

Квантовое плавление двумерного вигнеровского кристалла

В.Т. Долгополов

Рассмотрены теоретические предсказания поведения двумерных электронных систем малой плотности при температурах, близких к абсолютному нулю: образование электронного (вигнеровского) кристалла, его плавление при некоторой критической плотности электронов и переходы между кристаллами различного типа в более сложных (например, двухслойных) системах. Приведены экспериментальные результаты, полученные на реальных двумерных системах, в которых действительно реализуется непроводящее (твёрдое) состояние электронной системы с признаками коллективной локализации. Обсуждаются экспериментальные методы регистрации границы квантовая жидкость – твёрдая фаза.

Ключевые слова: двумерные электронные системы, вигнеровский кристалл, полупроводниковые электронные системы

PACS numbers: 68.65.Pq, 71.10.Hf, 73.20.Qt

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038051>

Содержание

1. Введение (785).
 2. Вигнеровский кристалл в отсутствие магнитного поля (786).
 3. Общая картина в нормальном магнитном поле (787).
 4. Смешивание квантовых уровней в слабом квантующем магнитном поле (788).
 5. Сильное нормальное магнитное поле (789).
 6. Вигнеровский кристалл в графене (790).
 7. Двухслойный графен (791).
 8. Вигнеровский кристалл в системе с сильным спин-орбитальным взаимодействием (792).
 9. Двухслойные электронные системы (793).
 10. Методы регистрации границы жидкость – твёрдая фаза (794).
 11. Промежуточные фазы (795).
 12. Заключение (795).
- Список литературы (796).

1. Введение

Вигнеровским кристаллом называют кристалл, построенный не из ионных остовов, как обычно, а из электронов (или дырок). Теоретически кристалл такого типа, образованный электронами с малой плотностью, был предсказан [1] ещё в 1934 г. Ясно, что для построения такого кристалла необходимо выполнение двух условий. Во-первых, система, в которую входит электронный кристалл, в целом должна быть электронейтральной. В противном случае силы кулоновского отталкивания сделают кристалл неустойчивым. Во-вторых, характерная энергия кулоновского взаимодействия между элект-

ронами E_C должна значительно превышать характерную кинетическую энергию электрона E_k .

Первое требование проще всего выполнить для двумерных электронных систем (полупроводниковых устройств или слоя электронов над поверхностью жидкого гелия [2]), поскольку в этом случае компенсирующий положительный заряд может быть расположен удалённо, например, на отдельном электроде. Такое "конденсаторное" устройство обладает дополнительным преимуществом: возможностью внешнего контроля за плотностью электронов в двумерном слое. Впервые свойства вигнеровского кристалла в полупроводниковой двумерной системе были рассмотрены в работе [3]. Ниже мы будем обсуждать именно такие электронные системы.

Как и обычные кристаллы, вигнеровский кристалл плавится при увеличении температуры и электронная система переходит в жидкую фазу. Для этого флуктуации расстояния между соседними электронами вследствие тепловых колебаний должны стать достаточно большими по сравнению с постоянной решётки кристалла. Последнее утверждение соответствует эмпирическому критерию Линдемана [4], хорошо зарекомендовавшему себя в предсказании температур плавления обычных кристаллов. Аналогичное плавление может произойти и при температуре, близкой к абсолютному нулю, в случае, когда критерию Линдемана удовлетворяет амплитуда нулевых колебаний, подобно тому, как это происходит, например, в квантовых жидкостях [5]. Этот тип плавления, называемый квантовым плавлением, происходит при некоторой критической плотности электронов n_c . В настоящей статье мы рассмотрим особенности квантового плавления при различных условиях в разных электронных системах.

Чтобы избежать недоразумений, здесь необходимо сделать специальное замечание. Существование обычной электронной жидкости при нулевой температуре запрещено теоремой Нернста. В дальнейшем мы будем иметь в виду, что электронная система находится при доста-

В.Т. Долгополов. Институт физики твёрдого тела РАН, ул. Академика Осипьяна 2, 142432 Черноголовка, Московская обл., Российская Федерация
E-mail: dolgop@issp.ac.ru

Статья поступила 26 сентября 2016 г.,
после доработки 20 декабря 2016 г.

точно низкой температуре для того, чтобы квантовые флуктуации превалировали над тепловыми, но она всё ещё способна оставаться обычной (или необычной) ферми-жидкостью. При конечной температуре в двумерной системе ввиду логарифмической расходимости теплового смещения электрона от узла кристаллической решётки само понятие кристалла теряет смысл в образцах большого размера. Таким образом, нам следует ограничиться двумерными системами малого размера (при температурах жидкого гелия — масштабом 1 см).

В более сложных, двухслойных, электронных системах возможно образование двумерных кристаллов из электронов различных слоёв, причём изменяя параметры (например, электронную плотность), можно изменять тип и симметрию кристалла. Теоретические предсказания, касающиеся фазовых переходов между кристаллами разного типа при температуре, близкой к абсолютному нулю, также представлены в настоящей статье.

Исследования вигнеровской кристаллизации остаются актуальными по настоящее время [6]. Экспериментальный бум в этой области в конце XX в. — начале XXI в. был связан как с улучшением качества исследованных структур, так и с развитием новых экспериментальных методик (см., например, [7]). При этом все возможные простые эксперименты, естественно, были проведены.

Прогресс последних лет связан в первую очередь с развитием сложных и трудоёмких методов исследований [8]. В сущности, в работе [8] впервые надёжно продемонстрировано наличие акустических резонансов в электронной "твёрдой", а возможно и кристаллической, фазе. Наиболее ярко акустические резонансы проявились при целочисленном квантовом эффекте Холла в окрестности фактора заполнения $\nu = 1$ ($\nu = chn_s/(eB)$, где B — нормальная компонента магнитного поля, n_s — плотность двумерного электронного газа, e — заряд электрона, c — скорость света в вакууме, h — постоянная Планка), однако их проявление заметно и при дробных факторах заполнения. Самое замечательное состоит в том, что в экспериментах [8] в образовании кристаллической фазы принимают участие не все электроны, а только возбуждения, возникающие в электронной системе в условиях, когда фактор заполнения отклоняется от правильного целочисленного или дробного значения.

Прогресс в экспериментальной технике является не единственной причиной, стимулирующей современные исследования вигнеровской кристаллизации. Появились новые материалы (например, графен) и новые идеи устройства твёрдой фазы в этих новых материалах. Возникла обширная область для экспериментальных исследований, пока не обеспеченная ни материалами необходимого качества, ни, что ещё более важно, экспериментальными методами. Представление этой области требует критического анализа большого массива работ, который, хотя бы частично, автор и старался провести в настоящей статье.

2. Вигнеровский кристалл в отсутствие магнитного поля

Область стабильности вигнеровского кристалла идеальной (без примесей) электронной системы в нулевом магнитном поле можно оценить по критерию Линдемана [9, 10]. При кулоновском взаимодействии характер-

ная частота колебаний электронов относительно узла решётки $\omega = [e^2(\pi n_s)^{3/2}/(em^*)]^{1/2}$, где ε — диэлектрическая проницаемость, m^* — эффективная масса электронов. Амплитуда нулевых колебаний $u = (\hbar\omega m^*)^{-1/2}$. Согласно критерию Линдемана эту амплитуду на границе квантового плавления сравниваем с постоянной решётки: $u = \gamma(\pi n_s)^{-1/2}$, где $\gamma = 0,2-0,25$ — численный параметр. В результате для критической концентрации n_c имеем

$$n_c = \left[\pi \left(\frac{a^*}{\gamma^4} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (1)$$

где a^* — эффективный радиус Бора. Специально отметим, что выражение (1) даёт лишь грубую оценку критической концентрации из-за неопределённости величины γ . В некоторых расчётах, например [11], приводится величина γ , примерно вдвое превышающая указанную выше.

Ожидается, что система при электронной плотности, превышающей критическую, будет находиться в жидком состоянии, а при меньших плотностях — в кристаллическом.

Если компенсирующий заряд расположен на металлическом электроде, параллельном двумерному электронному слою, то при низких концентрациях экранирование металлическим электродом приведёт к новой границе квантового плавления $n_{c1} < n_c$, ниже которой взаимодействие вновь окажется слабым.

Кулоновское взаимодействие между электронами принято характеризовать параметром $r_s = (\pi n_s)^{-1/2}/a^*$. В простейшем случае однодолинной вырожденной системы в полупроводниковой структуре $r_s = E_C/E_k$ и взаимодействие увеличивается по мере уменьшения электронной плотности.

Выражение (1) предсказывает исключительно низкие плотности электронов, необходимые для образования вигнеровского кристалла, т.е. исключительно высокие значения r_s . Для электронов в гетероструктуре GaAs/AlGaAs, например, $n_c \approx 5 \times 10^6 \text{ см}^{-2}$. Теоретическое моделирование, проведённое разными методами [12, 13], подтверждает вывод о малости n_c , поскольку обнаружено, что критической концентрации соответствует расстояние между электронами, равное $37a^*$ ($r_s = 37$). В реальных двумерных электронных системах переход из жидкости в твёрдую (следовательно, непроводящую) фазу происходит при электронной плотности, на два или даже на три порядка превышающей теоретическое значение n_c .

В работе [14] выполнен расчёт критической концентрации для перехода вигнеровский кристалл–жидкая фаза в нулевом магнитном поле при наличии хаотически распределённых с плотностью 10^{10} см^{-2} примесей, удалённых от двумерного электронного газа на 10 нм. Качественный итог расчёта состоит в том, что наличие примесей способствует переходу в твёрдую фазу. Обнаружено, что критическая концентрация увеличилась в 24 раза. Расчёт построен таким образом, что возникновение поликристалла исключено и твёрдая фаза либо представляет собой монокристалл с дефектами, либо является аморфной. В окрестности точки перехода твёрдая фаза представляет собой монокристалл с дефектами. Авторы работы [14] ориентировались на объяснение результатов, полученных на высокоподвижных Si-MOSFET (Metal

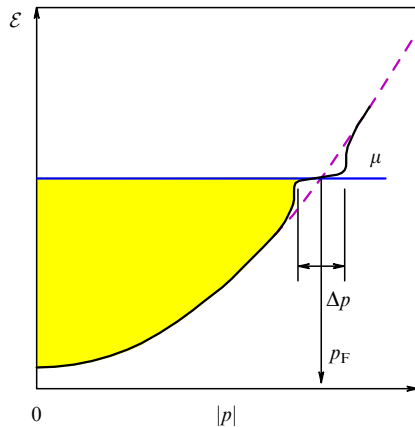


Рис. 1. Одночастичный электронный спектр в условиях, близких к конденсации фермионов [17].

Oxide Semiconductor Field-Effect Transistor) [15], использовали соответствующие параметры (электронную массу, диэлектрическую проницаемость) и получили результат, близкий к экспериментальному значению критической концентрации. Однако некоторые касающиеся Si-MOSFET факты, способные значительно изменить критическую электронную концентрацию, в то время не были ещё известны.

Учитывая то обстоятельство, что в реальных системах с примесями распределение локализованных электронов может даже отдалённо не напоминать кристалл, в дальнейшем при обсуждении таких систем мы будем употреблять термин "твёрдая фаза".

Вернёмся к рассмотрению идеальной электронной системы. Предсказанная в ней кристаллизация должна происходить при очень сильном взаимодействии между электронами. Невольно возникает вопрос: останется ли при столь сильном взаимодействии электронная жидкость хорошо знакомой нам ферми-жидкостью? Впервые этот вопрос был поставлен в работе [16], где был предсказан сопряжённый с конденсацией фермионов фазовый переход, способный предшествовать вигнеровской кристаллизации. Согласно [16] и последующим публикациям (см., например, [17]), электрон-электронное взаимодействие приводит к выполаживанию одночастичного электронного спектра в некоторой окрестности фермиевского импульса p_F , как показано на рис. 1. Экспериментально это проявляется в возрастании эффективной массы электронов на ферми-поверхности по мере уменьшения электронной плотности [18]. При достижении некоторой концентрации n_{FC} все электроны интервала Δp оказываются на уровне химического потенциала и электронная жидкость перестаёт быть ферми-жидкостью.

Как показывают численные расчёты [19], возрастание эффективной массы может быть усилено введением примесей, однако в имеющихся в настоящее время экспериментальных данных (см., например, [20]) подобная зависимость не обнаружена.

Увеличение критической концентрации на границе перехода двумерная электронная жидкость – твёрдая фаза в нулевом магнитном поле может быть отнесено к влиянию примесей в реальных двумерных структурах. При этом могут быть реализованы два сценария: непосредственный переход из ферми-жидкости в твёрдую,

непроводящую, фазу ($n_c > n_{FC}$) и двухступенчатый переход ферми-жидкость – фермионный конденсат – твёрдая фаза ($n_c < n_{FC}$). Пока неизвестно, какими свойствами будет обладать электронная система после первого фазового перехода при наличии примесей. Единственное, что надёжно установлено экспериментально: твёрдая фаза, наблюдавшаяся во всех экспериментах, представляет собой коллективное явление и не соответствует одночастичной локализации электронов.

3. Общая картина в нормальном магнитном поле

История исследований вигнеровских кристаллов в двумерных электронных системах, помещённых в нормальное магнитное поле, начинается с работ Фукуямы [9] и Лозовика и Юдсона [10]. Согласно работе [10], в электронной системе без примесей квантовое плавление вигнеровского кристалла в сильных магнитных полях должно происходить при концентрации, пропорциональной величине магнитного поля с коэффициентом пропорциональности $2\gamma^2$, где γ — параметр, входящий в условие Линдемана. Таким образом, граница квантового плавления в сильном магнитном поле соответствует фактору заполнения $\nu \approx 0,1$ (рис. 2). Близкий результат ($\nu = 0,15$) получен и в работе [21].

Линейная зависимость границы квантового плавления наблюдалась неоднократно в различных двумерных электронных системах [22–26], однако ни в одном из известных экспериментов соответствующий наклону границы фактор заполнения не был настолько низким.

Казалось бы, малый наклон границы раздела жидкой и твёрдой фаз можно объяснить несовершенством модели, принятой в [10]. В этой работе предполагалось, что каждый из электронов в узлах решётки колеблется независимо, а частота колебаний всех электронов одинакова, как в модели Эйнштейна для теплоёмкости. В действительности колебания электронной решётки являются коллективными и имеют дисперсию. Учёт этого обстоятельства [27] дополнительно вдвое уменьшает наклон границы раздела.

Как упоминалось, в нулевом магнитном поле в двумерных электронных системах с металлическим электродом понижение электронной плотности до величины менее чем n_c может привести к новому квантовому плавлению (синяя линия на рис. 2), обусловленному экранированием кулоновского взаимодействия затвором. Более

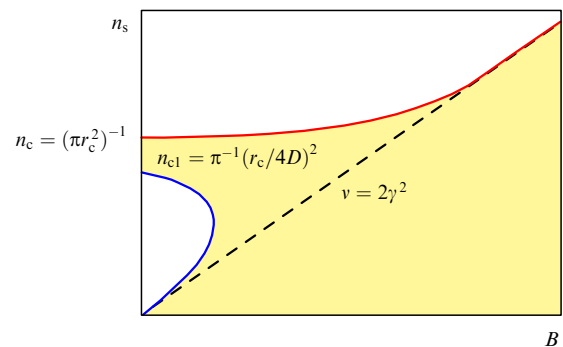


Рис. 2. (В цвете онлайн.) Граница квантового плавления согласно [10]. Здесь $r_c = a^*/\gamma^4$, D — расстояние до затвора. Тёмная область соответствует вигнеровскому кристаллу.

того, поскольку расстояние до металлического электрода определяется в процессе приготовления образца, при условии $2D < r_c$ в нулевом магнитном поле вигнеровский кристалл вообще не будет существовать — в идеальном случае он появится только при достаточно сильном магнитном поле. Приведённая на рис. 2 фазовая диаграмма соответствует случаю $2D > r_c$. Область существования жидкой фазы охватывает некоторую область на плоскости (B, n_s) , а граница раздела при $B \rightarrow 0$ выходит на ту же асимптоту, что и в сильных полях.

4. Смешивание квантовых уровней в слабом квантующем магнитном поле

Существенное влияние на положение границы квантового плавления оказывает соотношение между циклотронной и кулоновской энергиями. Если кулоновская энергия взаимодействия между электронами превышает циклотронную, то уже нельзя считать, что каждый из электронов находится в нижайшем квантовом состоянии, и использовать критерий Линдемана для нулевых колебаний, как в работе [10].

Параметром, определяющим смешивание состояний на разных квантовых уровнях, является

$$\alpha = \frac{e^2(\pi n_s)^{1/2}}{\varepsilon \hbar \omega_c} = \frac{v r_s}{2}. \quad (2)$$

Кривая ($\alpha = 1$), разделяющая плоскость (B, n_s) на две области, в одной из которых смешивание квантовых уровней существенно, показана на рис. 3 красной штриховой линией. Левее точки пересечения этой кривой с прямой $v = 2\gamma^2$ смешивание квантовых уровней существенно изменяет положение границы между квантовой жидкостью и твёрдой фазой. Наиболее интересны дробные факторы заполнения с нечётными знаменателями. В работе [31] показано, что в результате смешивания квантовых уровней жидкая фаза в режиме дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) может оказаться энергетически более выгодной, чем кристаллическая, что способно привести к осцилляциям границы раздела, как это качественно показано на рис. 3. Аналогичная фазовая диаграмма, построенная исходя из

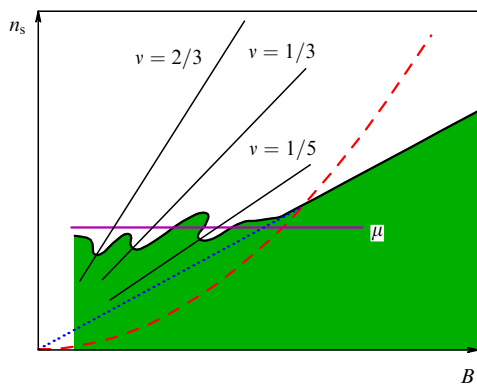


Рис. 3. (В цвете онлайн.) Схематическое изображение границы между квантовой жидкостью и вигнеровским кристаллом (тёмная область) в магнитном поле при учёте смешивания квантовых уровней. Даже в идеальной электронной системе смешивание квантовых уровней вследствие кулоновского взаимодействия [28–30] приводит к значительному изменению положения границы квантового плавления.

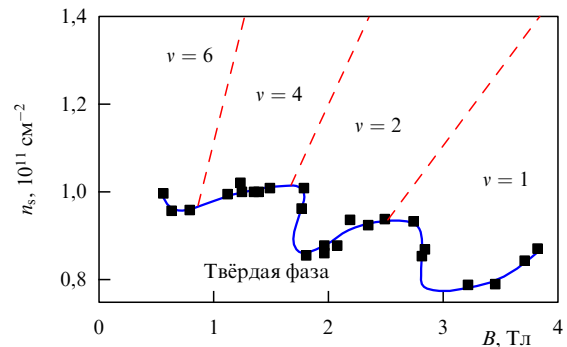


Рис. 4. Экспериментальное наблюдение осцилляций границы раздела квантовая жидкость – твёрдая фаза в области целочисленного квантового эффекта Холла в Si-MOSFET (100). (По данным работы [41].)

эмпирических соображений, недавно опубликована в работе [32].

Прямые наблюдения осцилляций границы раздела квантовая жидкость – вигнеровский кристалл в режиме ДКЭХ, несмотря на очень длительную историю экспериментальных исследований, до сих пор отсутствуют. Только в работе [33] приведено не очень убедительное свидетельство таких осцилляций. Зато имеются многочисленные наблюдения возвратной диэлектрической фазы в режиме ДКЭХ [34–39]. Как возникает возвратное поведение в окрестности фактора заполнения $v = 1/5$, продемонстрировано на рис. 3, где величина μ соответствует уровню химического потенциала в нулевом магнитном поле. В режиме ДКЭХ химический потенциал испытывает небольшие осцилляции [40], которыми для простоты мы пренебрегаем.

Как видно из рис. 3, в области относительно слабого магнитного поля двумерная электронная система находится в состоянии квантовой жидкости. В магнитном поле, превышающем соответствующее фактору заполнения $v = 1/3$, основным состоянием является кристаллическое, прерываемое квантовой жидкостью в окрестности фактора заполнения $v = 1/5$. Ясно, что в зависимости от положения химического потенциала аналогичное поведение может быть реализовано и при других дробных факторах заполнения.

И осцилляции границы раздела [24, 25, 41] (рис. 4), и возвратное поведение [42] наблюдались экспериментально в двумерных электронных системах кремниевых полевых транзисторов при целочисленных факторах заполнения.

Попытка теоретического объяснения осцилляций границы раздела в области целочисленного квантового эффекта Холла сделана в работе [43] при предположении, что на границе раздела между квантовой жидкостью и твёрдой фазой сосуществуют обе фазы и, следовательно, химические потенциалы электронов в двух фазах равны между собой,

$$\mu_S(n_c) = \mu_L(n_c, B). \quad (3)$$

Химический потенциал твёрдой фазы в магнитном поле остаётся постоянным (или слабо и монотонно изменяющимся), а химический потенциал жидкости осциллирует. Разлагая соотношение (3) до поправок первого порядка и учитывая, что химические потенциалы в нулевом маг-

нитном поле равны, получим

$$\delta n_c = \delta \mu(B) \left[\left(\frac{d\mu_S}{dn_S} - \frac{d\mu_L}{dn_L} \right)_{n_c, B=0} \right]^{-1}. \quad (4)$$

Как видно из соотношения (4), фаза и амплитуда осцилляций границы раздела определяются разностью сжимаемостей жидкой и твёрдой фаз.

Сжимаемость жидкой фазы при такой низкой плотности, как n_c , отрицательна. Сжимаемость твёрдой фазы определяется тем же самым кулоновским взаимодействием и тоже является отрицательной, однако по модулю сжимаемость жидкой фазы больше, поэтому фаза осцилляций границы раздела совпадает с фазой осцилляций химического потенциала жидкости. Как показано в работе [43], выражение (4) даёт правильный порядок величины осцилляций границы раздела, хотя и не полностью описывает их форму.

5. Сильное нормальное магнитное поле

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай, $\alpha < 1$. Как показано на рис. 2 и 3, ожидается, что граница выйдет на проходящую через начало координат асимптоту, имеющую наклон, соответствующий фактору заполнения $\nu \approx 0,1$.

Результаты измерений положения границы на высокоподвижных гетероструктурах GaAs/AlGaAs (с подвижностью от 2×10^6 до 8×10^6 $\text{см}^2 \text{В}^{-1} \text{с}^{-1}$) показаны на рис. 5. Прежде всего отметим, что возвратное поведение границы наблюдается в той области магнитных полей, где смешивание квантовых уровней несущественно. Действительно, на рис. 5 штриховой кривой отмечена граница сильного смешивания квантовых уровней. Правее этой границы смешивание слабое. Тем не менее в этой области обнаружено возвратное поведение твёрдой фазы, что иллюстрирует вставка на рис. 5 с данными из той же работы [22] (на основном рисунке соответствующие точки обозначены треугольниками).

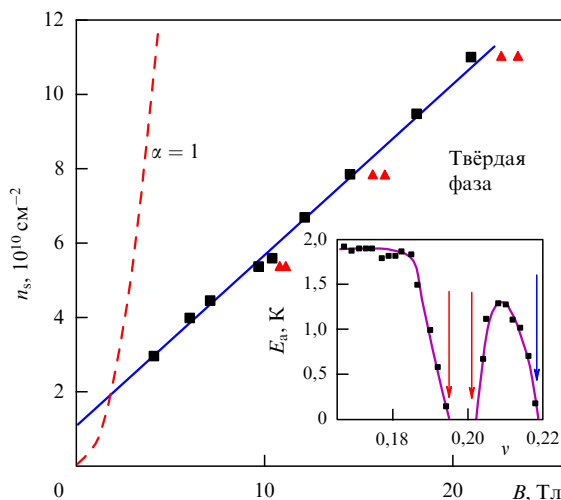


Рис. 5. Граница раздела твёрдой и жидкой фаз, построенная по данным работы [22]. Штриховая кривая отмечает границу сильного смешивания квантовых уровней. На вставке показана зависимость энергии активации от фактора заполнения для образца с максимальной электронной плотностью; стрелками указаны точки, соответствующие границам фаз.

Наблюдение возвратного поведения в этой области может быть обусловлено либо тем, что в правой части выражения (2) имеется большой численный коэффициент, либо тем, что смешивание квантовых уровней не является основным механизмом, приводящим к осцилляциям границы между твёрдой и жидкой фазами, либо тем, что возвратное поведение не связано с осцилляциями границы раздела фаз.

Та граница в сильных полях, которую указывают авторы работы [22] (сплошная линия на рис. 5), действительно близка к прямой, но её наклон примерно в два раза выше ожидаемого. Кроме того, вопреки теоретическим предсказаниям, прямая не проходит через начало координат. Если учесть возможность осцилляций границы раздела фаз, то сплошная прямая не будет истинной границей, разделяющей фазы в сильных полях. Истинная граница должна определяться линией, проведённой по лежащим справа точкам, обозначенным треугольниками.

Граница раздела между твёрдой и жидкой фазами на высокоподвижной кремниевой MOSFET-структуре измерена в работах [23, 24]. Данные работы [24] приведены на рис. 6. В исследуемых образцах с подвижностью $20000 - 30000$ $\text{см}^2 \text{В}^{-1} \text{с}^{-1}$ дробный квантовый эффект Холла не наблюдается, поэтому не приходится ожидать осцилляций границы, подобных изображённым на рис. 3. Как упоминалось (см. рис. 4), имеются осцилляции при целочисленных факторах заполнения. По мере увеличения магнитного поля и пересечения границей значения $\nu = 1$ граница раздела становится прямолинейной. Так же как и в случае гетероструктуры GaAs/AlGaAs, прямая не проходит через начало координат. Её наклон близок к фактору заполнения $\nu = 1/2$ (см. рис. 6).

Между результатами, полученными на Si-MOSFET и гетероструктурах GaAs/AlGaAs, имеется существенная разница, несмотря на их внешнее сходство: в первом случае (см. рис. 6) прямолинейная граница расположена в области сильного смешивания квантовых уровней, а во втором (см. рис. 5) — слабого.

Для того чтобы проверить факт слабой зависимости формы границы раздела между твёрдой и жидкой фазами от смешивания квантовых уровней, мы провели измерения на квантовых ямах $\text{In}_{0,75}\text{Ga}_{0,25}\text{As}$ толщиной 20 нм, заключённых между барьерами¹ $\text{In}_{0,75}\text{Al}_{0,25}\text{As}$. Двумерный электронный газ в этих структурах обладал сильным спин-орбитальным взаимодействием типа взаимодействия Рашбы [44, 45] и подвижностью 3×10^5 $\text{см}^2 \text{В}^{-1} \text{с}^{-1}$. Как видно из сравнения рис. 6 и 7, основное отличие электронов квантовой ямы InGaAs от электронов в Si-MOSFET состоит в разной степени смешивания квантовых уровней в области измерений. Несмотря на это различие, экспериментальные результаты близки: граница является прямолинейной, не проходит через начало координат, и её наклон существенно превышает ожидаемое из теории значение.

В заключение этого раздела отметим расхождение всех известных экспериментальных результатов в сильном поле с теоретически ожидаемыми. Во-первых, наклон зависимости $n_c(B)$ оказался не универсальным.

¹ Автор благодарит М.Ю. Мельникова, А.А. Шашкина, Г. Биасола (G. Biasiol) и Л. Сорба (L. Sorba) за возможность использовать выращенные ими структуры для приготовления образцов для измерений.

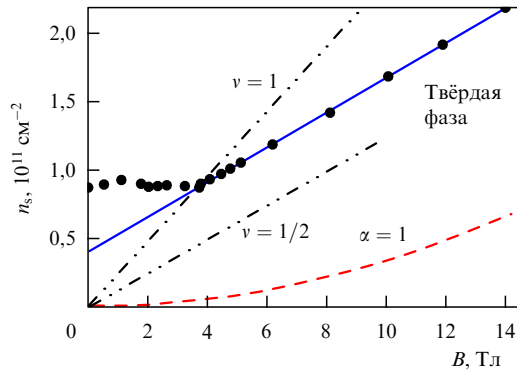


Рис. 6. Граница между жидкой и твёрдой фазами в Si-MOSFET (100) (по данным работы [24]). Отмечены линии, соответствующие факторам заполнения 1 и 1/2, а также $\alpha = 1$.

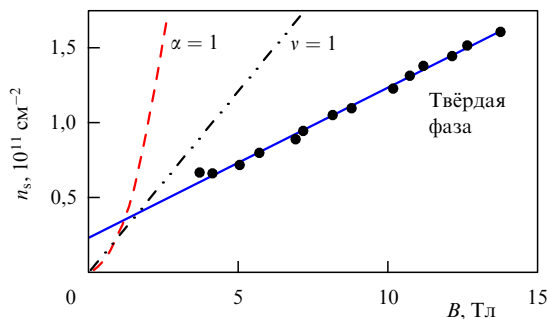


Рис. 7. Граница (сплошная линия) между жидкой и твёрдой фазами в квантовой яме InGaAs. Показаны также линия ($\alpha = 1$), отделяющая область сильного смешивания квантовых уровней от области слабого смешивания, и прямая, соответствующая фактору заполнения, равному единице ($\nu = 1$).

Во-вторых, прямая $n_c(B)$ на плоскости (n_s, B) не проходит через начало координат. Требование пропорциональности n_c и B имеет простое физическое обоснование: в сильных полях амплитуда нулевых колебаний обратно пропорциональна магнитному полю. Линейность вместо пропорциональности могла бы возникнуть только при наличии локализации части электронов на положительно заряженных центрах с радиусом локализации, существенно меньшим постоянной решётки кристаллитов вигнеровского кристалла.

6. Вигнеровский кристалл в графене

В этом разделе и разделах 7–11 мы рассмотрим "твёрдые" электронные фазы в материалах, попавших в поле зрения исследователей сравнительно недавно. Именно этим обстоятельством объясняется большое число теоретических работ при практически полном отсутствии экспериментальных. Информация о результатах этих теоретических работ поможет экспериментаторам осмысленно поставить задачу и разработать необходимые методы исследований.

Мы начнём с однослойного кристалла графена, т.е. монослоя графита, лежащего на диэлектрике или свободно висящего. Спектр носителей тока устроен так, что электронная и дырочная зоны касаются в углах шестиугольной зоны Бриллюэна. В зоне Бриллюэна есть две независимые ветви спектра, для каждой из которых

спектр имеет вид

$$\mathcal{E}(k) = \hbar v_G k, \quad (5)$$

где волновой вектор k отсчитывается от точки касания, а скорость v_G имеет порядок 10^8 см s^{-1} . Такой спектр называют "безмассовым". Двумерная система носителей тока в графене идеальна в том смысле, что волновая функция в направлении, нормальном к плоскости, имеет минимально возможный размер.

В работе [46] показано, что в нулевом магнитном поле существование вигнеровского кристалла в однослойном графене невозможно. Действительно, для существования вигнеровского кристалла необходимо, чтобы потенциальная энергия отталкивания между заряженными частицами E_C значительно превышала кинетическую энергию нулевых колебаний E_k , $E_C \gg E_k$. В случае квадратичного спектра последнее соотношение эквивалентно условию (1).

В вигнеровском кристалле графена с межчастичным расстоянием L потенциальная энергия в области площадью A равна $E_C = n_s A e^2 / (\epsilon L)$, а соответствующая кинетическая энергия $E_k = \hbar v_G (2\pi/L) n_s A$. Поскольку отношение энергий

$$\frac{E_C}{E_k} \simeq \frac{e^2}{\hbar \epsilon v_G} \quad (6)$$

не зависит от плотности электронов, существование ферми-жидкости в графене означает отсутствие вигнеровского кристалла. Так как диэлектрическая проницаемость может быть только увеличена, невозможно достичь кристаллизации изменением ϵ . Остаётся ещё возможность уменьшения v_G , что можно осуществить приложением механического напряжения к слою графена. Однако для достижения вигнеровской кристаллизации необходимо уменьшить скорость более чем на порядок, что не представляется возможным.

Отсутствие вигнеровской кристаллизации в нулевом магнитном поле вовсе не означает её отсутствия в сильных полях. В квантующем магнитном поле в однослойном графене имеются две лестницы квантовых уровней с различными псевдоспиновыми индексами, отвечающими разным долинам. Долинное расщепление сравнимо с циклотронным, поэтому квантовые уровни могут быть представлены следующими соотношениями (см., например, [47]):

$$E_n^u = \text{sign } n \frac{\hbar v_G}{2\pi l} (2|n|)^{1/2}, \quad (7)$$

$$E_n^d = \text{sign } n \frac{\hbar v_G}{2\pi l} (2|n+1|)^{1/2},$$

где $l = [\hbar / (eB)]^{1/2}$ — магнитная длина. Причём каждый из уровней уравнений (7) ещё двукратно вырожден по спину.

Вопрос о возможности кристаллизации носителей тока в системе со спектром (5) рассмотрен в работе [48]. Хотя работа [48] имеет ряд ограничений (в ней игнорируется возможность дробного квантового эффекта Холла, пренебрегается смешиванием квантовых уровней, и расчёт методом среднего поля ограничен факторами заполнения тех областей, в которых существенны корреляции носителей тока с разными псевдоспиновыми индексами, принадлежащих разным долинам), а её выводы пока не подтверждены экспериментально, она интересна

тем, что в ней не только предсказывается возможность существования вигнеровского кристалла, но и демонстрируются разнообразные кристаллические фазы, разделённые межфазными границами.

Авторы [48] различают обычный вигнеровский кристалл с одной ферми-частицей на элементарную ячейку, так называемые пузырьковые (bubble) фазы с двумя ($N = 2$) и тремя ($N = 3$) частицами на элементарную ячейку, и полосковые фазы, напоминающие волны зарядовой плотности.

Например, в области факторов заполнения, отвечающих нижнему из квантовых уровней с номером $n = 2$, согласно результатам расчёта [48], по мере возрастания фактора заполнения ожидается следующая последовательность кристаллических фаз: вигнеровский кристалл, пузырьковый кристалл с $N = 2$, полосковый кристалл. На следующем уровне Ландау в соревнование фаз вмешивается и пузырьковый кристалл с $N = 3$.

Каждая из указанных фаз даже при фиксированном факторе заполнения должна исчезнуть по мере ослабления магнитного поля. Вопрос о границах существования кристаллических фаз в магнитном поле в работе [48] не рассматривался. Позднее теми же авторами было показано [49], что в графене смешивание уровней Ландау не приводит к существенным изменениям фазовой диаграммы.

В работе [50] высказана идея, что в графене возможно возникновение, наряду с зарядовой неоднородностью, набора псевдоспиновых структур и меронных кристаллов. В подтверждение этой идеи проведено численное сравнение энергий различных меронных кристаллов между собой, с энергией вигнеровского кристалла и пузырьковых кристаллов.

Простейшая экспериментальная проверка предсказаний работ [48, 49] могла бы быть выполнена на образцах графена в геометрии Корбино. В окрестности соответствующего фактора заполнения даже незначительное изменение энергии активации, обусловленное фазовым переходом, должно проявиться в форме максимума измеряемой величины обратной проводимости $1/\sigma_{xx}$.

7. Двухслойный графен

В последние годы интерес теоретиков к вигнеровской кристаллизации в графене сосредоточился на исследовании двухслойного графена (рис. 8а). Этот материал образован двумя близко расположенными слоями графита. Если бы отсутствовало туннелирование между слоями, то его спектр полностью повторял бы спектр однослойного графена с дополнительным двукратным вырождением.

Из рисунка 8б видно, что часть узлов двух слоёв в проекции на базисную плоскость совпадает и туннелирование по таким узлам снимает дополнительное вырождение. Результатом туннелирования кроме снятия вырождения является исчезновение конической точки. Спектр (рис. 9а) остаётся бесщелевым с конечной, хотя и малой массой носителей ($m = 0,033 m_0$, где m_0 — масса свободного электрона).

Может ли система с таким спектром переходить в кристаллическое состояние в отсутствие магнитного поля, и если может, то каким будет распределение электронной плотности? Попытка дать теоретический ответ на эти вопросы сделана в работе [51], где проведён чис-

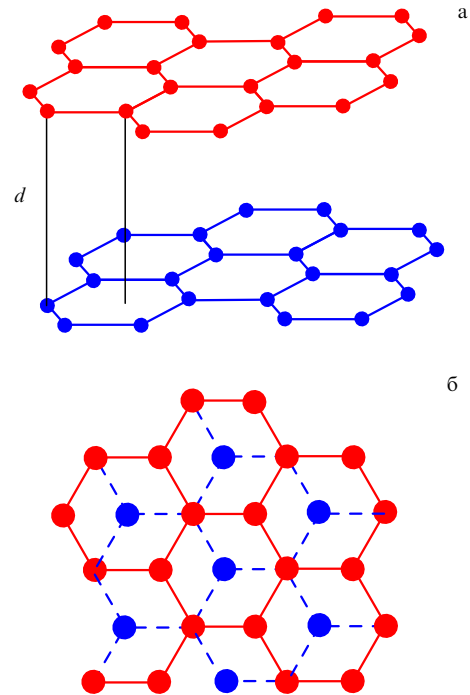


Рис. 8. (а) Кристаллическая структура двухслойного графена в конфигурации берналовской АВ-упаковки. Расстояние между слоями $d = 0,335$ нм. (б) Проекция двухслойного графена на базисную плоскость.

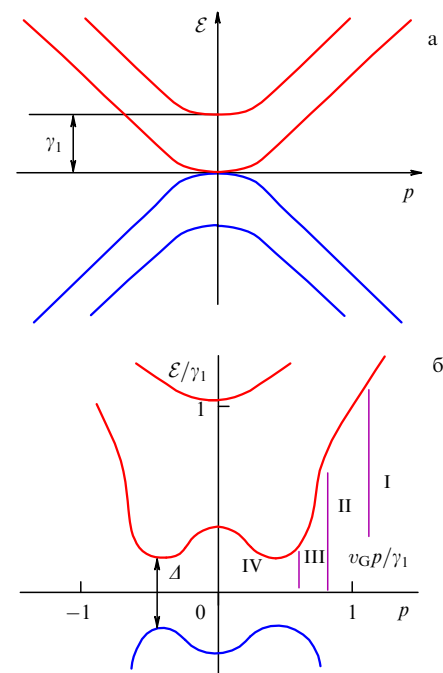


Рис. 9. Схематическое изображение спектров двухслойного графена: (а) в отсутствие электрического поля; (б) при наличии разности потенциалов между слоями.

ленный анализ равновесного распределения электронной плотности на различных узлах решётки двухслойного графена в модели сильной связи. Варьируемыми параметрами являлись средняя плотность электронов на узле, вероятность межслойного туннелирования и кулоновский потенциал. Показано, что существует область параметров, в которой неоднородное распределение

электронов по узлам может трактоваться как вигнеровская кристаллизация. Продемонстрирована возможность существования двух различных фаз. Ни теоретического, ни экспериментального продолжения, насколько нам известно, работа [51] не имела.

Щель в спектре двухслойного графена может быть создана с помощью приложения между слоями разности электрических потенциалов V . При этом концентрации носителей тока в слоях неизбежно будут различными. Величина щели управляется приложенным напряжением:

$$A = eV \left(\frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 + e^2 V^2} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Схематически спектр двухслойного графена при наличии напряжения между слоями показан на рис. 9б.

Двухслойный графен при наличии электрического поля между слоями более удобен для эксперимента. Варианты вигнеровской кристаллизации в нём теоретически рассмотрены в работе [52]. Мы ограничимся нижней электронной подзоной. Ось энергии можно разбить на четыре интервала (рис. 9б):

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \mathcal{E} &\approx v_G p, \quad v_G p \gg \gamma_1; \\ \text{II)} \quad \mathcal{E} &\approx \frac{v_G^2 p^2}{\gamma_1}, \quad (eV\gamma_1)^{1/2} \ll v_G p \ll \gamma_1; \\ \text{III)} \quad \mathcal{E} &\approx eV + \frac{v_G^4 p^4}{2eV\gamma_1^2}, \quad eV \ll v_G p \ll (eV\gamma_1)^{1/2}; \\ \text{IV)} \quad \mathcal{E} &\approx eV - \frac{2v_G^2 p^2}{\gamma_1^2} + \frac{v_G^4 p^4}{2eV\gamma_1^2}, \quad v_G p \approx eV. \end{aligned} \quad (9)$$

В пределах интервала I, т.е. при больших энергиях и электронных концентрациях, слои графена слабо связаны, спектр линейен и кулоновское взаимодействие имеет тот же вид, что и в однослойном графене. Существование вигнеровского кристалла в этом интервале невозможно.

В интервале II существенную роль играет экранирование. Кулоновская энергия имеет вид $E_C(r \gg 1/q_{TF}) \simeq e^2 / [(q_{TF} r)^2]$, где $(q_{TF})^{-1} \approx \hbar v_G / (2p\gamma_1)$ — томас-фермиевский радиус экранирования. Очевидно, что кулоновская энергия не может превысить кинетическую в данном интервале, поэтому вигнеровская кристаллизация здесь также невозможна.

В интервале III спектр электронной системы двухслойного графена подобен спектру изолятора, поскольку обладает щелью. Экранированное кулоновское взаимодействие выглядит следующим образом:

$$E_C \left(r \gg \frac{\hbar v_G}{(eV\gamma_1)^{1/2}} \right) = \frac{3eV}{4} \ln \frac{\hbar v_G}{eVr}. \quad (10)$$

Взаимодействие между электронами весьма напоминает взаимодействие между вихрями Абрикосова в сверхпроводнике, которые, как известно, образуют треугольную решётку.

Для определения границы квантового плавления в интервале III в работе [52] использован гамильтониан с эффективным межчастичным взаимодействием (10). Согласно критерию Линдемана граница задана условием

$$a \gg \frac{dg_0}{(eV\gamma_1)^{1/2}}, \quad (11)$$

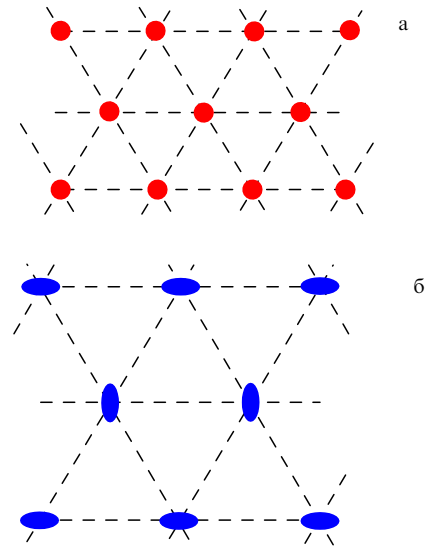


Рис. 10. Схематическое изображение электронной плотности в вигнеровском кристалле (а) интервала III и (б) интервала IV. (По результатам работы [52].)

где a — постоянная решётки кристалла, $g_0 = 2\hbar v_G / (3d) = 2,8 eV \gg \gamma_1 = 0,39 eV$. Поскольку a определяет плотность электронов, условие (11) задаёт верхнюю границу квантового плавления.

При дальнейшем понижении электронной плотности произойдёт переход в интервал IV, где ещё раз изменится экранирование и совершится структурный переход кристалл — кристалл со сменой симметрии. Последний переход определяется условием $a \approx dg_0\gamma_1 / (eV)^2$. Распределение электронной плотности вблизи узлов решётки показано на рис. 10.

Отличительной чертой двухслойного графена в интервале IV является одночастичный электронный спектр, имеющий форму "сомбреро". Как и почему спектр такого рода приводит к нетривиальному распределению электронной плотности в узлах вигнеровского кристалла, удобно рассмотреть на примере однослойной электронной системы с сильным спин-орбитальным взаимодействием.

8. Вигнеровский кристалл в системе с сильным спин-орбитальным взаимодействием

В этом разделе мы рассмотрим электронный газ с сильным спин-орбитальным взаимодействием типа взаимодействия Рашбы. Кинетическая часть гамильтониана имеет вид

$$\sum_i H_{0i} = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + \lambda (\sigma_x p_{yi} - \sigma_y p_{xi}) - \frac{m\lambda^2}{2} \right), \quad (12)$$

где λ — константа спин-орбитального взаимодействия, $\sigma_{x,y}$ — матрицы Паули. Решением уравнения Шрёдингера с таким гамильтонианом является одночастичный спектр, показанный на рис. 11а. Спин электрона нормален его импульсу, а точки минимальной энергии в p -пространстве образуют окружность радиусом $m\lambda$.

Потенциальная часть гамильтониана выражается как

$$\sum_{i < j} \frac{e^2}{|\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{r}_{ij}|}, \quad (13)$$

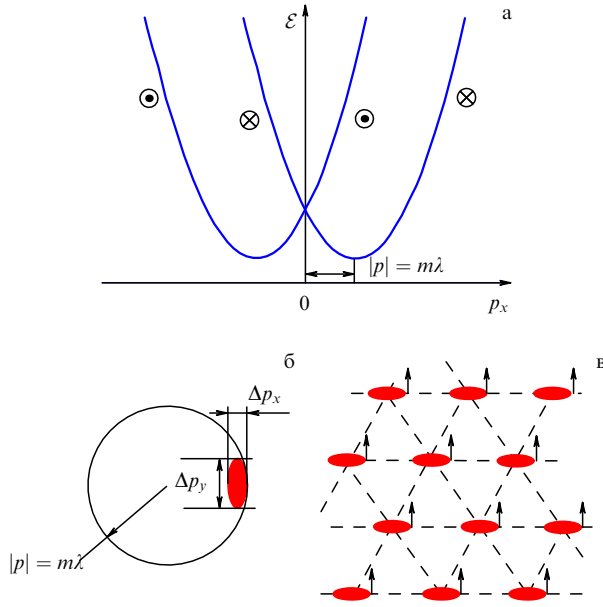


Рис. 11. Спектр электронной системы с сильным спин-орбитальным взаимодействием типа взаимодействия Рашбы. (б) Область формирования волнового пакета в импульсном пространстве. (в) Символическое изображение вигнеровского кристалла с асимметричным распределением электронной плотности в узлах решётки; стрелками показана ориентация спина электронов.

\mathbf{R}_i задаёт положение узлов треугольной решётки с периодом a , \mathbf{r}_i — отклонение электрона от соответствующего узла. Если кулоновское взаимодействие сильное и реализуется кристалл, то частота колебаний относительно узла решётки имеет в соответствии с (13) порядок

$$\omega_0 \simeq \left(\frac{e^2}{ma^3} \right)^{1/2}. \tag{14}$$

В дальнейшем предполагается, что спин-орбитальное взаимодействие сильное и

$$m\lambda^2 \gg \hbar\omega_0, \tag{15}$$

следовательно, вигнеровский кристалл граничит с жидкостью, занимающей в p -пространстве узкую полосу вблизи окружности $|p| = m\lambda$. При этом предполагается выполненным обычное условие $e^2/a \gg \hbar\omega_0$.

Невольно возникает вопрос: не являются ли приведённые неравенства противоречивыми? Простые арифметические выкладки показывают, что они согласуются при условии

$$\lambda \geq \frac{e^2}{\epsilon\hbar}. \tag{16}$$

Недавно появилось сообщение о реализации двумерной электронной системы со спин-орбитальным взаимодействием типа взаимодействия Рашбы, удовлетворяющим условию (16) [45].

Дальнейшие рассуждения в равной мере относятся как к системам, рассматриваемым в этом разделе, так и ко всем двумерным электронным системам со спектром типа "сомбреро". Будем строить кристалл в виде пакета одночастичных электронных волновых функций в каждом из узлов. Для построения такого пакета можно было

бы использовать все состояния в пределах полосы вблизи окружности $|p| = m\lambda$. Такой симметричный волновой пакет имел бы энергию нулевых колебаний, определяемую величиной Δp :

$$(p - m\lambda)^2 < \Delta p^2 \simeq \left(\frac{e^2\hbar^2 m}{a^3} \right)^{1/2} \ll (m\lambda)^2. \tag{17}$$

Однако если нарушить симметрию волнового пакета, например, так, как это показано на рис. 11б, то энергия нулевых колебаний может быть уменьшена. Действительно, можно сделать $\Delta p_x \ll \Delta p$, что приведёт к вытягиванию электронной волновой функции в x -направлении в реальном пространстве. Соответственно, в y -направлении для формирования волнового пакета придётся использовать интервал импульсов $m\lambda \gg \Delta p \gg \Delta p_x$, что не приведёт к заметному увеличению энергии нулевых колебаний, поскольку вдоль окружности $|p| = m\lambda$ величина $\langle H_{0i} \rangle$ минимальна (см. рис. 11). Что касается изменения потенциальной энергии в результате вытягивания волновой функции в x -направлении, то её малость по сравнению с энергией нулевых колебаний ограничивает $\Delta x \simeq [a^3\hbar^2/(me^2)]^{1/4}$.

Очевидно, что система параллельно вытянутых эллипсоидальных пакетов в узлах кристаллической решётки, показанная на рис. 11в, не является единственной возможной [53]. Могут существовать, например, кристаллы с ортогональной ориентацией эллипсоидов, как на рис. 10б, или с эллипсоидами, повернутыми на угол 120° . Последнее утверждение означает, что в системах с сильным спин-орбитальным взаимодействием возможны переходы между разными кристаллическими фазами. Ещё больше вариантов для построения различных кристаллических фаз предоставляют электронные системы с экранированным взаимодействием [54].

Основной проблемой экспериментальных исследований систем с сильным спин-орбитальным взаимодействием является необходимость достижения очень низких электронных плотностей и, следовательно, создания систем, обладающих высокой степенью совершенства. Только в наиболее совершенных системах могли бы быть обнаружены описанные выше тонкие эффекты. Наиболее удобными объектами могли бы стать квантовые ямы InAs или InGaAs с барьерами InAlAs. К сожалению, существующие материалы такого типа пока недостаточно совершенны. Даже в лучших из них наблюдается перколяционный переход из проводящей фазы в непроводящую, связанный с остаточным беспорядком.

9. Двухслойные электронные системы

Рассмотрим электронную систему, состоящую из двух параллельных слоёв с равной электронной плотностью, разделённых расстоянием d . Будем полагать, что суммарная концентрация электронов n_s меньше половины критической, $n_s < n_c/2$, система идеальна, а кулоновское взаимодействие не экранировано [55–63]. Туннелирование между слоями считаем пренебрежимо малым.

Подобная электронная система может быть реализована в двойной квантовой яме с узким непроницаемым барьером. Для обеспечения равенства концентраций требуются два затвора, расположенных по разные стороны от ямы и удалённых от неё на расстояние, значительно превышающее межэлектронное.

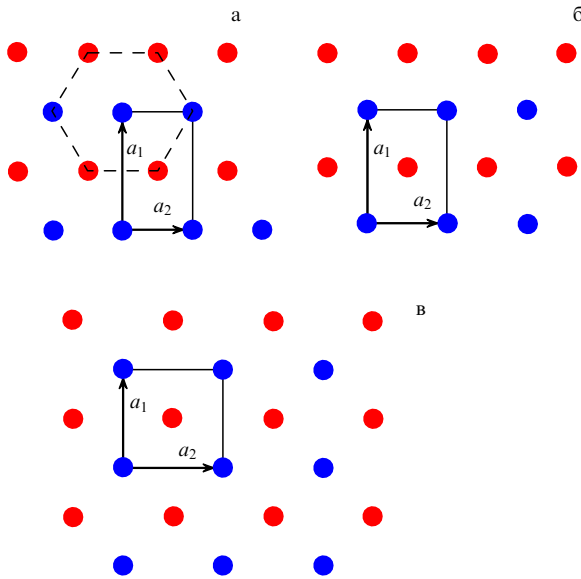


Рис. 12. Начальная часть эволюции вигнеровского кристалла двухслойной системы по мере увеличения расстояния между слоями. (а) Треугольная решётка, составленная из электронов разных слоёв. Показана элементарная ячейка для электронов одного слоя, $a_1/a_2 = \sqrt{3}$. (б) Прямоугольная элементарная ячейка в каждом слое $1 < a_1/a_2 < \sqrt{3}$. (в) Квадратная элементарная ячейка в каждом слое.

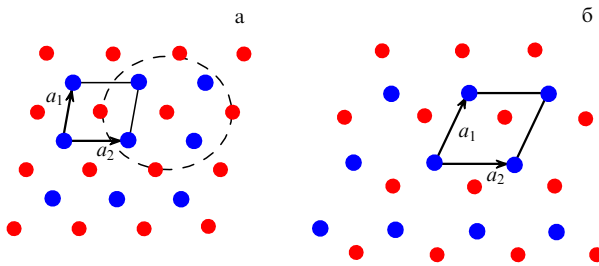


Рис. 13. Продолжение эволюции вигнеровского кристалла двухслойной системы по мере увеличения расстояния между слоями.

Основное состояние системы определяется минимумом кулоновской энергии, зависящим от параметра $\eta = dn_s^{1/2}$. Ясно, что как при очень малых, так и при очень больших расстояниях между слоями кристаллическая решётка будет треугольной, но в первом случае она будет состоять из электронов разных слоёв (рис. 12а), а во втором случае — только из электронов, принадлежащих каждому слою (рис. 13б). Как следует из численных расчётов, увеличение расстояния между слоями приводит к фазовому переходу второго рода при $\eta = \eta_1$, после которого решётка в каждом из слоёв станет прямоугольной с $1 < a_1/a_2 < \sqrt{3}$ (рис. 12б). Следующий фазовый переход второго рода произойдёт при $\eta = \eta_2$ (рис. 12в), и решётка в каждом слое станет квадратной. Решётка такого вида сохранится при η вплоть до значения $\eta = \eta_3$, при котором произойдёт очередной переход второго рода, и при $a_1 = a_2$ начнёт изменяться угол между базисными векторами (рис. 13а). При $\eta = \eta_4$ решётка в каждом из слоёв станет треугольной (рис. 13б).

Если же $n_c/2 < n_s < n_c$, то цепочка квантовых переходов между твёрдыми фазами может быть прервана плавлением. Интересно, что в указанной цепочке вигне-

ровских кристаллов наиболее устойчивой к термическому плавлению оказывается модификация, показанная на рис. 12в [64].

В квантующем магнитном поле при факторах заполнения, меньших единицы, пространственная структура вигнеровского кристалла описывается теми же пятью вариантами, представленными на рис. 12 и 13 [65]. Однако учёт даже слабого туннелирования между слоями приводит к сложным и разнообразным, зависящим от фактора заполнения, фазовым диаграммам, в которых изменяется не только пространственное положение узлов кристаллической решётки, но и состав каждого узла из электронов разных слоёв (псевдоспиновое состояние узла). Детально обсуждать эти диаграммы нет смысла, поскольку на сегодня отсутствуют не только эксперименты в этой области, но и даже идеи экспериментальной проверки теоретических предсказаний.

10. Методы регистрации границы жидкость – твёрдая фаза

Наиболее убедительным методом экспериментальной регистрации квантового плавления было бы наблюдение поперечных волн, распространяющихся в кристалле, и их исчезновения в точке плавления. В одной из ранних публикаций [66] сообщалось об обнаружении в твёрдой фазе поперечных колебаний, что вскоре было опровергнуто [67]. До сих пор нет сообщений об удачном применении такого метода. Наиболее вероятная причина этого заключается в несовершенстве твёрдой фазы, с которой работают экспериментаторы. Даже при исследовании наиболее совершенных двумерных электронных систем нет уверенности в том, что объект исследования монокристаллический. В многочисленных экспериментах использовались иные методы, не требующие сколько-нибудь дальнего порядка в твёрдой фазе.

Обнаружено, что в твёрдой фазе диссипативная проводимость имеет активационный характер. Измеряя энергию активации как функцию электронной плотности, $E_a(n_s)$, по мере приближения к границе твёрдая фаза – жидкость, можно определить граничную концентрацию с помощью экстраполяции энергии активации к нулю. Однако этот идейно очень простой метод для своей реализации требует немалых усилий, поскольку для определения энергии активации при каждой электронной плотности необходимо измерить температурную зависимость проводимости и набрать достаточное число точек на зависимости $E_a(n_s)$ для надёжной экстраполяции. А в результате этих усилий находится лишь одна точка границы.

Менее трудоёмкий, хотя и менее обоснованный метод построения границы по транспортным данным состоит в исследовании нелинейных свойств твёрдой фазы при температуре порядка 10 мК. При таких температурах вольт-амперные характеристики твёрдой фазы демонстрируют пороговое поведение в интервале напряжений, плавно уменьшающемся по мере приближения к границе раздела фаз. Экстраполяция к нулю зависимости порогового напряжения от концентрации даёт граничное значение электронной плотности. В пределах погрешности оба транспортных метода приводят к совпадающим значениям граничной концентрации [68].

Следует отметить ещё один, наиболее быстрый, метод "полуколичественного" построения границы между

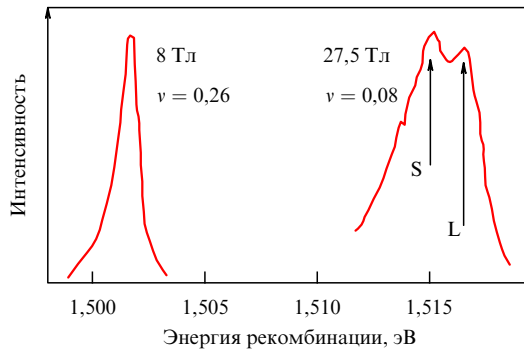


Рис. 14. Нормированные спектры люминесценции при электронной концентрации $5,4 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$ в различных магнитных полях. Линия L отвечает жидкой фазе, линия S предположительно относится к твёрдой фазе. (По данным работы [7].)

твёрдой и жидкой фазами. Для этого достаточно при низкой ($\approx 30 \text{ мК}$) температуре отметить ту концентрацию, при которой диссипативная проводимость уже мала, например, равна $0,1e^2/h$. Проводимость убывает по мере удаления от границы настолько быстро, что коэффициент при e^2/h не сдвигает сколько-нибудь значительно граничное значение концентрации.

Для регистрации появления твёрдой фазы авторы экспериментов [7, 69] (при предположении, что твёрдая фаза является вигнеровским кристаллом) в одиночном гетеропереходе GaAs/AlGaAs использовали также оптический метод, состоявший в наблюдении спектров излучательной рекомбинации электронов с дырками в дельта-слое акцепторов. Показано, что в спектрах при низких температурах в сильных магнитных полях появляется дополнительная линия, сдвинутая в область меньших энергий (рис. 14). По многим признакам (поведение с изменением температуры, гашение при дробных факторах заполнения и т.п.) обнаруженная линия может быть отнесена к люминесценции электронов твёрдой фазы, хотя граница между жидкостью и твёрдой фазой, приведённая в [7], отличается от таковой, построенной по данным работы [22]. Возможно, это различие имеет принципиальный характер, поскольку в оптических экспериментах исследуются объёмные свойства, а в транспортных, если система носителей тока неоднородна, — свойства перколяционной сетки.

Отметим, наконец, ещё одну возможность регистрации границы между жидкостью и твёрдой фазой. В работах [70–75] показано, что в сильных магнитных полях при возбуждении твёрдой фазы радиочастотным сигналом можно наблюдать резонансы, которые были интерпретированы как резонансные колебания запинингованного вигнеровского кристалла. Граница может быть построена по точкам исчезновения резонансов.

Отклик двумерной электронной системы на радиочастотное возбуждение может быть исследован и в экспериментах по распространению поверхностных акустических волн. Эти эксперименты позволяют работать с системами, обладающими самой высокой подвижностью, не экранируя кулоновское взаимодействие между электронами, а также отходить от границы вглубь твёрдой фазы [76]. К сожалению, этот метод, несмотря на свою очевидную перспективность, не проявил каких-либо преимуществ по сравнению с другими методами исследований.

11. Промежуточные фазы

Условие Линдемана задаёт границу устойчивости кристаллического состояния, но никак не определяет, что будет с системой носителей тока после плавления. Существует много теоретических предложений о возможных промежуточных фазах между классической ферми-жидкостью и кристаллом. Одна из таких промежуточных фаз — фермионный конденсат — обсуждалась в разделе 1. Первое упоминание о возможном появлении высококоррелированной промежуточной фазы содержится в работе [77], где обсуждается существование жидкости свободно распространяющихся дефектов в кристалле. В случае обычного теплового плавления вигнеровского кристалла предполагается, что сначала исчезнет трансляционный порядок, но сохранится ориентационный [78] (переход через состояние, называемое гексатиком). Аналогичный сценарий возможен и для квантового плавления. Остаётся неясным, насколько транспортные свойства высокодефектных фаз будут отличаться от свойств ферми-жидкости.

Ещё один вариант промежуточных (микроэмульсионных) фаз предложен в работе [79]. Предсказанные в [79] многочисленные промежуточные фазы могут быть реализованы в специальных условиях, а именно при наличии металлического электрода (затвора), отстоящего от двумерного слоя на значительное расстояние, $n_s D^2 \gg 1$. Характерный размер микроэмульсионной фазы при этом заведомо превышает D . С учётом упоминавшихся выше электронных концентраций, типичных для вигнеровской кристаллизации в чистом пределе, и характерных расстояний до затвора в реально существующих структурах (100 нм) можно сделать вывод о том, что в стандартных, исследуемых в настоящее время, структурах появление промежуточных фаз этого типа маловероятно.

В качестве промежуточной фазы в работах [80, 81] предложена фаза, в которой многочастичная электронная функция обладает свойствами как кристалла, так и жидкости. Например, корреляционная функция плотность–плотность, определяющая вероятность обнаружить электрон в точке r при условии, что второй электрон находится в нуле, имеет максимумы в узлах треугольной кристаллической решётки (как в кристалле), но не обращается в нуль между ними, чем напоминает жидкость. Подобная волновая функция соответствует жидкости квазичастиц с массой, возрастающей по мере усиления взаимодействия [82, 83]. Расчёт методом Монте-Карло показал, что эта фаза в системе спин-поляризованных однодолинных носителей тока может быть основным состоянием в интервале $30 < r_s < 80$. Критическая концентрация, определяющая границу перехода между жидкостью и предсказанной в [80] гибридной промежуточной фазой, в принципе может быть определена по смене круговой симметрии ферми-поверхности шестиугольной.

12. Заключение

Историю исследований квантового плавления, несмотря на обилие как теоретических, так и экспериментальных работ, вряд ли можно считать законченной. Ниже мы перечислим несколько вопросов, остающихся открытыми.

1. Прежде всего, это вопрос о границе между твёрдой и жидкой фазами на плоскости (n_s, B) . Нет определённых теоретических предсказаний о поведении границы даже в случае идеального вигнеровского кристалла в совершенной электронной системе при учёте конкуренции с целочисленным и дробным квантовыми эффектами Холла. Чего следует ожидать: осцилляции границы или, как это можно заключить из экспериментов [22], внедрения дробных квантовых жидкостей в область твёрдой фазы?

Нет никаких теоретических предсказаний относительно поведения границы в реальной двумерной твёрдой фазе, стимулированной примесями.

Остаётся непонятным, почему наклон границы в сильных магнитных полях не является универсальным.

Не выяснена роль поликристалличности в твёрдой фазе реальных электронных систем.

2. Отсутствует экспериментальная информация о кристаллизации и квантовом плавлении твёрдой фазы в таких интересных системах, как двухслойный графен, двумерные системы с сильным спин-орбитальным взаимодействием и двухслойные системы.

3. Отсутствует убедительная экспериментальная информация по промежуточным фазам между классической квантовой жидкостью и кристаллом.

Экспериментальное продвижение требует в первую очередь создания гораздо более совершенных структур, чем имеющиеся в настоящее время.

Автор благодарит за полезные обсуждения, замечания и советы Э.В. Девятова, В.М. Пудалова, А.А. Шашкина и А.В. Чаплика. Работа поддержана РФФИ (гранты 15-02-03537 и 16-02-00404), РАН и Министерством образования и науки РФ.

Список литературы

- Wigner E *Phys. Rev.* **46** 1002 (1934)
- Монарха Ю П, Сивоконь В Е *Физика низких температур* **38** 1355 (2012); Monarkha Yu P, Sivokon' V E *Low Temp. Phys.* **38** 1067 (2012)
- Чаплик А В *ЖЭТФ* **62** 746 (1972); Chaplik A V *Sov. Phys. JETP* **35** 395 (1972)
- Lindemann F A *Phys. Z.* **11** 609 (1910)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* 2-е изд. (М.: Физматгиз, 1964); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980)
- Sólyom J *EPJ Web of Conf.* **78** 01009 (2014)
- Kukushkin I V, Timofeev V B *Adv. Phys.* **45** 147 (1996)
- Jang J et al. *Nature Phys.* **13** 340 (2017); arXiv:1604.06220
- Fukuyama H *Solid State Commun.* **17** 1323 (1975)
- Лозовик Ю Е, Юдсон В И *Письма в ЖЭТФ* **22** 26 (1975); Lozovik Yu E, Yudson V I *JETP Lett.* **22** 11 (1975)
- Беданов В М, Гадияк Г В, Лозовик Ю Е *ЖЭТФ* **88** 1622 (1985); Bedanov V M, Gadiyak G V, Lozovik Yu E *Sov. Phys. JETP* **61** 967 (1985)
- Tanatar B, Ceperley D *Phys. Rev. B* **39** 5005 (1989)
- Chui S T, Esfarjani K *Europhys. Lett.* **14** 361 (1991)
- Chui S T, Tanatar B *Phys. Rev. Lett.* **74** 458 (1995)
- Pudalov V M et al. *Phys. Rev. Lett.* **70** 1866 (1993)
- Ходель В А, Шагинян В Р *Письма в ЖЭТФ* **51** 488 (1990); Khodel V A, Shaginyan V R *JETP Lett.* **51** 553 (1990)
- Amusia M Ya et al. *Theory of Heavy-Fermion Compounds. Theory of Strongly Correlated Fermi-Systems* (New York: Springer, 2014)
- Долгополов В Т *Письма в ЖЭТФ* **101** 300 (2015); Dolgoplov V T *JETP Lett.* **101** 282 (2015)
- Fleury G, Waintal X *Phys. Rev. B* **81** 165117 (2010)
- Pudalov V M, Gershenson M, Kojima H, in *Fundamental Problems of Mesoscopic Physics. Interactions and Decoherence* (NATO Science Ser. II, Vol. 154, Eds I V Lerner, B L Altshuler, Y Gefen) (NATO Sci. Series) (Dordrecht: Springer Science + Business Media, 2004) p. 309
- Lam P K, Girvin S M *Phys. Rev. B* **30** 473(R) (1984)
- Jiang H W et al. *Phys. Rev. B* **44** 8107 (1991)
- D'Iorio M, Pudalov V M, Semenchinsky S G *Phys. Rev. B* **46** 15992 (1992)
- Shashkin A A, Kravchenko G V, Dolgoplov V T *Письма в ЖЭТФ* **58** 215 (1993); *JETP Lett.* **58** 220 (1993)
- D'Iorio M, Pudalov V M, Semenchinsky S G *Phys. Lett. A* **150** 422 (1990)
- Кукушкин И В, Тимофеев В В *УФН* **163**(7) 1 (1993); Kukushkin I V, Timofeev V B *Phys. Usp.* **36** 549 (1993)
- Улинич Ф П, Усов Н А *ЖЭТФ* **76** 288 (1979); Ulinich F P, Usov N A *Sov. Phys. JETP* **49** 147 (1979)
- Yoshioka D J. *Phys. Soc. Jpn.* **53** 3740 (1984)
- Yoshioka D J. *Phys. Soc. Jpn.* **55** 885 (1986)
- Platzman P M, in *The Physics of the Two-Dimensional Electron Gas* (Eds T J Devreese, F M Peeters) (NATO ASI Ser., Ser. B, Vol. 157) (New York: Plenum Press, 1987) p. 97
- Zhu X, Louie S G *Phys. Rev. Lett.* **70** 335 (1993)
- Qiu R L J et al., arXiv:1509.07463
- Shashkin A A et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 3141 (1994)
- Stormer H L, Willett R L *Phys. Rev. Lett.* **62** 972 (1989)
- Jiang H W et al. *Phys. Rev. Lett.* **65** 633 (1990)
- Goldman V J et al. *Phys. Rev. Lett.* **65** 2189 (1990)
- Williams F I B et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 3285 (1991)
- Li Y P et al. *Phys. Rev. Lett.* **67** 1630 (1991)
- Jiang H W et al. *Phys. Rev. B* **44** 8107 (1991)
- Khrapai V S et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 196805 (2008)
- Kravchenko S V et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 910 (1995)
- Pudalov V M, D'Iorio M, Campbell J W *Письма в ЖЭТФ* **57** 592 (1993); *JETP Lett.* **57** 608 (1993)
- Pudalov V M, in *Physics of the Electron Solid* (Conf. Proc. and Lecture Notes in Applied Physics, Vol. 1, Ed. S T Chui) (Cambridge, MA: International Press, 1994)
- Holmes S N et al. *J. Phys. Condens. Matter* **20** 472207 (2008)
- Kononov A et al. *Phys. Rev. B* **86** 125304 (2012)
- Dahal H P et al. *Phys. Rev. B* **74** 233405 (2006)
- Долгополов В Т *УФН* **184** 113 (2014); Dolgoplov V T *Phys. Usp.* **57** 105 (2014)
- Zhang C-H, Joglekar Y N *Phys. Rev. B* **75** 245414 (2007)
- Zhang C-H, Joglekar Y N *Phys. Rev. B* **77** 205426 (2008)
- Côté R, Jobidon J-F, Fertig H A *Phys. Rev. B* **78** 085309 (2008)
- Dahal H P et al., arXiv:0706.1689
- Silvestrov P G, Recher R *Phys. Rev. B* **95** 075438 (2017); arXiv:1602.02777
- Silvestrov P G, Entin-Wohlman O *Phys. Rev. B* **89** 155103 (2014)
- Berg E, Rudner M S, Kivelson S A *Phys. Rev. B* **85** 035116 (2012)
- Falko V I *Phys. Rev. B* **49** 7774 (1994)
- Esfarjani K, Kawazoe Y J. *Phys. Condens. Matter* **7** 7217 (1995)
- Goldoni G, Peeters F M *Phys. Rev. B* **53** 4591 (1996)
- Schweigert I V, Schweigert V A, Peeters F M *Phys. Rev. Lett.* **82** 5293 (1999)
- Weis J-J, Levesque D, Jorge S *Phys. Rev. B* **63** 045308 (2001)
- Messina R, Löwen H *Phys. Rev. Lett.* **91** 146101 (2003)
- Oguz E C, Messina R, Lowen H *Europhys. Lett.* **86** 28002 (2009)
- Lobaskin V, Netz R R *Europhys. Lett.* **77** 38003 (2007)
- Šamaj L, Trizac E *Phys. Rev. B* **85** 205131 (2012)
- Schweigert I V, Schweigert V A, Peeters F M *Phys. Rev. B* **60** 14665 (1999)
- Narasimhan S, Ho T-L *Phys. Rev. B* **52** 12291 (1995)
- Andrei E Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **60** 2765 (1988)

67. Stormer H L, Willett R L *Phys. Rev. Lett.* **68** 2104 (1992)
68. Shashkin A A, Dolgoplov V T, Kravchenko G V *Phys. Rev. B* **49** 14486 (1994)
69. Buhmann H et al. *Phys. Rev. Lett.* **65** 1056 (1990)
70. Li C-C et al. *Phys. Rev. B* **61** 10905 (2000)
71. Ye P D et al. *Phys. Rev. Lett.* **89** 176802 (2002)
72. Chen Y P et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 206805 (2004)
73. Wang Z et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 136804 (2007)
74. Doveston J B et al. *Physica E* **12** 296 (2002)
75. Wang Z et al. *Phys. Rev. B* **85** 195408 (2012); arXiv:1101.2436
76. Drichko I L et al. *Solid State Commun.* **46** 213 (2015)
77. Андреев А Ф, Лифшиц И М *ЖЭТФ* **56** 2057 (1969); Andreev A F, Lifshitz I M *Sov. Phys. JETP* **29** 1107 (1969)
78. Halperin B I, Nelson D R *Phys. Rev. Lett.* **41** 121 (1978)
79. Spivak B, Kivelson S A *Phys. Rev. B* **70** 155114 (2004)
80. Falakshahi H, Waintal X *Phys. Rev. Lett.* **94** 046801 (2005)
81. Waintal X *Phys. Rev. B* **73** 075417 (2006)
82. Долгополов В Т *Письма в ЖЭТФ* **76** 437 (2002); Dolgoplov V T *JETP Lett.* **76** 377 (2002)
83. Dolgoplov V T, Shashkin A A *Письма в ЖЭТФ* **95** 648 (2012); *JETP Lett.* **95** 570 (2012)

Quantum melting of a two-dimensional Wigner crystal

V.T. Dolgoplov

*Institute of Solid-State Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Akademika Osip'yana 2, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation
E-mail: dolgop@issp.ac.ru*

The paper reviews theoretical predictions for the behavior of two-dimensional low-density electron systems at near absolute zero temperatures, including the formation of an electron (Wigner) crystal, crystal melting at a critical electron density, and transitions between crystal modifications in more complex (for example, two-layer) systems. The paper presents experimental results obtained from real two-dimensional systems in which the non-conducting (solid) state of the electronic system with indications of collective localization is actually realized. Experimental methods for detecting a quantum liquid-solid phase interface are discussed.

Keywords: two-dimensional electron system, Wigner crystal, electrons in semiconductors

PACS numbers: 68.65.Pq, 71.10.Hf, 73.20.Qt

Bibliography — 83 references

Received 26 September 2016, revised 20 December 2016

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **187** (7) 785–797 (2017)

Physics–Uspekhi **60** (7) (2017)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038051>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.01.038051>