

# Модель модифицированной магнитной гидродинамики с учётом волновой турбулентности в приложениях к астрофизике

Е.П. Курбатов, А.Г. Жилкин, Д.В. Бисикало

*Моделирование астрофизических течений в рамках классической магнитной гидродинамики нередко наталкивается на значительные затруднения, связанные с большими значениями альвеновской скорости (вплоть до релятивистских). Такие ситуации могут возникать в задачах моделирования магнитосфер планет и звёзд, аккреционных течений в полярах, промежуточных полярах и вблизи нейтронных звёзд. В условиях сильного магнитного поля в плазме может развиваться турбулентность волнового типа. Она может оказывать существенное влияние, приводя к изменению энергетического баланса и сил, определяющих динамику плазмы. Получена замкнутая система уравнений модифицированной магнитной гидродинамики с учётом волновой турбулентности для большого диапазона величин магнитного поля и турбулентной энергии. Течение описывается как сумма усреднённого течения и возмущений, вызванных волновыми пульсациями. В качестве возмущений рассматриваются альвеновские волны со скоростями вплоть до релятивистских значений. Найдены выражения для величины объёмной силы, вязкости и диссипативного нагрева, вызванных турбулентностью. Выполнен анализ уравнений для некоторых предельных случаев. Показано, что предлагаемый подход можно использовать для моделирования широкого класса течений астрофизической плазмы.*

**Ключевые слова:** магнитная гидродинамика, турбулентность, альвеновские волны, тесные двойные звёзды

PACS numbers: 52.30.Cv, 52.35.Bj, 52.35.Ra, 52.65.Kj,  
95.30.Qd, 94.05.Lk, 97.80.Gm

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038063>

## Содержание

1. Введение (857).
  2. Основные уравнения (858).  
2.1. Постановка задачи. 2.2. Полурелятивистская магнитная гидродинамика. 2.3. Учёт турбулентных возмущений.
  3. Линеаризованные возмущения (863).  
3.1. Альвеновские волны. 3.2. Парные корреляторы. 3.3. Спектр мощности.
  4. Источники (867).  
4.1. Турбулентные давление и напряжения. 4.2. Турбулентная вязкость. 4.3. Сила Ампера. 4.4. Турбулентный нагрев.
  5. Анализ (871).  
5.1. Сводка результатов. 5.2. Оценки. 5.3. Приближение сильной турбулентности.
  6. Заключение (875).
- Приложение. Турбулентные источники, связанные с током смещения (875).  
А. Уравнение движения. Б. Уравнение энтропии.
- Список литературы (877).

## 1. Введение

Во многих астрофизических задачах взаимодействие плазмы с электромагнитным полем может быть опи-

сано в приближении классической магнитной гидродинамики (МГД) для полностью ионизованной среды (см., например, [1]). В этом приближении плазму можно представить как проводящую жидкость (или газ), движение в которой носят нерелятивистский характер. Малость характерных масштабов и времён разделения зарядов в плазме по сравнению с масштабами задачи позволяет предполагать электронеутральность каждого элементарного объёма плазмы (см., например, [2, 3]). При этом с выполнением условия квазинейтральности генерация токов в плазме происходит исключительно путём электромагнитной индукции.

Как правило, моделирование астрофизических течений можно проводить в рамках приближения идеальной магнитной гидродинамики, когда магнитное поле является замороженным в вещество. Это обусловлено большими пространственными масштабами, которые, в свою очередь, приводят к большим значениям магнитного числа Рейнольдса. Конечная проводимость плазмы при этом особой роли не играет. Несмотря на свою относительную простоту, приближение магнитной гидродинамики позволяет довольно детально описывать структуру астрофизических течений. При этом достигается неплохое согласие с результатами наблюдений (см., например, [4–9]).

Вместе с тем следует отметить, что критерии, на которых основано приближение магнитной гидродинамики, на практике выполняются далеко не всегда. Рассмотрим в качестве примера течение плазмы в полярах [10]. Это тесные двойные системы, состоящие из красного карлика (звезда-донор) и белого карлика (звезда-аккректор) с достаточно сильным магнитным полем

Е.П. Курбатов, А.Г. Жилкин, Д.В. Бисикало.  
Институт астрономии РАН,  
ул. Пятницкая 48, 119017 Москва, Российская Федерация  
E-mail: kurbatov@inasan.ru, zhilkin@inasan.ru, bisikalo@inasan.ru

Статья поступила 15 ноября 2016 г.,  
после доработки 20 января 2017 г.

(1–100 МГц). В результате процесса массообмена вещество из оболочки звезды-донора перетекает через внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$  на белый карлик. В типичном полярном с расстоянием между компонентами порядка  $2R_\odot$  величина магнитного поля вдоль аккреционной струи меняется от  $10^3$  Гс в точке Лагранжа  $L_1$  до  $10^7$  Гс вблизи поверхности белого карлика. Масса белого карлика около  $1M_\odot$ , что обуславливает скорость аккреции примерно  $1000 \text{ км с}^{-1}$ . Температуру аккрецирующей плазмы можно оценить как  $10^4 - 10^5$  К за исключением основания аккреционной колонки, где температура сравнивается с кинетической и достигает  $10^8$  К [11]. Концентрация при этом может изменяться вдоль аккреционной колонки от  $10^{11}$  до  $10^{15} \text{ см}^{-3}$  [11, 12]. При таких параметрах плазму можно считать полностью ионизованной, квазинейтральной, замороженной (эффекты омической диффузии магнитного поля много меньше эффектов индукции) и замагниченной (циклотронный радиус электронов много меньше длины свободного пробега). В силу последних двух свойств можно утверждать, что вещество плазмы распространяется преимущественно вдоль магнитных силовых линий, при этом в продольном направлении преобладают эффекты теплового давления, а в поперечном — эффекты магнитного давления.

Подставляя значения параметров в формулу для классической скорости  $a$  альвеновских волн, находим [13]

$$\frac{a}{c} \approx 3 \frac{B}{10^7 \text{ Гс}} \left( \frac{\rho}{10^{-9} \text{ г см}^{-3}} \right)^{-1/2}. \quad (1)$$

Иными словами, с одной стороны, скорости альвеновских и быстрых магнитозвуковых волн в области течения могут быть релятивистскими. С другой стороны, они существенно превышают как скорость звука, так и скорость движения самой плазмы. Приведённая оценка величины альвеновской скорости уже означает, что в таких условиях приближение классической магнитной гидродинамики становится некорректным. Заметим, что подобная ситуация отнюдь не является исключением в астрофизике. Например, в авральной зоне магнитосферы Земли скорость альвеновских волн может достигать одной трети скорости света [14]. В полярных областях Юпитера альвеновская скорость, вычисленная по классической формуле, может в десять и более раз превышать скорость света. В аккреционных потоках полярных величин альвеновской скорости может достигать нескольких скоростей света (1). В магнитосферах белых карликов (в промежуточных полях и тем более в полярных) альвеновская скорость может в десятки, сотни и даже тысячи раз превышать скорость света. В магнитосферах нейтронных звёзд эти значения могут быть ещё больше. Совершенно очевидно, что в этих случаях условия применимости классической магнитной гидродинамики уже не выполняются.

Обсуждаемая проблема имеет ещё и чисто технический аспект. В самом деле, исследование течений плазмы с такими особенностями с помощью численного моделирования в рамках приближения классической магнитной гидродинамики может натолкнуться на существенные трудности. Например, используемые для численного моделирования явные разностные схемы имеют ограничение на величину временного шага, которое возникает из условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви (см., например, [15]). В сильном магнитном поле это условие

может стать настолько жёстким, что дальнейший расчёт потеряет практический смысл из-за резкого уменьшения шага интегрирования [13, 16]. Некоторые способы решения этой проблемы были предложены, например, в работах [17–19].

В плазме, находящейся в сильном внешнем магнитном поле, за характерное динамическое время альвеновские и магнитозвуковые волны будут успевать многократно проходить по области течения в продольном и поперечном к магнитному полю направлениях, взаимодействуя друг с другом и фоновым течением. Во многих случаях взаимодействие этих волн можно рассматривать в приближении слабой (волновой) турбулентности. В результате их взаимодействия будет происходить перераспределение энергии между волнами различного масштаба, что приведёт к формированию турбулентного каскада. Справедливость этих представлений показана в классических работах по слабой турбулентности [20, 21]. В частности, это имеет место для взаимодействующих альвеновских волн [22–24] и для магнитозвуковых волн [25, 26].

Несколько лет назад нами была разработана полуфеноменологическая магнитогидродинамическая модель для описания астрофизических течений такого типа [13, 27, 28]. Эта модель основана на предположении, что динамика плазмы определяется медленным средним течением, формирующимся на фоне быстро распространяющихся МГД-волн. Для описания такого течения можно использовать процедуру усреднения по ансамблю волновых пульсаций по аналогии со стандартными подходами, используемыми для описания МГД-турбулентности. В нашей модели динамика плазмы в сильном магнитном поле характеризуется относительно медленным движением вдоль магнитных силовых линий, дрейфом под действием внешних сил (например, гравитации) в поперечном направлении, а также распространением с большими скоростями альвеновских и магнитозвуковых волн. По сути, вся информация о быстрых пульсациях при этом содержалась в выражении для турбулентной магнитной вязкости. Значения свободных параметров определялись путём сравнения получаемых численных решений с соответствующими численными решениями, полученными в рамках строгой магнитной гидродинамики в случае слабого магнитного поля [29]. Мы успешно применили этот подход для моделирования структуры течения в полярных и промежуточных полярных [27, 28, 30–34] (см. также монографию [13]).

Однако в своих предыдущих работах мы выводили уравнения этой модели на основе физических соображений. При этом не учитывался ряд важных эффектов, например, волновое давление. В данной работе мы предлагаем более строгое обоснование модели и существенно расширяем диапазон её применимости.

## 2. Основные уравнения

### 2.1. Постановка задачи

Важную роль в магнитной гидродинамике играют МГД-волны, масштаб которых много меньше масштаба однородности магнитного поля. Волны могут переносить значительную долю энергии вещества, быть источником механических напряжений и нагрева плазмы. В идеальной МГД существуют четыре типа волн: альвеновские,

быстрые и медленные магнитозвуковые, энтропийные волны [1]. Первые представляют собой поперечные (несжимаемые) возмущения в плазме и магнитном поле с фазовой скоростью относительно покоящейся среды, равной

$$\frac{\omega}{k} = a \cos \theta \equiv \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \cos \theta, \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\theta$  — угол между направлением распространения волны и однородным фоновым магнитным полем,  $a$  — альвеновская скорость. Быстрые и медленные магнитозвуковые волны — это продольные (сжимаемые) возмущения. Их фазовые скорости равны соответственно

$$\frac{\omega_{\pm}}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a^2 + c_s^2 \pm [(a^2 + c_s^2)^2 - 4a^2c_s^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

где  $c_s$  — скорость звука. Энтропийные волны распространяются со скоростью среды и связаны с переносом возмущений энтропии.

Волны конечной амплитуды могут эффективно взаимодействовать. Это приводит к обмену энергией между возмущениями различных масштабов. В результате этого может формироваться энергетический каскад, т.е. поток энергии через инерционный интервал — от масштаба возбуждения к масштабу диссипации. Внутри инерционного интервала масштабов устанавливается приближённо степенной закон распределения энергии [20–26].

Известно, что магнитозвуковые волны более подвержены затуханию, чем альвеновские. Причиной этого может быть, например, то, что альвеновские волны бегут строго вдоль фонового магнитного поля, но при этом магнитозвуковые волны могут распространяться в любом направлении. Следовательно, амплитуда магнитозвуковых возмущений быстрее убывает с увеличением расстояния от источника. Сжимаемость волн этого типа может приводить к радиационным потерям. Взаимодействие быстрых магнитозвуковых волн, в силу их сжимаемости, может также приводить к существенному перераспределению энергии в область больших частот и нагреву плазмы, как это происходит, например, в солнечной короне [26]. Кроме того, если отношение газового давления к магнитному мало ( $c_s^2/a^2 \ll 1$ ), то скорость быстрых магнитозвуковых волн становится сравнимой с альвеновской скоростью. В этом случае можно исключить из рассмотрения быстрые и медленные магнитозвуковые волны, ограничившись только альвеновскими.

Стационарная картина волновой альвеновской турбулентности устанавливается через резонансное взаимодействие альвеновских волн, которые движутся в противоположных направлениях вдоль линий магнитного поля [23, 24, 35, 36]. Величина энергии, которой обмениваются волны, зависит от их поперечных масштабов. В результате многократных взаимодействий происходит перераспределение энергии по поперечным масштабам и возникает энергетический каскад. При этом распределение энергии по продольным масштабам не изменяется. Прекрасной естественной лабораторией для изучения альвеновской турбулентности может служить солнечный ветер (см., например, обзор [37]), для которого параметры турбулентности могут быть измерены непосредственным образом.

Теория волновой альвеновской турбулентности, развитая в работе [24], даёт спектр мощности в виде

$$E(k_{\parallel}, k_{\perp}) = f(k_{\parallel}) E_{\perp}(k_{\perp}), \quad (4)$$

где  $E_{\perp}(k_{\perp}) = E(k_{\parallel} = 0, k_{\perp})$ , а множитель  $f(k_{\parallel})$  определяется условиями на границе турбулентной области. Таким образом, волновая альвеновская турбулентность оказывается существенно анизотропной.

Из простых соображений можно оценить форму спектра энергии турбулентных пульсаций [36]. Представим волновую турбулентность на поперечном масштабе  $\ell$  как совокупность взаимодействующих волновых пакетов с суммарной энергией  $v_{\ell}^2$ . Обозначим через  $\tau$  время взаимодействия пары волновых пакетов. За это время энергия волн изменяется мало, на величину  $\delta v_{\ell}^2 \sim (\tau v_{\ell}^2 / \ell)^2$ , для значительного изменения необходимо  $N_{\ell} \sim v_{\ell}^2 / \delta v_{\ell}^2$  взаимодействий, т.е. характерное время перераспределения энергии

$$N_{\ell} \tau \sim \frac{\ell^2}{\tau v_{\ell}^2}. \quad (5)$$

Обозначим через  $\epsilon$  поток энергии по энергетическому каскаду. В случае установившейся турбулентности эта величина не зависит от масштаба пульсаций и может быть определена как

$$\epsilon \sim \frac{v_{\ell}^2}{N_{\ell} \tau} \sim \tau \frac{v_{\ell}^4}{\ell^2}. \quad (6)$$

Отсюда можем получить распределение энергии пульсаций по масштабам:

$$v_{\ell}^2 \sim \left( \frac{\epsilon}{\tau} \right)^{1/2} \ell. \quad (7)$$

Выразим масштаб через волновое число,  $k_{\perp} = \ell^{-1}$ , а энергию — через энергетический спектр,  $v_{\ell}^2 \sim k_{\perp} E_{\perp}(k_{\perp})$ , тогда получим

$$E_{\perp}(k_{\perp}) \sim \left( \frac{\epsilon}{\tau} \right)^{1/2} k_{\perp}^{-2}. \quad (8)$$

Время установления турбулентности можно теперь оценить как

$$\max_{\ell} (N_{\ell} \tau) \sim \frac{L_{\perp}}{\sqrt{\epsilon \tau}}, \quad (9)$$

где  $L_{\perp}$  — наибольший поперечный масштаб турбулентности. Время  $\tau$  по порядку величины должно равняться альвеновскому времени для продольного масштаба задачи:  $\tau \sim L_{\parallel} / a$ .

Турбулентность может оказывать значительное влияние на МГД-течение, изменяя как энергетический баланс, так и силы, которые действуют в среде. Представляется возможным учесть эффекты альвеновской турбулентности, оставаясь в рамках приближения магнитной гидродинамики. Для этого мы предлагаем рассмотреть турбулентное течение как сумму "среднего" течения и возмущений. Усреднение по ансамблю возмущений приводит к возникновению в уравнениях дополнительных членов, связанных с корреляциями возмущений. Задавая

статистические свойства возмущений, можно получить замкнутую систему уравнений. Подобный подход был использован ранее во многих работах, как в гидродинамике, так и в МГД (см., например, [38, 39]). Одно из отличий данной работы состоит в том, что в качестве возмущений мы рассмотрели ансамбль альвеновских волн, статистика которых соответствует развитой волновой альвеновской турбулентности [24].

Выше мы упоминали, что в ряде приложений скорость альвеновских волн может достигать релятивистских и сверхрелятивистских значений, при этом среднее течение остаётся нерелятивистским. Оказывается, что наличие электромагнитных явлений с релятивистскими отношениями масштабов и времён приводит к появлению добавочных членов в уравнениях магнитной гидродинамики. Эти добавки связаны с током смещения, которым принято пренебрегать в моделях МГД. Как будет видно, учёт тока смещения при наличии альвеновской турбулентности приводит к возникновению добавочной силы, действующей на плазму.

## 2.2. Полурелятивистская магнитная гидродинамика

Определим все термодинамические величины в локальной системе отсчёта, которая сопутствует течению, а компоненты векторов и тензоров — в инерциальной "лабораторной" системе отсчёта. Уравнения совместной динамики релятивистской жидкости и электромагнитного поля в этой системе отсчёта имеют вид [13, 40]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma\rho) + \nabla(\Gamma\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\Gamma^2}{c^2} (e + P)\mathbf{v} + \frac{\mathbf{S}}{c^2} \right] + \nabla \left[ \frac{\Gamma^2}{c^2} (e + P)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + P\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{\Pi}} \right] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\Gamma^2 (e + P) - P - \Gamma\rho c^2 + w] + \nabla \left\{ [\Gamma^2 (e + P) - \Gamma\rho c^2]\mathbf{v} + \mathbf{S} \right\} = 0. \quad (12)$$

Здесь  $\rho$  — объёмная плотность массы,  $\mathbf{v}$  — массовая скорость,  $P$  — давление,  $e$  — объёмная плотность энергии, включая энергию покоя,

$$e = \rho c^2 + \rho\varepsilon, \quad (13)$$

$\varepsilon$  — тепловая энергия среды в расчёте на одну частицу,  $\hat{\mathbf{I}}$  — трёхмерный единичный тензор. Используются также обозначения для фактора Лоренца:

$$\Gamma = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad (14)$$

вектора плотности потока электромагнитной энергии:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (15)$$

объёмной плотности электромагнитной энергии:

$$w = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (16)$$

и тензора напряжений Максвелла:

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = w\hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{4\pi}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы напряжённости электрического и магнитного полей. Символ  $\otimes$  обозначает тензорное произведение, т.е., например, компонентами тензора  $\mathbf{E} \otimes \mathbf{B}$  являются величины  $E_i B_k$ . Положим, что скорость звука в среде много меньше скорости света, и примем уравнение состояния идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma$ ,

$$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon. \quad (18)$$

Можно показать, что вплоть до температуры порядка  $10^9$  К вклад релятивистских эффектов в эту зависимость незначителен. В общем случае уравнение состояния будет иметь более сложный вид [13].

Предположим, что скорость среды много меньше скорости света, тогда  $\Gamma \approx 1$ ,  $e \approx \rho\varepsilon$ , и уравнения (10)–(12) можно записать как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho\mathbf{v} + \frac{\mathbf{S}}{c^2} \right) + \nabla \left( \rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + P\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{\Pi}} \right) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho\varepsilon + \rho \frac{v^2}{2} + w \right) + \nabla \left[ \left( \rho\varepsilon + \rho \frac{v^2}{2} + P \right) \mathbf{v} + \mathbf{S} \right] = 0. \quad (21)$$

Систему уравнений (19)–(21) необходимо дополнить уравнениями Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (22)$$

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi q, \quad (23)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (24)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad (25)$$

где  $q$  — объёмная плотность электрического заряда в сопутствующей системе отсчёта,  $\mathbf{j}$  — плотность тока проводимости.

Если задать плотности заряда  $q$  и тока  $\mathbf{j}$ , то уравнения (19)–(21) вместе с уравнениями Максвелла (22)–(25) будут составлять замкнутую систему. Плотность тока будем определять из закона Ома с конечным коэффициентом проводимости  $\sigma$ ,

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v} + \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (26)$$

Первое слагаемое в правой части (26) представляет собой конвекционный ток. Он связан с наличием в плазме нескомпенсированного электрического заряда с плотностью  $q$ . Второе слагаемое описывает ток проводимости.

Оценим влияние различных эффектов на движение плазмы и генерацию полей. Из уравнения (24) и закона Ома (26) можно получить уравнение индукции магнитного поля,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot} \left( \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{B} + \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{c}{\sigma} q\mathbf{v} \right) = 0. \quad (27)$$

Последние два слагаемых в этом выражении отвечают за генерацию магнитного поля током смещения и конвекционным током соответственно. Ток смещения обуслов-

лен электромагнитными волнами. Появление конвекционного тока в квазинейтральной плазме связано с пространственным разделением электронов и ионов. Нескомпенсированный электрический заряд и ток смещения проявляются на коротких временах и малых масштабах переменности в плазме.

Индукция электрического поля описывается уравнением (24) и законом Ома (26):

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + q\mathbf{v} + \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) - \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0. \quad (28)$$

Дивергенция этого уравнения даёт закон индукции заряда:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0 \quad (29)$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla(q\mathbf{v}) = -\nabla \left( \sigma \mathbf{E} + \sigma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (30)$$

Непосредственно за генерацию заряда отвечает второе слагаемое в правой части этого уравнения, в то время как первое слагаемое справа обеспечивает его диссипацию. Обозначим через  $L$  и  $T$  соответственно характерный пространственный масштаб и время переменности в задаче:

$$\nabla \sim \frac{1}{L}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{T}. \quad (31)$$

Воспользовавшись уравнением (23), можно оценить плотность заряда в стационарном пределе уравнения (30) как

$$|q| \sim \frac{v}{cL} B, \quad (32)$$

а с помощью уравнения (22) можно оценить величину напряжённости электрического поля:

$$|\mathbf{E}| \sim \frac{L}{cT} B. \quad (33)$$

Слагаемые в уравнении (27) находятся друг к другу в следующих отношениях:

$$1 : \frac{vT}{L} : \frac{c^2 T}{\sigma L^2} : \frac{1}{\sigma T} : \frac{v^2 T}{\sigma L^2}. \quad (34)$$

Допустим, отношение масштабов  $L/T$  составляет величину порядка скорости плазмы  $v$ , тогда эти отношения можно переписать в виде

$$1 : 1 : \frac{1}{\sigma T} \frac{c^2}{v^2} : \frac{1}{\sigma T} : \frac{1}{\sigma T}. \quad (35)$$

Проводимость  $\sigma$  в астрофизических задачах обычно велика, так что  $\sigma T \gg 1$ . Как видно, в этом случае ток смещения и конвекционный ток оказываются одного порядка малости и много меньше остальных слагаемых — индукционного ( $\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ) и диссипативного ( $\propto \nabla^2 \mathbf{B}$ ) членов. Таким образом, уравнение индукции магнитного поля (27) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} \left( \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) = 0. \quad (36)$$

Если в системе присутствуют электромагнитные возмущения с короткими масштабами переменности, например, электромагнитные волны, для которых можно взять  $L/T \sim c$ , то члены в (27) будут относиться друг к другу как

$$1 : \frac{v}{c} : \frac{1}{\sigma T} : \frac{1}{\sigma T} : \frac{1}{\sigma T} \frac{v^2}{c^2}. \quad (37)$$

По причине того, что  $\sigma T \gg 1$ , в качестве источника магнитного поля остаётся только индукционный член:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (38)$$

Таким образом, в приближении  $\sigma T \gg 1$  вклад тока смещения и электрического заряда в уравнение индукции магнитного поля оказывается пренебрежимо малым как в случае медленного течения,  $L/T \sim v \ll c$ , так и в случае электромагнитных возмущений,  $L/T \sim c$ .

Аналогичный анализ, выполненный в отношении уравнения индукции электрического поля (28), в случае  $L/T \sim v$  приводит к оценке

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (39)$$

Если  $\sigma T \gg 1$ , то в этом выражении можно пренебречь правой частью. Соотношение, которое получается в итоге,

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}, \quad (40)$$

можно использовать как приближённое значение напряжённости электрического поля, исключив тем самым уравнение индукции (28). Заметим, что в случае возмущений с малыми масштабами переменности ( $L/T \sim c$ ) последнее соотношение совместно с уравнением Максвелла (22) эквивалентно уравнению (38).

Для дальнейшего анализа удобно преобразовать уравнение движения (20) и уравнение для энергии (21). Из уравнений Максвелла легко показать, что

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \nabla \hat{\Pi} = -q\mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (41)$$

поэтому (20) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}}{4\pi\rho} + \frac{q\mathbf{E}}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}. \quad (42)$$

Здесь мы воспользовались уравнением непрерывности (19) и выразили ток через уравнение Максвелла (24).

Закон сохранения энергии (21) заменим уравнением для энтропии. Если не рассматривать течения с разрывами и другие эффекты диссипации, например, диффузию и вязкость, то имеется только один источник энтропии — омическая проводимость. В релятивистской форме уравнение для энтропии имеет вид [41]

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Gamma \rho s) + \nabla (\Gamma \rho s \mathbf{v}) - \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma T} = 0. \quad (43)$$

Здесь  $s$  — энтропия в расчёте на единицу массы газа, которая связана с давлением и плотностью через соотношение

$$P = \frac{k_B}{m} \rho T = \left( \frac{\rho}{m} \right)^\gamma \exp \left[ (\gamma - 1) \frac{m}{k_B} s \right], \quad (44)$$

где  $T$  — температура,  $m$  — масса частицы среды,  $k_B$  — постоянная Больцмана. Для нерелятивистского течения среды имеем

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) s = \frac{c^2}{(4\pi)^2 \sigma \rho T} \left( |\text{rot } \mathbf{B}|^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \text{rot } \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 \right). \quad (45)$$

Легко показать, что влияние, которое оказывает на движение среды ток смещения, проявляется только при наличии релятивистских возмущений ( $L/T \sim c$ ):

$$|\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}| : \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right| \sim c^2 : \frac{L^2}{T^2}. \quad (46)$$

То же можно утверждать и в отношении тока смещения в уравнении для энтропии (45).

Для того чтобы оказались важны эффекты индуцированного заряда, одних только релятивистских возмущений недостаточно. Для этого необходимо, чтобы массовая скорость плазмы также была релятивистской:

$$|\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}| : |q\mathbf{E}| \sim c^2 : \frac{L}{T} v. \quad (47)$$

Этот случай выходит за рамки полурелятивистской модели, поэтому далее мы будем пренебрегать эффектами объёмной плотности заряда.

### 2.3. Учёт турбулентных возмущений

Предположим, что мы можем разделить МГД-течение на медленную и быструю части. Для медленной части характерны масштабы и времена с нерелятивистским отношением  $L/T$ , при этом можно пренебречь током смещения и объёмной плотностью электрического заряда. Быстрая часть соответствует короткопериодическим возмущениям. Если возмущения имеют достаточно малые масштабы переменности и большие значения скорости, то для учёта их влияния на медленное течение необходимо привлекать релятивистские эффекты — индукцию электрического заряда и ток смещения.

Свойства поля возмущений будем определять статистическими свойствами установившейся волновой альвеновской турбулентности. Элементами турбулентности этого типа являются альвеновские волны — несжимаемые поперечные возмущения в плазме, которые распространяются вдоль заданного фонового магнитного поля. В общем случае они включают в себя возмущения скорости, электрического, магнитного полей и заряда.

Представим все величины, входящие в уравнения, в виде суммы "медленных" и "быстрых" слагаемых, причём последние будем рассматривать как возмущения:

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B} + \delta \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} \mapsto \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}. \quad (48)$$

В разделе 2.2 мы показали, что оценка (40) для напряжённости электрического поля справедлива и в том случае, когда в плазме присутствуют быстрые волны. Поэтому возмущения электрического поля будем определять из выражения

$$\delta \mathbf{E} = -\frac{\delta \mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \delta \mathbf{B} - \frac{\delta \mathbf{v}}{c} \times \delta \mathbf{B}. \quad (49)$$

Подстановка определений (48) и (49) в уравнение непрерывности (19), уравнение индукции магнитного поля

(27), уравнение Эйлера (20) и уравнение для энтропии (45) приведёт к тому, что в этих уравнениях появятся дополнительные члены, содержащие линейные, квадратичные и кубические возмущения. Задавая совокупность возмущений как статистический ансамбль, можем усреднить уравнения по возмущениям. Приравнявая средние значения возмущений к нулю и пренебрегая вкладом третьего порядка малости, получим в итоге уравнения эволюции "медленных" величин. Они будут содержать источники, которые определяются через парные корреляторы "быстрых" величин.

Альвеновские возмущения несжимаемы, поэтому уравнение непрерывности (19) не изменится. Уравнение Эйлера после усреднения примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}}{4\pi\rho} = \\ = -\nabla \langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle + \frac{\nabla \langle \delta \mathbf{B} \otimes \delta \mathbf{B} \rangle}{4\pi\rho} - \frac{\nabla \langle |\delta \mathbf{B}|^2 \rangle}{8\pi\rho} - \\ - \frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(1)} \mathbf{E}}{\partial t} \times \delta \mathbf{B} \right\rangle - \frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(2)} \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right\rangle, \quad (50) \end{aligned}$$

где  $\delta^{(1)} \mathbf{E}$  и  $\delta^{(2)} \mathbf{E}$  — соответственно линейная и квадратичная части возмущения электрического поля (49). Уравнение индукции после усреднения записывается как

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \text{rot } \mathbf{B}) = \text{rot}(\delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}). \quad (51)$$

Здесь введено обозначение  $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$  для коэффициента омической магнитной вязкости. Уравнение для энтропии принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}s) - \frac{\eta}{T} \frac{|\text{rot } \mathbf{B}|^2}{4\pi\rho} = \frac{\eta}{T} \frac{\langle |\text{rot } \delta \mathbf{B}|^2 \rangle}{4\pi\rho} - \\ - \frac{2\eta}{T} \frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(1)} \mathbf{E}}{\partial t} \text{rot } \delta \mathbf{B} \right\rangle - \frac{2\eta}{T} \frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(2)} \mathbf{E}}{\partial t} \text{rot } \mathbf{B} \right\rangle + \\ + \frac{\eta}{T} \frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(1)} \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 \right\rangle + \frac{2\eta}{T} \frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c^2} \frac{\partial \delta^{(2)} \mathbf{E}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\rangle. \quad (52) \end{aligned}$$

Турбулентные источники в правых частях формул (50)–(52) следует выражать из решения уравнений для возмущений. В эти уравнения могут входить возмущения высших порядков. Таким образом, возникает цепочка уравнений, вообще говоря, бесконечная для корреляторов различных порядков. В работе [38] таким путём учитывались эффекты сжимаемой гидродинамической турбулентности на фоне медленного течения, причём турбулентные источники были вычислены до возмущений четвёртого порядка. В работе [39] ансамбль мелкомасштабных возмущений был введён для подсеточного моделирования сжимаемой МГД-турбулентности. Для замыкания уравнений авторы этой работы привлекали модельные выражения для тензоров механических и магнитных напряжений, вызванных турбулентностью.

В данном исследовании для вычисления турбулентных источников в выражениях (50)–(52) мы будем опираться на результаты работы [24], где был получен спектр мощности волновой альвеновской турбулентности. В этой работе альвеновская волновая турбулентность была представлена в виде ансамбля пространственных фурье-гармоник, каждая из которых соответствует отдельной альвеновской волне. Мы применим тот же под-

ход. При этом парные корреляторы, которые соответствуют турбулентным источникам, будут выражаться через спектр мощности ансамбля альвеновских возмущений. Точности этого подхода оказывается недостаточно для расчёта, например, эффектов турбулентной вязкости (см. раздел 4). В подобных случаях парные корреляторы мы будем вычислять в приближении  $\tau$ -релаксации, используя спектр из работы [24] в качестве нулевого приближения.

### 3. Линеаризованные возмущения

Для расчёта турбулентных источников в уравнениях (50)–(52) нам понадобятся выражения для амплитуд альвеновских волн, а также более общие выражения для амплитуд малых возмущений, которые распространяются в слабо неоднородном фоновом течении. Запишем линеаризованные уравнения для возмущений вида (48), пренебрегая в фоновом течении эффектами тока смещения:

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{\delta \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}}{4\pi\rho} + \frac{(\nabla \otimes \delta \mathbf{B}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \nabla) \delta \mathbf{B}}{4\pi\rho} + \frac{1}{4\pi\rho c} \frac{\partial \delta^{(1)} \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = 0, \quad (53)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \delta \mathbf{B} - (\mathbf{B} \nabla) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} - (\delta \mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v}) \delta \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \delta \mathbf{v}) + \text{rot} (\eta \text{rot } \delta \mathbf{B}) = 0. \quad (54)$$

Здесь возмущения напряжённости электрического поля включают в себя только линейные компоненты выражения (49).

#### 3.1. Альвеновские волны

В силу свойств альвеновской турбулентности нас интересуют только несжимаемые возмущения скорости и магнитного поля, векторы амплитуд которых поперечны фоновому полю. Положим, что на масштабе переменности возмущений фоновая плотность, скорость и магнитное поле меняются мало, поэтому их производными можно пренебречь. Для удобства выразим векторы напряжённости магнитного поля в единицах скорости:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \delta \mathbf{b} = \frac{\delta \mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (55)$$

Определим преобразование Фурье для возмущения  $\delta f(t, \mathbf{x})$ :

$$\delta \tilde{f}_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dt d^3x \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}) \delta f(t, \mathbf{x}), \quad (56)$$

$$\delta f(t, \mathbf{x}) = \int d\omega d^3k \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}) \delta \tilde{f}_{\omega, \mathbf{k}}. \quad (57)$$

Ниже в этом разделе будем опускать индексы у фурье-амплитуд.

В представлении гармоник линеаризованное уравнение Эйлера (53) и уравнение индукции (54) с учётом (49) и (55) принимают вид

$$(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}) \delta \tilde{\mathbf{v}} + (\mathbf{a}\mathbf{k}) \delta \tilde{\mathbf{b}} + \frac{a^2}{c^2} \omega \delta \tilde{\mathbf{v}} - \frac{(\mathbf{a}\mathbf{v})}{c^2} \omega \delta \tilde{\mathbf{b}} = 0, \quad (58)$$

$$(\mathbf{a}\mathbf{k}) \delta \tilde{\mathbf{v}} + (\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}) \delta \tilde{\mathbf{b}} = 0. \quad (59)$$

Здесь мы пренебрегли магнитной вязкостью  $\eta$ , а также учли то, что волны несжимаемы и поляризованы поперёк фонового магнитного поля:

$$\mathbf{k} \delta \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{k} \delta \tilde{\mathbf{b}} = 0, \quad (60)$$

$$\mathbf{a} \delta \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \delta \tilde{\mathbf{b}} = 0. \quad (61)$$

Определим набор взаимно ортогональных единичных векторов  $\mathbf{e}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{e}_{\perp}$  и  $\mathbf{e}_n$  следующим образом:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_{\parallel} a, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_{\parallel} k_{\parallel} + \mathbf{e}_{\perp} k_{\perp}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{\parallel} \times \mathbf{e}_{\perp}. \quad (62)$$

Из свойств альвеновских волн (60) и (61) следует, что векторы их амплитуд ортогональны одновременно векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{k}$ :

$$\delta \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_n \delta \tilde{v}, \quad \delta \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{e}_n \delta \tilde{b}. \quad (63)$$

Полагая  $\omega \sim ak$  и  $|\delta \tilde{\mathbf{v}}| \sim |\delta \tilde{\mathbf{b}}|$ , можно оценить вклад различных слагаемых в уравнение (58):

$$\frac{a}{c} : \frac{v}{c} : \frac{a}{c} : \frac{a^3}{c^3} : \frac{a^2 v}{c^2 c}. \quad (64)$$

В этих соотношениях два последних члена соответствуют вкладу от тока смещения. Рассмотрим два случая. Пусть  $v \sim a \ll c$ . Этот случай соответствует классической нерелятивистской МГД. Действительно, оба члена, связанных с током смещения, малы как  $(v/c)^2 \ll 1$ . Дисперсионное соотношение в этом случае имеет вид

$$\omega_{\pm} = \mathbf{v}\mathbf{k} \pm |\mathbf{a}\mathbf{k}|. \quad (65)$$

Подставив его в (59), получим соотношение между амплитудами возмущений скорости и магнитного поля:

$$\delta \tilde{v}_{\pm} = \mp \text{sgn}(\mathbf{a}\mathbf{k}) \delta \tilde{b}_{\pm}. \quad (66)$$

В случае, когда имеется только ограничение  $v \ll a$ , пренебрежимо малым оказывается последний член в (53), связанный с током смещения. При этом предпоследний член может быть не мал, если  $(a/c)^3 \gtrsim v/c$ . Характеристическое уравнение для этого случая выглядит следующим образом:

$$\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \omega^2 - \left(2 + \frac{a^2}{c^2}\right) (\mathbf{v}\mathbf{k}) \omega - (\mathbf{a}\mathbf{k})^2 + (\mathbf{v}\mathbf{k})^2 = 0. \quad (67)$$

Дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_{\pm} = \left(1 - \gamma_A^2 \frac{a^2}{2c^2}\right) (\mathbf{v}\mathbf{k}) \pm \gamma_A |\mathbf{a}\mathbf{k}| \left[1 + \left(\gamma_A \frac{a^2}{2c^2} \frac{\mathbf{v}\mathbf{k}}{|\mathbf{a}\mathbf{k}|}\right)^2\right]^{1/2}, \quad (68)$$

где

$$\gamma_A = \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (69)$$

Подставив дисперсионное соотношение в (59), с помощью (63) получим соотношение между амплитудами возмущений:

$$\delta \tilde{v}_{\pm} = \text{sgn}(\mathbf{a}\mathbf{k}) \left\{ \gamma_A^2 \frac{a^2}{2c^2} \frac{\mathbf{v}\mathbf{k}}{|\mathbf{a}\mathbf{k}|} \mp \gamma_A \left[1 + \left(\gamma_A \frac{a^2}{2c^2} \frac{\mathbf{v}\mathbf{k}}{|\mathbf{a}\mathbf{k}|}\right)^2\right]^{1/2} \right\} \delta \tilde{b}_{\pm}. \quad (70)$$

Можно показать, что в общем случае справедлива оценка

$$\gamma_A \frac{a^2}{c^2} \left| \frac{\mathbf{v}\mathbf{k}}{\mathbf{a}\mathbf{k}} \right| \leq \frac{av}{c^2} \left( 1 + \left| \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \right| \right). \quad (71)$$

В следующем разделе мы увидим, что отношение  $|k_{\perp}/k_{\parallel}|$  может быть довольно большим. Однако в приближении  $v \ll a \sim c$  величина (71) будет мала по сравнению с единицей. Пользуясь этим, можем упростить вид дисперсионного соотношения и соотношения между амплитудами:

$$\omega_{\pm} = \left( 1 - \gamma_A^2 \frac{a^2}{2c^2} \right) (\mathbf{v}\mathbf{k}) \pm \gamma_A |\mathbf{a}\mathbf{k}|, \quad (72)$$

$$\delta\tilde{v}_{\pm} = \mp \operatorname{sgn}(\mathbf{a}\mathbf{k}) \gamma_A \delta\tilde{b}_{\pm}. \quad (73)$$

Легко видеть, что в случае  $a \ll c$  соотношения (72) и (73) переходят соответственно в (65) и (66). В противоположном случае,  $a \gg c$ , будем иметь

$$\omega_{\pm} = \pm |ck_{\parallel}|, \quad (74)$$

$$\delta\tilde{v}_{\pm} = \mp \operatorname{sgn}(\mathbf{a}\mathbf{k}) \frac{c}{a} \delta\tilde{b}_{\pm}. \quad (75)$$

Если формальное значение альвеновской скорости (55) значительно превышает скорость света (это может происходить не только в сильном магнитном поле, но и в области низкой плотности), то возмущения скорости исчезают, а возмущения магнитного поля ведут себя как электромагнитные волны в вакууме.

Запишем окончательный вид системы уравнений для альвеновских волн в принятом нами приближении, полагая, что фоновые величины могут медленно меняться, а также учитывая возможный вклад со стороны магнитной вязкости. Следуя оценкам, приведённым выше, в выражении для тока смещения (последнее слагаемое в уравнении (53)) следует отбросить член, пропорциональный массовой скорости газа. Тогда эффект тока смещения в уравнении Эйлера будет заключаться в наличии релятивистской поправки к компоненте ускорения, ортогональной фоновому полю:

$$\frac{1}{4\pi\rho c} \frac{\partial \delta^{(1)}\mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{a^2}{c^2} (\hat{\mathbf{1}} - \mathbf{e}_{\parallel} \otimes \mathbf{e}_{\parallel}) \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t}. \quad (76)$$

В случае альвеновских волн на однородном фоне уравнение Эйлера (53) накладывает ограничения только на поперечные компоненты возмущений. Это остаётся справедливым, если потребовать, чтобы фоновые величины изменялись медленно. Таким образом, с учётом (61) и (76) система уравнений для возмущений альвеновского типа на неоднородном фоне принимает вид

$$\gamma_A^{-2} \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} + \delta\mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla) \delta\mathbf{b} = 0, \quad (77)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \delta\mathbf{b} - (\mathbf{a}\nabla) \delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v}\nabla) \mathbf{a} - (\delta\mathbf{b}\nabla) \mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v}) \delta\mathbf{b} + \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} \delta\mathbf{b}) = 0. \quad (78)$$

Этим уравнениям соответствуют соотношения для фурье-гармоник (72) и (73).

### 3.2. Парные корреляторы

Турбулентные источники в уравнениях (50)–(52) представляют собой парные корреляторы возмущений. Пред-

ставим корреляторы в виде разложений по пространственным фурье-гармоникам:

$$\delta f(\mathbf{x}) \delta g(\mathbf{x}) = \int d^3p \int d^3q \exp[i(\mathbf{p} + \mathbf{q})\mathbf{x}] \delta\tilde{f}_{\mathbf{p}} \delta\tilde{g}_{\mathbf{q}}. \quad (79)$$

Положим, что моды возмущений образуют статистический ансамбль, причём моды с различными волновыми числами не коррелируют между собой. Тогда корреляционная функция мод в фурье-пространстве будет выражаться через спектральную плотность, или спектр мощности, который будем обозначать  $\langle \delta f \delta \tilde{g} \rangle$ :

$$\langle \delta\tilde{f}_{\mathbf{p}} \delta\tilde{g}_{\mathbf{q}} \rangle = \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \langle \delta\tilde{f} \delta\tilde{g} \rangle_{\mathbf{p}}. \quad (80)$$

Коэффициент корреляции полей  $\delta f$  и  $\delta g$  в точке  $\mathbf{x}$  также может быть выражен через спектр мощности:

$$\langle \delta f(\mathbf{x}) \delta g(\mathbf{x}) \rangle = \int d^3k \langle \delta\tilde{f} \delta\tilde{g} \rangle_{\mathbf{k}}. \quad (81)$$

Если известны выражения для спектров мощности корреляционных функций, то их можно использовать непосредственно для вычисления источников, входящих в уравнения (50)–(52). Однако точности расчётов источников, выполненных таким способом, может оказаться недостаточно, если спектры мощности были получены в заведомо грубом приближении. В этом случае для расчёта источников можно использовать уравнения для малых альвеновских возмущений. Для этого запишем выражения, которым удовлетворяют парные корреляторы:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta\mathbf{v} \otimes \delta\mathbf{v}) = \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} \otimes \delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{v} \otimes \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t}. \quad (82)$$

Производную по времени здесь следует подставлять из уравнения (77). После усреднения в правой части окажутся линейные комбинации парных корреляторов компонент возмущений скорости и магнитного поля, а также перекрёстные корреляторы. Аналогичным образом можно получить уравнения для  $\langle \delta\mathbf{b} \otimes \delta\mathbf{b} \rangle$  и  $\langle \delta\mathbf{v} \otimes \delta\mathbf{b} \rangle$ . В координатном представлении, в декартовых координатах, уравнения эволюции для спектральных мощностей парных корреляторов имеют вид (опускаем индексы, кроме тех, которые обозначают декартовы компоненты векторов):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{v}_j \rangle &= -i\gamma_A^2 (\mathbf{v}\mathbf{k}) \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{v}_j \rangle - \gamma_A^2 (\nabla_l v_i) \langle \delta\tilde{v}_l \delta\tilde{v}_j \rangle + \\ &+ \gamma_A^2 \varepsilon_{ilm} (\operatorname{rot} \mathbf{a})_l \langle \delta\tilde{b}_m \delta\tilde{v}_j \rangle + i\gamma_A^2 (\mathbf{a}\mathbf{k}) \langle \delta\tilde{b}_i \delta\tilde{v}_j \rangle + (i \leftrightarrow j), \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{b}_j \rangle &= -2i\gamma_A^2 (\mathbf{v}\mathbf{k}) \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{b}_j \rangle - \gamma_A^2 (\nabla_l v_i) \langle \delta\tilde{v}_l \delta\tilde{b}_j \rangle + \\ &+ \gamma_A^2 \varepsilon_{ilm} (\operatorname{rot} \mathbf{a})_l \langle \delta\tilde{b}_m \delta\tilde{b}_j \rangle + i\gamma_A^2 (\mathbf{a}\mathbf{k}) \langle \delta\tilde{b}_i \delta\tilde{b}_j \rangle + \\ &+ i(\mathbf{a}\mathbf{k}) \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{v}_j \rangle - (\nabla_l a_j) \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{v}_l \rangle + (\nabla_l v_j) \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{b}_l \rangle - \\ &- (\nabla\mathbf{v}) \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{b}_j \rangle - \eta k^2 \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{b}_j \rangle, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta\tilde{b}_i \delta\tilde{b}_j \rangle &= -i(\mathbf{v}\mathbf{k}) \langle \delta\tilde{b}_i \delta\tilde{b}_j \rangle + i(\mathbf{a}\mathbf{k}) \langle \delta\tilde{v}_i \delta\tilde{b}_j \rangle - \\ &- (\nabla_l a_i) \langle \delta\tilde{v}_l \delta\tilde{b}_j \rangle + (\nabla_l v_i) \langle \delta\tilde{b}_l \delta\tilde{b}_j \rangle - (\nabla\mathbf{v}) \langle \delta\tilde{b}_i \delta\tilde{b}_j \rangle - \\ &- \eta k^2 \langle \delta\tilde{b}_i \delta\tilde{b}_j \rangle + (i \leftrightarrow j). \end{aligned} \quad (85)$$

Здесь  $\varepsilon_{ilm}$  — символ Леви-Чивиты,  $(\operatorname{rot} \mathbf{a})_l = \varepsilon_{lij} \nabla_i a_j$ ,  $k^2 = k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2$ . Символы " $(i \leftrightarrow j)$ " обозначают перестановку индексов  $i$  и  $j$ .



Вместо непосредственного решения системы уравнений (83)–(85) воспользуемся итерационной процедурой. Запишем эту систему в виде

$$\frac{dC_\alpha}{dt} = \sum_{\beta} U_{\alpha\beta} C_\beta, \quad (86)$$

где  $C_\alpha$  — парные корреляторы,  $U_{\alpha\beta}$  — матрица системы (83)–(85). Допустим, что правая часть этого уравнения вызывает релаксацию системы к некоторому равновесному состоянию  $C^{(0)}$  за характерное время  $\tau$ . В то же время внешние возмущения могут уводить систему из равновесного состояния. Небольшое отклонение от равновесия можно описать в рамках так называемого  $\tau$ -приближения:

$$\sum_{\beta} U_{\alpha\beta} C_\beta^{(0)} = \frac{C_\alpha - C_\alpha^{(0)}}{\tau}. \quad (87)$$

Отсюда получим

$$C_\alpha = C_\alpha^{(0)} + \tau \sum_{\beta} U_{\alpha\beta} C_\beta^{(0)}. \quad (88)$$

Повторяя подстановки вида (88) в уравнение (86), можно получить поправки высших порядков по времени релаксации  $\tau$  к равновесному решению  $C_\alpha^{(0)}$ .

Характерное время релаксации можно определить как обратное наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $U_{\alpha\beta}$ . Перепишем систему (83)–(85), пренебрегая скоростью фонового потока и градиентами фоновых величин:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \tilde{v}^2 \rangle = 2i\gamma_A^2 a k_{\parallel} \langle \delta \tilde{v} \delta \tilde{b} \rangle, \quad (89)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \tilde{v} \delta \tilde{b} \rangle = i a k_{\parallel} \langle \delta \tilde{v}^2 \rangle + i \gamma_A^2 a k_{\parallel} \langle \delta \tilde{b}^2 \rangle - \eta k^2 \langle \delta \tilde{v} \delta \tilde{b} \rangle, \quad (90)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \tilde{b}^2 \rangle = 2i a k_{\parallel} \langle \delta \tilde{v} \delta \tilde{b} \rangle - 2\eta k^2 \langle \delta \tilde{b}^2 \rangle. \quad (91)$$

Матрица этой системы имеет три собственных значения, которые определяются выражениями

$$\frac{1}{\tau_0} = -\eta k^2, \quad (92)$$

$$\frac{1}{\tau_{\pm}} = \frac{1}{\tau_0} \pm (\eta^2 k^4 - 4\gamma_A^2 a^2 k_{\parallel}^2)^{1/2} \quad (93)$$

(не будем путать знаки " $\pm$ " в этих формулах с направлением распространения альвеновских волн). При  $k = 0$  все собственные значения обращаются в нуль. Если  $k \rightarrow \infty$  или  $a k_{\parallel} \rightarrow 0$ , будем иметь

$$\frac{1}{\tau_-} = -2\eta k^2, \quad \frac{1}{\tau_+} = 0. \quad (94)$$

Легко видеть, что решения всегда релаксируют, причём быстрее всего релаксация наступает для решений из ветви  $\tau_-$ . Действительно, в случае, когда подкоренное выражение в (93) положительно, имеем

$$\frac{1}{\tau_-} \leq \frac{1}{\tau_0} \leq \frac{1}{\tau_+} < 0. \quad (95)$$

В противном случае

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\tau_-} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\tau_+} \right) = \frac{1}{\tau_0} < 0, \quad (96)$$

где  $\operatorname{Re}(z)$  означает вещественную часть комплексного числа  $z$ .

Из вида собственных значений (93) следует, что релаксация имеет два режима: *альвеновский*, с характерным временем порядка  $|\gamma_A a k_{\parallel}|^{-1}$ , и *диссипативный*, с характерным временем порядка  $(\eta k^2)^{-1}$ . Определим характерное время релаксации для  $\tau$ -приближения в виде

$$\tau = \min(\tau_A, \tau_d), \quad (97)$$

где введено обозначение альвеновского времени

$$\tau_A = \frac{1}{|\gamma_A a k_{\parallel}|} \quad (98)$$

и принято приближённое выражение для времени диссипации

$$\tau_d = \frac{1}{2\eta k^2}. \quad (99)$$

Омическая диссипация, кроме диссипативного режима релаксации, задаёт также наименьший поперечный пространственный масштаб, который могут иметь альвеновские волны:

$$\lambda_{\min} = \frac{4\eta}{\gamma_A a}. \quad (100)$$

Действительно, можно показать, что для волн, у которых поперечные волновые числа удовлетворяют условию  $k_{\perp} > \lambda_{\min}^{-1}$ , собственные значения (93) вещественны и отрицательны. Это означает, что все такие волны испытывают только затухание без осцилляций. В пределе очень большой альвеновской скорости,  $a \gg c$ , наименьший поперечный масштаб альвеновских волн стремится к величине  $4\eta/c$ .

### 3.3. Спектр мощности

Турбулентные источники в уравнениях (50)–(52) содержат квадратичные зависимости от амплитуд возмущений и выражаются через парные корреляционные функции компонент возмущений скорости, магнитного поля, а также их произведений. В разделе 3.2 было показано, как вычислять парные корреляционные функции с учётом неравновесных эффектов. В данном разделе мы сформулируем выражения для равновесных корреляторов, основываясь на теории волновой альвеновской турбулентности, изложенной в работе [24].

Каждому волновому вектору соответствует пара альвеновских волн, бегущих вдоль фонового магнитного поля в противоположных направлениях (см. раздел 3.1). Положим, что волны различных направлений и с разными волновыми векторами не коррелируют между собой, тогда с учётом (63) и (73) можно записать спектральную плотность тензоров корреляции возмущений  $\delta \mathbf{b}$  и  $\delta \mathbf{v}$  в следующем виде:

$$\langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{b} \rangle_{\pm} = \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n \langle \delta \tilde{b}^2 \rangle_{\pm}, \quad (101)$$

$$\langle \delta \tilde{v} \otimes \delta \tilde{v} \rangle_{\pm} = \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n \gamma_A^2 \langle \delta \tilde{b}^2 \rangle_{\pm}, \quad (102)$$

$$\langle \delta \tilde{v} \otimes \delta \mathbf{b} \rangle_{\pm} = \mp \operatorname{sgn}(k_{\parallel}) \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n \gamma_A \langle \delta \tilde{b}^2 \rangle_{\pm}. \quad (103)$$

Заметим, что эти тензоры имеют ненулевые компоненты только в плоскости, ортогональной вектору альвеновской скорости. Выражения (101)–(103) содержат одина-

ковую величину  $\langle \delta \tilde{b}^2 \rangle_{\pm}$ , которую назовём спектром мощности и будем обозначать

$$P_{\pm}(\mathbf{k}) = \langle \delta \tilde{b}^2 \rangle_{\pm}. \quad (104)$$

С альвеновскими волнами связан поток энергии. Вектор Пойнтинга для них можно записать в виде

$$\frac{\delta \mathbf{S}}{\rho} = \frac{c}{4\pi\rho} \delta^{(1)} \mathbf{E} \times \mathbf{V} + \frac{c}{4\pi\rho} \delta^{(1)} \mathbf{E} \times \delta \mathbf{V} + \frac{c}{4\pi\rho} \delta^{(2)} \mathbf{E} \times \mathbf{V}. \quad (105)$$

Только второе слагаемое в правой части (105) даёт ненулевой вклад в поток энергии при усреднении по ансамблю мод. Действительно, среднее значение от линейного члена равно нулю. Третье слагаемое содержит векторный квадрат вектора  $\mathbf{e}_n$  и также обращается в нуль. В представлении Фурье средний поток энергии, переносимый альвеновскими волнами с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , равен

$$\frac{\langle \delta \tilde{\mathbf{S}} \rangle_{\pm}}{\rho} = -\langle (\delta \tilde{\mathbf{v}}_{\pm} \times \mathbf{a}) \times \delta \tilde{\mathbf{b}}_{\pm} \rangle = \pm \operatorname{sgn}(k_{\parallel}) \gamma_A \mathbf{a} P_{\pm}(\mathbf{k}). \quad (106)$$

Дисперсионное соотношение для альвеновских волн (72) имеет две ветви, соответствующие противоположным направлениям фазовой скорости. При этом взаимная ориентация векторов амплитуды возмущений скорости и магнитного поля (73) зависит также и от ориентации волнового вектора относительно направления фонового поля. Возможные типы альвеновских волн приведены в табл. 1. Как видно, для заданной взаимной ориентации векторов  $\delta \tilde{\mathbf{v}}_{\pm}$  и  $\delta \tilde{\mathbf{b}}_{\pm}$  возможна только одна ориентация волнового вектора и одно направление распространения энергии.

Таблица 1. Типы альвеновских волн

	$k_{\parallel} > 0$	$k_{\parallel} < 0$
$\delta \tilde{\mathbf{v}}_+ \uparrow \uparrow \delta \tilde{\mathbf{b}}_+$	—	$\delta S_{\parallel,+} < 0$
$\delta \tilde{\mathbf{v}}_+ \uparrow \downarrow \delta \tilde{\mathbf{b}}_+$	$\delta S_{\parallel,+} > 0$	—
$\delta \tilde{\mathbf{v}}_- \uparrow \uparrow \delta \tilde{\mathbf{b}}_-$	$\delta S_{\parallel,-} < 0$	—
$\delta \tilde{\mathbf{v}}_- \uparrow \downarrow \delta \tilde{\mathbf{b}}_-$	—	$\delta S_{\parallel,-} > 0$

Нелинейные уравнения волновой альвеновской турбулентности были сформулированы и решены в работе [24] в терминах переменных Эльзассера  $\mathbf{z}^{\pm} = \delta \mathbf{v} \pm \delta \mathbf{b}$ . В таком подходе одному и тому же волновому вектору соответствует пара волн, которые различаются взаимной ориентацией векторов амплитуды возмущения скорости и магнитного поля, а следовательно, направлением потока энергии. Энергетический спектр мощности в переменных Эльзассера обозначим как<sup>1</sup>

$$P^{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{\langle (\tilde{\mathbf{z}}^{\pm})^2 \rangle}{2}. \quad (107)$$

Как показано в работе [24], в турбулентности альвеновских волн характером универсального закона обладает лишь та часть энергетического спектра, которая зависит от поперечных волновых чисел  $k_{\perp}$ , в то время как продольная часть спектра, зависящая от  $k_{\parallel}$ , опреде-

ляется внешними условиями и входит в уравнения волновой турбулентности лишь в качестве параметров. Такие свойства энергетического спектра вызваны тем, что процесс развития волновой альвеновской турбулентности на фоне сильного магнитного поля состоит в перераспределении энергии волн в направлениях, ортогональных фоновому полю. В итоге спектр энергии альвеновской турбулентности приобретает вид

$$P^{\pm}(k_{\parallel}, k_{\perp}) = f(k_{\parallel}) P_{\perp}^{\pm}(k_{\perp}), \quad (108)$$

где  $f(k_{\parallel})$  — произвольная безразмерная функция продольной компоненты волнового вектора, удовлетворяющая условию  $f(0) = 1$ , т.е.  $P_{\perp}^{\pm}(k_{\perp}) = P^{\pm}(k_{\parallel} = 0, k_{\perp})$ , где  $P_{\perp}^{\pm}$  — поперечная часть спектра мощности. Ниже, следуя обозначениям из работы [24], поперечную часть спектра мощности будем записывать следующим образом:

$$E_{\perp}^{\pm}(k_{\perp}) = 2\pi k_{\perp} P_{\perp}^{\pm}(k_{\perp}). \quad (109)$$

Согласно табл. 1, в переменных Эльзассера волны противоположных знаков переносят энергию в противоположных направлениях, при этом не делается различия между волнами разных дисперсионных ветвей (нижний знак "±" у векторов амплитуд). Совместить формализм из работы [24] с определениями, принятыми в настоящей работе, можно, если определить спектр мощности  $P_{\pm}$  как

$$P_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{f(k_{\parallel})}{2\pi k_{\perp}} \begin{cases} E_{\perp}^{\pm}(k_{\perp}), & \text{если } k_{\parallel} > 0, \\ E_{\perp}^{\mp}(k_{\perp}), & \text{если } k_{\parallel} < 0. \end{cases} \quad (110)$$

В работе [24] было показано, что в результате установления турбулентности формируется инерционный интервал, внутри которого энергетический спектр обладает степенной зависимостью от поперечного волнового числа<sup>2</sup>:

$$E_{\perp}^{\pm}(k_{\perp}) \propto k_{\perp}^{n_{\pm}}. \quad (111)$$

Спектральные индексы лежат в интервале  $-3 < n_{\pm} < -1$  и связаны между собой равенством  $n_+ + n_- = -4$ .

Из выражения (111) видно, что волны разных знаков могут формировать энергетические каскады с различными индексами. Поток энергии вдоль и против фонового поля может, вообще говоря, также различаться. Представляет интерес случай сбалансированного спектра, когда суммарный поток энергии равен нулю,  $\langle \delta \mathbf{S}_+ \rangle + \langle \delta \mathbf{S}_- \rangle = 0$ , а оба спектральных индекса равны  $n_+ = n_- = -2$ . В этом случае энергетический спектр принимает вид [24]

$$E_{\perp}(k_{\perp}) = E_{\perp}^+(k_{\perp}) = E_{\perp}^-(k_{\perp}) = \left( \frac{2\epsilon a}{\pi J(-2)} \right)^{1/2} k_{\perp}^{-2}, \quad (112)$$

где  $\epsilon$  — поток энергии через инерционный интервал<sup>3</sup>. Величина  $J$  в знаменателе этого выражения зависит от

<sup>2</sup> По сравнению с формулами (63) и (64) из работы [24] это выражение не содержит параметра малости в линеаризованных уравнениях МГД, так как подразумевается, что он будет включён в величину полной турбулентной энергии.

<sup>3</sup> Здесь и далее множитель  $\epsilon$  не совпадает с аналогичным множителем, который был введён в разделе 2.1. Эти множители отличаются на размерность длины.

<sup>1</sup> В работе [24] эта величина была обозначена  $e^{\pm}$ .

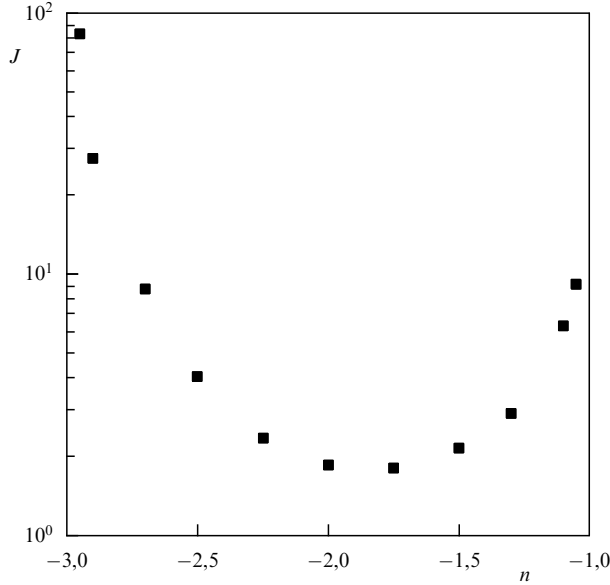


Рис. 1. Зависимость нормировочного множителя  $J(n)$  в энергетическом спектре от спектрального индекса.

спектрального индекса и может быть найдена из кинетического уравнения для волновой альвеновской турбулентности [24]:

$$J(n) = 2^{n+3} \int_1^\infty dx \int_{-1}^1 dy \frac{\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)} (xy+1)^2}{(x-y)^{n+6} (x+y)^{2-n}} \times [(x+y)^{1-n} - 2^{1-n}] \ln \left( \frac{x+y}{2} \right). \quad (113)$$

Этот интеграл сходится для  $-3 < n < -1$ . График зависимости  $J(n)$  приведён на рис. 1. В случае сбалансированного спектра имеем  $J(-2) = 1,86$  и

$$E_\perp(k_\perp) \approx 0,59 \sqrt{\epsilon a} k_\perp^{-2}. \quad (114)$$

Продольная часть спектра зависит от внешних условий. Нужно помнить, однако, что приближение волновой турбулентности, в рамках которого было получено решение (111), подразумевает, что  $k_\perp \gg k_\parallel$ . Кроме того, на продольную часть энергетического спектра налагается условие  $f(k_\parallel = 0) = 1$ . Вводя характерный продольный масштаб для магнитной конфигурации,  $L_\parallel$ , можно ограничиться приближённым выражением

$$f(k_\parallel) = h(1 - |k_\parallel L_\parallel|), \quad (115)$$

где  $h(x)$  — функция Хевисайда, равная 0 для  $x < 0$  и 1 в противном случае.

Воспользовавшись определениями (101), (102), (110) и (112), можем найти магнитную энергию волновой турбулентности в расчёте на единицу массы,

$$\frac{\langle |\delta \mathbf{b}|^2 \rangle}{2} = \frac{W}{2}, \quad (116)$$

и кинетическую энергию,

$$\frac{\langle |\delta \mathbf{v}|^2 \rangle}{2} = \gamma_A^2 \frac{W}{2}. \quad (117)$$

Величина  $W$  определена таким образом, чтобы она была равна полной энергии турбулентности (магнитной и

кинетической) в пределе слабого поля  $a \ll c$ :

$$W = W_+ + W_-, \quad (118)$$

где  $W_\pm$  — полная энергия волн, бегущих вдоль фонового поля и против поля соответственно:

$$W_\pm = \int d^3k P_\pm(\mathbf{k}) = \frac{2}{L_\parallel} \int_{L_\perp^{-1}}^\infty dk_\perp E_\perp(k_\perp) \approx 1,17 \sqrt{\epsilon a} \frac{L_\perp}{L_\parallel}. \quad (119)$$

Таким образом,

$$W \approx 2,34 \sqrt{\epsilon a} \frac{L_\perp}{L_\parallel}. \quad (120)$$

Вектор плотности потока энергии в расчёте на единицу массы определяется разностью энергий в дисперсионных ветвях:

$$\frac{\langle \delta \mathbf{S} \rangle}{\rho} = \frac{\langle \delta \mathbf{S} \rangle_+ + \langle \delta \mathbf{S} \rangle_-}{\rho}, \quad (121)$$

где, согласно (106), (112) и (119),

$$\frac{\langle \delta \mathbf{S} \rangle_\pm}{\rho} = \pm \gamma_A \mathbf{a} W_\pm. \quad (122)$$

Таким образом, в случае сбалансированного спектра поток энергии вдоль фонового магнитного поля равен нулю.

Как мы упоминали в разделе 3.1, в пределе большой альвеновской скорости амплитуда возмущений скорости стремится к нулю как  $c/a$ , следовательно, кинетическая энергия убывает как  $c^2/a^2$ . Заметим, что выражение (117) не имеет релятивистски ковариантного вида и применимо, строго говоря, только если выполняется условие

$$\frac{\gamma_A^2 W}{c^2} \ll 1. \quad (123)$$

Непосредственной подстановкой выражения для  $W$  легко показать, что левая часть этого неравенства достигает максимума при  $a = c/\sqrt{3}$ , поэтому если неравенство выполняется при таком значении альвеновской скорости, то оно выполняется для любых значений альвеновской скорости при фиксированных остальных параметрах.

#### 4. Источники

Общее выражение для парной корреляционной функции складывается из невозмущённой части и поправки, которая возникает в  $\tau$ -приближении (см. раздел 3.2):

$$\langle \delta f \delta g \rangle = \langle \delta f \delta g \rangle^{(0)} + \langle \delta f \delta g \rangle^{(1)}, \quad (124)$$

где

$$\langle \delta f \delta g \rangle^{(0)} = \sum_\pm \int d^3k \langle \delta \tilde{f} \delta \tilde{g} \rangle_\pm, \quad (125)$$

$$\langle \delta f \delta g \rangle^{(1)} = \sum_\pm \int d^3k \tau(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \tilde{f} \delta \tilde{g} \rangle_\pm. \quad (126)$$

Невозмущённая часть (124) определяется только спектром мощности (110). В то же время  $\tau$ -поправка опреде-

ляется правой частью уравнений (83)–(85) для соответствующей спектральной плотности и может зависеть от фонового магнитного поля и его градиентов. В дальнейшем ограничимся учётом только тех слагаемых в правых частях (83)–(85), которые дают изотропный вклад в интеграл (126) по поперечным волновым числам. Кроме того, будем пренебрегать  $\tau$ -поправкой, если невозмущённая часть отлична от нуля.

В нашем случае имеются два принципиально различных режима релаксации: диффузионный и альвеновский. В первом случае время релаксации является характерным временем диффузии  $\tau_d = [2\eta(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2)]^{-1}$ . Во втором случае время релаксации представляет собой альвеновское время  $\tau_A = |\gamma_A a k_{\parallel}|^{-1}$  и зависит от величины фонового магнитного поля. В зависимости от параметров задачи внутри области интегрирования в выражении (126) может преобладать диффузионный или альвеновский режим релаксации.

Рассмотрим иерархию масштабов задачи:

$$k_{\parallel} < L_{\parallel}^{-1} \ll L_{\perp}^{-1} < k_{\perp} < \lambda^{-1} \lesssim \lambda_{\min}^{-1}, \quad (127)$$

где  $\lambda$  — масштаб диссипации турбулентности (строго он будет определён в разделе 4.2),  $\lambda_{\min}$  — наименьшая возможная длина альвеновской волны (100). Введём обозначения безразмерных величин в качестве отношений некоторых характерных масштабов:

$$\alpha = \left(\frac{\lambda_{\min}}{2L_{\parallel}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\eta}{\gamma_A a L_{\parallel}}\right)^{1/2}, \quad (128)$$

$$\beta = \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}}. \quad (129)$$

Можно показать, что имеют место следующие соотношения:

$$\alpha^2 \lesssim \frac{\lambda}{L_{\parallel}} < \frac{1}{L_{\parallel} k_{\perp}} < \beta \ll 1 < \frac{1}{L_{\parallel} k_{\parallel}}. \quad (130)$$

На рисунке 2 показано расположение областей, соответствующих различным режимам релаксации, на плоскости волновых чисел. Прямоугольниками обозначены примеры возможных границ областей интегрирования. Как видно, уменьшение величины фонового поля (увеличение  $\alpha$ ) может привести к тому, что релаксация будет полностью определяться только диффузионным режимом. Действительно, условие того, что реализуется альвеновский режим релаксации, можно записать в виде

$$2\eta(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) < \gamma_A a k_{\parallel} \quad (131)$$

или

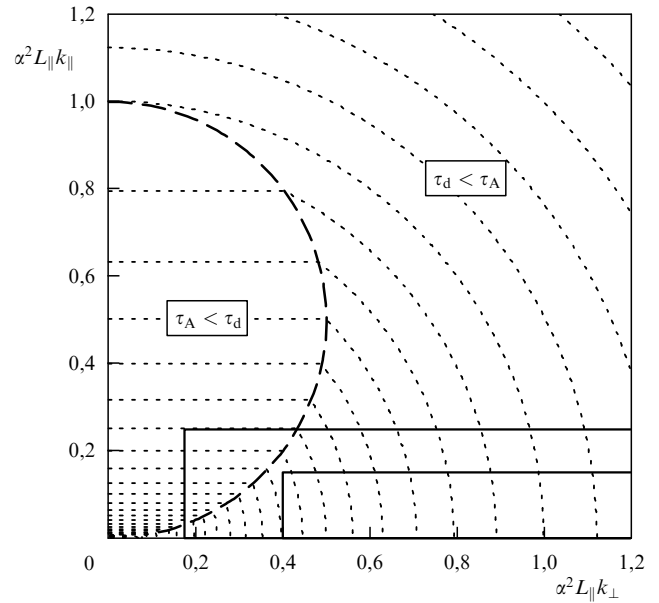
$$(\alpha^2 L_{\parallel} k_{\parallel})^2 + (\alpha^2 L_{\parallel} k_{\perp})^2 < \alpha^2 L_{\parallel} k_{\parallel}. \quad (132)$$

Для того чтобы область волновых чисел, где  $\tau_A < \tau_d$ , вошла в область интегрирования, достаточно, чтобы неравенство (132) выполнялось при  $k_{\parallel} = L_{\parallel}^{-1}$  и  $k_{\perp} = L_{\perp}^{-1}$ :

$$\alpha^2 < \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1}. \quad (133)$$

Пользуясь соотношениями (130), это же условие получаем приближённо в виде

$$\alpha < \beta. \quad (134)$$



**Рис. 2.** Режимы релаксации альвеновской турбулентности на плоскости волновых чисел. Тонкими пунктирными линиями показаны изолинии времени релаксации, причём окрестность начала координат соответствует большим временам. Штриховая линия разделяет области с разными режимами релаксации. Прямоугольниками обозначены границы областей интегрирования для случаев  $\alpha < \beta$  (большой прямоугольник) и  $\alpha > \beta$  (меньший).

Если  $\alpha > \beta$ , то реализуется только диффузионный режим релаксации. Это условие можно переписать в виде  $2\eta L_{\parallel} > \gamma_A a L_{\perp}^2$ , поэтому диффузионный режим имеет место при малой альвеновской скорости и/или малом поперечном масштабе турбулентности.

#### 4.1. Турбулентные давление и напряжения

Согласно определению (101) компоненты тензора магнитного натяжения не равны нулю только в поперечных направлениях по отношению к фоновому магнитному полю. Проекция этого тензора на плоскость, ортогональную  $\mathbf{e}_{\parallel}$ , очевидно, не зависит от направления в этой плоскости. Кроме того, тензор натяжения и давление (в расчёте на единицу массы) связаны очевидным соотношением

$$\langle |\delta \mathbf{b}|^2 \rangle = \text{tr} \langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{b} \rangle. \quad (135)$$

Отсюда и с помощью (116) получаем

$$\langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{b} \rangle = \hat{\mathbf{T}} \frac{W}{2}, \quad (136)$$

где  $\hat{\mathbf{T}}$  — оператор проекции на плоскость, ортогональную направлению фонового поля  $\mathbf{e}_{\parallel}$ :

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_{\parallel} \otimes \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (137)$$

Видно, что тензор магнитных напряжений содержит только продольную компоненту:

$$\rho \left( \hat{\mathbf{I}} \frac{\langle |\delta \mathbf{b}|^2 \rangle}{2} - \langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{b} \rangle \right) = \mathbf{e}_{\parallel} \otimes \mathbf{e}_{\parallel} \frac{\rho W}{2}. \quad (138)$$

Аналогичным способом, с учётом (102), можем вычислить тензор напряжений, связанный с возмущениями

скорости:

$$\rho \langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle = \hat{\mathbf{T}} \frac{\rho \gamma_A^2 W}{2}. \quad (139)$$

Таким образом, полный тензор турбулентных напряжений содержит как продольную, так и поперечные компоненты:

$$\rho \left( \hat{\mathbf{T}} \frac{\langle |\delta \mathbf{b}|^2 \rangle}{2} - \langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{b} \rangle + \langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle \right) = \left( \hat{\mathbf{T}} - \frac{\gamma_A^2 a^2}{c^2} \hat{\mathbf{T}} \right) \frac{\rho W}{2}. \quad (140)$$

В слабом поле ( $a \ll c$ ) тензор принимает изотропный вид, а в сильном поле ( $a \gg c$ ) в тензоре остаётся только продольная компонента.

#### 4.2. Турбулентная вязкость

Турбулентный источник в уравнении индукции равен нулю в нулевом порядке  $\tau$ -приближения. Действительно, можем записать

$$\langle \delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{b} \rangle^{(0)} = \gamma_A \sum_{\pm} (\mp 1) \int d^3 k \operatorname{sgn}(k_{\parallel}) \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_n P_{\pm}. \quad (141)$$

Очевидно, что эта величина обращается в нуль. В первом порядке  $\tau$ -приближения потенциально ненулевой вклад в коррелятор даёт лишь одно слагаемое в правой части уравнения (84):

$$\langle \delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{b} \rangle^{(1)} = \gamma_A^2 \sum_{\pm} \int d^3 k \mathbf{e}_n \times (\mathbf{e}_n \times \operatorname{rot} \mathbf{a}) \tau P_{\pm}. \quad (142)$$

Легко преобразовать этот интеграл к виду

$$\langle \delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{b} \rangle^{(1)} = -\eta_w \hat{\mathbf{T}} \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad (143)$$

где

$$\eta_w = \gamma_A^2 \sum_{\pm} \int d^3 k \tau P_{\pm}. \quad (144)$$

Величину  $\eta_w$  нужно интерпретировать как коэффициент магнитной вязкости, вызванный волновой турбулентностью. Как видно, эффекты турбулентной вязкости проявляются только в направлениях, поперечных к фоновому магнитному полю.

В зависимости от соотношения масштабов и величины альвеновской скорости турбулентная магнитная вязкость может определяться либо диффузионным, либо альвеновским режимом релаксации. Расчёт интеграла (144) в общем случае даёт следующее выражение:

$$\begin{aligned} \eta_w &= 2\gamma_A^2 \int_{-L_{\parallel}^{-1}}^{L_{\parallel}^{-1}} dk_{\parallel} \int_{L_{\perp}^{-1}}^{\infty} dk_{\perp} \tau E_{\perp} = \\ &= \frac{\gamma_A^2}{2\eta} W L_{\parallel}^2 \hat{\alpha}^2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{\hat{\alpha}^2} \left( \ln \frac{\beta^2}{\hat{\alpha}^2} + \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\beta} - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\hat{\alpha}} \right) \right], \end{aligned} \quad (145)$$

где  $\hat{\alpha} = \min(\alpha, \beta)$  (см. обозначения (128), (129)). Если реализуется диффузионный режим релаксации,  $\alpha > \beta$ , то подстановкой  $\hat{\alpha} = \beta$  получаем

$$\eta_w = \gamma_A^2 \frac{L_{\perp}^2}{6\eta} W. \quad (146)$$

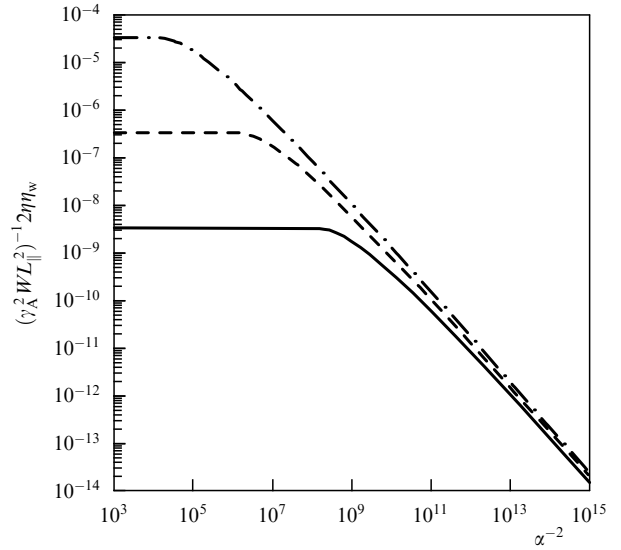


Рис. 3. Коэффициент магнитной турбулентной вязкости как функция фоновой магнитной поля ( $\alpha^{-2} \propto a$ ) для различных отношений масштабов  $\beta$ :  $\beta = 10^{-4}$  (сплошная линия),  $\beta = 10^{-3}$  (штриховая линия),  $\beta = 10^{-2}$  (штрихпунктирная линия).

Для сильно выраженного альвеновского режима,  $\alpha \ll \beta$ , имеем

$$\eta_w = \frac{\gamma_A W L_{\parallel}}{a} \ln \left( \frac{\gamma_A a L_{\perp}^2}{2\eta L_{\parallel}} \right). \quad (147)$$

Вид коэффициента турбулентной вязкости можно получить и из физических соображений, поскольку он определяется энергией турбулентности и временем релаксации:  $\eta_w \sim W\tau$ . В диффузионном режиме время релаксации не зависит от величины фоновой поля, и с ростом энергии турбулентности (которая зависит от поля как  $W \propto B^{1/2}$ ) растёт и коэффициент вязкости. В альвеновском режиме время релаксации уменьшается с ростом фоновой поля. В результате этого ослабляются неравновесные эффекты (см. выражение (88)), как следствие, — уменьшается коэффициент вязкости.

Графики коэффициента магнитной турбулентной вязкости (в безразмерных переменных) как функции  $\alpha^{-2} \propto a$  изображены на рис. 3. На графиках видно, что в слабых полях (при больших  $\alpha$ ) безразмерный коэффициент вязкости не зависит от величины поля, что соответствует диффузионному режиму релаксации. Зависимость коэффициента вязкости от масштаба накачки для полей разной величины показана на рис. 4. На малых масштабах накачки ( $\beta \rightarrow 0$ ) всегда реализуется диффузионный режим релаксации с квадратичной зависимостью от масштаба. На больших масштабах накачки имеет место логарифмический рост коэффициента вязкости.

Наименьшим масштабом турбулентности или нижней границей инерционного интервала является масштаб диссипации. Его можно определить как такой масштаб  $\lambda$ , на котором турбулентная вязкость равна микроскопической. Воспользуемся выражением (146) для турбулентной вязкости в диффузионном режиме релаксации, который справедлив в пределе малых масштабов:

$$\eta_w = \frac{2,34}{6} \frac{\gamma_A^2 (ca)^{1/2}}{\eta} \frac{L_{\perp}^3}{L_{\parallel}}. \quad (148)$$

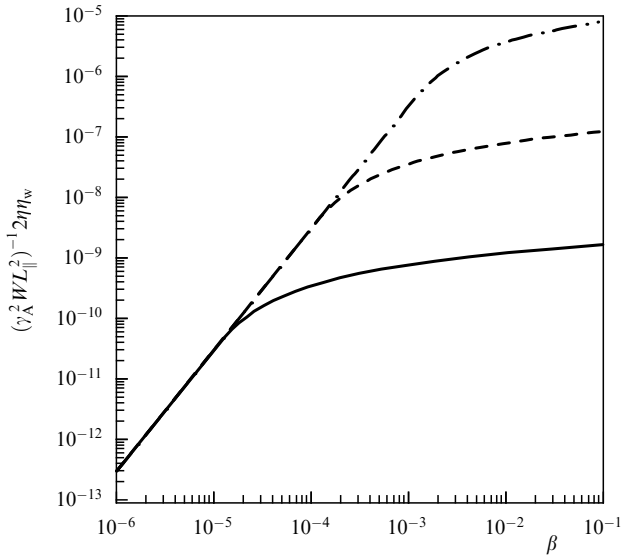


Рис. 4. Коэффициент магнитной турбулентной вязкости как функция масштаба накачки  $\beta$  для различных значений  $\alpha$ :  $\alpha = 10^{-5}$  (сплошная линия),  $\alpha = 10^{-4}$  (штриховая линия),  $\alpha = 10^{-3}$  (штрихпунктирная линия).

Здесь мы выразили турбулентную энергию через поток  $\epsilon$  согласно определению (120). На масштабе диссипации имеем

$$\eta = \frac{2,34}{6} \frac{\gamma_A^2 (\epsilon a)^{1/2} \lambda^3}{\eta L_{\parallel}}. \quad (149)$$

Выразив обратно поток энергии через полную энергию турбулентности, получим выражение для масштаба диссипации в виде

$$\lambda = \left( \frac{6\eta^2 L_{\perp}}{\gamma_A^2 W} \right)^{1/3}. \quad (150)$$

### 4.3. Сила Ампера

Последние два слагаемых в уравнении Эйлера (50) связаны с наличием тока смещения. Расчёт силы на единицу массы даёт выражение вида (см. приложение А)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_D &= -\frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(1)} \mathbf{E}}{\partial t} \times \delta \mathbf{B} \right\rangle - \frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(2)} \mathbf{E}}{\partial t} \right\rangle \times \mathbf{B} = \\ &= \left\{ \left( \frac{\hat{\mathbf{T}}}{2} - \hat{\mathbf{I}} \right) \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \left( \nabla \mathbf{v} + \frac{\eta}{3L_{\parallel}^2} + \frac{\eta}{L_{\perp} \lambda} \right) \mathbf{v} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \gamma_A^2 \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a} \right\} \frac{W}{c^2} + \left[ \left( \hat{\mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) \times \text{rot } \mathbf{a} \right] \frac{\eta_w}{2c^2}. \quad (151) \end{aligned}$$

Оценим скорость плазмы как  $v \sim L_{\perp}/T$ , оператор градиента как  $\nabla \sim 1/L_{\perp}$  и турбулентную магнитную вязкость как  $\eta_w \sim \gamma_A^2 W \tau$ . Слагаемые выражения (151) относятся друг к другу как

$$1 : 1 : \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}} \frac{\eta}{L_{\parallel} v} : \left( \frac{\eta}{L_{\perp} v} \frac{W}{v^2} \right)^{1/3} : \frac{\gamma_A^2 a^2 W}{v^2 c^2} : \frac{\gamma_A^2 a^2 \tau W}{v L_{\perp} c^2}. \quad (152)$$

Очевидно, что в случае большой альвеновской скорости доминируют два последних слагаемых. Если при этом имеет место альвеновский режим релаксации, т.е.  $\tau = \tau_A \sim L_{\parallel}/(\gamma_A a)$ , то два последних слагаемых относятся

друг к другу как

$$\frac{\gamma_A a}{v} : \frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}}. \quad (153)$$

Легко видеть, что если  $v \ll c$ , то последнее слагаемое мало и выражение для силы принимает вид

$$\mathbf{f}_D = \frac{\gamma_A^2 W}{2c^2} \frac{\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}}{4\pi\rho}. \quad (154)$$

Если реализуется диффузионный режим релаксации,  $\tau = \tau_d \sim L_{\perp}^2/\eta$ , то два последних слагаемых относятся друг к другу как

$$\eta : L_{\perp} v. \quad (155)$$

В то же время в диффузионном режиме справедливо неравенство  $L_{\parallel}/L_{\perp} > \gamma_A a L_{\perp}/\eta$  (см. (130)). Поскольку  $\gamma_A a/v \gg L_{\parallel}/L_{\perp}$ , и в диффузионном режиме для силы  $\mathbf{f}_D$  будет справедливо выражение (154).

### 4.4. Турбулентный нагрев

Источник турбулентного нагрева не равен нулю уже в нулевом порядке разложения по времени релаксации:

$$\langle (\text{rot } \delta \mathbf{b})^2 \rangle^{(0)} = \sum_{\pm} \int d^3 k k_{\perp}^2 P_{\pm}. \quad (156)$$

Поскольку поперечная часть спектра мощности пропорциональна  $k_{\perp}^{-2}$ , этот интеграл расходится в пределе  $k_{\perp} \rightarrow \infty$ . Для того чтобы избежать расходимости, необходимо строго учитывать конечный верхний предел интегрирования по поперечным волновым числам, который равен обратному масштабу диссипации  $\lambda^{-1}$ . В итоге получим (пренебрегая  $L_{\perp}^{-1}$  по сравнению с  $\lambda^{-1}$ )

$$\langle (\text{rot } \delta \mathbf{b})^2 \rangle = \frac{W}{L_{\perp} \lambda} = 0,55 \frac{\gamma_A^{1/3} W^{4/3}}{\eta^{2/3} L_{\perp}^{4/3}}. \quad (157)$$

В последнем равенстве мы воспользовались выражением для масштаба диссипации (150).

В уравнении для энтропии (52) член, соответствующий турбулентному нагреву, имеет вид

$$\left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)_w = \frac{q_w}{T}, \quad (158)$$

где величина  $q_w$  определяет скорость изменения удельной внутренней энергии газа с показателем адиабаты  $\gamma$ . При постоянной плотности она оказывается равной

$$q_w = \eta \langle (\text{rot } \delta \mathbf{b})^2 \rangle = 0,55 \frac{\eta^{1/3} W^{4/3}}{L_{\perp}^{4/3}}. \quad (159)$$

Уравнение (52) содержит также источники нагрева, обусловленные диссипацией тока смещения (см. приложение Б):

$$\begin{aligned} \frac{q_D}{\eta} &= \frac{(\gamma_A \mathbf{a} \times \mathbf{v})^2}{2c^4} \frac{W}{L_{\perp} \lambda} + \\ &+ \left\{ 2 + \left[ \frac{\gamma_A^2 a^2}{c^2} + \left( 1 - \frac{\gamma_A^2 a^2}{2c^2} \right) \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} \right] \right\} \frac{\gamma_A^2 a^2}{c^2} \frac{W}{3L_{\parallel}^2} + \\ &+ \left[ (\hat{\mathbf{T}} \text{rot } \mathbf{a}) \times \text{rot } \mathbf{a} \right] \frac{\gamma_A^2 W}{c^2} - \left[ \hat{\mathbf{T}} (\gamma_A \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a}) \right]^2 \frac{\gamma_A^2 W}{2c^4}. \quad (160) \end{aligned}$$

Слагаемые в правой части этого выражения относятся друг к другу как

$$\frac{v^2}{c^2} \frac{L_{\parallel}^2}{L_{\perp} \lambda} : 1 : \frac{\gamma_A^2 a^2}{c^2} : \frac{v^2}{c^2} : \frac{\gamma_A^2 a^2}{c^2} \frac{v^2}{c^2} : \frac{L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2} : \frac{\gamma_A^2 a^2}{c^2} \frac{L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2}. \quad (161)$$

В выражении (160) доминируют первое и предпоследнее слагаемые. Они находятся друг к другу в отношении

$$\frac{v^2}{c^2} : \frac{\lambda}{L_{\perp}}. \quad (162)$$

Масштаб диссипации  $\lambda$  определяется согласно (150). Пользуясь выражениями (157) и (159), можем записать

$$\frac{q_D}{\eta} = \left[ \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{v})^2}{2c^4} + \frac{(\hat{\mathbf{T}} \text{rot } \mathbf{a}) \times \text{rot } \mathbf{a}}{c^2} L_{\perp} \lambda \right] \gamma_A^2 \frac{q_w}{\eta}. \quad (163)$$

Поскольку  $v \ll c$  и  $\lambda \ll L_{\perp}$ , а также  $\gamma_A a/c < 1$ , очевидно, что  $q_D \ll q_w$ . Таким образом, ток смещения не оказывает влияния на турбулентный нагрев плазмы.

## 5. Анализ

### 5.1. Сводка результатов

В разделе 4 были рассчитаны источники турбулентного давления, вязкости и нагрева. Они были выражены через парные корреляторы альвеновских возмущений скорости и магнитного поля. Значения парных корреляторов были вычислены в первом исчезающем порядке  $\tau$ -приближения. Спектр мощности волновой альвеновской турбулентности был взят из работы [24]. Для простоты мы учитывали только изотропный (по поперечным волновым числам) вклад парных корреляторов в источники.

Выпишем в окончательном виде полную систему уравнений МГД с турбулентными источниками:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (164)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left[ P + \left( \hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma_A^2 a^2}{c^2} \hat{\mathbf{T}} \right) \frac{\rho W}{2} \right] - \left( 1 + \frac{\gamma_A^2 W}{2c^2} \right) \frac{\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}}{4\pi\rho}, \quad (165)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\eta + \eta_w \hat{\mathbf{T}}) \text{rot } \mathbf{B}] = 0, \quad (166)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) s = \frac{\eta}{T} \frac{(\text{rot } \mathbf{B})^2}{4\pi\rho} + \frac{q_w}{T}. \quad (167)$$

В уравнение Эйлера (165) волновая турбулентность входит посредством анизотропного тензора напряжений, а также в виде релятивистской поправки к силе Ампера. Анизотропный характер определяется тензором проекции

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_{\parallel} \otimes \mathbf{e}_{\parallel}, \quad (168)$$

где  $\mathbf{e}_{\parallel}$  — единичный вектор в направлении локального поля  $\mathbf{B}$ .

Энергия турбулентности в расчёте на единицу массы  $W$  складывается из энергии ансамбля альвеновских волн,

которому соответствует спектр мощности (112):

$$W = 2,34 \sqrt{\epsilon a} \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}}, \quad (169)$$

где  $\epsilon$  — поток энергии через инерционный интервал,  $a = B/\sqrt{4\pi\rho}$  — альвеновская скорость,  $L_{\parallel}$  и  $L_{\perp}$  — соответственно продольный и поперечный масштабы турбулентности.

В уравнении магнитной индукции волновая турбулентность появляется в виде поперечного тензора турбулентной магнитной вязкости. Коэффициент турбулентной вязкости равен

$$\eta_w = \frac{\gamma_A^2}{2\eta} W L_{\parallel}^2 \hat{\alpha}^2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{\hat{\alpha}^2} \left( \ln \frac{\beta^2}{\hat{\alpha}^2} + \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\beta} - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\hat{\alpha}} \right) \right], \quad (170)$$

где  $\hat{\alpha} = \min(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha = [2\eta/(\gamma_A a L_{\parallel})]^{1/2}$ ,  $\beta = L_{\perp}/L_{\parallel}$ .

В уравнении для энтропии с турбулентностью связан единственный член:

$$q_w = \eta \frac{W}{L_{\perp} \lambda}, \quad (171)$$

где масштаб диссипации  $\lambda$  равен

$$\lambda = \left( \frac{6\eta^2 L_{\perp}}{\gamma_A^2 W} \right)^{1/3}. \quad (172)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений МГД (164)–(167), необходимо определить продольный  $L_{\parallel}$  и поперечный  $L_{\perp}$  масштабы, а также энергию турбулентности  $W$  или поток энергии  $\epsilon$ . Последние две величины определяют интенсивность турбулентных пульсаций скорости и магнитного поля. В модели (164)–(167) существенно то, что величина фонового магнитного поля и интенсивность турбулентности являются независимыми величинами. В зависимости от соотношения между ними с помощью предлагаемой модели можно описывать существенно различные физические ситуации.

Рассмотрим для начала предел слабого фонового поля, точнее, приближение, в котором альвеновская скорость мала,  $a \ll c$ . В этом приближении из уравнения движения (165) исчезает анизотропная часть турбулентного давления. Если при этом энергия турбулентности также стремится к нулю, то очевидно, что модель переходит к случаю обычной МГД. В противном случае турбулентность может проявляться на динамическом масштабе времени (давление и сила Ампера) или диссипативном масштабе времени (вязкость и нагрев) в зависимости от величины турбулентной энергии. Отметим, что коэффициент турбулентной вязкости в этом приближении определяется временем омической диффузии (см. раздел 4.2) и имеет вид (146).

В обратном пределе, когда энергия турбулентности мала, но не равна нулю, а альвеновская скорость сравнима со скоростью света, становится существенной анизотропная часть турбулентного давления и релятивистская поправка к силе Ампера. Коэффициент диффузии  $\eta_w$  теперь определяется альвеновским временем и уменьшается с ростом величины альвеновской скорости (147). Поскольку источник нагрева  $q_w$  в уравнении для энтропии (167) зависит от турбулентной энергии в степени  $4/3$ , его вклад в тепловой баланс может быть мал.

В пределе экстремально больших значений альвеновской скорости,  $a \gg c$ , предлагаемая модель, вообще го-

вора, неприменима, в силу того что нами были использованы приближённые соотношения для релятивистских альвеновских волн (72) и (73). Однако и в этом случае модель (164)–(167) не приводит к появлению нефизических следствий. Действительно, при больших значениях альвеновской скорости множитель  $\gamma_A$  стремится к нулю. Как следствие, из системы уравнений исчезают все турбулентные члены, кроме изотропной части турбулентного давления. В пределе  $a \gg c$  альвеновские волны вырождаются в колебания магнитного поля (см. раздел 3.1), поэтому вклад со стороны турбулентного давления следует рассматривать как давление излучения.

## 5.2. Оценки

В качестве примера возможных астрофизических приложений в разделе 2.1 упоминались задачи об аккреции газа в системах полярных и промежуточных полярных. Ниже мы рассмотрим два примера таких систем: AM Herculis и EX Hudae, и оценим влияние турбулентных источников на процесс аккреции.

Для системы с полярным типа AM Herculis примем массы аккретора и донора равными соответственно  $M_1 = 0,5 M_\odot$  и  $M_2 = 0,25 M_\odot$ , радиус аккретора  $R_1 = 1,3 \times 10^{-2} R_\odot$ , орбитальный период  $P_{\text{orb}} = 3,1$  ч, темп аккреции на белый карлик  $\dot{M} = 10^{-8} M_\odot \text{ год}^{-1}$ . Температуру газа  $T$  положим равной  $10^4$  К. Допустим, что белый карлик этой системы обладает дипольным магнитным полем с индукцией  $B_1 \sim 10^7$  Гс на поверхности. Численное моделирование подобных систем показало [27, 28], что поле такой величины практически полностью контролирует течение вещества внутри полости Роша белого карлика. Аккреционное течение имеет форму колонковой аккреционной струи, которая начинается в точке Лагранжа  $L_1$ , доходит до границы магнитосферы и далее перетекает в полярную область белого карлика вдоль магнитных силовых линий.

Радиус магнитосферы  $R_m$  оценим как альвеновский радиус из соотношения

$$\frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} = v_{\text{ff}}, \quad (173)$$

где  $v_{\text{ff}} = (2GM_1/R_m)^{1/2}$  — скорость свободного падения. Воспользовавшись законом сохранения массы в виде  $\dot{M} = \rho v_{\text{ff}} 4\pi R_m^2$ , получим

$$R_m = \left( \frac{B_1^4 R_1^{12}}{2GM_1 \dot{M}^2} \right)^{1/7}. \quad (174)$$

В рассматриваемой системе  $R_m = 3,4 \times 10^{10}$  см, что составляет примерно половину расстояния между компонентами двойной системы. Сечение аккреционной струи в системе с полярным примем равным сечению струи в точке Лагранжа  $L_1$  [13, (2.10)]:

$$S_{\text{str}} = \frac{\pi c_s^2}{4\Omega_{\text{orb}}^2}, \quad (175)$$

где  $c_s$  — скорость звука,  $\Omega_{\text{orb}} = 2\pi/P_{\text{orb}}$  — угловая скорость орбитального вращения двойной системы.

Оценим влияние различных членов в уравнениях (164)–(167): характерное динамическое время

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{L_{\parallel}^{3/2}}{\sqrt{GM_1}}, \quad (176)$$

время электромагнитной индукции

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{L_{\perp}}{v_{\text{ff}}}, \quad (177)$$

$$\tau_A = \frac{L_{\parallel}}{a}, \quad (178)$$

время установления турбулентного каскада (в разделе 2.1 оно упоминалось как время перераспределения энергии в каскаде)

$$\tau_{\text{casc}} = \frac{L_{\perp}^2 a}{L_{\parallel} W}, \quad (179)$$

характерное время турбулентной вязкости

$$\tau_{\text{visc}} = \frac{L_{\perp}^2}{\eta_w}, \quad (180)$$

время турбулентного нагрева

$$\tau_{\text{heat}} = \frac{k_B T}{m_p q_w}, \quad (181)$$

магнитное число Рейнольдса

$$R_m = \frac{L_{\perp} v_{\text{ff}}}{\eta} \quad (182)$$

и турбулентное магнитное число Рейнольдса

$$R_w = \frac{L_{\perp} v_{\text{ff}}}{\eta_w}. \quad (183)$$

Для расчёта времён  $\tau_{\text{visc}}$  и  $\tau_{\text{heat}}$ , а также числа Рейнольдса  $R_m$  необходимо знать величину омической магнитной вязкости  $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$ , где электропроводность

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e}. \quad (184)$$

Здесь  $\tau$  — характерное время между столкновениями электронов с ионами [42]:

$$\tau = \frac{T^{3/2}}{5,5 n A_C}, \quad (185)$$

$A_C = \ln(220 T n^{-1/3})$  — кулоновский логарифм.

Времена  $\tau_{\text{casc}}$ ,  $\tau_{\text{visc}}$  и  $\tau_{\text{heat}}$  определяются также продольным и поперечным масштабами турбулентности и величиной турбулентной энергии. Положим продольный масштаб равным радиусу магнитосферы,  $L_{\parallel} = R_m$ , а поперечный определим как размер аккреционной струи,  $L_{\perp} = S_{\text{str}}^{1/2}$ . Для оценки энергии турбулентности припишем турбулентности некоторую "эффективную" температуру  $T_w$ ,

$$W = \frac{3k_B T_w}{m_p}. \quad (186)$$

Будем рассматривать два предельных случая: а) энергия турбулентности равна тепловой энергии среды с температурой порядка  $10^4$  К; б) величина энергии определяется температурой вещества в основании аккреционной колонки, которая по порядку величины равна  $10^8$  К [10]. Будем различать эти случаи как слабую и сильную турбулентность соответственно.



**Таблица 2.** Характеристики\* аккреционного течения для систем типа AM Herculis (первая пара колонок) и EX Hydrae (вторая пара). Первая колонка в паре соответствует случаю слабой турбулентности, вторая — сильной

	AM Herculis		EX Hydrae	
	$T_w = 10^4$ К	$T_w = 10^8$ К	$T_w = 10^4$ К	$T_w = 10^8$ К
$B_1$ , Гс	$10^7$		$10^4$	
$B$ , Гс	$1,8 \times 10^2$		$5,1 \times 10^2$	
$n$ , см $^{-3}$	$10^{15}$		$10^{15}$	
$L_{\parallel}$ , см	$3,4 \times 10^{10}$		$2,4 \times 10^9$	
$L_{\perp}$ , см	$1,4 \times 10^9$		$1,3 \times 10^7$	
$\tau_{\text{dyn}}^{-1}$ , с $^{-1}$	$1,8 \times 10^{-3}$		$1,0 \times 10^{-1}$	
$\tau_{\text{ind}}^{-1}$ , с $^{-1}$	$4,3 \times 10^{-2}$		19,0	
$\tau_A^{-1}$ , с $^{-1}$	$3,6 \times 10^{-5}$		$1,4 \times 10^{-3}$	
$\eta$ , см $^2$ с $^{-1}$	$4,8 \times 10^6$		$4,8 \times 10^6$	
$\eta_w$ , см $^2$ с $^{-1}$	$5,7 \times 10^{17}$	$5,7 \times 10^{21}$	$9,6 \times 10^{15}$	$9,6 \times 10^{19}$
$\tau_{\text{casc}}^{-1}$ , с $^{-1}$	$3,3 \times 10^{-2}$	$3,3 \times 10^2$	10,5	$1,1 \times 10^5$
$\tau_{\text{visc}}^{-1}$ , с $^{-1}$	$2,8 \times 10^{-1}$	$2,8 \times 10^3$	58,3	$5,8 \times 10^5$
$\tau_{\text{heat}}^{-1}$ , с $^{-1}$	$1,6 \times 10^{-6}$	$3,3 \times 10^{-1}$	$8,3 \times 10^{-4}$	$1,8 \times 10^2$
$R_m$	$1,9 \times 10^{10}$		$6,6 \times 10^8$	
$R_w$	$1,5 \times 10^{-1}$	$1,5 \times 10^{-5}$	$3,3 \times 10^{-1}$	$3,3 \times 10^{-5}$

\*  $B_1$  и  $B$  — магнитное поле на поверхности аккретора и на границе магнитосферы соответственно;  $n$  — концентрация частиц;  $L_{\parallel}$ ,  $L_{\perp}$  — продольный и поперечный масштабы турбулентности;  $\eta$  — коэффициент омической вязкости;  $\eta_w$  — коэффициент турбулентной магнитной вязкости;  $R_m$  и  $R_w$  — омическое и турбулентное магнитное число Рейнольдса соответственно;  $\tau_{\dots}^{-1}$  — обратные времена (см. пояснения в разделе 5).

Наконец, возьмём концентрацию газа в аккреционной колонке равной  $n = 10^{15}$  см $^{-3}$  и примем, что его температура равна  $T = 10^4$  К. Результаты оценок приведены в табл. 2. Видно, что в случае слабой турбулентности время формирования турбулентного каскада сравнимо с временем магнитной индукции и почти на порядок меньше динамического времени, а влияние турбулентной вязкости значительно превосходит влияние остальных эффектов. Влияние турбулентного нагрева при этом должно быть незначительно. В случае, когда  $T_w = 10^8$  К, все эффекты, связанные с турбулентностью, усиливаются на четыре-пять порядков и должны доминировать над эффектами, характерными для идеальной МГД. В частности, турбулентное магнитное число Рейнольдса меньше омического числа Рейнольдса на 9–15 порядков величины.

Аналогичные оценки можно провести для системы с промежуточным полярком типа EX Hydrae. Массы аккретора и донора:  $M_1 = 0,79 M_{\odot}$ ,  $M_2 = 0,096 M_{\odot}$ , радиус аккретора  $R_1 = 1,3 \times 10^{-2} R_{\odot}$ , темп аккреции  $\dot{M} = 10^{-10} M_{\odot}$  год $^{-1}$ , орбитальный период двойной системы  $P_{\text{orb}} = 1,64$  ч, магнитное поле белого карлика  $B_1 = 10^4$  Гс. В таких системах радиус магнитосферы относительно мал. Покинув точку Лагранжа, аккрецируемое вещество образует диск, а достигнув магнитосферы — перетекает на звезду, формируя аккреционную колонку (или, лучше сказать, шторку) [28]. В качестве оценки для продольного масштаба турбулентности также возьмём альвеновский радиус, а поперечный масштаб положим равным изотермической толщине диска на альвеновском радиусе,  $L_{\perp} = L_{\parallel} c_s / v_K$ , где  $v_K$  — скорость кеплеровского вращения. Оценки для этой системы приведены в табл. 2. Как и в системе с полярком, влияние

турбулентности значительно превышает влияние обычных МГД-членов в уравнениях (164)–(167).

### 5.3. Приближение сильной турбулентности

Модель модифицированной МГД, использовавшаяся в наших предыдущих работах [27, 28], соответствует пределу сильной турбулентности в плазме, находящейся в сильном внешнем магнитном поле. Покажем, как можно перейти к этой модели из уравнений (164)–(167). Полное магнитное поле  $\mathbf{B}$  в такой плазме можно представить в виде суперпозиции внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$  и магнитного поля  $\mathbf{b}$ , индуцированного электрическими токами в самой плазме,  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{b}$ . Поскольку фоновое магнитное поле  $\mathbf{H}$  создаётся внешними источниками, расположенными за пределами интересующей нас области пространства, для него должно выполняться условие потенциальности  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ . Уравнение индукции (166) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{b} + \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \eta_w \text{rot}_{\perp} \mathbf{b}) = 0. \quad (187)$$

Здесь мы пренебрегли омической диффузией по сравнению с турбулентной ( $\eta \ll \eta_w$ ). Индекс " $\perp$ " обозначает поперечную к магнитному полю компоненту вектора.

Наиболее простой случай соответствует стационарному внешнему магнитному полю, когда  $\partial \mathbf{H} / \partial t = 0$ . Однако часто приходится иметь дело и с задачами, в которых внешнее магнитное поле является нестационарным. Такая ситуация возникает, например, при моделировании структуры течения плазмы вокруг вращающейся магнитной звезды, ось вращения которой не совпадает с магнитной осью. В принципе, внешнее магнитное поле может изменяться во времени и за счёт изменения создающих его источников. К этому может привести, например, изменение по какой-либо причине магнитного момента звезды. Однако такие изменения, как правило, происходят на больших временных масштабах [6] и мы учитывать их не будем. Поэтому уравнение, описывающее изменение внешнего магнитного поля, может быть записано в виде (см., например, [1])

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}). \quad (188)$$

Здесь правая часть связана с эффектом движения источника поля как целого. При этом вектор  $\mathbf{V}$  определяет скорость источника в данной точке. Она равна скорости движения магнитных силовых линий внешнего магнитного поля в вакууме (т.е. в отсутствие плазмы). Например, если изменение поля обусловлено вращением звезды (центр звезды находится в начале координат) с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$ , то скорость  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ .

Рассмотрим случай сильного внешнего магнитного поля  $H \gg b$  в условиях сильной турбулентности, когда магнитное число Рейнольдса  $R_w$ , обусловленное волновой турбулентностью, мало,  $R_w \ll 1$  [43]. Как мы видели выше (см. предыдущий раздел), такая ситуация реализуется, например, в магнитосферах белых карликов в полярках и промежуточных полярках. Оставляя в уравнении (187) доминирующие члены, находим

$$\text{rot}[(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \times \mathbf{H} - \eta_w \text{rot}_{\perp} \mathbf{b}] = 0. \quad (189)$$

Отсюда, в частности, видно, что индуцированное поле по порядку величины равно  $b \approx R_w H$  и в пределе малых магнитных чисел Рейнольдса,  $R_w \ll 1$ , действительно оказывается малым по сравнению с фоновым полем,  $b \ll H$ .

Величина, стоящая в левой части (189) под знаком ротора, равна  $-c\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле в плазме. Из (189) следует, что это поле является потенциальным,  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , где  $\varphi$  — соответствующий скалярный потенциал. Поэтому можно написать

$$(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \times \mathbf{H} - \eta_w \text{rot}_{\perp} \mathbf{b} = c \nabla \varphi. \quad (190)$$

Это уравнение определяет поперечную к магнитному полю компоненту градиента потенциала. Чтобы найти сам потенциал, расширим уравнение (190), заменив в нём  $\text{rot}_{\perp} \mathbf{b}$  на  $\text{rot} \mathbf{b}$ , и вычислим дивергенцию левой и правой частей. Тогда, считая для простоты, что коэффициент вязкости является постоянным, получаем

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c} \mathbf{H} \text{rot} (\mathbf{v} - \mathbf{V}). \quad (191)$$

При вычислении выражения в правой части этого уравнения было использовано условие потенциальности магнитного поля,  $\text{rot} \mathbf{H} = 0$ .

Электромагнитная сила в уравнении движения (165) равна

$$\mathbf{f}_{\text{em}} = -\chi_D \frac{\mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{B}}{4\pi\rho} = -\chi_D \frac{\mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{b}}{4\pi\rho} - \chi_D \frac{\mathbf{H} \times \text{rot} \mathbf{b}}{4\pi\rho}, \quad (192)$$

где  $\chi_D = 1 + \gamma_A^2 W / (2c^2)$  — коэффициент, обусловленный током смещения. Второе слагаемое в правой части описывает силу

$$\mathbf{f}_{\text{em}}^{(2)} = -\chi_D \frac{\mathbf{H} \times \text{rot} \mathbf{b}}{4\pi\rho}, \quad (193)$$

действующую на плазму со стороны внешнего магнитного поля. При вычислении этой силы можно использовать рассмотренное выше приближение. Выражая  $\text{rot} \mathbf{b}$  из (190) и подставляя в (193), находим

$$\mathbf{f}_{\text{em}}^{(2)} = -\frac{\chi_D H^2}{4\pi\rho\eta_w} (\mathbf{v} - \mathbf{V})_{\perp} + \frac{\chi_D c}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times \nabla \varphi. \quad (194)$$

Удобно ввести локальную скорость магнитных силовых линий  $\mathbf{u}$  (скорость магнитных силовых линий в локальной системе отсчёта, в которой  $\partial\mathbf{H}/\partial t = 0$ ) из условия

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{H}. \quad (195)$$

Из этого соотношения можно получить

$$\mathbf{u}_{\perp} = \frac{c}{H^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{c}{H^2} (\mathbf{H} \times \nabla\varphi). \quad (196)$$

Тогда выражение для электромагнитной силы (194) можно переписать в окончательном виде:

$$\mathbf{f}_{\text{em}}^{(2)} = -\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{U})_{\perp}}{t_w}, \quad (197)$$

где полная скорость магнитных силовых линий  $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$ , а время релаксации

$$t_w = \frac{4\pi\rho\eta_w}{\chi_D H^2}. \quad (198)$$

Можно предложить любопытную интерпретацию электромагнитной силы вида (197) как силы трения. Действительно, хорошо известно (см., например, [2]), что в плазме, состоящей из нескольких сортов частиц, удельная сила трения между компонентами  $\alpha$  и  $\beta$  равна

$$\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -v_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}), \quad (199)$$

где  $\mathbf{v}_{\alpha}$  и  $\mathbf{v}_{\beta}$  — скорости соответствующих компонент плазмы, а  $v_{\alpha\beta}$  — характерная частота столкновений частиц сорта  $\alpha$  и  $\beta$ . Сравнивая это выражение с (197), можно сказать, что электромагнитная сила (197) представляет собой силу трения между плазмой и магнитными силовыми линиями. При этом соответствующая частота столкновений равна  $v_w = t_w^{-1}$ . Появление конечной частоты столкновений можно связать с тем, что в турбулентной плазме магнитные силовые линии хаотически колеблются и в результате возникает некое эффективное "сечение столкновения" частиц плазмы с магнитными силовыми линиями. Таким образом, в турбулентной плазме сильное внешнее магнитное поле играет роль дополнительной "эффективной" жидкости, с которой взаимодействует плазма за счёт силы трения. Подчеркнём, что этот эффект имеет место только в поперечном к магнитному полю направлении. В продольном направлении плазма течёт свободно.

При использовании рассматриваемого приближения исходные уравнения (164)–(167) могут быть существенно упрощены. Если к тому же в них пренебречь турбулентным давлением и нагревом, то можно прийти к следующей системе:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (200)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{b}}{4\pi\rho} - \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{U})_{\perp}}{t_w}, \quad (201)$$

$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{b} + (\mathbf{v} - \mathbf{V}) \times \mathbf{H} - \eta_w \text{rot}_{\perp} \mathbf{b}], \quad (202)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s = 0. \quad (203)$$

Именно эта модель использовалась нами в предыдущих работах [13, 27, 28]. При этом, справедливости ради, нужно сказать, что для упрощения и ускорения трёхмерных расчётов мы пренебрегали скоростью  $\mathbf{u}$ , считая, что  $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ . Важно отметить, что если фоновое магнитное поле отсутствует,  $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ , и нет волновой турбулентности, то эта система уравнений переходит в систему уравнений идеальной МГД. В противоположном пределе сильного внешнего магнитного поля  $H \gg b$  и сильной турбулентности  $R_w \ll 1$  уравнение индукции (202) сводится к (189), а в уравнении движения (201) можно пренебречь вторым слагаемым в правой части. В результате придём к уравнениям гидродинамики с дополнительной силой (197). В промежуточных случаях система уравнений (200)–(203) будет описывать структуру течения уже неточно. Для более строгого описания необходимо использовать полную систему уравнений (164)–(167).

## 6. Заключение

В работе рассмотрена проблема моделирования течений астрофизической плазмы в сильных магнитных полях. Поскольку в этих условиях приближение классической магнитной гидродинамики может оказаться некорректным, для описания таких течений необходимо искать альтернативные подходы. Одним из таких подходов является учёт турбулентности волнового (альвеновского) типа, которая может развиваться в подобных системах. Действительно, в плазме, находящейся в сильном магнитном поле, за характерное динамическое время альвеновские и магнитозвуковые волны будут успевать много раз проходить по области течения в продольном и поперечном к магнитному полю направлениях. Взаимодействие этих волн будет приводить к перераспределению энергии между различными гармониками и, следовательно, к формированию турбулентного каскада. Волновая турбулентность, в частности, наблюдается в плазме солнечного ветра и полярного ветра Земли [37]. Для описания такого течения можно использовать стандартную процедуру усреднения по ансамблю волновых пульсаций.

Мы подробно рассмотрели данный подход в приложении к астрофизическим течениям. Поскольку в дальнейшем предполагается использование этой модели для описания течений плазмы в сильных внешних магнитных полях, в исходных уравнениях были учтены релятивистские эффекты, связанные с большими скоростями распространения альвеновских и магнитозвуковых волн. Турбулентное течение описывается как сумма усреднённого течения и возмущений, вызванных волновыми пульсациями. С помощью такого подхода удаётся получить замкнутую систему уравнений для усреднённых характеристик течения. В уравнениях для усреднённых характеристик учтены источниковые члены, обусловленные волновым давлением, турбулентной магнитной вязкостью и волновым турбулентным нагревом. Все коэффициенты переноса вычислены на основе спектра волновой турбулентности, рассчитанного в работе [24].

Полученные в настоящей статье уравнения модифицированной МГД (164)–(167) могут быть использованы для моделирования довольно широкого класса течений астрофизической плазмы. Показано, что для случая течений плазмы в очень сильных внешних полях в условиях сильной турбулентности эти уравнения переходят в уравнения более простого вида (200)–(203), которые соответствуют полуфеноменологической модели, использованной в наших предыдущих работах [27, 28]. Таким образом, эта модель получает более строгое обоснование.

Необходимо отметить несколько важных моментов. В настоящей работе в качестве исходных уравнений мы использовали систему уравнений полурелятивистской магнитной гидродинамики. Однако для расчёта парных корреляторов учитывался спектр волновой турбулентности, полученный на основе нерелятивистской магнитной гидродинамики. Это обстоятельство в рамках нашего подхода не является принципиальным. Во-первых, для нашей модели важен лишь степенной характер спектра турбулентности в инерционном интервале, а энергия турбулентности и показатели спектра в модели всё равно являются свободными параметрами. Во-вторых, в окончательных уравнениях вся информация о спектре турбулентности, по сути, содержится в коэффи-

циентах переноса, которые в конечном счёте известны неточно.

Как указывалось в разделе 3.3, важным допущением, сделанным при вычислении спектра турбулентности, было предположение о его сбалансированности. В этом случае энергия волн, распространяющихся вдоль поля в прямом направлении, равна энергии волн, распространяющихся вдоль поля в обратном направлении. Ясно, что условие в общем случае может не выполняться. Известно, например, что в солнечном ветре энергия волн, распространяющихся против поля, примерно в 10 раз меньше энергии волн, распространяющихся в прямом направлении. Однако, если спектр при этом в инерционном интервале остаётся степенным (как, например, в солнечном ветре), то все выводы снова остаются в силе при учёте замены соответствующих параметров.

Таким образом, модель модифицированной магнитной гидродинамики, предложенная в данной работе, является достаточно универсальной и может применяться для описания довольно широкого класса астрофизических течений.

Авторы благодарят С.Н. Замоздру за полезные обсуждения в ходе подготовки работы. Е.П. Курбатов поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 14-29-06059). А.Г. Жилкин поддержан Российским научным фондом (проект 15-12-30038).

## Приложение. Турбулентные источники, связанные с током смещения

### А. Уравнение движения

Приведём вычисления турбулентных источников для уравнения Эйлера (50), связанные с наличием тока смещения. Выпишем выражение для силы, оставляя лишь члены, квадратичные по возмущениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_D &= -\frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(1)} \mathbf{E}}{\partial t} \times \delta \mathbf{B} \right\rangle - \frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(2)} \mathbf{E}}{\partial t} \right\rangle \times \mathbf{B} = \\ &= \frac{1}{c^2} \left( \mathbf{a} \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \delta \mathbf{b} \right\rangle + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{b} \rangle - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \langle |\delta \mathbf{b}|^2 \rangle + \right. \\ &+ \mathbf{v} \left\langle \delta \mathbf{b} \otimes \frac{\partial \delta \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle - \mathbf{v} \left\langle \delta \mathbf{b} \frac{\partial \delta \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{b} \rangle - \\ &\left. - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle + \mathbf{a} \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \otimes \delta \mathbf{b} \right\rangle - \mathbf{a} \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{b}}{\partial t} \otimes \delta \mathbf{v} \right\rangle \right). \quad (204) \end{aligned}$$

1. В первом члене правой части (204) единственное потенциально ненулевое слагаемое, которое возникает в первом порядке  $\tau$ -приближения, содержит векторный квадрат вектора поляризации, поэтому обращается в нуль:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \delta \mathbf{b} \right\rangle^{(1)} &= \gamma_A^2 \mathbf{a} \sum_{\pm} \int d^3 k \langle (\mathbf{rot} \mathbf{a} \times \delta \tilde{\mathbf{b}}) \delta \tilde{\mathbf{b}} \rangle_{\pm} = \\ &= \gamma_A^2 \mathbf{a} \sum_{\pm} \int d^3 k [(\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_n) \mathbf{rot} \mathbf{a}] P_{\pm} = 0. \quad (205) \end{aligned}$$

2. Второй член не равен нулю уже в нулевом порядке  $\tau$ -приближения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{b} \rangle^{(0)} = \hat{\mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \frac{W}{2}. \quad (206)$$

3. Третий член вычисляется аналогично второму:

$$-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \langle |\delta \mathbf{b}|^2 \rangle^{(0)} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} W. \quad (207)$$

4. Четвёртый член представлен двумя неисчезающими слагаемыми:

$$\mathbf{v} \left\langle \delta \mathbf{b} \otimes \frac{\partial \delta \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle^{(1)} = -\mathbf{v} \sum_{\pm} \int d^3 k (\nabla \mathbf{v} + \eta k^2) \langle \delta \tilde{\mathbf{b}} \otimes \delta \tilde{\mathbf{b}} \rangle_{\pm}. \quad (208)$$

Первое слагаемое здесь может быть рассчитано так же, как член (206). Интеграл для второго слагаемого легко найти с помощью (157), при этом можно пренебречь вкладом от продольных волновых чисел в подинтегральное выражение:

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \int d^3 k k^2 \langle \delta \tilde{\mathbf{b}} \otimes \delta \tilde{\mathbf{b}} \rangle_{\pm} &= \hat{\mathbf{T}} \sum_{\pm} \int d^3 k (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) P_{\pm} = \\ &= \hat{\mathbf{T}} \left( \frac{W}{3L_{\parallel}^2} + \frac{W}{L_{\perp} \lambda} \right). \end{aligned} \quad (209)$$

В итоге имеем

$$\mathbf{v} \left\langle \delta \mathbf{b} \otimes \frac{\partial \delta \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle^{(1)} = -\hat{\mathbf{T}} \mathbf{v} \left( \nabla \mathbf{v} + \frac{\eta}{3L_{\parallel}^2} + \frac{\eta}{L_{\perp} \lambda} \right) \frac{W}{2}. \quad (210)$$

5. Пятый член вычисляется аналогично четвёртому, но при этом имеет изотропный вид:

$$-\mathbf{v} \left\langle \delta \mathbf{b} \frac{\partial \delta \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle^{(1)} = \mathbf{v} \left( \nabla \mathbf{v} + \frac{\eta}{3L_{\parallel}^2} + \frac{\eta}{L_{\perp} \lambda} \right) W. \quad (211)$$

6. Шестой член раскрывается через (84) и обращается в нуль аналогично (205):

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{b} \rangle^{(1)} = \gamma_A^2 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \sum_{\pm} \int d^3 k [(\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_n) \text{rot } \mathbf{a}] \tau P_{\pm} = 0. \quad (212)$$

7. Седьмой член можно преобразовать к виду

$$-\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle^{(1)} = \gamma_A^2 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \left[ \sum_{\pm} \int d^3 k \tau \langle \delta \tilde{\mathbf{b}} \otimes \delta \tilde{\mathbf{b}} \rangle_{\pm} \right] \times \text{rot } \mathbf{a}. \quad (213)$$

Сравнивая интеграл в квадратных скобках с определением коэффициента турбулентной магнитной вязкости, нетрудно увидеть, что он может быть записан как

$$\sum_{\pm} \int d^3 k \tau \langle \delta \tilde{\mathbf{b}} \otimes \delta \tilde{\mathbf{b}} \rangle_{\pm} = \hat{\mathbf{T}} \frac{\eta_w}{2}. \quad (214)$$

Окончательное выражение для седьмого члена имеет вид

$$-\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \langle \delta \mathbf{b} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle^{(1)} = \left[ \left( \hat{\mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) \times \text{rot } \mathbf{a} \right] \frac{\eta_w}{2}. \quad (215)$$

8. Восьмой член содержит только поперечные компоненты по отношению к фоновому полю:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \otimes \delta \mathbf{b} \right\rangle^{(1)} &= (\gamma_A^2 \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a}) \sum_{\pm} \int d^3 k \langle \delta \tilde{\mathbf{b}} \otimes \delta \tilde{\mathbf{b}} \rangle_{\pm} = \\ &= (\gamma_A^2 \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a}) \frac{W}{2}. \end{aligned} \quad (216)$$

9. Девятый член содержит только анизотропные слагаемые, а также интегралы от смешанных корреляторов

$\langle \delta \tilde{\mathbf{v}} \otimes \delta \tilde{\mathbf{b}} \rangle_{\pm}$ , поэтому он равен нулю:

$$-\mathbf{a} \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{b}}{\partial t} \otimes \delta \mathbf{v} \right\rangle^{(1)} = 0. \quad (217)$$

Собирая все члены вместе, получаем окончательное выражение для силы в расчёте на единицу массы:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_D &= \left\{ \left( \frac{\hat{\mathbf{T}}}{2} - \hat{\mathbf{I}} \right) \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \left( \nabla \mathbf{v} + \frac{\eta}{3L_{\parallel}^2} + \frac{\eta}{L_{\perp} \lambda} \right) \mathbf{v} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \gamma_A^2 \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a} \right\} \frac{W}{c^2} + \left[ \left( \hat{\mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) \times \text{rot } \mathbf{a} \right] \frac{\eta_w}{2c^2}. \end{aligned} \quad (218)$$

## Б. Уравнение энтропии

Приведём вычисления турбулентных источников для уравнения энтропии (52), связанные с наличием тока смещения. Выпишем члены, квадратичные по возмущениям:

$$\begin{aligned} \frac{q_D}{\eta} &= -\frac{2}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(1)} \mathbf{E}}{\partial t} \text{rot } \delta \mathbf{B} \right\rangle - \frac{2}{4\pi\rho} \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(2)} \mathbf{E}}{\partial t} \right\rangle \text{rot } \mathbf{B} + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho} \left\langle \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \delta^{(1)} \mathbf{E}}{\partial t} \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{c^2} \left( -2\mathbf{a} \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \times \text{rot } \delta \mathbf{b} \right\rangle - \right. \\ &\quad - 2 \text{rot } \mathbf{a} \times \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \times \delta \mathbf{b} \right\rangle - 2 \text{rot } \mathbf{a} \times \left\langle \delta \mathbf{v} \times \frac{\partial \delta \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle + \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{c^2} \left\langle \left| \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \right|^2 \right\rangle - \left\langle \left( \frac{\mathbf{a}}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \right)^2 \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (219)$$

1. Первое слагаемое в правой части (219) проявляется в нулевом порядке  $\tau$ -приближения:

$$\begin{aligned} -2\mathbf{a} \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \times \text{rot } \delta \mathbf{b} \right\rangle^{(0)} &= -2\mathbf{a} \sum_{\pm} \int d^3 k \omega_{\pm} \langle \delta \tilde{\mathbf{v}} \times (\mathbf{k} \times \delta \tilde{\mathbf{b}}) \rangle_{\pm} = \\ &= 2\gamma_A^2 a^2 \sum_{\pm} \int d^3 k k_{\parallel}^2 P_{\pm} = 2\gamma_A^2 a^2 \frac{W}{3L_{\parallel}^2}. \end{aligned} \quad (220)$$

2. Второе слагаемое не равно нулю в первом порядке. Его можно раскрыть с помощью (157):

$$\begin{aligned} -2 \text{rot } \mathbf{a} \times \left\langle \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \times \delta \mathbf{b} \right\rangle^{(1)} &= \\ &= -2\gamma_A^2 \text{rot } \mathbf{a} \times \sum_{\pm} \int d^3 k \langle (\text{rot } \mathbf{a} \times \delta \tilde{\mathbf{b}}) \times \delta \tilde{\mathbf{b}} \rangle_{\pm} = \\ &= [(\hat{\mathbf{T}} \text{rot } \mathbf{a}) \times \text{rot } \mathbf{a}] \gamma_A^2 W. \end{aligned} \quad (221)$$

3. Третье слагаемое в первом порядке содержит векторный квадрат вектора поляризации, поэтому обращается в нуль:

$$\begin{aligned} -2 \text{rot } \mathbf{a} \times \left\langle \delta \mathbf{v} \times \frac{\partial \delta \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle^{(1)} &= \\ &= 2 \text{rot } \mathbf{a} \sum_{\pm} \int d^3 k (\nabla \mathbf{v} + \eta k^2) \langle \delta \tilde{\mathbf{v}} \times \delta \tilde{\mathbf{b}} \rangle_{\pm} = 0. \end{aligned} \quad (222)$$

4. Четвёртое слагаемое не исчезает уже в нулевом порядке:

$$\frac{a^2}{c^2} \left\langle \left| \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \right|^2 \right\rangle^{(0)} = \frac{a^2}{c^2} \sum_{\pm} \int d^3 k \omega_{\pm}^2 \langle |\delta \tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle_{\pm} =$$

$$= \left[ \gamma_A^2 a^2 + \left( 1 - \frac{\gamma_A^2 a^2}{2c^2} \right) v_{\parallel}^2 \right] \frac{\gamma_A^2 a^2}{c^2} \frac{W}{3L_{\parallel}^2} + \left( 1 - \frac{\gamma_A^2 a^2}{2c^2} \right) \frac{(\gamma_A \mathbf{a} \times \mathbf{v})^2}{c^2} \frac{W}{L_{\perp} \lambda}. \quad (223)$$

5. Пятое слагаемое проявляется в первом порядке  $\tau$ -приближения и может быть раскрыто через тройное векторное произведение и выражение (157):

$$- \left\langle \left( \frac{\mathbf{a}}{c} \frac{\delta \delta \mathbf{v}}{\delta t} \right)^2 \right\rangle^{(1)} = - \frac{\gamma_A^4}{c^2} \langle [\mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{a}, \delta \mathbf{b}]^2 \rangle = - [\hat{\mathbf{T}} (\gamma_A \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a})]^2 \frac{\gamma_A^2 W}{2c^2}. \quad (224)$$

Окончательное выражение для источника турбулентного нагрева имеет вид

$$\frac{q_D}{\eta} = \frac{(\gamma_A \mathbf{a} \times \mathbf{v})^2}{2c^4} \frac{W}{L_{\perp} \lambda} + \left\{ 2 + \left[ \frac{\gamma_A^2 a^2}{c^2} + \left( 1 - \frac{\gamma_A^2 a^2}{2c^2} \right) \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} \right] \right\} \frac{a^2}{3L_{\parallel}^2} \frac{\gamma_A^2 W}{c^2} + [(\hat{\mathbf{T}} \text{rot } \mathbf{a}) \times \text{rot } \mathbf{a}] \frac{\gamma_A^2 W}{c^2} - [\hat{\mathbf{T}} (\gamma_A \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a})]^2 \frac{\gamma_A^2 W}{2c^4}. \quad (225)$$

## Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2003); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (New York: Pergamon Press, 1984)
2. Франк-Каменецкий Д А *Лекции по физике плазмы* (М.: Атомиздат, 1968)
3. Chen F *Introduction to Plasma Physics* (New York: Springer, 1995); Пер. на русск. яз.: Чен Ф *Введение в физику плазмы* (М.: Мир, 1987)
4. Баранов В Б, Краснобаев К В *Гидродинамическая теория космической плазмы* (М.: Наука, 1977)
5. Priest E R *Solar Magneto-Hydrodynamics* (Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1982); Пер. на русск. яз.: Прист Э Р *Солнечная магнитогидродинамика* (М.: Мир, 1985)
6. Липунов В М *Астрофизика нейтронных звезд* (М.: Наука, 1987); Пер. на англ. яз.: Lipunov V M *Astrophysics of Neutron Stars* (Heidelberg: Springer, 1992)
7. Priest E R, Hood A W (Eds) *Advances in Solar System Magneto-hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991); Пер. на русск. яз.: Прист Э, Худ А (Ред.) *Космическая магнитная гидродинамика* (М.: Мир, 1995)
8. Campbell C G *Magnetohydrodynamics in Binary Stars* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997)
9. Бескин В С *Оссимметричные стационарные течения в астрофизике* (М.: Физматлит, 2005); Пер. на англ. яз.: Beskin V S *MHD Flows in Compact Astrophysical Objects* (Heidelberg: Springer, 2010)
10. Warner B *Cataclysmic Variable Stars* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003)
11. Langer S H, Chanmugam C, Shaviv G *Astrophys. J.* **258** 289 (1982)
12. Frank J, King A R, Raine D J *Accretion Power in Astrophysics* 3rd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002)
13. Бисикало Д В, Жилкин А Г, Боярчук А А *Газодинамика тесных двойных звезд* (М.: Физматлит, 2013)
14. Галеев А А, в кн. *Физика космоса. Маленькая энциклопедия* (Под ред. Р А Сюняева) 2-е изд. (М.: Советская энциклопедия, 1986) с. 367
15. Potter D *Computational Physics* (London: J. Wiley 1973); Пер. на русск. яз.: Поттер Д *Вычислительные методы в физике* (М.: Мир, 1975)
16. Куликовский А Г, Погорелов Н В, Семенов А Ю *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений* (М.: Физматлит, 2001); Пер. на англ. яз.: Kulikovskii A G, Pogorelov N V, Semenov A Yu *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Boca Raton, Fla.: Chapman and Hall. CRC, 2000)
17. Boris J P "A physically motivated solution of the Alfvén problem", NRL Memorandum Report 2167 (Washington, DC: Naval Research Laboratory, 1970)
18. Gombosi T I et al. *J. Comput. Phys.* **177** 176 (2002)
19. Tóth G et al. *J. Geophys. Res.* **116** A07211 (2011)
20. Захаров В Е *Журн. приклад. мех. тех. физ.* (1) 14 (1965); Zakharov V E *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **6** 10 (1965)
21. Захаров В Е *Журн. приклад. мех. тех. физ.* (4) 35 (1965); Zakharov V E *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **6** 22 (1965)
22. Ирошников П С *Астрон. журн.* **40** 742 (1963); Iroshnikov P S *Sov. Astron.* **7** 566 (1964)
23. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **85** 575 (1965)
24. Galtier S et al. *J. Plasma Phys.* **63** 447 (2000)
25. Кузнецов Е А *ЖЭТФ* **120** 1213 (2001); Kuznetsov E A *JETP* **93** 1052 (2001)
26. Chandran B D G *Phys. Rev. Lett.* **95** 265004 (2005)
27. Жилкин А Г, Бисикало Д В *Астрон. журн.* **87** 913 (2010); Zhilkin A G, Bisikalo D V *Astron. Rep.* **54** 840 (2010)
28. Жилкин А Г, Бисикало Д В, Боярчук А А *УФН* **182** 121 (2012); Zhilkin A G, Bisikalo D V, Boyarchuk A A *Phys. Usp.* **55** 115 (2012)
29. Zhilkin A G, Bisikalo D V, Ustyugov V A *AIP Conf. Proc.* **1551** 22 (2013)
30. Жилкин А Г, Бисикало Д В, Мэсон П А *Астрон. журн.* **89** 291 (2012); Zhilkin A G, Bisikalo D V, Mason P A *Astron. Rep.* **56** 257 (2012)
31. Бисикало Д В и др. *Астрон. журн.* **90** 366 (2013); Bisikalo D V et al. *Astron. Rep.* **57** 327 (2013)
32. Фатеева А М, Жилкин А Г, Бисикало Д В *Астрон. журн.* **92** 977 (2015); Fateeva A M, Zhilkin A G, Bisikalo D V *Astron. Rep.* **60** 87 (2015)
33. Исакова П Б, Жилкин А Г, Бисикало Д В *Астрон. журн.* **92** 720 (2015); Isakova P B, Zhilkin A G, Bisikalo D V *Astron. Rep.* **59** 843 (2015)
34. Исакова П Б и др. *Астрон. журн.* **93** 474 (2016); Isakova P B et al. *Astron. Rep.* **60** 498 (2016)
35. Sridhar S, Goldreich P *Astrophys. J.* **432** 612 (1994)
36. Goldreich P, Sridhar S *Astrophys. J.* **438** 763 (1995)
37. Bruno R, Carbone V *Living Rev. Solar Phys.* **10** 2 (2013)
38. Canuto V M *Astrophys. J.* **482** 827 (1997)
39. Чернышов А А, Карельский К В, Петросян А С *УФН* **184** 457 (2014); Chernyshov A A, Karelsky K V, Petrosyan A S *Phys. Usp.* **57** 421 (2014)
40. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Физматлит, 2003); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)

41. Okamoto I *Astron. Astrophys.* **211** 476 (1989)
42. Гершман Б Н, Ерухимов Л М, Яшин Ю Я *Волновые явления в ионосфере и космической плазме* (М.: Наука, 1984)
43. Брагинский С И *ЖЭТФ* **37** 1417 (1959); Braginskii S I *Sov. Phys. JETP* **10** 1005 (1960)

### Modified magnetohydrodynamics model including wave turbulence: astrophysical applications

**E.P. Kurbatov, A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo**

*Institute of Astronomy, Russian Academy of Sciences,  
ul. Pyatnitskaya 48, 119017 Moscow, Russian Federation  
E-mail: kurbatov@inasan.ru, zhilkin@inasan.ru, bisikalo@inasan.ru*

Modeling astrophysical flows in the framework of classical magnetic hydrodynamics often encounters significant difficulties due to high (up to relativistic) Alfvén wave velocities. Such situations may arise in modeling the magnetosphere of planets and stars and accretion flows in polars, intermediate polars and near neutron stars. In a strongly magnetized plasma, wave turbulence can develop, which can significantly affect the energy balance and the forces determining the plasma dynamic. In this paper a closed system of equations is obtained for modified magnetic hydrodynamics with wave turbulence for a wide range of magnetic fields and turbulence energies. The turbulent flow is described as the sum of the average flow and perturbations induced by relativistic Alfvén waves. Expressions are derived for the volume force, viscosity and turbulence-induced dissipative heating. The analysis of equations for certain limiting cases is performed. It is shown that the proposed approach can be used for modeling a broad class of astrophysical plasma flows.

**Keywords:** magnetohydrodynamics, turbulence, Alfvén waves, close binary stars

PACS numbers: 52.30.Cv, 52.35.Bj, 52.35.Ra, 52.65.Kj, 95.30.Qd, 94.05.Lk, 97.80.Gm

Bibliography — 43 references

*Received 15 November 2016, revised 20 January 2017*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **187** (8) 857–878 (2017)

*Physics – Uspekhi* **60** (8) (2017)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038063>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.01.038063>