Сентябрь 2017 г. *Том 187, № 9*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Квантовое описание поля в макроскопической электродинамике и свойства фотонов в прозрачных средах

И.Н. Топтыгин

Проведено квантовое рассмотрение высокочастотного макроскопического электромагнитного поля и радиационных процессов в среде. Построены квантовые операторы для компонент тензора энергии-импульса в средах с дисперсией и найдены их собственные значения, различные в представлениях Минковского и Абрагама. Показано, что импульс фотона в среде, следующий из квантования векторного потенциала, не совпадает с импульсом фотона, который определяется из симметричного тензора энергии-импульса Абрагама, но согласуется с импульсом, определённым из тензора Минковского. Аналогичный результат получен при вычислении значений собственного момента (спина) электромагнитного поля в среде. Целочисленные (в единицах $\hbar$) и подтверждаемые опытными данными значения спина поля позволяет получить только тензор Минковского. Это даёт основание для выбора представления Минковского в качестве адекватной формы записи плотности импульса поперечного электромагнитного поля в прозрачной среде как при квантовом, так и при классическом описании поля. Представление Абрагама для этой цели не подходит и приводит к противоречиям. Сделанный вывод не относится к квазистационарным и статическим полям.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса Минковского, квантовая теория, радиационные процессы, спин и масса фотона в среде

PACS numbers: **12.20.–m**, 41.20.Jb, 41.60.Bq DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.04.038138

Содержание

1. Введение

Электромагнитные поля в веществе, как правило, описываются с помощью классических макроскопических уравнений Максвелла (см. [1 – 5]). Квантовые представления в макроскопической электродинамике привлекаются чаще всего для вычисления функций линейного отклика вещества на электромагнитное поле — электрической и магнитной проницаемостей. Но переменное электромагнитное поле в прозрачной среде (т.е. в среде с пренебрежимо малым поглощением), как и в вакууме, сохраняет квантовую структуру. Оно состоит из фотонов — дискретных возбуждений, свойства которых отличаются от свойств вакуумных фотонов и во многом определяются реакцией электронной системы вещества на поле. Эти свойства оказываются более сложными, чем у вакуумных фотонов, и для разных сред обладают своей спецификой. Для таких возбуждений нередко используются специальные названия — поляритоны, экситоны, плазмоны и др. Наряду с этой детализацией представляет определённый интерес общий последовательный квантовый подход к описанию макроскопического электромагнитного поля и квантовая интерпретация основных фундаментальных понятий, характеризующих поле: плотности энергии, плотности импульса и других аналогичных величин. Впервые такой поход использовал В.Л. Гинзбург [6] при рассмотрении излучения Вавилова – Черенкова.

Квантовое рассмотрение макроскопического электромагнитного поля позволяет уточнить ответы на некоторые вопросы, которые обсуждаются длительное время и, по-видимому, не могут быть решены в рамках классических представлений. В настоящей работе проведён

И.Н. Топтыгин. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
ул. Политехническая 29, 195251 Санкт-Петербург,
Российская Федерация
E-mail: igor_toptygin@mail.ru

Статья поступила 21 июня 2016 г.,
после доработки 8 апреля 2017 г.

анализ одного из таких вопросов, связанного с построением тензора энергии-импульса в макроскопической электродинамике. Как известно, в первом десятилетии XX в. были предложены два различных выражения для плотности импульса электромагнитного поля в средах. При описании поля с использованием четырёх векторов — напряжённостей поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и индукций $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ — эти выражения имеют вид

$$\mathbf{g}^{\mathrm{M}} = \frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{D}\times\mathbf{B}\,, \qquad \mathbf{g}^{\mathrm{A}} = \frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}\,. \tag{1}$$

Первое из них было предложено Минковским [7, 8], но встретило возражения со стороны Абрагама [9] и других исследователей в основном ввиду того, что приводило к несимметричной структуре тензора энергии-импульса. Абрагам симметризовал указанный тензор, что привело к появлению дополнительного слагаемого в уравнении баланса импульса — силы Абрагама. Плотность силы Абрагама определяется производной по времени от разности величин (1):

$$\mathbf{f}^{\mathrm{A}} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{g}^{\mathrm{M}} - \mathbf{g}^{\mathrm{A}}) = \frac{1}{4\pi c}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B} - \mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{2}$$

(см. учебники и монографии [2, 10–13], а также обзоры [14–16]). Без силы Абрагама в общем случае закон сохранения импульса, использующий представление Абрагама (1), нарушается. Но в нашей недавней работе [17] было рассмотрено поле, представляющее собой набор собственных поперечных мод (волновой пакет) изотропного прозрачного диэлектрика. Оказалось, что в этой часто встречающейся ситуации для сохранения импульса не требуется вводить отдельную силу Абрагама — она входит составной частью в структуру максвелловского тензора напряжений. Было также выяснено, что обе плотности импульса (1) удовлетворяют уравнению непрерывности и приводят к сохранению полного импульса волнового пакета. В этих условиях критерий выбора правильной альтернативы в рамках используемой классической теории отсутствует. Чтобы его получить, требуется анализ всех возможных следствий, а также их сравнение с возможно более широким кругом опытных данных.

Для указанной цели мы используем канонический квантовый подход к описанию макроскопического поля, который позволяет установить более глубокие свойства физических явлений, чем это возможно при классическом рассмотрении. Наш подход будет включать следующие этапы:

а) построение лагранжиана макроскопического электромагнитного поля в среде с дисперсией, но без диссипации, и получение системы уравнений Максвелла для этого случая;

б) переход к гамильтоновой форме уравнений поля в среде с дисперсией;

в) каноническое квантование и построение квантовых операторов для векторов поля и компонент тензора энергии-импульса в представлениях Минковского и Абрагама;

г) вычисление собственных значений соответствующих операторов и их сравнение для рассматриваемых случаев;

д) квантовое описание радиационных процессов и собственного момента (спина) фотонов в прозрачной среде.

Этап (а) включён для полноты картины, а также ввиду того, что указанный вопрос не рассматривался в доступной учебной литературе.

2. Получение макроскопических уравнений Максвелла из лагранжева формализма

Этот вопрос представляет определённый интерес в связи с тем, что связь между векторами, описывающими поле в среде с дисперсией, нелокальна (см. ниже формулу (3)). В вакуумной электродинамике лагранжиан локален, т.е. компоненты векторного потенциала $A_k(x)$ и их производные относятся к одной и той же точке 4-пространства [18], что упрощает структуру лагранжиана и получение из него уравнений поля.

Будем описывать электромагнитное поле в однородной и изотропной недиссипативной среде четырьмя векторами $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$. Первая пара векторов в четырёхмерной записи образует антисимметричный тензор поля $F_{ik}(x)$, а вторая пара — антисимметричный тензор индукции $H^{ik}(x)$ (см. [2]), зависящие от координат и времени. Примем линейную интегральную связь между компонентами этих тензоров:

$$H^{ik}(x) = \int \epsilon^{ikmn}(x - x')F_{mn}(x')\,\mathrm{d}^4x'\,. \tag{3}$$

4-тензор $\epsilon^{ikmn}(x - x')$ описывает электромагнитные свойства среды. В вакууме тензоры F_{ik} и H_{ik} тождественны, что соответствует следующему условию:

$$\epsilon^{ikmn}(x - x') = g^{im}g^{kn}\delta^{(4)}(x - x')\,, \tag{4}$$

где g^{ik} — метрический тензор.

В неподвижной среде без дисперсии линейный отклик ϵ^{ikmn} выражается через постоянные диэлектрическую и магнитную проницаемости ε, μ:

$$\epsilon^{ikmn}(x - x') = \mu^{-1}(g^{im} + \kappa\delta_0^i\delta_0^m)(g^{kn} + \kappa\delta_0^k\delta_0^n)\delta^{(4)}(x - x')\,, \qquad \kappa = \varepsilon\mu - 1 \tag{5}$$

(см., например, обзор Болотовского и Столярова [19]). Этот тензор приводит к обычным соотношениям

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}\,, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{6}$$

для квазистатического поля. Запись уравнения связи в интегральной форме (3) позволяет учесть пространственную и временнýю дисперсии.

В дальнейшем будем считать, что четырёхмерная "область влияния" $\Delta\Omega$, по которой проводится интегрирование в формуле (3) при фиксированном значении x и которая задаётся свойствами тензора $\epsilon^{ikmn}(x - x')$, мала по сравнению с областью, в которой рассматриваются свойства поля. Это предположение полностью согласуется с макроскопическим описанием поля. Размер области влияния определяется микроскопическими параметрами — временами релаксации электронной системы вещества и размерами его структурных составляющих (атомов, вкраплений, длин свободного пробега и др.). Тензорная функция отклика $\epsilon^{ikmn}(x - x')$ должна обладать всеми свойствами симметрии, вытекающими из симметрии среды и антисимметрии тензоров F_{ik} и H_{ik}, в частности,

$$\epsilon^{ikmn} = \epsilon^{mnik} = -\epsilon^{kimn} = -\epsilon^{iknm}\,. \tag{7}$$

Кроме того, в негиротропной среде этот тензор является чётной функцией своего аргумента:

$$\epsilon^{ikmn}(x-x')=\epsilon^{ikmn}(x'-x) \tag{8}$$

(см. ниже выражение (14)). Тензор поля F_{ik} выражается через векторный потенциал $A_l(x)$,

$$F_{ik}=\partial_i A_k(x)-\partial_k A_i(x)\,, \tag{9}$$

что позволяет записать уравнение Максвелла для тензора поля:

$$\partial_l F_{ik}+\partial_i F_{kl}+\partial_k F_{li}=0\,. \tag{10}$$

Уравнение для тензора индукции H_{ik} получим из условия стационарности функционала действия

$$S=\int \mathcal{L}(A_k,\partial_l A_k,x^m)\,\mathrm{d}^4x\,, \tag{11}$$

который следует записать через лагранжиан электромагнитного поля в среде:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{16\pi}\,H^{ik}F_{ik}-\frac{1}{c}\,j^k_{\text{ext}}(x)A_k(x)\,. \tag{12}$$

Здесь внешний ток $j^k_{\text{ext}}(x)$ представляет собой заданный источник поля. Лагранжиан является релятивистским инвариантом, и при сохранении электрического заряда, $\partial_k j^k_{\text{ext}}=0$, вариация действия инвариантна относительно калибровочного преобразования векторного потенциала $A_k\to A_k+\partial_k f(x)$, где $f(x)$ — произвольная скалярная функция.

Использовав уравнение связи (3), представим действие в виде двойного интеграла по 4-пространству:

$$S=-\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \mathrm{d}^4x\int_\Omega \mathrm{d}^4x'\,\epsilon^{ikmn}(x-x')F_{ik}(x)F_{mn}(x')-$$
$$-\frac{1}{c}\int_\Omega j^k_{\text{ext}}(x)A_k(x)\,\mathrm{d}^4x\,. \tag{13}$$

В качестве 4-области интегрирования можно принять произвольную большую ("макроскопическую") область, на границе которой все полевые функции $A_k(x)$ и их вариации $\delta A_k(x)$ обращаются в нуль.

Чётность тензора ϵ^{ikmn} как функции координат, которая выражена равенством (8), обусловлена симметрией двойного интеграла в равенстве (13). Выполнив в этом интеграле замену $x\leftrightarrow x'$ и использовав симметрию (7), представим его в виде

$$\frac{1}{32\pi}\int_\Omega \mathrm{d}^4x\int_\Omega \mathrm{d}^4x'\,\left[\epsilon^{ikmn}(x-x')+\epsilon^{ikmn}(x'-x)\right]F_{ik}(x)F_{mn}(x')\,, \tag{14}$$

что даёт возможность записать равенство (8).

Вычисляя вариации, находим

$$\begin{gathered} H^{ik}\,\delta F_{ik}=-2H^{ik}\partial_k\delta A_i\,,\\ \delta H^{ik}=2\int_\Omega \epsilon^{ikmn}(x-x')\partial'_m\delta A_n(x')\,\mathrm{d}^4x'\,. \end{gathered} \tag{15}$$

Производную от вариации векторного потенциала устраняем путём интегрирования по частям по координате x'^m. Выделившийся при интегрировании член обращается в нуль на границе области Ω. В результате вариация действия преобразуется к виду

$$\delta S=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\left(\partial_i H^{ik}-\frac{4\pi}{c}\,j^k_{\text{ext}}\right)\delta A_k(x)\,\mathrm{d}^4x\,. \tag{16}$$

Вариация действия должна обращаться в нуль при любом выборе $\delta A_k(x)$, и это требование приводит к уравнению Максвелла в 4-форме:

$$\partial_i H^{ki}(x)=-\frac{4\pi}{c}\,j^k_{\text{ext}}(x)\,. \tag{17}$$

К нему следует добавить уравнение связи (3) и уравнение Максвелла (10).

Структура функционала действия (13) показывает, что лагранжиан взаимодействия макроскопического поля с внешним источником по форме остаётся таким же, как в вакууме:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=-\frac{1}{c}\,j^k_{\text{ext}}(x)A_k(x)\,. \tag{18}$$

Но, разумеется, векторный потенциал $A_k(x)$ зависит от свойств среды. Результаты настоящего раздела применимы для прозрачных сред с временно́й и пространственной дисперсиями.

3. Гамильтонова форма уравнений электромагнитного поля в прозрачной среде

Каноническое квантование электромагнитного поля как непрерывной колебательной системы в вакууме включает следующие основные этапы:

а) выбор обобщённых координат, в роли которых выступают амплитуды гармоник Фурье векторного потенциала, зависящие от частоты и волнового вектора;

б) построение классической функции Гамильтона, зависящей от канонических переменных — обобщённых координат и импульсов (функция Гамильтона строится из выражения для полной энергии поля);

в) переход от классических переменных к квантовым операторам, подчиняющимся перестановочным соотношениям Гейзенберга, и построение операторов основных физических величин — компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде;

г) нахождение собственных значений энергии, импульса и других физических величин, а также вероятностей переходов между квантовыми состояниями поля.

При реализации этой программмы для поля в среде будем иметь в виду, что рассматриваемая физическая система представляет собой совокупность двух взаимодействующих подсистем. Поэтому описание такой системы даже методами классической электродинамики — заметно более сложная задача, чем описание поля в вакууме. Достаточно вспомнить, что для плотности энергии поля в среде в классической электродинамике известно лишь приближённое выражение, полученное Бриллюэном (1921):

$$w=\frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\big(\omega\varepsilon(\omega)\big)\mathbf{E}^*\mathbf{E}+\frac{\partial}{\partial\omega}\big(\omega\mu(\omega)\big)\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right], \tag{19}$$

где $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ — линейные отклики среды на поле, которое описывается макроскопическими (т.е. усреднёнными по состояниям среды) векторами **E**, **H** (см. [2], с. 381–382). Основные условия, ограничивающие применимость формулы (19), состоят в следующем.

1. Внешнее поле должно быть мало́ по сравнению с внутренними полями в среде.

2. Диссипация электромагнитной энергии, которая описывается мнимыми частями диэлектрической и магнитной проницаемостей, мала:

$$\varepsilon''(\omega) \ll \varepsilon'(\omega)\,, \qquad \mu''(\omega) \ll \mu'(\omega)\,. \tag{20}$$

Условия (20) выполняются лишь в определённых диапазонах частот, которые представляют собой "окна прозрачности" диэлектрика (см. [2]), но не могут выполняться в безграничном интервале частот в силу соотношений Крамерса–Кронига.

3. Выражение (19) представляет собой результат усреднения по периоду $T = 2\pi/\omega$ энергии волнового пакета с центральной частотой ω, поле которого является плоской волной с медленно изменяющейся амплитудой. Векторы электромагнитного поля для такого пакета можно записать в виде интегралов Фурье по малым интервалам частоты $\alpha \leqslant \Delta\omega \ll \omega$ и волнового вектора $q \leqslant \Delta k \ll k$:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) = \int \mathcal{E}(\mathbf{k}+\mathbf{q}, \omega+\alpha)\times \\ \times \exp\left[\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{q})\,\mathbf{r} - \mathrm{i}(\omega+\alpha)t\right]\,\frac{\mathrm{d}^3 q\,\mathrm{d}\alpha}{(2\pi)^4} = \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)\exp(\mathrm{i}\varphi)\,, \\ \varphi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{kr} - \omega t\,.\end{gathered} \tag{21}$$

Амплитуда $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ определяется внешними источниками поля, а также свойствами среды. Она изменяется в пространстве и во времени медленно по сравнению с быстрым фазовым множителем $\exp(\mathrm{i}\varphi)$. В частности, производные по координатам и по времени от $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ имеют порядок величины $\Delta k/k$ и $\Delta\omega/\omega$, в отличие от производных от фазового множителя. Аналогичное выражение можно записать для поля $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t)$. Частотный интервал выбирается в окне прозрачности диэлектрика.

В соответствии с принятыми приближениями будем в дальнейшем пользоваться следующими соотношениями для электрической и магнитной индукций:

$$\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)\,, \qquad \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}, t) = \mu(\omega)\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t)\,. \tag{22}$$

Таким образом, наш подход основан на рассмотрении волновых пакетов, или "квазимонохроматических волн", для которых только и известны классические выражения энергии и импульса электромагнитного поля. Другие компоненты тензора энергии-импульса в среде вычислены в этом же приближении и проанализированы в нашей работе [17]. Волновые пакеты, в отличие от монохроматических волн, имеют конечные размеры в пространстве и во времени, хотя их размеры значительно превышают длину волны и период центральной гармоники.

Необходимость условия 2 (малость поглощения) кратко разъяснена в [2, с. 386]: при сильном поглощении, $\varepsilon'' \approx \varepsilon'$, $\mu'' \approx \mu'$, поле затухает на расстоянии порядка длины волны λ и не проникает в среду, квантованное поле (фотоны) тоже поглощается на такой же длине. Процесс взаимодействия поля с веществом в этом случае нельзя описать, используя лишь линейные отклики ε и μ. Потребуется привлекать теплоёмкость и другие макроскопические параметры среды, используемые в неравновесной термодинамике. Плотность энергии (19) по Бриллюэну (как и другие компоненты тензора энергии-импульса, которые будут встречаться ниже) определена в нулевом порядке по малым параметрам $\Delta\omega/\omega$, $\Delta k/k$, $\varepsilon''/\varepsilon'$, μ''/μ'.

Через несколько десятилетий после упомянутой пионерской работы Гинзбурга [6] интерес к квантовому описанию макроскопического поля в среде возобновился [20–23]. В указанных и других работах авторы претендуют на рассмотрение сред с неограниченной диссипацией электромагнитного поля. Для этого в функционал действия рассматриваемой системы кроме переменных поля включаются переменные среды ("резервуара") и мнимые части диэлектрической и магнитной проницаемостей без ограничения их величины. Эти же величины входят в квантово-механический гамильтониан, который выводится из исходного лагранжиана. Такой подход как основа квантовой теории вызывает вопросы. Включение диссипативных величин в функцию Гамильтона нарушает каноническую схему классической механики. Диссипативные процессы в классической механике не описываются функцией Гамильтона и каноническими уравнениями Гамильтона, выводимыми из принципа наименьшего действия. Диссипация вводится в уравнения дополнительно с помощью диссипативной функции (см., например, классический учебник [24]). А описание взаимодействия с "резервуаром" на микроскопическом уровне не предполагает изначального использования макроскопических величин ε'' и μ''. Эквивалентные этим параметрам величины должны появляться в результате микроскопического расчёта, который, вероятно, должен проводиться с использованием матрицы плотности для электромагнитного поля в среде.

По указанным причинам подход к квантовой электродинамике сред, развиваемый в работах [20–23], нельзя считать корректным. Неясна также результативность используемых методов. В этих работах не вычисляются собственные значения энергии электромагнитного поля в среде и импульса поля, не анализируются свойства квантовых возбуждений поля (фотонов в среде) и не проводится их сравнение с наблюдаемыми на опыте величинами и явлениями. Поэтому, несмотря на заголовки "Canonical quantization ..." (см. [20–22]), подход к квантованию у авторов перечисленных работ оказывается неканоническим и требует дополнительного обоснования, а пределы применимости используемого ими метода неясны и вызывают сомнения.

В настоящей работе используется последовательный канонический подход к квантованию поля в окнах прозрачности диэлектрика. Неизбежной платой за это является отказ от описания диссипативных процессов. Поле в среде рассматривается как классическая линейная колебательная система без диссипации. Нашей целью является построение квантовых операторов для компонент тензора энергии-импульса поля в среде и вычисление их собственных значений в рамках применимости макроскопической электродинамики. Последнее условие означает, что влияние изотропной среды на поле можно описать с помощью диэлектрической $\varepsilon(\omega)$ и магнитной $\mu(\omega)$ проницаемостей, имеющих пренебрежимо малые мнимые части, не привлекая другие макроскопические параметры среды. При этом вычисление линейных откликов ε, μ — отдельная задача, которая здесь не рассматривается. Она для большинства сред должна решаться (и фактически решена для многих простых моделей вещества) на основе квантовой теории.

В рамках поставленной задачи процедура перехода к квантовому описанию повторяет все этапы, разработанные многими авторами [25–30] при квантовании электромагнитного поля в вакууме. Остановимся лишь на исходных положениях и тех моментах, которые специфичны для среды с дисперсией. Выбираем кулоновскую калибровку для векторного потенциала:

$$\nabla \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}, t) = 0\,. \tag{23}$$

Уравнение Д'Аламбера содержит параметры среды $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$:

$$\Delta \mathbf{A}_\omega - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\omega}{\partial t^2} = 0\,. \tag{24}$$

Рассматриваем поле в макроскопическом (большом) объёме V, наложив периодические граничные условия, и разлагаем векторный потенциал на плоские волны. Проекции волнового вектора k_x, k_y, k_z образуют квазидискретное счётное множество, и их задание наряду с поперечным относительно $\mathbf{k}$ вектором поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$, $\sigma = 1, 2$, определяет тип (моду) и частоту ω_k собственного колебания:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} A_k^0 \exp(\mathrm{i}\mathbf{kr})\,. \tag{25}$$

Постоянную нормировки A_k^0 выберем позднее из условия придания оператору энергии канонического вида.

Разложение векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, который рассматривается как действительная функция координат и времени, имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\sigma}\left[b_{\mathbf{k}\sigma}(t)\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) + b^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r})\right]. \tag{26}$$

Комплексные амплитуды $b_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ удовлетворяют классическим уравнениям для линейных гармонических осцилляторов:

$$\begin{gathered}\ddot{b}_{\mathbf{k}\sigma}(t) + \omega_k^2 b_{\mathbf{k}\sigma}(t) = 0\,, \qquad b_{\mathbf{k}\sigma}(t) = b_{\mathbf{k}\sigma}\exp(-\mathrm{i}\omega_k t)\,, \\ \omega_k^2 = \frac{c^2 k^2}{\varepsilon(\omega_k)\mu(\omega_k)}\,,\end{gathered} \tag{27}$$

где последнее равенство задаёт важную для дальнейшего связь между частотой и волновым числом. Векторы поля тоже разлагаются на плоские волны:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathrm{i}\sum_{\mathbf{k},\sigma}\frac{\omega_k}{c}\left[b_{\mathbf{k}\sigma}(t)\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) - b^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r})\right], \tag{28}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla\times\mathbf{A} = \mathrm{i}\sum_{\mathbf{k},\sigma}\mathbf{k}\times\left[b_{\mathbf{k}\sigma}(t)\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) - b^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r})\right]. \tag{29}$$

Разложения (26)–(29) справедливы в полном диапазоне частот, включая области сильной диссипации. Но при переходе к гамильтонову описанию поля следует ограничиться окнами прозрачности и использовать известные из макроскопической электродинамики формулы для плотностей энергии $w_{\mathbf{k}\sigma}$ и импульса $\mathbf{g}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma}$ поля в средах с дисперсией:

$$w_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\omega_k}\big(\omega_k\varepsilon(\omega_k)\big)\mathbf{E}^2_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{\partial}{\partial\omega_k}\big(\omega_k\mu(\omega_k)\big)\mathbf{H}^2_{\mathbf{k}\sigma}\right], \tag{30}$$

$$\mathbf{g}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{1}{4\pi c\mu(\omega_k)}\left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma}\times\mathbf{B}_{\mathbf{k}\sigma}\right]. \tag{31}$$

В отличие от формулы (19), в выражениях (30), (31) используются индекс моды $\mathbf{k}, \sigma$ и действительные квазимонохроматические поля (28), (29), не усреднённые по времени.

Плотности $w_{\mathbf{k}\sigma}$ и $\mathbf{g}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma}$ взаимосвязаны законами сохранения энергии и импульса в среде без диссипации. При использовании групповой скорости

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathrm{d}\omega_k}{\mathrm{d}\mathbf{k}} = \frac{c\mathbf{k}}{k}\,\frac{\mathrm{d}\omega_k}{\mathrm{d}\big(\omega_k\sqrt{\varepsilon(\omega_k)\mu(\omega_k)}\big)} \tag{32}$$

их связь выражается простым соотношением

$$\mathbf{g}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma} = w_{\mathbf{k}\sigma}\,\frac{\mathbf{u}_k}{c^2}\,. \tag{33}$$

Мы приводим здесь плотность импульса по Абрагаму [9], которая соответствует симметричному тензору энергии-импульса. Будем снабжать все величины, различающиеся в записях Абрагама и Минковского, верхними индексами A и M. Приведённые выше классические величины и их вывод подробно обсуждались в нашей работе [17]. С помощью (33) находим полезное представление для плотности энергии через групповую скорость и плотность импульса:

$$w_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{c^2}{u_k^2}\,\mathbf{u}_k\,\mathbf{g}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma}\,. \tag{34}$$

Полный импульс $\mathbf{G}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma}$ волнового пакета (квазимонохроматической моды) получим с помощью формул (29)–(31), проинтегрировав (34) по всей области периодичности V:

$$\mathbf{G}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma} = \mathbf{k}\,\frac{(A_k^0)^2 V\omega_k}{2\pi c^2\mu(\omega_k)}\,b^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)b_{\mathbf{k}\sigma}(t)\,. \tag{35}$$

Здесь использованы периодичность поля и условие нормировки векторов поляризации: $\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\sigma'}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} = \delta_{\sigma\sigma'}$. Энергия моды

$$W_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{c^2}{u_k^2}\,\mathbf{u}_k\mathbf{G}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma} \tag{36}$$

одинакова в записях Абрагама и Минковского и всегда неотрицательна, так как импульс и групповая скорость $\mathbf{u}_k$ имеют одинаковое направление.

Полная энергия поля в объёме V получится путём суммирования (36) по всем волновым пакетам в пределах "окна прозрачности" диэлектрика. Выразив волновое число через частоту, $k = \omega_k\sqrt{\varepsilon\mu}/c$, получим энергию поля, записанную через комплексные амплитуды:

$$W = \sum_{\mathbf{k},\sigma}\frac{(A_k^0)^2 V\omega_k^2}{2\pi c|u_k|}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega_k)}{\mu(\omega_k)}}\,b^*_{\mathbf{k}\sigma}(t)b_{\mathbf{k}\sigma}(t)\,. \tag{37}$$

Отметим также, что полная сила Абрагама (2),

$$\mathbf{F}^{\mathrm{A}} = \int \mathbf{f}^{\mathrm{A}}\,\mathrm{d}V\,, \tag{38}$$

обращается в нуль, $\mathbf{F}^{\mathrm{A}} = 0$, если интеграл распространён на весь объём, включающий в себя целиком волновой пакет. Это следует из того, что плотность силы Абрагама (2) можно записать в виде дивергенции некоторого тензора:

$$f_{\alpha}^{\mathrm{A}} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{f}}{\partial x_{\beta}}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{f} = -\frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{4\pi k^2}\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma}^2, \tag{39}$$

который представляет собой часть тензора напряжений Максвелла, выраженную через напряжённость электрического поля (см. [17]). Сила Абрагама интерпретируется как результат воздействия поля на среду (см. [2], с. 361). Обращение в нуль этой силы вполне естественно для волнового пакета, движущегося без диссипации с сохранением энергии и импульса.

Переходя в выражении (37) к действительным каноническим переменным $Q_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ и $P_{\mathbf{k}\sigma}(t)$,

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{k}\sigma}(t) &= \frac{1}{2}\left(Q_{\mathbf{k}\sigma}(t) + \frac{\mathrm{i}P_{\mathbf{k}\sigma}(t)}{\omega_k}\right), \\ b_{\mathbf{k}\sigma}^{*}(t) &= \frac{1}{2}\left(Q_{\mathbf{k}\sigma}(t) - \frac{\mathrm{i}P_{\mathbf{k}\sigma}(t)}{\omega_k}\right), \end{aligned} \tag{40}$$

находим классическую функцию Гамильтона электромагнитного поля в среде в виде суммы энергий независимых осцилляторов:

$$H(Q, P) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\sigma}(P_{\mathbf{k}\sigma}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\sigma}^2), \tag{41}$$

и определяем нормировочную константу из требования канонической формы функции Гамильтона (41):

$$A_k^0 = \sqrt{\frac{4\pi c|u_k|}{V}\left(\frac{\mu(\omega_k)}{\varepsilon(\omega_k)}\right)^{1/2}}. \tag{42}$$

Полученные соотношения отличаются от аналогичных формул вакуумной электродинамики в основном коэффициентами, которые зависят теперь от функций линейного отклика рассматриваемой среды. Но эти отличия становятся в ряде случаев весьма существенными. Особенно это проявляется при анализе свойств квантовых возбуждений поля ("фотонов в среде") и при квантовой интерпретации основных величин, с которыми имеет дело макроскопическая электродинамика, — в первую очередь энергии, импульса, момента импульса.

4. Квантование макроскопического электромагнитного поля

Заменяем канонические переменные $Q_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ и $P_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ операторами $\hat{Q}_{\mathbf{k}\sigma}$, $\hat{P}_{\mathbf{k}\sigma}$ и подчиняем их перестановочным соотношениям Гейзенберга

$$[\hat{Q}_s, \hat{P}_s] = \mathrm{i}\hbar, \quad s = (\mathbf{k}, \sigma), \tag{43}$$

введя единый индекс моды s. Все остальные пары операторов коммутируют. После этого функция Гамильтона превращается в оператор Гамильтона $\hat{H}$, векторный потенциал и входящие в него комплексные амплитуды b тоже становятся операторами. Мы используем здесь временно́е представление Шрёдингера, в котором операторы $\hat{P}$, $\hat{Q}$ не зависят от времени.

Вводим обычным образом операторы рождения и уничтожения фотонов,

$$\begin{aligned} \hat{c}_s^{\dagger} &= \sqrt{\frac{2\omega_s}{\hbar}}\,\hat{b}_s^{\dagger} = \sqrt{\frac{\omega_s}{2\hbar}}\left(\hat{Q}_s - \frac{\mathrm{i}\hat{P}_s}{\omega_s}\right), \\ \hat{c}_s &= \sqrt{\frac{2\omega_s}{\hbar}}\,\hat{b}_s = \sqrt{\frac{\omega_s}{2\hbar}}\left(\hat{Q}_s + \frac{\mathrm{i}\hat{P}_s}{\omega_s}\right), \end{aligned} \tag{44}$$

удовлетворяющие соотношениям коммутации

$$[\hat{c}_{s'}, \hat{c}_s^{\dagger}] = \delta_{ss'}, \tag{45}$$

и записываем через них оператор энергии поля:

$$\hat{H} = \sum_s \hbar\omega_s\left(\hat{c}_s^{\dagger}\hat{c}_s + \frac{1}{2}\right). \tag{46}$$

Аналогичным образом с помощью (36) и последующих формул находим оператор импульса поля:

$$\hat{\mathbf{G}}^{\mathrm{A}} = \sum_s \frac{\mathbf{u}_s}{c^2}\,\hbar\omega_s\hat{c}_s^{\dagger}\hat{c}_s. \tag{47}$$

Оба найденных оператора выражаются через операторы числа квантов

$$\hat{n}_s = \hat{c}_s^{\dagger}\hat{c}_s \tag{48}$$

в моде s. Задавая фоковское состояние поля (т.е. числа квантов $n_s = 0, 1, \ldots$ в каждой моде), можем найти собственные значения энергии $\mathcal{E}$ и импульса $\mathbf{G}^{\mathrm{A}}$ поля в этом состоянии:

$$\mathcal{E} = \sum_s \hbar\omega_s\left(n_s + \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{G}^{\mathrm{A}} = \sum_s \frac{\mathbf{u}_s}{c^2}\,\hbar\omega_s n_s. \tag{49}$$

Из этих результатов следует, что энергия $\mathcal{E}_{\omega}$ и импульс $\mathbf{p}_{\omega}^{\mathrm{A}}$ отдельного "фотона в среде" выражаются следующим образом:

$$\mathcal{E}_{\omega} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p}_{\omega}^{\mathrm{A}} = \frac{\mathbf{u}}{c^2}\,\hbar\omega. \tag{50}$$

Энергия кванта выражается через частоту точно так же, как в вакууме. Выражение для импульса кванта, полученное здесь из принципа соответствия классических и квантовых величин, существенно зависит от свойств среды через групповую скорость и вызывает определённые вопросы, которые мы обсудим после формулы (56) и в следующих разделах.

Векторный потенциал и напряжённости поля тоже становятся самосопряжёнными операторами. Запишем их в представлении Гейзенберга, т.е. с временно́й зависимостью:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \left[\hat{c}_s\mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) + \hat{c}_s^{\dagger}\mathbf{A}_s^{*}(\mathbf{r}, t)\right], \tag{51}$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{i}\sum_s \frac{\omega_s}{c}\left[\hat{c}_s\mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) - \hat{c}_s^{\dagger}\mathbf{A}_s^{*}(\mathbf{r}, t)\right], \tag{52}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{i}\sum_s \mathbf{k}\times\left[\hat{c}_s\mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) - \hat{c}_s^{\dagger}\mathbf{A}_s^{*}(\mathbf{r}, t)\right]. \tag{53}$$

С учётом всех подстановок волновые функции поменяли нормировку, в которую вошли величины, характеризующие свойства среды:

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_s\sqrt{\frac{2\pi\hbar c|u_s|}{\omega_s V}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}}\,\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathrm{i}\omega_s t\right). \tag{54}$$

Но главное отличие от вакуумного случая состоит в определении импульса фотона. В вакууме импульс фотона выражается формулой

$$\mathbf{p}^{\mathrm{vac}} = \hbar\mathbf{k} = \frac{\hbar\omega}{c}\,\mathbf{n}\,, \tag{55}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор. Это выражение следует как из волнового уравнения для $\mathbf{A}$, так и из классического выражения для плотности импульса после его квантования.

В среде волновое уравнение приводит к формулам (27), из которых следует значение импульса

$$\mathbf{q} = \hbar\mathbf{k} = \frac{\hbar\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\,\mathbf{n}\,. \tag{56}$$

Это выражение существенно отличается от (50) для импульса фотона, который определён по принципу соответствия с классическим выражением для плотности импульса электромагнитного поля (31) по Абрагаму [9], приводящего к симметричному тензору энергии-импульса электромагнитного поля (см. [2, 11, 16, 31]). Таким образом, в данном случае мы имеем дело с нарушением принципа соответствия, который выполняется во всех остальных случаях и приводит к тому, что средние квантово-механические значения физических величин ("наблюдаемые" по терминологии Дирака [32]) связаны между собой теми же соотношениями, что и соответствующие классические величины (теорема Эренфеста, [33]).

Для прояснения этого противоречия обратимся к определению импульса электромагнитного поля, предложенному Минковским [7, 8]. В статье [17] было получено представление для плотности импульса волнового пакета по Минковскому:

$$\mathbf{g}^{\mathrm{M}} = \frac{\mathbf{n}}{4\pi c}\,E^2_{\mathbf{k}\sigma}\varepsilon(\omega)\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} + \frac{\omega}{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right), \tag{57}$$

которое записано здесь через неусреднённую по времени напряжённость электрического поля. Пользуясь выражением для групповой скорости (32), приходим к соотношению

$$\mathbf{g}^{\mathrm{M}}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{\mathbf{n}\varepsilon(\omega_k)}{4\pi u}\,E^2_{\mathbf{k}\sigma}\,, \tag{58}$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}\,\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} + \frac{\omega}{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)^{-1} \tag{59}$$

— групповая скорость. Рассматривается обычная изотропная диэлектрическая среда, в которой вектор $\mathbf{u}$ направлен вдоль волнового вектора и величина $u = \mathbf{un} > 0$. Сравнивая (58) с плотностью импульса по Абрагаму (33),

$$\mathbf{g}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{\mathbf{n}}{4\pi c}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega_k)}{\mu(\omega_k)}}\,E^2_{\mathbf{k}\sigma}\,, \tag{60}$$

тоже записанному через электрическое поле, находим

$$\mathbf{g}^{\mathrm{M}}_{\mathbf{k}\sigma} = \mathbf{g}^{\mathrm{A}}_{\mathbf{k}\sigma}\,\frac{c\sqrt{\varepsilon\mu}}{u}\,. \tag{61}$$

Это соотношение позволяет найти связь между импульсами квантованных возбуждений поля в среде для двух классических представлений плотности импульса:

$$\mathbf{p}^{\mathrm{M}}_{\omega} = \frac{c}{u}\,\sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathbf{p}^{\mathrm{A}}_{\omega} = \frac{\hbar\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\,\mathbf{n}\,. \tag{62}$$

Именно импульс отдельного возбуждения, определённый по Минковскому, содержится в экспонентах, которые входят в квантовые операторы электромагнитного поля. Это же значение впервые получил и использовал В.Л. Гинзбург в своей пионерской работе [6] по квантовой теории эффекта Вавилова – Черенкова. Поэтому представление (62) импульса фотона в среде можно с полным основанием назвать представлением Минковского – Гинзбурга.

Здесь мы сталкиваемся с существенным противоречием: принцип соответствия между классическим и квантовым описаниями не выполняется, если использовать представление импульса по Абрагаму, но выполняется для импульса, следующего из представления Минковского. Этот фундаментальный принцип используется для построения квантовых операторов всех величин, имеющих классические аналоги. Его нарушение — свидетельство несостоятельности теории Абрагама в рассматриваемом вопросе.

Для подтверждения этого вывода рассмотрим и другие квантовые явления, но прежде остановимся на вопросе корректности использования классического тензора энергии-импульса, построенного для волновых пакетов, в качестве основы квантового описания поля.

5. Квантовая интерпретация классических волновых пакетов

При квантовании электромагнитного поля мы использовали классические выражения для плотности энергии (30) (формула Бриллюэна) и плотности импульса (31) (формула Абрагама) и (57) (формула Минковского). Все они относятся к узкому волновому пакету, т.е. к группе гармоник с близкими частотами и волновыми векторами и с вполне определёнными фазами. Форма пакета существенно зависит от фазовых сдвигов между гармониками, которые можно задавать произвольно. После квантования возникли операторы поля (51) – (53), фазы мод в которых вполне определённы (см. (54)). По этой причине возникает законный вопрос — совместимы ли классические пакеты с квантовым описанием и как составить наперёд заданный волновой пакет (с заданными фазовыми сдвигами между гармониками) с помощью квантовых операторов (51) – (53)?

Поставленную задачу невозможно решить, если использовать только фоковские квантовые состояния поля, которые определяются заданием чисел заполнения n_s в каждой моде. Именно такой подход применяется в квантовой электродинамике [29] в отсутствие вещества. Неприменимость этого подхода в рассматриваемом случае связана с соотношением неопределённости "число квантов – фаза": если число квантов в некоторой моде задано, то фаза этой волны неопределённа. Следствием этого чисто квантового свойства фотонов является, в частности, обращение в нуль среднего значения напряжённостей поля в состоянии с определённым значением n_s:

$$\langle n_s|\hat{\mathbf{E}}|n_s\rangle = 0\,, \qquad \langle n_s|\hat{\mathbf{B}}|n_s\rangle = 0\,. \tag{63}$$

Поэтому из фоковских состояний не удаётся составить квантовый аналог классических волновых пакетов.

Для указанной цели следует использовать когерентные (или глауберовские) состояния (см. [30, 34–36], начальные сведения содержатся также в [37]). Эти состояния, которые мы обозначим символом $|z_s\rangle$ для моды s, определены как собственные состояния несамосопряжённого оператора поглощения фотона $\hat{c}_s$:

$$\hat{c}_s|z_s\rangle = z_s|z_s\rangle\,. \tag{64}$$

Собственным числом z_s неэрмитова оператора $\hat{c}_s$ может быть любое комплексное число, т.е. спектр собственных значений непрерывен. Собственная функция $|z\rangle$ может быть представлена в виде бесконечного ряда по фоковским состояниям $|n\rangle$, а фоковскую собственную функцию $|n\rangle$, в свою очередь, можно записать в виде интеграла по d^2z, т.е. по аргументу и фазе комплексного числа z. Число фотонов в моде $|z\rangle$ является неопределённым, но среднее квантово-механическое числа фотонов просто выражается через z:

$$\overline{n} = \langle z|\hat{n}|z\rangle = \langle z|\hat{c}^{\dagger}\hat{c}|z\rangle = z\langle z|\hat{c}^{*}|z\rangle = |z|^2\,. \tag{65}$$

По векторам когерентных состояний можно проводить разложения, хотя они неортогональны при $z' \neq z$:

$$\begin{gathered}\langle z|z'\rangle = \exp\left(z^{*}z' - \frac{|z|^2}{2} - \frac{|z'|^2}{2}\right),\\ \left|\langle z|z'\rangle\right|^2 = \exp\left(-|z-z'|^2\right) \neq 0\,.\end{gathered} \tag{66}$$

Используем "теорему Эренфеста" [33] о связи наблюдаемых величин с квантово-механическими средними и будем рассматривать в качестве наблюдаемого поля $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ волнового пакета среднее значение оператора электрического поля $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ по некоторому набору когерентных состояний $|Z\rangle = \prod_s |z_s\rangle$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \langle Z|\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)|Z\rangle = \mathrm{i}\sum_s \frac{\omega_s}{c}\left[z_s\mathbf{A}_s(\mathbf{r},t) - z_s^{*}\mathbf{A}_s^{*}(\mathbf{r},t)\right]. \tag{67}$$

Это действительное выражение теперь составлено из гармоник, которые обрели заранее заданные фазы за счёт комплексных чисел z_s. Варьируя их, можно составить любой волновой пакет. Аналогичное представление можно записать и для вектора поля $\mathbf{B}$.

В итоге мы осуществили два взаимно дополняющих способа описания электромагнитного поля в среде с дисперсией: классического с помощью волновых пакетов на основе соотношений (26)–(31) и квантового с помощью когерентных состояний, а также проследили прямой и обратный переходы между этими подходами.

6. Момент импульса поля в представлении Минковского

Следующий значимый квантовый эффект, зависящий от импульса, — это спин (собственный момент импульса) фотона в среде. Вычислим его величину, используя выражения для импульса поля Минковского и Абрагама.

Построим момент импульса поля, используя несимметричный тензор энергии-импульса T_{ki}^{M} в представлении Минковского:

$$T_{ki}^{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} w & -cg_{\beta}^{\mathrm{M}} \\ -\dfrac{\gamma_{\alpha}}{c} & -\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}} \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Величины w (плотность энергии) и $\boldsymbol{\gamma}$ (вектор плотности потока энергии) одинаковы в представлениях Абрагама и Минковского. Величины $\mathbf{g}^{\mathrm{M}}$ и $\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}}$ отличаются от соответствующих величин, определённых по Абрагаму:

$$\mathbf{g}^{\mathrm{M}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{cu}\,\boldsymbol{\gamma}\,, \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}} = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{ck}\,\gamma_{\alpha}k_{\beta} = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{ck}\,\gamma_{\beta}k_{\alpha}\,. \tag{69}$$

Составим 4-тензор третьего ранга, представляющий собой плотности момента импульса,

$$I_{kij}^{\mathrm{M}} = T_{ki}^{\mathrm{M}}x_j - T_{kj}^{\mathrm{M}}x_i\,, \tag{70}$$

и антисимметричный по двум последним индексам: $I_{kij}^{\mathrm{M}} = -I_{kji}^{\mathrm{M}}$. Вычислив его дивергенцию, получим

$$\partial^k I_{kij}^{\mathrm{M}} = (\partial^k T_{ki}^{\mathrm{M}})x_j + T_{ji}^{\mathrm{M}} - (\partial^k T_{kj}^{\mathrm{M}})x_i - T_{ij}^{\mathrm{M}}\,. \tag{71}$$

Пользуясь равенствами (68), (69), вычисляем дивергенцию

$$\partial^k T_{ki}^{\mathrm{M}} = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + \nabla\boldsymbol{\gamma}\right) = 0 & \text{при } i = 0\,,\\ -\dfrac{\partial g_i^{\mathrm{M}}}{\partial t} + \dfrac{\partial \sigma_{\alpha i}^{\mathrm{M}}}{\partial x_{\alpha}} = 0 & \text{при } i = 1,2,3\,. \end{cases} \tag{72}$$

Таким образом, исходная дивергенция выражается через разность тензоров энергии-импульса:

$$\partial^k I_{kij}^{\mathrm{M}} = T_{ji}^{\mathrm{M}} - T_{ij}^{\mathrm{M}}\,. \tag{73}$$

Обращаясь к несимметричному 4-тензору (68) и учитывая симметрию трёхмерного тензора (т.е. тензора напряжений), получаем соотношения

$$\partial^k I_{kij}^{\mathrm{M}} = 0 \quad \text{при } i,\, j = 1,2,3\,, \tag{74}$$

$$\partial^k I_{ki0}^{\mathrm{M}} = -\partial^k I_{k0i}^{\mathrm{M}} = \frac{1}{c}\,\gamma_i - cg_i^{\mathrm{M}} \neq 0 \quad \text{при } i = 1,2,3\,. \tag{75}$$

Равенство нулю четырёхмерной дивергенции (74) означает, что не зависит от времени интеграл по трёхмерному пространству

$$Q_{\alpha\beta} = \int I_{0\beta\alpha}^{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}^3x = \mathrm{const}\,, \qquad \alpha,\beta = 1,2,3\,. \tag{76}$$

Это выясняется путём интегрирования равенства (74) по трёхмерному пространству и использования трёхмерной теоремы Гаусса–Остроградского. Антисимметричный трёхмерный тензор $Q_{\alpha\beta}$ эквивалентен (дуален) псевдовектору $\mathbf{J}^{\mathrm{M}}$ момента импульса поля, определённому по Минковскому:

$$\mathbf{J}^{\mathrm{M}} = \int \mathbf{r}\times\mathbf{g}^{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}^3x = \mathrm{const}\,, \tag{77}$$

и эта величина сохраняется. Интегралом движения является также и трёхмерный момент импульса, определённый по Абрагаму:

$$\mathbf{J}^{\mathrm{A}} = \int \mathbf{r}\times\mathbf{g}^{\mathrm{A}}\,\mathrm{d}^3x = \mathrm{const}\,, \qquad \mathbf{g}^{\mathrm{A}} = \frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}\,. \tag{78}$$

Но при симметричном тензоре T_{ik}^{A} Абрагама сохраняются и смешанные пространственно-временны́е компоненты $Q_{0\alpha}$, не связанные с трёхмерным моментом импульса. В случае Минковского такие компоненты не сохраняются.

7. Спин фотона в среде

Наличие собственного момента импульса — спина — присуще каждой элементарной частице. Хорошо известно, что фотон, один из наиболее изученных и распространённых фундаментальных бозонов, тоже обладает этой важной характеристикой. Но спин фотона нельзя определить так, как это можно сделать для электрона, т.е. как момент импульса в системе покоя частицы. Для фотона в вакууме такой системы не существует. Поэтому большинство авторов [25, 28–31] рассматривает полный момент $\mathbf{J}$ электромагнитного поля в соответствии с его классическим определением и затем выделяет из него две составляющие: орбитальный момент $\mathbf{L}$ и собственный момент $\mathbf{S}$,

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}\,. \tag{79}$$

Критерием такого разделения выступает зависимость орбитального момента от выбора начала отсчёта координат, а также появление характерного для орбитального момента в квантовой механике оператора $\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}$. Собственный момент не содержит никакой зависимости от выбора системы координат и определяется свойствами самого поля. Мы тоже используем здесь эту возможность для определения спинового момента фотона в среде.

Запишем полный момент импульса волнового пакета классического электромагнитного поля относительно начала координат через плотность импульса, которая определена в соответствии с выражением (31) либо (78), т.е. по Абрагаму:

$$\mathbf{J}^{\mathrm{A}} = \int \mathbf{r}\times \mathrm{d}\mathbf{G}^{\mathrm{A}} = \sum_{s,s'} \frac{1}{4\pi c\mu(\omega_s)} \int \mathbf{r}\times[\mathbf{E}_{s'}\times\mathbf{B}_s]\,\mathrm{d}^3 r\,. \tag{80}$$

Интеграл распространён на всю область периодичности V, на границах области поле отсутствует. Выразив поле $\mathbf{B}_s$ через векторный потенциал, выполним интегрирование по частям и представим полный момент в виде суммы слагаемых:

$$\mathbf{J}^{\mathrm{A}} = \sum_{s,s'} \frac{1}{4\pi c\mu(\omega_s)} \int E_{s'\alpha}[\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}]A_{s\alpha}\,\mathrm{d}^3 r + \sum_{s,s'} \frac{1}{4\pi c\mu(\omega_s)} \int \mathbf{E}_{s'}\times\mathbf{A}_s\,\mathrm{d}^3 r\,. \tag{81}$$

В соответствии с приведёнными выше критериями первое слагаемое в правой части будем интерпретировать как орбитальный момент поля относительно выбранного начала координат, а второе слагаемое — как собственный момент (спин) поля в объёме V.

Для нашей цели более интересно второе слагаемое:

$$\mathbf{S}^{\mathrm{A}} = \sum_{s,s'} \frac{1}{4\pi c\mu(\omega_s)} \int \mathbf{E}_{s'}\times\mathbf{A}_s\,\mathrm{d}^3 r\,. \tag{82}$$

Вычислим возможные значения этой величины при квантовом описании поля. Для этого симметризуем выражение (82) и будем рассматривать его как самосопряжённый квантовый оператор, выразив через операторы поля (52)–(54):

$$\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{A}} = \sum_{s,s'} \frac{1}{8\pi c\mu(\omega_s)} \int \{\hat{\mathbf{E}}_{s'}\times\hat{\mathbf{A}}_s - \hat{\mathbf{A}}_s\times\hat{\mathbf{E}}_{s'}\}\,\mathrm{d}^3 r\,. \tag{83}$$

При интегрировании по координатам векторных произведений используем ортогональность волновых функций (54):

$$\int_V \mathbf{A}^*_{s'}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{A}_s(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}^3 r = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}[\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\sigma'}\times\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]\,\frac{2\pi\hbar c u_k}{\omega_k}\left(\frac{\mu(\omega_k)}{\varepsilon(\omega_k)}\right)^{1/2}. \tag{84}$$

Это позволяет записать (83) в форме

$$\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{A}} = -\mathrm{i}\hbar \sum_{\mathbf{k}\sigma,\,\sigma'} \frac{u_k}{c\sqrt{\varepsilon\mu}}[\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\sigma'}\times\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}]\left(\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma'}\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2}\,\delta_{\sigma\sigma'}\right). \tag{85}$$

Если векторы поляризации фотонов действительны, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} = \mathbf{e}^*_{\mathbf{k}1}$, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2} = \mathbf{e}^*_{\mathbf{k}2}$ (линейная поляризация), то векторное произведение в (85) отлично от нуля лишь при $\sigma' \neq \sigma$. Но в этом случае вектор спина обращается в нуль при усреднении по состояниям с определённым числом фотонов, т.е. когда $n_{\mathbf{k},1}$, $n_{\mathbf{k},2}$ заданы. Векторное произведение отлично от нуля при циркулярной поляризации фотонов, если $\sigma' = \sigma$: $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} = (\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \pm \mathbf{e}_{\mathbf{k}2})/\sqrt{2}$. Учитывая поперечность векторов поляризации относительно $\mathbf{k}$, имеем следующий результат:

$$\mathbf{e}^*_{\mathbf{k},\pm 1}\times\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} = \pm\frac{\mathrm{i}\mathbf{k}}{k}\,. \tag{86}$$

Усреднив оператор (85) по состоянию с определённым числом фотонов, получим

$$\mathbf{S}^{\mathrm{A}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\mathbf{k}}{k}\,\frac{u_k}{c\sqrt{\varepsilon\mu}}(n_{\mathbf{k},+1} - n_{\mathbf{k},-1})\,. \tag{87}$$

Согласно этому результату, на один фотон с заданной циркулярной поляризацией приходится спин $\hbar u_k/c\sqrt{\varepsilon\mu}$. Этот результат неудовлетворителен, так как в силу общих свойств момента импульса в квантовой механике и его связи с изотропией пространства его собственные значения могут принимать в единицах $\hbar$ только целочисленные либо полуцелые значения $0, 1/2, 1, \ldots$ В данном же случае множитель $u_k/c\sqrt{\varepsilon\mu}$ может принимать континуальное множество значений в зависимости от свойств среды.

Это противоречие даёт основание утверждать, что определение плотности импульса по Абрагаму (31), которое мы использовали при вычислении спинового момента поля, не приводит к правильному описанию квантовых свойств фотонов в среде. Однако непротиворечивое описание спина можно получить, если в соотношениях (80)–(87) использовать плотность импульса по Минковскому (61) либо (77) и, соответственно, импульс фотона, определённый по Гинзбургу, (62).

Лишний неопределённый множитель при этом исчезает, и остаётся ожидаемое целочисленное значение

$$\mathbf{S}^{\mathrm{M}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\mathbf{k}}{k}(n_{\mathbf{k},+1} - n_{\mathbf{k},-1})\,. \tag{88}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что импульс фотона, определённый по Минковскому–Гинзбургу, даёт адекватное квантовое описание спина фотона в прозрачной среде. Импульс по Абрагаму, несмотря на полную симметрию тензора энергии-импульса, приводит к противоречиям в квантовом описании.

8. Квантовая теория излучения Вавилова – Черенкова

Излучение Вавилова – Черенкова [38, 39] было первым обнаруженным в эксперименте радиационным эффектом, возникающим при равномерном движении быстрой заряженной частицы в веществе или вблизи его границы. Теоретическое объяснение эффекта и необходимые условия его проявления дали И.Е. Тамм и И.М. Франк [40, 41] на основе классической электродинамики.

Классическая теория применима для объяснения этого эффекта с весьма высокой точностью, поскольку происходит испускание кванта низкой энергии (например, оптического диапазона) частицей, движущейся с субсветовой скоростью. Поэтому в большинстве руководств по электродинамике вычисление интенсивности излучения проводится на классической основе (см., например, [2, 42, 43]). Но квантовое объяснение этого процесса было необходимо из принципиальных соображений и для полноты картины. Такую интерпретацию дал В.Л. Гинзбург [6]. Квантовое рассмотрение весьма полезно для понимания свойств фотонов в прозрачной среде, которые существенно отличаются от хорошо известных свойств фотонов в вакууме. Противоречия, связанные с представлением Абрагама для импульса фотона в среде, обсуждались в разделе 4.

В вакууме испускание фотона свободной частицей запрещено законами сохранения энергии и импульса. Но в прозрачной среде излучение свободной частицы становится возможным вследствие изменения уравнения дисперсии, связывающего энергию и импульс фотона в среде. Для расчёта вероятности процесса используем известную формулу теории возмущений для вероятности перехода квантовой системы за единицу времени из состояния $|i\rangle$ в конечное состояние $|f\rangle$:

$$\mathrm{d}w^{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle f|\hat{V}|i\rangle\right|^2 \delta\big(\mathcal{E}(\mathbf{p}) - \mathcal{E}(\mathbf{p}') - \hbar\omega\big)\,\mathrm{d}\nu\,. \qquad (89)$$

Здесь $\mathrm{d}\nu$ — число квантовых состояний излучающей частицы и кванта в непрерывном спектре,

$$\hat{V} = \frac{1}{c}\,\hat{\mathbf{j}}^k(\mathbf{r})\hat{A}_k(\mathbf{r}) \qquad (90)$$

— оператор взаимодействия релятивистского электрона с квантованным электромагнитным полем, полученный из классического лагранжиана (18).

Выберем кулоновскую калибровку, в которой скалярный потенциал $\varphi = 0$ и $\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$. Тогда вместо четырёхмерного тока $\hat{j}^k$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ можно использовать дираковский ток в трёхмерной форме:

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = ec\psi^+_{\mathbf{p}'\mu'}(\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\mathbf{p}\mu}(\mathbf{r})\,, \qquad (91)$$

где $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ — векторная матрица Дирака, $\psi(\mathbf{r})$ — биспиноры, описывающие начальное $(\mathbf{p}\mu)$ и конечное $(\mathbf{p}'\mu')$ состояния излучающего электрона. Запишем биспиноры в явном виде:

$$\psi_{\mathbf{p}\mu}(\mathbf{r}) = \frac{u_{\mathbf{p}\mu}}{\sqrt{V}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\mathbf{pr}\right),$$
$$u_{\mathbf{p}\mu} = N\begin{pmatrix} w_\mu \\ \dfrac{c(\mathbf{p}\hat{\boldsymbol{\sigma}})w_\mu}{\mathcal{E}+mc^2}\end{pmatrix}, \qquad N = \left(\frac{\mathcal{E}+mc^2}{2\mathcal{E}}\right)^{1/2}, \qquad (92)$$

где w_μ — двухкомпонентный спинор, описывающий спиновое состояние в системе покоя электрона и нормированный на единицу. Как и для фотонов, на биспинорное поле наложены периодические граничные условия, что приводит к нормировочному множителю $V^{-1/2}$ в (92), содержащему объём периодичности. Мы считаем электрон, движущийся в среде, свободным, как это предполагалось в пионерской работе Тамма и Франка [40].

Матричный элемент $\langle f|\hat{V}|i\rangle$, входящий в (89), включает в себя, в частности, интегрирование по объёму нормировки трёх экспонент, содержащих импульсы $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ излучающей частицы и импульс $\mathbf{q}$ (56) фотона в среде. Условие периодичности биспиноров и электромагнитного поля приводит к закону сохранения импульса:

$$\int_V \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{q})\mathbf{r}\right]\mathrm{d}^3r = \begin{cases} V & \text{при } \mathbf{p}' = \mathbf{p}-\mathbf{q}\,, \\ 0 & \text{при } \mathbf{p}' \neq \mathbf{p}-\mathbf{q}\,. \end{cases} \qquad (93)$$

Законы сохранения энергии и импульса (89), (93) позволяют найти угол θ излучения кванта относительно начальной скорости $\mathbf{v}$ частицы:

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n(\omega)}\left[1 + \frac{\pi\Lambda}{n(\omega)\lambda}\big(n^2(\omega)-1\big)\sqrt{1-\beta^2}\,\right],$$
$$\Lambda = \frac{\hbar}{m_e c}\,, \qquad n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}\,, \qquad \beta = \frac{v}{c}\,.$$

Квантовая поправка, пропорциональная отношению Λ/λ, имеет порядок величины 10^{-6} для электрона, и в дальнейшем такими поправками пренебрегаем.

Использовав формулы (51), (54) для квантованного поля, а также величины (92) и (93), запишем требуемый матричный элемент в виде

$$\langle f|\hat{V}|i\rangle = e\sqrt{\frac{2\pi\hbar c|u_s|}{\omega V}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}}\big(u^+_{\mathbf{p}-\mathbf{q}\,\mu'}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{e}^*_s)u_{\mathbf{p}\mu}\big)\,. \qquad (94)$$

В этом и последующих выражениях величину $\mathbf{q}$ можно рассматривать как изменение импульса излучающего электрона, $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$, и как импульс испущенного фотона.

Число квантовых состояний $\mathrm{d}\nu$ в вероятности (89) после использования закона сохранения (92) и исключения импульса $\mathbf{p}'$ относится только к фотону и с учётом его закона дисперсии (55) может быть записано через частоту в виде

$$\mathrm{d}\nu = \frac{V\omega^2\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega_q}{(2\pi)^3 v_{\mathrm{ph}}^2|u_q|}\,, \qquad (95)$$

где $v_{\mathrm{ph}} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — фазовая скорость, $u_q = \mathrm{d}\hbar\omega/\mathrm{d}q$ — групповая скорость. При вычислении излучаемой энергии следует усреднить вероятность (89) по начальным спиновым состояниям μ электрона и просуммировать по его конечным состояниям μ', а также по поляризациям s испущенного поперечного фотона. Эти операции проводятся с помощью проекционных операторов и хорошо известны [25 – 29].

Опуская технические подробности вычислений, приведём окончательный результат:

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu,\,\mu',\,s}\left|(u^+_{\mathbf{p}-\mathbf{q}\,\mu'}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{e}^*_s)u_{\mathbf{p}\,\mu})\right|^2 = \beta^2\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right), \quad \beta = \frac{v}{c}\,. \qquad (96)$$

Энергия $\mathrm{d}I(\omega)$ излучения частицы за единицу времени в интервал частот $\mathrm{d}\omega$ будет получена, если энергию одного кванта $\hbar\omega$ умножить на вероятность излучения $\mathrm{d}w^{\mathrm{rad}}$, проинтегрированную по возможным углам вылета фотона $\mathrm{d}\Omega_q$ с использованием δ-функции. Её аргумент представляется в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) - \mathcal{E}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - \hbar\omega = \mathbf{vq} - \hbar\omega = vq\cos\theta - \hbar\omega \qquad (97)$$

и после интегрирования даёт множитель

$$\int \delta(vq\cos\theta - \hbar\omega)\,\mathrm{d}\Omega_q = \frac{2\pi}{\hbar\omega\beta n(\omega)}\,. \qquad (98)$$

Собрав все нужные сомножители в выражениях (89) и последующих, получим

$$\mathrm{d}I(\omega) = \frac{e^2 v\mu(\omega)}{c^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right)\omega\,\mathrm{d}\omega\,. \qquad (99)$$

Полное излучение за единицу времени определяется, если проинтегрировать (99) по области частот, в которой выполняются совместно законы сохранения энергии и импульса, т.е. $|\cos\theta| = 1/\beta n(\omega) < 1$:

$$I = \frac{e^2\beta}{c}\int_{\beta n>1}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right)\mu(\omega)\omega\,\mathrm{d}\omega\,. \qquad (100)$$

При $\mu(\omega) = 1$ полученный результат совпадает с результатом работы Тамма и Франка [23], в которой авторы полагали $\mu = 1$ и $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$.

Приведённый расчёт с использованием теории Дирака был выполнен для заряженной частицы со спином 1/2 (фермиона). В этом случае излучение, вообще говоря, создаётся не только зарядом движущейся частицы, но и её спиновым магнитным моментом. Однако вклад магнитного момента в излучение очень мал — по оценке В.Л. Гинзбурга [6] относительный порядок этого вклада не превышает 10^{-5}. Поэтому выражение (100) фактически применимо для любой заряженной частицы независимо от её спинового момента.

Хорошо известная квантовая формула (89), включающая в себя и закон сохранения энергии, из которой получена правильная интенсивность излучения Вавилова – Черенкова, не оставляет сомнений в том, что вся энергия $\hbar\omega = \mathcal{E}(p) - \mathcal{E}(p')$ и импульс черенковского фотона заимствуются от быстрой частицы, но не от среды. Квантовое состояние среды не изменяется.

Процессы, в которых кроме черенковского кванта участвуют другие возбуждения среды, рассматривались разными авторами (см. работы [44 – 46]). Но все такие процессы описываются в более высоких порядках теории возмущений и имеют значительно меньшую интенсивность, чем излучение Вавилова – Черенкова.

Наличие среды не только приводит к появлению макроскопических механизмов излучения, отсутствующих в вакууме (излучение Вавилова – Черенкова, переходное излучение [47, 48]), но и оказывает влияние на прочие радиационные процессы, например, на спонтанное излучение возбуждённых атомов в среде. Несложно проверить, что вероятность спонтанного электрического дипольного излучения атома в веществе по сравнению с вероятностью такого излучения в вакууме приобретает множитель $\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu^3(\omega)}$. К этому приводит изменение числа квантовых состояний фотона в непрерывном спектре (95) и изменение нормировочной константы.

9. Масса фотона в среде

Хорошо известно, что масса фотона в вакууме равна нулю: $m_{\mathrm{ph}} = 0$. В специальной теории относительности масса элементарной частицы может быть корректно определена только как релятивистски инвариантная величина (распространённое, но не вполне удачное название этой величины — "масса покоя"). Не существует корректно определённой "массы, зависящей от скорости". Разъяснению этого важного свойства массы в относительно недавние годы, уже в XXI веке, было посвящено несколько статей и заметок Л.Б. Окуня (см. [49, 50] и особенно [51]).

Значение массы фотона в среде наиболее просто найти, записав уравнение Клейна – Гордона – Фока для свободной векторной частицы с массой m (см., например, [52]):

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi_k = 0\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3\,. \qquad (101)$$

Как известно, это уравнение реализует на квантовом уровне связь между операторами энергии и импульса частицы независимо от её внутренних степеней свободы. Поэтому оно применимо и к бозонам, и к фермионам.

Для фотонов в среде аналогом волновой функции выступает векторный потенциал, удовлетворяющий уравнению (24):

$$\Delta\mathbf{A}_\omega - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_\omega}{\partial t^2} = 0\,. \qquad (102)$$

Сравнение двух последних уравнений показывает, что массовый член в уравнении для фотонов отсутствует и масса фотона в среде, как и в вакууме, равна нулю: $m_{\mathrm{ph}} = 0$. Поскольку оба уравнения имеют ковариантные формы, этот результат справедлив в любой инерциальной системе отсчёта, т.е. нулевая масса фотона — инвариантная величина.

Этот довольно очевидный из общих соображений результат приведён здесь в связи с тем, что в последние годы стали появляться статьи [53, 54] с неправильной трактовкой квантовой теории излучения Вавилова – Черенкова. В указанных работах рассматривается "масса фотона в среде" m_{ph}, которая определяется автором по аналогии с массой обычной релятивистской частицы:

$$m_{\mathrm{ph}}^2 c^2 = \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{ph}}^2}{c^2} - p^2\,, \qquad (103)$$

причём для импульса p используется представление Абрагама. Это приводит к выражению для массы вида

$$m_{\mathrm{ph}}^2 c^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right). \qquad (104)$$

Эта масса неинвариантна и может принимать мнимые значения при $\varepsilon\mu < 1$. К тому же автор считает, что черенковский фотон испускается средой, а не быстрой частицей, и утверждает, что "при излучении фотона с энергией $\mathcal{E}_{\mathrm{ph}}$ энергия среды должна уменьшиться на величину $m_{\mathrm{ph}}c^2$, где m_{ph} — масса фотона в среде с

$\sqrt{\varepsilon\mu} \neq 1$" (см. [53], с. 20). Оба утверждения — о конечной и неинвариантной массе фотона и об испускании фотона средой — неверны.

Подвергая критике работы И.Е. Тамма и И.М. Франка [40, 41], а также В.Л. Гинзбурга [11, 55], автор ограничивается лишь записью кинематических соотношений — законов сохранения энергии и трёхмерного импульса с участием "массы фотона". Претенциозный раздел "Новая квантовая теория излучения Вавилова – Черенкова" не содержит вычисления вероятностей либо интенсивностей излучений, создаваемых быстрой частицей. Исходные предпосылки этой критики неверны, а сама критика несостоятельна.

10. Заключение и выводы

Проведённое рассмотрение макроскопического тензора энергии-импульса продолжает уже более чем столетнюю историю (см. недавние работы [56 – 60]) обсуждений смысла фундаментальных физических величин, объединённых этим понятием. Наше рассмотрение относилось не к самому общему случаю, а лишь к достаточно высокочастотному электромагнитному полю, в виде квазимонохроматических поперечных волн (волновых пакетов), в отсутствие сторонних зарядов, токов и диссипации энергии в рассматриваемой области пространства. Вторая особенность использованного подхода — опора на квантовую теорию, которая позволяет, как представляется автору, выявить более глубокие особенности физических явлений по сравнению с классическим подходом.

Приведём высказывания по затронутым вопросам выдающегося физика В.Л. Гинзбурга [15, с. 316], который неоднократно возвращался в своих трудах к этой проблематике: "Всё сказанное позволяет считать тензор Абрагама "правильным", но, как нам представляется, объявить тензор Минковского "неправильным" можно, лишь подходя к проблеме несколько формально. Фактически же в большинстве ситуаций результаты, получаемые на основе использования тензоров Абрагама и Минковского, совершенно тождественны. Это даёт возможность в соответствующих случаях не только пользоваться тензором Минковского, но даже делает это вполне целесообразным, если тем самым достигаются какие-то упрощения".

И далее [15, с. 318], говоря о силе Абрагама (2): "... учёт действия этой силы в рамках классического подхода весьма прост (см. выше), но квантово-механически он оказался бы, по-видимому, довольно громоздким делом. Так или иначе, насколько нам известно, такое квантовое рассмотрение ещё не проведено".

В настоящей работе проведён учёт силы Абрагама на квантовом уровне, так как она включена (см. [17]) в тензор натяжений $\sigma^{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}$ Абрагама, и для всех компонент тензора энергии-импульса найдены квантово-механические собственные значения. Но это сделано не для общего случая, который мог бы охватывать статические, квазистатические и быстропеременные поля, а для поперечного высокочастотного поля, для которого только и требуется квантовое рассмотрение. Статические и квазистатические поля полноценно описываются и классическими методами [61]. При этом никаких противоречий не возникает. Но поперечное электромагнитное поле существенно отличается от поля, создаваемого неподвижными либо медленно движущимися заряженными частицами. Поэтому нет никаких априорных оснований считать, что формулы, описывающие плотности энергии и импульса поля, сохраняют свой вид во всём безграничном интервале частот и волновых чисел.

Как отмечалось в предыдущих разделах, квантовые закономерности, свойственные высокочастотному поперечному полю в среде, делают не только целесообразным, но и необходимым использование таких характеристик "фотонов в среде", которые определяются тензором Минковского и связанной с ним формулой Гинзбурга (62) для импульса фотона. Использование плотности импульса в форме Абрагама не согласуется с опытными данными.

Обратим внимание на то, что в статье Полевого и Рытова [62] тензор энергии-импульса электромагнитного поля записан через групповую скорость именно в несимметричной форме Минковского (см. формулы (53) работы [62]). Как показывает развитый выше квантовый подход, именно такая форма оказывается адекватной для высокочастотного поля. Поэтому наша критика в работе [17] выражения $g_\alpha = wk_\alpha/\omega$ для плотности импульса Полевого и Рытова неправильна и не соответствует полученным в настоящей работе данным, что автор считает необходимым с сожалением здесь отметить.

Таким образом, на основе проведённых расчётов можно сделать следующие выводы.

1. Для поперечных электромагнитных волн в прозрачной среде правильное значение плотности импульса даётся формулой Минковского (1), а правильное значение импульса отдельного фотона даётся формулой Минковского – Гинзбурга (62), впервые использованной В.Л. Гинзбургом [6] в 1940 г.

2. Достоверность этого вывода подтверждается принципом соответствия между классическим и квантовым значениями плотности импульса поперечных волн в среде, согласием с опытными значениями спина фотона в среде и правильным результатом для вероятности излучения фотона заряженной частицей (эффект Вавилова – Черенкова). Использование выражения Абрагама для этих целей ведёт к противоречиям и не согласуется с экспериментальными данными.

3. Квантовое описание поперечного поля в среде включает как частный случай и его классическое описание с помощью уравнений макроскопической электродинамики, поэтому сформулированный вывод, полученный из квантовой теории, сохраняет силу и в классической макроскопической электродинамике для случая высокочастотного поперечного поля. К статическим и квазистатическим полям этот вывод не относится.

Автор признателен сотрудникам Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого и Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН за обсуждение настоящей работы. Автор благодарит рецензента за очень внимательное рецензирование и ценные замечания, позволившие сделать более ясным изложение рассмотренных вопросов.

Список литературы

1. Тамм И Е *Основы теории электричества* (М.: Наука, 1976); Пер. на англ. яз.: Tamm I E *Fundamentals of the Theory of Electricity* (Moscow: Mir Publ., 1979)

2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
3. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: John Wiley and Sons, 1999)
4. Рязанов М И *Электродинамика конденсированного вещества* (М.: Наука, 1984)
5. Памятных Е А, Туров Е А *Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях* (М.: Физматлит, 2000)
6. Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **10** 589 (1940)
7. Minkowski H "Die Grundlagen für die elektromagnetischen Vorgënge in bewegten Körpern" *Nachr. König. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* 53 (1908); Пер. на русс. яз.: Минковский Г "Основные уравнения электромагнитных процессов в движущихся телах", в сб. *Эйнштейновский сборник 1978–1979* (Под ред. В Л Гинзбурга) (М.: Наука, 1983) с. 5
8. Minkowski H "Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetishen Forgänge in bewegten Körpern fom Standpunkt der Elektronentheorie" *Math. Ann.* **68** 526 (1902); Пер. на русс. яз.: Минковский Г "Вывод основных уравнений для электромагнитных процессов в движущихся телах с точки зрения теории электронов", в сб. *Эйнштейновский сборник 1978–1979* (Под ред. В Л Гинзбурга) (М.: Наука, 1983) с. 64
9. Abraham M *Rend. Circ. Mat. Palermo* **28** 1 (1909); *Rend. Circ. Mat. Palermo* **31** 527 (1910)
10. Pauli W *Relativitätstheorie* (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. V, Tl. 2, Heft IV) (Leipzig: Teubner, 1921); Пер. на англ. яз.: *Theory of Relativity* (New York: Pergamon Press, 1958); Пер. на русс. яз.: Паули В *Теория относительности* (М.: Гостехиздат, 1947)
11. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы* 3-е изд. (М.: Наука, 1987); Пер. на англ. яз.: Ginzburg V L *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics* 2nd ed. (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1989)
12. Угаров В А *Специальная теория относительности* (М.: Наука, 1977)
13. Топтыгин И Н *Современная электродинамика* Ч. 2 *Теория электромагнитных явлений в веществе* (М.–Ижевск: Ин-т компьют. исслед. РХД, 2005); Дополненный перевод на англ. яз.: Toptygin I N *Electromagnetic Phenomena in Matter. Statistical and Quantum Approaches* (Weinheim:Wiley-VCH, 2015)
14. Скобельцын Д В *УФН* **110** 253 (1973); Skobel'tsyn D V *Sov. Phys. Usp.* **16** 381 (1973)
15. Гинзбург В Л *УФН* **110** 309 (1973); Ginzburg V L *Sov. Phys. Usp.* **16** 381 (1973)
16. Гинзбург В Л, Угаров В А *УФН* **118** 175 (1976); Ginzburg V L, Ugarov V A *Sov. Phys. Usp.* **19** 94 (1976)
17. Топтыгин И Н, Левина К *УФН* **186** 146 (2016); Toptygin I N, Levina K *Phys. Usp.* **59** 141 (2016)
18. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000)
19. Болотовский Б М, Столяров С Н *УФН* **114** 569 (1974); Bolotovskii B M, Stolyarov S N *Sov. Phys. Usp.* **18** 875 (1975)
20. Huttner B, Barnett S M *Phys. Rev. A* **46** 4306 (1992)
21. Philbin T G *New J. Phys.* **12** 123008 (2012)
22. Horsley S A R *Phys. Rev. A* **86** 023830 (2012)
23. Horsley S A R, Philbin T G *New J. Phys.* **16** 013030 (2014)
24. Goldstein H *Classical Mechanics* (Reading, Mass.: Addison-Wisley, 1950)
25. Heitler W *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford: Clarendon Press, 1954); Пер. на русск. яз.: Гайтлер В *Квантовая теория излучения* (М.: ИЛ, 1956)
26. Ахиезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* (М.: Гостехиздат, 1953); Пер. на англ. яз.: Akhiezer A I, Berestetskii V B *Elements of Quantum Electrodynamics* (London: Oldbourne Press, 1962); Ахиезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* 2-е изд. (М.: Физматгиз, 1959); Пер. на англ. яз.: Akhiezer A I, Berestetskii V B *Quantum Electrodynamics* (New York: Interscience Publ., 1965); Ахиезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* 3-е изд. (М.: Наука, 1969); *Квантовая электродинамика* 4-е изд. (М.: Наука, 1981)
27. Компанеец А С *Теоретическая физика* (М.: ГИТТЛ, 1957); Пер. на англ. яз.: Kompaneyets A S *Theoretical Physics* (Moscow: Mir Publ., 1965)
28. McConnell J *Quantum Particle Dynamics* (Amsterdam: North-Holland, 1960)
29. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989); Пер. на англ. яз.: Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999)
30. Mandel L, Wolf E *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995); Пер. на русск. яз.: Мандель Л, Вольф Э *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2000)
31. Bjorken D, Drell D *Relativistic Quantum Field* (New York: McGraw-Hill, 1976); Пер. на русск. яз.: Бьёркен Дж Д, Дрелл С Д *Релятивистская квантовая теория* Т. 2 *Релятивистские квантовые поля* (М.: Наука, 1978)
32. Dirac P A M *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: Clarendon Press, 1958); Пер. на русск. яз.: Дирак П А М *Принципы квантовой механики* (М.: Физматгиз, 1960)
33. Ehrenfest P *Z. Phys.* **45** 455 (1927)
34. Glauber R *Coherence and Quantum Detection in Quantum Optics* (Proc. of the Intern. School of Physics Enrico Fermi, Course XVII, Ed. R Glauber) (New York: Academic Press, 1969); Пер. на русск. яз.: Глаубер Р (Ред.) *Когерентные состояния в квантовой теории Сборник статей* (М.: Мир, 1972)
35. Loudon R *The Quantum Theory of Light* (Oxford: Clarendon Press, 1973); Пер. на русск. яз.: Лоудон Р *Квантовая теория света* (М.: Мир, 1973)
36. Scully M O, Zubairy M S *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997); Пер. на русск. яз.: Скалли М О, Зубайри М С *Квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2002)
37. Toptygin I N *Foundations of Classical and Quantum Electrodynamics* (New York: Wiley-VCH, 2014)
38. Черенков П А *ДАН СССР* **2** 451 (1934); Cherenkov P A *C.R. Acad. Sci. USSR* **2** 451 (1934); Черенков П А *УФН* **93** 385 (1967)
39. Вавилов С Н *ДАН СССР* **2** 457 (1934); Vavilov S I *C.R. Acad. Sci. USSR* **2** 457 (1934); Вавилов С И *УФН* **93** 383 (1967)
40. Тамм И Е, Франк И М *ДАН СССР* **14** 107 (1937); Tamm I E, Frank I M *C.R. Acad. Sci. USSR* **14** 107 (1937); Тамм И Е, Франк И М *УФН* **93** 388 (1967)
41. Тамм И Е, Франк И М *Труды ФИАН* **2** (4) 63 (1944)
42. Франк И М *Излучение Вавилова–Черенкова. Вопросы теории* (М.: Наука, 1988)
43. Соколов А А, Тернов И М *Релятивистский электрон* (М.: Наука, 1983); Пер. на англ. яз.: Sokolov A A, Ternov I M *Radiation from Relativistic Electrons* (New York: American Institute of Physics, 1986)
44. Рязанов М И *ЖЭТФ* **45** 333 (1963); Ryazanov M I *Sov. Phys. JETP* **18** 232 (1964)
45. Гайлитис А, Цытович В Н *ЖЭТФ* **46** 1726 (1964); Gailitis A, Tsytovich V N *Sov. Phys. JETP* **19** 1165 (1964)
46. Батыгин В В *ЖЭТФ* **53** 890 (1967); Batygin V V *Sov. Phys. JETP* **26** 540 (1968)
47. Гинзбург В Л, Франк И М *ЖЭТФ* **16** 15 (1946); Ginzburg V L, Frank I M *J. Phys. USSR* **9** 353 (1945), brief version
48. Гинзбург В Л, Цытович В Н *Переходное излучение и переходное рассеяние: некоторые вопросы теории* (М.: Наука, 1984); Пер. на

англ. яз.: Ginzburg V L, Tsytovich V N *Transition Radiation and Transition Scattering* (Bristol: A. Hilger, 1990)
49. Окунь Л Б *УФН* **158** 511 (1989); Okun' L B *Sov. Phys. Usp.* **32** 629 (1989)
50. Окунь Л Б *УФН* **170** 1366 (2000); Okun L B *Phys. Usp.* **43** 1270 (2000)
51. Окунь Л Б *УФН* **178** 541 (2008); Okun L B *Phys. Usp.* **51** 513 (2008); Окунь Л Б *УФН* **178** 653 (2008); Okun L B *Phys. Usp.* **51** 622 (2008)
52. Москалёв А Н *Релятивистская теория поля* (СПб.: ПИЯФ РАН, 2006)
53. Чефранов С Г *ЖЭТФ* **150** 18 (2016); Chefranov S G *JETP* **123** 12 (2016)
54. Чефранов С Г *ЖЭТФ* **126** 333 (2004); Chefranov S G *JETP* **99** 296 (2004)
55. Гинзбург В Л *УФН* **166** 1033 (1996); Ginzburg V L *Phys. Usp.* **39** 973 (1996)
56. Barnett S M *Phys. Rev. Lett.* **104** 070401 (2010)
57. Philbin P G *Phys. Rev. A* **83** 013823 (2011)
58. Pfeifer R N C et al. *Rev. Mod. Phys.* **79** 1197 (2007)
59. Kemp B A *J. Appl. Phys.* **109** 111101 (2011)
60. Ramos T, Rubilar G F, Obukhov Y N *J. Opt.* **17** 025611 (2015)
61. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **39** 1450 (1960); Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **12** 1008 (1961)
62. Полевой В Г, Рытов С М *УФН* **125** 549 (1978); Polevoi V G, Rytov S M *Sov. Phys. Usp.* **21** 630 (1978)

Quantum description of a field in macroscopic electrodynamics and photon properties in transparent media

I.N. Toptygin
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
ul. Politekhnicheskaya 29, 195251 St. Petersburg, Russian Federation
E-mail: *igor_toptygin@mail.ru*

Applying a quantum-mechanical treatment to a high-frequency macroscopic electromagnetic field and radiative phenomena in a medium, we construct quantum operators for energy–momentum tensor components in dispersive media and find their eigenvalues, which are different in the Minkowski and Abraham representations. It is shown that the photon momentum in a medium resulting from the quantization of the vector potential differs from that defined from Abraham's symmetric energy-momentum tensor but is equal to the momentum defined from the Minkowski tensor. A similar result is obtained by calculating the intrinsic angular moment (spin) of an electromagnetic field in the medium. Only the Minkowski tensor enables experimentally confirmed multiple-of-$\hbar$ spin values, providing the grounds for choosing the Minkowski representation as the adequate form for the momentum density of a transverse electromagnetic field in a transparent medium, whether the field is treated classically or quantum mechanically. The Abraham representation is unsuitable for this purpose and leads to contradictions. The conclusion drawn does not apply to quasi-static and static fields.

Keywords: the Minkowski energy–momentum tensor, quantum theory, radiation phenomena, spin and mass of a photon in matter

PACS numbers: **12.20.–m**, 41.20.Jb, 41.60.Bq

Bibliography — 62 references

Received 21 June 2016, revised 8 April 2017

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **187** (9) 1007–1020 (2017)

Physics – Uspekhi **60** (9) (2017)

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.04.038138

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.04.038138