

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Киральная симметрия и свойства адронов  
в обобщённой модели Намбу – Иона-Лазинио

Ю.С. Калашникова, А.В. Нефедьев, Ж.Э.Ф.Т. Рибейро

*Обсуждаются различные аспекты обобщённой модели Намбу – Иона-Лазинио для квантовой хромодинамики в четырёх измерениях. Изучаются свойства мезонных возбуждений, причём особое внимание уделяется киральному пиону. На микроскопическом уровне описаны эффект спонтанного нарушения киральной симметрии в вакууме, а также эффективное восстановление киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых мезонов и барионов.*

**Ключевые слова:** сильные взаимодействия, квантовая хромодинамика, киральная симметрия, кварковая модель, свойства адронов, киральный пион

PACS numbers: 12.38.Aw, 12.39.Ki, 12.39.Pn

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.11.037966>

## Содержание

1. Введение (715).
2. Приближение Бардина – Купера – Шриффера, щелевое уравнение и кирально нарушенный вакуум (718).
3. Выход за рамки приближения Бардина – Купера – Шриффера. Мезонные состояния (721).
  - 3.1. Уравнение Бете – Солпитера. 3.2. Киральный пион. 3.3. Преобразование Боголюбова для мезонных операторов.
4. Лоренцева природа конфайнмента (726).
5. Эффективное восстановление киральной симметрии в спектре адронов (730).
  - 5.1. Общие замечания. 5.2. Квантовые флуктуации и квазиклассический режим в спектре возбуждённых адронов. 5.3. Эффек-

тивное восстановление киральной симметрии в спектре возбуждённых мезонов. 5.4. Отщепление пиона от высоковозбуждённых мезонов. 5.5. Эффективное восстановление киральной симметрии в спектре возбуждённых барионов. 5.6. Аксиальные заряды барионов в нерелятивистской кварковой модели.

## 6. Заключение (741).

Список литературы (742).

## 1. Введение

Кварковые модели сильных взаимодействий имеют весьма длительную историю, начиная с середины XX в., когда представления об адронах как о неэлементарных объектах, составленных из кварков, стали общепринятыми. Огромным является не только само число разнообразных кварковых моделей, но и даже число их типов. Например, модель, включающая в себя цветное кулоновское взаимодействие плюс линейный потенциал [1], с хорошей точностью описывает спектр тяжёлых кварконов, поскольку масса тяжёлого кварка существенно превосходит характерный масштаб сильных взаимодействий  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . Наивная чисто кинематическая релятивизация кварковой модели [2] позволяет рассматривать также и мезоны, состоящие из лёгких кварков, хотя основания для использования потенциального подхода в этом случае гораздо менее очевидны. Данный подход, как и другие аналогичные модели, является достаточно простым, в том числе с точки зрения технических аспектов вычислений, однако исследованию в его рамках недоступны многие явления, имеющие место в квантовой хромодинамике (КХД) и представляющие несомненный интерес для феноменологии сильных взаимодействий. К числу таких явлений следует отнести спонтанное нарушение киральной инвариантности в вакууме КХД, его проявления в спектре адронных состояний, а также эффективное восстановление киральной симметрии в высоковозбуждённых адронах.

**Ю.С. Калашникова.** Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова, ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация; Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация  
**А.В. Нефедьев.** Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова, ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация; Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация; Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация  
 E-mail: [nefediev@itep.ru](mailto:nefediev@itep.ru)  
**Ж.Э.Ф.Т. Рибейро.** Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

Статья поступила 16 сентября 2016 г.,  
после доработки 18 ноября 2016 г.

Как известно, в киральном пределе  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  симметрия лагранжиана КХД нарушена, что приводит к ряду наблюдаемых свойств адронного спектра. Так, спонтанное нарушение симметрии  $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)$  [3] проявляется через отсутствие в спектре низколежащих адронов мультиплетов, отвечающих группе  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , голдстоуновскую природу пиона, в частности через его нулевую (вне кирального предела — конечную, но крайне малую на адронном масштабе) массу, ненулевую величину кирального конденсата в вакууме и т.д. Таким образом, в области низколежащих адронов киральная симметрия реализуется нелинейным образом.

Между тем есть основания полагать, что указанная выше симметрия эффективно восстанавливается как в спектре возбуждённых барионов [4–6], так и в спектре возбуждённых мезонов [7–9]. Красивое и весьма убедительное подтверждение явления восстановления киральной симметрии в спектре возбуждённых адронов получено в недавней работе [10], где массы лёгких адронов извлекались из решёточных конфигураций после удаления "вручную" из последних околонулевых мод оператора Дирака, ответственных за спонтанное нарушение киральной симметрии в вакууме [11]. Полученный в результате спектр масс демонстрировал достаточно высокую группу симметрии, включая образование киральных мультиплетов [12].

Точное решение КХД обеспечило бы микроскопическое описание эффекта спонтанного нарушения киральной симметрии. Ввиду отсутствия такого решения были предложены различные подходы, нацеленные на установление глюонных полевых конфигураций, отвечающих за нарушение киральной симметрии. Довольно естественно ожидать существования связи между таким нарушением и явлением удержания цвета (или конфайнмента) — ещё одного хорошо известного свойства КХД. Например, в подходе работы [13] удерживающее ядро, выведенное в рамках метода вакуумных корреляторов [14], порождает взаимодействие лёгких кварков с полями Намбу–Голдстоуна и приводит к возникновению некоторого эффективного кирального лагранжиана. Предметом изучения настоящего обзора является феноменологический подход, в котором используется относительно простой вид удерживающего потенциала. Важный и полезный опыт, используемый при развитии такого подхода, может быть почерпнут из модели 'т Хофта [15] для двумерной КХД в пределе бесконечно большого числа цветов ( $N_c \rightarrow \infty$ ).

Прежде всего отметим, что микроскопическое описание явления спонтанного нарушения киральной симметрии требует существенно теоретико-полевого подхода, учитывающего одновременно и частицы, и античастицы в рамках единого формализма. При этом, как указывалось выше, конституентные кварковые модели являются квантово-механическим подходом, даже если они оперируют релятивистской кинематикой. С формальной точки зрения проблема состоит в том, что при работе с релятивистскими квантово-механическими гамильтонианами приходится ограничиваться лишь одним (положительным) знаком энергии, а вкладами решения с другим (отрицательным) знаком энергии пренебрегать. Такие "отрицательные" решения отвечают вкладу античастиц, так что сочетание положительных и отрицательных решений описывает зигзагообразное движение частицы —

так называемые Z-графы. Данную проблему можно проследить и далее, до уравнения для спектра, — возникающее при этом простое уравнение Солпитера для спектра связанных состояний определяется однокомпонентным гамильтонианом, описывающим частицу, т.е. уравнение для спектра возникает при пренебрежении другими компонентами гамильтониана, связанными с античастицей. Такое приближение обосновано для тяжёлых частиц, однако оно с очевидностью нарушается для лёгких кварков и построенных из них лёгких адронов, в первую очередь для кирального пиона.

Наиболее наглядно механизм учёта возвратного движения кварков может быть описан в терминах матричного гамильтониана и двухкомпонентной волновой функции. В работе [16] указанный подход предложен и детально описан в модели 'т Хофта [15] для двумерной КХД. При этом ключевым приближением, позволяющим контролировать процесс рождения пар из вакуума, является предел большого числа цветов,  $N_c \rightarrow \infty$  (введение в круг вопросов, связанных с пределом большого числа цветов в КХД, можно найти в работе [17]). Также следует отметить, что данный предел бесконечного числа степеней свободы позволяет обойти [18] no-go-теорему Коулмена, запрещающую спонтанное нарушение киральной инвариантности в двух измерениях [19]. Дополнительные упрощения возникают в модели благодаря одновременности взаимодействия, переносимого двумерным глюоном. Данное явление легко объясняется элементарным подсчётом степеней свободы двумерного глюона, в результате которого легко установить отсутствие у него поперечных распространяющихся поляризаций. В итоге модель 'т Хофта в аксиальной калибровке, рассмотренная в работе [16], описывается взаимодействием двух взятых в один и тот же момент времени кварковых токов, передаваемым через потенциал конфайнмента, зависящий от расстояния между кварками. Члены, содержащие произведение большого числа кварковых токов, в гамильтониане отсутствуют, поскольку корреляторы глюонных полей высоких степеней или обращаются в нуль, или сводятся к степеням билакального коррелятора, т.е. пропагатора глюона. В результате отличен от нуля лишь низший неприводимый коррелятор полей вида  $\langle\langle A_1 A_2 \rangle\rangle = \langle A_1 A_2 \rangle - \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle = \langle A_1 A_2 \rangle$ , тогда как все неприводимые корреляторы более высоких порядков обращаются в нуль. Данный результат в двух измерениях является точным и не апеллирует ни к каким приближениям или предположениям. Обзор свойств модели 'т Хофта в аксиальной калибровке можно найти в работе [20].

В четырёхмерном случае одновременность взаимодействия и отсутствие в гамильтониане членов, содержащих произведение более чем двух кварковых токов, являются, в отличие от таковых в двумерном случае, приближениями, которые, однако, позволяют построить достаточно реалистичную кварковую модель, подробно описанную ниже. Так, кварковая модель с одновременным взаимодействием кварковых токов была предложена в качестве модели КХД около 30 лет назад в работах [21–24] и затем детально исследована в гамильтоновом формализме в работах [25–30], а также в более поздних работах [31–35]. Как указывалось выше, эта модель может рассматриваться в качестве обобщения двумерной модели 'т Хофта для четырёхмерного пространства. Одновременно данную модель можно также

считать обобщением четырёхмерной модели Намбу–Иона-Лазинию (НИЛ) [3] для случая нелокального взаимодействия кварковых токов. Необходимо заметить, что, несмотря на свою многолетнюю историю, модель НИЛ [3] до сих пор остаётся одним из наиболее полезных и удобных инструментов в физике сильных взаимодействий. Немаловажную роль в этом сыграли детальное прослеживание связи данной модели с КХД (см., например, работы [36, 37]), а также её дальнейшее развитие (см. обзоры [38, 39]), которое позволило существенно расширить спектр задач, при изучении которых эта модель может успешно применяться. Важной особенностью обсуждаемой в настоящем обзоре разновидности модели, называемой в дальнейшем обобщённой моделью НИЛ, является явное присутствие в теории удерживающего взаимодействия, что позволяет изучать вопрос о спектре связанных состояний, а также привносит в теорию характерный масштаб.

Модель задаётся гамильтонианом (для простоты рассматривается случай одного кваркового аромата — обобщение для нескольких ароматов тривиально)

$$\hat{H} = \int d^3x \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) (-i\boldsymbol{\gamma} \nabla + m) \psi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_\mu^a(\mathbf{x}, t) K_{\mu\nu}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_\nu^b(\mathbf{y}, t), \quad (1)$$

где, как отмечалось выше, введено взаимодействие кварковых токов  $J_\mu^a(\mathbf{x}, t) = \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) \gamma_\mu(\lambda^a/2)_\beta^\alpha \psi_\beta(\mathbf{x}, t)$ , параметризованное одновременным ядром

$$K_{\mu\nu}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = g_{\mu 0} g_{\nu 0} \delta_{ab} V_0(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения:

- строчными курсивными буквами из начала греческого (латинского) алфавита  $\alpha, \beta$  и т.д. ( $a, b$  и т.д.) обозначены цветовой индексы в фундаментальном (присоединённом) представлении, пробегающие значения  $1, 2, \dots, N_c (1, 2, \dots, N_c^2 - 1)$ ;

- строчными курсивными буквами из середины греческого алфавита ( $\mu, \nu$  и т.д.) обозначены лоренцевы индексы, принимающие значения от 0 до 3;

- $\psi(\mathbf{x}, t)$  — фермионное (кварковое) поле;  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ ;

- $m$  — масса кварка (киральному пределу отвечает  $m = 0$ );

- $\gamma^\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma})$  — матрицы Дирака;

- $\lambda$  — цветовой матрицы (генераторы группы  $SU(N_c)$ );

- $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор пространства Минковского;

- $\delta_{ab}$  — символ Кронекера.

Обычно удерживающий потенциал выбирается в форме степенной функции:

$$V_0(|\mathbf{x}|) = K_0^{\alpha+1} |\mathbf{x}|^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2, \quad (3)$$

где  $K_0$  — параметр модели с размерностью массы. При этом качественные предсказания модели не зависят от формы удерживающего потенциала, единственными требованиями к которому являются обеспечение невылетания цвета, с одной стороны, и умеренное возрастание с увеличением расстояния между кварками, чтобы избежать расходящихся интегралов, с другой стороны.

Граничные случаи  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 2$  требуют особого рассмотрения. В частности, в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  необходимо переопределение потенциала:

$$V_0(|\mathbf{x}|) \rightarrow \tilde{V}_0(|\mathbf{x}|) = K_0 \frac{(K_0 |\mathbf{x}|)^\alpha - 1}{\alpha} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} = K_0 \ln(K_0 |\mathbf{x}|), \quad (4)$$

так что результирующий потенциал оказывается логарифмическим. Формально область определения степени  $\alpha$  может быть распространена на отрицательные значения вплоть до  $\alpha > -1$  (при  $\alpha = -1$ , т.е. для кулоновского потенциала, в интегралах вновь возникает расходимость (см. подробности, например, в работе [32])). Однако отрицательные показатели степени  $\alpha$  не удовлетворяют требованию конфайнмента кварков, поэтому рассматриваться не будут.

В пределе  $\alpha = 2$  фурье-образ потенциала сводится к лапласиану трёхмерной  $\delta$ -функции, так что, взяв интегралы по частям, все интегральные уравнения можно свести к существенно более простым дифференциальным уравнениям второго порядка, чем и обусловлен выбор осцилляторного потенциала в качестве удерживающего в ряде работ (см., например, [21–29]). Большие показатели степени ( $\alpha > 2$ ), приводящие к расходящимся интегралам, здесь не рассматриваются (см. подробное обсуждение данной проблемы в работах [21–23, 32]). Более реалистические количественные предсказания можно делать с использованием линейного конфайнмента [40–44].

Как утверждалось выше, для качественных результатов явный вид межкваркового потенциала не играет никакой роли, поэтому в большинстве случаев он не будет конкретизироваться. В случае более детального исследования свойств уравнений или необходимости проиллюстрировать какое-либо качественное утверждение будет выбираться наиболее подходящий для этого степенной потенциал вида (3).

Обобщённая модель НИЛ удовлетворяет достаточно широкому набору требований, а именно: а) может описывать релятивистские эффекты; б) явно содержит конфайнмент, поэтому возможно её использование для изучения связанных состояний кварков, в том числе высоковольтных; в) является кирально симметричной (при  $m = 0$ ); г) она способна описать спонтанное нарушение киральной симметрии в вакууме. Последний пункт заслуживает отдельного комментария. В частности, данная модель удовлетворяет всем низкоэнергетическим теоремам, таким как соотношения Гелл-Мана–Окса–Реннера [45] (см. работы [21–23]) и Голдбергера–Треймана [46] (см. [47]), условие Адлера [48] и теорема Вайнберга [49] (см. работу [50]). При этом одной из наиболее привлекательных черт обобщённой модели НИЛ является возможность микроскопического описания спонтанного нарушения киральной симметрии, а также её эффективного восстановления в спектре высоковольтных адронов. Данные вопросы подробно освещены в обзоре. Более того, поскольку вопросы нарушения и восстановления киральной симметрии тесно связаны с другой важной проблемой, возникающей в спектроскопии адронов, а именно с вопросом о лоренцевой природе удерживающего взаимодействия в кваркониях, то и последний вопрос также обсуждается в обзоре.

## 2. Приближение Бардина–Купера–Шриффера, щелевое уравнение и кирально нарушенный вакуум

Удобным методом исследования класса моделей, описываемых гамильтонианом (1), является преобразование Боголюбова, которое необходимо провести для перехода от "голых" кварков, представляющих собой затривочные степени свободы в кирально симметричном вакууме, к "одетым" кваркам, являющимся физическими степенями свободы в кирально нарушенном вакууме [25–29]. Кварковое поле  $\psi_\alpha(\mathbf{x}, t)$ , которое определено в терминах операторов рождения и аннигиляции  $\hat{b}, \hat{d}, \hat{b}^\dagger, \hat{d}^\dagger$ , выражается как

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}) \times [\hat{b}_{\alpha s}(\mathbf{p}, t) u_s(\mathbf{p}) + \hat{d}_{\alpha s}^\dagger(-\mathbf{p}, t) v_{-s}(-\mathbf{p})], \quad (5)$$

$$u_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \sin \varphi_p} + \sqrt{1 - \sin \varphi_p} \boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{p}} \right] u_s(0), \quad (6)$$

$$v_{-s}(-\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \sin \varphi_p} - \sqrt{1 - \sin \varphi_p} \boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{p}} \right] v_{-s}(0),$$

$$\hat{b}_s(\mathbf{p}, t) = \exp(iE_p t) \hat{b}_s(\mathbf{p}, 0), \quad (7)$$

$$\hat{d}_s(-\mathbf{p}, t) = \exp(iE_p t) \hat{d}_s(-\mathbf{p}, 0).$$

Здесь биспиноры, взятые в системе покоя фермиона, имеют вид

$$u_s(0) = \begin{pmatrix} w_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{-s}(0) = -i\gamma_2 u_s^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sigma_2 w_s^* \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $\gamma_2(\sigma_2)$  — вторая матрица Дирака (Паули), индекс  $s = \pm 1$  нумерует собственные спиновые состояния, так что  $(w_s)_i = \delta_{si}$ ,  $E_p$  — энергия одетого кварка. Величина  $\varphi_p$ , параметризующая преобразование Боголюбова, называется киральным углом, который определён с граничными условиями  $\varphi_p(p=0) = \pi/2$  и  $\varphi_p(p \rightarrow \infty) = 0$ .

Нормально упорядоченный<sup>1</sup> в терминах новых, "одетых", операторов рождения и аннигиляции кварков и антикварков гамильтониан модели (1) принимает вид

$$\hat{H} = E_{\text{vac}} + : \hat{H}_2 : + : \hat{H}_4 :, \quad (9)$$

$$E_{\text{vac}}[\varphi_p] = -\frac{1}{2} g V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \times (A_p \sin \varphi_p + B_p \cos \varphi_p), \quad (10)$$

где  $V$  — трёхмерный нормировочный объём, фактор  $g$  учитывает полное число степеней свободы кварка:  $g = (2S+1)N_c$ , где  $2S+1$  с  $S=1/2$  — число проекций спина кварка (при наличии нескольких кварковых ароматов  $g$  следует также домножить на их число  $N_f$ ). Функции

импульса  $A_p$  и  $B_p$  даются формулами

$$A_p = m + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \sin \varphi_k, \\ B_p = p + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{k}} V(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \cos \varphi_k, \quad (11)$$

где  $\hat{\mathbf{p}}$  и  $\hat{\mathbf{k}}$  — единичные векторы в направлении соответствующих импульсов (надстрочные символы  $\hat{\phantom{x}}$  над скалярными величинами обозначают, что последние являются операторами (см., например, (5))),  $V = C_F V_0$ , а  $C_F = (N_c^2 - 1)/(2N_c)$  — собственное значение оператора Казимира в фундаментальном представлении. Для того чтобы в пределе  $N_c \rightarrow \infty$  потенциал принимал конечные значения, предполагается соответствующее перемасштабирование его силы:  $K_0^{z+1} N_c \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} \text{const}$ .

Явный вид кирального угла  $\varphi_p$  определяется из условия минимальности энергии вакуума. Для качественного исследования свойств соответствующего функционала (10) удобно воспользоваться следующим приёмом [30]. Предположим, что данный функционал достигает минимума на некоторой функции  $\varphi_0(p)$ . Тогда, вычисленный на перемасштабированной функции  $\varphi_0(p/\xi)$  с  $0 \leq \xi < \infty$ , он должен принимать большее значение при всех  $\xi \neq 1$ , а при  $\xi = 1$  должен воспроизвести найденный выше минимум. Наконец, предел  $\xi \rightarrow 0$  эквивалентен переходу к бесконечно большому аргументу кирального угла, в котором  $\varphi_p(p \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , т.е. такой предел эквивалентен подстановке в функционал энергии вакуума тривиального кирально-симметричного решения. Таким образом, полезно изучить поведение функции  $E_{\text{vac}}(\xi)$ , которая должна иметь минимум при  $\xi = 1$ . Для простоты перейдём к киральному пределу, положив  $m = 0$ . Тогда единственным размерным параметром теории остаётся параметр потенциала  $K_0$ . Переопределяя в величинах  $A_p$  и  $B_p$  переменную интегрирования  $p \rightarrow p/\xi$ , из размерных соображений можно найти, что

$$E_{\text{vac}}(\xi) = C_1 \xi^{d+1} + C_2 K_0^{z+1} \xi^{d-\alpha}, \quad (12)$$

где  $d = D - 1$ ,  $D$  — размерность пространства-времени, а  $C_1$  и  $C_2$  — константы, не зависящие от  $\xi$ . Будем отсчитывать энергию от тривиального кирально-симметричного решения  $\varphi_p \equiv 0$ , отвечающего  $\xi = 0$ , т.е. положим  $E_{\text{vac}}(0) = 0$ . Наличие или отсутствие минимума с отрицательной энергией при  $\xi = 1$  зависит от соотношения между коэффициентами и степенями в двух членах в правой части выражения (12). Любопытным частным случаем является предел  $\alpha = d$ . Примером такой теории служит модель 'т Хофта для двумерной КХД, в которой как раз имеет место равенство  $\alpha = d = 1$ . На первый взгляд можно было бы предположить, что второй член в правой части (12) при этом обращается в константу, так что никакого нетривиального минимума быть не может. Однако это впечатление обманчиво. Следует заметить, что при  $\alpha = d$  интегралы по импульсам логарифмически расходятся в инфракрасной области, что требует введения регулятора  $\lambda$ . Таким образом, в этом пределе второй член в правой части (12) содержит логарифмическую зависимость от  $\xi$ :

$$E_{\text{vac}}^{(\alpha=d)}(\xi) = C_1 \xi^{d+1} + C_2 K_0^{d+1} \ln \left( \xi \frac{K_0}{\lambda} \right), \quad (13)$$

<sup>1</sup> В настоящем обзоре нормальное упорядочение операторов обозначается двоеточиями, например :  $\hat{H}_2$  :.

что немедленно приводит к двум следствиям: 1) нетривиальный минимум всё же может существовать, если коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  имеют разные знаки; 2) энергия вакуума возрастает при приближении к тривиальному решению, отвечающему  $\xi = 0$ . Иными словами, в теории отсутствует кирально ненарушенная фаза [30]. Аналогичный вывод для модели 'т Хофта сделан в работе [51].

Для обобщённой модели НИЛ  $d = 3$ , поэтому в силу ограничения на показатель степени  $\alpha$  (см. формулу (3)) всегда справедливо соотношение  $\alpha < d$ , при котором наличие нетривиального решения, энергетически более выгодного, чем тривиальное, вполне возможно в зависимости от соотношения знаков коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  в выражении (12). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что необходимое соотношение знаков действительно имеет место.

Заметим также, что условие минимальности энергии вакуума является одновременно и условием диагонализации квадратичного члена  $\hat{H}_2$ : (т.е. условием отсутствия аномальных членов вида  $\hat{b}^\dagger \hat{d}^\dagger - \hat{d}\hat{b}$ ), причём соответствующее уравнение, которое называется щелевым, имеет вид [21–29]

$$A_p \cos \varphi_p = B_p \sin \varphi_p. \quad (14)$$

При этом закон дисперсии кварка выражается как

$$E_p = A_p \sin \varphi_p + B_p \cos \varphi_p. \quad (15)$$

Как нетрудно убедиться, в случае свободной частицы решение щелевого уравнения принимает вид  $\varphi_p = \arctan(m/p)$ , что естественным образом воспроизводит свободный закон дисперсии  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ . Заметим, что этот же угол определяет и преобразование Фолди–Ваутхайзена, приводящее свободный гамильтониан Дирака  $H = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m$  к диагональному виду  $H' = \beta E_p$ . Данная глубокая связь между киральным углом и преобразованием Фолди–Ваутхайзена сохраняется и для кирального угла — решения щелевого уравнения с нетривиальным взаимодействием (см., например, [20, 33]).

Для произвольного степенного потенциала (3) щелевое уравнение принимает вид (в киральном пределе  $m = 0$ )

$$p^3 \sin \varphi_p = \frac{1}{2} K_0^3 (p^2 \varphi_p'' + 2p \varphi_p' + \sin 2\varphi_p) \quad (16)$$

при  $\alpha = 2$  [21–29] и

$$p^3 \sin \varphi_p = K_0^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \times \left[ \frac{pk \sin(\varphi_k - \varphi_p)}{|p-k|^{\alpha+1}} + \frac{\cos \varphi_k \sin \varphi_p}{(\alpha-1)|p-k|^{\alpha-1}} \right] \quad (17)$$

при  $0 \leq \alpha < 2$  [32], где  $\Gamma(\alpha+1)$  — гамма-функция Эйлера. Для удобства и компактности записи модуль импульса  $p$  продолжен в область  $p < 0$  в соответствии со следующим правилом для кирального угла:  $\cos \varphi_{-p} = -\cos \varphi_p$ ,  $\sin \varphi_{-p} = \sin \varphi_p$ . Как указывалось выше, щелевое уравнение для осцилляторного потенциала сводится к дифференциальному уравнению второго порядка.

На рисунке 1 приведена зависимость кирального угла от импульса — решение щелевого уравнения для линейного потенциала. Качественно вид этой кривой не за-

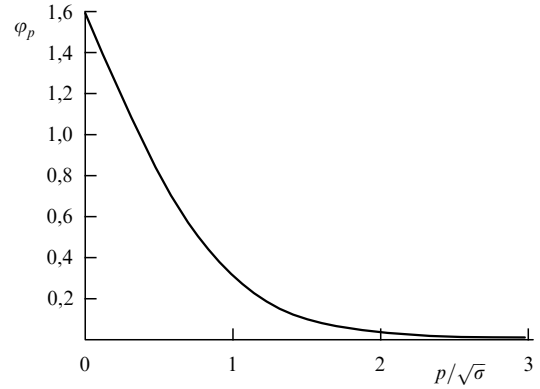


Рис. 1. Решение щелевого уравнения (14) для  $m = 0$  и линейного потенциала  $V(r) = \sigma r$ , где параметр потенциала  $\sigma$  имеет размерность квадрата массы.

висит от вида межкваркового потенциала. Подробности формализма кирального угла можно найти в работах [21–30, 33], а детальное исследование свойств щелевого уравнения — в работах [32] (для четырёхмерной теории) и [16, 52] (для двумерной). В ряде из процитированных выше работ указывается на существование "возбуждённых" решений щелевого уравнения, киральный угол для которых имеет узлы. В работах [30, 31, 35] были сделаны попытки придать таким решениям (репликам) физический смысл. Ниже данный вопрос не затрагивается, и под нетривиальным решением щелевого уравнения всегда понимается решение, изображённое на рис. 1.

Для кирального угла, удовлетворяющего уравнению (14), гамильтониан (9) принимает диагональный вид [25–29]:

$$\hat{H} = E_{\text{vac}} + \sum_{\alpha=1}^{N_c} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \times \left[ \hat{b}_{zs}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{b}_{zs}(\mathbf{p}) + \hat{d}_{zs}^\dagger(-\mathbf{p}) \hat{d}_{zs}(-\mathbf{p}) \right], \quad (18)$$

причём вклад отброшенного члена  $\hat{H}_4$ : подавлен в пределе большого числа цветов как  $1/\sqrt{N_c}$ . В литературе данное приближение часто называется приближением Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) по аналогии с подходом БКШ в теории сверхпроводимости. Новые, "одетые", операторы  $b$  и  $d$  аннигилируют вакуум  $|0\rangle$ , который связан с тривиальным вакуумом  $|0\rangle_0$ , аннигилируемым "голыми" операторами, следующим соотношением [25–29]:

$$|0\rangle = \exp(Q - Q^\dagger) |0\rangle_0, \quad Q^\dagger = \frac{1}{2} \sum_p \varphi_p C_p^\dagger, \quad (19)$$

$$C_p^\dagger = \sum_{\alpha=1}^{N_c} \sum_{s, s'=\uparrow, \downarrow} b_{zs}^\dagger(\mathbf{p}) [(\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}) i\sigma_2]_{ss'} d_{zs'}^\dagger(\mathbf{p}),$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — вектор стандартных матриц Паули,  $C_p^\dagger$  — оператор рождения кварк-антикварковой пары с квантовыми числами вакуума  $J^{PC} = 0^{++}$ , т.е.  ${}^3P_0$ -пары. Используя коммутационные (антикоммутационные) соотношения между кварковыми и антикварковыми операторами, можно найти следующее представление для кирально-нарушенного (БКШ) вакуума [25–29]:

$$|0\rangle = \prod_p \left( \sqrt{w_{0p}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{w_{1p}} C_p^\dagger + \frac{1}{2} \sqrt{w_{2p}} C_p^{\dagger 2} \right) |0\rangle_0, \quad (20)$$

где коэффициенты

$$w_{0p} = \cos^4 \frac{\varphi_p}{2}, \quad w_{1p} = 2 \sin^2 \frac{\varphi_p}{2} \cos^2 \frac{\varphi_p}{2}, \quad w_{2p} = \sin^4 \frac{\varphi_p}{2} \quad (21)$$

удовлетворяют, что очевидно, условию  $w_{0p} + w_{1p} + w_{2p} = 1$ . Заметим, что коэффициенты (21) допускают естественную физическую интерпретацию как вероятности обнаружить в новом вакууме одну ( $w_{1p}$ ) или две ( $w_{2p}$ ) кварк-антикварковые пары с относительным импульсом  $2p$  либо не обнаружить ни одной такой пары ( $w_{0p}$ ) [34]. Ввиду фермиевской статистики для кварков и антикварков создать большее число пар с одним и тем же относительным импульсом невозможно.

С помощью формул (20) и (21) нетрудно убедиться в нормированности волновой функции БКШ-вакуума (волновая функция тривиального вакуума предполагается нормированной),

$$\langle 0|0 \rangle = \prod_p (w_{0p} + w_{1p} + w_{2p}) = 1, \quad (22)$$

а также в ортогональности БКШ-вакуума и тривиального вакуума в пределе бесконечного нормировочного объёма  $V$ :

$$\begin{aligned} \langle 0|0 \rangle_0 &= \exp \left[ \sum_p \ln \left( \cos^2 \frac{\varphi_p}{2} \right) \right] = \\ &= \exp \left[ V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left( \cos^2 \frac{\varphi_p}{2} \right) \right] \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Как нетрудно увидеть, БКШ-вакуум в каждой точке конфигурационного пространства содержит облако сильно коррелированных кварк-антикварковых пар, создаваемое оператором  $\exp(Q - Q^\dagger)$ , т.е. в вакууме выпадает кварк-антикварковый конденсат

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \sin \varphi_p, \quad (24)$$

который обращается в нуль на тривиальном решении  $\varphi_p \equiv 0$ , но оказывается отличным от нуля на нетривиальном решении, изображённом на рис. 1. Таким образом, имеет место спонтанное нарушение киральной симметрии: гамильтониан теории кирально инвариантен, тогда как БКШ-вакуум — нет. Асимптотика решения на больших импульсах связана с величиной кирального конденсата как

$$\varphi_{p|m=0} \underset{p \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{\pi}{N_c} \Gamma(\alpha + 2) K_0^{\alpha+1} \sin \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{p^{\alpha+4}}. \quad (25)$$

Заметим, что, сделав в формуле (24) подстановку  $\varphi(p) \rightarrow \varphi(p/\xi)$  и далее заменив переменную интегрирования:  $p = \xi p'$ , нетрудно показать, что киральный конденсат ведёт себя как  $\xi^3$ . Разрешив полученное соотношение относительно  $\xi$ , можно представить формулу (12) в виде функции  $E_{\text{vac}}(\langle \bar{\psi}\psi \rangle)$ , которая может быть интерпретирована как некоторый эффективный потенциал, достигающий минимума при отличном от нуля значении кирального конденсата.

Альтернативный метод вывода щелевого уравнения состоит в использовании уравнения Дайсона для про-

Рис. 2. Графическое представление уравнения для пропагатора "одетого" кварка и для его массового оператора.

пагатора "одетого" кварка, показанного на рис. 2. Схематически это уравнение можно представить в виде суммы бесконечного ряда петель

$$S = S_0 + S_0 \Sigma S_0 + S_0 \Sigma S_0 \Sigma S_0 + \dots = S_0 + S_0 \Sigma S, \quad (26)$$

где массовый оператор сам представим в виде интеграла от одетого пропагатора:

$$\begin{aligned} i\Sigma(\mathbf{p}) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma_0 S(k_0, \mathbf{k}) \gamma_0, \\ V(\mathbf{p}) &= C_F V_0(\mathbf{p}), \quad C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}. \end{aligned} \quad (27)$$

Пропагатор  $S(p_0, \mathbf{p})$  можно выразить через проекторы на положительно- и отрицательно-частотные решения уравнения Дирака как

$$S(p_0, \mathbf{p}) = \frac{A^+(\mathbf{p}) \gamma_0}{p_0 - E_p + i0} + \frac{A^-(\mathbf{p}) \gamma_0}{p_0 + E_p - i0}, \quad (28)$$

где

$$A^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_0 \sin \varphi_p \pm \boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{p}} \cos \varphi_p). \quad (29)$$

Полнос "одетого" кварка даётся величиной  $E_p$  ( $-E_p$  для антикварка), которая в свою очередь включает в себя вклад массового оператора, так что в итоге приходим к замкнутой системе уравнений:

$$\begin{aligned} i\Sigma(\mathbf{p}) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma_0 \frac{1}{S_0^{-1}(k_0, \mathbf{k}) - \Sigma(\mathbf{k})} \gamma_0, \\ S_0(p_0, \mathbf{p}) &= \frac{1}{\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{p}} - m + i0}. \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку фурье-образ потенциала взаимодействия не зависит от энергии (следствие одновременного взаимодействия), интеграл по нулевой компоненте импульса в массовом операторе (27) затрагивает только пропагатор (28), и его можно вычислить явно, что позволяет параметризовать массовый оператор:

$$\Sigma(\mathbf{p}) = (A_p - m) + \boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{p}} (B_p - p), \quad E_p = A_p \sin \varphi_p + B_p \cos \varphi_p, \quad (31)$$

тогда для пропагатора получим выражение

$$S^{-1}(p_0, \mathbf{p}) = \gamma_0 p_0 - (\boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{p}}) B_p - A_p. \quad (32)$$

Условием самосогласованности такой параметризации является уже известное щелевое уравнение для кирального угла (14).

### 3. Выход за рамки приближения Бардина – Купера – Шриффера. Мезонные состояния

В разделе 2 обобщённая модель Намбу – Иона-Лазинио изучалась в приближении БКШ, физическими степенями свободы в котором являются "одетые" кварки. Такое приближение позволяет на микроскопическом уровне описать явление спонтанного нарушения киральной симметрии в вакууме. Однако, поскольку модель содержит конфайнмент и, следовательно, не допускает существования цветных объектов в свободном состоянии, естественным следующим шагом является выход за рамки приближения БКШ, включение взаимодействия между одетыми кварками и построение из них бесцветных объектов — адронов. В разделах 3.1–3.2 это делается двумя способами: в рамках матричного формализма (подробности можно найти в работах [21–29, 33]) и с помощью обобщённого преобразования Боголюбова (см. подробности в работе [33]).

#### 3.1. Уравнение Бете – Солпитера

В рамках матричного формализма выход за пределы приближения БКШ состоит в рассмотрении уравнения Бете – Солпитера для связанных состояний кварка и антикварка, которое записывается как уравнение для мезонной амплитуды  $\chi(\mathbf{p}; M)$  в системе покоя мезона (рис. 3) (здесь  $\mathbf{p}$  — импульс кварка,  $M$  — масса мезона):

$$\chi(\mathbf{p}; M) = -i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \gamma_0 S\left(\mathbf{q}, q_0 + \frac{M}{2}\right) \times \chi(\mathbf{q}; M) S\left(\mathbf{q}, q_0 - \frac{M}{2}\right) \gamma_0. \quad (33)$$

Одновременной характер взаимодействия позволяет существенно упростить уравнение (33). В частности, поскольку интеграл по нулевой компоненте импульса в уравнении (33) затрагивает только полюсы пропагаторов, нетрудно увидеть, что из четырёх членов, возникающих после подстановки вместо пропагаторов выражений типа (28), "выживают" лишь два члена, полюсы в которых расположены в комплексной плоскости  $q_0$  по разные стороны от вещественной оси. Соответствующие интегралы легко вычисляются в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{q_0 \pm M/2 - E_q + i0} \frac{1}{q_0 \mp M/2 + E_q - i0} = -\frac{1}{2E_q \mp M}, \quad (34)$$

так что уравнение (33) сводится к системе уравнений:

$$\begin{aligned} [2E_p - M] \chi^{[+]} &= - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \gamma_0 [(A^+ \gamma_0) \chi^{[+]} (A^- \gamma_0) + (A^- \gamma_0) \chi^{[-]} (A^+ \gamma_0)] \gamma_0, \\ [2E_p + M] \chi^{[-]} &= - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \gamma_0 [(A^+ \gamma_0) \chi^{[+]} (A^- \gamma_0) + (A^- \gamma_0) \chi^{[-]} (A^+ \gamma_0)] \gamma_0, \end{aligned} \quad (35)$$

где введены амплитуды

$$\chi^{[+]}(\mathbf{q}; M) = \frac{\chi(\mathbf{q}; M)}{2E_q - M}, \quad \chi^{[-]}(\mathbf{q}; M) = \frac{\chi(\mathbf{q}; M)}{2E_q + M}.$$

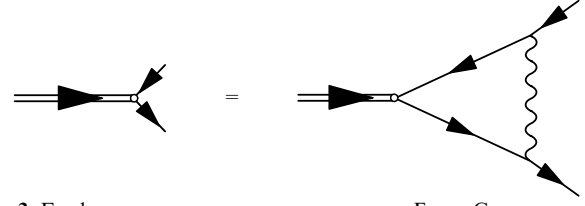


Рис. 3. Графическое представление уравнения Бете – Солпитера для амплитуды  $\chi(\mathbf{p}; M)$ .

Дальнейшие преобразования сводятся к следующим операциям:

- домножению первого уравнения системы (35) на  $\bar{u}_{s_1}$  слева и на  $v_{s_2}$  справа, а второго уравнения — соответственно на  $\bar{v}_{s_3}$  и  $u_{s_4}$ ;

- представлению проекторов  $A^\pm$  через биспиноры:

$$\begin{aligned} A^+(\mathbf{p}) &= \sum_s u_s(\mathbf{p}) \otimes u_s^\dagger(\mathbf{p}), \\ A^-(\mathbf{p}) &= \sum_s v_{-s}(-\mathbf{p}) \otimes v_{-s}^\dagger(-\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (36)$$

- определению матричных амплитуд  $\phi_{s_1 s_2}^+ = [\bar{u}_{s_1} \chi^{[+]} v_{-s_2}]$  и  $\phi_{s_1 s_2}^- = [\bar{v}_{-s_1} \chi^{[-]} u_{s_2}]$ .

В результате уравнение Бете – Солпитера примет вид

$$\begin{cases} [2E_p - M] \phi_{s_1 s_2}^+ = - \sum_{s_3 s_4} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \\ \quad \times \{ [v^{++}]_{s_1 s_2 s_3 s_4} \phi_{s_3 s_4}^+ + [v^{+-}]_{s_1 s_2 s_3 s_4} \phi_{s_3 s_4}^- \}, \\ [2E_p + M] \phi_{s_1 s_2}^- = - \sum_{s_3 s_4} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \\ \quad \times \{ [v^{-+}]_{s_1 s_2 s_3 s_4} \phi_{s_3 s_4}^+ + [v^{--}]_{s_1 s_2 s_3 s_4} \phi_{s_3 s_4}^- \}, \end{cases} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} [v^{++}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} &= [\bar{u}_{s_1}(\mathbf{p}) \gamma_0 u_{s_3}(\mathbf{q})] [\bar{v}_{-s_4}(-\mathbf{q}) \gamma_0 v_{-s_2}(-\mathbf{p})], \\ [v^{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} &= [\bar{u}_{s_1}(\mathbf{p}) \gamma_0 v_{-s_3}(-\mathbf{q})] [\bar{u}_{s_4}(\mathbf{q}) \gamma_0 v_{-s_2}(-\mathbf{p})], \\ [v^{-+}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} &= [\bar{v}_{-s_1}(-\mathbf{p}) \gamma_0 u_{s_3}(\mathbf{q})] [\bar{v}_{-s_4}(-\mathbf{q}) \gamma_0 u_{s_2}(\mathbf{p})], \\ [v^{--}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} &= [\bar{v}_{-s_1}(-\mathbf{p}) \gamma_0 v_{-s_3}(-\mathbf{q})] [\bar{u}_{s_4}(\mathbf{q}) \gamma_0 u_{s_2}(\mathbf{p})], \end{aligned} \quad (38)$$

причём

$$\begin{aligned} [\bar{u}_s(\mathbf{k}_1) \gamma_0 u_{s'}(\mathbf{k}_2)] &= [C_{k_1} C_{k_2} + S_{k_1} S_{k_2} (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}_1) (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}_2)]_{s, s'}, \\ [\bar{v}_{-s}(-\mathbf{k}_1) \gamma_0 v_{-s'}(-\mathbf{k}_2)] &= [(-i\sigma_2) (C_{k_1} C_{k_2} + S_{k_1} S_{k_2} (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}_1) (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}_2)) (i\sigma_2)]_{s, s'}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$[\bar{v}_{-s}(-\mathbf{k}_1) \gamma_0 u_{s'}(\mathbf{k}_2)] = [(S_{k_1} C_{k_2} (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}_1) - S_{k_2} C_{k_1} (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}_2)) (i\sigma_2)]_{s, s'},$$

$$[\bar{u}_s(\mathbf{k}_1) \gamma_0 v_{-s'}(-\mathbf{k}_2)] = -[(i\sigma_2) (S_{k_1} C_{k_2} (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}_1) - S_{k_2} C_{k_1} (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}_2))]_{s, s'},$$

кроме того, использованы обозначения

$$\begin{aligned} C_p &= \cos \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_p \right) \right] = \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi_p}{2}}, \\ S_p &= \sin \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_p \right) \right] = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_p}{2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Удобно внести потенциал в определение амплитуд следующим образом:

$$\begin{aligned}
[T^{++}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} &= [\bar{u}_{s_1}(\mathbf{p}) \gamma_0 u_{s_3}(\mathbf{q})] [-V(\mathbf{p} - \mathbf{q})] \times \\
&\quad \times [\bar{v}_{-s_4}(-\mathbf{q}) \gamma_0 v_{-s_2}(-\mathbf{p})], \\
[T^{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} &= [\bar{u}_{s_1}(\mathbf{p}) \gamma_0 v_{-s_3}(-\mathbf{q})] [-V(\mathbf{p} - \mathbf{q})] \times \\
&\quad \times [\bar{u}_{s_4}(\mathbf{q}) \gamma_0 v_{-s_2}(-\mathbf{p})], \\
[T^{-+}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} &= [\bar{v}_{-s_1}(-\mathbf{p}) \gamma_0 u_{s_3}(\mathbf{q})] [-V(\mathbf{p} - \mathbf{q})] \times \\
&\quad \times [\bar{v}_{-s_4}(-\mathbf{q}) \gamma_0 v_{-s_2}(\mathbf{p})], \\
[T^{--}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} &= [\bar{v}_{-s_1}(-\mathbf{p}) \gamma_0 v_{-s_3}(-\mathbf{q})] \times \\
&\quad \times [-V(\mathbf{p} - \mathbf{q})] [\bar{u}_{s_4}(\mathbf{q}) \gamma_0 u_{s_2}(\mathbf{p})],
\end{aligned} \tag{41}$$

или символически,

$$\begin{aligned}
T^{++} &= [\bar{u} \gamma_0 u] [-V] [\bar{v} \gamma_0 v], & T^{+-} &= [\bar{u} \gamma_0 v] [-V] [\bar{u} \gamma_0 v], \\
T^{-+} &= [\bar{v} \gamma_0 u] [-V] [\bar{v} \gamma_0 u], & T^{--} &= [\bar{v} \gamma_0 v] [-V] [\bar{u} \gamma_0 u].
\end{aligned} \tag{42}$$

Уравнения (37) совпадают с уравнениями Бете–Солпитера, полученными в рамках так называемого формализма энергетического спина в работах [25–29].

В работе [16] для двумерной модели КХД предложен подход матричных волновых функций, который оказывается удобным для ряда приложений. Ниже данный подход обобщается для четырёхмерной обобщённой модели НИЛ [33].

Прежде всего заметим, что удобно определить оператор Фолди  $T_p$  и представить через него дираковские проекторы  $A^\pm$  (29):

$$\begin{aligned}
A^\pm(\mathbf{p}) &= T_p P_\pm T_p^\dagger, & P_\pm &= \frac{1 \pm \gamma_0}{2}, \\
T_p &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma \hat{\mathbf{p}} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_p \right) \right].
\end{aligned} \tag{43}$$

Далее уравнение (33) для мезонной амплитуды удобно переписать, вводя матричную волновую функцию

$$\tilde{\phi}(\mathbf{p}; M_\pi) = \int \frac{d^3 p_0}{2\pi} S \left( \mathbf{p}, p_0 + \frac{M_\pi}{2} \right) \chi(\mathbf{p}; M_\pi) S \left( \mathbf{p}, p_0 - \frac{M_\pi}{2} \right), \tag{44}$$

которую затем можно подвергнуть вращению оператором Фолди  $T_p$  слева и справа, определив  $\phi(\mathbf{p}; M_\pi) = T_p^\dagger \tilde{\phi}(\mathbf{p}; M_\pi) T_p$ . Для определённой таким образом матричной волновой функции уравнение Бете–Солпитера (33) принимает вид

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{p}; M_\pi) &= - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left( P_+ \frac{T_p^\dagger T_q \phi(\mathbf{q}; M_\pi) T_q T_p^\dagger}{2E_p - M_\pi} P_- + \right. \\
&\quad \left. + P_- \frac{T_p^\dagger T_q \phi(\mathbf{q}; M_\pi) T_q T_p^\dagger}{2E_p + M_\pi} P_+ \right).
\end{aligned} \tag{45}$$

Нетрудно увидеть, что решение уравнения (45) имеет вид

$$\phi(\mathbf{p}; M_\pi) = P_+ A P_- + P_- B P_+, \tag{46}$$

где  $A$  и  $B$  — неизвестные матричные функции импульса, которые могут быть разложены по полному набору

матриц  $4 \times 4$   $\{1, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}\}$ . Заметим, однако, что в силу свойств ортогональности проекторов  $P_+ P_- = P_- P_+ = 0$ , а также в силу того, что матрицу  $\gamma_0$  можно включить в их определение, набор доступных матриц сводится всего к двум:  $\{\gamma_5, \gamma\}$ , поэтому волновую функцию (46) можно представить в виде

$$\phi(\mathbf{p}; M) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi^+(\mathbf{p}) \\ \varphi^-(\mathbf{p}) & 0 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

где  $\varphi^\pm(\mathbf{p})$  — матрицы  $2 \times 2$ . Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что задача о собственных значениях и собственных функциях, сформулированная в уравнении (37), эквивалентна такой задаче для уравнения (45), где

$$\phi_{s_1 s_2}^+ = i(\varphi^+ \sigma_2)_{s_1 s_2}, \quad \phi_{s_1 s_2}^- = i(\sigma_2 \varphi^-)_{s_1 s_2}. \tag{48}$$

Дальнейшие преобразования сводятся к проектированию матричных амплитуд на состояния с заданными полным импульсом, пространственной и зарядовой чётностями.

### 3.2. Киральный пион

Рассмотрим отдельно случай кирального пиона. Для соответствующей матричной амплитуды имеем

$$\phi_{s_1 s_2}^\pm(\mathbf{p}) = \left[ \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 \right]_{s_1 s_2} Y_{00}(\hat{\mathbf{p}}) \varphi_\pi^\pm(p), \tag{49}$$

где  $Y_{00}(\hat{\mathbf{p}}) = 1/\sqrt{4\pi}$  — нормированная на единицу низшая сферическая гармоника. Тогда после введения амплитуд  $T_\pi^\pm(p, q)$  по формулам (41) и вычисления в них следов по спиновым матрицам приходим к следующей системе уравнений для скалярных волновых функций  $\varphi_\pi^\pm$ :

$$\begin{aligned}
[2E_p - M_\pi] \varphi_\pi^+(p) &= \\
&= \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} [T_\pi^{++}(p, q) \varphi_\pi^+(q) + T_\pi^{+-}(p, q) \varphi_\pi^-(q)], \\
[2E_p + M_\pi] \varphi_\pi^-(p) &= \\
&= \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} [T_\pi^{-+}(p, q) \varphi_\pi^+(q) + T_\pi^{--}(p, q) \varphi_\pi^-(q)],
\end{aligned} \tag{50}$$

где

$$\begin{aligned}
T_\pi^{++}(p, q) &= T_\pi^{--}(p, q) = - \int d\Omega_q V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \\
&\quad \times \left( \cos^2 \frac{\varphi_p - \varphi_q}{2} - \frac{1 - \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{q}}}{2} \cos \varphi_p \cos \varphi_q \right), \\
T_\pi^{-+}(p, q) &= T_\pi^{+-}(p, q) = - \int d\Omega_q V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \\
&\quad \times \left( \sin^2 \frac{\varphi_p - \varphi_q}{2} + \frac{1 - \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{q}}}{2} \cos \varphi_p \cos \varphi_q \right).
\end{aligned} \tag{51}$$

Систему уравнений (50) можно интерпретировать как уравнение для связанного состояния кварка с антикварком в канале с квантовыми числами пиона. Физический смысл появления двух амплитуд для описания одного мезона состоит в том, что кварк-антикварковая пара в нём может двигаться как вперёд, так и назад по времени, причём каждое из этих движений описывается независи-



мой амплитудой [16, 21–29]. Таким образом, гамильтониан становится матрицей в так называемом пространстве энергетического спина, а уравнение для связанных состояний — системой двух уравнений.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что в киральном пределе  $m = 0$  функции

$$\varphi_\pi^+(p) = \varphi_\pi^-(p) = \sin \varphi_p \quad (52)$$

удовлетворяют системе уравнений (50) с собственным значением  $M_\pi = 0$ . Действительно, подставив функции (52) и  $M_\pi = 0$  в систему (50), можно прийти к уравнению

$$\begin{aligned} 2E_p \varphi_\pi(p) &= \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} (T_\pi^{++}(p, q) + T_\pi^{+-}(p, q)) \varphi_\pi(q) = \\ &= - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \varphi_\pi(q), \end{aligned} \quad (53)$$

справедливость которого гарантируется щелевым уравнением (14), а также законом дисперсии (15). Полученное уравнение проще всего выглядит в координатном пространстве:

$$(2E_p + V(r)) \varphi_\pi = 0, \quad (54)$$

т.е. формально оно принимает вид простого уравнения Солпитера с равными массами и нулевым собственным значением  $M = 0$ , однако величина  $E_p$  сильно отличается по виду от простой кинетической энергии  $(p^2 + m^2)^{1/2}$  свободного кварка, что и гарантирует существование нулевого собственного значения.

Таким образом, мы показали, что в киральном пределе уравнение Бете–Солпитера для пиона эквивалентно щелевому уравнению для кирального угла, что демонстрирует хорошо известный дуализм пиона: как псевдоголдстоуновский бозон пион появляется уже в приближении БКШ, тогда как тот же самый пион возникает из решения уравнения Бете–Солпитера в качестве низшего состояния в спектре связанных кварк-антикварковых состояний, т.е. при выходе за рамки приближения БКШ.

Система уравнений (50) позволяет изучить поведение пионного решения вблизи кирального предела. В частности, можно показать, что при  $M_\pi \rightarrow 0$  решение системы (50) имеет вид (члены более высокого порядка в разложении по массе пиона отброшены)

$$\begin{aligned} \varphi_\pi^\pm(p) &= \frac{\sqrt{2\pi N_c}}{f_\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{M_\pi}} \sin \varphi_p \pm \sqrt{M_\pi} \Delta_p \right], \\ f_\pi^2 &= \frac{N_c}{\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp \Delta_p \sin \varphi_p, \end{aligned} \quad (55)$$

где функция  $\Delta_p$  удовлетворяет уравнению, которое уже не содержит  $M_\pi$  (см. также работы [25–29]):

$$\begin{aligned} 2E_p \Delta_p &= \sin \varphi_p + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \times \\ &\times (\sin \varphi_p \sin \varphi_k + \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{k}} \cos \varphi_p \cos \varphi_k) \Delta_k. \end{aligned} \quad (56)$$

При этом нетрудно явно убедиться в том, что нормировка волновых функций  $\varphi_\pi^\pm$  имеет вид

$$\int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} [\varphi_\pi^{+2}(p) - \varphi_\pi^{-2}(p)] = 1. \quad (57)$$

Физический смысл такой нормировки станет ясен позднее, при рассмотрении обобщённого преобразования Боголюбова для мезонных операторов.

Изучим теперь матричную структуру пионной волновой функции. Очевидно, что в случае пиона вклад даёт только матрица  $\gamma_5$ , так что можно явно выделить матричную структуру величин  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , вводя скалярные волновые функции  $\varphi_\pi^\pm$  в виде

$$\mathcal{A}_\pi = \gamma_5 \varphi_\pi^+(p), \quad \mathcal{B}_\pi = \gamma_5 \varphi_\pi^-(p), \quad (58)$$

где знаки и коэффициенты выбраны так, чтобы определения волновых функций  $\varphi_\pi^\pm$  совпадали с определением (49). Таким образом, с помощью уравнений (46) и (58) легко увидеть, что матричная волновая функция пиона принимает вид

$$\tilde{\phi}(\mathbf{p}; M_\pi) = T_p [P_+ \gamma_5 \varphi_\pi^+ + P_- \gamma_5 \varphi_\pi^-] T_p = \gamma_5 G_\pi + \gamma_0 \gamma_5 T_p^2 F_\pi, \quad (59)$$

где  $G_\pi = (1/2)(\varphi_\pi^+ + \varphi_\pi^-)$  и  $F_\pi = (1/2)(\varphi_\pi^+ - \varphi_\pi^-)$ , а уравнение Бете–Солпитера (45) может быть представлено как

$$\begin{aligned} M_\pi \tilde{\phi}(\mathbf{p}; M_\pi) &= (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \gamma_0 m) \tilde{\phi}(\mathbf{p}; M_\pi) + \\ &+ \tilde{\phi}(\mathbf{p}; M_\pi) (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - \gamma_0 m) + \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \\ &\times (A^+(\mathbf{q}) \tilde{\phi}(\mathbf{p}; M_\pi) A^-(-\mathbf{q}) - A^+(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(\mathbf{q}; M_\pi) A^-(-\mathbf{p}) - \\ &- A^-(\mathbf{q}) \tilde{\phi}(\mathbf{p}; M_\pi) A^+(-\mathbf{q}) + A^-(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(\mathbf{q}; M_\pi) A^+(-\mathbf{p})). \end{aligned} \quad (60)$$

Если последнее уравнение домножить на  $\gamma_0 \gamma_5$  и почленно проинтегрировать его по импульсу  $\mathbf{p}$ , а затем вычислить след по спиновым переменным, то в результате получим соотношение

$$M_\pi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_\pi \sin \varphi_p = 2m \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} G_\pi, \quad (61)$$

в котором нетрудно узнать соотношение Гелл-Мана–Окса–Реннера, если использовать явный вид пионной волновой функции (55) и определить  $G_\pi$  и  $F_\pi$  следующим образом:

$$G_\pi = \frac{\sqrt{2\pi N_c}}{f_\pi \sqrt{M_\pi}} \sin \varphi_p, \quad F_\pi = \frac{\sqrt{2\pi M_\pi N_c}}{f_\pi} \Delta_p, \quad (62)$$

где константа распада пиона  $f_\pi$  и функция  $\Delta_p$  определены в (55). После подстановки полученных выражений в (61) и использования формулы для кирального конденсата (24) нетрудно прийти к соотношению Гелл-Мана–Окса–Реннера в его классическом виде [45]:

$$f_\pi^2 M_\pi^2 = -2m \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \quad (63)$$

### 3.3. Преобразование Боголюбова для мезонных операторов

В работе [53] предложен альтернативный метод изучения мезонных состояний в двумерной модели КХД, состоящий в диагонализации гамильтониана теории в мезонном секторе посредством обобщённого преобразования

Боголюбова. Данный метод естественным образом может быть распространён на четырёхмерную обобщённую модель НИЛ. Ниже детально обсуждается такое обобщение этого метода, предложенное в работе [33].

Введём четыре оператора, квадратичных по кварковым операторам, из которых два первых,

$$\begin{aligned}\hat{B}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{\alpha} \hat{b}_{\alpha s}^{\dagger}(\mathbf{p}) \hat{b}_{\alpha s'}(\mathbf{p}'), \\ \hat{D}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{\alpha} \hat{d}_{\alpha s}^{\dagger}(-\mathbf{p}) \hat{d}_{\alpha s'}(-\mathbf{p}'),\end{aligned}\quad (64)$$

"подсчитывают" число кварков и антикварков, а два вторых,

$$\begin{aligned}\hat{M}_{ss'}^{\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{\alpha} \hat{b}_{\alpha s'}^{\dagger}(\mathbf{p}') \hat{d}_{\alpha s}^{\dagger}(-\mathbf{p}), \\ \hat{M}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{\alpha} \hat{d}_{\alpha s}(-\mathbf{p}) \hat{b}_{\alpha s'}(\mathbf{p}'),\end{aligned}\quad (65)$$

создают и аннигилируют кварк-антикварковые пары. В пределе  $N_c \rightarrow \infty$  введённые операторы обладают стандартными бозонными коммутационными соотношениями, в частности, единственным ненулевым коммутатором является

$$\begin{aligned}[\hat{M}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \hat{M}_{\sigma\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')] &= \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \delta_{s\sigma} \delta_{s'\sigma'}.\end{aligned}\quad (66)$$

Нетрудно увидеть, что в приближении БКШ гамильтониан (18) выражается через первую пару операторов:

$$\hat{H} = E_{\text{vac}} + \sqrt{N_c} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p (\hat{B}_{ss}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \hat{D}_{ss}(\mathbf{p}, \mathbf{p})),\quad (67)$$

тогда как отброшенная (в пределе БКШ подавленная по  $N_c$ ) часть гамильтониана  $\hat{H}_4$  выражается через все четыре оператора. Ключевым моментом рассматриваемого подхода является утверждение, что ввиду наличия конфайнмента кварки и антикварки могут рождаться и аннигилировать лишь парами, а не по одному. Следовательно, за рамками приближения БКШ операторы (64) не могут быть независимыми, а должны выражаться через операторы (65). В пределе большого числа цветов достаточно ограничиться минимальным числом пар, т.е. оставить лишь по одному сопутствующему антикварку для каждого кварка и по одному сопутствующему кварку на каждый антикварк, отбросив облако, содержащее большее число таких пар. Тогда искомая связь операторов примет вид

$$\begin{aligned}\hat{B}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{s''} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \hat{M}_{s''s}^{\dagger}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}) \hat{M}_{s''s'}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}'), \\ \hat{D}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{s''} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \hat{M}_{ss''}^{\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') \hat{M}_{s''s'}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'').\end{aligned}\quad (68)$$

Нетрудно проверить, что в пределе  $N_c \rightarrow \infty$  подстановка (68) воспроизводит коммутационные соотношения между операторами (64), так что она может рассматри-

ваться в качестве независимого решения уравнений, задаваемых этими коммутационными соотношениями.

После подстановки соотношений (68) в гамильтониан (9) члены  $\hat{H}_2$  и  $\hat{H}_4$  оказываются уже одного порядка, а остальные, подавленные в пределе  $N_c \rightarrow \infty$ , могут быть отброшены. Полученный таким образом гамильтониан в системе центра масс кварк-антикваркового облака приобретает вид

$$\hat{H} = E'_{\text{vac}} + \int \frac{d^3 P}{(2\pi)^3} \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{P}),\quad (69)$$

где (для простоты рассматриваем плотность гамильтониана  $\mathcal{H}$  в системе покоя ( $\mathbf{P} = 0$ ))

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} \equiv \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{P} = 0) &= \sum_{s_1 s_2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2E_p \hat{M}_{s_1 s_2}^{\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \hat{M}_{s_2 s_1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \\ &\times \left\{ [v^{++}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} \hat{M}_{s_2 s_1}^{\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \hat{M}_{s_4 s_3}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \right. \\ &+ [v^{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} \hat{M}_{s_2 s_1}^{\dagger}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \hat{M}_{s_3 s_4}^{\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \\ &+ [v^{-+}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} \hat{M}_{s_1 s_2}^{\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \hat{M}_{s_4 s_3}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \\ &\left. + [v^{--}(\mathbf{p}, \mathbf{q})]_{s_1 s_3 s_4 s_2} \hat{M}_{s_3 s_4}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \hat{M}_{s_1 s_2}^{\dagger}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \right\},\end{aligned}\quad (70)$$

при этом амплитуды  $v$  даются выражениями (38).

Строго говоря, лишь две из четырёх амплитуд (38), например  $v^{++}$  и  $v^{+-}$ , являются независимыми, а две другие,  $v^{--}$  и  $v^{-+}$ , связаны с ними эрмитовым сопряжением. Тем не менее для придания выражениям более симметричного вида удобнее сохранить все четыре амплитуды в явном виде.

**3.3.1. Случай кирального пиона.** Прежде чем перейти к диагонализации гамильтониана (70), как и ранее, рассмотрим отдельно случай пиона, для которого  $J = L = S = 0$ , так что оператор  $\hat{M}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p})$  может быть представлен в виде

$$\hat{M}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \left[ \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 Y_{00}(\hat{\mathbf{p}}) \right]_{ss'} \hat{M}(p),\quad (71)$$

где спин-угловая структура полностью эквивалентна такой структуре матричной волновой функции пиона (49).

После подстановки выражения (71) в гамильтониан (70) находим

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{\pi} &= \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} 2E_p \hat{M}^{\dagger}(p) \hat{M}(p) - \frac{1}{2} \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} \times \\ &\times (T_{\pi}^{++}(p, q) \hat{M}^{\dagger}(p) \hat{M}(q) + T_{\pi}^{+-}(p, q) \hat{M}^{\dagger}(q) \hat{M}^{\dagger}(p) + \\ &+ T_{\pi}^{-+}(p, q) \hat{M}(p) \hat{M}(q) + T_{\pi}^{--}(p, q) \hat{M}^{\dagger}(q) \hat{M}(p)),\end{aligned}\quad (72)$$

где амплитуды  $T_{\pi}^{\pm\pm}(p, q)$  представляют собой уже встречавшиеся раньше проинтегрированные по углам комбинации амплитуд  $v^{\pm\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  и потенциала  $V(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  (см. формулу (51)).

Выражение (72) является типичным гамильтонианом, для диагонализации которого необходимо применить

бозонное преобразование Боголюбова вида

$$\begin{aligned}\hat{M}(p) &= \hat{m}_\pi \varphi_\pi^+(p) + \hat{m}_\pi^\dagger \varphi_\pi^-(p), \\ \hat{M}^\dagger(p) &= \hat{m}_\pi^\dagger \varphi_\pi^+(p) + \hat{m}_\pi \varphi_\pi^-(p),\end{aligned}\quad (73)$$

что можно обратить как

$$\begin{aligned}\hat{m}_\pi &= \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} (\hat{M}(p) \varphi_\pi^+(p) - \hat{M}^\dagger(p) \varphi_\pi^-(p)), \\ \hat{m}_\pi^\dagger &= \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} (\hat{M}^\dagger(p) \varphi_\pi^+(p) - \hat{M}(p) \varphi_\pi^-(p)).\end{aligned}\quad (74)$$

Операторы  $\hat{m}_\pi^\dagger$  и  $\hat{m}_\pi$  имеют ясную физическую интерпретацию: они создают и аннигилируют пион в системе покоя. Используя коммутатор

$$[\hat{M}(p), \hat{M}^\dagger(q)] = \frac{(2\pi)^3}{p^2} \delta(p - q), \quad (75)$$

непосредственно следующий из формулы (66), нетрудно найти, что

$$[\hat{m}_\pi, \hat{m}_\pi^\dagger] = \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} (\varphi_\pi^{+2}(p) - \varphi_\pi^{-2}(p)). \quad (76)$$

Следовательно, требование канонического коммутационного соотношения между бозонными операторами рождения и аннигиляции пиона  $[\hat{m}_\pi, \hat{m}_\pi^\dagger] = 1$  приводит к требованию нормировки (амплитуды  $\varphi_\pi^\pm(p)$  выбраны вещественными) вида (57), которое является не чем иным, как стандартным условием нормировки бозонных боголюбовских амплитуд. При этом условие сокращения аномальных боголюбовских членов в гамильтониане (72), т.е. требование  $\langle \Omega | \hat{\mathcal{H}}_\pi | \pi \pi \rangle = 0$  и  $\langle \pi \pi | \hat{\mathcal{H}}_\pi | \Omega \rangle = 0$  (здесь  $|\Omega\rangle$  — вакуум, аннигилируемый мезонными операторами, например  $\hat{m}_\pi$ ) принимает вид уже известной нам системы уравнений для амплитуд  $\varphi_\pi^\pm(p)$  (см. (50)).

Следует отметить, что вакуум  $|\Omega\rangle$ , аннигилируемый оператором  $\hat{m}_\pi$ , отличается от БКШ-вакуума  $|0\rangle$  и является связанным с ним унитарным преобразованием:

$$\hat{m}_\pi |\Omega\rangle = \hat{m}_\pi U^\dagger |0\rangle = U^\dagger (U \hat{m}_\pi U^\dagger) |0\rangle \propto U^\dagger \hat{M}(p) |0\rangle = 0.$$

Поскольку рождение кварк-антикварковой пары подавлено в пределе большого числа цветов, отклонение оператора  $U^\dagger$  от единицы также мало. Аналогичным образом энергия вакуума  $E'_{\text{vac}}$  в формуле (69) отличается от энергии вакуума  $E_{\text{vac}}$  в БКШ-гамильтониане (18) и содержит (подавленные в пределе  $N_c \rightarrow \infty$ ) вклады от коммутаторов операторов  $\hat{M}$  и  $\hat{M}^\dagger$ . Наконец, киральный конденсат, вычисленный в приближении БКШ, даёт лидирующий член в разложении точного конденсата по обратным степеням  $N_c$ .

Диагонализированный в данном порядке по  $N_c$  гамильтониан (72) принимает вид

$$\hat{\mathcal{H}}_\pi = M_\pi \hat{m}_\pi^\dagger \hat{m}_\pi, \quad M_\pi = \langle \pi | \hat{\mathcal{H}}_\pi | \pi \rangle, \quad (77)$$

где  $M_\pi$  — масса пиона, а отброшенные в гамильтониане (подавленные по  $N_c$ ) члены отвечают за процессы пион-пионного рассеяния.

**3.3.2. Общий случай.** Перейдём к диагонализации гамильтониана (70) в терминах составных мезонных операторов.

С помощью очевидного обобщения уравнений (73) и (74) вида

$$\hat{M}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \sum_n (\hat{m}_n \phi_{n,ss'}^+(\mathbf{p}) + \hat{m}_n^\dagger \phi_{n,ss'}^-(\mathbf{p})), \quad (78)$$

$$\hat{M}_{ss'}^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \sum_n (\hat{m}_n^\dagger \phi_{n,ss'}^{+\dagger}(\mathbf{p}) + \hat{m}_n \phi_{n,ss'}^{-\dagger}(\mathbf{p})),$$

$$\begin{aligned}\hat{m}_n &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Sp}(\hat{M}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \phi_n^{+\dagger}(\mathbf{p}) - \hat{M}^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \phi_n^-(\mathbf{p})), \\ \hat{m}_n^\dagger &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Sp}(\hat{M}^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \phi_n^+(\mathbf{p}) - \hat{M}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \phi_n^{-\dagger}(\mathbf{p}))\end{aligned}\quad (79)$$

нетрудно найти следующие коммутационные соотношения для операторов  $\hat{m}_n$  и  $\hat{m}_m^\dagger$ :

$$[\hat{m}_n, \hat{m}_m^\dagger] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Sp}(\phi_n^{+\dagger}(\mathbf{p}) \phi_m^+(\mathbf{p}) - \phi_m^{-\dagger}(\mathbf{p}) \phi_n^-(\mathbf{p})), \quad (80)$$

$$[\hat{m}_n, \hat{m}_m] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Sp}(\phi_n^{+\dagger}(\mathbf{p}) \phi_m^-(\mathbf{p}) - \phi_m^{+\dagger}(\mathbf{p}) \phi_n^-(\mathbf{p})).$$

Здесь индексами  $n$  и  $m$  обозначены полные наборы квантовых чисел, описывающих мезонные состояния. Естественное требование, чтобы коммутационные соотношения между мезонными операторами имели вид  $[\hat{m}_n, \hat{m}_m^\dagger] = \delta_{nm}$  и  $[\hat{m}_n, \hat{m}_m] = 0$ , приводит к следующим условиям ортогональности волновых функций:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Sp}(\phi_n^{+\dagger}(\mathbf{p}) \phi_m^+(\mathbf{p}) - \phi_m^{-\dagger}(\mathbf{p}) \phi_n^-(\mathbf{p})) = \delta_{nm}, \quad (81)$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Sp}(\phi_n^{+\dagger}(\mathbf{p}) \phi_m^-(\mathbf{p}) - \phi_m^{+\dagger}(\mathbf{p}) \phi_n^-(\mathbf{p})) = 0.$$

Тогда нетрудно убедиться в том, что представление (78) вместе с условиями ортогональности и нормировки (81) гарантируют диагонализацию гамильтониана, т.е.

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_n M_n \hat{m}_n^\dagger \hat{m}_n + O\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right), \quad (82)$$

при условии, что мезонные волновые функции  $\phi_{n,s_1 s_2}^\pm$  удовлетворяют системе уравнений (37) с собственными значениями  $M = M_n$ .

В лидирующем порядке по  $N_c$  гамильтониан (82) описывает стабильные мезоны, тогда как отброшенные (подавленные по  $N_c$ ) члены включают в себя кварковые обмены и описывают процессы распадов и рассеяния мезонов (см. обзор [20], где такие подавленные члены восстановлены для двумерной КХД).

Чаще всего на практике диагонализация гамильтониана требуется в базисе  $J^{PC}$ . При этом следует иметь в виду, что, хотя гамильтониан коммутирует с полным моментом  $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$ , он не коммутирует ни с оператором полного спина кварков  $\mathbf{S}$ , ни с угловым моментом  $\mathbf{L}$  по отдельности.

Самым простым является случай спиновых синглетов с  $P = (-1)^{J+1}$  и  $C = (-1)^J$ , поскольку их волновые функции даются выражениями

$$\phi_{n,s_1 s_2}^\pm(\mathbf{p}) = \left[ \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 \right]_{s_1 s_2} Y_{Jm}(\hat{\mathbf{p}}) \varphi_n^\pm(p), \quad (83)$$

где  $Y_{Jm}(\hat{\mathbf{p}})$  — сферическая гармоника с полным моментом  $J$  и магнитным квантовым числом  $m$ . Триплетные по

спину состояния с  $J = L$ ,  $P = (-1)^{J+1}$ ,  $C = (-1)^{J+1}$  описываются волновыми функциями

$$\begin{aligned}\phi_{n, s_1 s_2}^+(\mathbf{p}) &= \left[ (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{Y}_{Jlm}(\hat{\mathbf{p}})) \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 \right]_{s_1 s_2} \phi_n^+(p), \\ \phi_{n, s_1 s_2}^-(\mathbf{p}) &= \left[ \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{Y}_{Jlm}(\hat{\mathbf{p}})) \right]_{s_1 s_2} \phi_n^-(p),\end{aligned}\quad (84)$$

где  $\mathbf{Y}_{Jlm}(\hat{\mathbf{p}})$  — сферический вектор,  $J$  — полный момент,  $l$  — угловой момент,  $m$  — магнитное квантовое число.

Более сложным является случай  $L = J \pm 1$ ,  $P = (-1)^J$ ,  $C = (-1)^J$ , поскольку для его описания требуются одновременно четыре амплитуды  $\phi_{J \pm 1, n}^\pm(p)$  (естественным исключением является скалярный мезон с квантовыми числами  $0^{++}$ , чему отвечают  $J = 0$  и  $l = 1$ ):

$$\begin{aligned}\phi_{n, s_1 s_2}^+(\mathbf{p}) &= \left[ (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{Y}_{Jl-1m}(\hat{\mathbf{p}})) \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 \right]_{s_1 s_2} \phi_{J-1, n}^+(p) + \\ &+ \left[ (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{Y}_{Jl+1m}(\hat{\mathbf{p}})) \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 \right]_{s_1 s_2} \phi_{J+1, n}^+(p), \\ \phi_{n, s_1 s_2}^-(\mathbf{p}) &= \left[ \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{Y}_{Jl-1m}(\hat{\mathbf{p}})) \right]_{s_1 s_2} \phi_{J-1, n}^-(p) + \\ &+ \left[ \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{Y}_{Jl+1m}(\hat{\mathbf{p}})) \right]_{s_1 s_2} \phi_{J+1, n}^-(p),\end{aligned}\quad (85)$$

причём взаимодействие в системе уравнений (37) смешивает все четыре амплитуды (85) и после проецирования на состояния с определёнными спином и угловым моментом приводит к системе четырёх уравнений для скалярных амплитуд  $\phi_{J \pm 1, n}^\pm(p)$ . Данный случай можно проиллюстрировать на примере  $\rho$ -мезона, имеющего квантовые числа  $1^{--}$ , что отвечает двум термам:  ${}^3S_1$  и  ${}^3D_1$ , так что, в отличие, например, от скалярного мезона с квантовыми числами  $0^{-+}$ ,  $\rho$ -мезон описывается четырьмя волновыми функциями. Важно отметить, что в этом случае система уравнений (37) описывает не только  $\rho$ -мезон, но и более тяжёлый векторный мезон, который может быть представлен ортогональной комбинацией S- и D-волн. Таким образом, удвоение числа скалярных волновых функций для  $\rho$ -мезона является просто следствием его "запутывания" с более тяжёлым векторным партнёром.

Заметим также, что волновые функции (83)–(85) записаны в базисе  $LS$ , однако проблему адекватного выбора базиса нельзя решить в общем виде, поскольку смешивание различных парциальных волн, отвечающих одним и тем же квантовым числам, является динамическим. Базис  $LS$  хорошо подходит для описания тяжёлых кваркониев, в которых смешивание парциальных волн может рассматриваться в качестве поправки. Другим достойным упоминания исключением является режим эффективного восстановления киральной симметрии в спектре возбуждённых мезонов (см. раздел 5), которые заполняют киральные мультиплеты, так что вид их волновых функций строго фиксирован киральной симметрией (см. обзор [54] и приведённые в нём ссылки). В работе [55] подробно обсуждается киральный базис, который обеспечивает гораздо более удобный формализм для изучения спектра мезонов в режиме эффективного восстановления киральной симметрии. Однако важно подчеркнуть, что сам по себе киральный базис не решает проблемы динамического смешивания различных парциальных волн — он лишь апеллирует к опреде-

лённым комбинациям таких волн, отвечающим мультиплетам с восстановленной киральной симметрией.

В заключение данного раздела следует сделать ещё одно замечание. Выведенное уравнение Бете–Солпитера (37) описывает спектр истинных кварк-антикварковых состояний. В пределе  $N_c \rightarrow \infty$ , т.е. в том пределе, в котором определена изучаемая модель, такие состояния обладают хорошо известными свойствами. В частности, с возрастанием числа цветов масса истинных  $\bar{q}q$ -состояний практически не изменяется и быстро выходит на константу, тогда как их ширина стремится к нулю, поскольку эффекты рождения из вакуума лёгких кварк-антикварковых пар в данном пределе подавлены. Как видно из формулы (82), лидирующие отброшенные члены, описывающие амплитуды двухчастичных распадов мезонов, ведут себя как  $O(1/\sqrt{N_c})$ , что даёт для ширины мезонов хорошо известное характерное поведение  $1/N_c$ . Данное свойство позволяет отделять истинные кварконии от динамически сгенерированных объектов, например от скалярного состояния  $f_0(500)$ . Так, в работе [56] в рамках унитаризованной киральной теории возмущений показано, что в пределе  $N_c \rightarrow \infty$  полюсы, описывающие истинные кварконии, действительно подчиняются описанным выше правилам. Однако при этом полюс, отвечающий  $f_0(500)$  (в цитируемой работе использовано устаревшее обозначение  $f_0(600)$ ), ведёт себя совершенно иначе: его действительная часть (масса) возрастает с увеличением  $N_c$ , тогда как зависимость его мнимой части (ширины) от  $N_c$  является весьма нетривиальной и не подчиняется правилу  $1/N_c$ . Данное наблюдение подтверждает часто высказываемое мнение о том, что  $f_0(500)$  является результатом сильного взаимодействия мезонов в конечном состоянии, в связи с чем его описание требует выхода за рамки рассмотренного выше формализма.

#### 4. Лоренцева природа конфайнмента

Одним из важных вопросов феноменологии сильных взаимодействий является вопрос о лоренцевой природе удерживающего взаимодействия (конфайнмента). Например, спин-зависящие взаимодействия в системе кварка и антикварка весьма чувствительны к соотношениям между потенциалами, добавляемыми к массе (скалярное взаимодействие), и потенциалами, добавляемыми в энергии и импульсе (векторное взаимодействие) (см., например, основополагающие работы [57, 58], а также более поздние работы, в частности [59–63]). С феноменологией тяжёлых кваркониев, а также с решёточными расчётами [64] лучше согласуются спин-зависящие потенциалы, отвечающие скалярному конфайнменту. Между тем в теории со скалярным конфайнментом киральная симметрия оказалась бы нарушенной явно, что противоречит идее о её спонтанном нарушении (возможность непротиворечивого сосуществования скалярного конфайнмента и спонтанного нарушения киральной симметрии обсуждается в работе [65]).

Для исследования данной проблемы рассмотрим тяжёло-лёгкий кварконий, причём тяжёлый антикварк будем считать статическим центром. Это позволит изучить вопрос о лоренцевой природе удерживающего потенциала, а также некоторые свойства кварк-антикварковых мезонов, избежав при этом ненужных технических усложнений. Спектр такой тяжёло-лёгкой сис-

темы должен описываться системой уравнений (37), обобщённой для случая двух кварковых ароматов. Ниже переход к пределу статического антикварка в системе (37) будет проведён явно, однако сначала представляется уместным воспользоваться другим подходом к тяжёло-лёгкому кварконию, основанным на методе вакуумных корреляторов (см. обзор [14] и приведённые в нём ссылки), и исследовать вопрос о лоренцевой природе конфайнмента в такой системе [59–63]. Действительно, движение лёгкого кварка в поле статического антикварка должно описываться одночастичным уравнением типа уравнения Дирака, причём его взаимодействие со статическим центром будет иметь вид эффективного потенциала, лоренцева природа которого может быть таким образом исследована.

Представим функцию Грина такого тяжёло-лёгкого кваркония  $S_{\text{q}\bar{\text{q}}}$  в виде [60, 62, 63] (до тех пор пока не оговорено особо, все выражения записываются в евклидовом пространстве)

$$S_{\text{q}\bar{\text{q}}}(x, y) = \frac{1}{N_c} \int D\psi D\psi^\dagger D A_\mu \exp \left[ -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^2 - \int d^4x \psi^\dagger (-i\hat{d} - im - \hat{A}) \psi \right] \times \psi^\dagger(x) S_{\bar{\text{q}}}(x, y|A) \psi(y), \quad (86)$$

где  $S_{\bar{\text{q}}}(x, y|A)$  — пропагатор статического антикварка, помещённого в начало отсчёта. Дальнейшие расчёты существенно упрощаются при использовании особого варианта калибровки Фока–Швингера, отличительной особенностью которой является возможность выразить вектор-потенциал поля через его тензор [66]:

$$\mathbf{x}\mathbf{A}(x_4, \mathbf{x}) = 0, \quad A_4(x_4, \mathbf{0}) = 0. \quad (87)$$

Удобство выбора именно такого калибровочного условия обусловлено тем, что глюонное поле исчезает на траектории движения статического антикварка, так что его функция Грина принимает простой вид:

$$S_{\bar{\text{q}}}(x, y|A) = S_{\bar{\text{q}}}(x, y) = i \frac{1 - \gamma_4}{2} \theta(x_4 - y_4) \exp[-M(x_4 - y_4)] + i \frac{1 + \gamma_4}{2} \theta(y_4 - x_4) \exp[-M(y_4 - x_4)], \quad (88)$$

где  $\theta$  — ступенчатая функция.

Тогда выражение (86) переходит в следующее:

$$S_{\text{q}\bar{\text{q}}}(x, y) = \frac{1}{N_c} \int D\psi D\psi^\dagger \exp \left( - \int d^4x L_{\text{eff}}(\psi, \psi^\dagger) \right) \times \psi^\dagger(x) S_{\bar{\text{q}}}(x, y) \psi(y), \quad (89)$$

т.е. антикварк полностью отщепляется от системы, а динамика лёгкого кварка определяется эффективным лагранжианом  $L_{\text{eff}}(\psi, \psi^\dagger)$ :

$$\int d^4x L_{\text{eff}}(\psi, \psi^\dagger) = \int d^4x \psi^\dagger_\alpha(x) (-i\hat{d} - im) \psi^\alpha(x) + \int d^4x \psi^\dagger_\alpha(x) \gamma_\mu \psi^\beta(x) \langle \langle A_{\mu\beta}^\alpha \rangle \rangle + \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \psi^\dagger_{\alpha_1}(x_1) \gamma_{\mu_1} \psi^{\beta_1}(x_1) \psi^\dagger_{\alpha_2}(x_2) \gamma_{\mu_2} \psi^{\beta_2}(x_2) \times \langle \langle A_{\mu_1\beta_1}^{\alpha_1}(x_1) A_{\mu_2\beta_2}^{\alpha_2}(x_2) \rangle \rangle + \dots \quad (90)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — цветовые индексы в фундаментальном представлении, а глюонное поле входит в виде непригодных корреляторов  $\langle \langle A_{\mu_1\beta_1}^{\alpha_1}(x_1) \dots A_{\mu_n\beta_n}^{\alpha_n}(x_n) \rangle \rangle$  всех порядков, обсуждавшихся во введении. Ограничение первым не исчезающим, т.е. гауссовым, коррелятором (здесь учтено, что  $\langle \langle A_{\mu\beta}^\alpha \rangle \rangle = \langle A_{\mu\beta}^\alpha \rangle = 0$ ) является приближением, обсуждение обоснованности которого можно найти, например, в обзоре [14]. Здесь необходимо также упомянуть результаты решёточных расчётов [67] и их связь с казимировским скейлингом в КХД, прослеженную в работах [68, 69].

Тогда, определив ядро взаимодействия кварковых токов через билакальный коррелятор непертурбативных глюонных полей в вакууме в виде

$$\langle \langle A_{\mu\beta}^\alpha(x) A_{\nu\delta}^\gamma(y) \rangle \rangle = \langle A_{\mu\beta}^\alpha(x) A_{\nu\delta}^\gamma(y) \rangle \equiv \equiv 2(\lambda_a)_\beta^\alpha (\lambda_a)_\delta^\gamma K_{\mu\nu}(x, y), \quad (91)$$

затем воспользовавшись тождеством Фирца  $(\lambda_a)_\beta^\alpha (\lambda_a)_\delta^\gamma = 1/2 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - (1/2N_c) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}$  и переходя к пределу большого числа цветов, можно записать

$$L_{\text{eff}}(\psi, \psi^\dagger) = \psi^\dagger_\alpha(x) (-i\hat{d} - im) \psi^\alpha(x) + \frac{1}{2} \int d^4y \psi^\dagger_\alpha(x) \gamma_\mu \psi^\beta(x) \psi^\dagger_\beta(y) \gamma_\nu \psi^\alpha(y) K_{\mu\nu}(x, y), \quad (92)$$

что приводит к уравнению Дайсона–Швингера для лёгкого кварка вида [60, 62, 63]

$$(-i\hat{d}_x - im) S(x, y) - i \int d^4z M(x, z) S(z, y) = \delta^{(4)}(x - y), \quad -iM(x, z) = K_{\mu\nu}(x, z) \gamma_\mu S(x, z) \gamma_\nu. \quad (93)$$

Здесь  $S(x, y) = (1/N_c) \langle \psi^\beta(x) \psi^\dagger_\beta(y) \rangle$ . Следует отметить, что, несмотря на кажущуюся одночастичность, уравнение (93) тем не менее содержит информацию о тяжёлом антикварке, поскольку ядро  $K_{\mu\nu}$  должно вычисляться в калибровке (87), учитывающей присутствие статического антикварка в начале отсчёта.

Воспользовавшись теперь уже упомянутым выше свойством калибровки (87), выразим вектор-потенциал через тензор поля в виде [66]

$$A_4^a(x_4, \mathbf{x}) = \int_0^1 x_i F_{i4}^a(x_4, \alpha\mathbf{x}) d\alpha, \quad A_i^a(x_4, \mathbf{x}) = \int_0^1 \alpha x_k F_{ki}^a(x_4, \alpha\mathbf{x}) d\alpha, \quad i = 1, 2, 3, \quad (94)$$

и, следовательно, выразим ядро взаимодействия  $K_{\mu\nu}$  через коррелятор полей  $\langle F_{\mu\nu}^a(x) F_{\lambda\rho}^b(y) \rangle$ . Воспользовавшись методом вакуумных корреляторов (см. обзор [14]) и ограничившись рассмотрением лишь непертурбативной удерживающей части взаимодействия, найдём для ядра  $K_{\mu\nu}(x, y) = K_{\mu\nu}(x_4 - y_4, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  ( $\tau = x_4 - y_4$ ) следующие выражения (подробный вывод см., например, в работах [60, 61, 70]):

$$K_{44}(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}\mathbf{y}) \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta D(\tau, |\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}|), \quad K_{i4}(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_{4i}(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (95)$$

$$K_{ik}(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((\mathbf{x}\mathbf{y})\delta_{ik} - y_i x_k) \int_0^1 \alpha d\alpha \int_0^1 \beta d\beta D(\tau, |\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}|),$$

где  $D(\tau, \lambda)$  — быстро убывающая функция своих аргументов, описывающая профиль билакального корреля-

тора непертурбативных глюонных полей в вакууме КХД (см. обзор [14]).

Уравнение (93) является существенно нелинейным. Оно может быть линеаризовано подстановкой свободной функции Грина лёгкого кварка  $S(x, z) \rightarrow S_0(x, z)$  в массовый оператор  $M(x, z)$ , допустимой в пределе тяжёлого кварка. Данный подход был использован в работах [59, 61] для вывода эффективного потенциала и спин-зависающих поправок к нему. Лидирующая поправка ко взаимодействию за счёт собственной динамики струны была найдена в работе [71]. При этом было продемонстрировано [61], что линеаризация возможна лишь в пределе  $mT_g \gg 1$ , где  $m$  — масса кварка,  $T_g$  — корреляционная длина вакуума, определяющая скорость убывания коррелятора  $D$  (см. работы [72, 73], в которых обсуждается извлечение корреляционной длины вакуума из решёточных данных для межкварковых потенциалов, а также процитированную в них литературу по данному вопросу). В обратном пределе,  $mT_g \ll 1$ , процедура линеаризации является незаконной, поскольку приводит к бесконечному ряду расходящихся поправок [61], так что в этом пределе нелинейное уравнение должно исследоваться в полном виде. Поскольку в этом разделе исследуется вопрос, связанный со спонтанным нарушением киральной симметрии, масса кварка предполагается малой, так что адекватным является именно непотенциальный режим с  $mT_g \ll 1$ . Поэтому для упрощения задачи воспользуемся другим приближением. Прежде всего отбросим пространственную часть ядра (95), которая качественно не влияет на результат. Тогда для фурье-компоненты по времени от оставшейся компоненты ядра приходим к выражению

$$K_{44}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv K(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{xy} \int_0^1 dx \int_0^1 d\beta \int_{-\infty}^{\infty} dt D(\tau, |\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}|). \quad (96)$$

Кроме того, заметим, что корреляционная длина вакуума, извлечённая из решёточных данных, крайне мала ( $T_g \lesssim 0,1$  фм [72, 73]) по сравнению с характерными масштабами задачи. В связи с этим представляется естественным перейти к струнному пределу  $T_g \rightarrow 0$ , что с учётом нормировки

$$\sigma = 2 \int_0^{\infty} dv \int_0^{\infty} d\lambda D(v, \lambda), \quad (97)$$

где параметр  $\sigma$  определяет натяжение струны КХД [14], даёт для коррелятора  $\delta$ -подобный профиль

$$D(\tau, \lambda) = 2\sigma\delta(\tau)\delta(\lambda), \quad (98)$$

так что

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\sigma(\mathbf{xy}) \int_0^1 dx \int_0^1 d\beta \delta(|\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}|). \quad (99)$$

Ядро (99) отлично от нуля только для коллинеарных векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , что является следствием бесконечно тонкой (в пределе  $T_g \rightarrow 0$ ) струны, связывающей кварк с антикварком. В этом случае интеграл может быть вычислен явно, что даёт для ядра простое выражение:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\sigma \min(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) = \begin{cases} \sigma(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|), & \mathbf{x} \parallel \mathbf{y}, \\ 0, & \mathbf{x} \not\parallel \mathbf{y}. \end{cases} \quad (100)$$

Полученное выражение является трёхмерным обобщением одномерного ядра, выведенного в работе [20] для модели 'т Хофта. Заметим, что условие коллинеарности векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  является тривиальным при наличии всего одного пространственного измерения, тогда как при работе с ядром (100) оно создаёт ряд технических сложностей, несущественных для понимания механизма спонтанного нарушения киральной симметрии. Ввиду сказанного имеет смысл упростить форму ядра и отказаться от этого условия. Таким образом, в дальнейшем ядро взаимодействия для любых  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  рассматривается в виде

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (101)$$

Это ядро обладает рядом важных и привлекательных свойств:

- позволяет тривиально осуществить переход из евклидова пространства в пространство Минковского — с этого момента такой переход считается сделанным;

- имеет простую физическую интерпретацию: часть  $-\sigma|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  отвечает за самодействие лёгкого кварка, тогда как член  $\sigma(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)$  отвечает за взаимодействие кварка со статическим антикварком. Тот факт, что оба эти взаимодействия лёгкого кварка содержатся в одном ядре, является следствием калибровочного условия (87), отщепляющего статический антикварк. Поскольку сама калибровка (87) нарушает трёхмерную трансляционную инвариантность, то такой инвариантностью не обладает и ядро (101);

- допускает естественное обобщение для произвольного потенциала межкваркового взаимодействия  $V(r)$ , так что в обобщённом виде ядро принимает вид

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = V(|\mathbf{x}|) + V(|\mathbf{y}|) - V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|); \quad (102)$$

- устанавливает естественную связь между методом вакуумных корреляторов с обобщённой моделью НИЛ, поскольку с данного момента все уравнения могут быть выведены с использованием любого из указанных подходов.

Приведённые выше рассуждения нельзя считать полноценным выводом обобщённой модели НИЛ из КХД, однако они позволяют проследить тесную связь между фундаментальной теорией и данной моделью. В литературе можно найти аналогичный вывод гамильтониана в форме уравнения (1) в гауссовом приближении для вакуума КХД (см. работу [74]), а также попытки более строгого вывода классической модели НИЛ из КХД, в частности, в работах [36, 37].

Вернёмся к обсуждению уравнения для тяжёло-лёгкого кваркония. Окончательно уравнение Швингера–Дайсона для лёгкого кварка (93) можно записать в виде

$$\left( -i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m \right) S(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int d^3z M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (103)$$

где

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\frac{i}{2} K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \gamma_0 A(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 2i \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \gamma_0. \quad (104)$$

Лоренцева природа взаимодействия, описываемого ядром  $K$ , зависит от матричной структуры массового оператора  $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . В частности, наличие в  $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  вклада, пропорционального единичной матрице, породит взаимодействие, добавляемое к массе, т.е. скалярный кон-файнмент. Для детального изучения данного вопроса воспользуемся естественным разделением ядра (101) на локальную и нелокальную части. Как было отмечено выше, локальная часть отвечает за самодействие лёгкого кварка и, следовательно, сводится к его "одеванию". Действительно, нетрудно убедиться в том, что, отбрасывая в ядре нелокальный вклад  $\sigma(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)$ , можно от уравнения (93) перейти к уравнению Дайсона

$$(\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - m - \Sigma(\mathbf{p})) S(p_0, \mathbf{p}) = 1, \quad (105)$$

где массовый оператор лёгкого кварка  $\Sigma(\mathbf{p})$  имеет вид

$$\Sigma(\mathbf{p}) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma_0 S(k_0, \mathbf{k}) \gamma_0, \quad (106)$$

причём он не зависит от энергии ввиду одновременного характера взаимодействия. Как нетрудно убедиться, выражение (106) для массового оператора в точности воспроизводит формулу (27), выведенную ранее суммированием ряда Дайсона для пропагатора одетого кварка (см. рис. 2).

Поскольку функция Грина  $S(p_0, \mathbf{p})$  определяется из уравнения (105), её подстановка в уравнение (106) приводит к нелинейному условию самосогласованности, которое является не чем иным, как щелевым уравнением (30) в обобщённой модели НИЛ [21–29], и которое удобно записать в виде уравнения для кирального угла  $\varphi_p$  (14).

Для параметризованной через киральный угол функции  $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , являющейся двойным фурье-образом величины  $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , введённой в уравнении (104), нетрудно найти

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2i \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \gamma_0 = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) U_p, \quad (107)$$

где

$$U_p = \beta \sin \varphi_p + \boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{p}} \cos \varphi_p, \quad \beta = \gamma_0, \quad \boldsymbol{\alpha} = \gamma_0 \boldsymbol{\gamma}. \quad (108)$$

Вернёмся теперь к уравнению (103) и перепишем его в виде уравнения для связанных состояний для волновой функции  $\tilde{\Psi}(\mathbf{x})$ :

$$(\boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{p}} + \beta m) \tilde{\Psi}(\mathbf{x}) + \beta \int d^3 z M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \tilde{\Psi}(\mathbf{z}) = E \tilde{\Psi}(\mathbf{x}), \quad (109)$$

в которое на этот раз включены как локальный, так и нелокальный вклады в ядро взаимодействия. Тогда, переходя в импульсное пространство и используя щелевое уравнение в легко проверяемом виде:

$$E_p U_p = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) U_k, \quad (110)$$

можно представить уравнение (109) как

$$E_p U_p \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) (U_p + U_k) \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = E \tilde{\Psi}(\mathbf{p}). \quad (111)$$

В уравнении (111) может быть сделано точное преобразование Фолди–Ваутхайзена<sup>2</sup> [75]:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) = T_p \Psi(\mathbf{p}), \quad \Psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (112)$$

$$T_p = \exp \left[ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{p}} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_p \right) \right],$$

которое сводит его к уравнению типа уравнения Шрёдингера для двухкомпонентного спинора лёгкого кварка  $\psi(\mathbf{p})$ :

$$E_p \psi(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \times \\ \times (C_p C_k + (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}) S_p S_k) \psi(\mathbf{k}) = E \psi(\mathbf{p}), \quad (113)$$

где использованы обозначения (40).

Прежде чем перейти к исследованию свойств уравнения (113), получим его непосредственно в обобщённой модели НИЛ. Заметим, что выведенное ранее уравнение для связанных кварк-антикварковых состояний (37) обладает симметрией по отношению к замене

$$\{M_n, \varphi_n^\pm(\mathbf{p})\} \leftrightarrow \{-M_n, \varphi_n^\mp(\mathbf{p})\}. \quad (114)$$

Как отмечалось в разделе 3.2, компоненты волновой функции  $\varphi_n^+(p)$  и  $\varphi_n^-(p)$  описывают движение кварк-антикварковой пары в мезоне вперёд и назад по времени соответственно, причём в силу одновременности взаимодействия, описываемого ядром (2), кварк и антикварк могут двигаться вперёд и назад по времени только одновременно. Таким образом, естественно ожидать, что в пределе статического антикварка система (45) распадается на два независимых уравнения.

Действительно, уравнение (33) обобщается для случая тяжёло-лёгкой системы следующим образом:

$$\chi(\mathbf{p}; M) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma_0 S_q \left( \mathbf{k}, k_0 + \frac{M}{2} \right) \times \\ \times \chi(\mathbf{k}; M) S_{\bar{q}} \left( \mathbf{k}, k_0 - \frac{M}{2} \right) \gamma_0, \quad (115)$$

где, как и в уравнении (28),

$$S_q(\mathbf{p}, p_0) = \frac{A^+(\mathbf{p}) \gamma_0}{p_0 - E_p + i0} + \frac{A^-(\mathbf{p}) \gamma_0}{p_0 + E_p - i0}, \quad (116)$$

$$A^\pm(\mathbf{p}) = T_p P_\pm T_p^\dagger, \quad P_\pm = \frac{1 \pm \gamma_0}{2}, \quad (117)$$

тогда как для статического антикварка киральным углом является просто  $\varphi_{\bar{q}}(p) \equiv \pi/2$ , так что формулы для проекторов на положительно- и отрицательно-частотные решения упрощаются, а вместе с ними упрощается и вид функции Грина антикварка:

$$S_{\bar{q}}(\mathbf{p}, p_0) = \frac{P_+ \gamma_0}{p_0 - m_{\bar{q}} + i0} + \frac{P_- \gamma_0}{p_0 + m_{\bar{q}} - i0}. \quad (118)$$

<sup>2</sup> Возможность совершения такого преобразования в замкнутом виде появляется благодаря одновременному взаимодействию и наличию в системе бесконечно тяжёлой частицы [16].

Как и в общем случае (см. уравнение (44)), удобно ввести матричную волновую функцию

$$\tilde{\phi}(\mathbf{p}) = \int \frac{dp_0}{2\pi} S_q\left(\mathbf{p}, p_0 + \frac{M}{2}\right) \chi(\mathbf{p}; M) S_{\bar{q}}\left(\mathbf{p}, p_0 - \frac{M}{2}\right), \quad (119)$$

над которой затем совершить преобразование Фолди–Ваутхайзена с помощью оператора  $T_p$  (см. определение (112)) слева (для лёгкого кварка) и с помощью  $T_p(\varphi_p \equiv \pi/2) = \hat{1}$  справа (для статического антикварка):

$$\tilde{\phi}(\mathbf{p}) = T_p \phi(\mathbf{p}) \hat{1}. \quad (120)$$

Тогда нетрудно прийти к следующему уравнению:

$$(E - E_p) \phi(\mathbf{p}) = P_+ \left[ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) T_p^\dagger T_k \phi(\mathbf{k}) \right] P_-, \quad (121)$$

где через  $E$  обозначено превышение энергии системы над массой статического антикварка,  $E = M - m_{\bar{q}}$ . Из вида проекторов в правой части уравнения (121) следует, что его решение имеет вид

$$\phi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & \psi(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1) = \Psi(\mathbf{p}) \otimes \Psi_{\bar{q}}^T(\mathbf{p}), \quad (122)$$

где правая часть представлена в виде тензорного произведения компонент, отвечающих лёгкой (см. уравнение (112)) и тяжёлой степеням свободы. Подставляя в (121) явный вид операторов  $T_p$  и  $T_k$ , нетрудно прийти к уравнению (113).

Заметим, что ввиду упомянутой выше симметрии (114) системы уравнений (45) решение для мезона с энергией  $M_n = -m_{\bar{q}} - E_n$  можно получить с помощью того же (обратного) преобразования Фолди–Ваутхайзена (120), но применённого к волновой функции  $(0, \psi(\mathbf{p}))^T$ . В результате непосредственным вычислением можно воспроизвести уравнение (109), в котором пропагатор вычисляется по формуле [75]

$$S(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = \sum_{E_n > 0} \frac{\tilde{\Psi}_n(\mathbf{p}) \tilde{\Psi}_n^\dagger(\mathbf{k}) \gamma_0}{\omega - E_n + i0} + \sum_{E_n < 0} \frac{\tilde{\Psi}_n(\mathbf{p}) \tilde{\Psi}_n^\dagger(\mathbf{k}) \gamma_0}{\omega + E_n - i0}, \quad (123)$$

а для величины  $L(\mathbf{p}, \mathbf{k})$  воспроизводится результат (107), причём нетрудно увидеть, что

$$U_p = T_p \gamma_0 T_p^\dagger. \quad (124)$$

Уравнения (103) и (113) позволяют ответить на сформулированный в начале раздела 3 вопрос о лоренцевой природе удерживающего взаимодействия в тяжёло-лёгком кваркони. Для низколежащих состояний с малыми относительными импульсами кварков киральный угол  $\varphi_p$  принимает значения, близкие к  $\pi/2$  (см. рис. 1). При этом в пределе  $\varphi_p = \pi/2$  нетрудно найти, что  $C_p = 1$ ,  $S_p = 0$ , так что переход в координатное пространство в уравнении (113) не представляет труда, причём взаимодействие сводится просто к линейному потенциалу  $\sigma r$ . Если дополнительно кинетический член  $E_p$  заменить кинетической энергией свободной частицы<sup>3</sup>, то получен-

ное уравнение воспроизведёт уравнение Солпитера

$$\left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \sigma r\right) \psi = E \psi, \quad (125)$$

часто рассматриваемое в литературе в связи с проблемой спектроскопии адронов (см., например, [76, 77]).

С другой стороны, для  $\varphi_p = \pi/2$  имеем  $U_p = \gamma_0$  и, следовательно,

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \gamma_0 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma |\mathbf{x}| \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (126)$$

так что в уравнении (103) весь потенциал  $\sigma |\mathbf{x}|$  добавляется к массе, т.е. межкварковое взаимодействие является чисто скалярным. Важно отметить, что данный скаляр является чисто динамическим, появившимся исключительно благодаря отклонению кирального угла от тривиального решения, что тесно связано с нарушением киральной симметрии в вакууме.

В обратном пределе больших относительных импульсов, когда киральный угол убывает и стремится к нулю, вклад скалярного взаимодействия также убывает, тогда как вклад пространственно-векторного взаимодействия, наоборот, возрастает. Данный режим реализуется для высоковозбуждённых состояний в спектре (см. детальное изложение этого вопроса в разделе 5). Заметим, что матрица  $L(\mathbf{p}, \mathbf{k})$  не содержит пропорциональных единичной матрице вкладов, которые привели бы к возникновению временной компоненты векторного взаимодействия, возрастающей с увеличением расстояния, и по этой причине были бы потенциально опасными с точки зрения возникновения парадокса Клейна.

Таким образом, с использованием тяжёло-лёгкой кварк-антикварковой системы на микроскопическом уровне было продемонстрировано возникновение эффективного скалярного межкваркового взаимодействия как следствия спонтанного нарушения киральной симметрии в вакууме. Кроме того, была прослежена связь между обобщённой моделью НИЛ и КХД в гауссовом приближении для корреляторов глюонных полей.

## 5. Эффективное восстановление киральной симметрии в спектре адронов

### 5.1. Общие замечания

В разделах 2–4 обобщённая модель НИЛ использовалась для микроскопического описания явления спонтанного нарушения киральной симметрии в вакууме. Кроме того, были подробно описаны свойства кирального пиона — низшего состояния в спектре мезонов, играющего также роль псевдоголдстоуновского бозона. Между тем, как отмечалось во введении, есть основания полагать, что в спектре возбуждённых адронов нарушение киральной симметрии не проявляется, так что можно говорить о её эффективном восстановлении (см. обзор [54] и содержащиеся в нём ссылки). Важно подчеркнуть, что речь идёт не о фазовом переходе восстановления киральной симметрии в вакууме теории, а лишь о слабой чувствительности свойств высоковозбуждённых адронов к эффекту спонтанного нарушения киральной инвариантности в вакууме, что приводит к ряду наблюдаемых эффектов.

<sup>3</sup> Данная процедура заведомо неприменима для кирального пиона, однако для других мезонных состояний она имеет смысл адекватно, хотя и довольно грубо, приближения.



В работах [75, 78–83] были сделаны попытки теоретического описания такого восстановления в рамках различных подходов к КХД. При этом, вне зависимости от используемой модели, эффективное восстановление киральной симметрии в спектре подразумевает возникновение мультиплетов адронных состояний, приближённо вырожденных по массе. Здесь необходимо сделать следующее замечание. Как хорошо известно, спектр масс кварк-антикварковых мезонов, связанных линейным потенциалом, обладает реджевским поведением, т.е.  $M_{n,l}^2 \propto n$  и  $M_{n,l}^2 \propto l$  при  $n, l \gg 1$ . Здесь  $n$  и  $l$  — радиальное квантовое число и угловой момент соответственно. Нетрудно убедиться в том, что состояния с противоположной чётностью, образующие приближённо вырожденные пары, обладают угловыми моментами, различающимися на единицу (например, скаляры  ${}^3P_0$  и псевдоскаляры  ${}^1S_0$ ). Следовательно, для данного углового момента  $l_0$  расщепление в такой паре имеет вид

$$\Delta M_{n,l_0}^{+-} \equiv M_{n,l_0+1}^+ - M_{n,l_0}^- \sim \frac{1}{M_{n,l_0+1}^+ + M_{n,l_0}^-} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (127)$$

т.е. оно убывает с возрастанием радиального квантового числа. Очевидно, что такое убывание не является признаком восстановления киральной симметрии. Действительно, точно такой же закон справедлив и для расщепления между соседними состояниями с одинаковой чётностью:

$$\Delta M_{n,l_0}^{\pm\pm} \equiv M_{n,l_0+1}^{\pm} - M_{n,l_0}^{\pm} \sim \frac{1}{M_{n,l_0+1}^{\pm} + M_{n,l_0}^{\pm}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (128)$$

которое не имеет отношения к киральной симметрии. Следовательно, необходимо определить величину, по которой можно было бы однозначно судить о том, происходит ли восстановление киральной симметрии в спектре или нет. В качестве такой величины можно выбрать расщепление между квадратами масс  $\Delta(M^{+-})^2 = (M^+)^2 - (M^-)^2$  [75]<sup>4</sup> или, что эквивалентно, отношение расщеплений  $\Delta M^{+-}/\Delta M^{\pm\pm}$  в рамках одного и того же кирального мультиплета [84].

Таким образом, было бы естественным воспользоваться преимуществами микроскопического подхода к спонтанному нарушению киральной симметрии, обеспечиваемыми обобщённой моделью НИЛ, и исследовать с её помощью вопрос о влиянии нарушения киральной симметрии на спектр высоковозбуждённых адронов.

## 5.2. Квантовые флуктуации и квазиклассический режим в спектре возбуждённых адронов

Явление эффективного восстановления киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых адронов имеет простое качественное объяснение. Поскольку спонтанное нарушение киральной симметрии в вакууме является следствием квантовых флуктуаций (петель), оно само является квантовым эффектом. Параметром, определяющим роль таких флуктуаций в динамике системы, может служить отношение  $\hbar/S$ , где  $S$  — классическое действие, отвечающее внутренним степеням свободы адрона. Для больших чисел возбуждения, т.е. в квазиклассической области спектра, имеет место соотношение

<sup>4</sup> В общем случае произвольного степенного потенциала (3) необходимо сравнивать показатели степеней масс  $(\alpha + 1)/\alpha$ .

$S \gg \hbar$  и, следовательно, спонтанное нарушение киральной инвариантности не должно оказывать влияния на свойства высоковозбуждённых адронов [85].

Убедимся в справедливости данной качественной картины на примере обобщённой модели НИЛ. Как и ранее, рассмотрим предел большого числа цветов, что позволяет ограничиться только планарными (лестничными и радужными) диаграммами, а структуру удерживающего потенциала выберем в наиболее простом виде:  $\gamma_0 \times \gamma_0$  (см. уравнение (2)).

Рассмотрим уравнение Дайсона (30) для массового оператора кварка. Как и многие нелинейные интегральные уравнения, данное уравнение имеет несколько решений. Одно из таких решений даётся теорией возмущений (пертурбативное решение):

$$\Sigma = \int d^4k V \gamma_0 S_0 \gamma_0 + \int d^4k d^4q V^2 \gamma_0 S_0 \gamma_0 S_0 \gamma_0 S_0 \gamma_0 + \dots, \quad (129)$$

которое достаточно быстро сходится в пределе слабого взаимодействия. Нетрудно убедиться в том, что данное решение представляет собой ряд по степеням постоянной Планка  $\hbar$ . Для этого восстановим её в формуле (30) явно.

Удерживающий потенциал определяется средним от петли Вильсона

$$\langle W(C) \rangle = \exp\left(-\frac{\sigma A}{\hbar c}\right), \quad (130)$$

где  $\sigma$  — натяжение струны,  $A$  — площадь минимальной поверхности в евклидовом пространстве, ограниченной контуром  $C$ . Для удобства в (130) восстановлена также скорость света  $c$ , которая в дальнейшем в большинстве формул будет снова опускаться. Тогда стандартным образом для прямоугольной петли получим

$$\frac{\sigma A}{\hbar c} = \frac{\sigma R(cT)}{\hbar c} = \frac{1}{\hbar} \int_0^T \sigma R dt = \frac{1}{\hbar} \int_0^T V(R) dt. \quad (131)$$

Из уравнения (131) для удерживающего потенциала находим линейный конфинмент  $V(r) = \sigma r$ , который предполагается классической величиной, выживающей в формальном пределе  $\hbar \rightarrow 0$ . Тогда для его фурье-образа получим

$$V(\mathbf{p}) = \int d^3x \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \sigma |\mathbf{x}| = -\frac{8\pi\sigma\hbar^4}{p^4} = \hbar^4 \tilde{V}(\mathbf{p}), \quad (132)$$

где так определённая величина  $\tilde{V}(\mathbf{p})$  не содержит  $\hbar$ . В результате нетрудно найти

$$i\Sigma(\mathbf{p}) = \hbar \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma_0 \frac{1}{S_0^{-1}(k_0, \mathbf{k}) - \Sigma(\mathbf{k})} \gamma_0, \quad (133)$$

где множитель  $\hbar^4$  от потенциала в числителе сократился со множителем  $\hbar^4$  в знаменателе, возникшим от дифференциала  $d^4k/(2\pi\hbar)^4$ . Оставшийся множитель  $\hbar$  элементарно восстанавливается из размерных соображений. Таким образом, пертурбативное разложение по степеням потенциала (129) представляет собой разложение по петлям, причём каждая степень потенциала (каждая петля) привносит одну степень  $\hbar$ .

Рассмотрим теперь щелевое уравнение (14) с восстановленными в нём постоянной Планка  $\hbar$  и скоростью света  $c$ :

$$pc \sin \varphi_p - mc^2 \cos \varphi_p = \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \times \\ \times (\cos \varphi_k \sin \varphi_p - \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{k}} \sin \varphi_k \cos \varphi_p). \quad (134)$$

Остановимся сначала на киральном пределе  $m = 0$ . Нетрудно увидеть, что в формальном классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$  правая часть уравнения (134) тождественно обращается в нуль, так что единственным решением является тривиальное кирально-симметричное решение  $\varphi_p = 0$ . Полученный результат совершенно естествен, поскольку при  $m = 0$  киральный угол параметризует существенно квантовый эффект — вклад петель, так что в классическом пределе он должен обращаться в нуль. При этом все попытки поиска решений уравнения (134) в виде ряда по степеням  $\hbar$ ,  $\varphi_p = \hbar f_1(p) + \hbar^2 f_2(p) + \dots$ , обречены на неудачу, поскольку, как нетрудно убедиться, все коэффициенты такого разложения обращаются в нуль. Полученный результат не должен вызывать удивления — его можно легко объяснить качественно. Действительно, в полном виде указанное выше разложение кирального угла по степеням  $\hbar$  должно иметь вид

$$\varphi_p = \frac{\hbar}{S} f_1\left(\frac{p}{\mu c}\right) + \frac{\hbar^2}{S^2} f_2\left(\frac{p}{\mu c}\right) + \dots, \quad (135)$$

где постоянная Планка приведена к безразмерному виду делением на величину  $S$ , имеющую размерность действия, а импульс сделан безразмерным с помощью параметра размерностью массы  $\mu$ . Нетрудно убедиться в том, что из имеющихся размерных параметров ( $\sigma$  и  $c$ ) построить величину  $S$  невозможно, что автоматически делает невозможным и само разложение (135).

Для того чтобы разобраться с поведением кирального угла в классическом пределе, представим в безразмерном виде щелевое уравнение (134) с помощью подстановки  $\mathbf{p} = \mu c \boldsymbol{\xi}$ ,  $\mathbf{k} = \mu c \boldsymbol{\eta}$ , так что все размерные параметры в уравнении собираются вместе и определяют масштаб  $\mu$  в виде  $\mu = \sqrt{\sigma \hbar c} / c^2$ . Таким образом, масштаб  $\mu$  сам зависит от постоянной Планка. Разложение кирального угла в пределе малых импульсов имеет вид

$$\varphi_p \underset{p \rightarrow 0}{\approx} \frac{\pi}{2} - \text{const} \frac{pc}{\mu c^2} + \dots = \frac{\pi}{2} - \text{const} \frac{pc}{\sqrt{\sigma \hbar c}} + \dots,$$

т.е. при переходе к формальному пределу  $\hbar \rightarrow 0$  киральный угол при малых импульсах убывает всё резче, нетривиальным образом приближаясь к кирально симметричному решению  $\varphi_p = 0$ , — происходит коллапс кирального угла. Такого рода коллапс характерен для квантово-механических волновых функций в классическом пределе. И действительно, киральный угол может рассматриваться в качестве радиальной волновой функции кварк-антикварковых пар, сконденсированных в вакууме (см., например, формулу (19)). Кроме того, киральный угол определяет волновую функцию кирального пиона. Таким образом, киральный угол — решение щелевого уравнения — зависит от постоянной Планка существенно непертурбативным образом.

Если теперь выйти за рамки кирального предела и включить в рассмотрение массу кварка как возмущение,

то киральный угол может быть представлен в виде ряда по степеням безразмерного малого параметра  $mc^2 / \sqrt{\sigma \hbar c}$ :

$$\varphi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{\sigma \hbar c}} \right)^n f_n \left( \frac{pc}{\sqrt{\sigma \hbar c}} \right), \quad (136)$$

где вид лидирующего члена  $f_0(p)$  показан на рис. 1.

Вне кирального предела в теории возникает ещё один размерный параметр — масса кварка  $m$ , которой уже оказывается достаточно для того, чтобы построить как классический параметр размерности действия  $S \sim \sim m^2 c^3 / \sigma$ , так и классический параметр  $mc$  для приведения импульса к безразмерному виду. Таким образом, разложение (135) становится возможным, и оно принимает вид

$$\varphi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\sigma \hbar c}{(mc^2)^2} \right)^n \tilde{f}_n \left( \frac{p}{mc} \right), \quad (137)$$

т.е. безразмерным параметром разложения является величина  $\sigma \hbar c / (mc^2)^2$ . Лидирующий член ряда (137), известный аналитически, даётся свободным киральным углом  $\tilde{f}_0 = \arctan(mc/p)$ . Именно пертурбативное решение (137) выражается рядом теории возмущений (129).

Оба разложения кирального угла, (136) и (137), воспроизводят одно и то же решение щелевого уравнения. Однако разложение (136) хорошо сходится при одновременном выполнении двух условий: 1) вблизи кирального предела  $m = 0$ , 2) вне классического предела  $\hbar \neq 0$  (разложение (137) с очевидностью "взрывается" в этом пределе). И наоборот, в случае  $m \gg \sqrt{\sigma \hbar c} / c^2$  разложение (137) сходится гораздо лучше разложения (136). При этом соответствие один в один между функциями  $\{f_n\}$  и  $\{\tilde{f}_n\}$  отсутствует — каждая функция из одного набора разлагается в бесконечный ряд по функциям из другого набора и наоборот. Например, функция  $f_0$ , изображённая на рис. 1, стремится к нулю при асимптотически больших импульсах как  $1/p^5$  (см. формулу (25)), тогда как асимптотическое поведение функции  $\tilde{f}_0$  намного медленнее — как  $1/p$ .

В заключение этого раздела заметим, что разложения (136) и (137) явно задают два динамических режима системы в зависимости от величины параметра  $m/\sqrt{\sigma}$ . Спонтанное нарушение киральной симметрии происходит в пределе  $m \ll \sqrt{\sigma}$  — режим (136), тогда как в противоположном пределе,  $m \gg \sqrt{\sigma}$ , имеет место "физика тяжёлого кварка" — режим (137).

### 5.3. Эффективное восстановление киральной симметрии в спектре возбуждённых мезонов

Как упоминалось в разделе 5.1, ожидается, что в спектре высокоэнергетических адронов киральная симметрия эффективно восстанавливается, причём в разделе 5.2 были приведены качественные соображения в пользу того, что такое восстановление действительно имеет место в обобщённой модели НИЛ. В данном разделе такое эффективное восстановление киральной симметрии описывается количественно [75].

Рассмотрим уравнение Шрёдингера (113), описывающее спектр масс тяжёло-лёгкого кваркония. Домножим его слева на  $\sigma \mathbf{p}$  и представим результат в виде уравнения для функции

$$\psi'(\mathbf{p}) = \sigma \hat{\mathbf{p}} \psi(\mathbf{p}), \quad (138)$$

которая по построению обладает противоположной пространственной чётностью по отношению к  $\psi(\mathbf{p})$ . Полученное уравнение

$$E_p \psi'(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}-\mathbf{k}) [S_p S_k + (\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{k}}) C_p C_k] \times \\ \times \psi'(\mathbf{k}) = E \psi'(\mathbf{p}) \quad (139)$$

отличается от уравнения (113) взаимной заменой величин  $C_p$  и  $S_p$ , определённых в формуле (40). Тогда нетрудно увидеть, что в пределе больших относительных импульсов  $\varphi_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$  (см. рис. 1) и, следовательно,  $C_p = S_p = 1/\sqrt{2}$ , так что уравнения (113) и (139) принимают одинаковый вид:

$$E_p \psi^{(l)}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}-\mathbf{k}) [1 + (\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{k}})] \psi^{(l)}(\mathbf{k}) = \\ = E \psi^{(l)}(\mathbf{p}), \quad (140)$$

и, следовательно, состояния с противоположной чётностью  $\psi(\mathbf{p})$  и  $(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\psi(\mathbf{p})$  вырождаются. Заметим, что фурье-образ потенциала в уравнениях (113) и (139) выделяет область  $\mathbf{p} \approx \mathbf{k}$ , так что приближённо можно утверждать, что киральная симметрия эффективно восстанавливается, если  $C_p^2 \approx S_p^2$ . При этом нетрудно найти, что в киральном пределе

$$C_p^2 - S_p^2 = \sin \varphi_p = \pm \mathcal{N}_\pi^{-1} \varphi_\pi^\pm(p), \quad (141)$$

где  $\varphi_\pi^\pm(p)$  — компоненты волновой функции кирального пиона (см. уравнение (55)). Данное соотношение подчёркивает связь между вырождением по чётности, наблюдаемым в спектре высоковозбуждённых мезонов, и восстановлением киральной симметрии. На рисунке 4 приведены зависимости величин  $C_p^2$  и  $S_p^2$  от импульса для потенциалов вида  $V(r) = K_0^{z+1} r^{-z}$  с различными значениями  $\alpha$ . Как видно из рисунка, с возрастанием импульса действительно имеет место быстрый выход указанных функций на асимптотическое значение 1/2.

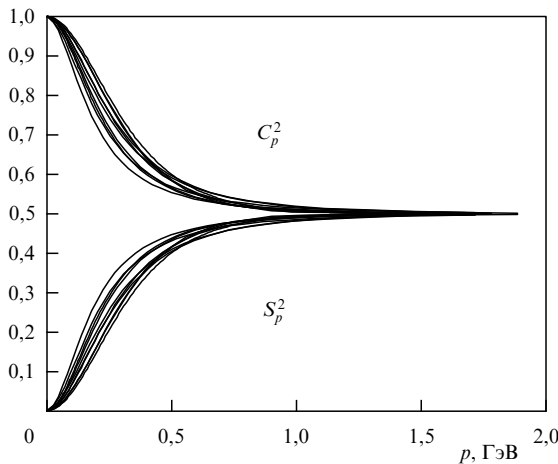


Рис. 4. Зависимость коэффициентов  $C_p^2$  и  $S_p^2$  от импульса для потенциалов  $V(r) = K_0^{z+1} r^{-z}$  с  $\alpha = 0,3, 0,5, 0,7, 0,9, 1,0, 1,1, 1,3, 1,7$  и  $2,0$ . Для каждого потенциала величина  $K_0$  подобрана так, чтобы давать одно и то же значение кирального конденсата  $-(250 \text{ МэВ})^3$ .

При этом, как неоднократно отмечалось выше, качественные предсказания модели не зависят от выбранного показателя степени потенциала  $\alpha$ . Более того, количественно предсказания также демонстрируют очень слабую зависимость от  $\alpha$  (см. рис. 4). Таким образом, для детального количественного изучения вопроса о восстановлении киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых мезонов достаточно выбрать значение  $\alpha$ , обеспечивающее наиболее простые уравнения, т.е.  $\alpha = 2$ . При этом

$$V(\mathbf{p}-\mathbf{k}) = -K_0^3 \Delta_k \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \quad (142)$$

так что щелевое уравнение сводится к дифференциальному уравнению второго порядка (16). Киральный конденсат (24) при этом равняется  $-(0,51K_0)^3$  и принимает стандартное значение  $-(250 \text{ МэВ})^3$  при

$$K_0 = 490 \text{ МэВ}. \quad (143)$$

Заметим, что наиболее адекватным базисом для построения спектра высоковозбуждённых мезонов, в том числе для изучения явления эффективного восстановления киральной симметрии в спектре, является киральный базис [55]. В частности, этот базис был успешно использован для численного расчёта масс возбуждённых мезонов в обобщённой модели НИЛ в работе [86]. Здесь, однако, для установления более близкого соответствия между расчётами в обобщённой модели НИЛ и с помощью обычного уравнения Солпитера будет использован стандартный базис  $\{J, L, S\}$ . Таким образом, волновая функция лёгкого кварка  $\psi(\mathbf{p})$  разлагается по базису сферических спиноров

$$\Omega_{jlm}(\hat{\mathbf{p}}) = \sum_{\mu_1 \mu_2} C_{l\mu_1(1/2)\mu_2}^{jm} Y_{l\mu_1}(\hat{\mathbf{p}}) \chi_{\mu_2} \quad (144)$$

в виде

$$\psi(\mathbf{p}) = \Omega_{jlm}(\hat{\mathbf{p}}) \frac{u(p)}{p}, \quad (145)$$

где  $u(p)$  — радиальная волновая функция в импульсном представлении, для которой из (113) находим следующее уравнение:

$$u'' = (E_p - E) u + K_0^3 \left[ \frac{\varphi_p^2}{4} + \frac{\kappa}{p^2} (\kappa + \sin \varphi_p) \right] u, \quad (146)$$

где стандартным образом для центрального поля введена величина спин-орбитального взаимодействия

$$\kappa = \begin{cases} l, & \text{для } j = l - \frac{1}{2} \\ -(l+1), & \text{для } j = l + \frac{1}{2} \end{cases} = \pm \left( j + \frac{1}{2} \right).$$

Уравнение (146) можно представить в виде уравнения Шрёдингера

$$-K_0^3 u'' + V_{[j,l]}(p) u = E u \quad (147)$$

с эффективным потенциалом

$$V_{[j,l]}(p) = E_p + K_0^3 \left[ \frac{\varphi_p^2}{4} + \frac{\kappa}{p^2} (\kappa + \sin \varphi_p) \right]. \quad (148)$$

**Таблица 1.** Массы орбитально возбуждённых состояний и их расщепления для радиального квантового числа  $n = 0$ , возникающие из решения точного уравнения (147) с потенциалом (148), а также из приближённого уравнения Солпитера (151). Все энергии даны в единицах параметра  $K_0$

$j$	1/2	3/2	5/2	7/2	$j$	1/2	3/2	5/2	7/2
$E_{l=j-1/2}$	2,04	3,51	4,51	5,35	$E_{l=j-1/2}^{\text{Salp}}$	2,34	3,36	4,24	5,05
$E_{l=j+1/2}$	2,66	3,69	4,57	5,36	$E_{l=j+1/2}^{\text{Salp}}$	3,36	4,24	5,05	5,79
$\Delta E_j$	0,62	0,18	0,06	0,01	$\Delta E_j^{\text{Salp}}$	1,02	0,88	0,81	0,74

**Таблица 2.** То же, что в таблице 1, но для  $n = 1$

$j$	1/2	3/2	5/2	7/2	$j$	1/2	3/2	5/2	7/2
$E_{l=j-1/2}$	3,91	5,03	5,87	6,60	$E_{l=j-1/2}^{\text{Salp}}$	4,09	4,88	5,63	6,33
$E_{l=j+1/2}$	4,39	5,17	5,92	6,61	$E_{l=j+1/2}^{\text{Salp}}$	4,88	5,63	6,33	7,00
$\Delta E_j$	0,48	0,14	0,05	0,01	$\Delta E_j^{\text{Salp}}$	0,79	0,75	0,70	0,67

Заметим, что известное свойство шаровых спиноров

$$\sigma \hat{\mathbf{p}} \Omega_{jlm}(\hat{\mathbf{p}}) = -\Omega_{j'l'm}(\hat{\mathbf{p}}), \quad l + l' = 2j, \quad (149)$$

гарантирует противоположную пространственную чётность состояний с  $j = l \pm 1/2$ . Из вида эффективного потенциала (148) нетрудно найти разность потенциалов для таких состояний, отвечающих  $\kappa = \pm(j + 1/2)$ :

$$\Delta V = -\frac{(2j + 1) K_0^3}{p^2} \sin \varphi_p, \quad (150)$$

которая наглядно демонстрирует связь расщепления масс состояний с противоположной чётностью с киральной симметрией, уже обсуждавшуюся ранее в общем виде. Очевидно, что для высоковозбуждённых состояний, отвечающих бóльшим значениям относительного импульса, киральный угол асимптотически убывает (см. рис. 1), а с ним убывает и потенциал, дающий расщепление уровней с противоположной чётностью.

Именно такое поведение расщепления демонстрируется явным решением уравнения (147), приведённым в табл. 1 и 2 и построенным на рис. 5. Для наглядности полученные решения сравниваются с поведением аналогичных решений упрощённого уравнения Солпитера,

$$[\sqrt{p^2 + m^2} + K_0^3 x^2] \psi(\mathbf{x}) = E \psi(\mathbf{x}), \quad (151)$$

полученного из уравнения (147) подстановкой  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$  и  $\varphi_p \equiv \pi/2$  в потенциале (148):

$$\begin{aligned} V_{[j,l]}^{\text{Salp}}(p) &= \sqrt{p^2 + m^2} + K_0^3 \frac{\kappa(\kappa + 1)}{p^2} = \\ &= \sqrt{p^2 + m^2} + K_0^3 \frac{l(l + 1)}{p^2}. \end{aligned} \quad (152)$$

Поскольку состояния с противоположной чётностью отвечают угловым моментам, различающимся на единицу, по аналогии с (150) можно получить

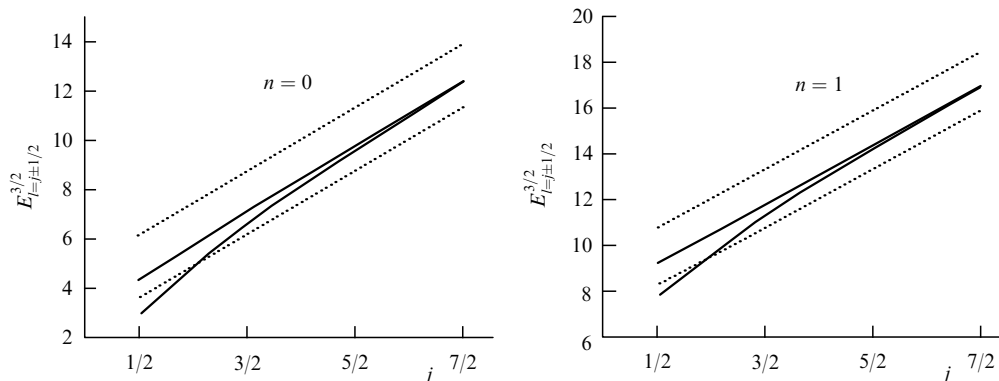
$$\Delta V^{\text{Salp}} = -\frac{2(l + 1) K_0^3}{p^2}. \quad (153)$$

Квазиклассический спектр уравнения (151) демонстрирует линейную зависимость от углового момента  $l$  степени  $E^{3/2}$  ( $E^{(\alpha+1)/\alpha}$ , где  $\alpha = 2$ ), поэтому для фиксированного радиального квантового числа  $n$  уравнение (151) даёт две параллельные траектории  $E^{3/2}(j)$  с  $l = j \pm 1/2$ . Аналогичные траектории для уравнения (147) с потенциалом (148) имеют сопоставимое с траекториями для уравнения Солпитера расщепление при малых  $j$ , которое, однако, быстро убывает с возрастанием углового момента  $l$ .

Данный расчёт наглядно демонстрирует эффективное восстановление киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых мезонов в модели НИЛ. При этом, как видно из сравнения потенциалов (150) и (153),

$$E - E' \propto \langle \sin \varphi_p \rangle, \quad (154)$$

где  $E$  и  $E'$  — энергии состояний с противоположной чётностью, а в правой части подразумевается усреднение по радиальной волновой функции.



**Рис. 5.** Поведение траекторий Редже для уравнения (147) с потенциалом (148) (сплошная линия) и для уравнения Солпитера (151) (пунктирная линия). Нижняя линия отвечает  $l = j - 1/2$ , а верхняя —  $l = j + 1/2$ .

#### 5.4. Отщепление пиона от высоковозбуждённых мезонов

Одним из специфических предсказаний для высоковозбуждённых адронов с эффективно восстановленной киральной симметрией является отщепление от них кирального пиона, которое выражается в убывании соответствующей константы связи с возрастанием степени возбуждения адрона [8, 87–90]. Такое поведение пионной константы связи нетрудно установить с помощью соотношения Голдбергера–Треймана для перехода  $n \rightarrow n' + \pi$ , где  $n$  и  $n'$  — киральные партнёры, т.е. адронные состояния с противоположной пространственной чётностью, вырождающиеся по массе при восстановлении киральной симметрии в спектре<sup>5</sup>.

Ограничимся сначала приближением БКШ и покажем, что константа связи пиона с возбуждёнными адронами определяется эффективной массой одетого кварка. Для этого рассмотрим аксиально-векторный ток (для простоты рассматривается случай одного аромата кварков и отбрасывается вклад киральной аномалии)

$$J_\mu^5(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 q(x), \quad (155)$$

который в силу гипотезы о частичном сохранении аксиального тока (ЧСАТ) может быть связан с волновой функцией кирального пиона  $\phi_\pi$ :

$$J_\mu^5(x) = f_\pi \partial_\mu \phi_\pi(x). \quad (156)$$

Тогда для среднего от дивергенции тока  $\partial_\mu J_\mu^5$  между состояниями одетых кварков с помощью формулы (156) можно найти

$$\begin{aligned} \langle q(p) | \partial_\mu J_\mu^5(x) | q(p') \rangle &= f_\pi m_\pi^2 \langle q(p) | \phi_\pi(x) | q(p') \rangle \propto \\ &\propto f_\pi g_\pi(q^2) (\bar{u}_p \gamma_5 u_{p'}), \quad q = p - p', \end{aligned} \quad (157)$$

где введён пион-кварк-кварковый формфактор  $g_\pi(q^2)$ .

С другой стороны, если считать, что киральная симметрия в системе спонтанно нарушена и кварковые волновые функции удовлетворяют эффективному уравнению Дирака с динамически сгенерированной массой  $m_q^{\text{eff}}$ , то с помощью формулы (155) находим

$$\langle q(p) | \partial_\mu J_\mu^5(x) | q(p') \rangle \propto m_q^{\text{eff}} (\bar{u}_p \gamma_5 u_{p'}). \quad (158)$$

Приравняв правые части уравнений (157) и (158), приходим к соотношению

$$f_\pi g_\pi = m_q^{\text{eff}}, \quad g_\pi \equiv g_\pi(m_\pi^2), \quad (159)$$

где для простоты все численные коэффициенты включены в определение константы  $g_\pi$ . Из формулы (11) видно, что эффективную массу кварка описывает величина  $A_p$ , поэтому с помощью соотношения (159) окончательно находим [91]

$$f_\pi g_\pi(p) \simeq A_p. \quad (160)$$

За рамками приближения БКШ соотношение Голдбергера–Треймана связывает константу связи пиона с возбуждённым адроном и расщепление по массе между

этим адроном и его киральным партнёром. Для определённости рассмотрим переход  $\bar{D}(J^P=0^+) \rightarrow \bar{D}'(J^P=0^-) \pi$ , где кварковый состав  $\bar{D}^{(\prime)}$ -мезона есть  $\bar{c}q$  с лёгким кварком  $q = u, d$ .

Из условия ЧСАТ (156), обобщённого для случая группы изоспина SU(2), следует, что

$$\langle 0 | J_\mu^{5a}(0) | \pi^b(\mathbf{q}) \rangle = i f_\pi q_\mu \delta_{ab}, \quad (161)$$

так что для матричного элемента перехода  $\langle n' | J_\mu^{5a} | n \rangle$  ( $n^{(\prime)} = \bar{D}^{(\prime)}$ ) находим

$$\langle n' | J_\mu^{5a} | n \rangle = \langle n' | J_\mu^{5a} | n \rangle_{\text{nonpion}} - \frac{2M q_\mu f_\pi g_{nn'\pi}}{q^2 - M_\pi^2 + i0} D'^{\dagger} \tau^a D, \quad (162)$$

где введена пионная константа связи  $g_{nn'\pi}$ , а также изоспиновые дублеты  $D'$  и  $D$ .

С другой стороны, нетрудно установить наиболее общий вид левой части в выражении (162), совместимый с лоренцевой инвариантностью:

$$\begin{aligned} \langle n' | J_\mu^{5a} | n \rangle &= [(P_\mu + P'_\mu) G_A(q^2) - \\ &- (P_\mu - P'_\mu) G_S(q^2)] D'^{\dagger} \left( \frac{\tau^a}{2} \right) D, \end{aligned} \quad (163)$$

где  $P_\mu$  и  $P'_\mu$  — импульсы начального и конечного  $D$ -мезонов,  $q_\mu = P_\mu - P'_\mu$ . Тогда в лидирующем порядке по массе тяжёлого кварка сохранение аксиально-векторного тока в киральном пределе приводит к условию

$$2M(M - M') G_A - q^2 G_S = 0. \quad (164)$$

При этом из соотношения (162) видно, что в пределе  $q^2 \rightarrow 0$  можно иметь  $G_A(0) \equiv G_A \neq 0$ , если отождествить  $G_S$  с вкладом пионного полюса, т.е.

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} G_S(q^2) \rightarrow \frac{4M f_\pi g_{nn'\pi}}{q^2}. \quad (165)$$

Возникающее при этом равенство

$$\frac{1}{2} (M - M') G_A = f_\pi g_{nn'\pi} \quad (166)$$

представляет собой искомое соотношение Голдбергера–Треймана для тяжёло-лёгких мезонов. Данное соотношение означает, что с возрастанием степени возбуждения  $D$ -мезона и, соответственно, по мере увеличения степени его вырождения со своим киральным партнёром  $D'$ , связь пиона с данным мезоном убывает.

Выведем соотношения (160) и (166), используя микроскопический подход. Начнём с соотношения (160), для чего рассмотрим процесс испускания пиона адроном  $n$  (здесь в качестве адронов  $n$  и  $n'$  рассматриваются мезоны; барионы обсуждаются в разделе 5.5):  $n \rightarrow n' + \pi$ . Соответствующие диаграммы изображены на рис. 6, матричный элемент по которым записывается в виде:

$$\begin{aligned} M(n \rightarrow n' + \pi) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Sp} [\chi_n(\mathbf{k}, \mathbf{P}) S(k - P) \times \\ &\times \bar{\chi}_{n'}(\mathbf{k} - \mathbf{P}, \mathbf{P}') S(k - q) \bar{\chi}_\pi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) S(k)] + \\ &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Sp} [\chi_n(\mathbf{k}, \mathbf{P}) S(k - P) \bar{\chi}_\pi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \times \\ &\times S(k - q) \bar{\chi}_{n'}(\mathbf{k} - \mathbf{P}, \mathbf{P}') S(k)], \end{aligned} \quad (167)$$

<sup>5</sup> Строго говоря, соотношением Голдбергера–Треймана называется связь между пион-нуклонной константой связи и аксиальной константой для нуклона; вывод этого соотношения можно найти в любом учебнике по сильным взаимодействиям. Однако здесь и далее под соотношением Голдбергера–Треймана будет пониматься соотношение для пион-адронной константы связи  $g_{nn'\pi}$ .

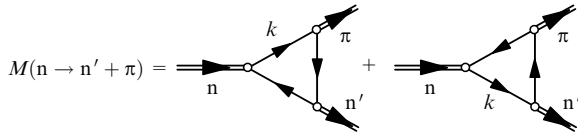


Рис. 6. Амплитуда перехода  $n \rightarrow n' + \pi$ .

где  $q = P - P'$  и каждая адронная вершина содержит амплитуду  $\chi$  ( $\bar{\chi}$  для исходящего адрона), которая удовлетворяет уравнению Бете–Солпитера (33). Таким образом, амплитуда испускания пиона даётся перекрытием трёх вершинных функций. Максимальное перекрытие достигается тогда, когда волновые функции всех трёх мезонов локализованы в одной и той же области импульсов. Заметим, однако, что волновая функция пиона (44) локализована при малых относительных импульсах кварка и антикварка и она быстро убывает с возрастанием такого относительного импульса. При этом области локализации волновых функций мезонов  $n$  и  $n'$  примерно совпадают и смещаются в область больших импульсов по мере возрастания степени их возбуждения. Следовательно, перекрытие волновых функций убывает по мере возбуждения мезона  $n$ , а вместе с ним убывает и константа связи пиона с таким мезоном.

Для того чтобы описать данный эффект количественно, выразим вершину  $\chi(\mathbf{p}, \mathbf{P})$  через матричную волновую функцию с помощью определения (44):

$$\chi(\mathbf{p}, \mathbf{P}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma_0 \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{P}) \gamma_0. \quad (168)$$

Матричные вершины для входящих и исходящих мезонов связаны при этом простым соотношением:

$$\bar{\chi}(\mathbf{p}, \mathbf{P}) = \gamma_0 \chi^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{P}) \gamma_0. \quad (169)$$

Для пиона в покое ( $\mathbf{P}_\pi \equiv \mathbf{q} \rightarrow 0$ ) явный вид матричной волновой функции  $\tilde{\phi}_\pi$  даётся формулой (59), а компоненты  $\varphi_\pi^\pm$  приведены в формуле (55). Тогда для вершины испускания пиона  $\bar{\chi}_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q} = 0) \equiv \bar{\chi}_\pi(\mathbf{p})$  нетрудно найти

$$f_\pi \bar{\chi}_\pi(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{2\pi N_c}{m_\pi}} \gamma_5 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \sin \varphi_k = \text{const} \times \gamma_5 A_p, \quad (170)$$

где использовано определение (11) для функции  $A_p$ . Определив формфактор пиона  $g_\pi(p)$  с той же константой, что и в формуле (170),

$$\bar{u}_p \bar{\chi}_\pi(\mathbf{p}) u_p = \text{const} \times g_\pi(p) (\bar{u}_p \gamma_5 u_p), \quad (171)$$

окончательно приходим к соотношению Голдбергера–Треймана в виде

$$f_\pi g_\pi(p) = A_p, \quad (172)$$

что совпадает с формулой (160), однако в данном случае это соотношение выведено строго.

Следует отметить важное отличие соотношения (172) от формулы (159), истолкованной наивно. Казалось бы, можно полагать, что в формуле (159) в правой части стоит величина, зависящая только от переданного им-

пульса в вершине, т.е. от импульса пиона  $q = 0$ . В этом случае  $m_q^{\text{eff}}$  следовало бы трактовать как константу, так что постоянной величиной, не зависящей от степени возбуждения испускающего пион адрона, была бы и пионная константа  $g_\pi$ . Однако микроскопическое рассмотрение, представленное выше, показывает, что вершина испускания пиона является функцией двух переменных: импульса пиона и импульса, протекающего по петле через вершину испускания пиона. Последняя величина играет также роль импульса кварка, с которым эффективно взаимодействует пион. Поэтому даже в пределе  $q = 0$  правая часть соотношения (172) является не константой, а убывающей функцией импульса. При этом нетрудно сделать простую оценку скорости такого убывания. Действительно, в киральном пределе  $A_p = E_p \sin \varphi_p$ , тогда как при больших импульсах  $E_p \approx p$ , а киральный угол для степенного потенциала ведёт себя в этом пределе как  $\varphi_p \propto 1/p^{4+\alpha}$  (см. формулу (25)). Таким образом,

$$g_\pi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha+3}}. \quad (173)$$

На рисунке 7 приведён результат численного расчёта отношения  $g_\pi(p)/g_\pi(0)$ , выполненного для осцилляторного потенциала ( $\alpha = 2$ ), явно демонстрирующий эффект убывания пионной константы связи с возрастанием импульса кварка.

В заключение этого раздела приведём микроскопический вывод соотношения Голдбергера–Треймана (166) для испускания пиона тяжёло-лёгким мезоном [92].

Прежде всего заметим, что в вычислениях удобно использовать не нерелятивистскую нормировку (57) волновых функций пиона (55), а релятивистскую, для чего введём волновые функции

$$X_p = \frac{\sqrt{N_c}}{f_\pi} (\sin \varphi_p + M_\pi \Delta_p), \quad Y_p = \frac{\sqrt{N_c}}{f_\pi} (\sin \varphi_p - M_\pi \Delta_p). \quad (174)$$

Тогда можно найти, что

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (X_p^2 - Y_p^2) = 2M_\pi, \quad (175)$$

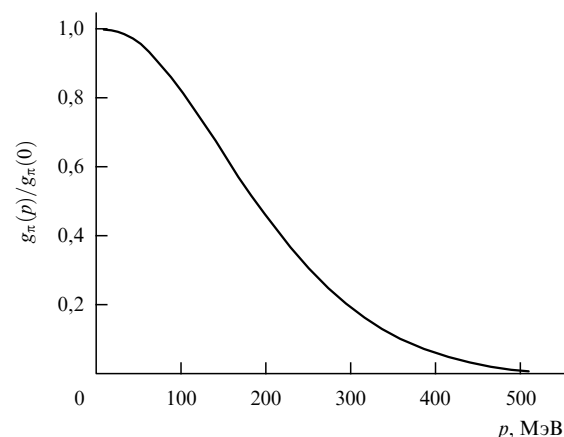


Рис. 7. Отношение  $g_\pi(p)/g_\pi(0)$  как функция импульса для осцилляторного потенциала. Для определённости параметр  $K_0$  зафиксирован, как в формуле (143).

а пионное поле с проекцией изоспина  $a$  в системе покоя может быть представлено в виде

$$|\pi^a\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{\alpha=1}^{N_c} \sum_{s_1, s_2=\uparrow, \downarrow} (\sigma_2)_{s_1 s_2} \sum_{i_1, i_2=\pm 1/2} \left(\frac{\tau^a}{2}\right)^{i_1 i_2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \times \\ \times [b_{zs_1 i_1}^\dagger(\mathbf{p}) d_{s_2 i_2}^{\alpha\dagger}(-\mathbf{p}) X_p + d_{s_2 i_2}^\alpha(-\mathbf{p}) b_{zs_1 i_1}(\mathbf{p}) Y_p] |0\rangle, \quad (176)$$

где  $|0\rangle$  — БКШ-вакуум.

Волновые функции псевдоскалярного и скалярного тяжёло-лёгких мезонов, удовлетворяющие уравнениям (113) и (139), удобно записать в виде

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 \phi_p, \quad \psi'(\mathbf{p}) = \sigma \hat{\mathbf{p}} \psi(\mathbf{p}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma \hat{\mathbf{p}} \sigma_2 \phi'_p \quad (177)$$

и нормировать их релятивистскими условиями

$$\text{Tr} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\psi(\mathbf{p})|^2 = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi_p^2 = 2M, \\ \text{Tr} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\psi'(\mathbf{p})|^2 = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi_p'^2 = 2M', \quad (178)$$

где след берётся по спинорным индексам. Кроме того, в приведённых выше условиях нормировки можно положить  $M = M'$ .

Константа взаимодействия с пионом  $g_{nn'\pi}$  определяется соотношением

$$\langle \bar{D}' \pi^a | V | \bar{D} \rangle = 2M i g_{nn'\pi} (D'^\dagger \tau^a D) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{P}' + \mathbf{q} - \mathbf{P}), \quad (179)$$

где  $V$  — взаимодействие, отвечающее за испускание пиона. Задача теперь состоит в вычислении матричного элемента в левой части (179) в рамках микроскопической модели НИЛ.

На рисунке 8 изображены четыре диаграммы, дающие вклад в матричный элемент  $\langle \bar{D}' \pi | V | \bar{D} \rangle$ , для которого можно таким образом записать:

$$\langle \bar{D}' \pi^a | V | \bar{D} \rangle = \\ = 2M [A_X^a + B_Y^a + C_X^a + D_Y^a] (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{P}' + \mathbf{q} - \mathbf{P}), \quad (180)$$

причём вклады  $A_X^a$  и  $B_Y^a$  взаимно уничтожаются, тогда как амплитуды  $C_X^a$  и  $D_Y^a$  имеют вид [92]

$$C_X^a = \frac{(D' \tau^a D)}{4M \sqrt{N_c}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi'_p V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \times \\ \times X_k \phi_k [S_p C_k - \hat{\mathbf{p}} \mathbf{k} C_p S_k], \\ D_Y^a = \frac{(D' \tau^a D)}{4M \sqrt{N_c}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi'_p V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \times \\ \times Y_p \phi_k [S_p C_k - \hat{\mathbf{p}} \mathbf{k} C_p S_k], \quad (181)$$

где величины  $C_p$  и  $S_p$  определены в формуле (40), а их произведения возникают из вершин (отмеченных на диаграммах тёмными кружками), даваемых различными произведениями одетых биспиноров (6).

Например, в амплитуде  $A_X^a$  (см. рис. 8) возникает комбинация

$$u^\dagger(\mathbf{p}) u(\mathbf{k}) = C_p C_k + (\sigma \hat{\mathbf{p}})(\sigma \hat{\mathbf{k}}) S_p S_k. \quad (182)$$

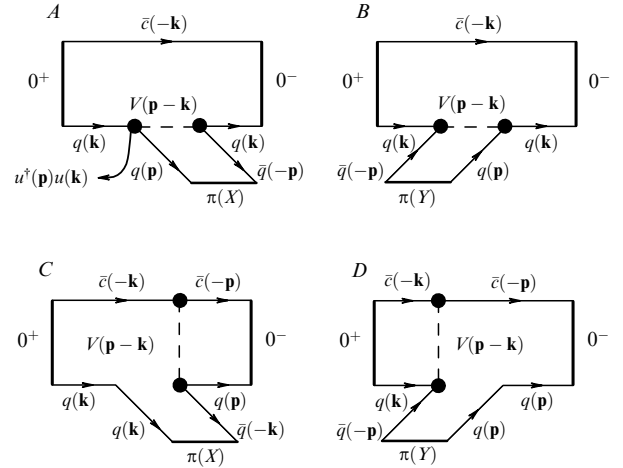


Рис. 8. Диаграммы, дающие вклад в матричный элемент  $\langle \bar{D}' \pi | V | \bar{D} \rangle$ .

Рассматривая соотношения (179)–(181) вместе, а также используя явный вид компонент волновых функций пиона (174), нетрудно для константы  $g_{nn'\pi}$  в лидирующем по  $M_\pi$  порядке [92] найти

$$f_\pi g_{nn'\pi} = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi'_p V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \times \\ \times \phi_k (\sin \varphi_p + \sin \varphi_k) [S_p C_k - \hat{\mathbf{p}} \mathbf{k} C_p S_k]. \quad (183)$$

Непионный вклад в недиагональный аксиальный заряд  $G_A$  может быть вычислен с помощью явного выражения для временной компоненты аксиально-векторного тока. В результате этот вклад принимает вид [92]

$$G_A = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \phi'_k \phi_k \cos \varphi_k. \quad (184)$$

Домножим уравнение (113) для волновой функции  $\psi(\mathbf{p})$  на  $\psi'(\mathbf{p}) \cos \varphi_p$ , вычислим след по спинорным индексам и проинтегрируем обе части полученного уравнения по импульсу,  $d^3 p / (2\pi)^3$ . Аналогично поступим с уравнением (139) для волновой функции  $\psi'(\mathbf{p})$ , однако домножим его на  $\psi(\mathbf{p}) \cos \varphi_p$ . Вычтя почленно из первого полученного уравнения второе, придём к соотношению

$$\frac{1}{2} (E - E') G_A = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi'_p V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \times \\ \times \phi_k [\cos \varphi_p (C_p C_k + \hat{\mathbf{p}} \mathbf{k} S_p S_k) - \\ - \cos \varphi_k (\hat{\mathbf{p}} \mathbf{k} C_p C_k + S_p S_k)], \quad (185)$$

правая часть которого после простых преобразований тригонометрических функций в точности сводится к правой части соотношения (183). Следовательно, приравнявая левые части соотношений (183) и (185), а также переходя от энергий  $E$  и  $E'$  к соответствующим массам (т.е. добавляя массу тяжёлого антикварка), приходим к соотношению Голдбергера–Треймана (166).

Сделаем два заключительных замечания. Во-первых, как нетрудно увидеть, роль компоненты волновой функ-

ции пиона  $Y$  ( $\varphi_\pi^-$ ) в выводе соотношения (166) столь же велика, как и роль компоненты  $X$  ( $\varphi_\pi^+$ ). Это обстоятельство лишний раз подчёркивает голдстоуновскую природу кирального пиона, описание которой невозможно в рамках наивных (конституентных) кварковых моделей.

Во-вторых, из формулы (184), а также из свойств кирального угла и нормировочного условия (177) следует, что аксиальный заряд  $G_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , так что, как и утверждалось выше, для высоковозбуждённых мезонов имеем убывающие константы связи пиона по закону

$$g_{nn'\pi} = \frac{G_A \Delta M_\pm}{2f_\pi} \propto \Delta M_\pm \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (186)$$

и, соответственно, отщепление голдстоуновского бозона от спектра возбуждённых тяжёло-лёгких кваркониев.

### 5.5. Эффективное восстановление киральной симметрии в спектре возбуждённых барионов

В разделах 5.3, 5.4 был подробно изучен вопрос об эффективном восстановлении киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых адронов и связанном с ним явлении отщепления кирального пиона (голдстоуновского бозона) от спектра высоковозбуждённых мезонов. Аналогичная ситуация имеет место и в спектре возбуждённых барионов. Обратимся сначала к общим симметричным соображениям.

Рассмотрим киральный дублет  $B$ , составленный из эффективных барионных полей с противоположными чётностями  $B_+$  и  $B_-$  [54],

$$B = \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix}. \quad (187)$$

Смешивание состояний  $B_+$  и  $B_-$  осуществляется аксиальным преобразованием

$$B \rightarrow \exp\left(i \frac{\theta_A \tau^a}{2} \sigma_1\right) B, \quad (188)$$

где  $\sigma_1$  — матрица Паули, действующая в пространстве дублета  $B$ . При этом нетрудно установить вид лагранжиана, инвариантного относительно такого преобразования (альтернативные формы данного лагранжиана можно найти в работах [93, 94]):

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{B}\gamma^\mu \partial_\mu B - m_0 \bar{B}B = i\bar{B}_+\gamma^\mu \partial_\mu B_+ + i\bar{B}_-\gamma^\mu \partial_\mu B_- - m_0 \bar{B}_+ B_+ - m_0 \bar{B}_- B_- . \quad (189)$$

Важным свойством выписанного лагранжиана является наличие ненулевой киральной инвариантной массы  $m_0$ , одинаковой для полей противоположной чётности, т.е. киральная симметрия реализуется по сценарию Вигнера – Вейля, но с массивными фермионами. Возникновение киральных дублетов в таком сценарии становится неизбежным.

Таким образом, наряду со "стандартным" сценарием реализации киральной симметрии в спектре барионов, при котором фермионная масса образуется за счёт эффекта спонтанного нарушения киральной симметрии (реализация Намбу – Голдстоуна), возможна её альтернативная реализация, совместимая с возникновением киральных дублетов. При этом нетрудно построить нётеровский ток, отвечающий симметрии (188) лагран-

жиана (189), в виде

$$j_{5\mu}^a = \bar{B}_+\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} B_- + \bar{B}_-\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} B_+, \quad (190)$$

который не содержит диагональных членов вида  $\bar{B}_+\gamma_\mu \gamma_5 (\tau^a/2) B_+$  или  $\bar{B}_-\gamma_\mu \gamma_5 (\tau^a/2) B_-$ . Следовательно, диагональные аксиальные заряды барионов  $B_+$  и  $B_-$ , образующих киральный дублет, равны нулю, тогда как недиагональные аксиальные заряды, связанные с переходами между состояниями с противоположной чётностью, напротив, равны единице [54],

$$G_A^+ = G_A^- = 0, \quad G_A^{+-} = G_A^{-+} = 1. \quad (191)$$

Заметим, что аксиальный заряд обычного дираковского фермиона равен единице.

Нетрудно проследить последствия, к которым приводит свойство (191). Во-первых, в силу соотношения Голдбергера – Треймана, вместе с диагональным аксиальным зарядом барионов должны обращаться в нуль и соответствующие диагональные константы связи барионов с пионом, т.е.  $g_{\pi B_\pm B_\pm} = G_A^\pm m_\pm / f_\pi = 0$ .

Выведем формулу для недиагональных констант  $g_{\pi B_+ B_-}$ . Для этого рассмотрим матричный элемент аксиально-векторного тока между двумя произвольными барионными состояниями с противоположными чётностями,  $1/2^+$  и  $1/2^-$ :

$$\langle B_-(p_f) | j_{5\mu}^a | B_+(p_i) \rangle = \bar{u}(p_f) (\gamma_\mu H_1(q^2) + \sigma_{\mu\nu} q^\nu H_2(q^2) + q_\mu H_3(q^2)) \frac{\tau^a}{2} u(p_i), \quad (192)$$

где  $p_i$  и  $p_f$  — импульсы начального и конечного состояний ( $q = p_f - p_i$ ),  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  — формфакторы. Тогда для матричного элемента дивергенции аксиально-векторного тока находим:

$$\langle B_-(p_f) | \partial^\mu j_{5\mu}^a | B_+(p_i) \rangle = i[(m_+ - m_-) H_1(q^2) + q^2 H_3(q^2)] \bar{u}(p_f) \frac{\tau^a}{2} u(p_i). \quad (193)$$

Поскольку в силу закона сохранения аксиально-векторного тока в киральном пределе левая часть равенства (193) обращается в нуль, в пределе  $q \rightarrow 0$  должно выполняться следующее соотношение для формфакторов:

$$(m_+ - m_-) H_1(0) + \lim_{q \rightarrow 0} q^2 H_3(q^2) = 0, \quad (194)$$

в котором нетрудно узнать соотношение Голдбергера – Треймана в виде

$$g_{\pi B_+ B_-} = \frac{G_A^{+-}(m_+ - m_-)}{2f_\pi}, \quad G_A^{+-} = H_1(0). \quad (195)$$

Действительно, частичное сохранение аксиально-векторного тока требует, чтобы член, пропорциональный  $H_1$ , компенсировался членом, пропорциональным  $H_3$ , что подразумевает наличие в последнем полюса при  $q^2 \rightarrow 0$ , который естественным образом отождествляется с полюсом голдстоуновского бозона. Таким образом, если состояния  $B^\pm$  вырождены по массе, т.е. являются членами кирального дублета, то  $g_{\pi B_+ B_-} = 0$ , причём данное требование является непосредственным след-



ствием закона сохранения аксиально-векторного тока и не зависит от конкретного механизма вырождения состояний  $B^\pm$ .

Как и для мезонов, в случае барионов общие симметричные аргументы, приведённые выше, имеют конкретную микроскопическую реализацию в обобщённой модели НИЛ. Однако прежде необходимо сделать замечание относительно свойств барионных состояний в этой модели. Хотя модель рассматривается в формальном пределе  $N_c \rightarrow \infty$ , качественно (а во многих случаях также с высокой точностью количественно) свойства барионов тем не менее могут описываться подстановкой  $N_c = 3$ , так что волновая функция бариона получается действием на кирально нарушенный БКШ-вакуум  $|0\rangle$  трёх операторов рождения одетых кварков, свёрнутых с соответствующей волновой функцией вида:

$$\Psi_B = \Psi_{\text{colour}} \otimes \Psi_{\text{flavour}} \otimes \Psi_{\text{spin}} \otimes \Psi_{\text{space}},$$

$$\Psi_{\text{colour}} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} q^\alpha q^\beta q^\gamma, \quad (196)$$

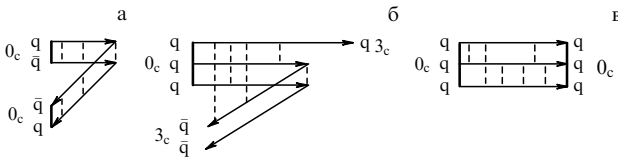
где  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  — абсолютно антисимметричный тензор Леви–Чивиты. При этом никаких новых эффектов барионная физика в модель не привносит, более того, уравнения Дайсона для барионов оказываются существенно проще, чем для мезонов, поскольку в барионном случае амплитуды (в отличие от таковых для мезонного сектора), отвечающие положительной энергии кварков, не могут "зацепляться" за амплитуды, отвечающие их отрицательной энергии, — подобные переходы приводили бы к возникновению состояний с открытым цветом (рис. 9).

Поскольку цветовая волновая функция бариона по построению является антисимметричной по перестановке кварков, достаточно рассмотреть лишь симметричные комбинации  $\Psi_{\text{flavour}} \otimes \Psi_{\text{spin}} \otimes \Psi_{\text{space}}$ , так что в общем случае пространственная волновая функция  $\Psi_{\text{space}}^{\mathcal{Y}}(\mathbf{p}, \lambda)$  (здесь  $\mathbf{p}$  и  $\lambda$  — стандартные координаты Якоби) должна содержать все возможные комбинации перестановок  $\mathcal{Y}$ : антисимметричную ( $A$ ), симметричную ( $S$ ), а также смешанного типа  $F(D_F)$  или  $D(D_D)$ . В данный момент рассуждения носят общий характер, однако ниже при вычислении аксиальных зарядов барионов будет приведён явный вид некоторых их волновых функций.

Рассмотрим оператор аксиального заряда

$$Q_5^a = \int d^3x \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_5 \left( \frac{\tau^a}{2} \right)^{ij} \psi_j \quad (197)$$

и вычислим его для "одетых" кварковых состояний с помощью формул (5) и (6). В результате получим



**Рис. 9.** (а) Характерный разрешённый по цвету переход (синглет–синглет  $0_c \rightarrow 0_c$ ) между кварк-антикварковой амплитудой, отвечающей положительной энергии  $q\bar{q}$ -пары, и амплитудой, отвечающей её отрицательной энергии. (б) Аналогичный переход в барионе запрещён, поскольку приводит к возникновению открытого цвета ( $3_c$ ). (в) Характерная разрешённая по цвету диаграмма, дающая вклад в уравнение Дайсона для бариона в лестничном приближении.

выражение [95]

$$Q_5^a = \sum_{i,j} \sum_{\alpha=1}^{N_c} \sum_{s,s'=\uparrow,\downarrow} \left( \frac{\tau^a}{2} \right)^{ij} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \cos \varphi_p (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}})_{ss'} \times \right. \\ \left. \times (b_{i\alpha s}^\dagger(\mathbf{p}) b_{j\alpha s'}^\dagger(-\mathbf{p}) + d_{j\alpha s'}^\dagger(-\mathbf{p}) d_{i\alpha s}(\mathbf{p})) + \right. \\ \left. + \sin \varphi_p (i\sigma_2)_{ss'} (b_{i\alpha s}^\dagger(\mathbf{p}) d_{j\alpha s'}^\dagger(-\mathbf{p}) + d_{i\alpha s}(\mathbf{p}) b_{j\alpha s'}^\dagger(-\mathbf{p})) \right], \quad (198)$$

в котором два вклада в квадратных скобках имеют разный физический смысл. Первый, диагональный по операторам рождения и аннигиляции кварков (неаномальный), член, содержащий оператор  $\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}$ , отвечает за перевод барионного состояния с данной чётностью в состояние с противоположной чётностью — в кирального партнёра. При этом второй член в квадратных скобках в (198) имеет вид боголюбовского аномального члена. Поскольку аксиальный заряд является компонентой сохраняющегося нётровского тока и, следовательно, коммутирует с гамильтонианом теории,  $[Q_5^a, H] = 0$ , создаваемое им состояние  $Q_5^a |0\rangle = |\pi^a\rangle$  вырождено по энергии с вакуумом и является голдстоуновским бозоном, связанным со спонтанным нарушением киральной симметрии, т.е. с киральным пионом. Действительно, величина  $\sin \varphi_p (i\sigma_2)$  представляет собой волновую функцию кирального пиона в киральном пределе в системе покоя (см. формулы (55) и (71)).

Рассмотрим диагональную часть оператора аксиального заряда бариона, определённого в виде суммы операторов (198) по всем кваркам в барионе:

$$Q_5 \equiv Q_5^3 = \sum_{n=1}^3 Q_{5n}^3. \quad (199)$$

Из приведённого выше рассуждения очевидно, что действие такого оператора на барионное состояние может быть схематично представлено в виде

$$Q_5 |B\rangle = |B'\rangle + |B\pi\rangle, \quad (200)$$

где первый член в правой части отвечает киральному партнёру состояния  $|B\rangle$ , а второй член содержит нейтральный пион. Относительный вес указанных двух членов определяется величиной кирального угла  $\varphi_p$ . Так, в случае максимального нарушения киральной симметрии  $\varphi_p = \pi/2$ , поэтому в правой части выражения (200) выживает только второй член. В обратном пределе ненарушенной киральной симметрии  $\varphi_p = 0$ , так что выживает только первый член. В этом случае нетрудно получить следующие очевидные свойства оператора  $Q_5$ :

$$Q_5^\dagger = Q_5, \quad \langle B_2 | Q_5^2 | B_1 \rangle \propto \langle B_2 | B_1 \rangle = \delta_{B_1 B_2}. \quad (201)$$

Следовательно,

$$Q_5 |B^\pm\rangle = G_A^{\pm\mp} |B^\mp\rangle, \quad (202)$$

где через  $B^\pm$  обозначены барионы с противоположной чётностью, а  $G_A^{\pm\mp}$  — аксиальный заряд. Таким образом, в пределе точного восстановления киральной симметрии в спектре барионов имеют место следующие соотношения между аксиальными зарядами:

$$G_A^{+-} = G_A^{-+} = 1, \quad G_A^{++} \equiv G_A^{+-} = 0, \quad G_A^{--} \equiv G_A^{-+} = 0, \quad (203)$$

которые достигаются асимптотически с возрастанием степени возбуждения бариона. Поскольку, как упоминалось выше, оператор аксиального заряда коммутирует с гамильтонианом, асимптотически состояния  $|B^+\rangle$  и  $|B^-\rangle$  должны становиться вырожденными по массе.

### 5.6. Аксиальные заряды барионов в нерелятивистской кварковой модели

В разделе 5.5 эффективное восстановление киральной симметрии в спектре возбуждённых барионов детально описано в рамках микроскопического подхода обобщённой модели НИЛ. В частности, сделаны предсказания о поведении диагональных и недиагональных аксиальных зарядов барионов. Для сравнения вычислим также аксиальные заряды некоторых барионов в другом подходе. В частности, весьма популярным альтернативным подходом к описанию барионов является известная нерелятивистская кварковая модель  $SU(6)$ , включающая в себя группу изоспина  $SU(3)$  и группу спина  $SU(2)$ , которая весьма успешна при описании свойств основных состояний барионов [96, 97]. Все невозбуждённые барионные состояния с квантовыми числами  $1/2^+$  и  $3/2^+$ , образующие октет и декуплет изоспиновой группы  $SU(3)$ , входят в 56-плет группы  $SU(6)$ . При этом, например, магнитные моменты барионов (точнее, их отношения) воспроизводятся в модели  $SU(6)$  с точностью порядка 10–15%. Одно из наиболее известных предсказаний модели — аксиальный заряд нуклона  $G_A = 5/3$  — также с хорошей точностью совпадает с экспериментальным значением  $G_A = 1,26$ , хотя и несколько превышает его, что вызвано пренебрежением релятивистскими эффектами и пионным облаком, а также нарушением точной  $SU(6)$ -симметрии, например, вследствие разных масс кварков и т.д.

Можно показать, что в пределе большого числа цветов основные состояния в спектре барионов действительно подчиняются алгебре  $SU(6)$  [98, 99], что является следствием спонтанного нарушения киральной симметрии и, как результат, возникновения достаточно больших конститuentных масс лёгких кварков. При этом для предсказаний масс возбуждённых барионов требуется дополнить группу  $SU(6)$  динамическими предположениями о структуре радиальных и угловых возбуждений кварков в барионах. Так, в наиболее простом случае осцилляторного удерживающего потенциала энергия кварков полностью фиксируется главным квантовым числом  $N$ , причём массы возбуждённых состояний нуклона и  $\Delta$  с отрицательной чётностью хорошо согласуются с предсказаниями такой  $SU(6) \times O(3)$ -классификации для  $N = 1$ . Однако для возбуждённых состояний с положительной чётностью данная схема классификации состояний сталкивается с рядом трудностей, таких как их слишком большое отщепление от состояний с отрицательной чётностью, а в случае резонанса Ропера и вовсе с неправильным порядком следования уровней с противоположной чётностью.

В принципе в литературе известны успешные попытки разрешения указанных проблем посредством определённого нарушения симметрии [100], однако в любом случае в рамках данной модели систематическое вырождение возбуждённых барионов с противоположной чётностью является абсолютно неестественным поведением спектра, которое не может быть объяснено. В частности, в схеме  $SU(6) \times O(3)$  нет никаких оснований для того,

чтобы аксиальные заряды барионов вели себя в соответствии с формулой (203). При этом, поскольку аксиальные заряды барионов могут вычисляться на решётке (см., например, работы [97, 101–104]), представляется естественным сравнивать результаты решёточных вычислений с предсказаниями кварковой модели  $SU(6) \times O(3)$ , в которой восстановление киральной симметрии невозможно. Соответственно, отклонения решёточных данных от предсказаний кварковой модели могут рассматриваться в качестве свидетельства восстановления киральной симметрии в спектре возбуждённых барионов.

Для вычисления аксиальных зарядов барионов в рамках нерелятивистской кварковой модели необходимо вычислять средние по волновым функциям барионов вида

$$G_{\text{fi}}^A = \left\langle \Psi_{\text{f}}(1, 2, 3) \left| \sum_{n=1}^3 Q_n^A \right| \Psi_{\text{i}}(1, 2, 3) \right\rangle, \quad (204)$$

где  $Q_n^A$  — оператор аксиального заряда  $n$ -го кварка, который в лидирующем приближении даётся формулой Гамова–Теллера  $\sigma_3 \tau_3$  (здесь  $\sigma$  и  $\tau$  — соответственно операторы спина и изоспина дираковского фермиона). К этому нерелятивистскому оператору возможно добавление релятивистских поправок (которые здесь, однако, рассматриваться не будут) вида

$$\frac{1}{2M} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_f) \tau^a \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}), \quad (205)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ . Кроме того, оператор аксиального заряда нерелятивистского кварка в лидирующем порядке также содержит зависимость от пространственной координаты в виде экспоненты  $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})$ . Однако вычисление как диагонального, так и недиагонального аксиальных зарядов барионов отвечает пределу  $\mathbf{q} \rightarrow 0$  [105]. Таким образом, в лидирующем порядке оператор аксиального заряда не содержит зависимости от пространственных координат кварков и, следовательно, матричный элемент (204) отличен от нуля лишь в случае совпадающих волновых функций барионов, т.е. не равны нулю лишь диагональные аксиальные заряды, тогда как недиагональные заряды обращаются в нуль. Данное предсказание схемы  $SU(6) \times O(3)$  находится в сильном противоречии с предсказанием модели восстановления киральной симметрии в спектре, в том числе с её микроскопической реализацией в рамках обобщённой модели НИЛ (см. формулу (203)).

Для вычисления диагональных матричных элементов (204) должны быть известны волновые функции барионов в схеме  $SU(6) \times O(3)$ . Эти функции приведены в литературе (табл. 3). Каждая волновая функция характеризуется несколькими квантовыми числами. Во-первых, это мультиплет спино-ароматовой группы  $SU(6)$ , которому принадлежит данное состояние и который задаётся символом Юнга  $[f]_{\text{FS}}$ . В рамках каждого такого мультиплета волновая функция бариона обладает определённой симметрией в ароматовом пространстве (символ  $[f]_{\text{F}}$  с  $f = 3, 21, 111$ ), а также определённой спиновой симметрией (символ  $[f]_{\text{S}}$  с  $f = 3, 21$  для  $S = 3/2$  и  $S = 1/2$ ). Наконец, пространственная часть волновой функции задаётся угловым моментом  $L$  и симметрией по отношению к перестановкам  $[f]_{\text{X}}$ , которая фиксируется принципом Паули в виде  $[f]_{\text{X}} = [f]_{\text{FS}}$ . При использовании конкретного базиса могут возникать дополнительные квантовые числа, такие как главное квантовое число  $N$  в

**Таблица 3.** Волновые функции некоторых нуклонов, лежащих в области энергий до 2 ГэВ, в схеме SU(6) (см., например, [100])

$N(\lambda\mu) L[f]_X[f]_{FS}[f]_F[f]_S$	$J^P$ , нуклон
$0(00) 0[3]_X[3]_{FS}[21]_F[21]_S$	$\frac{1}{2}^+, N$
$2(20) 0[3]_X[3]_{FS}[21]_F[21]_S$	$\frac{1}{2}^+, N(1440)$
$1(10) 1[21]_X[21]_{FS}[21]_F[21]_S$	$\frac{1}{2}^-, N(1535) \frac{3}{2}^-, N(1520)$
$1(10) 1[21]_X[21]_{FS}[21]_F[3]_S$	$\frac{1}{2}^-, N(1650) \frac{3}{2}^-, N(1700) \frac{5}{2}^-, N(1675)$
$2(20) 2[3]_X[3]_{FS}[21]_F[21]_S$	$\frac{3}{2}^+, N(1720) \frac{5}{2}^+, N(1680)$
$2(20) 0[21]_X[21]_{FS}[21]_F[21]_S$	$\frac{1}{2}^+, N(1710)$

**Таблица 4.** Диагональные аксиальные заряды барионов, вычисленные в рамках кварковой модели SU(6)

Барион	$N(1440)$	$N(1710)$	$N(1535)$	$N(1650)$
$J^P$	$1/2^+$	$1/2^+$	$1/2^-$	$1/2^-$
$G_A$	$5/3$	$1/3$	$-1/9$	$5/9$

осцилляторном базисе и пространственная симметрия угловой волновой функции ( $\lambda\mu$ ).

Диагональные аксиальные заряды некоторых барионов, вычисленные с помощью волновых функций, приведённых в табл. 3, даны в табл. 4 (подробности вычислений можно найти в работе [105]). Найденные заряды позволяют сравнить предсказания модели SU(6) с предсказаниями модели восстановления киральной симметрии. Так, состояния  $N(1440)$  и  $N(1535)$  образуют киральный дублет, поэтому в соответствии с моделью кирального восстановления диагональные аксиальные заряды для них должны быть достаточно маленькими. Из таблицы 4 видно, что модель SU(6) также предсказывает маленький аксиальный заряд для  $N(1535)$ , однако для состояния  $N(1440)$  предсказание модели SU(6) весьма велико, больше единицы. Аналогичная ситуация имеет место и для другой пары киральных партнёров —  $N(1710)$  и  $N(1650)$ : модель SU(6) предсказывает довольно большие значения их аксиальных зарядов. Другие примеры модельных теоретических вычислений аксиальных зарядов возбуждённых барионов можно найти, например, в работах [106–110].

### 6. Заключение

В данном обзоре рассмотрены некоторые аспекты явления нарушения киральной симметрии, а также свойства адронов в рамках обобщённой модели НИЛ. Важной отличительной чертой данной модели является микроскопический подход к явлению спонтанного нарушения киральной симметрии в вакууме, а также наличие конфайнмента, что позволяет изучать в рамках модели не только широкий круг вопросов, связанных с низколежащими состояниями в спектре адронов, но и свойства высоковозбуждённых адронов. В частности, на микроскопическом уровне описано явление эффективного восстановления киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых мезонов и барионов.

Основные проблемы, затронутые в обзоре, включают в себя следующие основные пункты.

- Представлено явное микроскопическое описание явления спонтанного нарушения киральной инвариант-

ности в вакууме в терминах одетых кварковых полей и волновой функции кирально нарушенного вакуума, имеющей вид когерентноподобного состояния, образованного сконденсированными кварк-антикварковыми  ${}^3P_0$ -парами.

- Проведено обобщение бозонного преобразования Боголюбова для случая составных мезонных операторов и явно доказана эквивалентность такого метода подходу, основанному на уравнении Бете–Солпитера для мезонных амплитуд.

- На микроскопическом уровне исследован вопрос о связи лоренцевой природы конфайнмента со спонтанным нарушением киральной симметрии в вакууме КХД. Прослежена связь спонтанного нарушения киральной инвариантности с динамическим возникновением эффективного скалярного межкваркового потенциала в кварконии.

- Из наиболее общих размерных соображений установлено существование двух режимов решения щелевого уравнения, из которых лишь один реализуется в киральном пределе. Для данного режима продемонстрирован коллапс кирального угла в классическом пределе, т.е. непосредственно продемонстрирована квантовая природа явления спонтанного нарушения киральной симметрии в вакууме.

- Предложено детальное микроскопическое описание явления эффективного восстановления киральной симметрии в спектре возбуждённых адронов в рамках обобщённой модели НИЛ. В частности, проведён качественный и количественный анализ щелевого уравнения данной модели для произвольного степенного потенциала и показано существование кирально-несимметричных решений для всех таких потенциалов.

- Прослежена связь межкваркового потенциала в кварконии, отвечающего за расщепление состояний с противоположной чётностью, с киральным углом, т.е. с величиной, количественно описывающей явление нарушения киральной инвариантности. Показано быстрое убывание такого потенциала с возрастанием степени возбуждения мезона.

- Предложен микроскопический вывод соотношения Голдбергера–Треймана для константы связи пиона с тяжёло-лёгким кварконием и явно продемонстрировано отщепление пиона от возбуждённых адронов, образующих приближённые киральные мультиплеты.

- Дан микроскопический вывод поведения диагональных и недиагональных аксиальных зарядов барионов, образующих приближённые киральные мультиплеты, и проведено явное противопоставление полученных результатов предсказаниям кварковой модели  $SU(6) \times O(3)$ .

В завершение отметим ряд вопросов и проблем, стоящих перед феноменологией сильных взаимодействий, в разрешении которых описанная в обзоре обобщённая модель НИЛ могла бы оказать существенную помощь. Прежде всего заметим, что результаты изучения высоковозбуждённых мезонов, состоящих из лёгких кварков, демонстрируют более высокую степень вырождения спектра, чем восстановленная киральная симметрия. Так, наклоны траекторий Редже по полному спину  $J$  и по радиальному квантовому числу  $n$  с хорошей точностью совпадают (см., например, недавнюю работу [111]), что согласуется с идеей существования главного квантового числа вида  $n + J$  [55]. Кроме того, в ряде

недавних работ высказано предположение о том, что в области высоких возбуждений адроны образуют мультиплеты группы  $SU(4)$ , включающей в себя киральную симметрию как подгруппу [12, 112]. Подтверждение данной гипотезы может быть найдено на решётках с помощью интересного приёма, предложенного в работах [113, 114]. Вычисления свойств адронов было предложено проводить не на полных полевых конфигурациях, а после извлечения из них околонулевых мод оператора Дирака. Поскольку киральный конденсат в вакууме КХД определяется плотностью таких околонулевых мод [115], их удаление должно приводить к восстановлению киральной симметрии и проявлению этого восстановления в результатах расчётов, выполненных с использованием таких специально подготовленных решёточных конфигураций. Действительно, результаты демонстрируют возникновение довольно высокой степени симметрии, совместимой с  $SU(4)$  [113, 114]. Построение динамической модели струны КХД, обладающей указанным свойством, является важной стоящей перед теоретической физикой высоких энергий задачей, при решении которой можно было бы использовать также опыт микроскопических вычислений в рамках обобщённой модели НИЛ.

Работа Ю.С.К. и А.В.Н. поддержана Программой повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (контракт 02.а03.21.0005 от 27.08.2013), а также Российским фондом фундаментальных исследований (грант 17-02-00485).

## Список литературы

- Eichten E et al. *Phys. Rev. D* **17** 3090 (1978)
- Godfrey S, Isgur N *Phys. Rev. D* **32** 189 (1985)
- Nambu Y, Jona-Lasinio G *Phys. Rev.* **124** 246 (1961)
- Glozman L Ya *Phys. Lett. B* **475** 329 (2000)
- Cohen T D, Glozman L Ya *Phys. Rev. D* **65** 016006 (2001)
- Cohen T D, Glozman L Ya *Int. J. Mod. Phys. A* **17** 1327 (2002)
- Glozman L Ya *Phys. Lett. B* **539** 257 (2002)
- Glozman L Ya *Phys. Lett. B* **587** 69 (2004)
- Glozman L Ya *Phys. Lett. B* **541** 115 (2002)
- Denissenya M, Glozman L Ya, Lang C B *Phys. Rev. D* **89** 077502 (2014)
- Banks T, Casher A *Nucl. Phys. B* **169** 103 (1980)
- Glozman L Ya *Eur. Phys. J. A* **51** 27 (2015)
- Simonov Yu A *Int. J. Mod. Phys. A* **31** 1650104 (2016)
- Di Giacomo A et al. *Phys. Rep.* **372** 319 (2002)
- 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **75** 461 (1974)
- Bars I, Green M B *Phys. Rev. D* **17** 537 (1978)
- Donoghue J F, Golowich E, Holstein B R *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics, and Cosmology, Vol. 2) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
- Witten E *Nucl. Phys. B* **145** 110 (1978)
- Coleman S R *Commun. Math. Phys.* **31** 259 (1973)
- Калашникова Ю С, Нефедьев А В *УФН* **172** 377 (2002); Kalashnikova Yu S, Nefediev A V *Phys. Usp.* **45** 347 (2002)
- Amer A et al. *Phys. Rev. Lett.* **50** 87 (1983)
- Le Yaouanc A et al. *Phys. Lett. B* **134** 249 (1984)
- Le Yaouanc A et al. *Phys. Rev. D* **29** 1233 (1984)
- Le Yaouanc A et al. *Phys. Rev. D* **31** 137 (1985)
- Bicudo P J de A, Ribeiro J E F T *Phys. Rev. D* **42** 1611 (1990)
- Bicudo P J de A, Ribeiro J E F T *Phys. Rev. D* **42** 1625 (1990)
- Bicudo P J de A, Ribeiro J E F T *Phys. Rev. D* **42** 1635 (1990)
- Bicudo P J de A *Phys. Rev. Lett.* **72** 1600 (1994)
- Bicudo P J de A *Phys. Rev. C* **60** 035209 (1999)
- Bicudo P J A, Ribeiro J E F T, Nefediev A V *Phys. Rev. D* **65** 085026 (2002)
- Nefediev A V, Ribeiro J E F T *Phys. Rev. D* **67** 034028 (2003)
- Bicudo P J A, Nefediev A V *Phys. Rev. D* **68** 065021 (2003)
- Nefediev A V, Ribeiro J E F T *Phys. Rev. D* **70** 094020 (2004)
- Nefediev A V, Ribeiro J E F T *Письма в ЖЭТФ* **90** 461 (2009); *JETP Lett.* **90** 417 (2009)
- Antonov D V, Nefediev A V, Ribeiro J E F T *Письма в ЖЭТФ* **92** 803 (2010); *JETP Lett.* **92** 721 (2010)
- Bijnens J, Bruno C, de Rafael E *Nucl. Phys. B* **390** 501 (1993)
- Arbuzov B A, Volkov M K, Zaitsev I V *Int. J. Mod. Phys. A* **21** 5721 (2006)
- Волков М К, Раджабов А Е *УФН* **176** 569 (2006); Volkov M K, Radzhabov A E *Phys. Usp.* **49** 551 (2006)
- Калиновский Ю Л, Тонеев В Д, Фризен А В *УФН* **186** 387 (2016); Kalinovskiy Yu L, Toneev V D, Friesen A V *Phys. Usp.* **59** 367 (2016)
- Adler S L, Davis A C *Nucl. Phys. B* **244** 469 (1984)
- Kalinovskiy Yu L, Kaschlun L, Pervushin V N *Phys. Lett. B* **231** 288 (1989)
- Bicudo P, Ribeiro J, Rodrigues J *Phys. Rev. C* **52** 2144 (1995)
- Horvat R, Kekez D, Palle D, Klabucar D Z. *Phys. C* **68** 303 (1995)
- Llanes-Estrada F J, Cotanch S R *Phys. Rev. Lett.* **84** 1102 (2000)
- Gell-Mann M, Oakes R J, Renner B *Phys. Rev.* **175** 2195 (1968)
- Goldberger M L, Treiman S B *Phys. Rev.* **111** 354 (1958)
- Bicudo P *Phys. Rev. C* **67** 035201 (2003)
- Adler S L *Phys. Rev.* **137** B1022 (1965)
- Weinberg S *Phys. Rev. Lett.* **17** 616 (1966)
- Bicudo P et al. *Phys. Rev. D* **65** 076008 (2002)
- Gogokhia V, Kluge Gy *Phys. Rev. D* **66** 056013 (2002)
- Bicudo P J A, Nefediev A V *Phys. Lett. B* **573** 131 (2003)
- Kalashnikova Yu S, Nefediev A V, Volodin A V *ЯФ* **63** 1710 (2000); *Phys. Atom. Nucl.* **63** 1623 (2000)
- Glozman L Ya *Phys. Rep.* **444** 1 (2007)
- Glozman L Ya, Nefediev A V *Phys. Rev. D* **76** 096004 (2007)
- Peláez J R, Ríos G *Phys. Rev. Lett.* **97** 242002 (2006)
- Eichten E, Feinberg F *Phys. Rev. D* **23** 2724 (1981)
- Gromes D Z. *Phys. C* **26** 401 (1984)
- Brambilla N, Vairo A *Phys. Lett. B* **407** 167 (1997)
- Симонов Ю Ф *ЯФ* **60** 2252 (1997); Simonov Yu A *Phys. Atom. Nucl.* **60** 2069 (1997)
- Kalashnikova Yu S, Nefediev A V *Phys. Lett. B* **414** 149 (1997)
- Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **65** 094018 (2002)
- Simonov Yu A, Tjon J A *Phys. Rev. D* **62** 014501 (2000)
- Koma Y, Koma M *Nucl. Phys. B* **769** 79 (2007)
- Biernat E P et al. *Phys. Rev. D* **89** 016005 (2014)
- Balitsky I I *Nucl. Phys. B* **254** 166 (1985)
- Bali G S *Phys. Rev. D* **62** 114503 (2000)
- Shevchenko V, Simonov Yu *Phys. Rev. Lett.* **85** 1811 (2000)
- Shevchenko V I, Simonov Yu A *Int. J. Mod. Phys. A* **18** 127 (2003)
- Nefediev A V, Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **76** 074014 (2007)
- Nefediev A V *Письма в ЖЭТФ* **78** 801 (2003); *JETP Lett.* **78** 349 (2003)
- Badalian A M, Nefediev A V, Simonov Yu A *Письма в ЖЭТФ* **88** 648 (2008); *JETP Lett.* **88** 558 (2008)
- Badalian A M, Nefediev A V, Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **78** 114020 (2008)
- Bicudo P et al. *Phys. Lett. B* **442** 349 (1998)
- Kalashnikova Yu S, Nefediev A V, Ribeiro J E F T *Phys. Rev. D* **72** 034020 (2005)
- Allen T J, Olsson M G *Phys. Rev. D* **68** 054022 (2003)
- Allen T J et al. *Phys. Rev. D* **70** 054012 (2004)
- Nowak M A, Rho M, Zahed I *Acta Phys. Polon. B* **35** 2377 (2004)
- Beane S R *Phys. Rev. D* **64** 116010 (2001)
- Golterman M, Peris S *Phys. Rev. D* **67** 096001 (2003)
- Afonin S S et al. *JHEP* **2004** 039 (2004)
- Swanson E S *Phys. Lett. B* **582** 167 (2004)
- DeGrand T *Phys. Rev. D* **69** 074024 (2004)
- Shifman M, Vainshtein A *Phys. Rev. D* **77** 034002 (2008)
- Glozman L Ya *Int. J. Mod. Phys. A* **21** 475 (2006)
- Wagenbrunn R F, Glozman L Ya *Phys. Rev. D* **75** 036007 (2007)
- Jaffe R L, Pirjol D, Scardicchio A *Phys. Rev. D* **74** 057901 (2006)
- Jaffe R L, Pirjol D, Scardicchio A *Phys. Rev. Lett.* **96** 121601 (2006)
- Jaffe R L, Pirjol D, Scardicchio A *Phys. Rep.* **435** 157 (2006)
- Cohen T D, Glozman L Ya *Mod. Phys. Lett. A* **21** 1939 (2006)
- Glozman L Ya, Nefediev A V *Phys. Rev. D* **73** 074018 (2006)

92. Nefediev A V, Ribeiro J E F T, Szczepaniak A P *Phys. Rev. D* **75** 036001 (2007)
93. DeTar C E, Kunihiro T *Phys. Rev. D* **39** 2805 (1989)
94. Jido D, Oka M, Hosaka A *Prog. Theor. Phys.* **106** 873 (2001)
95. Nefediev A V, Ribeiro J E F T, Szczepaniak A P *Письма в ЖЭТФ* **87** 321 (2008); *JETP Lett.* **87** 271 (2008)
96. Gürsey F, Radicati L A *Phys. Rev. Lett.* **13** 173 (1964)
97. Kokkedee J J J, Van Hove L *Nuovo Cimento* **42** 711 (1966)
98. Gervais J-L, Sakita B *Phys. Rev. Lett.* **52** 87 (1984)
99. Dashen R F, Manohar A V *Phys. Lett. B* **315** 425 (1993)
100. Glozman L Ya, Riska D O *Phys. Rep.* **268** 263 (1996)
101. Takahashi T T, Kunihiro T *Chin. Phys. C* **33** 1233 (2009)
102. Takahashi T T, Kunihiro T *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **186** 113 (2009)
103. Erkol G, Oka M, Takahashi T T *Phys. Lett. B* **686** 36 (2010)
104. Maurer T et al., arXiv:1202.2834
105. Glozman L Ya, Nefediev A V *Nucl. Phys. A* **807** 38 (2008)
106. Choi K-S, Plessas W, Wagenbrunn R F *Phys. Rev. D* **82** 014007 (2010)
107. An C S, Riska D O *Eur. Phys. J. A* **37** 263 (2008)
108. An C S *Chin. Phys. C* **33** 1393 (2009)
109. Gallas S, Giacosa F, Rischke D H *Phys. Rev. D* **82** 014004 (2010)
110. Yuan S G, An C S, He J *Commun. Theor. Phys.* **54** 697 (2010)
111. Pang C-Q et al. *Phys. Rev. D* **92** 014012 (2015)
112. Glozman L Ya, Pak M *Phys. Rev. D* **92** 016001 (2015)
113. Glozman L Ya, Lang C B, Schröck M *Phys. Rev. D* **86** 014507 (2012)
114. Denissenya M, Glozman L Ya, Pak M *Phys. Rev. D* **91** 114512 (2015)
115. Casher A *Phys. Lett. B* **83** 395 (1979)

### Chiral symmetry and the properties of hadrons in the Generalized Nambu – Jona-Lasinio model

Yu.S. Kalashnikova<sup>(1,2)</sup>, A.V. Nefed'ev<sup>(1,2,3)</sup>, J.E.F.T. Ribeiro<sup>(4)</sup>

<sup>(1)</sup> National Research Center "Kurchatov Institute", A.I. Alikhanov Institute of Theoretical and Experimental Physics, ul. B. Chermushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation

<sup>(2)</sup> National Research Nuclear University "MEPhI", Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation

<sup>(3)</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

<sup>(4)</sup> Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal  
E-mail: <sup>(1,2,3)</sup>nefediev@itep.ru

Various aspects of the Generalized Nambu – Jona-Lasinio model of QCD in four dimensions are reviewed. The properties of mesonic excitations are discussed in detail, with special attention to the chiral pion. The spontaneous chiral symmetry breaking in the vacuum and the effective chiral symmetry restoration in the spectrum of highly excited mesons and baryons are described microscopically.

**Keywords:** strong interactions, quantum chromodynamics, chiral symmetry, quark model, properties of hadrons, chiral pion

PACS numbers: 12.38.Aw, 12.39.Ki, 12.39.Pn

Bibliography — 115 references

Received 16 September 2016, revised 18 November 2016

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **187** (7) 715–743 (2017)

*Physics – Uspekhi* **60** (7) (2017)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.11.037966>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2016.11.037966>