Ноябрь 2017 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 187, № 11*

ПАМЯТИ ЛЕОНИДА ВЕНИАМИНОВИЧА КЕЛДЫША

ИЗ АРХИВА

Многофотонная ионизация при воздействии ультракороткого лазерного импульса

Л.В. Келдыш

Теоретически рассмотрен отрыв связанного электрона под действием импульса электрического поля, длительность которого не превышает нескольких оптических периодов или даже доли оптического периода, но в то же время больше величины $\hbar/I$ ($\hbar$ — постоянная Планка, I — энергия связи). Данная задача моделирует ионизацию атомов под воздействием предельно коротких лазерных импульсов. Из-за сильной нелинейности её решение не сводится к суммированию вкладов монохроматических гармонических составляющих и существенно зависит от особенностей формы импульса. Общий анализ проведён исходя из аналитической формы импульсов, и для однопериодных и полупериодных импульсов стандартной формы, таких как солитоноподобный, гауссов, лоренцев и др., даны точные формулы. Зависимости вероятности ионизации от интенсивности поля и длительности импульса при высоких напряжённостях поля имеют почти универсальный туннельный характер. Однако в многофотонном режиме при умеренных напряжённостях эти зависимости существенно различны для импульсов разной формы и вероятность ионизации всегда на несколько порядков величины превосходит вероятность ионизации монохроматическим полем с такими же напряжённостью и средней частотой.

Ключевые слова: многофотонные процессы, туннельная и многофотонная ионизация, релятивистская ионизация, ультракороткие лазерные импульсы, интенсивное лазерное излучение

PACS numbers: 32.80.Rm, 42.50.Hz, 42.65.Re DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.10.038229

Значительные успехи в достижении высокой интенсивности лазерных полей неразрывно связаны с соответствующим уменьшением длительности импульсов [1, 2]. В свою очередь реальные многофотонные процессы, т.е. процессы, требующие одновременного участия большого числа ($\gg 1$) фотонов, как правило, наблюдаются в экспериментах с ультракороткими импульсами (УКИ). Длительность импульсов при дальнейшем её уменьшении становится сравнимой с продолжительностью цикла оптического поля [3–8]. При таких условиях общепринятое понятие вероятности перехода (ионизации) в единицу времени теряет смысл. Единственной имеющей значение величиной остаётся полная вероятность перехода (после окончания импульса). Более того, частотный спектр рассматриваемых импульсов очень широк, и из-за сильной нелинейности процесса вероятность перехода не сводится к сумме вкладов независимых гармонических составляющих.

Физический смысл процесса ионизации в случае УКИ высокой интенсивности можно понимать как взаимодействие и конкуренцию большого числа гармонических вкладов, которые зависят не только от спектра, но и от соотношений фаз различных гармоник, т.е. как результат корреляций поля высших порядков. Иначе говоря, это означает, что результат весьма чувствителен к конкретной форме импульса. В данной статье теоретически рассмотрены некоторые предельные частные случаи, соответствующие УКИ длительностью в несколько оптических циклов и даже половину цикла.

Недавно несколькими научными группами как экспериментально, так и теоретически был исследован предельный случай, в некотором роде ещё более неординарный, — ионизация атомов импульсом длительностью, гораздо меньшей, чем характерные электронные времена (величины, обратные к частоте оптического перехода между соседними энергетическими уровнями). Экспериментально такое условие было реализовано для атомов редкоземельных металлов, возбуждённых до достаточно высоких ридберговских состояний, соответствующих квазиклассическому движению электрона и малым расстояниям между энергетическими уровнями. Импульс поля в этом случае играл роль квазимгновенного удара, перебрасывавшего электрон с одной кеплеровской орбиты (связанное состояние) на другую (несвязанное состояние).

В отличие от этого, задача, рассмотренная ниже, имеет существенно квантовый характер. Здесь ионизация сильно связанного, т.е. основного, состояния, происходит под воздействием импульса длительностью в один

Л.В. Келдыш. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, Москва, 119991, Российская Федерация

Время создания этой рукописи: *не ранее осени 1997 г. и не позднее осени 2000 г.*

оптический цикл или его половину. Причём длительность импульса намного превышает "атомный цикл" — $\hbar/I$, где $\hbar$ — постоянная Планка, I — энергия ионизации. Это означает, что средняя энергия фотона в импульсе мала по сравнению с энергией ионизации. Для электрона в атоме это условие соответствует медленно меняющемуся возбуждению, и, следовательно, в данной задаче можно воспользоваться адиабатическим подходом, применявшимся ранее [9] при решении задачи ионизации под воздействием интенсивной монохроматической волны. В основе такого подхода лежит тот факт, что в рассматриваемом процессе конечное — свободное — состояние электрона гораздо более чувствительно к возмущениям подобного рода, чем начальное — сильно связанное и локализованное — состояние. Так, вероятность перехода рассчитывается как вероятность перехода в первом порядке теории возмущений из невозмущённого начального состояния в атоме в конечное "точное" состояние свободного электрона в сильном электрическом поле, изменяющемся во времени. Последнее состояние рассматривается как невозмущённое электрическим полем и вносит основной вклад в амплитуду перехода. В случае полей, меньших атомных, т.е. при интенсивностях в пределах нескольких ПВт см$^{-2}$, наиболее существенным (и единственным) недостатком данного подхода является исключение из рассмотрения электрон-ионного кулоновского взаимодействия в конечном состоянии, т.е. использование приближения, подобного борновскому. В наши дни актуальность приближённых решений такого рода может казаться спорной. Решение подобных квантово-механических задач — одиночный электрон во внешнем поле, причём как в атомном, так и в электромагнитном — вполне возможно на современных компьютерах. За последнее десятилетие для решения задачи многофотонной ионизации и некоторых других, смежных с ней, задач, таких как генерация высших гармоник в ультрафиолетовом (УФ) диапазоне, был предложен и успешно реализован ряд алгоритмов. Тем не менее, хотя аналитические решения и дают лишь полуколичественное описание, они по-прежнему обладают определёнными преимуществами, поскольку не ограничены каким-либо конкретным набором параметров. Они могут оказаться полезными для того, чтобы представить общую картину процесса и закономерности, связанные с изменением параметров, либо могут служить в качестве отправной точки при анализе более сложных, например многоэлектронных, систем.

Пусть пространственно однородное изменяющееся во времени электрическое поле $\mathbf{F}(t)$ задано в виде

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F} f'(\omega t)\,. \tag{1}$$

Здесь $f'(x)$ — производная функции f по её аргументу x, ω — величина, обратная характерному времени импульса. Волновая функция свободного электрона, находящегося в таком поле,

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{p}(t)\,\mathbf{r} - \int_0^t \frac{p^2(t')}{2m}\,\mathrm{d}t'\right)\right] \tag{2}$$

с

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} + \frac{e\mathbf{F}}{\omega} f(\omega t)\,. \tag{3}$$

Используя стандартное первое приближение теории возмущений, можно рассчитать вероятность перехода из начального состояния $\psi_0(\mathbf{r}) \exp\left[(\mathrm{i}/\hbar)\, It\right]$ в конечное состояние $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$:

$$w_{i\mathbf{p}} = \frac{e^2\mathbf{F}^2}{\hbar^2\omega^2} \times \\ \times \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, R_{\parallel}\left(\mathbf{p} + \frac{e\mathbf{F}}{\omega} f(x)\right) \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{I}{\hbar\omega}\,\Phi(x)\right)\right|^2, \tag{4}$$

где фазовая функция $\Phi(x)$ определена как

$$\Phi(x) = \frac{1}{I}\int_0^x \left(I + \frac{p^2(x')}{2m}\right) \mathrm{d}x' - \mathrm{i}\,\frac{\hbar\omega}{I}\,\ln f'(x)\,. \tag{5}$$

Здесь $R_{\parallel}(\mathbf{p})$ — матричный элемент перехода для координатной компоненты, параллельной полю $\mathbf{F}$,

$$R_{\parallel}(\mathbf{p}) = \int \exp\left[-\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)\mathbf{pr}\right] \mathbf{nr}\,\psi_0(\mathbf{r})\, d^3 r\,,$$

$\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении поля.

Для того чтобы сделать анализ более наглядным, используемые величины удобно представить в естественной системе атомных единиц, т.е.

$$\Omega = \frac{\hbar\omega}{I}\,, \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{2mI}}\,, \quad \mathcal{E} = \frac{e\hbar\mathbf{F}}{\sqrt{2mI^3}}\,. \tag{6}$$

Безусловно, отсюда следует соответствующее преобразование координат и времени. Тогда безразмерный матричный элемент должен иметь вид

$$M(\mathbf{q}) = \left(\frac{\sqrt{2mI}}{\hbar}\right)^{5/2} R_{\parallel}(\mathbf{p})\,. \tag{7}$$

В соответствии со сказанным выше всё рассмотрение в этой статье проводится для $\Omega \ll 1$.

Тогда ключевым параметром в данной теории является отношение безразмерных напряжённости поля и частоты

$$\lambda = \frac{|\mathcal{E}|}{\Omega}\,, \tag{8}$$

которое как раз представляет собой величину, обратную параметру γ, введённому в [9] (если считать ω характерной частотой процесса).

Приняв коэффициент $1/\Omega$ в качестве большого параметра теории, можно вычислить интеграл в (4), используя метод стационарной фазы. Точка (точки) стационарной фазы в плоскости комплексной переменной x находится из уравнения

$$\left.\frac{\partial\Phi(x, \mathbf{q})}{\partial x}\right|_{x_s} = 1 + \big(\mathbf{q} + \mathbf{n}\,\lambda f(x_s)\big)^2 - \mathrm{i}\Omega\,\frac{f''(x_s)}{f'(x_s)} = 0\,. \tag{9}$$

Тогда вероятность перехода

$$w_{i\mathbf{p}} = 2\pi\Omega\lambda^2 \left|\sum_s \frac{M\big(\mathbf{q} + \mathbf{n}\lambda f(x_s)\big)}{\sqrt{|\Phi''(x_s, \mathbf{q})|}} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\Omega}\,\Phi(x_s, \mathbf{q})\right)\right|^2, \tag{10}$$

где суммирование проводится по всем седловым точкам x_s. Вклады от различных седловых точек различаются экспоненциально, и в выражении (10) надо оставить лишь те из них, которые дают основной вклад. Вообще говоря, такая седловая точка одна — она соответствует наименьшему положительному значению мнимой части $\Phi(x_s, \mathbf{q})$. Однако во многих случаях из-за определённой симметрии функции $f(x)$, описывающей форму импульса, существуют пары или группы эквивалентных седловых точек с одинаковыми значениями $\mathrm{Im}\,\Phi(x_s, \mathbf{q})$, но разными фазовыми составляющими $\mathrm{Re}\,\Phi(x_s, \mathbf{q})$. Интерференция вкладов от этих точек приводит к тому, что вероятность ионизации осциллирует в зависимости от параметров импульса λ и Ω.

Эта вероятность, если рассматривать её как функцию аргумента $\mathbf{q}$, является функцией распределения импульсов эмитированных электронов. Однако отметим, что $\mathbf{q}$ в этой формуле является импульсом в момент времени, когда $f(x) = 0$. Поэтому если $f(\infty) \neq 0$, как, например, в случаях 1 и 4, рассмотренных ниже, то распределение импульсов эмитированных электронов по-прежнему имеет вид (10), но сдвинуто на величину $\delta\mathbf{q} = \mathbf{n}\lambda f(\infty)$, как в формулах (17) и (43) в указанных примерах 1 и 4.

Как правило, распределение имеет гауссову форму около некоторого среднего импульса $\mathbf{q}_{\mathrm{m}}$, определяемого из условия минимума $\mathrm{Im}\,\Phi(x_s, \mathbf{q})$, которое с учётом (9) сводится к

$$q_{\parallel\,\mathrm{m}} = -\frac{\lambda}{x''_{s\mathrm{m}}}\,\mathrm{Im}\left[\int_0^{x_{s\mathrm{m}}} \mathrm{d}x f(x)\right] \tag{11}$$

и $\mathbf{q}_\perp = 0$, где $q_\parallel$ и $\mathbf{q}_\perp$ — параллельная и перпендикулярная направлению поля компоненты импульса, $x_{s\mathrm{m}} \equiv x_s(\mathbf{q}_{\mathrm{m}})$; x''_s — мнимая часть x_s.

В окрестности этого резкого максимума, учитывая (9) и (11), мнимую часть $\Phi(x_s, \mathbf{q})$ можно привести к виду

$$\mathrm{Im}\,\Phi(x_s, \mathbf{q}) = x''_{s\mathrm{m}} + \mathrm{Im}\left\{\int_0^{x_{s\mathrm{m}}}\left[\lambda^2 f^2(x) - q^2_{\parallel\mathrm{m}}\right]\mathrm{d}x + \right.$$
$$\left. + x_{s\mathrm{m}} q_\perp^2 + \left[x_{s\mathrm{m}} - \mathrm{i}\big(\lambda f'(x_{s\mathrm{m}})\big)^{-1}\right](q_\parallel - q_{\parallel\mathrm{m}})^2\right\}, \tag{12}$$

при этом ширины на полувысоте определяются вторыми производными экспоненты в (10) по компонентам импульса.

Следует сказать несколько слов о предэкспоненциальном множителе в (10). При выводе этой формулы матричный элемент $M\big(\mathbf{q} + \mathbf{n}\lambda f(x)\big)$ рассматривался как регулярная функция, медленно изменяющаяся в окрестности x_s: $M(\mathbf{q}) \simeq M_0 \equiv M(0)$. Однако $M(\mathbf{q})$, как правило, имеет полюс в комплексной плоскости импульса [9] — особенность вида $M(\mathbf{q}) = M_0/(1+q^2)$. Во всей области нелинейного поглощения $\lambda \gg \lambda_{\mathrm{c}}$ (λ_{c} определяется приведённым ниже выражением (46)) члены в $\Phi(x_s)$, пропорциональные λ и λ^2, гораздо больше последнего члена $\sim \Omega$. Тогда этот полюс подбирается очень близко к положению седловой точки. Из-за этого немного меняется оценка интеграла в (4): вместо вклада от седловой точки появляется половина вычета в этой точке, увеличивающая предэкспоненциальный множитель в (10) в $\pi/(4\mathcal{E}|f'(x_s)|)$ раз. Если в выражении (10) есть две или несколько эквивалентных седловых точек (и полюсов M), то каждую составляющую амплитуды перехода надо умножить на $\mathrm{sign}\,\mathrm{Im}\left[f(x_s)\right]\left[\pi/(4\mathcal{E}|f'(x_s)|)\right]^{1/2}$. Однако, строго говоря, этими поправками к предэкспоненциальному множителю (как и обсуждаемыми далее поправками, обусловленными неприменимостью стандартного метода стационарной фазы в окрестности особой точки функции, описывающей форму импульса) нужно пренебречь: ввиду использования приближения, подобного борновскому, о котором упоминалось выше, предэкспоненциальный множитель в (10) и некоторые последующие формулы верны лишь с точностью до порядка величины.

Ниже приведены результаты для нескольких частных, но достаточно репрезентативных случаев.

1. Солитоноподобный полупериодный импульс (half-cycle pulse — HCP)

$$f(x) = \tanh x \tag{13}$$

даёт напряжённость электрического поля

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathcal{E}}{(\cosh\omega t)^2}\,. \tag{14}$$

Зависящая от импульса вероятность ионизации имеет вид

$$w_{\mathrm{i}}(\Omega, \lambda, \mathbf{q}) = \frac{\pi\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \lambda^2}}\,(\lambda^2 + \zeta^2)\,|M_0|^2 \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{2}{\Omega}\left[(1+\lambda^2)\,\arctan\frac{\zeta}{\lambda} - \lambda\zeta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \arctan\frac{\zeta}{\lambda}\,(\mathbf{q} - \mathbf{n}\lambda)^2\right]\right\} \tag{15}$$

с параметром

$$\zeta = \frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{\Omega^2 + \lambda^2} - \Omega\right]. \tag{16}$$

Учитывая полюс в матричном элементе перехода, о котором речь шла выше, формулу (15) следует привести к виду

$$w_{\mathrm{i}}(\Omega, \lambda, \mathbf{q}) = |\pi M_0|^2 \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{\Omega}\left((1+\lambda^2)\,\pi + 2\,\arctan\frac{\zeta}{\lambda}\,(\mathbf{q} - \mathbf{n}\,\lambda)^2\right)\right] \times$$
$$\times \sinh^2\left[\frac{1}{\Omega}\left((1+\lambda^2)\,\arctan\,(\lambda) + \lambda\right)\right]. \tag{17}$$

Формулы (15) и (17) выведены с помощью метода стационарной фазы, который использовался при оценке интеграла в (4). Однако для $f(x) = \tanh x$ при уменьшении поля седловая точка стремится к $\mathrm{i}\pi/2$ — особой точке самóй функции $f(x)$ (а не матричного элемента). В режиме линейного поглощения, $\lambda < \Omega \ll 1$, это приводит к нарушению условий применимости метода стационарной фазы, а также к количественному изменению предэкспоненциального множителя. В рамках общего анализа, проведённого ниже, получены точные (в борновском приближении) формулы, которые справедливы и в случае слабого поля. В пределе сильных полей, соответствующих нелинейному режиму, эти формулы совпадают с (15) и (17), а в пределе слабых полей в них появляются поправочные коэффициенты: S^{reg} в (15) и S^{sing} в (17) — отражённые в формулах (52) и (54).

2. Солитоноподобный одноипериодный импульс (one-cycle pulse — OCP)

$$f(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{4\cosh^2 x}\,. \tag{18}$$

Для того чтобы в обоих экстремумах напряжённости электрического поля получить величину $|f'(x_{\rm m})|$, нормированную на единицу, вводится числовой коэффициент.

Зависящая от импульса вероятность ионизации имеет вид

$$w_i\,(\Omega,\lambda,\mathbf{q}) = 8|2\pi M_0|^2\,\exp\left[-\frac{\pi}{\Omega}\,(1+q^2)\right]\times$$
$$\times\left[1-\cos\,\left(\frac{2}{\Omega}\,{\rm Re}\,\Phi(x_s,\mathbf{q})\right)\right]\,\sinh^2\!\left(-\frac{1}{\Omega}\,{\rm Im}\,\tilde{\Phi}(x_s,\mathbf{q})\right), \tag{19}$$

при этом

$${\rm Im}\,\tilde{\Phi}\,(x_s,\mathbf{q}) \equiv {\rm Im}\,\Phi(x_s,\mathbf{q}) - \frac{\pi}{2}\,(1+q^2) =$$
$$=(1+q^2)\left(x_s''-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{6}\left[(5q_{\|}-2\tilde{\lambda})\,\eta+\sqrt{1+q_{\perp}^2}\;\xi\right], \tag{20}$$

$${\rm Re}\,\Phi(x_s,\mathbf{q})=(1+q^2)\,x_s'-\frac{1}{6}\,\left[(5q_{\|}-2\tilde{\lambda})\,\xi-\sqrt{1+q_{\perp}^2}\;\eta\right]. \tag{21}$$

Седловая точка x_s определяется выражениями

$$x_s'' \equiv {\rm Im}\,x_s = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\,\arccos\,\frac{\sqrt{1+q_{\perp}^2+(\tilde{\lambda}-q_{\|})^2}-\tilde{\lambda}}{\sqrt{1+q^2}}\,, \tag{22}$$

$$x_s' \equiv {\rm Re}x_s = \frac{1}{2}\,\tanh^{-1}\left[\frac{\xi}{\tilde{\lambda}+\sqrt{1+q_{\perp}^2+(\tilde{\lambda}-q_{\|})^2}}\right], \tag{23}$$

где параметр поля $\tilde{\lambda}=(3\sqrt{3}/4)\,\lambda$ и

$$\xi = \sqrt{2\tilde{\lambda}\left[\sqrt{1+q_{\perp}^2+(\tilde{\lambda}-q_{\|})^2}+\tilde{\lambda}-q_{\|}\right]}\,, \tag{24}$$

$$\eta = \sqrt{2\tilde{\lambda}\left[\sqrt{1+q_{\perp}^2+(\tilde{\lambda}-q_{\|})^2}-\tilde{\lambda}+q_{\|}\right]}\,. \tag{25}$$

Формула (19) приведена в виде, соответствующем сингулярному матричному элементу $M(\mathbf{q})$, описанному выше. Функция $\sinh(\ldots)$ в (19) учитывает вклады от двух пар полюсов (седловых точек): для одной пары $x_s''<\pi/2$, а другая расположена симметрично над $\pi/2$. Вклад от второй пары существен только при очень слабых полях, $\lambda \ll \Omega^2$. Благодаря этому формула (19) точно (до числового коэффициента ~ 1) описывает линейное поглощение. Во всей области нелинейности, $\lambda \gg \Omega^2$, этот вклад пренебрежимо мал, и при одном и том же аргументе гиперболического синуса не отличается от половины экспоненциальной функции.

Импульс $q_{\|{\rm m}}$, соответствующий максимуму функции распределения, следует найти из уравнения

$$q_{\|{\rm m}}\,x_{s{\rm m}}''\Big|_{\mathbf{q}_{\perp}=0} = \eta \tag{26}$$

и подставить в (19)–(25). При малом $\lambda \ll 1$ приближённо получим $q_{\|{\rm m}} \approx (2\tilde{\lambda})^{1/2}/\pi$. При сильных полях, $\lambda \gg 1$, значение этой величины стремится к $2\tilde{\lambda}/3$.

Осцилляции зависимостей от поля и импульса в (19) возникают из-за интерференции вкладов от пары седловых точек, расположенных симметрично относительно мнимой оси. Амплитуда этих осцилляций в общей (интегрированной по импульсу) вероятности ионизации с возрастанием поля уменьшается вследствие ослабления за счёт интерференции вкладов от различных импульсов:

$$W_{\rm i}\,(\Omega,\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi\Omega}{u}}\,\frac{\Omega}{x_{s{\rm m}}''}\,|M_0|^2\,\exp\left[-\frac{\pi}{\Omega}\,(1+q_{\rm m}^2)\right]\times$$
$$\times\left[1-\exp\left(-\frac{2\tilde{\lambda}}{\pi\Omega}\right)\,\cos\left(\frac{4\sqrt{2\tilde{\lambda}}}{3\Omega}\right)\right]\times$$
$$\times\,\sinh^2\!\left(-\frac{1}{\Omega}\,{\rm Im}\,\tilde{\Phi}(x_{s{\rm m}},\mathbf{q}_{\rm m})\right), \tag{27}$$

где

$$u = \left(x_s''+\frac{1}{4}\,\frac{q\xi+\eta}{(1+q^2)\,\sqrt{1+(\tilde{\lambda}-q)^2}}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{\rm m}}.$$

Осциллирующий член записан здесь в форме, допустимой лишь при $\lambda \ll 1$, поскольку при более сильных полях этот член пренебрежимо мал.

3. Гауссов одноипериодный импульс (OCP)

$$f(x) = \exp\left(\frac{1-x^2}{2}\right). \tag{28}$$

Соответствующая форма импульса поля

$$\mathcal{E}(t) = -\mathcal{E}\omega t\,\exp\left(\frac{1-(\omega t)^2}{2}\right). \tag{29}$$

Тогда

$$\Phi(x_s,\mathbf{q})=(1+q^2)\,x_s+2\tilde{\lambda}q_{\|}\,{\rm Erf}\left(\frac{x_s}{\sqrt{2}}\right)+\tilde{\lambda}^2\,{\rm Erf}\,(x_s)\,. \tag{30}$$

Здесь $\tilde{\lambda}\equiv\sqrt{\rm e}\,\lambda$, ${\rm Erf}\,(x)$ — интеграл вероятности,

$${\rm Erf}\,(x) = \int_0^x \exp\,(-y^2)\,{\rm d}y\,,$$

$$x_s(\mathbf{q}) = \sqrt{\ln\frac{\tilde{\lambda}^2}{1+q^2}\mp 2{\rm i}\arccos\frac{-q_{\|}}{1+q^2}}\,. \tag{31}$$

Смысл имеют лишь седловые точки в верхней полуплоскости x. Поэтому надо взять лишь корни со знаком плюс перед мнимыми частями. Следовательно, для двух седловых точек знаки действительных частей различны. Всё это служит лишь примером интерференции, обусловленной двумя эквивалентными седловыми точками:

$$x_s'' \equiv {\rm Im}\,x_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\times$$
$$\times\sqrt{\sqrt{\left(\ln\frac{\tilde{\lambda}^2}{1+q^2}\right)^2+4\left[\arccos\left(-\frac{q_{\|}}{\sqrt{1+q^2}}\right)\right]^2}-\ln\frac{\tilde{\lambda}^2}{1+q^2}}\,, \tag{32}$$

$$x'_s \equiv \operatorname{Re} x_s = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \times$$

$$\times \sqrt{\sqrt{\left(\ln \frac{\tilde{\lambda}^2}{1+q^2}\right)^2 + 4\left[\arccos\left(-\frac{q_\parallel}{\sqrt{1+q^2}}\right)\right]^2} + \ln \frac{\tilde{\lambda}^2}{1+q^2}}\,. \tag{33}$$

В этом случае уравнение для $\mathbf{q}_{\mathrm{m}}$ выглядит следующим образом:

$$\mathbf{q}_{\mathrm{m}} \int_0^{x''_{s\mathrm{m}}} \left[1 - \exp\left(-x''_{s\mathrm{m}} u + \frac{u^2}{2}\right) \cos\left(x'_{s\mathrm{m}} u\right)\right] \mathrm{d}u =$$

$$= -\int_0^{x''_{s\mathrm{m}}} \exp\left(-x''_{s\mathrm{m}} u + \frac{u^2}{2}\right) \sin\left(x'_{s\mathrm{m}} u\right) \mathrm{d}u\,. \tag{34}$$

Поскольку величина $x_{s\mathrm{m}}$ сама по себе является функцией $\mathbf{q}_{\mathrm{m}}$, это уравнение вместе с (31) составляет систему из двух связанных уравнений, определяющих как $x_{s\mathrm{m}}$, так и $\mathbf{q}_{\mathrm{m}}$.

Мнимые части Erf-функций в (30) можно также представить в виде интегралов, аналогичных интегралам в (34). С учётом (31)

$$\tilde{\lambda}^2 \operatorname{Im} \operatorname{Erf}(x_s) = -\int_0^{x''_s} \exp\left(-2x''_{s\mathrm{m}} u + u^2\right) \times$$

$$\times \left[\left(1 - q^2_{\parallel\mathrm{m}}\right) \cos\left(2x'_{s\mathrm{m}} u\right) + 2q_{\parallel\mathrm{m}} \sin\left(2|x'_{s\mathrm{m}}|u\right)\right] \mathrm{d}u\,. \tag{35}$$

В отличие от общих выражений (31)–(33), уравнения (34) и (35) записаны для $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\mathrm{m}}$.

Все эти формулы существенно упрощаются и становятся более понятными в "многофотонной" ($\lambda \ll 1$) и "туннельной" ($\lambda \gg 1$) областях параметров. При умеренных интенсивностях ($\lambda \ll 1$) зависящая от импульса вероятность ионизации имеет вид

$$w_{i\mathbf{q}} \approx 4\pi\Omega \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda_{\mathrm{c}}^2} x''_{s\mathrm{m}} \left|M(0)\right|^2 \left[1 + \cos\frac{\pi - 4q_\parallel}{x''_{s\mathrm{m}}\Omega}\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{2}{\Omega}\left(\left(1+q^2\right) x''_{s\mathrm{m}} - \frac{1}{2x''_{s\mathrm{m}}}\right)\right], \tag{36}$$

где

$$x''_{s\mathrm{m}} = \sqrt{\ln \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 + \lambda_{\mathrm{c}}^2}} \gg 1\,, \tag{37}$$

$$q_{\parallel\mathrm{m}} \approx -\frac{\pi}{2x''^2_{s\mathrm{m}}\left(x''^2_{s\mathrm{m}} - 1\right)} \ll 1\,. \tag{38}$$

Строго говоря, формула (36) справедлива при слабых полях ($\lambda \ll \lambda_{\mathrm{c}} \equiv \exp\left[-1/(2\Omega^2)\right]$, линейное поглощение) и умеренных полях ($\lambda_{\mathrm{c}} \ll \lambda \ll 1$). В промежуточной области ($\lambda \sim \lambda_{\mathrm{c}}$) она, по-видимому, может служить в качестве удовлетворительной интерполяции. При любом значении импульса осцилляции вероятности перехода, обусловленные интерференцией вкладов от двух седловых точек, очень сильны — вплоть до момента их прекращения. Однако в случае полной (интегрированной по импульсу) вероятности ионизации с увеличением поля они затухают постепенно, поскольку их фазы зависят от импульса,

$$W_{\mathrm{i}} = 8\, \frac{\lambda^2 x''^2_{s\mathrm{m}}}{\lambda^2 + \lambda_{\mathrm{c}}^2} \left(\frac{\pi\Omega}{2x''_{s\mathrm{m}}}\right)^{5/2} |M(0)|^2 \times$$

$$\times \left[1 + \exp\left(-\frac{2}{\Omega x''^3_{s\mathrm{m}}}\right) \cos\frac{\pi}{x''_{s\mathrm{m}}\Omega}\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{2}{\Omega}\left(x''_{s\mathrm{m}} - \frac{1}{2x''_{s\mathrm{m}}}\right)\right]. \tag{39}$$

В случае же туннельного режима в сильном поле ($\lambda \gg 1$) формулы (48)–(50) универсальны для импульса любой формы, единственное их различие заключается в величине параметра a — кривизны в наивысшей точке импульса. Для гауссова импульса $a = 2$.

4. Лоренцев полупериодный импульс (HCP)

$$f(x) = \arctan x\,. \tag{40}$$

Соответствующая форма импульса поля

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mathcal{E}}{1 + (\omega t)^2}\,. \tag{41}$$

Тогда седловая точка

$$x_s = \mathrm{i} \tanh\left(\frac{\sqrt{1 + q_\perp^2} + \mathrm{i} q_\parallel}{\lambda}\right), \tag{42}$$

а распределение вероятности ионизации по импульсу

$$w_{\mathrm{i}}(\Omega, \lambda, \mathbf{q}) = |\pi M_0|^2 \exp\left[-\frac{2}{\Omega}\left(|x_{s\mathrm{m}}| - \lambda^2 \varphi(|x_{s\mathrm{m}}|)\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{2}{\Omega}\left[q_\perp^2 |x_{s\mathrm{m}}| + \left(q_\parallel - \frac{\pi\lambda}{2}\right)^2 \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \left(|x_{s\mathrm{m}}| + \frac{2}{\lambda}\left(1 - |x_{s\mathrm{m}}|^2\right)\right)\right]\right\}, \tag{43}$$

где

$$|x_{s\mathrm{m}}| = \tanh\frac{1}{\lambda}\,, \tag{44}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \ln^2 \frac{1+y}{1-y}\,\mathrm{d}y\,. \tag{45}$$

Для импульса любой стандартной формы уравнения (9) и (11) решаются численно очевидным образом. Однако возможен и общий качественный анализ, который может быть весьма показателен. В плоскости параметров (Ω, λ) имеются три существенно различные области:

1. Слабые поля и линейное поглощение при $\lambda \ll \lambda_{\mathrm{c}}(\Omega)$, где λ_{c} — эффективный порог возникновения нелинейности, существенно зависящий от формы импульса, для некоторых характерных форм импульса будет определён ниже. Общее его определение:

$$\lambda_{\mathrm{c}} \left|f(x_{s0})\right| = 1\,, \tag{46}$$

где x_{s0} — корень уравнения (9), соответствующий $\lambda = 0$. Членами в правой части уравнения (9), пропорциональными λ и λ^2, можно пренебречь. Экспоненциальный множитель в (10) обращается в экспоненциально малую амплитуду высокочастотных гармоник, соответствующих энергии квантов выше пороговой $\hbar\omega > I$; такие гармоники всегда присутствуют в фурье-спектре широкополосного сигнала.

2. Нелинейный режим: $\lambda > \lambda_c$. Последний член в (9) можно опустить. Тогда

$$x_s = f^{-1}\left(\frac{-q_\parallel \pm \mathrm{i}\sqrt{1+q_\perp^2}}{\lambda}\right). \tag{47}$$

Здесь $f^{-1}(y)$ — функция, обратная $f(x)$. Знак мнимой части её аргумента должен быть фиксированным и соответствовать $x'' > 0$.

2а. Сильные поля — $\Omega^{-1} \gg \lambda \gg 1$.

Не ограничивая общности, всегда можно выбрать точку $x = 0$ так, чтобы в ней был абсолютный максимум $f'(x)$, т.е. напряжённости поля, и $f'(0) = 1$. Последнее условие лишь фиксирует конкретное значение λ. Если существует несколько эквивалентных максимумов, то каждый из них можно рассматривать отдельно. В интересующей нас области в окрестности данной точки $f(x)$ можно аппроксимировать кубической параболой:

$$f(x) \approx f_0 + x - \frac{1}{6}\,ax^3\,, \quad 0 < a \sim 1\,. \tag{48}$$

После несложных вычислений получим

$$\mathrm{Im}\,\Phi(x_s,\mathbf{q}) = \frac{2}{3\lambda}\left[1 + 4a\,\frac{(\mathbf{q}-\mathbf{q}_\mathrm{m})^2}{\lambda^2}\right], \tag{49}$$

$$q_{\parallel\mathrm{m}} \approx \lambda\left[f(\infty) - f_0\right]. \tag{50}$$

Это соответствует [9] квазистатическому туннелированию в течение короткого временнóго интервала $\delta x \sim \sqrt{|\mathcal{E}|}$, когда поле было максимальным. Распределение фотоэлектронов по импульсам имеет гауссову форму с полушириной $\Delta q_\parallel = (\lambda/4)\sqrt{3|\mathcal{E}|/a}$.

2б. $1 \gg \lambda \gg \lambda_c(\Omega)$ — **умеренные поля**. В этом случае характер зависимости $\mathrm{Im}\,\Phi(x_s,\mathbf{q})$ от λ, в отличие от её характера в случаях слабого и сильного поля, является более разнообразным, различаясь в зависимости от особенностей формы импульса, в частности от особых точек функции $f(x)$ в верхней полуплоскости комплексной переменной x. Гауссова форма $f(x) \sim \exp(-x^2/2)$ представляет собой частный случай, когда существует единственная особая точка $f(x)$ на ∞. Однко функция $f(x)$, описывающая форму импульса в плоскости комплексной переменной x, как правило, имеет особые точки (полюсы, точки ветвления) в некоторой точке x_pol с мнимой частью $x''_\mathrm{pol} \sim 1$. Тогда в случае слабых полей именно $\exp(-2x''_\mathrm{pol}/\Omega)$ определяет амплитуду высокочастотной фурье-компоненты, ответственной за одноквантовую ионизацию. С возрастанием поля седловая точка x_s смещается от x_pol к действительной оси. Пусть ближайшая к действительной оси особая точка является полюсом k-го порядка, т.е.

$$f(x) \approx \frac{A}{(x - x_\mathrm{pol})^k}$$

при $|x - x_\mathrm{pol}| \ll 1$. Тогда, как показано ниже, во всей области $\lambda \ll 1$ амплитуда вероятности ионизации как при слабых, так и при умеренных полях зависит, помимо фактора $\exp(-2x''_\mathrm{pol}/\Omega)$ при слабых полях, лишь от одного-единственного параметра

$$z = \frac{(\lambda A)^{1/k}}{\Omega}\,, \tag{51}$$

а область умеренных полей начинается при $|z| \sim 1$, т.е. $\lambda_c \sim \Omega^k$. Отметим, что в первых двух примерах, описанных выше, главную роль играют именно такого рода особые точки, о которых шла речь: в первом — $k = 1$, во втором — $k = 2$. Седловые точки (и совпадающие с ними возможные полюсы матричного элемента $M\big(\mathbf{q} + \mathbf{n}\lambda f(x)\big)$ в предэкспоненциальном множителе):

$$x_s(\mathbf{q}) = x_\mathrm{pol} + \left[\frac{A\lambda}{1+q^2}\left(\pm\,\mathrm{i}\sqrt{1+q_\perp^2} - q_\parallel\right)\right]^{1/k}, \tag{52}$$

при этом в аргументе следует сохранить оба знака, поскольку все эти $2k$ точек находятся вблизи окрестности x_pol, которая в свою очередь лежит в верхней полуплоскости. Однако в области полей с умеренной напряжённостью $|z| > 1$ определяющей является лишь одна из этих точек — та, для которой значение x''_s минимально. Либо доминирует пара таких точек, если, в зависимости от порядка полюса k и $\chi \equiv \arg A$, во всей системе (52) существует такая пара зеркально симметричных относительно мнимой оси элементов, у которых мнимые части минимальны. Второй пример, рассмотренный выше, в котором $k = 2$ и $\chi = 0$, соответствует именно такому случаю: $(x_s - x_\mathrm{pol})_{q=0} = \sqrt{\lambda/2}\,(\pm 1 - \mathrm{i})$. В общем случае

$$\mathrm{Im}\,\Phi(x_s,\mathbf{q}) = x''_\mathrm{pol} - \frac{2k}{2k-1}\,\gamma\,(\lambda|A|)^{1/k} + \\ + \frac{q_\perp^2}{(\Delta q_\perp)^2} + \frac{(q_\parallel - q_{\parallel\mathrm{m}})^2}{(\Delta q_\parallel)^2}\,, \tag{53}$$

где

$$\Delta q_\parallel^2 \approx \Delta q_\perp^2 \approx x''_\mathrm{pol} + o(\lambda^{1/k})\,,$$

$$q_{\parallel\mathrm{m}} = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{(2k-1)\,x''_\mathrm{pol}}\,(\lambda|A|)^{1/k}\,,$$

$$\gamma = \max_s \frac{(x_\mathrm{pol} - x_s)''}{|x_s - x_\mathrm{pol}|} \tag{54}$$

с индексами $s = 1, 2, ..., 2k$ соответствующими различным элементам системы (52). Таким образом, в области полей с умеренной напряжённостью вероятность ионизации возрастает как $\exp[4k\gamma|z|/(2k-1)]$, а средний импульс — как $\lambda^{1/k}$. Если существует лишь одна главная седловая точка, то

$$W_i(\Omega,\lambda) = \sqrt{\pi}\left(\frac{\Omega}{2x''_\mathrm{pol}}\right)^{3/2}|M_0|^2 \times \\ \times \exp\left[-\frac{2}{\Omega}\,x''_\mathrm{pol} + \frac{4k}{2k-1}\,\gamma|z|\right], \tag{55}$$

и

$$W_\mathrm{i}(\Omega,\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\Omega}{x''_\mathrm{pol}}\right)^{3/2}|M_0|^2 \times \\ \times \exp\left(-\frac{2}{\Omega}\,x''_\mathrm{pol} + \frac{4k}{2k-1}\,\gamma|z|\right) \times \\ \times \left\{1 - \exp\left[-\frac{2}{x''_\mathrm{pol}\Omega}\left(\frac{\gamma|z|}{2k-1}\right)^2\right] \times \\ \times \cos\left(\frac{4k}{2k-1}\sqrt{1-\gamma^2}\,|z|\right)\right\}, \tag{56}$$

если учитывается вклад от двух симметричных седловых точек. Следует отметить, что в приведённых формулах в аргументах экспоненциальных и тригонометрических функций сохранены только старшие члены по параметру $\lambda \ll 1$.

Формулы (55) и (56), полученные с помощью асимптотической оценки интеграла (4) в рамках метода стационарной фазы, справедливы в области умеренных полей $\Omega^k \ll \lambda \ll 1$. Легко увидеть, что в случае слабых полей эти формулы неприменимы, поскольку они не подчиняются обычной зависимости $\sim \mathcal{E}^2$ при $\lambda \to 0$. Причина этого уже упоминалась выше при рассмотрении второго примера: при $z < 1$ вклады от всех $2k$ седловых точек, окружающих $x_{\rm pol}$, становятся одного порядка. Легко учесть все эти вклады и тем самым восстановить правильную зависимость $\sim \mathcal{E}^2$ для слабых полей. Но этим дело не ограничивается. Неверным оказывается числовой коэффициент. Проблема состоит в том, что вместе со всеми этими полюсами и седловыми точками сама точка $x_{\rm pol}$ является особой для подынтегральной функции вида $\exp\,[{\rm i}(\lambda A)^2 (x - x_{\rm pol})^{-2k+1}/(2k-1)]$ в (4). Оценка интеграла в (4), которая будет справедлива во всей области $|z| \ll 1$, т.е. в области слабых и умеренных полей, и будет учитывать всю эту структуру точек в комплексной плоскости, может быть получена в виде быстро сходящегося ряда по степеням z. В этом случае результат будет также несколько различаться в зависимости от наличия или отсутствия полюса в матричном элементе. Если матричный элемент является регулярным (полюса нет) и изменяется медленно, $M(\mathbf{q}) \approx M_0$, то

$$w_{\rm i}(\Omega, \lambda, \mathbf{q}) = \lambda^2 |M_0|^2 \exp\left[-\frac{2x''_{\rm pol}}{\Omega}(1+q^2)\right] \times \\ \times \left| S_k^{\rm reg}\left(\frac{z^k}{\sqrt{2k-1}}\right)\right|^2, \tag{57}$$

где

$$S_k^{\rm reg}(y) = 2\pi\sqrt{2k-1}\; y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)n} y^{2n}}{n!\left[(2k-1)+k\right]!}\,, \tag{58}$$

а в случае сингулярного матричного элемента

$$w_{\rm i}(\Omega, \lambda, \mathbf{q}) = \lambda^2 |M_0|^2 \exp\left[-\frac{2x''_{\rm pol}}{\Omega}(1+q^2)\right] \left|S_k^{\rm sing}(z^k)\right|^2, \tag{59}$$

где

$$S_k^{\rm sing}(y) = 2\pi k\, y \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(k+1)n} a_n y^{2n}\,, \tag{60}$$

а коэффициенты a_n определяются как

$$a_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{(2k-1)^{-m}}{m!\,\left[(2n+1)\,k-m)\right]!}\,. \tag{61}$$

Асимптотика функций $S_k^{\rm reg}$ и $S_k^{\rm sing}$ при $|z| \gg 1$ точно совпадает с результатами расчётов по методу стационарной фазы в режиме умеренных полей:

$$S_k^{\rm reg}\left(\frac{z^k}{\sqrt{2k-1}}\right) \approx \sqrt{\frac{\pi k}{|z|}}\, \exp\left(\frac{2k}{2k-1}\,\gamma|z|\right), \tag{62}$$

$$S_k^{\rm sing}(z^k) \approx \pi \exp\left(\frac{2k}{2k-1}\,\gamma|z|\right), \tag{63}$$

а подстановка их первых членов в формулы (51) и (53) даёт точный результат для режима слабых полей. Таким образом, для функций, описывающих форму импульса, содержащих особую точку (полюс), совокупность формул (9)–(12) и (57)–(61) полностью описывает вероятность ионизации при любой напряжённости поля, лишь сверху ограниченной величиной атомного поля, т.е. $\mathcal{E} \ll 1$. Впрочем, режим слабых полей представляет, пожалуй, лишь теоретический интерес: при таких коротких импульсах эффект вряд ли удастся наблюдать экспериментально.

Последний из рассмотренных выше случаев соответствует ещё одному типу особых точек функции, описывающей форму импульса, — логарифмической точке ветвления ("полюс нулевого порядка").

В случае длительных импульсов и квазимонохроматических полей зависимость вероятности реального многофотонного процесса от частоты очень резкая. Как показывают все рассуждения, приведённые выше, в случае предельно коротких импульсов (HCP, OCP) и, возможно, импульсов, содержащих несколько ($< 1/\Omega$) циклов, эта зависимость является гораздо более плавной, хотя и всё равно довольно резкой. Качественно подобное сглаживание можно объяснить как увеличение с возрастанием поля среднего эффективного числа n фотонов, поглощённых за один акт ионизации. Из-за широкого частотного спектра импульса при слабых полях этот процесс — одноквантовый, и в туннельном режиме, $\lambda \gg 1$, число участвующих в нём квантов постепенно увеличивается до $n \sim \lambda^3$ [9], в то время как для монохроматического поля это число ограничено снизу: $n > I/(\hbar\omega)$.

Начало этой работе было положено во время моего визита в Институт фундаментальных научных исследований Миллера при Калифорнийском университете в Беркли. Я благодарен Институту Миллера за эту возможность и хотел бы в особенности поблагодарить Рона Шена (Ron Shen) за гостеприимство и многочисленные ценные комментарии. Я также признателен Дж. Молоуни (J. Moloney) за дискуссию, которая подтолкнула меня начать данную работу.

Перевёл с английского *А.С. Селюков*
Научный консультант перевода *О.А. Кочаровская*

Список литературы

1. McClung F J, Hellwarth R W *J. Appl. Phys.* **33** 828 (1962)
2. New G H C *Rep. Prog. Phys.* **46** 877 (1983)
3. Shank C V, in *Ultrashort Laser Pulses and Applications* (Topics in Applied Physics, Vol. 60, Ed. W Kaiser) (Berlin: Springer-Verlag, 1988) p. 5
4. Squier J et al. *Opt. Lett.* **16** 324 (1991)

5. Zhou J et al. *Opt. Lett.* **20** 64 (1995)
6. Barty C P J et al. *Opt. Lett.* **21** 668 (1996)
7. Nisoli M et al. *Opt. Lett.* **22** 522 (1997)
8. Sartania S et al. *Opt. Lett.* **22** 1562 (1997)
9. Келдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1945 (1964); Keldysh L V *Sov. Phys. JETP* **20** 1307 (1965)
10. Perry M D et al. *Phys. Rev. A* **37** 747 (1988)

Multiphoton ionization by a very short pulse

L.V. Keldysh
P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation

Detachment of a bound electron by an electric field pulse whose duration ranges from a fraction to a few times the optical cycle but is long compared to $\hbar/I$ ($\hbar$ — Planck constant, I — binding energy) is studied theoretically, simulating the ionization of atoms by extremely short laser pulses. Because of the strong nonlinearity, the solution of the problem does not reduce to the sum of monochromatic harmonic contributions and depends significantly on the pulse shape features. A general analysis is carried out for an analytical pulse shape, and exact formulas are given for standard pulse shapes such as solitonlike, gaussian, lorenzian, etc., one- or half optical cycle in duration. The intensity and pulse length dependences of the ionization probability are of a near-universal tunneling type at high intensities. However at moderate intensities in the multiphoton regime these dependences differ widely for different pulse shapes, with ionization probabilities always a few orders of magnitude higher than for ionization by a monochromatic wave of the same intensity and mean frequency.

Keywords: multiphoton processes, tunnel and multiphoton ionization, relativistic ionization, very short laser pulses, intense laser radiation

PACS numbers: 32.80.Rm, 42.50.Hz, 42.65.Re

Bibliography — 10 references

The manuscript was written not earlier than the fall of 1997 and not later than the fall of 2000

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **187** (11) 1280 – 1287 (2017)

Physics – Uspekhi **60** (11) (2017)

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.10.038229

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.10.038229