Ноябрь 2017 г. *Том 187, № 11*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПАМЯТИ ЛЕОНИДА ВЕНИАМИНОВИЧА КЕЛДЫША

ИЗ АРХИВА

Когерентные состояния экситонов*

Л.В. Келдыш

Сформулировано понятие когерентного состояния экситонов. Показано, что для такого состояния может быть введена макроскопическая волновая функция экситонов, подчиняющаяся нелинейному уравнению типа уравнений феноменологической теории сверхтекучей жидкости. Соответствующим недиссипативным потоком является поток энергии. Для экситонов, взаимодействующих с электромагнитным полем, получается связанная система уравнений Максвелла и уравнения типа уравнений феноменологической теории бозе-жидкости (уравнения Гинзбурга – Питаевского).

Ключевые слова: экситоны, когерентное состояние экситонов, макроскопическая волновая функция, феноменологическая теория сверхтекучей жидкости, уравнения бозе-жидкости, уравнения Гинзбурга – Питаевского

PACS numbers: 03.75.Kk, **67.10.–j**, **71.35.–y** DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.10.038227

В последние годы появилось значительное число теоретических работ [1 – 14], посвящённых проблеме конденсации экситонов в кристаллах. В этих работах речь идёт, по существу, о трёх разных проблемах: о термодинамически равновесной перестройке электронного спектра кристалла, связанной с неустойчивостью исходного спектра относительно межэлектронного взаимодействия [6 – 8]; о бозе-конденсации неравновесных (например, возбуждённых светом) экситонов [1 – 5]; о слипании неравновесных экситонов в некоторую плотную фазу, т.е. о конденсации в том самом смысле слова, в каком любой газ конденсируется в жидкость [14, 15].

Из этих трёх проблем проблема бозе-конденсации неравновесных экситонов появилась в литературе раньше других, однако именно по ней до настоящего времени существуют наиболее принципиальные расхождения между точками зрения различных авторов. В первых работах [1 – 3] предполагалось, что экситоны, состоящие из двух ферми-частиц (электрона и дырки), являются бозонами и на систему экситонов могут быть непосредственно перенесены известные результаты теории бозе-газа и бозе-жидкости, состоящих из бесструктурных бозе-частиц. Последующее рассмотрение [4, 5] показало, что учёт отклонений статистики экситонов от бозевской должен проводиться вместе с учётом взаимодействия между ними и что при достаточно больших плотностях экситонов само понятие экситона теряет смысл. Однако при малых плотностях система экситонов действительно ведёт себя подобно слабо неидеальному бозе-газу, и, в частности, у неё могут существовать состояния сверхтекучего движения через кристалл. Но в последнее время было высказано утверждение [13], что, в отличие от системы истинных бозонов, система экситонов в принципе не может быть сверхтекучей. Анализу этой ситуации и выяснению вопроса о том, что же означает бозе-конденсация и сверхтекучесть экситонов с физической (наблюдательной) точки зрения, и посвящена настоящая статья. Мы увидим, в частности, что выводы [13] о невозможности сверхтекучести экситонов основаны на некотором недоразумении.

Экситоном мы называем, как обычно, мигрирующее электронное возбуждение в кристалле, не связанное с переносом заряда и массы. В простейших моделях молекулярного кристалла и полупроводника экситон есть соответственно возбуждённое состояние одной молекулы, резонансным образом передающееся от одной элементарной ячейки кристалла к другой (экситон Френкеля), и водородоподобное связанное состояние электрона и дырки (экситон Ванье – Мотта). Таким образом, просто по определению, движение экситонов не может сопровождаться потоком вещества и электрическим током. Экситоны переносят свою энергию возбуждения и, может быть, такие величины, как момент количества движения, электрические и магнитные моменты, если они у данного типа экситонов имеются. Поэтому и сверхтекучесть неравновесных экситонов может означать существование незатухающих (с оговоркой, которая будет сделана ниже) потоков энергии или, например, поляризации, но не сверхтекучий перенос массы или заряда. Доказательство же невозможности сверхтекучести экситонов в [13] полностью основано на исследовании переноса массы.

Отметим ещё попутно, что, вопреки мнению авторов [13], их формальное доказательство вообще не относится к неравновесным экситонам, поскольку в процессе до-

Л.В. Келдыш. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация

* Статья впервые была опубликована в 1972 г. в сборнике *Проблемы теоретической физики*, посвящённом памяти Игоря Евгеньевича Тамма [19].

казательства всем электронам приписывается одно и то же значение химического потенциала, что соответствует предположению о наличии полного термодинамического равновесия в системе. На самом же деле конденсация неравновесных экситонов предполагает неполное равновесие в системе электронов и дырок; неполное в том смысле, что электроны, дырки и экситоны находятся в равновесии друг с другом и с кристаллической решёткой по всем параметрам, кроме одного — полное число экситонов и электронно-дырочных пар определено не условием термодинамического равновесия, а каким-то внешним источником возбуждения. Такая ситуация легко осуществляется в реальных условиях, поскольку процесс рекомбинации в большинстве случаев является гораздо более медленным, чем процессы термализации электронов и дырок и их связывания в экситоны.

Так, например, в германии при гелиевых температурах время термализации $\lesssim 10^{-9}$ с и такого же порядка время связывания электронов и дырок в экситоны, если их концентрация $n_{\mathrm{e,h}} \gtrsim 10^{12}$ см$^{-3}$, а время жизни экситонов $\gtrsim 10^{-5}$ с. Значительно бо́льшим время жизни экситонов может быть в тех случаях, когда их рекомбинация запрещена по спину. Теперь мы можем несколько уточнить понятие сверхтекучего потока экситонов. Ясно, что, в отличие от случаев жидкого гелия или сверхпроводника, сверхтекучий поток экситонов может существовать не сколь угодно долго, а лишь в течение времени жизни экситонов, и переход системы экситонов в сверхтекучее состояние означает, что время затухания потоков определяется не временем рассеяния экситонов, а на несколько порядков бо́льшим временем их жизни.

Наиболее обычно представление об экситонах как о некоторых квазичастицах в кристалле, и с этой точки зрения их бозе-конденсация есть накопление макроскопического числа таких квазичастиц в одном состоянии. Однако эта же ситуация может быть описана и в других терминах: экситоны, по существу, являются, как известно [16, 17], квантами нормальных колебаний электронной плотности кристалла, аналогичными во многом плазмонам. Бозе-конденсированное состояние их тогда есть когерентная (с определённой фазой) волна электронной плотности конечной (а не порядка V^{-1}, где V — объём системы) амплитуды. Утверждение же о сверхтекучести означает, что учёт нелинейных по амплитуде эффектов приводит для такой волны к полному подавлению процессов рассеяния.

Перейдём теперь к более формальному рассмотрению поставленной задачи. Электронный гамильтониан кристалла в представлении вторичного квантования имеет обычный вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\int \psi_\alpha^+(\mathbf{x})\,\nabla^2\psi_\alpha(\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3x - \\ - \sum_{\mathbf{n},k} Z_k e^2 \int \frac{\psi_\alpha^+(\mathbf{x})\,\psi_\alpha(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}_{\mathbf{n},k}|}\;\mathrm{d}^3x + \\ + \frac{e^2}{2}\int \frac{\psi_\alpha^+(\mathbf{x})\,\psi_\beta^+(\mathbf{x}')\,\psi_\beta(\mathbf{x}')\,\psi_\alpha(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\;\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,. \qquad (1)$$

Здесь $\psi_\alpha^+(\mathbf{x})$ и $\psi_\alpha(\mathbf{x})$ — фермиевские операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям $[\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta^+(\mathbf{x}')]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$, символ $[...]_+$ обозначает антикоммутатор, $\hbar$, m_0 и e — постоянная Планка, масса и заряд электрона, Z_k и $\mathbf{R}_{\mathbf{n},k}$ — атомный номер и радиус-вектор ядра, занимающего k-е место в $\mathbf{n}$-й элементарной ячейке кристалла. Для простоты мы считаем ядра жёстко закреплёнными и дальнейшее рассмотрение проведём сначала в приближении самосогласованного поля. Тогда оператор $\psi_\alpha(\mathbf{x})$ может быть разложен на электронную (положительночастотную) и дырочную (отрицательночастотную) части:

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}) = \psi_\alpha^{(\mathrm{e})}(\mathbf{x}) + \psi_\alpha^{(\mathrm{h})+}(\mathbf{x})\,,$$
$$\psi_\alpha^{(\mathrm{e})}(\mathbf{x}) = \sum_{j>j_0} a_j\chi_{j\alpha}(\mathbf{x})\,, \qquad \psi_\alpha^{(\mathrm{h})+}(\mathbf{x}) = \sum_{j\leqslant j_0} a_j\chi_{j\alpha}(\mathbf{x})\,, \qquad (2)$$
$$[a_j, a_{j'}^+]_+ = \delta_{jj'}\,, \qquad [a_j, a_{j'}]_+ = 0\,.$$

Здесь $\chi_{j\alpha}(\mathbf{x})$ — система базисных хартри-фоковских функций, причём индекс $j \leqslant j_0$ нумерует состояния заполненных электронных зон, а $j > j_0$ — свободных. Функции эти должны, очевидно, иметь блоховский вид

$$\chi_{j\alpha}(\mathbf{x}) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\mathbf{px}\right)u_{\mathbf{p}l\alpha}(\mathbf{x})\,,$$

где $\mathbf{p}$ — квазиимпульс, l — номер зоны. Таким образом, в формулах (2) $j = \{\mathbf{p}, l\}$, и, поскольку мы имеем в виду неметаллические кристаллы, суммирование по $j \leqslant j_0$ означает суммирование по всем $\mathbf{p}$ в пределах первой зоны Бриллюэна и по $l \leqslant l_0$.

Функции $\chi_{j\alpha}(\mathbf{x})$ удовлетворяют уравнениям Хартри–Фока

$$\int h_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,\chi_{j\beta}(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3x' = \varepsilon_j\chi_{j\alpha}(\mathbf{x})\,, \qquad (3)$$

$$h_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_0}\,\nabla^2 - \sum_{\mathbf{n},k}\frac{Z_k e^2}{|\mathbf{R}_{\mathbf{n},k}-\mathbf{x}|} + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{2}\int\frac{g_{\beta\beta}(\mathbf{y},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\;\mathrm{d}^3y\right\} - e^2\,\frac{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,, \qquad (4)$$

где

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_{j\leqslant j_0}\chi_{j\alpha}(\mathbf{x})\,\chi_{j\beta}^*(\mathbf{x}')\,.$$

Функция $g_{\alpha\beta}$ является оператором проектирования на подпространство заполненных электронных состояний и совпадает с предельным значением функции Грина электронов

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{x}t;\mathbf{x}'t') = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left\langle\left(T\psi_\alpha^{(0)}(\mathbf{x}t)\,\psi_\beta^{+(0)}(\mathbf{x}'t')\right)\right\rangle_0$$

при $t' \to t-0$. Символ $\langle T...\rangle_0$ здесь, как обычно, обозначает среднее по основному состоянию от хронологически упорядоченного произведения операторов, а $\psi_\alpha^{(0)}(\mathbf{x}t)$ — оператор ферми-поля электронов в представлении взаимодействия.

Интересующие нас экситонные состояния описываются двухчастичной двухвременной функцией Грина

$$G_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t;\mathbf{x}',\mathbf{y}',t') = \\ = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left\langle T\psi_\alpha^+(\mathbf{x}t)\,\psi_\beta(\mathbf{y}t)\,\psi_\gamma^+(\mathbf{x}'t')\,\psi_\delta(\mathbf{y}'t')\right\rangle_0\,,$$

где $\psi_\alpha(\mathbf{x}t)$ — гейзенберговские операторы.

Вводя полную систему возбуждённых состояний $|J\mathbf{P}\rangle$, где $\mathbf{P}$ — суммарный квазиимпульс, а J — набор всех других квантовых чисел, и соответствующие им уровни энергии $E_{J\mathbf{P}}$, можно записать $G^{(2)}$ в виде

$$\mathrm{i}\hbar G^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y},t;\mathbf{x}',\mathbf{y}',t') = \sum_{\mathbf{P},J}\Biggl\{\varphi^{\mathbf{P}J}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi^{\mathbf{P}J*}_{\gamma\delta}(\mathbf{x}',\mathbf{y}')\times \times\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{x}'-\mathbf{y}'}{2} - E_{J\mathbf{P}}(t-t')\right)\right]\Biggr\} \text{ при } t>t',$$

$$\mathrm{i}\hbar G^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y},t;\mathbf{x}',\mathbf{y}',t') = \sum_{\mathbf{P},J}\Biggl\{\varphi^{\mathbf{P}J*}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi^{\mathbf{P}J}_{\gamma\delta}(\mathbf{x}',\mathbf{y}')\times \times\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{x}'-\mathbf{y}'}{2} - E_{J\mathbf{P}}(t-t')\right)\right]\Biggr\} \text{ при } t<t',$$

где

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\mathbf{P}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right)\varphi^{\mathbf{P}J}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left\langle 0\middle|\psi^+_\alpha(\mathbf{x})\,\psi_\beta(\mathbf{y})\middle|J\mathbf{P}\right\rangle. \quad (5)$$

В силу трансляционной симметрии задачи

$$\varphi^{\mathbf{P}J}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}+\mathbf{R_n},\mathbf{y}+\mathbf{R_n}) = \varphi^{\mathbf{P}J}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad (6)$$

если $\mathbf{R_n}$ — произвольный вектор кристаллической решётки. Переходя к представлению квазиимпульса и фурье-представлению по времени, получим

$$G^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{x}',\mathbf{y}';\mathbf{P}E) = = \sum_J \frac{2E_{J\mathbf{P}}}{E^2-(E_{J\mathbf{P}}-\mathrm{i}\delta)^2}\,\varphi^{J\mathbf{P}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi^{J\mathbf{P}*}_{\gamma\delta}(\mathbf{x}',\mathbf{y}'), \quad \delta\to+0. \quad (7)$$

Экситонам соответствуют дискретные (при фиксированном $\mathbf{P}$) значения $E_{J\mathbf{P}}$, т.е. полюсы (7), а соответствующая функция $\varphi^{\mathbf{P}J}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\exp\left[(\mathrm{i}/2\hbar)\mathbf{P}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right]$, определяемая формулой (5), может рассматриваться как волновая функция экситона, причём переменные $(\mathbf{x},\alpha)$ относятся к электрону, а $(\mathbf{y},\beta)$ — к дырке. Соответственно этому единственно возможным определением операторов рождения и уничтожения экситона $J\mathbf{P}$ является, по-видимому,

$$B^+_{J\mathbf{P}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\int\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\,\mathbf{P}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right)\times \times\psi^+_\alpha(\mathbf{x})\,\varphi^{J\mathbf{P}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\psi_\beta(\mathbf{y})\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y, \quad (8)$$

$$B_{J\mathbf{P}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\int\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\,\mathbf{P}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right)\times \times\psi^+_\alpha(\mathbf{x})\,\varphi^{J\mathbf{P}+}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\psi_\beta(\mathbf{y})\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y, \quad (9)$$

где $\varphi^{J\mathbf{P}+}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [\varphi^{J\mathbf{P}}_{\beta\alpha}(\mathbf{y},\mathbf{x})]^*$, V — нормировочный объём. Написав коммутатор этих операторов

$$[B_{J\mathbf{P}},B^+_{J'\mathbf{P}'}] = \frac{1}{V}\int\psi^+_\alpha(\mathbf{x})\Biggl\{\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\,\mathbf{P}'\mathbf{x}\right)\varphi^{J'\mathbf{P}'+}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z})\times \times\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}(\mathbf{P}-\mathbf{P}')\mathbf{z}\right)\varphi^{J\mathbf{P}}_{\gamma\beta}(\mathbf{z},\mathbf{y})\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\,\mathbf{P}\mathbf{y}\right) - -\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\,\mathbf{P}\mathbf{x}\right)\varphi^{J\mathbf{P}}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z})\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}(\mathbf{P}-\mathbf{P}')\mathbf{z}\right)\times \times\varphi^{J'\mathbf{P}'+}_{\gamma\beta}(\mathbf{z},\mathbf{y})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\,\mathbf{P}'\mathbf{y}\right)\Biggr\}\psi_\beta(\mathbf{y})\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{d}^3z, \quad (10)$$

легко видеть, что они, вообще говоря, весьма далеки от бозевских. Однако ситуация упрощается в приближении самосогласованного поля, когда имеется полная ортогональная система одноэлектронных состояний. В этом случае волновая функция экситона может быть представлена как суперпозиция произведений электронных и дырочных состояний

$$\varphi^{J\mathbf{P}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{l>l_0,\,l'\leqslant l_0,\,\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}l\gamma}(\mathbf{x})(\varphi^{J\mathbf{P}}_{\alpha\beta})^{\gamma\delta}_{ll'}u^*_{\mathbf{p}-\mathbf{P}l'\delta}(\mathbf{y}). \quad (11)$$

В этом случае произведения $\varphi\varphi^+$ и $\varphi^+\varphi$ являются операторами проектирования на взаимно ортогональные подпространства электронных и дырочных состояний, и поэтому, разбивая операторы ψ в (10) на электронную и дырочную части и используя условие ортонормированности функций $\varphi^{J\mathbf{P}}$

$$\frac{1}{V}\int\varphi^{J\mathbf{P}+}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\varphi^{J'\mathbf{P}}_{\beta\alpha}(\mathbf{y},\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y = \delta_{JJ'}, \quad (12)$$

можно преобразовать (10) к следующему виду

$$[B_{J\mathbf{P}},B^+_{J'\mathbf{P}'}] = \delta_{JJ'}\delta_{\mathbf{PP}'} - \frac{1}{V}\int\Biggl\{\psi^{(\mathrm{e})+}_\alpha(\mathbf{x})\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\,\mathbf{P}\mathbf{x}\right)\times \times\varphi^{J\mathbf{P}}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z})\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}(\mathbf{P}-\mathbf{P}')\mathbf{z}\right)\varphi^{J'\mathbf{P}'+}_{\gamma\beta}(\mathbf{z},\mathbf{y})\times \times\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathbf{P}'\mathbf{y}\right)\psi^{(\mathrm{e})}_\beta(\mathbf{y}) + \psi^{(\mathrm{h})+}_\alpha(\mathbf{x})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\,\mathbf{P}'\mathbf{y}\right)\times \times\varphi^{J'\mathbf{P}'+}_{\beta\gamma}(\mathbf{y},\mathbf{z})\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}(\mathbf{P}-\mathbf{P}')\mathbf{z}\right)\varphi^{J\mathbf{P}}_{\gamma\alpha}(\mathbf{z},\mathbf{x})\times \times\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\,\mathbf{P}\mathbf{x}\right)\psi^{(\mathrm{h})}_\beta(\mathbf{y})\Biggr\}\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{d}^3z. \quad (13)$$

Из последнего соотношения видно, что операторы B близки к бозевским для слабовозбуждённых состояний системы, причём отклонение их коммутационных соотношений от бозевских порядка $n_{\mathrm{e}}a^3$, где n_{e} — плотность электронных возбуждений, a — эффективный радиус экситона, определяемый характером убывания $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ при больших $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$: $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \lesssim \mathrm{const}\times\exp\left[-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/a\right]$ при $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\gg a$.

Если бы экситоны были чисто бозевскими частицами и, кроме того, можно было бы пренебречь взаимодействием между ними, когерентные состояния экситонов могли бы быть определены обычным образом

$$|\beta,J\mathbf{P}\rangle = = \exp\left[\beta B^+_{J\mathbf{P}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,E_{J\mathbf{P}}t\right) - \beta^*B_{J\mathbf{P}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,E_{J\mathbf{P}}t\right)\right]|0\rangle. \quad (14)$$

Однако учёт отклонений статистики экситонов от бозевской и взаимодействия между ними приводит к тому, что с изменением амплитуды экситонной волны β меняется и сам вид оператора $B_{J\mathbf{P}}$, и значение энергии $E_{J\mathbf{P}}$. Поэтому когерентные состояния экситонов должны быть определены более общим образом

$$|\varphi\rangle = \exp\Biggl\{\int\Biggl[\psi^+_\alpha(\mathbf{x})\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi_\beta(\mathbf{y})\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}-\mu t\right)\right) - -\psi^+_\alpha(\mathbf{x})\varphi^+_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi_\beta(\mathbf{y})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}-\mu t\right)\right)\Biggr]\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\Biggr\}|0\rangle. \quad (15)$$

Входящая в это определение функция $\varphi_{\alpha\beta}$ не совпадает ни с одной из $\varphi_{\alpha\beta}^{J\mathbf{P}}$, но стремится к одной из них в пределе малой плотности, а точный её вид, так же как и значение μ, должен быть определён из уравнения Шрёдингера

$$\left(\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}-H\right)|\varphi\rangle=0\,.$$

Обозначив оператор в правой части (15) D_φ, преобразуем это уравнение к виду

$$D_\varphi D_\varphi^+\left(\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}-H\right)D_\varphi|0\rangle=0\,,$$

который эквивалентен уравнению

$$\left(\mathrm{i}\hbar D_\varphi^+\,\frac{\partial D_\varphi}{\partial t}-\tilde{H}\right)|0\rangle=0\,. \qquad (16)$$

Здесь $\tilde{H}=D_\varphi^+HD_\varphi$.

Уравнение (16) не может быть удовлетворено строго никаким выбором функции $\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, поскольку вид функции (15) не учитывает многочастичные корреляционные эффекты и по своему смыслу соответствует описанию состояния системы в самосогласованном приближении. Ситуация эта не является специфичной для экситонов. В любой системе взаимодействующих бозонов когерентные состояния определяются формулой (14) лишь в самосогласованном приближении. Вычисление всех корреляционных поправок может быть проведено в рамках диаграммной техники для сильно неравновесных состояний, изложенной в [18]. В настоящей работе мы ограничимся, как уже указывалось выше, рассмотрением низшего — самосогласованного приближения. В этом приближении функция $\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ имеет структуру, аналогичную (11), т.е. её разложение по системе функций $\chi_{j\alpha}(\mathbf{x})$ содержит только электронные состояния для переменной $\mathbf{x}$ и только дырочные — для $\mathbf{y}$. Поэтому оператор D_φ может быть переписан в виде

$$D_\varphi=\exp\left\{\iint\left[\psi_\alpha^{(\mathrm{e})+}(\mathbf{x})\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\times\right.\right.$$
$$\times\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}-\mu t\right)\right)\psi_\beta^{(\mathrm{h})+}(\mathbf{y})-\psi_\beta^{(\mathrm{h})}(\mathbf{y})\varphi_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x},\mathbf{y})\times$$
$$\left.\left.\times\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}-\mu t\right)\right)\psi_\alpha^{(\mathrm{e})}(\mathbf{x})\right]\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\right\}. \qquad (17)$$

Этот унитарный оператор осуществляет, как известно, линейное преобразование операторов $\psi^{(\mathrm{e})}$ и $\psi^{(\mathrm{h})}$. С физической точки зрения это означает, что благодаря частичному перераспределению электронов при рождении большого количества экситонов меняется понятие дырки (подпространства заполненных состояний) в рассматриваемой системе. Для переопределённых таким образом операторов состояние (15) является вакуумным. Переход к новым операторам осуществляется по формулам

$$\psi_\alpha^{(\mathrm{e})}(\mathbf{x})\to D_\varphi^+\psi_\alpha^{(\mathrm{e})}(\mathbf{x})D_\varphi=\int\left\{C_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi_\alpha^{(\mathrm{e})}(\mathbf{y})+\right.$$
$$\left.+\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}-\mu t\right)\right)S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi_\beta^{(\mathrm{h})+}(\mathbf{y})\right\}\mathrm{d}^3y\,,$$

$$\psi_\alpha^{(\mathrm{h})}(\mathbf{x})\to D_\varphi^+\psi_\alpha^{(\mathrm{h})}(\mathbf{x})D_\varphi=\int\left\{\tilde{C}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi_\alpha^{(\mathrm{h})}(\mathbf{y})-\right.$$
$$\left.-\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}-\mu t\right)\right)\psi_\beta^{(\mathrm{e})+}(\mathbf{y})S_{\beta\alpha}(\mathbf{y},\mathbf{x})\right\}\mathrm{d}^3y\,. \qquad (18)$$

Здесь

$$C_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(\varphi\varphi^+)^n\,,$$
$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\varphi(\varphi^+\varphi)^n\,. \qquad (19)$$

В формулах (19) перемножение операторов φ и φ^+ понимается в смысле интегральных свёрток. Используя (18) и (19), приведём уравнение (16) к следующему виду

$$0=\iint\left\{\psi_\alpha^{(\mathrm{e})+}(\mathbf{x})\tilde{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{e})}(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi_\beta^{(\mathrm{e})}(\mathbf{y})+\psi_\alpha^{(\mathrm{h})+}(\mathbf{x})\tilde{h}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{h})}(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi_\beta^{(\mathrm{h})}(\mathbf{y})+\right.$$
$$+\psi_\alpha^{(\mathrm{e})+}(\mathbf{x})Q_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi_\beta^{(\mathrm{h})+}(\mathbf{y})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}-\mu t\right)\right)+$$
$$+\psi_\beta^{(\mathrm{h})}(\mathbf{y})Q_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi_\alpha^{(\mathrm{e})}(\mathbf{x})\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}-\mu t\right)\right)+$$
$$\left.+\frac{e^2}{2}\,\frac{N\big[\psi_\alpha^+(\mathbf{x})\psi_\beta^+(\mathbf{y})\psi_\beta(\mathbf{y})\psi_\alpha(\mathbf{x})\big]}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right\}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,|0\rangle\,. \qquad (20)$$

Здесь $N[...]$ — нормально упорядоченное произведение операторов $\psi=\psi^{(\mathrm{e})}+\psi^{(\mathrm{h})+}$. Хотя формально член межэлектронного взаимодействия выглядит так же, как и до преобразования, фактически он уже иной, поскольку изменились операторы $\psi^{(\mathrm{e})}$ и $\psi^{(\mathrm{h})}$, а вместе с ними и функция $G_{\alpha\beta}^{(0)}$.

В самосогласованном приближении уравнение (20) принимает следующий вид (мы используем опять символическую запись, понимая под произведениями интегральные свёртки)

$$\big\{\psi^{(\mathrm{e})+}\tilde{h}^{(\mathrm{e})}\psi^{(\mathrm{e})}+\psi^{(\mathrm{h})+}\tilde{h}^{(\mathrm{h})}\psi^{(\mathrm{h})}+$$
$$+\psi^{(\mathrm{e})+}Q\psi^{(\mathrm{h})+}+\psi^{(\mathrm{h})}Q^+\psi^{(\mathrm{e})}\big\}|0\rangle=0\,. \qquad (21)$$

Здесь, как и в (20), использованы следующие обозначения

$$\tilde{h}^{(\mathrm{e})}=C\big(h^{(\mathrm{e})}-v\big)C-S\big(h^{(\mathrm{h})}-v^+\big)S^++$$
$$+CVS^++SV^+C-\mu S^+S\,, \qquad (22)$$
$$Q=C\big(h^{(\mathrm{e})}-v\big)S+S\big(h^{(\mathrm{h})}+v^+\big)\tilde{C}-$$
$$-CV\bar{C}+SV^+S-\mu CS\,. \qquad (23)$$

Матрица $\bar{C}$ отличается от C перестановкой $\varphi\rightleftarrows\varphi^+$, а величины V и v определены следующим образом

$$V_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\int S_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z})\,\tilde{C}_{\gamma\beta}(\mathbf{z},\mathbf{y})\,\mathrm{d}^3z\,, \qquad (24)$$

$$v_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\int S_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{z})S_{\gamma\beta}^+(\mathbf{z},\mathbf{y})\,\mathrm{d}^3z\,. \qquad (25)$$

Отметим ещё соотношения $CC+SS^+=1$ и $CS=S\tilde{C}$, а также тот факт, что величины

$$n_\mathrm{e}(\mathbf{x})=\int S_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,S_{\beta\alpha}^+(\mathbf{y},\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3y\,,$$
$$n_\mathrm{h}(\mathbf{x})=\int S_{\alpha\beta}^+(\mathbf{x},\mathbf{y})\,S_{\beta\alpha}(\mathbf{y},\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3y \qquad (26)$$

определяют соответственно плотности возбуждённых электронов и дырок, которые для рассматриваемого пока класса состояний периодичны с периодом решётки кристалла.

Необходимым и достаточным условием выполнения равенства (21) является, очевидно, $Q \equiv 0$, поскольку первые два члена в левой части, действуя на вакуум, дают нуль. Таким образом, уравнение (21) сводится к уравнению

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\,, \tag{27}$$

которое в силу (19), (23)–(25) является нелинейным интегродифференциальным уравнением, определяющим функцию $\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а химический потенциал экситонов μ определяется как собственное значение (27). Общее исследование [2] решений (27) вряд ли возможно; поэтому мы ограничимся в дальнейшем случаем относительно малых плотностей возбуждения $n_{\mathrm{e,h}} a^3 \ll 1$, когда можно провести разложение (27) по степеням φ, используя соотношения

$$C \simeq 1 - \frac{1}{2}\,\varphi\varphi^+\,, \qquad \tilde{C} \simeq 1 - \frac{1}{2}\,\tilde{\varphi}^+\varphi\,, \qquad S \simeq \varphi - \frac{1}{6}\,\varphi\varphi^+\varphi\,.$$

В низшем — линейном по φ — приближении получим

$$\int\left\{h^{(\mathrm{e})}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\,\varphi_{\gamma\beta}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + h^{(\mathrm{h})}_{\gamma\beta}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\,\varphi_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\right\}\mathrm{d}^3 z - \\ - \left(\frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \mu\right)\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\,. \tag{28}$$

Это — уравнение Шрёдингера для электрона и дырки, взаимодействующих по закону Кулона. Истинное их взаимодействие в кристалле гораздо сложнее, однако легко показать, что суммирование всех корреляционных поправок, линейных по φ, приведёт (28) точно к уравнению для $\varphi^{J\mathbf{P}}$ — экситонных волновых функций. В дальнейшем мы заменим индекс J на 0, имея в виду наинизшую экситонную ветвь спектра. Таким образом, в низшем приближении

$$\varphi = \sqrt{n}\,\varphi^{0\mathbf{P}}\,, \qquad \mu^{(0)} = E_{0\mathbf{P}}\,,$$

где нормировочный множитель $\sqrt{n}$ определяется средней концентрацией экситонов. Условие разрешимости уравнения следующего приближения ($\sim \varphi^3$) позволяет найти $\mu^{(1)}$ — сдвиг уровня, пропорциональный n:

$$\mu^{(1)} = \varkappa n\,,$$
$$\varkappa = e^2 \int \mathrm{d}^3 x\,\mathrm{d}^3 y\left\{\int\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\right)\times \right. \\ \times \varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi^+_{\beta\gamma}(\mathbf{y}, \mathbf{z}')\,\varphi_{\gamma\delta}(\mathbf{z}', \mathbf{z})\,\varphi^+_{\delta\alpha}(\mathbf{z}, \mathbf{x})\,\mathrm{d}^3 z\,\mathrm{d}^3 z' - \\ - \sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\left(\left|\int \varphi_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\,\varphi^+_{\gamma\beta}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}^3 z\right|^2 + \right. \\ \left.\left. + \left|\int \varphi^+_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\,\varphi_{\gamma\beta}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}^3 z\right|^2\right)\right\}. \tag{29}$$

Константа $\varkappa$ вычислена также для чисто кулоновского случая. Суммирование поправок для неё представляет уже более трудную задачу [4], поэтому удобнее считать её просто феноменологическим параметром.

До сих пор мы рассматривали стационарные когерентные состояния экситонов с заданным суммарным квазиимпульсом $\mathbf{P}$, т.е. с одинаковой во всех элементарных ячейках кристалла средней плотностью возбуждения n. Более общим случаем являются волновые пакеты, составленные из состояний такого типа.

Для того чтобы ввести их, зададим преобразование D_Φ более общего вида

$$D_\Phi = \exp\left\{\int\!\!\int\left[\psi^{(\mathrm{e})+}_{\alpha}(\mathbf{x})\,\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\mu t\right)\psi^{(\mathrm{h})+}_{\beta}(\mathbf{y}) - \right.\right. \\ \left.\left. - \psi^{(\mathrm{h})}_{\beta}(\mathbf{y})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\mu t\right)\Phi^+_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\,\psi^{(\mathrm{e})}_{\alpha}(\mathbf{x})\right]\mathrm{d}^3 x\,\mathrm{d}^3 y\right\},$$

причём зависимость $\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ от t будем считать медленной по сравнению с $\exp\left((\mathrm{i}/\hbar)\mu t\right)$. Аналогично изложенному выше в этом случае получается уравнение для Φ вида

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} - Q\{\Phi\} = 0\,.$$

Решение этого уравнения можно искать в виде $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}, t)\varphi^{0\mathbf{P}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, считая $|a\nabla\Phi(\mathbf{X}, t)/\Phi| \ll 1$, т.е. рассматривая $\Phi(\mathbf{X}, t)$ как медленно меняющуюся амплитуду. $\mathbf{P}$ мы положим равным $\mathbf{P}_{\mathrm{m}}$ — значению, при котором $E_{0\mathbf{P}}$ достигает минимума; в его окрестности $E_{0\mathbf{P}} \approx E_0 + (\mathbf{P}-\mathbf{P}_{\mathrm{m}})^2/2m$. Тогда в низшем приближении, пренебрегая нелинейными членами и производными $\Phi(\mathbf{X}, t)$, получим $\mu = E_0$, а в следующем приближении — уравнение для $\Phi(\mathbf{X}, t)$

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi - \varkappa|\Phi|^2\Phi = 0\,, \tag{30}$$

эквивалентное, как известно, феноменологическим уравнениям гидродинамики сверхтекучей жидкости, если $\varkappa > 0$.

Выше речь шла об экситонах, практически не взаимодействующих со светом. В случае конденсации дипольно активных экситонов автоматически должно создаваться сопровождающее их электромагнитное поле, также в когерентном состоянии. Написав полный гамильтониан частиц и поля, нетрудно получить для амплитуд когерентных состояний следующую систему уравнений:

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\Phi + (\hbar\omega - E_0)\Phi - \varkappa|\Phi|^2\Phi = \mathbf{Ed}\,, \\ \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}) + \frac{\tilde{\varepsilon}}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}\omega\right)^2\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\,\mathbf{d}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}\omega\right)^2\Phi\,. \tag{31}$$

Здесь ω — средняя частота поля, $\mathbf{d}$ — матричный элемент дипольного момента для экситонного перехода, $\tilde{\varepsilon}$ — диэлектрическая постоянная кристалла за вычетом вклада рассматриваемого экситонного состояния, $\mathbf{E}(x, t)$ — комплексная амплитуда поля, через которую реальное поле выражается как

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}(x, t)\exp(-\mathrm{i}\omega t) + \mathbf{E}^*(x, t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\right).$$

Система уравнений (31) содержит эффекты частотной и пространственной дисперсии и нелинейной поляризуемости.

В случае кристаллов высокой симметрии экситонные состояния могут быть вырождены и для их описания приходится ввести несколько функций Φ. Это усложняет систему (31), но не меняет качественных результатов.

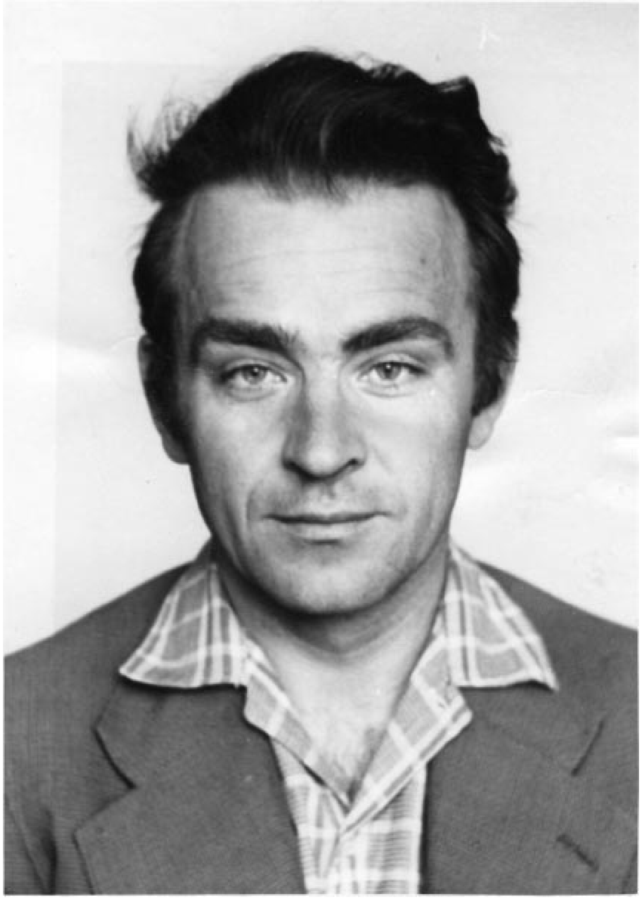
От редакционной коллегии. Публикуемая в этом мемориальном номере *УФН* статья Л.В. Келдыша "Когерентные состояния экситонов" была опубликована в 1972 г. в сборнике памяти И.Е. Тамма [19] и осталась сравнительно мало известной физическому сообществу. Тем не менее это работа имеет довольно принципиальный характер.

Во второй половине 1960-х и вплоть до начала 1970-х годов в физической литературе развернулась интересная дискуссия о возможности бозе-конденсации и сверхтекучести в системе экситонов в полупроводниках. При этом довольно быстро эта дискуссия стала достаточно запутанной и данная работа Л.В. Келдыша посвящена прояснению ряда связанных с ней принципиальных моментов. С самого начала в ней подчёркивается, что речь может здесь идти о трёх принципиально разных задачах. Одна из них непосредственно связана с перестройкой электронного спектра полуметалла за счёт образования бозе-конденсата электрон-дырочных пар в основном (равновесном) состоянии модели экситонного диэлектрика Келдыша – Копаева [6]. Другая связана с возможностью бозе-конденсации и сверхтекучести неравновесного газа экситонов, возникающего при оптической накачке полупроводников [1, 4]. А третья задача относится к картине образования (конденсации) электрон-дырочных капель, возникающих в сильно возбуждённых полупроводниках при разрушении экситонов с переходом в фазу достаточно плотной электрон-дырочной ферми-жидкости [20]. На эксперименте, в большинстве реальных (многодолинных) полупроводников реализуется именно этот последний сценарий, предсказанный Л.В. Келдышем в заключительном слове на IX международной конференции по физике полупроводников, проходившей в Москве в 1968 г. [20].

В то же время прямая аналогия, существующая между моделью экситонного изолятора и сверхпроводника БКШ, привела ряд авторов к противоречивым утверждениям как о возможности сверхтекучести конденсата электрон-дырочных пар в этой модели, проявляющейся в явлениях типа сверхтеплопроводности [8], так и к полному отрицанию возможности сверхтекучести в системе экситонов [11]. Именно разъяснению некоторых из этих противоречий посвящена вновь публикуемая сейчас в *УФН* работа [19].

В этой работе анализируется в основном возможность сверхтекучести *неравновесных* экситонов, возникающих в полупроводнике под воздействием внешнего источника возбуждения. При этом подчёркивается, что движение экситонов не может сопровождаться потоком вещества и электрическим током, но может означать существование незатухающих (с поправкой на время жизни экситонов) потоков энергии или поляризации, но не сверхтекучий перенос массы или заряда, что сразу обесценивает "общее" доказательство Кона и Шеррингтона, которое к тому же с самого начала предполагало наличие термодинамического равновесия (т.е. систему типа экситонного изолятора).

Основная часть работы посвящена явному построению когерентных состояний экситонов, с учётом их, в общем случае, небозевского характера. Итогом проведённого рассмотрения является вывод уравнения (30), являющегося прямым аналогом уравнений Гросса – Питаевского для сверхтекучей жидкости, в том числе и с учётом дипольного взаимодействия с внешним электромагнитным полем (31).



Леонид Вениаминович Келдыш в конце 1960-х годов
(как раз в период активной работы над экситонной тематикой).
Фотография предоставлена Галиной Николаевной Михайловой — соавтором статьи [23].

Что касается возможности сверхтекучести в экситонном изоляторе, то точка в этом споре была поставлена в более поздней работе Келдыша и Гусейнова [21], в которой было показано, что учёт межзонных переходов в этой модели превращает фазовый переход II рода в переход I рода, так что состояние экситонного изолятора не обладает никакими свойствами, отличающими его от обычных диэлектриков.

Автор этих строк в те годы был аспирантом Келдыша в теоротделе ФИАНа, которому только что было присвоено имя И.Е. Тамма. Выход в свет сборника [19] был заметным событием в жизни отдела. Большое впечатление производил список авторов статей, который состоял из виднейших советских и зарубежных теоретиков. Некоторые сотрудники отдела приходили на семинары с этим сборником в руках и собирали автографы многих из авторов, делая свой экземпляр уникальным. До сих пор жалею, что из ложной скромности сам я этим не занимался.

Кстати, тематика моих занятий в аспирантуре (электроны в неупорядоченных системах) совсем не была связана с конденсацией экситонов, что было в центре интересов самого Келдыша. Соответственно, я выступаю тут просто в роли независимого свидетеля. После предсказания электронно-дырочных капель в [20] Келдыш довольно долго ничего не публиковал на эту тему. Первое достаточно подробное изложение теоретических основ этой концепции появилось тоже в довольно мало доступном сборнике [22] в 1971 г. В течение нескольких последующих лет он в основном интересовался первыми экспериментальными подтверждениями этого явления, иногда становясь даже соавтором соответствующих экспериментальных работ [23]. Как известно, предложенная им в [20] общая картина образования электронно-дырочных капель получила блестящее экспериментальное подтверждение, а соответствующие экспериментальные и теоретические исследования интенсивно развивались во всём мире [24].

В этом смысле работа [19] стоит несколько особняком. Могу высказать некоторые предположения по поводу её происхождения. Дело в том, что всем ученикам Келдыша было хорошо известно о существовании больших общих тетрадей, в которых он вёл (дома) свои расчёты и довольно детально описывал полученные результаты, зачастую не публикуя их в виде статей в журналах. При этом рассматривались самые разные задачи теории твёрдого тела.

Например, Е.Г. Максимов, который в эти годы активно занимался попытками построить последовательную теорию электрон-фононного взаимодействия в металлах, обобщающую и уточняющую традиционный подход на основе гамильтониана Фрелиха в направлении корректного учёта адиабатического приближения и многочастичных эффектов, рассказывал мне, что Келдыш довольно много и интенсивно занимался этой же проблематикой. В итоге им так ничего и не было опубликовано, хотя Максимову соответствующие расчёты он показывал.

Мне кажется, что работа [19] появилась как естественная реакция на статью Кона и Шеррингтона [13], с рядом утверждений которой Келдыш не был согласен. В результате им были проведены расчёты "для себя", которые несколько лет так и оставались в соответствующей тетрадке, пока не представился повод их обнародовать в сборнике памяти Тамма. Может быть, я и не прав, но все мы, его ученики, частенько вспоминаем эти общие тетради. Было бы очень интересно их найти и изучить — наверняка в них содержится много важных результатов, которые сам Келдыш так и не собрался опубликовать.

М.В. Садовский

Список литературы

1. Москаленко С А *ФТТ* **4** 276 (1962); Moskalenko S A *Sov. Phys. Solid State* **4** 199 (1962)
2. Blatt J M, Böer K W, Brandt W *Phys. Rev.* **126** 1691 (1962)
3. Casella R C *J. Appl. Phys.* **34** 1703 (1963)
4. Келдыш Л В, Козлов А Н *ЖЭТФ* **54** 978 (1968); Keldysh L V, Kozlov A N *Sov. Phys. JETP* **27** 521 (1968)
5. Агранович В М, Тошич Б С *ЖЭТФ* **53** 149 (1967); Agranovich V M, Toshich B S *Sov. Phys. JETP* **26** 104 (1968)
6. Келдыш Л В, Копаев Ю В *ФТТ* **6** 2791 (1964); Keldysh L V, Kopaev Yu V *Sov. Phys. Solid State* **6** 2219 (1965)
7. Des Cloizeaux J *J. Phys. Chem. Solids* **26** 259 (1965)
8. Козлов А Н, Максимов Л А *ЖЭТФ* **48** 1184 (1965); Kozlov A N, Maksimov L A *Sov. Phys. JETP* **21** 790 (1965); Козлов А Н, Максимов Л А *ЖЭТФ* **49** 1284 (1965); Kozlov A N, Maksimov L A *Sov. Phys. JETP* **22** 889 (1966); Козлов А Н, Максимов Л А *ЖЭТФ* **50** 131 (1966); Kozlov A N, Maksimov L A *Sov. Phys. JETP* **23** 88 (1966)
9. Копаев Ю В *ФТТ* **8** 223 (1966); Kopaev Yu V *Sov. Phys. Solid State* **8** 175 (1966)
10. Jérome D, Rice T M, Kohn W *Phys. Rev.* **158** 462 (1967)
11. Kohn W *Phys. Rev. Lett.* **19** 439 (1967)
12. Halperin B I, Rice T M *Rev. Mod. Phys.* **40** 755 (1968)
13. Kohn W, Sherrington D *Rev. Mod. Phys.* **42** 1 (1970)
14. Chesnut D B *J. Chem. Phys.* **41** 472 (1964)
15. Келдыш Л В *УФН* **100** 514 (1970); Keldysh L V *Sov. Phys. Usp.* **13** 292 (1970)
16. Knox R S *Theory of Excitons* (New York: Academic Press, 1963); Пер. на русск. яз.: Нокс Р С *Теория экситонов* (М.: Мир, 1966)
17. Агранович В М, Гинзбург В Л *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии* (М.: Наука, 1965); Пер. на англ. яз.: Agranovich V M, Ginzburg V L *Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
18. Келдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1515 (1964); Keldysh L V *Sov. Phys. JETP* **20** 1018 (1965)

Дополнительный список литературы

19. Келдыш Л В "Когерентные состояния экситонов", в сб. *Проблемы теоретической физики. Памяти Игоря Евгеньевича Тамма* (Отв. ред. В И Ритус) (М.: Наука, 1972) с. 433
20. Keldysh L V "Concluding remarks", in *Труды IX Международной конф. по физике полупроводников, Москва, 23 – 29 июля 1968 г.* Т. 2 (Л.: Наука, 1969) с. 1303 – 1312
21. Гусейнов Р Р, Келдыш Л В *ЖЭТФ* **63** 2255 (1972); Guseinov R R, Keldysh L V *Sov. Phys. JETP* **36** 1193 (1973)
22. Келдыш Л В, в сб. *Экситоны в полупроводниках* (Отв. ред. Б М Вул) (М.: Наука, 1971) с. 5
23. Келдыш Л В, Маненков А А, Миляев В А, Михайлова Г Н *ЖЭТФ* **66** 2178 (1974); Keldysh L V, Manenkov A A, Milyaev V A, Mikhailova G N *Sov. Phys. JETP* **39** 1072 (1974)
24. Тиходеев С Г *УФН* **145** 3 (1985); Tikhodeev S G *Sov. Phys. Usp.* **28** 1 (1985)

Coherent states of excitons

L.V. Keldysh
Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation

The concept of a coherent exciton state is formulated. It is shown that for this state the macroscopic wave function may be introduced which satisfies a nonlinear equation of the type familiar in the phenomenological theory of a superfluid liquid. The corresponding nondissipative flux is the flux of energy. For excitons interacting with an electromagnetic field, a coupled system of Maxwell equations and Ginzburg–Pitaevskii (phenomenological theory of Bose liquid) type equations is obtained.

Keywords: excitons, coherent state of excitons, macroscopic wave function, phenomenological theory of superfluid liquid, Bose-liquid equations, Ginzburg–Pitaevskii equations

PACS numbers: 03.75.Kk, **67.10.–j**, **71.35.–y**

Bibliography — 24 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **187** (11) 1273 – 1279 (2017)
DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.10.038227

First published in 1972 (*in Russian*)
Physics – Uspekhi **60** (11) (2017)
DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.10.038227