

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Адаптивные динамические сети

О.В. Масленников, В.И. Некоркин

*Динамические сети представляют собой системы активных элементов-узлов, взаимодействующих между собой посредством связей. Примерами таких систем являются сети электроснабжения, нейронные структуры, связанные химические осцилляторы, коммуникационные сети и др. Все эти примеры объединяют сетевая структура и собственная динамика взаимодействующих компонентов. Если в динамических сетях существует возможность изменения во времени структуры связей вследствие динамики узлов, то такие системы называются адаптивными динамическими сетями. Термин "адаптивные" характеризует возможность перестроения топологии связей, а термин "динамические" — наличие собственной динамики узлов и связей. Рассмотрены основные результаты исследований адаптивных динамических сетей. Даны ключевые понятия и определения теории сложных сетей, описаны основные коллективные эффекты, возникающие в адаптивных динамических сетях.*

**Ключевые слова:** динамические сети, адаптивные связи, синхронизация, аттрактор, связанные осцилляторы

PACS numbers: 05.45.–a, 05.45.Xt, 87.10.–e

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.10.037902>

## Содержание

1. Введение (745).
  2. Основные понятия и определения (746).
  3. Коллективные эффекты в адаптивных динамических сетях (748).
    - 3.1. Образование кластеров активности.
    - 3.2. Формирование модульной топологии.
    - 3.3. Переключательная динамика адаптивных сетей.
  4. Заключение (756).
- Список литературы (756).

## 1. Введение

Виталий Лазаревич Гинзбург в знаменитой статье [1], опубликованной в *УФН*, в списке "особенно важных и интересных проблем" под номером 11 отметил нелинейную физику, включая турбулентность, солитоны, хаос и странные аттракторы. Он писал: "... Внимание к нелинейной физике всё усиливается и усиливается. В значительной мере это связано с тем, что использование современной вычислительной техники позволяет анализировать задачи, об исследовании которых раньше можно было только мечтать". Именно к таким задачам в полной мере можно отнести сложные динамические сети. Системы с сетевой структурой широко распространены в природе, технических приложениях, обществе, и они привлекают внимание исследователей из самых

различных областей науки (см., например, обзоры [2–4]). Сетевая проблематика выдвинулась на передний план в широком диапазоне дисциплин — от социальных сетей и Интернета до сетевых структур мозга и генома.

Несмотря на принципиальное различие в природе сетей, их строении и поведении, существуют качественно подобные свойства и универсальные закономерности, отражающие специфику строения, характерную для всех сетей. Любая сеть состоит из некоторого конечного, но обычно очень большого числа узлов (вершин), которые соединены между собой связями (или рёбрами). Структура (конфигурация) связей между узлами, как правило нерегулярная, задаёт топологию (или архитектуру) сети. Два узла называются соседними (или смежными), если между ними имеется прямая связь. Важной характеристикой сети является так называемая степень узла — число соседей, с которыми связан данный узел. В реальных сетях топология связей обычно нерегулярна, но в то же время и не случайна. Сети, обладающие такими свойствами, принято называть сложными.

Для сложных сетей наиболее типичная задача состоит в том, чтобы установить структурные свойства сети и ответить на вопрос о том, по каким принципам формируется та или иная топология и по каким законам протекает эволюция сети — изменение во времени её топологии (например, появление и исчезновение узлов). К этому классу задач часто относятся сетевые системы, в которых характерное время изменения состояния сети много больше характерного времени изменения топологии, и поэтому в них динамическими процессами в узлах и связях можно пренебречь. Исследованию в этом важном направлении посвящено подавляющее большинство публикаций по теме сложных сетей. Однако для многих других задач такого подхода недостаточно и необходимо

О.В. Масленников, В.И. Некоркин. Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, 603155 Нижний Новгород, Российская Федерация  
E-mail: olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@neuron.appl.sci-nnov.ru

Статья поступила 24 августа 2016 г.,  
после доработки 3 октября 2016 г.

выйти на следующий уровень описания, на котором учитываются динамические процессы, происходящие в узлах и связях. Примером могут служить нейронные сети мозга — здесь важно выяснить не только структуру связей, но и электрохимическую активность отдельных нервных клеток и аксональных связей между ними. Для исследования таких систем определение лишь их структуры является недостаточным, необходимо учитывать *состояние* сети — значения динамических переменных, описывающих поведение узлов и связей. Основной задачей при таком подходе является изучение *динамики* сети — изменения во времени состояния её узлов и связей. Если характерное время изменения состояния сети меньше, чем характерное время изменения её топологии, то в первом приближении топологию можно считать статической, т.е. фиксированной во времени, и анализировать влияние структурных и динамических параметров на коллективную активность сложной сети.

В целом, до недавнего времени публикации по тематике сложных сетей можно было отнести к одному из двух описанных выше направлений, которые можно обобщить следующим образом. Первое — это *эволюция нединамических сетей*, при которой топология сети изменяется во времени согласно определённым правилам, а динамика в узлах и связях отсутствует. Второе — это *динамика на статических сетях*. В последнем случае каждый узел и каждая связь представлены динамическими системами и все они связаны между собой в соответствии с некоторой статической топологией. Однако для уже приведённого примера нейронных структур очевидно, что в общем случае в таких реальных сетях имеют место как эволюция структуры, так и динамика узлов и связей, причём оба этих процесса взаимосвязаны. Особенности топологии связей непосредственно сказываются на коллективной динамике узлов, а изменение состояний узлов и связей способно приводить к изменению структуры сети, причём часто характерные времена изменения динамического состояния сети и её топологии одного порядка. Таким образом, мы приходим к следующему уровню описания сетевых систем — к описанию так называемых *адаптивных динамических сетей*, или *динамических сетей с перестраиваемой топологией*. Термин "адаптивные" характеризует возможность изменения структуры связей, а термин "динамические" — наличие собственной динамики узлов и связей.

В общем виде эволюцию и динамику адаптивных сетей можно представить как двухуровневый процесс (подробнее см. [5, 6]). С одной стороны, состояние узлов и связей изменяется во времени согласно некоторой многомерной динамической системе (схематически фазовые траектории изображены в правой части рис. 1). С другой стороны, происходит перестройка топологии связей, т.е. сеть эволюционирует (см. левую часть рис. 1). Топология очевидным образом влияет на характер коллективной динамики компонентов сети — узлов и связей, но и динамика последних оказывает влияние на перестройку топологии, т.е. происходит взаимное влияние динамики и эволюции сети.

Настоящий обзор посвящён основным результатам, полученным на сегодняшний день для адаптивных динамических сетей. В разделе 2 мы дадим основные определения теории сложных сетей, необходимые для дальнейшего изложения. В разделе 3 мы сосредоточимся на рассмотрении конкретных примеров адаптивных дина-

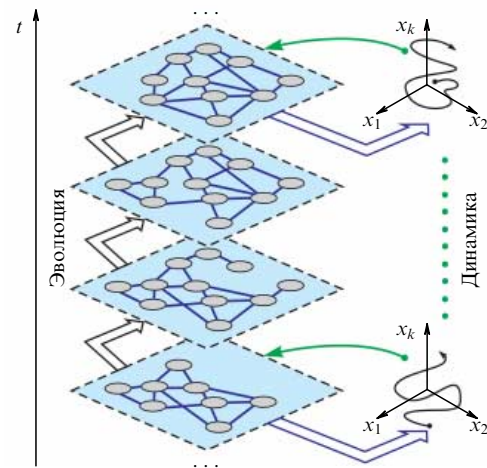


Рис. 1. Схематическое представление адаптивной динамической сети: эволюция сети (в левой части рисунка), при которой происходит перестройка топологии, протекает параллельно с динамикой узлов и связей (в правой части рисунка), которой соответствует некоторая траектория в фазовом пространстве.

мических сетей и в заключении подведём итоги и обсудим основные результаты.

## 2. Основные понятия и определения

Основные понятия теории сложных сетей, справедливые как для сетей без динамики узлов и связей, так и для динамических сетей со статической топологией, приведены в ряде обзоров [2–4, 7–11]. Обычно сеть определяется как ансамбль, состоящий из конечного числа  $N$  узлов (вершин), между которыми установлены  $L$  направленных или ненаправленных связей (рёбер). Топология связей задаётся *матрицей смежности* (или матрицей связей)  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , с элементами  $a_{ij} = 1$ , если узел  $j$  связан с узлом  $i$ , и  $a_{ij} = 0$  в противном случае. Сеть может иметь как направленные (ориентированные), так и ненаправленные связи. Матрица смежности для ориентированных сетей в общем случае несимметрична, в то время как для сетей с ненаправленными связями матрица симметрична:  $a_{ij} = a_{ji}$ . Заметим, что сеть с ненаправленными связями может быть представлена в виде ориентированной сети, в которой каждая пара узлов связана взаимно противоположно направленными рёбрами. В общем случае связи между узлами могут действовать различным образом (например, в нейронных сетях связи могут быть возбуждающими или подавляющими), а также характеризоваться различными весовыми значениями (силами связи)  $w_{ij}$ , составляющими весовую матрицу  $W$ .

Каждый узел  $i$  характеризуется своей *степенью*  $k_i$  — числом соседних узлов, с которыми он связан. Для ориентированных сетей вводятся выходная степень узла  $k_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$  — число выходящих (эфферентных) связей — и входная степень узла  $k_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$  — число входящих (афферентных) связей. Полная степень узла в этом случае определяется как  $k_i = k_i^{\text{in}} + k_i^{\text{out}}$ .

Одной из важнейших характеристик любой сложной сети является *функция распределения степеней узлов*  $P(k)$ , которая определяет вероятность того, что случайно выбранный узел имеет определённое число связей  $k$ . Например, в случайных сетях, где между любыми двумя

узлами установлена связь с некоторой вероятностью  $p$  (называемых также случайными графами или сетями Эрдёша – Реньи), большинство узлов имеет степень, равную среднему по сети значению  $\langle k \rangle = (1/N) \sum_{i=1}^N k_i$ , и функция  $P(k)$  представляет собой распределение Пуассона, которое имеет максимум при  $k = \langle k \rangle$  и экспоненциально убывающий хвост.

В большинстве реальных крупномасштабных сетей распределение степеней значительно отличается от пуассоновского. В частности, для многих сложных сетей, включая Интернет и ряд нейронных ансамблей, функция  $P(k)$  имеет степенной вид:  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ . Такие сети называются *масштабно-инвариантными* (или *безмасштабными*): большинство узлов в них имеет малое число соседей, а сравнительно малое количество узлов (так называемые *хабы*), напротив, связано с огромным числом соседей. Показано, что свойство масштабной инвариантности возникает, в частности, в растущих сетях, где появляются новые узлы, которые соединяются с уже существующими узлами, причём новый узел с большей вероятностью образует связь с узлом, уже имеющим большое число соседей (см. также [12, 13]). Последнее свойство отражает принцип предпочтительного присоединения (или так называемый феномен клуба богатых (*rich-club phenomenon*)) (см. [14]).

Большинство реальных сетей имеет достаточно редкие связи, т.е. в действительности существует лишь небольшая доля всевозможных связей. Случайно выбранные два узла,  $i$  и  $j$ , с высокой вероятностью не связаны друг с другом непосредственно, однако существует возможность проложить *путь* — последовательность промежуточных связей — и между несмежными узлами. Количество таких связей определяет *длину* этого пути. *Дистанция*  $d_{ij}$  между узлами  $i$  и  $j$  — длина кратчайшего пути между ними, т.е. минимальное число связей (рёбер), по которым надо пройти, передвигаясь по сети, из узла  $j$  в узел  $i$ . Если существует связь  $j \rightarrow i$ , то  $d_{ij} = 1$ . Если из узла  $j$  в узел  $i$  можно попасть только через промежуточный узел  $k$  посредством перехода  $j \rightarrow k \rightarrow i$ , то  $d_{ij} = 2$  и т.д. Если нет никаких путей между узлами  $i$  и  $j$ , то  $d_{ij} = \infty$ . *Средняя длина кратчайшего пути*  $l$  (иногда также называемая *диаметром* сети) — средняя по сети дистанция  $d_{ij}$  по всем парам узлов  $i$  и  $j$ :

$$l = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j \in N, i \neq j} d_{ij}. \quad (1)$$

*Коэффициент кластеризации*  $C$  — это следующая топологическая характеристика сложных сетей. Рассмотрим некоторый узел  $i$ , который имеет  $k_i$  соседей. Если бы все эти узлы были связаны между собой, то между ними имелось бы всего  $k_i(k_i - 1)/2$  связей. Отношение числа  $E_i$  в действительности существующих связей между этими узлами к максимально возможному числу  $k_i(k_i - 1)/2$  даёт значение коэффициента кластеризации  $C_i = 2E_i/[k_i(k_i - 1)]$  для узла  $i$ . Среднее значение по всем индивидуальным  $C_i$  определяет коэффициент кластеризации сети  $C$ :

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i \in N} C_i. \quad (2)$$

Заметим, что в случайном графе, где между двумя случайно выбранными узлами существует связь с вероят-

ностью  $p$ , коэффициент кластеризации  $C = p$ . Однако в большинстве реальных сетей значение  $C$ , как правило, намного превышает коэффициент кластеризации в сравнимой по числу узлов и связей случайной сети. Например, в сетях со свойством *малого мира* коэффициент кластеризации имеет большое значение, но в то же время средняя длина пути относительно мала.

Кроме приведённых основных топологических характеристик сложных сетей, часто используют следующие понятия. В сети из  $N$  узлов и  $L$  связей *плотность* сети — доля реально существующих связей из возможных — выражается как  $\rho = L/[N(N - 1)]$ . Заметим, что кратчайший путь между двумя узлами обычно не единствен — существует несколько альтернативных кратчайших путей. Для характеристики влияния отдельных узлов на коллективное взаимодействие в сети вводится понятие *промежуточной центральности* (*betweenness centrality*)  $C_{BC}(i)$  — количества всех кратчайших путей, проходящих через узел  $i$ :

$$C_{BC}(i) = \sum_{s \neq i, t \neq i} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}},$$

где  $\sigma_{st}(i)$  — число кратчайших путей, начинающихся в  $s$ , проходящих через  $i$  и заканчивающихся в  $t$ , а  $\sigma_{st}$  — число всех кратчайших путей из  $s$  в  $t$ .

С масштабной инвариантностью топологии связей тесно связаны явления *ассортативного смешения*, при котором узлы-хабы с наибольшей вероятностью связаны с другими хабами, и *дисассортативного смешения*, при котором хабы с большей вероятностью соединяются с узлами, имеющими низкие степени. Оказывается, что многие социальные группы (соавторы публикаций, актёры кино, руководители компаний) характеризуются высокой ассортативностью, в то время как биологические сети (синаптические связи в нейронной сети нематоды *C. elegans*, пищевые цепи в морских и озёрных популяциях) и технологические (сеть автономных систем в Интернете, сеть гиперссылок между веб-страницами в определённой доменной зоне) сети дисассортативны [15]. Установлено, что ассортативные сети более устойчивы к удалению узлов-хабов, а дисассортативные сети более уязвимы. Таким образом, социальные сообщества более надёжны по отношению к вмешательствам и атакам по сравнению с технологическими.

Одной из актуальных проблем теории адаптивных динамических сетей является задача построения интеллектуальных энергосетей, которые обеспечивают бесперебойную поставку электроэнергии от генераторов к потребителям в условиях возможных сбоев и перегрузок, а также при неравномерном и децентрализованном производстве электроэнергии. С точки зрения нелинейной динамики рабочим является режим глобальной устойчивости, при котором устанавливается баланс электрической мощности, передаваемой в сеть генераторами, и мощности, забираемой из неё потребителями. Возможный метод обеспечения устойчивого функционирования энергосетей в изменяющихся условиях состоит в использовании адаптивных принципов организации, когда архитектура сетей динамически изменяется в зависимости от мгновенного распределения потоков мощности. В качестве базовых моделей энергосетей нередко используют ансамбли связанных фазовых осцилляторов, подробное описание которых

даётся в разделе 3 (более детально об энергосетях см., например, работы [16–18]).

### 3. Коллективные эффекты в адаптивных динамических сетях

В адаптивных динамических сетях каждый узел характеризуется собственной динамикой (регулярной или хаотической), а межузловые связи зависят от этой динамики и их поведение также может задаваться динамическими системами. Такая взаимосвязь между узлами и связями может приводить к возникновению в сети неожиданных эффектов и сложного коллективного поведения. Эволюция сети, т.е. изменение во времени её топологии, в различных моделях может описываться по-разному. Простейший способ — это изменение весовых переменных при фиксированной структуре связей. При этом изменяется сила связей, а, кроме того, связи могут менять своё направление или характер действия (возбуждение/подавление).

Следующий способ описания эволюции — перестройка связей. При таком описании в определённый момент выбирается некоторая связь, которая перестраивается: либо совсем удаляется и заменяется новой связью уже между другими узлами, либо один её конец остаётся присоединённым к тому же узлу, а другой присоединяется к новому узлу. При такой перестройке полное число узлов и связей сохраняется во времени. Известнейший пример сети, которая формируется с помощью перестройки топологии, — это сеть малого мира, определяемая моделью Уоттса–Строгаца [19]. Начальная топология сети в этой модели задаётся регулярной решёткой, а затем некоторая доля связей случайным образом перестраивается. Оказывается, что даже малое число перестроенных связей существенным образом изменяет топологические и динамические свойства сети, в частности резко уменьшается её диаметр.

Более сложный по сравнению с предыдущим способ описания эволюции сети состоит в создании новых или удалении существующих связей. При этом число узлов сохраняется, а число связей изменяется во времени.

Наконец, наиболее сложная форма описания эволюции топологии предусматривает создание (удаление) узлов в (из) сети. При этом удаление узла сопровождается изменениями связей, которые были присоединены к этому узлу (например, они также исчезают); кроме того, добавление нового узла влечёт за собой появление новых связей для присоединения к остальным узлам сети. При такой схеме эволюции изменяется и число узлов, и число связей. Типичный пример — модель Барабаши–Альберт [12], в которой происходит увеличение числа узлов и связей в сети. Начальная топология задаётся в модели некоторой малой сетью связанных узлов. Далее последовательно добавляется по одному узлу, причём каждый новый узел имеет  $m$  связей, посредством которых он присоединяется с большей вероятностью к узлам, имеющим более высокую степень (принцип предпочтительного присоединения).

К наиболее типичным базовым свойствам адаптивных динамических сетей, установленных к настоящему времени, относятся следующие:

- образование кластеров активности, т.е. групп синхронных осцилляторов различной конфигурации, и высокая мультистабильность установившихся режимов.

Сюда же относятся так называемые химерные состояния — сосуществующие кластеры синхронной активности и группы осцилляторов с асинхронной динамикой (их рассмотрение остаётся за рамками данного обзора);

- возникновение сложных топологий, характеризующихся нетривиальным распределением степеней узлов, в частности появлением в изначально гомогенной сети свойств гетерогенности различного вида (например, формирования иерархических структур или модулей). При этом часто проявляется свойство самоорганизованной критичности — самоорганизации сети в критическое состояние, которое сопровождается появлением степенных распределений в различных характеристиках сети;

- наличие разнообразных переходных, или переключательных, режимов, сопровождающихся многократной перестройкой топологии связей и сменой режимов коллективной активности.

Эти положения подробно поясняются в разделах 3.1–3.3.

#### 3.1. Образование кластеров активности

Один из частых эффектов, возникающих в адаптивных динамических сетях, — это формирование кластерных состояний. Кластер представляет собой группу синхронных узлов сети; кластерное состояние — это наличие одного или более кластеров определённой конфигурации, сосуществующих в сети.

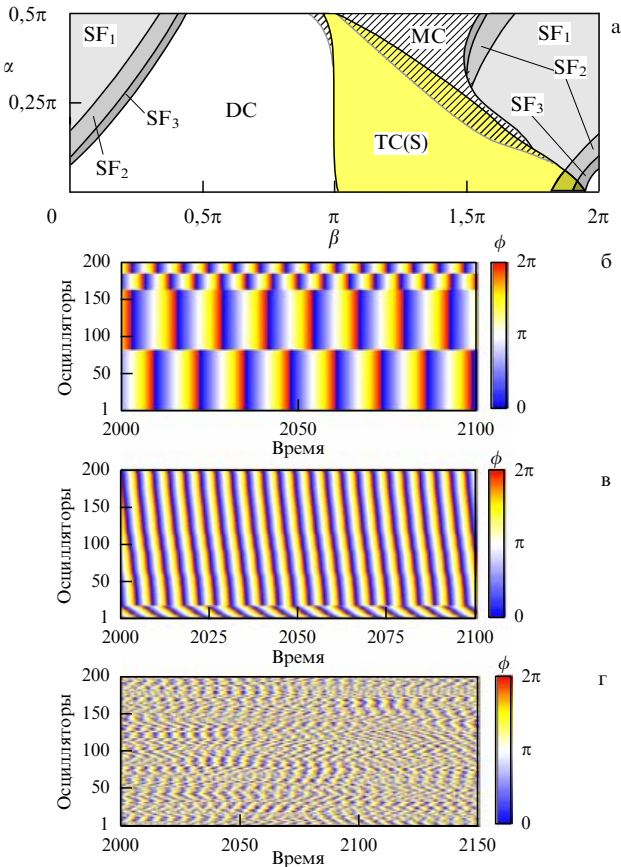
В работах [20–22] рассматриваются сети фазовых осцилляторов, описываемые системой уравнений

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{1}{N} \sum_j^N k_{ij} \Gamma_{ij}(\varphi_i - \varphi_j), \quad (3)$$

в которых динамика весов  $k_{ij}$  определяется уравнениями

$$\dot{k}_{ij} = \varepsilon A(\varphi_i - \varphi_j), \quad |k_{ij}| \leq 1, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  — глобальная сила связи,  $A(\varphi)$  —  $2\pi$ -периодическая функция пластичности, определяющая изменение весов в зависимости от разностей фаз. Условие  $|k_{ij}| \leq 1$  предотвращает неограниченное возрастание весов, превышающее пределы интервала  $[-1, 1]$ . Функция связи задаётся в виде  $\Gamma_{ij}(\varphi) = -\sin(\varphi + \alpha)$ , где  $\alpha$  — разность фаз, вызванная запаздыванием взаимодействия. Функция пластичности определяется как  $A(\varphi) = -\sin(\varphi + \beta)$ , где  $\beta$  контролирует характер изменения весов в зависимости от разности фаз. Начальные значения переменных задаются случайным образом, а топология связей выбирается в виде "каждый с каждым". Установлено, что в зависимости от значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$  сеть может прийти в один из трёх асимптотических режимов: двухкластерное состояние, синхронное состояние с фиксированным соотношением фаз и асинхронное поведение. В двухкластерном состоянии сеть разбивается на две группы, внутри которых осцилляторы синхронны, а активность групп проходит в противофазе (см. рис. 2, на котором показана схема аналогичной сети). В режиме с фиксированным соотношением фаз частоты всех осцилляторов сети одинаковы, а относительные фазовые сдвиги между различными осцилляторами принимают некоторые фиксированные значения, неизменные во времени. Эти же режимы можно наблюдать и в сети с масштабно-инвариантной топологией [22].



**Рис. 2.** (а) Диаграмма режимов коллективной активности системы (5) на плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$  для  $N = 200$  взаимодействующих осцилляторов. Динамические состояния, формируемые в сети: режим глобальной синхронизации S; синхронные состояния с фиксированным соотношением фаз  $SF_i$ , где  $i$  указывает количество формируемых в сети частотных групп, асинхронные состояния DC; двухкластерное состояние TC; мультикластерные состояния MC. Параметр  $\varepsilon = 0,01$ . (б–г) Динамика фаз осцилляторов сети в различных режимах при  $\alpha = 1$ : (б) четырёхкластерное состояние,  $\beta = 4,9$ ; (в) синхронное состояние с фиксированным соотношением фаз для случая двух частотных групп,  $\beta = 0,65$ ; (г) асинхронное состояние,  $\beta = 1,9$ . Индексы осцилляторов расположены в порядке возрастания значений их частот и фаз в момент  $t = 1000$ . (Данные из работы [24].)

Модификация правила пластичности, согласно которому изменяется сила связей, приводит к появлению новых режимов коллективной активности. Так, в работах [23, 24] рассмотрена сеть фазовых осцилляторов с переменными связями:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j + \alpha), \\ \dot{\kappa}_{ij} &= -\varepsilon [\sin(\varphi_i - \varphi_j + \beta) + \kappa_{ij}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Благодаря более разнообразной структуре соединений, формируемых в сети в результате совместной динамики узлов и связей, в такой сети возможны новые типы коллективной активности, при которых часть межузловых связей принимает близкие к нулю значения. Помимо глобально синхронного, двухкластерного и асинхронного состояний обнаружены возникающие мультикластерные режимы, при которых в сети образуется несколько групп синхронных осцилляторов. Среди этих групп можно выделить пары, в которых осцилляторы

находятся в противофазе друг к другу. При этом частоты осцилляторов, принадлежащих разным парам синхронных групп, различаются между собой (см. рис. 2).

В работе [25] рассмотрена сеть фазовых осцилляторов

$$\dot{\theta}_m = \omega_m + \gamma \sum_{k=1}^N w_{mk} \sin[2(\theta_k - \theta_m)], \quad (6)$$

где  $m = 1, \dots, N$ ,  $\omega_m$  — собственная частота  $m$ -го осциллятора,  $w_{mk}$  — коэффициенты связи, динамика которых определяется уравнениями

$$\dot{w}_{mk} = \varepsilon w_{mk} \exp\left(-2\left|\Delta\theta_{mk} - \frac{\pi}{2}\right|\right) \sin(2\Delta\theta_{mk}). \quad (7)$$

Осцилляторы разделяются на динамические группы, внутри которых они синфазны, а между группами — противофазны. При этом происходит самоорганизация сети, при которой силы связей распределяются по степенному закону из начально случайного распределения, а также могут образовываться модули. Если ресурс, необходимый для образования связей, ограничен, то сеть расщепляется на две динамические группы — внутри каждой группы осцилляторы синфазно синхронизованы, в то время как осцилляторы различных групп противофазны. Причём сила связей внутри модулей увеличивается, а между ними — ослабевает, т.е. модули становятся практически не связанными. Если нет ограничения ресурса, то обе группы сливаются в одну, вследствие того что сила связей между осцилляторами с изначально близкими фазами увеличивается, в то время как при больших разностях фаз сила связей ослабевает.

В работах [26, 27] изучены сети логистических отображений

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i) + \frac{\varepsilon}{m} \sum_{j=1}^N A_{ij}^{ij} [f(x_n^j) - f(x_n^i)], \quad (8)$$

где  $f(x) = 4x(1 - x)$ ,  $A_n$  — матрица смежности в момент  $n$ . Каждый узел может иметь до  $\sum_{j=1}^N A_{ij}^{ij} = N - 1$  входящих связей. Эволюция топологии задаётся по принципу предпочтительного присоединения следующим образом. На каждом шаге вычисляется так называемая матрица *дистанций*

$$D_n^{ij} = \begin{cases} |f(x_n^i) - f(x_n^j)| & \text{при } A_{n-1}^{ij} \neq 0, \\ 0 & \text{при } A_{n-1}^{ij} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

откуда вычисляется средняя дистанция узла  $i$  от своих соседей  $\langle D \rangle_n^i = (1/a_n^i) \sum_{j=1}^N D_n^{ij}$ , где  $a_n^i$  — число соседей  $i$ -го узла в момент  $n$ . Среди соседних узлов  $i$ -го узла определяется множество "плохих" узлов  $B_n^i$ , дистанция до которых превышает среднее  $\langle D \rangle_n^i$ ;  $j \in B_n^i$ , если  $D_n^{ij} > \langle D \rangle_n^i$ , а "хорошими" узлами считаются все остальные:  $\mathcal{G}_n^i = \{1, \dots, N\} \setminus (B_n^i \cup \{i\})$ . Далее связи, приходящие от узлов множества  $B_n^i$ , разрываются и перестраиваются к случайно выбранным узлам из  $\mathcal{G}_n^i$ . Начальная топология — симметричные связи "каждый с каждым", — при которой каждый узел связан со всеми возможными  $N - 1$  соседями и  $A_0^{ii} = 0$ . Показано, что при любых значениях силы связи  $\varepsilon$  сеть асимптотически приходит в стационарное состояние и перестройка топологии прекращается. Конечная топология характеризуется иерархическими свойствами, а динамика узлов в определённой области



параметров полисинхронна: узлы можно разделить на группы по-разному синхронных узлов, однако при этом узлы внутри отдельно взятой группы необязательно связаны между собой.

В работе [28] установлено, что пластичность связей приводит к появлению мультистабильных состояний — десинхронизации и двухкластерного состояния, в котором кластеры находятся в противофазе друг с другом. Мультистабильные состояния возникают при случайном распределении начальных значений фаз, в случае равномерно распределённых начальных фаз появляется только десинхронизованное состояние.

Модель нейронной сети рассмотрена в работе [29]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (10)$$

где коэффициенты связи изменяются согласно закону, отражающему свойство пластичности синапсов (Spike-Timing Dependent Plasticity — STDP):

$$\dot{K}_{ij} = \varepsilon \begin{cases} (\alpha - K_{ij}) \exp \frac{\theta_i - \theta_j}{\tau_p}, & (\theta_i - \theta_j) \in [-\pi, 0], \\ -K_{ij} \exp \frac{\theta_i - \theta_j}{\tau_d}, & (\theta_i - \theta_j) \in [0, \pi], \end{cases} \quad (11)$$

где  $\alpha$  — максимальная сила связи,  $\tau_p$  и  $\tau_d$  — константы для синаптической потенциации и депрессии соответственно,  $\varepsilon$  — малый параметр. Данное правило пластичности является асимметричным, поскольку константы различаются:  $\tau_d > \tau_p$ . Показано, что данная асимметрия в законе пластичности приводит к явлению мультистабильности в сети. В зависимости от параметра  $\alpha$  возможно существование полностью синхронного режима, состояния десинхронизации и многообразия мультикластерных режимов. В определённых интервалах значений  $\alpha$  сосуществуют устойчивые режимы, каждый из которых характеризуется разными количеством и размером кластеров — групп осцилляторов с одной частотой.

В работе [30] изучена динамика фазовых осцилляторов Курамото с медленно изменяющейся матрицей связи:

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad (12)$$

где  $i = 1, \dots, N$ ,  $\omega_i$  — собственная частота  $i$ -го осциллятора,  $K_{ij}$  — коэффициенты связи, динамика которых определяется уравнениями

$$\dot{K}_{ij} = \varepsilon [\alpha \cos(\varphi_i - \varphi_j) - K_{ij}]. \quad (13)$$

Параметр  $\varepsilon$  мал, поэтому коэффициенты связи — медленно изменяющиеся функции разностей фаз, возрастающие быстрее для осцилляторов, находящихся в фазе, и быстрее убывающие для осцилляторов, находящихся в противофазе, т.е. это обобщённое правило Хебба. Медленная динамика приводит к мультистабильности: происходит стабилизация синхронных кластеров с различными размерами и соотношением фаз между осцилляторами. Разница фаз между осцилляторами может быть использована для хранения и извлечения информации в системе. Существует одно естественное ограничение редуцированного фазового описания — предположение

о том, что все осцилляторы находятся в возбуждённом состоянии.

В работе [31] исследована динамика масштабно-инвариантных сетей хаотических осцилляторов, в которых сила связей адаптивно изменяется в зависимости от синхронизации между узлами. Рассмотрена сеть  $N$  связанных идентичных хаотических осцилляторов

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N G_{ij} (\mathbf{H}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)), \quad (14)$$

где функция  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , описывающая динамику индивидуальных осцилляторов  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , задаётся либо системой Рёсслера:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (-0,97x - z, 0,97x + 0,15y, x(z - 8,5) + 0,4),$$

либо моделью пищевой цепи:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x - 0,2g(x, y), -0,7y + 0,2g(x, y) - xz, -10x(z - 0,006) + xz),$$

где  $g(x, y) = xy/(1 + 0,05x)$ . Функция  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  описывает линейную связь между осцилляторами (для первой системы  $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (x, 0, 0)$ , для второй —  $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (0, y, z)$ ),  $G_{ij}$  — взвешенная матрица связей,  $G_{ij} = A_{ij}W_{ij}$ , где  $A_{ij}$  — бинарная матрица смежности,  $W_{ij}$  — сила связи от узла  $j$  к узлу  $i$ . Сила связи  $i$ -го узла со своими  $k_i$  соседями возрастает равномерно по всем  $k_i$  связям, при этом уменьшается разность  $\Delta_i$  между средней активностью соседей:

$$W_{ij}(t) = V_i(t), \quad \dot{V}_i = \frac{\gamma \Delta_i}{1 + \Delta_i}, \quad (15)$$

где  $\gamma > 0$  — параметр адаптации,  $\Delta_i$  — определяемая средней активностью соседей величина, которая с течением времени уменьшается,

$$\Delta_i = \left| \mathbf{H}(\mathbf{x}_i) - \frac{1}{k_i} \sum_j A_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) \right|.$$

Начальная сила связи — малая случайная величина, топология связей масштабно-инвариантна.

Закон изменения связей (15) предполагает, что сила связей между узлами в различных состояниях увеличивается. Поэтому с течением времени сеть эволюционирует к более гомогенному состоянию, при котором усиливается синхронизация. Авторы [31] показали, что переход к синхронизации осуществляется иерархическим образом: сначала синхронизируются узлы, имеющие большие значения степени  $k_i$ , а затем — узлы с меньшими степенями. Таким образом,  $\Delta_i$  в (15) уменьшается с возрастанием  $k_i$ , и узлы с большими  $k_i$  имеют меньшую скорость возрастания  $V_i(t)$ . Структура распределения весов становится практически стационарной по истечении достаточно малого промежутка времени, после чего наступает переход к синхронизации, схожий с таковым в статических сетях. Адаптивное правило значительно усиливает синхронизируемость сетей, что имеет важные приложения для управления динамическими сетями.

Таким образом, адаптивные сети, в которых состояние связей зависит от динамики узлов и наоборот, демонстрируют мультистабильную динамику. Это про-

является в существовании многообразных режимов коллективной активности, связанных с появлением кластеров — групп синхронных осцилляторов. Количество кластеров и соотношение фаз колебаний между ними определяются законом эволюции коэффициентов связи и контрольными параметрами.

### 3.2. Формирование модульной топологии

Один из самых распространённых эффектов, возникающих в адаптивных динамических сетях, — это формирование модульной топологии в изначально гомогенной сети. Такая топология характеризуется наличием модулей — подсетей, внутри которых имеется более высокая плотность связей, чем между узлами, принадлежащими разным подсетям. Например, в работах [32, 33] рассмотрены сети фазовых осцилляторов, в которых начальная топология выбирается случайным образом, связи являются направленными, а эволюция весов определяется динамикой осцилляторов. В правило адаптации заложены два ключевых принципа, которые конкурируют между собой: 1) связи между синхронными узлами усиливаются, 2) доступные ресурсы для поддержания узлом связей с другими узлами сети ограничены. Первый принцип представляет собой известное в нейродинамике правило Хебба, а второй принцип отражает способность поддерживать динамическое равновесие, т.е. гомеостаз. Модель представляет собой ансамбль из  $N$  фазовых осцилляторов, в котором каждый узел  $i$  характеризуется фазой  $\varphi_i$  и взаимодействует с  $M$  случайно выбранными соседними узлами, образующими множество  $\mathcal{N}_i$ . Динамика узлов сети задаётся уравнениями

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \lambda \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad (16)$$

где  $\omega_i$  — случайно выбранные из интервала  $[-\pi, \pi]$  собственные частоты осцилляторов, равномерно в нём распределённые,  $w_{ij}$  — вес связи между узлами  $i$  и  $j$ ,  $\lambda$  — глобальная сила связи. Вначале фазы случайным образом выбираются в интервале  $[-\pi, \pi]$ , а все веса равняются  $1/M$ . Динамика (эволюция) весов  $w_{ij}$  в (16) определяется как

$$\dot{w}_{ij} = p_{ij} - \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} p_{ij} \right) w_{ij}, \quad (17)$$

где  $p_{ij}$  — средняя корреляция фаз между  $i$ -м и  $j$ -м осцилляторами за характерное время  $T$ ,

$$p_{ij} = \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{T}\right) \exp[i(\varphi_i(t') - \varphi_j(t'))] dt' \right|. \quad (18)$$

Из уравнений (17) следует, что в течение всего времени  $T$  справедливо условие нормализации  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} = 1$ , т.е. сумма весов всех входящих связей для каждого узла остаётся постоянной.

Заметим, что первое и второе слагаемые в правой части (17) отвечают соответственно правилу Хебба и гомеостазу. Глобальную синхронизацию в сети фазовых осцилляторов удобно оценивать с помощью параметра порядка  $r(t) = 1/N \left| \sum_{i=1}^N \exp(i\varphi_i(t)) \right|$  [34]. Система через некоторое время  $t_s$  приходит к асимптотическому состоянию, в котором веса  $w_{ij}$  принимают определённые зна-

чения с малыми стационарными флуктуациями. Для оценки меры синхронности в таком случае вычисляется средний параметр порядка

$$r = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t N} \int_{t_s}^{t_s + \Delta t} \left| \sum_{i=1}^N \exp(i\varphi_i(t')) \right| dt', \quad (19)$$

где  $\Delta t$  — достаточно большой временной интервал. Кроме того, обозначив через

$$r_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \left| \int_{t_s}^{t_s + \Delta t} \exp[i(\varphi_i(t') - \varphi_j(t'))] dt' \right|$$

среднюю степень синхронизации между  $i$ -м и  $j$ -м осцилляторами, определим меру локальной синхронизации [35]

$$r_{\text{link}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} r_{ij}. \quad (20)$$

В случае слабой (сильной) связи обе величины,  $r$  и  $r_{\text{link}}$ , близки к нулю (единице), однако в промежуточных случаях наблюдаются интересные динамические режимы, в которых мера локальной синхронизации  $r_{\text{link}}$  высока, в то время как глобальная синхронизация ещё не достигнута. С возрастанием связи  $\lambda$  происходит постепенное разбиение сети на несколько связанных между собой модулей, которые увеличиваются по размеру, и связи сосредотачиваются внутри модулей. При этом распределение весов носит выраженный степенной характер. Дальнейшее возрастание связи приводит к распаду сети на несколько независимых модулей, а степенное распределение весов нарушается: в нём появляется выраженный максимум (рис. 3). Схожие эффекты проявляются и в более сложной — многослойной — сети фазовых осцилляторов, в которой действуют описанные принципы адаптации (см. [36]).

Другая динамика узлов и связей и в то же время схожие принципы адаптации рассмотрены в работе [37], в которой изучается сеть логистических отображений с переменными связями:

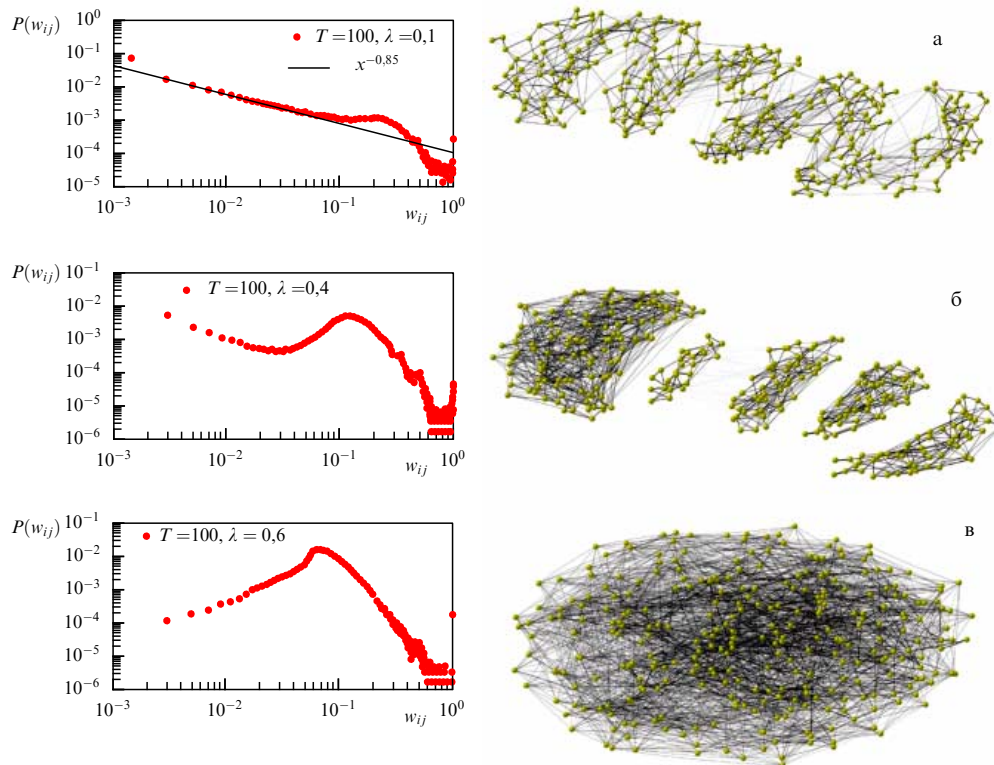
$$x_{n+1}^i = f \left[ (1-c)x_n^i + c \sum_{j=1}^N w_n^{ij} x_n^j \right], \quad (21)$$

где  $x_n^i$  — переменные, описывающие состояние  $i$ -го узла ( $i = 1, \dots, N$ ) в момент времени  $n$ . Коэффициент  $c$  характеризует силу связи узлов сети с данным узлом ( $0 < c < 1$ ), а  $w_n^{ij}$  — переменные веса направленных связей от  $j$ -го узла к  $i$ -му в момент  $n$ . Функция  $f(x) = ax(1-x)$  задаёт логистическое отображение в каждом узле. Веса связей изменяются согласно отображениям

$$w_{n+1}^{ij} = \frac{(1 + \delta g(x_n^i, x_n^j)) w_n^{ij}}{\sum_{j=1}^N (1 + \delta g(x_n^i, x_n^j)) w_n^{ij}}, \quad (22)$$

где  $\delta = 0,1$  — параметр пластичности,  $g(x_n^i, x_n^j) = 1 - 2|x_n^i - x_n^j|$  — монотонно убывающая функция модуля разности между своими аргументами.

Уравнение (22) является обобщённым правилом Хебба, т.е. связи усиливаются между узлами  $i$  и  $j$  с близкими значениями переменных  $x_n^i$  и  $x_n^j$ . Кроме того, в отображении (22) заложена нормализация связей, что



**Рис. 3.** Структура сети и соответствующие распределения весов для системы, описываемой уравнениями (16)–(18). В левой части рисунка показаны распределения весов  $P(w_{ij})$  при  $T = 100$  и различных значениях  $\lambda$ , указанных на рисунке. Заметим, что при малых  $\lambda$  формируется сеть со степенным распределением весов  $P(w_{ij}) = w_{ij}^{-\alpha}$ . В правой части рисунка соответственно показано образование модулей: с увеличением  $\lambda$  от  $\lambda = 0,1$  (рис. а) модули всё больше обособляются, до тех пор пока не становятся совсем не связанными при  $\lambda = 0,4$  (рис. б). При дальнейшем возрастании  $\lambda$  до  $0,6$  распределение весов становится всё более однородным, и в конце концов сеть становится единым модулем (рис. в). (Данные из работы [33].)

отражает другое важное свойство реальных сетей — ограниченность ресурсов, необходимых для образования связей. Начальные значения весов полагаются идентичными для всех связей:  $w_0^{ii} = 0$  и  $w_0^{ij} = 1/(N-1)$  при  $i \neq j$ . Начальные значения переменных выбираются случайными и равномерно распределёнными в интервале  $(0, 1)$ . В работе [37] показано, что происходит самоорганизация структуры такой сети: появляется упорядоченность даже в отсутствие синхронизации между взаимодействующими узлами. В сети можно выделить две группы узлов. Узлы первой (центральной) группы взаимодействуют между собой за счёт большого числа связей и имеют много исходящих связей к узлам второй (периферической) группы, оказывая тем самым сильное воздействие на динамику её узлов. Узлы второй группы при этом слабо взаимодействуют между собой и посылают лишь небольшое число связей к узлам центральной группы.

В работе [38] рассмотрена модель, основанная на связанных нейронных массах (32 или 64 массы), каждая из которых представляет собой большую популяцию взаимодействующих возбуждающих и тормозных нейронов и генерирует ЭЭГ/МЭГ-подобный сигнал (ЭЭГ — электроэнцефалография, МЭГ — магнитоэнцефалография). Показано, как взаимодействие между динамикой и эволюцией приводит к появлению сложносетевых свойств, в частности модульной топологии.

Эволюция сети моделируется двумя способами: за счёт пластичных связей, зависящих от синхронизации, или за счёт пластичности, зависящей от роста сети. В первом случае связи между массами усиливаются, когда

массы синхронны, и ослабевают в противном случае. Во втором — происходит гомеостатический процесс со случайным, зависящим от расстояния, образованием новых связей между нейронными массами. Первое правило, применённое к случайным сетям, приводит к кластеризации, но без выраженных модулей. Второе приводит к устойчивой сети с силами связей, зависящими от расстояния, со свойствами малого мира, но без корреляций степеней узлов и лишь со слабой модулярностью. Выраженная модулярность появляется только при совместном действии обоих правил в случае, когда число и размер модулей зависят от относительной силы обоих процессов, а также от размера сети. В такой сети проявляются также свойства малого мира (высокая кластеризация и малая средняя длина пути), ассортативное смещение и модульная структура. Повреждение сети (удаление нескольких связей у смежных узлов) после установления устойчивого состояния приводит к временному нарушению структуры сети, а затем к восстановлению модульной архитектуры.

В работе [39] рассмотрена сеть фазовых осцилляторов

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{r}{M_i} \sum_j^N W_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad (23)$$

где  $i = 1, \dots, N$ ,  $\omega_i$  — собственная частота  $i$ -го осциллятора,  $r$  — сила связи,  $M_i$  — число соседей  $i$ -го осциллятора,  $W_{ij}$  — симметричная матрица смежности. Алгоритм эволюции состоит в следующем. В течение каждого временного интервала  $T$  вычисляется средняя частота колебаний каждого осциллятора  $\Omega_i = (1/T) \int_t^{t+T} \dot{\varphi}_i(t') dt'$ ,



затем случайно выбирается некоторый осциллятор  $i$  и вычисляются значения  $\delta_{ij} = |\Omega_i - \Omega_j|$  для всех  $j \neq i$ . Далее ищется такой осциллятор  $j_1$ , для которого значение  $\delta_{ij_1}$  минимально среди всех  $\delta_{ij}$ . В то же время среди соседей осциллятора  $i$  ищется такой осциллятор  $j_2$ , для которого значение  $\delta_{ij_2}$  максимально. Если  $j_1$ -й узел является соседним для  $i$ -го, то топология не меняется. В противном случае связь между узлами  $i$  и  $j_2$  разрывается, а между узлами  $i$  и  $j_1$  — создаётся. После такой перестройки топологии начинается новый интервал длительностью  $T$  и процесс повторяется.

В работах [40, 41] рассматривается ансамбль нейронов (пороговых интеграторов), взаимодействующих посредством коротких импульсов-спайков. Состояние нейрона  $i = 1, \dots, N$  описывается переменной  $h_i \geq 0$ , характеризующей мембранный потенциал, изменяющейся в соответствии с уравнением

$$\dot{h}_i = \delta_{i,\zeta(t)} I + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_{ij}(t_{\text{sp}}) J_{ij}(t_{\text{sp}}) \delta(t - t_{\text{sp}}^j - \tau_d), \quad (24)$$

где  $\delta_{i,\zeta(t)}$  — символ Кронекера ( $\delta_{i,\zeta} = 1$ , если  $i = \zeta$ , и  $\delta_{i,\zeta} = 0$ , если  $i \neq \zeta$ ),  $\zeta$  — случайный процесс,  $I$  — сила входного стимула,  $t_{\text{sp}}$  — момент генерации спайка. Количество транмиттера, который выходит в синаптическую щель, характеризуется переменной  $J_{ij}$ , а доступная доля транмиттера в данный момент —  $u_{ij} \in [0, 1]$ , где индексы  $i$  и  $j$  относятся к пре- и постсинаптическому нейронам соответственно. Сила связи определяется произведением  $u_{ij} J_{ij}$ . Спайк с нейрона  $j$  воздействует на нейрон  $i$  с временной задержкой  $\tau_d$ , что в уравнении (24) описывается дельта-функцией Дирака  $\delta(t)$ .

Когда мембранный потенциал  $h_i \geq 0$  превышает некоторое пороговое значение  $\theta$  в момент  $t_{\text{sp}}^+$ , тогда нейрон  $i$  генерирует спайк. Затем происходит переустановка потенциала на величину порога:  $h_i(t_{\text{sp}}^+) = h_i(t_{\text{sp}}) - \theta$ . Синаптическая активность также уменьшает количество транмиттера, так что  $J_{ij}$  сразу после исчезновения спайка уменьшается. В интервалы времени между моментами появления спайков ресурсы восстанавливаются и  $J_{ij}$  достигает состояния покоя  $\alpha/u_0$  за характерное время  $\tau_j$ :

$$\dot{J}_{ij} = \frac{1}{\tau_j} \left( \frac{\alpha}{u_0} - J_{ij} \right) - u_{ij} J_{ij} \delta(t - t_{\text{sp}}^j). \quad (25)$$

Установлено, что такая сеть обладает свойством самоорганизованной критичности — наличием порога лавинообразного возбуждения нейронов. При этом адаптивность связей приводит к появлению новых эффектов: гистерезиса между состояниями критической и некритической динамики, переключательной динамики между различными состояниями за счёт входных стимулов, фазовых переходов первого и второго рода.

В работе [42] рассмотрена сеть  $N$  нейронов типа накопление–сброс, для каждого из которых мембранный потенциал  $V_i(t) \in [0, 1]$   $i$ -го нейрона изменяется согласно уравнению

$$\dot{V}_i(t) = a - V_i(t) + I_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (26)$$

В такой сети нейрон по достижении порога  $V_i = 1$  генерирует  $\alpha$ -импульс  $p_x(t) = \alpha^2 t \exp(-\alpha t)$ , который мгновенно распространяется ко всем остальным нейронам, а значение  $V_i$  убывает до нуля. Здесь  $a > 1$  — надпороговый постоянный ток,  $I_i = gE_i$  — синаптический ток,  $g > 0$  — сила связи. Поле  $E_i$  представляет собой линей-

ную суперпозицию импульсов, получаемых  $i$ -м нейроном, и его динамика определяется дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{E}_i(t) + 2\alpha \dot{E}_i(t) + \alpha^2 E_i(t) = \frac{\alpha^2}{N-1} \sum_{n|t_n < t, j} w_{ij} \delta(t - t_n). \quad (27)$$

В случае постсинаптического (пресинаптического) спайка, эмитированного нейроном  $i(j)$  в момент  $t$ , веса  $w_{ij}$  увеличиваются (уменьшаются) согласно соотношению  $w_{ij}(t^+) = w_{ij}(t^-) + \Gamma_{ij}(t)$ , где

$$\Gamma_{ij}(t) = \begin{cases} p(w_{\text{max}} - w_{ij}(t^-)) \exp\left(-\frac{\delta_{ij}}{\tau_+}\right), & \text{если } \delta_{ij} > 0, \\ -dw_{ij}(t^-) \exp\left(\frac{\delta_{ij}}{\tau_-}\right), & \text{если } \delta_{ij} < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь  $p$  — коэффициент возбуждающей связи,  $d$  — коэффициент подавляющей связи,  $w_{\text{max}}$  — максимальная сила связей,  $0 \leq w_{ij} \leq w_{\text{max}}$ ,  $\tau_+$  ( $\tau_-$ ) — длительность временных промежутков, в течение которых действие постсинаптических (пресинаптических) спайков приводит к потенци (депрессии),  $\delta_{ij} = t - t^{(j)} > 0$  ( $\delta_{ij} = t^{(i)} - t < 0$ ) — разница со временем генерации спайка.

Установлено, что в такой сети возникают нерегулярно повторяющиеся переходы между сильно- и слабо-синхронными состояниями. Механизм таких переходов определяется так называемым эффектом Сизифа — непрерывной обратной связью между синаптическими изменениями и когерентностью спайковой активности нейронов. При этом наблюдается периодическое изменение весов: малые (большие) синаптические веса приводят сеть в сильно (слабо) синхронное состояние; индуцированная активность нейронов в свою очередь увеличивает (уменьшает) веса.

В работе [43] рассмотрена динамика сети из  $N$  элементов, каждый из которых характеризуется переменной  $x_i(t)$ , называемой авторами [43] ресурсом. Динамика ресурса в узлах сети описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t+1) = & x_i(t) + F(x_i(t)) + \\ & + D \sum_{j \in \mathcal{N}} \left( \frac{w_{ij}(t)}{s_j(t)} x_j(t) - \frac{w_{ji}(t)}{s_i(t)} x_i(t) \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $F(x) = -\kappa(x-1)$  отражает диссипацию ресурса в узле, а веса  $w_{ij}(t)$  контролируют процесс диффузии. Последний можно представить в виде случайных блужданий, при которых случайный переход из  $i$ -го узла в  $j$ -й происходит за один временной шаг с вероятностью  $Dw_{ji}(t)/s_i(t)$ . Здесь  $s_i(t)$  — сила узла, определяемая как  $s_i(t) \equiv \sum_{j \in \mathcal{N}} w_{ji}(t) = \sum_j a_{ij} w_{ij}(t)$ , где  $\mathcal{N}_i$  — множество соседей узла  $i$ . Динамика весов описывается уравнениями

$$\dot{w}_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \varepsilon [x_i(t)x_j(t) - w_{ij}(t)], \quad (30)$$

где  $\varepsilon$  — параметр релаксации. Совместная динамика узлов и связей асимптотически приводит к установлению степенных распределений ресурса (в узлах) и весов, даже если топология связей не является масштабнo-инвариантной. Кроме того, показано, что при наличии диссипации ( $\kappa \neq 0$ ), несмотря на установление стационарных распределений, значения переменных в отдельно взятом узле или соединении может изменяться во времени.

Таким образом, более сложные по сравнению с рассмотренными в разделе 3.1 правила адаптации динамических сетей приводят к новым эффектам, затрагивающим не только динамику, но и структуру сетей. В частности, конкуренция двух принципов: ограниченность ресурсов, необходимых для формирования связей, и синхронизация осцилляторов с близкими значениями динамических переменных — приводит к появлению модулей. Благодаря совместной динамике узлов и связей сеть приобретает качественно новые структурные свойства — наличие слабозаимодействующих подгрупп тесно связанных осцилляторов.

### 3.3. Переключательная динамика адаптивных сетей

Свойство адаптивности, которое состоит во взаимодействии между динамикой и эволюцией сети, может проявляться как на конечных временах, так и в долговременном пределе. В первом случае адаптивная сетевая система часто приходит к некоторому аттрактору, на котором топология сети перестаёт изменяться во времени, а динамика узлов и связей может продолжать развиваться. Во втором случае система может выйти на аттрактор, на котором продолжится взаимовлияние изменяющейся топологии и динамического состояния сети. На пути к этим аттракторам состояние и топология сети в течение длительного времени могут испытывать последовательные изменения, которые представляют больший интерес, чем конечное состояние сети. В данном случае предметом исследования является транзитивная, или переходная, динамика сетевой системы, которая состоит из цепочки переключений. При этом, хотя и топология, и динамические переменные не приходят к фиксированным состояниям, некоторые средние характеристики (количество узлов или их средняя степень) могут достигать устойчивых значений.

В работе [44] большое внимание уделено гетерогенности узлов как движущей силе эволюции сетевой структуры. Эволюция сети происходит по принципу обнаружения среди всех конфигураций структуры с минимальным числом связей, которая гарантирует частотную синхронизацию узлов. Динамика узлов описывается фазовыми уравнениями

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad (31)$$

в которых изменение связей определяется уравнениями второго порядка с потенциалом, имеющим две ямы,  $V(w_{ij}) = bw_{ij}^2(w_{ij} - 1)^2$ , где параметр  $b$  задаёт высоту барьера:

$$\ddot{w}_{ij} + d\dot{w}_{ij} + \frac{\partial V(w_{ij})}{\partial w_{ij}} = h(\|\varphi_j - \varphi_i\|). \quad (32)$$

Здесь  $d$  — коэффициент затухания,  $h(\|\varphi_j - \varphi_i\|) = \alpha[1 - (1/2)|\exp(i\varphi_i) + \exp(i\varphi_j)|]$ . Благодаря форме потенциала  $V(w_{ij})$  с течением времени веса  $w_{ij}$  с начальными условиями  $w_{ij}(0) = 0$  и  $\dot{w}_{ij}(0) = 0$  сходятся к нулю (связь отсутствует) или к единице (связь активирована) в зависимости от внешнего стимула, который определяется функцией  $h(\|\varphi_j - \varphi_i\|)$ . Частоты осцилляторов  $\omega_i$  являются различными и задаются по гауссову распределению с нулевым средним и стандартным отклонением  $\sigma$ , т.е.  $\sigma$  — мера гетерогенности узлов в сети.

Действие оператора эволюции состоит из двух стадий, отражающих такие свойства природной эволюции, как изменчивость и отбор. Реализация механизма изменчивости состоит в том, что генерируется множество невзвешенных сетей с помощью уравнений (31) и (32), каждый раз при различных начальных значениях переменных. Выбирается  $n_S$  начальных условий, случайно выбранных в интервале  $\varphi_i(0) \in [0, 2\pi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . После этой процедуры для каждой связи вычисляется вероятность её появления  $p_{ij}$  как отношение числа  $n_{ij}$  сгенерированных сетей, в которых данная связь присутствует, к общему числу реализаций  $n_S$ , т.е.  $p_{ij} = n_{ij}/n_S$ . Элементы полученной стохастической матрицы  $P$  размерности  $N \times N$  являются вероятностями активации любой из возможных связей между узлами.

Механизм отбора состоит в выборе только тех связей, вероятность активации которых превышает критическое пороговое значение  $p^*$ , т.е. таких, для которых  $p_{ij} > p^*$ . Значение  $p^*$  выбирается исходя из того, чтобы результирующая сеть была связанной и имела наименьшее число связей.

С увеличением узловой гетерогенности происходят структурные изменения в сети: увеличиваются максимальное и минимальное значения степени узлов. С большей вероятностью связи активируются между узлами, имеющими наибольшее расхождение частот, а узлы, имеющие частоты, наиболее отличные от средней, с большей вероятностью становятся хабами — узлами с высокой степенью по сравнению со степенями остальных узлов. Динамика весов зависит от динамики узлов, и результирующая (невзвешенная) сеть представляет собой итог совместной эволюции структуры и динамики узлов. Стратегия основана на распределённой адаптивной нелинейной схеме и, таким образом, является достаточно общим децентрализованным механизмом.

В работе [45] построена модель сети синаптически связанных нейронов Моррис–Лекара, динамика которой описывается системой следующего вида:

$$\begin{aligned} C \frac{dv_i}{dt} &= -g_L(v_i - v_L) - g_{Ca} M_{\text{inf}}(v_i) [v_i - v_{Ca} - \\ &\quad - g_K n_i (v_i - v_K) + I_i^{\text{ext}} - s_i g_{\text{syn}} (v_i - v_{\text{rev}})], \\ \frac{dn_i}{dt} &= \frac{n_{\text{inf}}(v_i) - n_i}{\tau_n(v_i)}, \\ \frac{dr_i}{dt} &= f_1(r_i) - s_i - k_1, \\ \frac{ds_i}{dt} &= \varepsilon \left[ f_2(r_i) - s_i - k_2 - \mu \sum_{j=1, j \neq i}^N H(v_j - \theta_{ji}) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где индексы  $i$  и  $j$  нумеруют элементы сети. Два первых уравнения в (33) описывают динамику нейронов, два других — синаптические связи между ними. Переменные  $v_i$  и  $n_i$  характеризуют мембранный потенциал и активацию калиевого ионного канала  $i$ -го нейрона,  $C$  — электрическая ёмкость мембраны, члены в правой части первого уравнения в (33) описывают токи, протекающие через клеточную мембрану нейрона. Первые три слагаемых определяют соответственно ток утечки, кальциевый и калиевый токи, текущие через мембрану, а  $I_i^{\text{ext}}$  — внешние токи,  $g_L$ ,  $g_{Ca}$ ,  $g_K$  — максимальные проводимости, а  $v_L$ ,  $v_{Ca}$ ,  $v_K$  — равновесные потенциалы (потенциалы реверсии) для соответствующих ионных каналов;  $M_{\text{inf}}(v)$ ,  $n_{\text{inf}}(v)$  и  $\tau_n(v)$  — стационарные состояния уровней акти-

вазии и характерное время релаксации, зависящие от мембранного потенциала по сигмоидному закону:

$$M_{\text{inf}}(v) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \frac{v - v_1}{v_2} \right),$$

$$n_{\text{inf}}(v) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \frac{v - v_3}{v_4} \right),$$

$$\tau_n(v) = \left( \varepsilon \tanh \frac{v - v_3}{2v_4} \right)^{-1}.$$

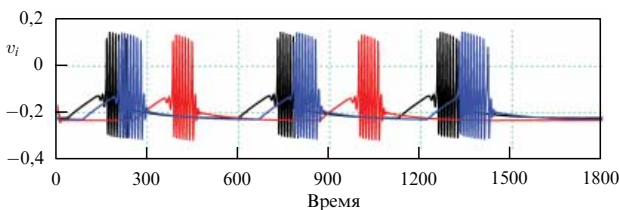
Последнее слагаемое в первом уравнении (33) определяет синаптический ток, возникающий в результате действия на  $i$ -й нейрон других нейронов посредством химических синапсов. Параметр  $g_{\text{syn}}$  определяет максимальную синаптическую проводимость,  $v_{\text{rev}}$  — реверсивный потенциал для синаптического тока, переменная  $s_i$  характеризует зависимость проводимости мембраны  $i$ -го нейрона от пресинаптических потенциалов  $v_j$  ( $j \neq i$ ) воздействующих на него нейронов. Функции в модели синаптической связи (33) задаются следующим образом:

$$f_1(r) = r - \frac{r^3}{3}, \quad f_2(r) = \begin{cases} \alpha r, & r < 0, \\ \beta r, & r \geq 0, \end{cases}$$

$$H(x) = \left[ 1 + \exp \left( -\frac{x}{\kappa} \right) \right]^{-1}.$$

где  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 2$  и  $\kappa = 0,001$  — константы модели. Установлено, что система (33) демонстрирует разнообразную структурно-устойчивую переходную динамику. В ответ на действие внешнего стимула в ансамбле, изначально находящемся в покое, возникает некоторая последовательность метастабильных колебательных состояний активности (время жизни таких состояний значительно превосходит длительность действия одиночного импульса отдельного нейрона). В зависимости от вида матрицы связей  $\{\theta_{ji}\}$  в сети может наблюдаться последовательная активация нейронов, генерирующих по очереди серию спайков, либо более сложные паттерны (рис. 4).

Увеличение числа нейронов в сети существенно расширяет набор возможных маршрутов переходной динамики и может значительно усложнить их пространственную конфигурацию. В частности, в крупномасштабных сетях нейронов возможно возникновение пространственно хаотических переходных последовательностей. Заметим, что возникающая в многомерном фазовом пространстве траектория, соответствующая сложной переключательной динамике нейронов, асимптотически приходит к устойчивому состоянию равновесия и вследствие



**Рис. 4.** Пример переходной динамики системы (33) из трёх нейронов. В ответ на действие внешнего стимула в сети возникает транзитивная динамика: нейроны в определённом порядке генерируют серии спайков и затем система возвращается в равновесие. (Данные из работы [45].)

грубости (структурной устойчивости) этого равновесия также является грубой.

В работе [46] рассмотрена сеть из пяти хаотических отображений, качественно описывающих активность нейрона:

$$x_{i,n+1} = x_{i,n} + F_{\Theta}(x_{i,n}) - y_{i,n} + I_{i,n}, \quad (34)$$

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + \varepsilon(x_{i,n} - J_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $i = 1, \dots, 5$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $F_{\Theta}(x) = x(x-a)(1-x) - \beta\Theta(x-d)$ ,  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда; параметры  $a$ ,  $\beta$  и  $d$  контролируют форму генерируемого сигнала. Связь между узлами задаётся слагаемым  $I_{i,n}$ , описывающим влияние на  $i$ -й узел:

$$I_{i,n} = -g \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} G_{ij,n}(x_{i,n} - v) \Theta(x_{j,n} - \theta), \quad (35)$$

где параметр  $g$  — сила связи,  $v$  — потенциал реверсии,  $\theta$  — порог пресинапса. Матрица связей  $G_{ij,n}$  задаёт топологию:  $G_{ij,n} = 1$ , если  $j$ -й узел влияет на  $i$ -й узел в момент  $n$ , и  $G_{ij,n} = 0$  в противном случае.

Перестройка топологии происходит по принципу накопление–сброс. Накопление описывается переменной  $q$ , зависящей от среднего поля сети:

$$q_{n+1} = \begin{cases} q_n + \mu X_n & \text{при } q_n < 1, \\ 0 & \text{при } q_n \geq 1, \end{cases} \quad (36)$$

где  $\mu = 0,01$  и

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{i,n}. \quad (37)$$

По достижении порога  $q = 1$  в момент  $n = n^*$  происходят перестройка топологии и сброс значения  $q$  до нуля.

Перестройка топологии в момент  $n = n^*$  происходит под действием оператора  $P_{kl}$ :

$$G_{ij,n+1} = P_{kl} G_{ij,n}, \quad (38)$$

где  $P_{kl}$  меняет местами  $k$ -ю и  $l$ -ю строки в  $G_{ij,n}$ , а в полученной матрице —  $k$ -й и  $l$ -й столбцы. Номера  $k$  и  $l$  выбираются исходя из того, какие узлы являются активными в момент перестройки и какие были активными перед этим, а именно выбирается пара с наименьшей дистанцией, вычисленной на циклически упорядоченном множестве нумерованных узлов  $1, \dots, i, \dots, N$ . Показано, что благодаря взаимовлиянию динамики узлов и эволюции структуры данные сети способны генерировать переключательные последовательности кластерных состояний. Каждое такое состояние представляет собой циклическую смену кластеров синхронной активности различной конфигурации. Установлено, что внешний сигнал, воздействующий на один из узлов и формирующий начальную топологию, вызывает отклик сети в виде последовательности кластерных состояний, которая структурно устойчива к малому шуму, изменению начальных условий и расстройкам параметров.

Таким образом, усложнение механизма адаптации приводит к появлению нетривиальных переходных (транзитивных) процессов в сложных сетях. Возникают последовательности сменяющих друг друга различных режимов синхронной активности. Множество всевозможных режимов можно представить в виде графа динамических

состояний сети, рёбра которого соответствуют разрешённым переходам между различными режимами. Воздействие внешнего стимула приводит к структурно-устойчивому отклику адаптивной сети в виде переключающей последовательности, которой отвечает определённый путь перемещения по графу.

#### 4. Заключение

Адаптивные динамические сети являются наиболее адекватным модельным описанием многих реальных систем в природе, технических приложениях и обществе. Примерами могут служить сети взаимодействующих лазеров и джозефсоновских контактов, иммунная и нервная системы, конкурирующие популяции организмов и пищевые цепи, связанные химические реакции, сети автомобильных дорог и авиасообщений, сети электропередачи, беспроводные коммуникационные сети, Интернет, виртуальные социальные сети, сети знакомств и научной кооперации и многие другие.

В настоящем обзоре представлены основные модельные системы, описывающие адаптивные динамические сети. Показано, что, несмотря на различие конкретных моделей, в таких сетях возникают общие явления, среди которых можно отметить установление режимов кластерной синхронизации, появление топологических модулей, степенные законы распределения степеней узлов и весов связей, самоорганизованная критичность, мультистабильная переключающая динамика. Одной из ключевых задач в теории адаптивных динамических сетей остаются вопросы о том, как появляются нетривиальные глобальные топологии в сетях, в которых установлены те или иные локальные взаимодействия между узлами, и какие топологические свойства возникают вследствие данного набора эволюционных правил.

Работа выполнена при поддержке Российским научным фондом (грант 16-42-01043).

#### Список литературы

1. Гинзбург В Л *УФН* **169** 419 (1999); Ginzburg V L *Phys. Usp.* **42** 353 (1999)
2. Albert R, Barabási A-L *Rev. Mod. Phys.* **74** 47 (2002)
3. Newman M E *SIAM Rev.* **45** 167 (2003)
4. Boccaletti S et al. *Phys. Rep.* **424** 175 (2006)
5. Gorochocki T E, Di Bernardo M, Grierson C S *Complexity* **17** (3) 18 (2012)
6. Belykh I et al. *Physica D* **267** 1 (2014)
7. Newman M, Barabási A-L, Watts D J *The Structure and Dynamics of Networks* (Princeton: Princeton Univ. Press, 2006)
8. Costa L da F et al. *Adv. Phys.* **56** 167 (2007)
9. Gross T, Blasius B J. R. *Soc. Interface* **5** 259 (2008)
10. Blasius B, Gross T *Rev. Nonlin. Dyn. Complexity* **2** 63 (2009)
11. Dorogovtsev S N, Mendes J F F *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2013)
12. Barabási A-L, Albert R *Science* **286** 509 (1999)
13. Albert R, Barabási A-L *Phys. Rev. Lett.* **85** 5234 (2000)
14. Serrano M A *Phys. Rev. E* **78** 026101 (2008)
15. Newman M E J *Phys. Rev. Lett.* **89** 208701 (2002)
16. Motter A E et al. *Nature Phys.* **9** 191 (2013)
17. Rohden M et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 064101 (2012)
18. Menck P J et al. *Nature Commun.* **5** 3969 (2014)
19. Watts D J, Strogatz S H *Nature* **393** 440 (1998)
20. Aoki T, Aoyagi T *Phys. Rev. Lett.* **102** 034101 (2009)
21. Tanaka T, Aoki T, Aoyagi T *Forma* **24** (1) 17 (2009)
22. Aoki T, Aoyagi T *Phys. Rev. E* **84** 066109 (2011)
23. Касаткин Д В, Некоркин В И *Изв. вузов. Радиофизика* **58** 981 (2015); Kasatkin D V, Nekorkin V I *Radiophys. Quantum Electron.* **58** 877 (2016)
24. Касаткин Д В, Некоркин В И *Изв. вузов. Приклад. нелинейная динамика* **23** (4) 58 (2015)
25. Li M, Guan S, Lai C-H *New J. Phys.* **12** 103032 (2010)
26. Botella-Soler V, Glendinning P *Europhys. Lett.* **97** 50004 (2012)
27. Botella-Soler V, Glendinning P *Phys. Rev. E* **89** 062809 (2014)
28. Chandrasekar V et al. *Physica D Nonlin. Phenom.* **267** 36 (2014)
29. Maistrenko Yu L et al. *Phys. Rev. E* **75** 066207 (2007)
30. Seliger P, Young S C, Tsimring L S *Phys. Rev. E* **65** 041906 (2002)
31. Zhou C, Kurths J *Phys. Rev. Lett.* **96** 164102 (2006)
32. Gutiérrez R et al. *Phys. Rev. Lett.* **107** 234103 (2011)
33. Assenza S et al. *Sci. Rep.* **1** 99 (2011)
34. Kuramoto Y *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer Series in Synergetics, Vol. 19) (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
35. Gómez-Gardeñes J, Moreno Y, Arenas A *Phys. Rev. Lett.* **98** 034101 (2007)
36. Makarov V et al. *Chaos, Solitons Fractals* **84** 23 (2016)
37. Ito J, Kaneko K *Phys. Rev. Lett.* **88** 028701 (2001)
38. Stam C J et al. *Frontiers Comput. Neurosci.* **4** 133 (2010)
39. Gleiser P M, Zanette D H *Eur. Phys. J. B* **53** 233 (2006)
40. Levina A, Herrmann J M, Geisel T *Nature Phys.* **3** 857 (2007)
41. Levina A, Herrmann J M, Geisel T *Phys. Rev. Lett.* **102** 118110 (2009)
42. Mikkelsen K, Imparato A, Torcini A *Phys. Rev. E* **89** 062701 (2014)
43. Aoki T, Aoyagi T *Phys. Rev. Lett.* **109** 208702 (2012)
44. Scafuti F, Aoki T, di Bernardo M *Phys. Rev. E* **91** 062913 (2015)
45. Некоркин В И, Касаткин Д В, Дмитричев А С *Изв. вузов. Радиофизика* **53** 51 (2010); Nekorkin V I, Kasatkin D V, Dmitriчев A S *Radiophys. Quantum Electron.* **53** 45 (2010)
46. Maslennikov O V, Nekorkin V I *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulation* **23** (1) 10 (2015)

#### Adaptive dynamical networks

O.V. Maslennikov, V.I. Nekorkin

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, 603155 Nizhny Novgorod, Russian Federation*  
E-mail: olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@neuron.appl.sci-nnov.ru

Dynamical networks are systems of active elements (nodes) interacting with each other via links or couplings. Examples are power grids, neural structures, coupled chemical oscillators, communications networks, etc., all of which are characterized by the network structure and intrinsic dynamics of their interacting components. If the coupling structure of a dynamical network can change over time due to nodal dynamics then such a system is called an adaptive dynamical network. The term "adaptive" implies that the coupling topology can be rewired; the term "dynamical" implies the presence of internal node and link dynamics. Main results on adaptive dynamical networks are reviewed. Key notions and definitions of the theory of complex networks are given and major collective effects that emerge in adaptive dynamical networks are described.

**Keywords:** dynamical networks, adaptive links, synchronization, attractor, coupled oscillators

PACS numbers: **05.45.-a**, **05.45.Xt**, **87.10.-e**

Bibliography — 46 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **187** (7) 745–756 (2017)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.10.037902>

Received 24 August 2016, revised 3 October 2016

*Physica – Uspekhi* **60** (7) (2017)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2016.10.037902>