Сентябрь 2017 г. *Том 187, № 9*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ТЕКУЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

О попятном движении катящегося диска

А.В. Борисов, А.А. Килин, Ю.Л. Караваев

Представлены теоретические и экспериментальные исследования, объясняющие попятное качение диска на финальной стадии движения при определённом соотношении его масс-геометрических параметров. Модификация модели качения диска без проскальзывания введением вязкого трения качения позволила качественно объяснить попятное движение диска. В то же время описанные простые эксперименты полностью исключают момент аэродинамического сопротивления из основных причин попятного движения диска, опровергая гипотезы, которые появляются в последнее время.

Ключевые слова: ретроградный разворот, катящийся диск, неголономная модель, трение качения

PACS numbers: 02.60.Cb, **05.45.–a**, **45.40.–f** DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038049

Авторы статьи [1] обнаружили интуитивно неочевидный факт — разворот катящегося диска, имеющего центральное отверстие. Проводя аналогию с движением планет в небесной механике, они назвали такое движение ретроградным. Напомним, что в русскоязычной литературе [2] для обозначения подобного движения используется термин "попятное", а противоположным ему по значению является термин "прямое". Использование терминов "попятное" и "прямое" для описания качения диска не позволяет раскрыть физический смысл движения, поэтому мы будем пользоваться англоязычными терминами "ретроградное" для обозначения основного движения диска в сторону, противоположную его вращению, и "проградное" для обозначения основного движения диска в сторону его вращения.

По мнению авторов [1], причиной разворота являются силы аэродинамического сопротивления, возникающие из-за наличия у диска центрального отверстия. При этом предложенная ими модель не отражает физической природы процесса качения кольца. Подобной критике (см. работы [3–5]) подвергалась и работа Моффата [6], рассматривающего аэродинамическое сопротивление в качестве главного механизма диссипации энергии однородного диска. Тем не менее она возродила интерес к исследованию динамики качения диска и послужила причиной появления большого числа работ, результаты которых не могут быть игнорированы при описании ретроградного разворота диска с центральным отверстием, называемого иногда кольцом (особенно в случаях, когда диаметр отверстия стремится к диаметру диска).

А.В. Борисов. Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация; Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация
E-mail: borisov@rcd.ru
А.А. Килин. Удмуртский государственный университет, ул. Университетская 1, 426034 Ижевск, Российская Федерация
E-mail: aka@rcd.ru
Ю.Л. Караваев. Удмуртский государственный университет, ул. Университетская 1, 426034 Ижевск, Российская Федерация; Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, ул. Студенческая 7, 426069 Ижевск, Российская Федерация
E-mail: karavaev_yury@istu.ru

Статья поступила 1 декабря 2016 г., после доработки 10 января 2017 г.

Библиографию работ, посвящённых исследованию задачи о движении сплошного диска, известной как задача о диске Эйлера, можно найти в [7–12]. Для описания динамики диска Эйлера существует две модели, учитывающие его соприкосновение с поверхностью: без скольжения [13] и со скольжением [4, 14]. Причём в экспериментах скольжение наблюдается на начальных стадиях движения и со временем переходит в качение. Вопрос применимости различных моделей контактного взаимодействия обсуждается также при исследованиях качения полого цилиндра [15]. Напомним, что модели с идеализированным скольжением описываются гамильтоновыми системами, а модели с идеализированным качением — неголономными системами. Динамика диска Эйлера в рамках различных моделей трения достаточно подробно исследована, но некоторые вопросы остаются открытыми (например, отрыв диска от поверхности перед остановкой [11]).

Как показывают эксперименты, траектория качения однородного диска отличается от траектории качения кольца отсутствием разворота и представляет собой волнистую спираль. По результатам теоретических и численных исследований [13] нами показано, что в неголономной модели при определённых масс-геометрических характеристиках в зависимости от уровня энергии может наблюдаться как ретроградное, так и проградное качение диска. Однако в рамках неголономной модели переходы между уровнями энергии невозможны.

Следует отметить, что эффект разворота, который обнаружили авторы [1], не является новым и присущим только кольцу. Он наблюдался в более ранних работах ещё А. Ором (A. Or) при численном моделировании динамики волчка Томсона [16] и в недавней экспериментальной работе Р. Кросса [17]. При этом аэродинамика волчков, рассматриваемых в данных работах, существенно отличается от динамики кольца.

Опровержение тезиса о том, что аэродинамическое сопротивление является основной причиной разворота кольца во время качения, подтверждается проведёнными нами простыми экспериментами. Для первого эксперимента (см. видео 1 [18]) мы изготовили специальное кольцо, центральное отверстие которого имеет форму цилиндра, радиусом 33 мм, а верхнее и нижнее основания кольца имеют разные радиусы: $R_1 = 40$ мм и $R_2 = 35$ мм (т.е. кольцо в диаметральном сечении имеет вид равнобедренной трапеции). При качении диска на большем основании траектория его движения напоминает траекторию движения диска и не содержит ретроградных движений, а при движении диска на меньшем основании, вне зависимости от начальных условий, кольцо совершает ретроградный разворот. Моменты аэродинамического сопротивления при запусках колец на большем и меньшем основаниях различаются незначительно, но характер движения меняется кардинально. Результаты данного эксперимента позволяют сделать вывод о том, что наличие ретроградного разворота кольца сильно зависит от соотношения радиуса инерции кольца и радиуса основания, на котором происходит качение.

В качестве продолжения данного эксперимента мы заклеили одну из поверхностей кольца плёнкой (см. видео 2 [19]), масс-инерционные характеристики кольца при этом существенно не изменились, но аэродинамика максимально приблизилась к характеристикам диска. Результаты остались аналогичными результатам предыдущего эксперимента: при качении на меньшем основании кольцо совершало ретроградный поворот, а при движении на большем основании не совершало. Похожие эксперименты были проведены с кольцами, имеющими другие геометрические и массовые характеристики. Независимость траектории колец от наличия плёнки позволяет сделать вывод о слабом влиянии сопротивления воздуха на динамику качения кольца.

Третий эксперимент был проведён в вакуумной камере, которая используется для литья. Давление в камере понижалось до значения 10^2 Па (0,0145 psi[1]). Эксперименты проводились с обычным обручальным кольцом из золота, которое сбрасывалось на горизонтальную алюминиевую плиту с помощью приводов, установленных в вакуумной камере. Эффект ретроградного разворота кольца в вакууме сохранился, что демонстрируют видеофайлы [20, 21]. Данные эксперименты позволяют однозначно исключить аэродинамические силы из основных причин ретроградного разворота кольца.

Для описания динамики ретроградного движения, на наш взгляд, удобно воспользоваться модификацией неголономной модели качения диска [13], учитывающей трение качения. Данная модель также описывает динамику кольца, которая отличается от динамики диска только различными значениями масс-геометрических параметров. Практика модификации идеализированных моделей хорошо зарекомендовала себя при качественном объяснении эффектов в ряде задач, например в задаче о волчке Томсона [17] или задаче о кельтском камне [22]. Несмотря на большой разброс экспериментальных и теоретических данных, модифицированные модели являются простым инструментом для качественного объяснения эффектов, возникающих при движении тел.

В неголономной модели существуют как проградные, так и ретроградные траектории движения диска [13]. Добавление диссипации в неголономную модель обеспечит переход от проградного качения к ретроградному развороту. При этом диссипация может быть описана различными моделями. Наиболее полные результаты исследований механизмов диссипации энергии катящегося диска, в том числе и экспериментальные, представлены в работах [10, 23]. По мнению авторов этих работ, после непродолжительного этапа скольжения основное влияние на динамику диска Эйлера оказывает трение качения, которое в работах [12, 23] моделируется вязким контактом с квадратичной зависимостью от скорости движения. Это подтверждается достаточно хорошим согласованием результатов численного моделирования для угла нутации и скорости прецессии с результатами экспериментальных исследований. Однако авторы работ [10, 23] не уделяют должного внимания

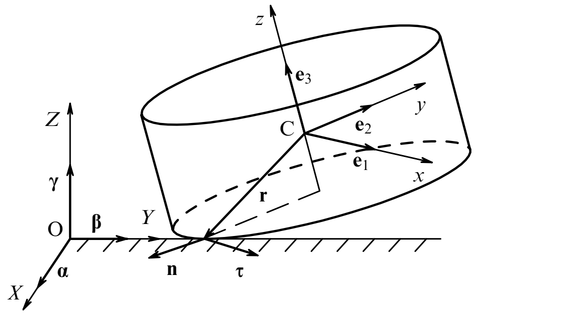

Рис. 1. Диск, катящийся по горизонтальной плоскости.

траекториям движения диска в рамках исследуемых моделей трения, а также зависимости формы траекторий от масс-геометрических характеристик дисков. Заметим, что впервые модель вязкого контакта введена Контенсу [24].

Для описания движения диска рассмотрим две системы координат (рис. 1). Первая, $OXYZ$, — неподвижная, с ортами $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, вторая, $Cxyz$, — подвижная, жёстко связанная с центром масс диска, с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Положение системы будем задавать координатами центра масс диска в неподвижной системе координат $\mathbf{r}_c = (X, Y, Z)$ и матрицей, задающей ориентацию диска в пространстве $\mathbf{Q} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$. Здесь и далее (если не оговаривается иное) все векторы записаны в проекциях на оси подвижной системы координат $Cxyz$.

Уравнения движения диска можно представить в виде

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}\times\mathbf{N} + \mathbf{M}_{\mathrm{f}}\,, \quad m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega} - mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{N}\,. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{M}_{\mathrm{f}}$, $\mathbf{N}$ — соответственно момент трения качения и сила реакции плоскости, m — масса диска, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки контакта в подвижной системе координат,

$$\mathbf{r} = \left(-\frac{R\gamma_1}{\sqrt{1-\gamma_3{}^2}}\,, -\frac{R\gamma_2}{\sqrt{1-\gamma_3{}^2}}\,, -h \right), \quad (2)$$

где R — радиус основания диска, на котором он катится, h — расстояние от этого основания до центра масс, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — компоненты (направляющие косинусы) вектора вертикали в подвижной системе координат.

Отсутствие проскальзывания в точке контакта обеспечивается неголономной связью

$$\mathbf{f} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = 0\,. \quad (3)$$

Из совместного решения уравнений (1) и производной по времени от связи (3) можно найти силу реакции $\mathbf{N}$. Подставив полученное выражение в первое уравнение (1) и исключив скорости с помощью уравнения связи (3), получим

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r}\times \\ \times\big(\mathbf{r}\times\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})\times\boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{\gamma}\big) + \mathbf{M}_{\mathrm{f}}\,. \quad (4)$$

Исходя из физических соображений момент трения качения удобно разложить на три компоненты, соответствующие моментам трения в различных направлениях (см. также [23]): момент трения, препятствующий верчению диска относительно вертикали $\boldsymbol{\gamma}$ с коэффициентом трения μ_γ, момент трения, препятствующий повороту диска вокруг вектора $\boldsymbol{\tau}$, касательного к кромке диска в точке контакта с поверхностью с коэффициентом трения μ_τ, момент трения, препятствующий качению диска по кромке его нижнего основания с коэффициентом трения μ_n. В общем случае, когда три коэффициента трения различны, момент трения, можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{f}} = -\widehat{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\omega}\,, \quad \widehat{\boldsymbol{\mu}} = \mu_\gamma\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{\gamma} + \mu_\tau\boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{\tau} + \mu_n\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\,, \quad (5)$$

[1] Внесистемная единица измерения давления "фунт-сила на квадратный дюйм" — psi (pound-force per square inch). 1 psi = 6894,75729 Па.

где единичные касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ и нормальный вектор $\mathbf{n}$ в точке контакта имеют вид

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_3}{\sqrt{1-\gamma_3{}^2}}\,, \quad \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\gamma})}{\sqrt{1-\gamma_3{}^2}}\,,$$

а тензорное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \|a_i b_j\|\,.$$

В общем случае коэффициенты трения μ_γ, μ_τ, μ_n могут зависеть от фазовых переменных и силы реакции плоскости $\mathbf{N}$. В данной статье мы ограничимся рассмотрением случая вязкого трения качения, линейного по угловым скоростям. В этом случае коэффициенты μ_γ, μ_τ и μ_n являются постоянными. Кроме того, для упрощения модели будем считать, что все три коэффициента равны между собой, $\mu_\gamma = \mu_\tau = \mu_n = \mu$, а момент трения качения принимает вид $\mathbf{M}_\text{f} = -\mu\boldsymbol{\omega}$. Оказывается, что даже при таком достаточно грубом предположении результаты численного моделирования качественно совпадают с экспериментальными результатами.

Добавив к (4) кинематические уравнения Эйлера и квадратуры для центра масс диска, получим замкнутую систему уравнений, описывающую динамику диска:

$$\begin{gathered}\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m(\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} + g\boldsymbol{\gamma}) \times \\ \times \mathbf{r} = -\mu\boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{x} = (\boldsymbol{\alpha}\,, \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})\,, \quad \dot{y} = (\boldsymbol{\beta}\,, \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Приведём далее результаты численного моделирования уравнений (6) и их сравнение с результатами экспериментальных исследований.

Для получения количественных экспериментальных данных о траектории движения создан второй экспериментальный образец — кольцо с переменным (по высоте) радиусом, диаметральное сечение которого приведено на рис. 2а. Параметры кольца имеют значения: радиусы оснований $R_1 = 0{,}0375$ м, $R_2 = 0{,}0490$ м, масса $m = 0{,}1034$ кг, осевые моменты инерции $I_x = I_y = 0{,}08647 \times 10^{-3}$ кг м^2 и $I_z = 0{,}16610 \times 10^{-3}$ кг м^2, высота центра масс $h = 0{,}0105$ м. Экспериментальная траектория центра масс восстанавливалась с помощью системы захвата движения с частотой 200 Гц по маркерам, расположенным на кольце (рис. 2б).

При качении экспериментального образца на большем основании ретроградные развороты при различных начальных условиях не наблюдались. В то же время при качении на меньшем основании ретроградный разворот происходил при начальных условиях, соответствующих уровню энергии, превышающему некоторый критический. Пример экспериментальной траектории качения кольца на меньшем основании приведён на рис. 3б.

С помощью системы захвата движения для данной траектории получены начальные условия, которые использовались для проведения численного моделирования: $\omega_1(0) = -2{,}5119$, $\omega_2(0) = 7{,}6737$, $\omega_3(0) = 29{,}2722$, $\gamma_3 = 0{,}7175$. Остальные начальные условия ввиду осевой симметрии диска и свободы в выборе неподвижной системы координат могут быть заданы произвольным образом. Траектория качения кольца, полученная в результате численного моделирования уравнений (6) с указанными начальными условиями при коэффициенте трения $\mu = 5{,}17 \times 10^{-6}$, представлена на рис. 3а.

Как видно из рис. 3, качественно вид траектории хорошо согласуется с результатами эксперимента. Размеры и количество петель на траектории сильно зависят от коэффициента трения, а их согласованность с экспериментом может быть достигнута введением в модель неоднородного трения качения. По результатам численного моделирования следует отметить, что решение системы чувствительно к начальным условиям и значениям коэффициентов трения. Однако качественно характер траектории совпадает с характером траектории, полученной в эксперименте, в широком диапазоне масс-геометрических параметров диска и начальных условий.

В данной статье мы ограничились рассмотрением только одной модели вязкого трения качения, так как результаты исследований механизмов диссипации, проведённых в работах [10, 23], показали ключевое значение этой модели и хорошую согласованность с экспериментом. Тем не менее отметим, что описываемый ретроградный разворот экспериментально наблюдался и в случае качения с проскальзыванием, которое происходит на отдельных участках траектории. При использовании модели качения диска с проскальзыванием применительно ко всему времени движения разворота кольца не наблюдалось. Однако рассмотрение модели с проскальзыванием на отдельных участках траектории является более сложной задачей, так как переход от скольжения к качению требует учёта сухого трения, что может привести к парадоксальным явлениям [25, 26] и требует проведения отдельных исследований. Поэтому на уровне количественного объяснения результаты имеют непредсказуемый характер и вряд ли они будут получены в ближайшем будущем. Теоретически построить траекторию, которая количественно совпадает с экспериментальной, представляется невозможным в связи с наличием микронеровностей и неоднородностью характеристик материалов, что является важным в задачах с трением.

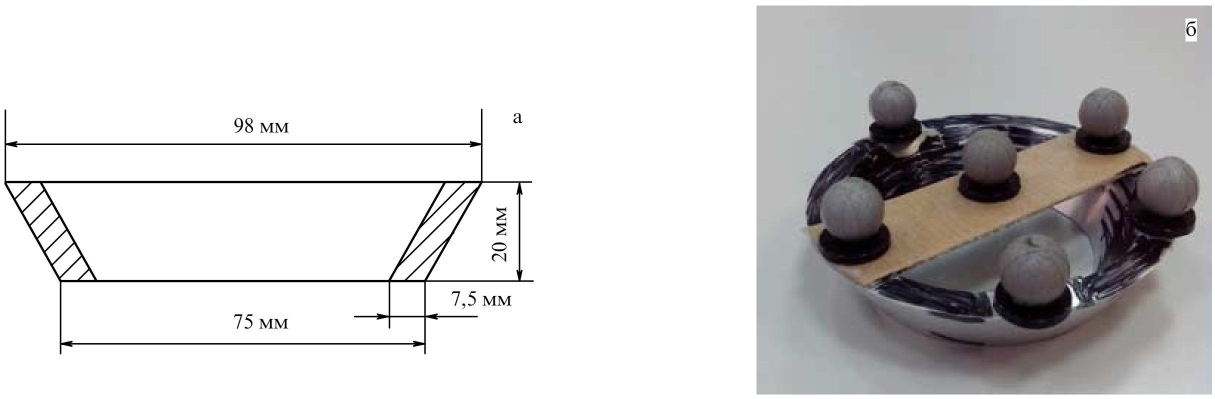

Рис. 2. (а) Эскиз экспериментального образца. (б) Фотография экспериментального образца с размещёнными на нём маркерами системы захвата движения.

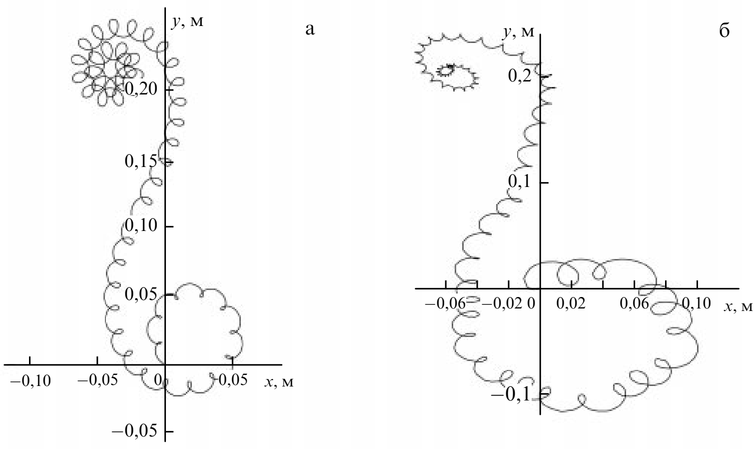

Рис. 3. (а) Траектория качения кольца с учётом трения качения (численное моделирование). (б) Траектория качения кольца, восстановленная с помощью системы захвата движения.

В качестве выводов кратко выделим результаты, полученные в нашей работе.

1. Аэродинамическое сопротивление не является основной причиной разворота кольца во время его качения.

2. Явление разворота кольца можно объяснить качественно в рамках модели качения кольца без проскальзывания с вязким трением качения.

3. Вследствие случайности и парадоксальности переходов между трением качения и трением скольжения, которые возникают на отдельных участках траектории движения, построение траектории движения кольца, количественно совпадающей с экспериментальной траекторией, затруднительно.

Благодарности. Авторы благодарят И.С. Мамаева за плодотворные обсуждения полученных результатов. Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания вузам, а также поддержана грантами РФФИ (проекты 15-08-09261-а и 15-38-20879 мол_а_вед).

Список литературы

1. Jalali M A, Sarebangholi M S, Alam M-R *Phys. Rev. E* **92** 032913 (2015)
2. Szebehely V *Theory of Orbits, the Restricted Problem of Three Bbodies* (New York: Academic Press, 1967); Пер. на русск. яз.: Себехей В *Теория орбит*: *ограниченная задача трех тел* (М.: Наука, 1982)
3. Ruina A "Comments on Euler's disk and its finite-time singularity by H.K. Moffatt", Unpublished notes (Ithaca, NY: Dept. of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell Univ., 2000)
4. Van den Engh G, Nelson P, Roach J *Nature* **408** 540 (2000)
5. Petrie D, Hunt J L, Gray C G *Am. J. Phys.* **70** 1025 (2002)
6. Moffatt H K *Nature* **404** 833 (2000)
7. Kessler P, O'Reilly O M *Regular Chaotic Dynamics* **7** 49 (2002)
8. Caps H et al. *Phys. Rev. E* **69** 056610 (2004)
9. Saje M, Zupan D *Multidiscipline Modeling Mater. Struct.* **2** 49 (2006)
10. Leine R L *Archive Appl. Mech.* **79** 1063 (2009)
11. Borisov A V, Mamaev I S, Karavaev Yu L *Nonlinear Dynamics* **79** 2287 (2015)
12. Ma D, Liu C *J. Appl. Mech.* **83** 061003 (2016)
13. Borisov A V, Mamaev I S, Kilin A A *Regular Chaotic Dynamics* **8** 201 (2003)
14. Przybylska M, Rauch-Wojciechowski S *Regular Chaotic Dynamics* **21** 204 (2016)
15. Srinivasan M, Ruina A *Phys. Rev. E* **78** 066609 (2008)
16. Or A C *SIAM J. Appl. Math.* **54** 597 (1994)
17. Cross R *Am. J. Phys.* **81** 280 (2013)
18. The spinning motion of a ring, 2016: Karavaev Y L, Kilin A A, Borisov A V, https://youtu.be/SEIyoQ0iWdI
19. The spinning motion of a ring after applying adhesive film to it (2016): Karavaev Y L, Kilin A A, Borisov A V, https://youtu.be/l9C1KNq3OqU
20. The spinning motion of a ring in a vacuum (2016): Karavaev Y L, Kilin A A, Borisov A V, https://youtu.be/VnktVz4H6R0
21. The spinning motion of a ring at atmospheric pressure (2016): Karavaev Y L, Kilin A A, Borisov A V, https://youtu.be/s3SiPwxgoIk
22. Takano H *Regular Chaotic Dynamics* **19** 81 (2014)
23. Ma D, Liu C, Zhao Z, Zhang H *Proc. R. Soc. London A* **470** 20140191 (2014)
24. Contensou P, in *Kreiselprobleme Gyrodynamics, Intern. Union of Theoretical and Applied Mechanics Symp. Celerina, Switzerland, 1962* (Ed. H Ziegler) (Berlin: Springer, 1963) p. 201
25. Mamaev I S, Ivanova T B *Regular Chaotic Dynamics* **19** 116 (2014)
26. Иванова Т Б, Мамаев И С *Прикладная математика и механика* **80** 11 (2016); Ivanova T B, Mamaev I S *J. Appl. Math. Mech.* **80** 7 (2016)

On the retrograde motion of a rolling disk

A.V. Borisov [1,2], **A.A. Kilin** [3], **Yu.L. Karavaev** [3,4]
[1] *Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation*
[2] *National Research Nuclear University "MEPhI", Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation*
[3] *Udmurt State University, ul. Universitetskaya 1, 426034 Izhevsk, Russian Federation*;
[4] *M.T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya 7, 426069 Izhevsk, Russian Federation*
E-mail: [1,2]*borisov@rcd.ru*, [3]*aka@rcd.ru*, [3,4]*karavaev_yury@istu.ru*

This paper presents theoretical and experimental research explaining the retrograde final-stage rolling of a disk under certain relations between its mass and geometric parameters. Modifying the no-slip model of a rolling disk by including viscous rolling friction provides a qualitative explanation for the disk's retrograde motion. At the same time, the simple experiments described in the paper fully compromise the drag moment as a key reason for the retrograde motion considered, thus disproving some recent hypotheses.

Keywords: retrograde turn, rolling disk, nonholonomic model, rolling friction

PACS numbers: 02.60.Cb, **05.45.–a**, **45.40.–f**
Bibliography — 26 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **187** (9) 1003–1006 (2017)
DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038049

Received 1 December 2016, revised 10 January 2017
Physics–Uspekhi **60** (9) (2017)
DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.01.038049