Июнь 2017 г. **Том 187, № 6**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

К теореме о связи спина и статистики

Е.Д. Трифонов

Анализируется возможность доказательства теоремы о связи спина и статистики в рамках нерелятивистской квантовой механики.

Ключевые слова: тождественные частицы, спин и статистика, принцип Паули, неприводимые представления группы вращений, спинорные поля

PACS numbers: **02.20.–a**, **03.65.–w**, 31.15.xh DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.02.038061

Содержание

... Окончательная "истина" этого вопроса всё ещё "пребывает в бездне неизведанного"...
В. Паули [1]

1. Введение

Как известно, теорема Паули о связи спина и статистики доказывается в теории квантованных полей с привлечением свойств инвариантности относительно группы Лоренца, отражений времени, пространства и заряда [1–5]. При этом используются требования положительности энергии и выполнения условия причинности. В то же время формулировка теоремы достаточно лаконична: волновая функция системы тождественных частиц с целым (полуцелым) спином симметрична (антисимметрична) относительно одновременной перестановки координат и спиновых переменных этих частиц. Такая связь эффективно и широко используется, в частности, в нерелятивистской теории многоэлектронных систем и молекулярной физике (см., например, [6, 7]). Так как спин определяет тип преобразования волновой функции относительно трёхмерных вращений, естественно ожидать, что ограничения на перестановочную симметрию должны быть связаны с симметрией относительно группы вращений. Заметим, что попытки получить объяснение связи спина и статистики в рамках нерелятивистской квантовой механики продолжаются до настоящего времени (см. [8–11] и цитируемую там литературу).

2. Связь спина и статистики для систем тождественных частиц

Согласно принципу "простой симметрии" Бете, для каждого класса тождественных частиц возможен единственный выбор из двух возможностей: симметрия или антисимметрия (см. "доводы в пользу простой симметрии" [12, с. 25]; детальный анализ этого вопроса проводится в работе [13] (см. также [14, 15])). Для установления связи спина и статистики данного класса тождественных частиц достаточно доказать *необходимость* выполнения теоремы для любого частного случая. Поскольку рассматриваемое свойство симметрии не должно зависеть от числа частиц в системе, естественно начать с простейшего случая двух тождественных частиц.

Рассмотрим систему двух частиц с полуцелым спином. Волновая функция частицы с полуцелым спином (для простоты можно ограничиться спином $1/2$ и нулевым орбитальным моментом) представляет собой спинорное поле, т.е. спинор, заданный в каждой точке пространства, $\chi_m(\mathbf{r})$, $m = \pm 1/2$. Пусть обе частицы находятся на оси x. В качестве оси квантования проекции спина выберем ось z.

Преобразование спинорного поля при вращении g трёхмерного пространства (т.е. при переходе к другой ортогональной системе координат) имеет вид (см., например, [7])

$$\chi'_m(g^{-1}\mathbf{r}) = \sum_{m'=\pm 1/2} D^{(1/2)}_{m'm}(g)\, \chi_{m'}(\mathbf{r})\,, \tag{1}$$

где $D^{(1/2)}_{mm'}(g)$ — матрица неприводимого представления веса $1/2$ группы вращений. Штрихом помечены компоненты спинора в новой системе координат, которая получается из исходной поворотом g. При вращении на π вокруг оси квантования проекции спина (оси z) компоненты спинора $\chi_m(\mathbf{r})$ получают множители $\exp(\mathrm{i}\pi m) = \pm\mathrm{i}$.

Волновая функция двух таких частиц представляет собой спинорное поле второго ранга (спинор второго ранга, зависящий от двух векторных аргументов — радиусов-векторов частиц). Закон преобразования спинора второго ранга выражается как

$$\chi'_{m_1 m_2}(g^{-1}\mathbf{r}_1, g^{-1}\mathbf{r}_2) = \sum_{m'_1, m'_2 = \pm 1/2} D^{(1/2)}_{m'_1 m_1}(g) D^{(1/2)}_{m'_2 m_2}(g) \chi_{m'_1 m'_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\,. \tag{2}$$

Перестановка значений пространственных аргументов может быть осуществлена поворотом на π вокруг любой проходящей через центр инерции двух рассматриваемых частиц оси, ортогональной отрезку, соединяющему частицы: $g^{-1}\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, $g^{-1}\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$. В качестве спиновых переменных выберем проекции спина на эту ось. Тогда при таком повороте спиновые переменные сохранят свои значения, а одночастичные волновые функции (компоненты спинора первого ранга) получат множитель i или $-\mathrm{i}$. Двухчастичная волновая функция *при одинаковых значениях спиновых*

Е.Д. Трифонов. Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Набережная реки Мойки 48, 191186 Санкт-Петербург, Российская Федерация
E-mail: thphys@herzen.spb.ru

Статья поступила 11 февраля 2016 г., после доработки 13 января 2017 г.

переменных (диагональные компоненты спинора второго ранга) в соответствии с (2) меняет знак:

$$\chi'_{m,m}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1) = -\chi_{m,m}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,. \qquad (3)$$

Таким образом, переход к новой системе отсчёта, получаемой из исходной поворотом на π вокруг проходящей через центр инерции двух частиц оси квантования проекций спина, ортогональной соединяющему их отрезку, приводит к перестановке значений пространственных координат частиц и изменению знака волновой функции.

Покажем, что свойство "перестановочной антисимметрии" может быть распространено и на другие состояния рассматриваемой системы (с $m_1 \neq m_2$). Для этого рассмотрим поворот на π вокруг оси y, ортогональной как отрезку, соединяющему частицы, так и оси квантования. При вращении на π вокруг оси y компоненты спинора меняются местами:

$$\chi'_{1/2} = \mathrm{i}\chi_{-1/2}\,, \qquad \chi'_{-1/2} = \mathrm{i}\chi_{1/2}\,. \qquad (4)$$

Согласно (2) для спинора второго ранга получим

$$\chi'_{m_2,m_1}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1) = -\chi_{m_1,m_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,. \qquad (5)$$

Однако на основании (5) мы ещё не можем сделать заключения о том, что двухчастичная волновая функция при одинаковых значениях спиновых переменных должна быть антисимметричной относительно перестановки пространственных координат в заданной (одной и той же) системе координат. В заданной (исходной) системе координат волновая функция будет антисимметричной, если *дополнительно* потребовать выполнения соотношения

$$\chi'_{m_1,m_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \chi_{m_1,m_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,. \qquad (6)$$

Опираясь на свойство антисимметрии волновой функции частиц с полуцелым спином (как принятый факт), можно, действительно, прийти к такому заключению, т.е. рассматривать (6) как обратную теорему, вытекающую из антисимметрии волновой функции относительно перестановки частиц с полуцелым спином. Соотношение (6) можно интерпретировать как квантово-механическое выражение неразличимости тождественных частиц. В нашем рассмотрении мы принимаем это равенство как *гипотезу*.

Таким образом, свойство антисимметрии волновой функции двух тождественных частиц со спином 1/2 определяется полностью полуцелым значением спина. Если считать этот факт установленным, то свойства симметрии волновых функций систем тождественных частиц с другими значениями спинов проще всего определить, рассматривая их как "составные", т.е. состоящие из чётного или нечётного числа частиц со спином 1/2. Известно, что свойства перестановочной симметрии для "составных частиц" (например, таких, как атомы) определяются значением полного спина (для атома — суммарным спином ядра и электронов). Это не только следует из логики теоретического анализа, но и уже давно подтверждено экспериментально (сверхтекучесть гелия и бозе-конденсация разрежённых лазерно-охлаждённых газов).

6. Заключение

В настоящей методической заметке для доказательства связи спина и статистики используется дополнительная, определяемая соотношением (6), гипотеза, которую мы предлагаем рассматривать как формальное выражение принципа неразличимости тождественных частиц.

После того как первый вариант нашей статьи был отправлен в редакцию журнала *Успехи физических наук*, мы обнаружили, что близкие рассмотрения уже предлагались ранее [8, 9], но были подвергнуты критике, в частности, в [11], по-видимому, из-за логического пробела, восполненного нашей гипотезой.

Приведённое рассмотрение нельзя считать законченным доказательством теоремы о связи спина и статистики (что отражено в эпиграфе), поскольку в нём используется дополнительная гипотеза. Тем не менее продемонстрированная связь трансформационных свойств волновых функций систем тождественных частиц относительно вращений и перестановок представляет методический интерес и, возможно, стимулирует проведение более глубокого анализа проблемы в рамках нерелятивистской квантовой механики.

Автор выражает искреннюю благодарность М.Г. Бенедикту, М.М. Местечкину, Л.Н. Лабзовскому и А.В. Тулубу за обсуждение. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 15-02-08369-А.

Список литературы

1. Pauli W "Exclusion principle, Lorentz group and reflection on space-time and charge", in *Niels Bohr and the Development of Physics* (Ed. W Pauli) (New York, McGraw-Hill, 1955) p. 30; Пер. на русск. яз.: Паули В "Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства, времени и заряда", в сб. *Нильс Бор и развитие физики* (Под ред. В Паули) (М.: ИЛ, 1958)
2. Fierz M *Helv. Phys. Acta* **12** 3 (1939)
3. Pauli W *Phys. Rev.* **58** 716 (1940)
4. Румер Ю Б, Фет А И *Теория групп и квантованные поля* (М.: Наука, 1977)
5. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантованных полей* (М.: Наука, 1984); Пер. на англ. яз.: Bogoliubov N N, Shirkov D V *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (New York: John Wiley, 1980)
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2004); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)
7. Петрашень М И, Трифонов Е Д *Применение теории групп в квантовой механике* (М.: URSS, 2014); Пер. на англ. яз.: Petrashen M I, Trifonov E D *Applications of Group Theory in Quantum Mechanics* (Mineola, NY: Dover Publ., 2009)
8. Broyles A A *Am. J. Phys.* **44** 340 (1976)
9. Bacry H *Am. J. Phys.* **63** 297 (1995)
10. Duck I, Sudarshan E C G *Pauli and the Spin-Statistics Theorem* (Singapore: World Scientific, 1997)
11. Duck I, Sudarshan E C G *Am. J. Phys.* **66** 284 (1998)
12. Jabs A *Found. Phys.* **40** 776 (2010); *Found. Phys.* **40** 793 (2010)
13. Bethe H A *Intermediate Quantum Mechanics* (New York: W.A. Benjamin, 1964); Пер. на русск. яз.: Бете Г *Квантовая механика* (М.: Мир, 1965)
14. Каплан И Г *УФН* **117** 691 (1975); Kaplan I G *Sov. Phys. Usp.* **18** 988 (1975)
15. Kaplan I G *Found. Phys.* **43** 1233 (2013)

On the spin-statistics theorem

E.D. Trifonov. *Herzen State Pedagogical University of Russia, Naberezhnaya reki Moiki 48, 191186 St. Petersburg, Russian Federation*
E-mail: *thphys@herzen.spb.ru*

The possibility of proving the theorem on the connection between spin and statistics in the nonrelativistic quantum mechanical framework is examined.

Keywords: identical particles, spin and statistics, the Pauli exclusion principle, irreducible representations of the rotation group, spinor fields

PACS numbers: **02.20.–a**, **03.65.–w**, 31.15.xh
Bibliography — 15 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **187** (6) 667–668 (2017)
DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.02.038061

Received 11 February 2016, revised 13 January 2017
Physics – Uspekhi **60** (6) (2017)
DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.02.038061