подушевому финансированию системы образования является одним из основных финансово-экономических механизмов реформирования системы образования.

Перевод нормативного подушевого принципа в практику формирования бюджетов всех уровней выводит на первый план вопрос об объективном определении норматива финансирования учреждения. Использование специальных методик расчета финансовых нормативов является новым направлением во внедрении экономико-математических методов в систему бюджетного планирования, в том числе планирования средств на содержание имущества общеобразовательных учреждений.

Установление единого норматива финансирования на одного обучающегося любой школы – идеальная модель, которая может действовать в гипотетических условиях, когда все школы имеют типовые одинаковые здания одного года постройки с одинаковым количеством обучающихся и равными расходами на коммунальные услуги, содержание имущества и т.д. Реальные условия таковы, что школы размещаются в различных зданиях с разными расходами на коммунальные услуги, содержание имущества, а количество обучающихся зависит не только от вместимости здания, но и от района, в котором расположена школа.

Принципиальным условием финансирования образовательных учреждений является сохранение права ребенка на получение образования в рамках, установленных законом, и учет специфики образовательной отрасли как особой сферы. Подушевое бюджетное финансирование должно обеспечить гарантию того, что каждый ребенок вне зависимости от места проживания, возможностей бюджета муниципалитета и прочих условий получит образовательную услугу стандартного качества и объема. При этом здания, в которых размещаются дети, должны отапливаться, освещаться, удовлетворять санитарным нормам независимо от года постройки и других факторов.

Такой подход к определению бюджета, в отличие от традиционного подхода только от финансовых возможностей бюджета, позволяет защитить интересы образовательных учреждений, объективно находящихся в менее

выгодных условиях (меньшая наполняемость, малонаселенный район, более высокие тарифы на коммунальные услуги и т. д.).

Для объективного формализованного подхода к определению норматива в этой ситуации необходимо введение дополнительных поправочных коэффициентов к нормативу, отражающих реальные особенности и удорожающие аспекты учреждений в муниципалитете [1].

При этом объем ассигнований, выделяемых общеобразовательному учреждению на материальное обеспечение содержания имущества, равен NH , где N – норматив в расчете на одного обучающегося, H – количество обучающихся. Норматив будет определяться как $N_0 \left(1 + \sum_{i=1}^m D_i \right)$, где N_0 – базовый норматив на материальное обеспечение; m – количество удорожающих факторов, учитываемых в методике нормативного подушевого финансирования школ; D_i – доли, на которые происходит удорожание при наличии у учреждения i -го удорожающего фактора.

Интуитивно понятно, какие удорожающие факторы могут повлиять на размер норматива: более высокие тарифы поставщиков коммунальных услуг в учреждениях удалённых районов муниципалитета, наличие в учреждении действующего бассейна, наличие нескольких учебных корпусов, наличие подвоза обучающихся к учреждению на автобусе, наличие автомобиля.

Рассмотрим линейную регрессионную модель [2] вида

$$N = N_0 + \sum_{j=1}^m D_j Nsr_j + e, \quad (1)$$

где $m = 5$, Nsr_j – наблюдения за фактически сложившимися расходами на одного обучающегося без учета всех удорожающих факторов; $j = \overline{1, m}$, D_1 – доля, на которую увеличиваются расходы в случае более высоких тарифов коммунальных услуг в учреждении; D_2 – доля, на которую увеличиваются расходы при наличии в учреждении действующего бассейна; D_3 – доля увеличения расходов в случае, когда учреждение располагается в двух зданиях; D_4 и D_5 – доли увеличения соответственно при подвозе обучающихся к учреждению и при наличии автомобиля.

Для оценки размера базового норматива и величин D_i рассмотрим уравнение линейной множественной регрессии

$$N_i = N_0 + \sum_{j=1}^m D_j Nsr_{i,j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где N_0 , D_i – оцениваемые параметры; n – размер выборки, количество рассматриваемых учреждений (в городе Томске в настоящее время функционирует 64 школы, гимназии и лицея, 3 из которых не имеют собственных зданий, в зданиях еще 2 учреждений ведется капитальный ремонт, поэтому бу-

дем рассматривать данные по $n = 59$ учреждениям); N_i – фактически сложившиеся расходы на одного обучающегося в i -м учреждении, $i = \overline{1, n}$; $Nsr_{i,j}$ – фактически сложившиеся расходы без учета всех удорожающих факторов на одного обучающегося в i -м учреждении. В случае отсутствия в i -м учреждении j -го удорожающего фактора $Nsr_{i,j} = 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

В матричном виде уравнение (1) можно переписать так:

$$N = XD, \quad (3)$$

где $N = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n)^T$, $D = (D_0 \ D_1 \ \dots \ D_m)^T$,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & Nsr_{1,1} & \dots & Nsr_{1,m} \\ 1 & Nsr_{2,1} & \dots & Nsr_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & Nsr_{n,1} & \dots & Nsr_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Для определения вектора коэффициентов D воспользуемся методом наименьших квадратов, целевая функция которого примет вид:

$$Q = (N - XD)^T (N - XD) \rightarrow \min_D. \quad (4)$$

Находя из (4) оценки коэффициентов $D = (X^T X)^{-1} X^T N$, получили:

$$D = (2307 \ 0,32 \ 0,2 \ 0,26 \ 0,37 \ 0,001)^T. \quad (5)$$

Поскольку используемые наблюдения соизмеримы, то можно сравнивать влияние разных удорожающих факторов на величину норматива. Кроме того, можно говорить о том, что по сравнению со всеми рассматриваемыми удорожающими факторами самое малое влияние привносит фактор, учитывающий наличие автомобиля в общеобразовательном учреждении.

С учетом полученных оценок можно говорить о незначимости наличия автомобиля в учреждении при расчете норматива расходов на одного обучающегося, поскольку $D_5 = 0,001$ на порядки меньше остальных коэффициентов модели.

Таким образом, формула расчета норматива финансирования на одного обучающегося в части содержания имущества i -го общеобразовательного учреждения примет вид:

$$N_i = N_0 (1 + D_{1,i} + D_{2,i} + D_{3,i} + D_{4,i}), \quad (6)$$

где

$$D_{1,i} = \begin{cases} 0,26, & \text{при наличии в } i\text{-м учреждении более высоких тарифов,} \\ 0, & \text{при отсутствии в } i\text{-м учреждении более высоких тарифов;} \end{cases}$$

$$D_{2,i} = \begin{cases} 0,2, & \text{при наличии в } i\text{-м учреждении бассейна,} \\ 0, & \text{при отсутствии в } i\text{-м учреждении бассейна;} \end{cases}$$

$$D_{3,i} = \begin{cases} 0,26, & \text{при размещении } i\text{-го учреждения в нескольких зданиях,} \\ 0, & \text{при размещении } i\text{-го учреждения в одном здании;} \end{cases}$$

$$D_{4,i} = \begin{cases} 0,37, & \text{при наличии подвоза к } i\text{-м учреждению,} \\ 0, & \text{при отсутствии подвоза к } i\text{-м учреждению.} \end{cases}$$

Литература

1. Сапожникова Н. Ф., Червонная Е. А., Ульянова М. К. Совершенствование механизмов финансирования образовательных учреждений города Томска в условиях реализации комплексного проекта модернизации образования. – Томск: ОГУ РЦРО, 2009. – 124 с.
2. Многомерный статистический анализ в экономике / Под ред. В. Н. Томашевича. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999. – 598 с.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КЕМЕРОВСКОЙ ОБЛАСТИ В КОНТЕКСТЕ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ

Е. С. Чернова

Кемеровский государственный университет

Устойчивое развитие региона предполагает сбалансированное функционирование трех составляющих: природы, общества и экономики [5]. Социальное развитие выступает главным показателем степени цивилизованности и государства, и общества, поскольку означает такое состояние, при котором каждый человек удовлетворяет свои основные материальные потребности и имеет равные возможности для реализации своего потенциала [6].

Современная ситуация в России свидетельствует о неблагоприятном демографическом развитии страны [1]. Кемеровская область относится к регионам, где темпы сокращения населения, в недавнем прошлом, были самыми высокими в сравнении как по РФ, так и по Сибирскому федеральному округу [3].

В данной работе приводится модель демографических процессов в Кемеровской области, построенная в форме модифицированного демографического блока глобальной модели Медоуза «Мир-3» [2, 4].

Пусть $[0, T]$ – планируемый период времени. Шаг по времени Δt примем равным одному году. При моделировании будем рассматривать три уравнения, которые представляют собой возрастное распределение населения по «демографическим» поколениям: 0–14 лет; 15–59 лет; 60 лет и старше. Обозначим численности населения в данных трех группах соответственно через p_1 , p_2 и p_3 .

На основе анализа статистических данных за 2002–2009 гг. по Кемеровской области о смертности, были определены средние доли умерших в трех возрастных группах (обозначим их соответственно d_1 , d_2 , d_3) и доли населения, переходящие за один год из одного соседнего диапазона возрас-

тов в другой, которые составили 1/15 (для перехода из первого диапазона во второй) и 1/45 (для перехода из второго диапазона в третий).

Основными факторами, влияющими на рождаемость и увеличение продолжительности жизни, являются уровень дохода и состояние здоровья населения, поэтому в качестве управляющих воздействий в модели будем использовать доли расходов областного бюджета на здравоохранение и социальную поддержку (обозначим $u_j(t)$, $j=1,\dots,6$) по соответствующим возрастным группам.

Рождаемость рассмотрим как линейную регрессию от управляющих параметров:

$$B(t) = a_0 + a_1 \frac{I(t)}{k_1} u_1(t) + a_2 \frac{I(t)}{k_2} u_2(t), \quad (1)$$

где $I(t)$ – бюджет Кемеровской области в момент t . Через $k_j(t)$, $j=1,\dots,6$ обозначим минимальный размер отчислений в год на одного человека.

Тогда уравнения движения модели примут вид

$$p_1(t+1) = a_0 + a_1 \frac{I(t)}{k_1} u_1(t) + a_2 \frac{I(t)}{k_2} u_2(t) - p_1(t) \left(d_1 - \frac{1}{15}\right), \quad (2)$$

$$p_2(t+1) = \frac{p_1(t)}{15} - p_2(t) \left(d_2 - 1 + \frac{1}{45}\right) + \frac{I(t)}{k_3} u_3(t) + \frac{I(t)}{k_4} u_4(t), \quad (3)$$

$$p_3(t+1) = \frac{p_2(t)}{45} - p_3(t) \left(d_3 - 1\right) + \frac{I(t)}{k_5} u_5(t) + \frac{I(t)}{k_6} u_6(t), \quad (4)$$

$$t = 0, \dots, T-1.$$

Доли распределения бюджета ограничим снизу некоторой величиной $\mu_j(t) > 0$, обозначающей минимально возможную долю расхода, направляемую в определенную сферу в каждый момент времени t . Тогда ограничения на управляющие параметры запишутся в виде

$$\sum_{j=1}^6 u_j(t) \leq 1, \quad (5)$$

$$u_j(t) \geq \mu_j(t), \quad j = 1, \dots, 6, \quad (6)$$

$$t = 0, \dots, T-1.$$

Условия на концах траектории зададим следующим образом:

$$p_i(0) = p_i^0, \quad p_i(T) = p_i^T, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Целью демографической политики в Кемеровской области, как и в других регионах, является увеличение рождаемости, поэтому в качестве функционала качества можно взять «специальный» коэффициент рождаемости. Он рассчитывается применительно к той части населения, которая производит «рождения», а именно к группе в возрасте 15–59 лет:

$$F = \frac{a_0 + a_1 \frac{I(T)}{k_1} u_1(T) + a_2 \frac{I(T)}{k_2} u_2(T)}{p_2(T)} \rightarrow \max. \quad (8)$$

Построенная модель (1)–(8) является дискретной задачей оптимального управления с одним терминальным критерием качества. Для данной модели было доказано существование оптимальной траектории, необходимый признак оптимальности. Модель была апробирована на реальных данных по Кемеровской области, был построен прогноз на 2011 г. Для расчетов брались статистические данные по Кемеровской области с 2002 по 2009 г. по имеющимся трём возрастным группам (от 0 до 14 лет; от 15 до 59 лет; от 60 лет и старше). При помощи пакета Microsoft Office Excel были получены результаты, приведенные на рис. 1–3.

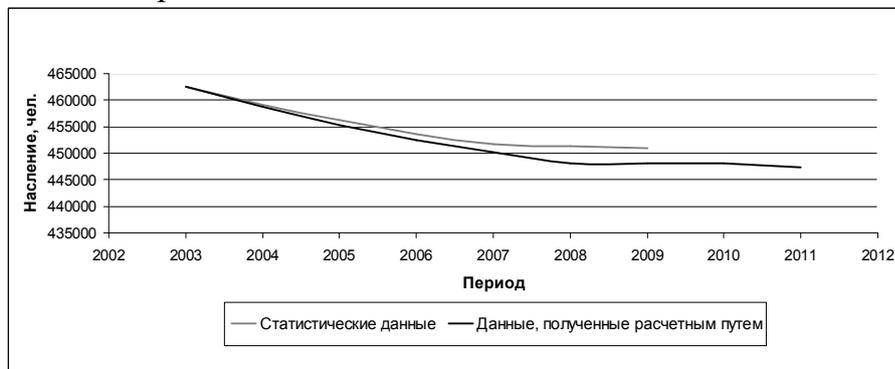


Рис. 1. Население в возрасте от 0 до 14 лет

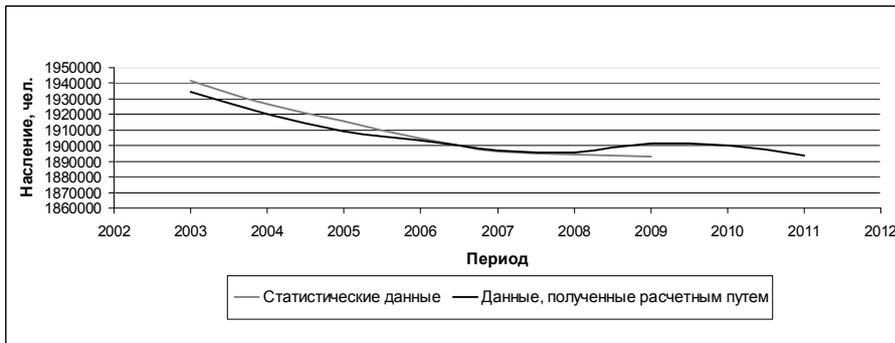


Рис. 2. Население в возрасте от 15 до 59 лет

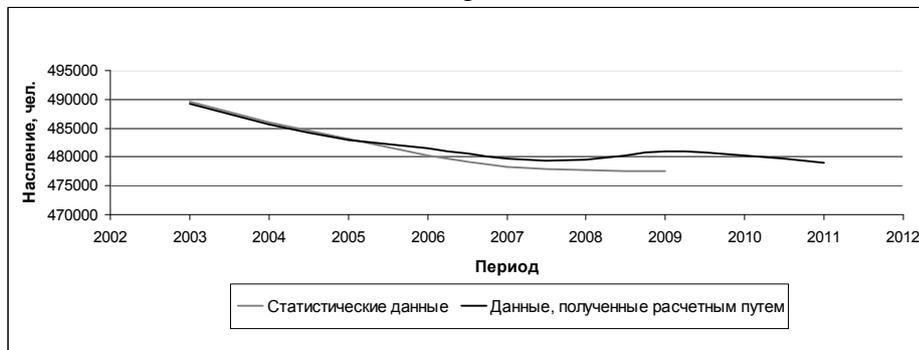


Рис. 3. Население в возрасте от 60 лет и старше

Литература

1. Борисов В. Демографическая ситуация в современной России [Электронный ресурс] // URL: http://demographia.ru/articles_N/index.html?idR=20&idArt=76 (дата обращения: 30.09.2010).
2. Егоров В. А. Математические модели глобального развития / В. А. Егоров, Ю. Н. Каллистов, В. Б. Митрофанов, А. А. Пионтковский. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 192 с.
3. Куликов Г. Социальный атлас российских регионов. Кемеровская область [Электронный ресурс] // URL: <http://www.socpol.ru/atlas/portraits/kemerovo.shtml> (дата обращения: 05.10.2010).
4. Медоуз Д. Х. Пределы роста: пер. с англ. / Донелла Х. Медоуз, Деннис Л. Медоуз, Йорген Рэндерс, Вильям Ш Беренс / Предисл. Г. А. Ягодина. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 208 с.
5. Наше общее будущее: Доклад международной комиссии по окружающей среде и развитию: пер. с англ. – М.: Прогресс, 1989. – 372 с.
6. Социальная политика региона: теория и практика / под ред. И. П. Скворцова. – М.: КНОРУС, 2010. – 448 с.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИИ УГЛЕДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ

А. В. Щенетов, Т. В. Титова

Новокузнецкий филиал-институт

Кемеровского государственного университета

В настоящее время на угледобывающих предприятиях отсутствует современный подход к хранению и обработке информации, связанной с нарушениями режима работы различных технологических звеньев. Записи производятся на бумажных носителях – в различных журналах и других документах, хранящихся в структурных подразделениях шахт и разрезов.

Вся регистрируемая информация о нарушениях режима работы предприятий разделена на две группы по необычному принципу – по последствиям воздействия на человека.

Первая группа включает описание нарушений режима работы угледобывающих предприятий, связанных с нанесением вреда здоровью человека (вплоть до смертельных случаев). К таким нарушениям режима работы относятся несчастные и аварийные случаи. В эту группу также входят различные нарушения правил безопасности с аналогичными последствиями, которые сгруппированы по различным причинам (связанным с техникой, технологией, геологией и т. д.). Данным нарушениям на угледобывающих предприятиях уделяется особое внимание, они расследуются специальными комиссиями и относятся к уголовно наказуемым. Как правило, при возникновении таких нарушений останавливаются соответствующие технологические процессы – добыча угля, транспорт угля, проведение выработок и др., производится тщательная регистрация всей информации. В крайних случаях полностью останавливается угледобывающее предприятие, что позволяет говорить не только

о некоторых нарушениях нормального режима работы, но и о полном его прекращении.

Вторая группа включает описание нарушений режима работы угледобывающих предприятий, не связанных с нанесением вреда здоровью человека. Основную долю данной части нарушений занимают отказы горношахтного оборудования, которые интересуют производителей в меньшей мере, чем нарушения первой группы. Тем не менее количество журналов наблюдений за работой оборудования, используемого для реализации основных и вспомогательных процессов, пропорционально количеству этого оборудования. Записи производятся в установленной форме с использованием различной терминологии и принятыми сокращениями. Как правило, указывается узел оборудования, вышедший из строя, но не указываются причины случившегося отказа. В результате такого подхода теряются причинно-следственные связи возникающих отказов оборудования. Также не указываются личные данные рабочих, ответственных за техническое обслуживание отказавшего оборудования. В общем случае техническому обслуживанию горношахтного оборудования не уделяется достаточного внимания, что приводит к низкой культуре производства.

Любые нарушения режима работы предприятий, рассмотренные в первой и второй группах, приводят к снижению объема добываемого угля, увеличению финансовых затрат и, как следствие, – к увеличению себестоимости добываемого угля. Невзирая на очевидность влияния любых нарушений режима работы на себестоимость угля, вопросам их технико-экономической оценки на угледобывающих предприятиях не уделяется достаточного внимания. Основной причиной отсутствия достаточного внимания является сложность решения данной проблемы, требующей разработки экономико-математических моделей [1].

Информационной базой разрабатываемой экономико-математической модели надежности технологии послужили хронометражные наблюдения за нарушениями режима работы различных технологических звеньев, которые в обязательном порядке фиксируются в журналах наблюдений (регистрации) в структурных подразделениях угледобывающих предприятий. В журналах наблюдений указываются: наименование оборудования, его характеристика, даты возникающих отказов (поломок), наименование отказавшего узла, причины отказов, время, затраченное на устранение.

При анализе технологии была предложена процессуальная структура, позволившая классифицировать отказы, имеющие различное влияние на технологию добычи угля. Было показано, что наиболее значительное воздействие на себестоимость угля оказывают двухпараметрические и однопараметрические отказы. Причем однопараметрические отказы обладают структурно-технологической нестабильностью, заключающейся в том, что при определенных условиях могут переходить в группу двухпараметрических отказов, т.е. менять свое положение в структурной схеме. Нестабильность отка-

зов напрямую связана с определением приоритета процессов, участвующих в формировании технологии.

Анализ «рабочей» версии экономико-математической модели влияния надежности технологии на технико-экономические показатели угледобывающих предприятий для условий ООО "Разрез «Степановский»" (г. Новокузнецк) позволил сделать некоторые выводы.

Любая технология добычи угля имеет свой теоретический предел улучшения технико-экономических показателей, который можно достичь снижением количества отказов и снижением продолжительности их устранения.

Снижение количества отказов в технологии добычи угля или продолжительности их устранения достигается за счет проведения на предприятии следующих работ:

а) разработка специальных организационных мероприятий по улучшению технического обслуживания существующего оборудования основных и вспомогательных технологических звеньев по добыче и транспорту угля; обеспечение соответствующего дополнительного финансирования (инвестирования) реализуемых мероприятий;

б) разработка технических решений, направленных на качественное (техническое) повышение надежности работы существующего оборудования или замену старого оборудования на новое, более надежное; обеспечение соответствующего дополнительного финансирования (инвестирования) реализуемых технических решений.

При выполнении работ по повышению надежности технологических звеньев необходимо проводить оценку экономической целесообразности их выполнения. Реальное улучшение технико-экономических показателей на угледобывающем предприятии возможно только за счет соблюдения определенного баланса между вложенными (понесенными) дополнительными затратами (инвестициями) и достигаемым увеличением добычи угля за счет увеличения надежности [2]. Проводимая оценка экономической целесообразности выполняемых работ должна учитывать многофакторность зависимостей рассматриваемых показателей:

а) дополнительные затраты (инвестиции) предприятия, направленные на реализацию разработанных мероприятий и технических решений по увеличению надежности технологии добычи угля (по снижению количества отказов и продолжительности их устранения), всегда предполагают увеличение себестоимости добываемого угля;

б) увеличение надежности технологии добычи угля (снижение количества отказов и продолжительности их устранения) всегда предполагает увеличение объема добываемого угля и, соответственно, снижение его себестоимости.

При определении технико-экономических показателей работы предприятия, а также его отдельных подразделений, общее влияние различных отказов усредняется за некоторый исследуемый промежуток времени. Ус-

редненные показатели характеризуют любую технологию добычи угля, с точки зрения её надежности, при достижении теоретически задаваемого результата проектной документацией. Примером являются показатели, задаваемые технической производительностью выемочного оборудования, используемого на очистных работах, например механизированных комплексов.

Дальнейшее развитие в рамках исследования экономико-математической модели влияния надежности технологии на технико-экономические показатели угледобывающих предприятий позволит проводить:

– технико-экономическую оценку выбора нового оборудования технологических звеньев угледобывающих предприятий;

– технико-экономическую оценку организационных мероприятий по обслуживанию оборудования технологических звеньев угледобывающих предприятий;

– технико-экономическое обоснование сроков эксплуатации существующего технологического оборудования угледобывающих предприятий.

Литература

1. Буторин В. К., Ткаченко А. Н., Шипилов С. А. Прикладной системный анализ: концептуальный подход. – Кемерово; Москва: Российские университеты; Кузбассвузиздат; АСТШ, 2007. – 323 с.

2. Буторин В. К., Фомичев С. Г., Щепетов А. В. Системный подход к задачам структурно-параметрической адаптации угольных шахт // Уголь. – 2008. – № 9. – С. 42–45.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

<i>Ананина И. А.</i> Исследование математической модели потоков клиентов таксопарка.....	3
<i>Ахметгареева М. Д., Морозова А. С.</i> Математическая модель стимулирования сбыта продукции путем предоставления премии.....	8
<i>Горбатенко А. Е., Лопухова С. В.</i> Метод интегральных преобразований для исследования систем $SM D \infty$	11
<i>Капустин Е. В., Михайленко М. С.</i> Модель страховой компании с пуассоновским потоком взносов и с учетом издержек, равномерных по времени.....	13
<i>Кокшенёв В. В., Сущенко С. П.</i> Выбор размера окна передачи и тайм-аута ожидания подтверждения управляющей процедуры протокола транспортного уровня при селективном режиме отказа в многозвенном тракте.....	17
<i>Лапатин И. Л.</i> Исследование выходящего потока системы $MAR GI \infty$ в условии растущего времени наблюдения.....	20
<i>Лившиц К. И., Бублик Я. С.</i> Производящая функция условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат.....	24
<i>Любина Т. В., Назаров А. А.</i> Исследование немарковской динамической RQ-системы.....	28
<i>Любченко А. А.</i> Количественная оценка комплексных показателей надежности восстанавливаемых систем средствами статистического моделирования.....	34
<i>Максимов В. А., Гарайшина И. Р.</i> Исследование математической модели процесса изменения числа лиц, получающих трудовые пенсии.....	38
<i>Михеев П. А., Сущенко С. П.</i> Об индивидуальном быстродействии абонента беспроводной ЛВС, основанной на технологии WIFI.....	44
<i>Михеев П. А., Сущенко С. П.</i> О быстродействии серверного соединения коммутируемой ЛВС.....	47

<i>Назаров А. А., Даммер Д. Д.</i> Исследование числа требований на выплату страховых сумм.....	52
<i>Назаров А. А., Семенова И. А.</i> Исследование системы массового обслуживания с входящим ММР-потокom и неограниченным числом обслуживающих приборов.....	57
<i>Ронжина Е. С., Синякова И. А.</i> Исследование системы $MAR^{(2)} GI_2 _{\infty}$ методом просеянного потока.....	63
<i>Семенов А. Т.</i> Субординация процессов Леви.....	68
<i>Семехина М. В., Гудов А. М.</i> Аспекты имитационного моделирования трафика в вычислительных сетях на основе сетей Петри.....	73
<i>Сергеева В. В., Синякова И. А.</i> Исследование системы массового обслуживания $GI^{(2)} GI_2 _{\infty}$ методом просеянного потока.....	77
<i>Судыко Е. А.</i> Исследование RQ-системы с оповещением о конфликте методом асимптотического анализа до второго порядка.....	83

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

<i>Вальц О. В., Новицкая Е. В.</i> Влияние информационных потоков на эффективность экономики.....	88
<i>Горбунов М. А.</i> Оптимизационно-имитационный метод и его использование при формировании промышленной политики региона.....	90
<i>Горская Т. А., Яковченко Е. О.</i> Оценка влияния уровня образования руководителя на экономическую эффективность сельскохозяйственных предприятий.....	93
<i>Данилов Н. Н.</i> Смешанное расширение динамической матричной игры.....	94
<i>Корицкий А. В.</i> Оценка влияния человеческого капитала на фактическое конечное потребление домохозяйств.....	96
<i>Коровин Д. С.</i> Формирование оптимального набора очистных комбайнов с помощью математических моделей инвестиций.....	101
<i>Корягин М. Е.</i> Моделирование систем управления городским пассажирским транспортом.....	103
<i>Косенкова М. В.</i> Построение математической модели социальной системы в виде дискретной задачи оптимального управления.....	106
<i>Котова И. С.</i> Оценка влияния качественных характеристик клиента на параметры кредитного портфеля в коммерческом банке.....	108
<i>Курынова И. А.</i> Моделирование продвижения товара на рынке бензина.....	110
<i>Мешечкин В. В., Павличук А. Н.</i> Построение модели оптимизации административно-территориального деления региона.....	113
<i>Морозова А. С., Ахметгареева М. Д.</i> Обзор моделей стимулирования сбыта продукции.....	117
<i>Николаева Е. А.</i> Изучение занятости населения кемеровской области.....	121

Новикова И. В., Якунов Р. Т. О стохастической модели движения населения территории и ее применении для прогноза.....	126
Поддубный В. В., Романович О. В. Рынок как инерционная самоуправляемая система с запаздыванием и предсказанием спроса по неподвижной точке.....	130
Прожикина М. Н. Построение оптимального портфеля акций с использованием модели САРМ.....	136
Смагин В. И., Киселева М. Ю. Управление с прогнозирующей моделью с запаздыванием по состоянию.....	140
Смагин В. И., Мухина О. О. Моделирование системы управления запасами для системы складов, состоящей из оптового и розничных складов.....	146
Степанова Н. В. Экономико-математические модели продажи товаров в условиях развития России в инновационном русле.....	149
Чаплинская С. В. Моделирование распределения инвестиций между предприятиями в форме динамической матричной игры.....	152
Червоная Е. А. Оценка удорожающих факторов при установлении нормативов финансирования содержания имущества общеобразовательных учреждений.....	158
Чернова Е. С. Об одной модели демографических процессов в кемеровской области в контексте устойчивого развития.....	161
Щепетов А. В., Титова Т. В. Экономико-математическая модель надежности технологии угледобывающих предприятий.....	164

Научное издание

**Информационные технологии
и математическое моделирование
(ИТММ-2010)**

Материалы IX Всероссийской
научно-практической конференции
с международным участием
19-20 ноября 2010 г.
Часть 1

Редактор В. Г. Лихачева

Компьютерная верстка М. С. Лобова

Лицензия ИД 04617 от 24.04.2001 г.

Подписано в печать 25.10.2010

Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная №1.

Печать офсетная.

Печ. л. 10,8; усл. печ. л. 10,0; уч.-изд. л. 10,5.

Тираж 300 экз. Заказ 1263

ОАО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4.

ООО «Издательство «Иван Фёдоров»», 634026, г. Томск, ул. Розы Люксембург, 115/1