

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О распознавании зеркальных объектов

А.Г. Кюркчан

Обсуждается проблема зрительного распознавания зеркальных объектов, т.е. тел с идеально гладкой (аналитической) поверхностью. Зрительное восприятие такого рода объектов в значительной степени зависит от их окружения, в отличие от восприятия тел с неровной (шероховатой) поверхностью, зрительные образы которых инвариантны по отношению к окружающей обстановке.

Ключевые слова: зеркальный объект, волновое поле, рассеиватель, аналитическое продолжение, особенности аналитического продолжения волнового поля, носитель вторичных источников, разрез, риманова поверхность, зрительный образ

PACS number: 42.25.Fx

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038104>

Содержание

1. Введение (1097).
 2. Локализация особенностей аналитического продолжения дифракционного поля (1098).
 3. Примеры локализации особенностей аналитического продолжения дифракционного поля (1099).
 - 3.1. Особенности отображения уравнения границы рассеивателя на комплексную плоскость.
 - 3.2. Особенности в изображениях источников.
 4. Заключение (1103).
- Список литературы (1103).

1. Введение

Как известно, монохроматические волны (электромагнитные или звуковые) могут быть описаны некоторой функцией $U^1(\mathbf{r}) \equiv U^1(x, y, z)$, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца

$$\Delta U^1 + k^2 U^1 = 0, \quad (1)$$

где $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны моделируемых колебаний. Функцию U^1 в дальнейшем будем называть волновым полем.

Если на пути первичного волнового поля $U^0(x, y, z)$ некоторого источника излучения имеется какое-либо

препятствие (рассеиватель) — тело, ограниченное поверхностью S , то отражённое (рассеянное) этим телом волновое поле может быть найдено с помощью следующего соотношения (см., например, [1, 2]):

$$U^1(\mathbf{r}) = \int_S \left(U(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial n'} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right) ds', \quad (2)$$

где $U \equiv U^0 + U^1$ — полное (падающее плюс рассеянное) поле, G_0 — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (функция Грина свободного пространства),

$$G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & \text{в трёхмерном случае,} \\ \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) & \text{в двумерном случае}^1, \end{cases}$$

$\partial/\partial n'$ — оператор дифференцирования в направлении внешней по отношению к S нормали.

Функция $G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ представляет собой поле в некоторой точке $M(\mathbf{r})$ от точечного источника, расположенного в точке $N(\mathbf{r}')$. Таким образом, в соответствии с формулой (2) поле первичных источников (например, света), рассеянное (отражённое) некоторым телом, является результатом излучения множества вторичных источников, расположенных на его поверхности S . Иными словами, мы видим результат излучения этих источников.

Обратимся теперь к ситуации, когда мы рассматриваем зеркальный объект, т.е. отполированный до такой степени, что шероховатости на его поверхности не воспринимаются глазом. Например, идеально отполированную сферу (простейший пример — ёлочная игрушка в виде зеркального шара). Если вблизи такой сферы нет никаких предметов и мы подсветили её каким-либо источником света в темноте, то её очертания будут довольно неопределёнными.

А.Г. Кюркчан. Московский технический университет связи и информатики,
ул. Авиамоторная 8а, 111024 Москва, Российская Федерация;
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Фрязинский филиал,
пл. Введенского 1, 141190 Фрязино, Московская обл.,
Российская Федерация;
Центральный научно-исследовательский институт связи,
1-й проезд Перова поля 8, 111141 Москва, Российская Федерация
E-mail: agkmtuci@yandex.ru

Статья поступила 27 сентября 2016 г.

¹ $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка.



К.С. Петров-Водкин. Натюрморт с самоваром.

Надо отметить, что художников часто интересовала проблема визуализации зеркальных объектов. Так, изображения такого рода объектов есть на ряде полотен известного русского художника К.С. Петрова-Водкина, как, например, на картине "Натюрморт с самоваром", репродукция которой приведена здесь.

Весьма важным для дальнейшего является то обстоятельство, что функция $U^1(\mathbf{r})$, будучи решением однородного уравнения Гельмгольца (1), когда $M(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, где D — область внутри S , $\bar{D} \equiv D \cup S$, является всюду вне \bar{D} аналитической [1] и, следовательно, представимой в окрестности каждой точки, где она аналитична, степенным рядом, например рядом по степеням $1/(kr)$ (рядом Аткинсона–Уилкокса) [1, 2]. Как хорошо известно, такой ряд сходится вне сферы, радиус которой равен расстоянию от центра разложения до наиболее удалённой особой точки функции $U^1(\mathbf{r})$. Это обстоятельство позволяет аналитически продолжить функцию $U^1(\mathbf{r})$ за пределы её первоначальной области определения [2–4]. Функция $U^1(\mathbf{r})$ должна иметь особые точки, так как в противном случае она равнялась бы нулю всюду [2]. Очевидно, что эти особые точки лежат в области D и (или) на её границе.

Что собой представляют упомянутые особенности функции $U^1(\mathbf{r})$? Рассмотрим простой пример. Пусть перед плоским зеркалом S находится источник света. Глядя в зеркало, мы увидим источник света в симметричной относительно S точке, расположенной за зеркалом (рис. 1). Этот мнимый источник (изображение) мы видим, продолжая вдоль прямых линий лучи, отражённые от зеркала. Изображение источника и есть результат аналитического продолжения отражённого от зеркала поля в область за зеркалом.

Полученное изображение мы воспринимаем как некий дополнительный источник света, находящийся по другую сторону зеркала, т.е. в "зазеркалье". При этом если мы начнём отодвигать источник от зеркала, то и его изображение в зазеркалье также будет симметрично отодвигаться как угодно далеко.

Совершенно иная ситуация имеет место при отражении от неплоской поверхности. Представим, что мы начинаем изгибать плоское зеркало, поднимая его "края".

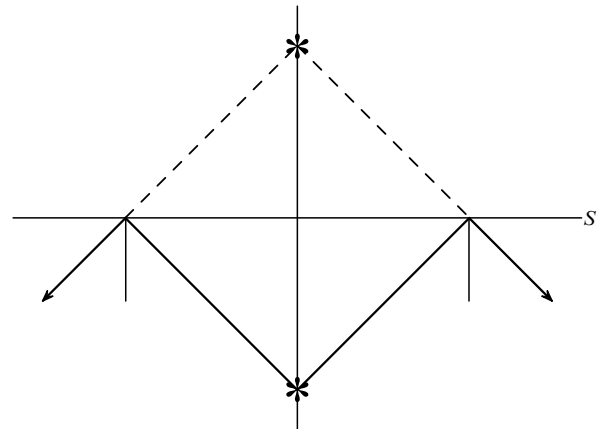


Рис. 1. Изображение в плоском зеркале.

Пространство за зеркалом начнёт "сжиматься", образуя "складку". При этом может возникнуть эффект исчезновения части изображения или даже всего изображения объекта (хорошо известный всем, кто рассматривал изображение в кривых зеркалах, — вспомним комнату смеха). Этот эффект обусловлен образованием "складок" в гипотетической зазеркальной среде, т.е. таких областей, в которые должны попадать два (или более) изображения одновременно. При этом исчезающая часть изображения "прячется в складку" (более подробно см. в [4]).

2. Локализация особенностей аналитического продолжения дифракционного поля

Обсудим более подробно локализацию особенностей функции $U^1(\mathbf{r})$. Обратимся к представлению (2), ограничившись вначале двумерным случаем. Пусть уравнение границы S рассеивателя (которую для простоты мы будем полагать звёздной) может быть записано как $r = \rho(\varphi)$. Введём комплексную величину

$$\zeta = \rho(\varphi) \exp(i\varphi). \quad (3)$$

Если в (3) величина φ вещественна, то на комплексной плоскости $z = r \exp(i\varphi)$ переменная ζ будет описывать контур S , геометрически совпадающий с S . Однако если положить $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, то контур S будет деформироваться, в частности, при положительных φ_2 — сжиматься.

Такая деформация возможна до тех пор, пока отображение (3) остаётся взаимно однозначным. Кроме того, поскольку в граничные значения функций $U(\mathbf{r})|_S$ и $\partial U(\mathbf{r})/\partial n|_S$ входят значения функций $U^0(\mathbf{r})|_S$ и $\partial U^0(\mathbf{r})/\partial n|_S$, вышеописанная деформация будет ограничена также особыми точками функции $U^0(\mathbf{r})|_S$ при её продолжении в область комплексных значений φ .

Очевидно, что взаимная однозначность отображения (3) нарушается в точках, где

$$\zeta'(\varphi) \equiv [\rho'(\varphi) + i\rho(\varphi)] \exp(i\varphi) = 0. \quad (4)$$

Важно отметить, что уравнение (4) эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} [\rho'(\varphi) + i\rho(\varphi)] = 0, \\ \exp(i\varphi) = 0. \end{cases} \quad (4a)$$

При этом уравнение $\exp(i\varphi) = 0$ нельзя отбрасывать, так как неучёт корня этого уравнения приводит к потере части множества особенностей (для ряда фигур весьма существенной).

Особенности функции $U^0(\mathbf{r})|_S$ будут находиться в точках "изображения" источников первичного поля, попадая туда по комплексным характеристикам. Координаты этих изображений могут быть найдены с помощью принципа симметрии Римана – Шварца [4, 5].

Рассмотрим иной способ определения координат изображения точечного источника. Пусть поле точечного источника имеет вид

$$U^0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|).$$

В координатах (ρ, φ)

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2|_S &= \rho^2(\varphi) + r_0^2 - 2r_0 \rho(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) = \\ &= [\rho(\varphi) \exp(i\varphi) - r_0 \exp(i\varphi_0)] \times \\ &\times [\rho(\varphi) \exp(-i\varphi) - r_0 \exp(-i\varphi_0)]. \end{aligned}$$

Особенности функции $U^0(\mathbf{r})|_S$ будут, таким образом, при

$$\rho(\varphi) \exp(\pm i\varphi) = r_0 \exp(\pm i\varphi_0).$$

Кроме того, функция $U^0(\mathbf{r})$ имеет особенность на бесконечности. Корень уравнения $\rho(\varphi) \exp(i\varphi) = r_0 \exp(i\varphi_0)$ соответствует особенности функции $U^0(\mathbf{r})$ в точке источника $r_0 \exp(i\varphi_0) = x_0 + iy_0$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\rho(\hat{\varphi}) \exp(-i\hat{\varphi}) = r_0 \exp(-i\varphi_0) \equiv z^- . \quad (5)$$

Если в уравнении (5) величину $\hat{\varphi}$ считать вещественной, то мы получим ту же точку, что и в предыдущем случае. Поэтому будем решать уравнение (5), полагая, что $\hat{\varphi} = \varphi_1 + i\varphi_2$ — комплексная величина. Из (3) и (5) имеем

$$\zeta_{\text{sing}} \exp(-i2\hat{\varphi}(z^-)) = z^- ,$$

т.е.

$$\zeta_{\text{sing}} = z^- \exp(i2\hat{\varphi}(z^-)) , \quad (6)$$

где $\zeta_{\text{sing}} \equiv \zeta(\hat{\varphi}(z^-))$. Соотношение (6) и даёт нам координаты "изображения" источника. Помимо этого необходимо ещё найти изображение бесконечно удалённой точки [2].

Изложенная выше техника локализации особых точек без изменений переносится на трёхмерный случай, когда рассеиватель является телом вращения. При этом, естественно, соотношения (4) и (6) позволяют найти координаты особых точек в осевом сечении рассеивателя.

В общей ситуации в трёхмерном случае аналитическую деформацию границы S рассеивателя можно осуществить, введя комплексную переменную

$$\zeta = \rho(\theta, \varphi) \exp(i\theta) \quad (7)$$

(где $r = \rho(\theta, \varphi)$ — уравнение границы S в сферических координатах) и полагая угол θ комплексным, а угол φ — параметром [2].

Найдя все особенности аналитического продолжения волнового поля внутри рассеивающего тела (т.е. в области D), мы можем на основании принципа эквивалент-

ности представить рассеянное этим предметом поле $U^1(\mathbf{r})$ с помощью источников, расположенных на некоторой поверхности Σ , охватывающей множество особенностей. Иными словами, соотношение (2) в этом случае может быть заменено следующим [2]:

$$U^1(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} \left(U(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial n'} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right) d\sigma' . \quad (8)$$

Таким образом, изображение объекта формируется источниками, расположенными на некотором носителе Σ внутри этого объекта. В ряде случаев, как мы увидим в разделе 3, носитель вторичных источников Σ может располагаться весьма глубоко внутри рассеивателя.

Для того чтобы выяснить, насколько глубоко внутри рассеивателя может быть размещён носитель источников Σ рассеянного поля, рассмотрим примеры локализации особенностей аналитического продолжения волнового поля.

3. Примеры локализации особенностей аналитического продолжения дифракционного поля

3.1. Особенности отображения уравнения границы рассеивателя на комплексную плоскость

Особенности отображения (3) могут быть найдены путём решения уравнений (4а). Приведём примеры решения этих уравнений для различных геометрий.

3.1.1. Эллиптический цилиндр. В качестве первого примера рассмотрим задачу дифракции плоской волны на эллиптическом цилиндре. Уравнение контура поперечного сечения S в этом случае имеет следующий вид:

$$\rho(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} ,$$

где b — малая полуось, $a = b/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ — большая полуось, $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ — эксцентриситет эллипса. Выполнив элементарные преобразования, для комплексного корня φ_0 первого из уравнений (4а) будем иметь

$$\cos^2 \varphi_0 - i \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 - \frac{1}{\varepsilon^2} = 0 ,$$

откуда получаем

$$\exp(i\varphi_0) = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}} ,$$

т.е.

$$\zeta_{01} \equiv \zeta(\varphi_0) = \pm \frac{b\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \pm a\varepsilon = \pm f ,$$

где $2f$ — межфокусное расстояние. Таким образом, особенности волнового поля внутри эллипса лежат в его фокусах. Второму уравнению (4а) соответствует особая точка в начале координат. Можно показать (см. [2, 3]), что в фокусах эллипса волновое поле имеет точки ветвления второго порядка. Для выделения однозначной ветви точки $\pm f$ должны быть соединены разрезом.

В трёхмерном случае, когда рассеиватель имеет форму сфероида, особенности лежат в фокусах его осевого сечения.

3.1.2. Овал Кассини. В качестве второго примера рассмотрим форму границы S в виде овала Кассини:

$$\rho(\varphi) = a\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}, \quad \varepsilon < 1.$$

Первое из уравнений (4а) может быть представлено в виде

$$\varepsilon^2 \cos^2 \varphi_0 + i\varepsilon^2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$\exp(i\varphi_0) = \pm i \frac{\sqrt{2 + \varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Таким образом, получаем

$$\zeta_{02} = \pm i \frac{a}{\varepsilon} \sqrt{1 + \varepsilon^2},$$

т.е.

$$|\zeta_{02}| = \frac{a}{\varepsilon} \sqrt{1 + \varepsilon^2} > \rho\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = a, \quad \arg \zeta_{02} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, точки ζ_{02} лежат вне S (рис. 2).

Решение второго из уравнений (4а) даёт

$$\zeta(\varphi_0) = \pm \frac{a\varepsilon}{2} = \zeta_{01}.$$

Эти особые точки лежат внутри S , так как $|\zeta_{01}| = a\varepsilon/2 < \rho(0) = \rho(\pi) = a\sqrt{1 + \varepsilon^2}$.

3.1.3. Многолистник. Рассмотрим теперь случай, когда граница S является многолистником, уравнение которого имеет следующий вид:

$$\rho(\varphi) = a(1 + \tau \cos q\varphi), \quad 0 \leq \tau < 1, \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

I. Случай $q = 1$ требует отдельного рассмотрения. Кривая (9) называется при этом улиткой Паскаля. Как и в разделе 3.1.2, здесь необходимо рассмотреть оба уравнения (4а).

Решение второго из этих уравнений даёт

$$\zeta(\varphi_0) = \frac{a\tau}{2} = \zeta_{01}.$$

Эта точка, как легко видеть, лежит внутри S (рис. 3).

Первое из уравнений (4а) здесь выглядит следующим образом:

$$\rho'(\varphi_0) + i\rho(\varphi_0) = -a\tau \sin \varphi_0 + ia + ia\tau \cos \varphi_0 = 0,$$

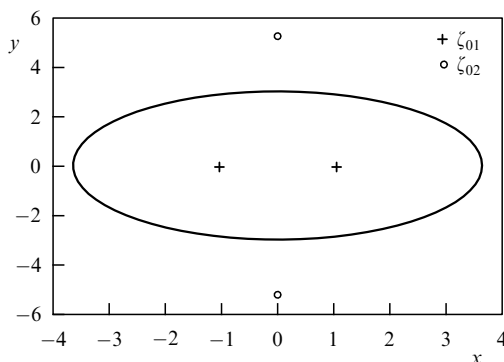


Рис. 2. Овал Кассини.

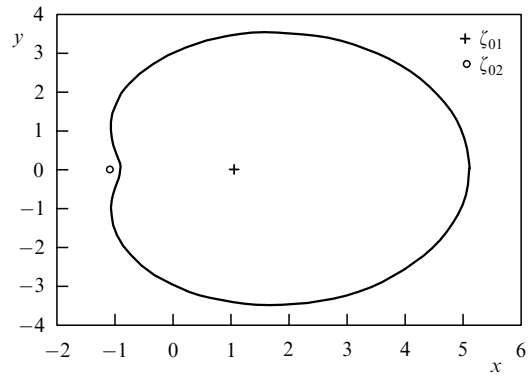


Рис. 3. Улитка Паскаля.

оно имеет решение $\exp(i\varphi_0) = -1/\tau$, т.е.

$$\begin{aligned} \zeta_{02} &\equiv \rho(\varphi_0) \exp(i\varphi_0) = \\ &= a \left\{ 1 + \frac{\tau}{2} [\exp(i\varphi_0) + \exp(-i\varphi_0)] \right\} \exp(i\varphi_0) = \\ &= -\frac{a}{2\tau} (1 - \tau^2). \end{aligned}$$

Таким образом, $|\zeta_{02}| = (a/2\tau)(1 - \tau^2)$, $\arg \zeta_{02} = \pi$. Следовательно, точка ζ_{02} лежит вне S (см. рис. 3).

II. Перейдём теперь к случаям $q = 2, 3, \dots$. Первое из уравнений (4а) тогда принимает вид

$$\rho'(\varphi_0) + i\rho(\varphi_0) = a[-q\tau \sin(q\varphi_0) + i + i\tau \cos(q\varphi_0)] = 0.$$

Обозначив $\exp(i\varphi_0) = t$, будем иметь следующий набор решений [3, гл. II]:

$$t_{1m} = \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + \tau^2(q^2 - 1)}}{\tau(q + 1)} \right]^{1/q} \exp\left(i \frac{2m\pi}{q}\right), \quad (10)$$

$$t_{2m} = \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \tau^2(q^2 - 1)}}{\tau(q + 1)} \right]^{1/q} \exp\left(i \frac{(2m + 1)\pi}{q}\right), \quad (11)$$

$$m = 0, 1, \dots, q - 1.$$

Теперь, так как $\zeta = \rho(\varphi) \exp(i\varphi)$ (см. (3)), с использованием найденных решений (10) и (11) получим, что особенности аналитического продолжения волнового поля внутрь многолистника находятся в точках, расположенных на расстоянии

$$\begin{aligned} |\zeta_{01}| &= a \frac{q \left[q + \sqrt{1 + \tau^2(q^2 - 1)} \right]}{q^2 - 1} \times \\ &\times \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + \tau^2(q^2 - 1)}}{\tau(q + 1)} \right]^{1/q} \end{aligned} \quad (12)$$

от начала координат на лучах, проведённых под углами

$$\arg \zeta_{01} = \frac{2m\pi}{q}, \quad m = 0, 1, \dots, q - 1 \quad (13)$$

(см. рис. 4, на котором через ζ_{02} обозначены особые точки, возникающие при продолжении внутреннего поля во внешнюю область). Корни уравнения $\exp(i\varphi) = 0$ отображаются на плоскости z в бесконечно удалённую точку. Отметим, что, например, в особых точках внутри

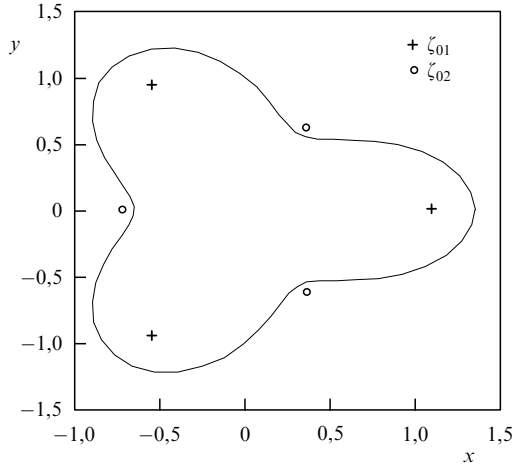


Рис. 4. Трёхлистник.

рассеивателя (см. формулы (12), (13)) поле имеет алгебраическое ветвление q -го порядка [3, гл. II]. Точнее говоря, характер особенности в окрестности m -й особой точки ($m = 0, 1, \dots, q - 1$) имеет вид

$$\frac{1}{[r \exp(i\varphi) - r_{0m} \exp(i\varphi_{0m})]^{1-1/q}}, \quad (14)$$

где r, φ — полярные координаты некоторой точки в окрестности m -й особой точки с координатами $r_{0m} = |\zeta_{01}|, \varphi_{0m} = \arg \zeta_{01}$.

Из (14), в частности, видно, что при $q \rightarrow \infty$ характер особенности становится близким к особенности в полюсе первого порядка. Видно также (см. (12)), что при $\tau \rightarrow 0$ особые точки устремляются к началу координат. Таким образом, если перейти к кругу (в трёхмерном случае — к сфере), т.е. одновременно устремить q к бесконечности, $q \rightarrow \infty$, а τ к нулю, $\tau \rightarrow 0$, то мы получим одну особую точку в центре, которая будет полюсом бесконечного порядка, т.е. существенно особой точкой.

Иными словами, поле, рассеянное круговым цилиндром (сферой), может быть представлено источниками, занимающими сколь угодно малый объём, содержащий внутри начало координат (см. также представление (8) в свете изложенного выше), либо одним источником — мультиполем бесконечного порядка в центре. Возникает естественный вопрос: почему мы видим всё же, например, сферу, а не светящуюся точку в её центре? Попытка дать ответ на этот вопрос может быть сделана лишь после рассмотрения второго множества особенностей — изображений внешних источников (особых точек).

3.2. Особенности в изображениях источников

Координаты этих особенностей могут быть найдены с помощью соотношений (5), (6). Снова рассмотрим примеры их локализации для различных геометрий рассеивателей.

3.2.1. Эллипс. Уравнение (5) здесь примет следующий вид:

$$\frac{b \exp(-i\hat{\varphi})}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \hat{\varphi}}} = r_0 \exp(-i\varphi_0) \equiv z^-,$$

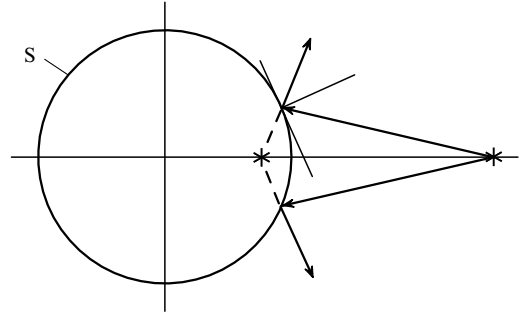


Рис. 5. Изображение в окружности и сфере.

т.е.

$$4b^2 \exp(-i2\hat{\varphi}) = (z^-)^2 \{4 - \varepsilon^2 [\exp(i2\hat{\varphi}) + \exp(-i2\hat{\varphi}) + 2]\}.$$

Решая это уравнение, получим

$$\exp(-i2\hat{\varphi}) = \left[(2 - \varepsilon^2) + 2\sqrt{\frac{b^2}{(z^-)^2} - \frac{b^2}{r_0^2} \varepsilon^2 \exp(i2\varphi_0)} \right] \times \left[\varepsilon^2 + 4\frac{b^2}{r_0^2} \exp(i2\varphi_0) \right]^{-1}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{sing}} &= r_0 \exp(-i\varphi_0) \exp(i2\hat{\varphi}) = \\ &= r_0 \left[\varepsilon^2 \exp(-i\varphi_0) + \left(\frac{2b}{r_0}\right)^2 \exp(i\varphi_0) \right] \times \\ &\times \left[(2 - \varepsilon^2) + 2\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r_0^2} \varepsilon^2 \exp(i2\varphi_0)} \right]^{-1}. \quad (15) \end{aligned}$$

Бесконечно удалённая точка отображается, как видно из (15), в начало координат.

А. Частный случай: $\varepsilon = 0$ (окружность или сфера). В этом случае, как видно из (15),

$$\zeta_{\text{sing}} = \frac{b^2}{r_0} \exp(i\varphi_0),$$

изображение находится в точке инверсии, когда произведение расстояний от центра окружности (сферы) до источника и до изображения равно квадрату радиуса этой окружности (рис. 5).

Б. Пусть $r_0 = b + \delta, \varphi_0 = \pi/2, \delta \ll b$, т.е. источник лежит вблизи границы. Сохраняя величины порядка δ и отбрасывая величины порядка δ^2 , получим

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{sing}} &\approx ir_0 \frac{4(1 - 2\delta/b) - \varepsilon^2}{(2 - \varepsilon^2) + 2\sqrt{(b/a)^2 + \varepsilon^2(1 - 2\delta/b)}} \approx \\ &\approx ir_0 \frac{4 - \varepsilon^2 - 8\delta/b}{4 - \varepsilon^2 - 2\varepsilon^2\delta/b} \approx i(r_0 - 2\delta). \end{aligned}$$

Таким образом, приближённо (с точностью до величин порядка $(\delta/b)^2$) изображение находится в "зеркальной" точке, как и должно быть, согласно зрительному опыту. При удалении источника вдоль прямой $\varphi_0 = \pi/2$ его изображение, как видно из формулы (15), движется к межфокусному отрезку до тех пор, пока при $r_0 = 2a/\varepsilon$

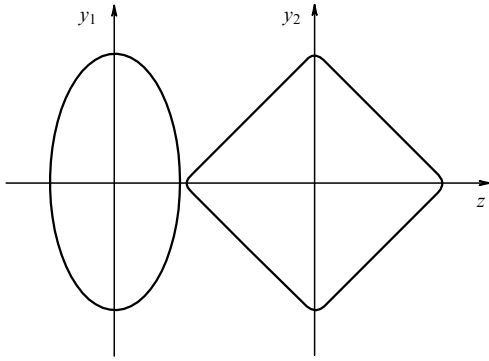


Рис. 6. Суперэллипс вблизи эллипса.

оно не попадёт в точку $r = 0$, лежащую на разрезе. При дальнейшем увеличении r_0 изображение источника пересекает разрез (так как появляется при $\varphi_0 = -\pi/2$), т.е. оказывается на нефизическом листе римановой поверхности. Таким образом, при $r_0 > 2a/\varepsilon$ множеством особенностей дифракционного поля оказывается, как и при возбуждении эллипса плоской волной, лишь межфокусный отрезок.

Важно отметить, что соотношения (5), (6) позволяют находить не только координаты изображения точечного источника, но и координаты особых точек, "порождаемых" особенностями волнового поля внутри расположенного рядом тела, например, в такой ситуации, как на рис. 6.

3.2.2. Улитка Паскаля. Напомним уравнение улитки Паскаля: $\rho(\varphi) = a + b \cos \varphi$, $0 \leq b < a$. Уравнение (5) здесь принимает следующий вид:

$$(a + b \cos \hat{\varphi}) \exp(-i\hat{\varphi}) = r_0 \exp(-i\varphi_0) \equiv z^-,$$

или

$$\exp(-i2\hat{\varphi}) + \frac{2a}{b} \exp(-i\hat{\varphi}) + \left(1 - \frac{2z^-}{b}\right) = 0,$$

откуда

$$\exp(-i\hat{\varphi}) = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2 + 2bz^-}}{b},$$

т.е.

$$\exp(i\hat{\varphi}) = \frac{b}{-a + a\sqrt{1 - (b^2 - 2bz^-)/a^2}}.$$

Здесь мы отбросили решение со знаком минус перед корнем, так как оно не переходит в решение для круга при $b = 0$: $\exp(i\hat{\varphi}) = (a/r_0) \exp(i\varphi_0)$.

Итак,

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{sing}} &\equiv r_0 \exp(-i\varphi_0) \exp(i2\hat{\varphi}) = \\ &= r_0 b^2 \exp(-i\varphi_0) \left[2a^2 - b^2 + 2r_0 b \exp(-i\varphi_0) - \right. \\ &\quad \left. - 2a\sqrt{a^2 - b^2 + 2r_0 b \exp(-i\varphi_0)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Проверим найденное решение. Положим $r_0 = a + b + \delta$, $\varphi_0 = 0$, $\delta \ll a + b$. Снова, сохраняя величины порядка δ и

отбрасывая величины порядка δ^2 , получим

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{sing}} &\approx \frac{b^2(a + b + \delta)}{a^2 + (a + b)^2 + 2b\delta - 2a(a + b)(1 + b\delta/(a + b)^2)} \approx \\ &\approx (a + b) \frac{a + b + \delta}{a + b + 2\delta}, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$\zeta_{\text{sing}} \approx a + b - \delta,$$

т.е., как и в случае эллипса, изображение лежит в зеркальной точке.

Из приведённых примеров мы видим, что изображение точечного источника (особой точки) можно искать с помощью метода разложения по малому параметру.

3.2.3. Парабола. В качестве последнего примера рассмотрим задачу о возбуждении точечным источником (точнее — нитью тока) $U^0(\mathbf{r}) = (1/4i)H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ зеркала в виде параболического цилиндра [3, гл. II]. Эта задача представляет прикладной интерес, в частности, в теории антенн.

Итак, пусть поле точечного источника падает на параболу

$$y = a - bx^2. \quad (16)$$

Здесь удобнее вести рассмотрение в декартовых координатах. Введём комплексную переменную

$$\zeta = x + iy(x). \quad (17)$$

Точки, в которых нарушается взаимная однозначность отображения (17), могут быть найдены из уравнения

$$\zeta'(x) \equiv 1 + iy'(x) = 0. \quad (18)$$

В случае параболы (16) уравнение (18) принимает вид

$$1 - i2bx = 0.$$

Оно имеет решение

$$x_0 = \frac{1}{2bi}.$$

Этому решению на комплексной плоскости z соответствует особая точка

$$\zeta_0 = i\left(a - \frac{1}{4b}\right).$$

Из этой точки должен быть проведён разрез в бесконечно удалённую точку. Особой точке ζ_0 на плоскости вещественных координат xu соответствует точка с координатами

$$x_0 = 0, \quad y_0 = a - \frac{1}{4b}, \quad (19)$$

которая является фокусом параболы.

Найдём теперь координаты изображения точечного источника. При этом будем действовать в полной аналогии с изложенным выше.

Итак, снова рассмотрим выражение (теперь в декартовых координатах)

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \Big|_S = [(x + iy(x)) - (x_0 + iy_0)] \times [(x - iy(x)) - (x_0 - iy_0)].$$

Таким образом, функция $U^0(\mathbf{r})$ будет иметь особенности при

$$\hat{x} \pm iy(\hat{x}) = x_0 \pm iy_0 \equiv z_0^\pm.$$

Уравнению $\zeta \equiv \hat{x} + iy(\hat{x}) = z_0^+$ соответствует на плоскости $z = x + iy$ точка $z_0 = x_0 + iy_0$, которая не представляет интереса, так как является точкой расположения источника. Рассмотрим поэтому точку, в которой

$$\hat{x} - iy(\hat{x}) = z_0^-, \quad (20)$$

где $\hat{x} = x_1 + ix_2$ — комплексная величина. Равенство (20) эквивалентно следующему:

$$2\hat{x}(\zeta_{\text{sing}}) - \zeta_{\text{sing}} = z_0^-, \quad (21)$$

где $\hat{x}(\zeta)$ — решение уравнения

$$\hat{x} + iy(\hat{x}) = \zeta, \quad (22)$$

определённое всюду, кроме точек, в которых выполняется равенство (18).

Уравнение (20) можно представить следующим образом:

$$\hat{x} - ia + ib\hat{x}^2 = z_0^-.$$

Его решения имеют вид

$$\hat{x}(z_0^-) = \frac{i \pm i\sqrt{1 - 4ab + 4ibz_0^-}}{2b},$$

причём решение со знаком плюс перед корнем является лишним, так как оно становится неверным при $b = 0$. Итак (см. (21)),

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{sing}} &\equiv 2\hat{x}(z_0^-) - z_0^- = \frac{i - i\sqrt{1 - 4ab + 4ibz_0^-}}{b} - z_0^- = \\ &= \frac{i - b(x_0 - iy_0) - i\sqrt{1 - 4ab + 4ib(x_0 - iy_0)}}{b}. \end{aligned} \quad (23)$$

Взяв действительную и мнимую части от соотношения (23), мы получим координаты изображения точечного источника в параболическом зеркале.

Рассмотрим некоторые предельные случаи [3, гл. II]. Пусть сначала $|ab| \ll 1$, $|bz_0| \ll 1$ (т.е. случай слабо искривлённой поверхности). Тогда, как видно из (23), $\zeta_{\text{sing}} = (x_0 - iy_0) + i2a$. Таким образом, на плоскости xu изображение источника будет находиться в точке с координатами

$$x_{\text{sing}} = x_0, \quad y_{\text{sing}} = -y_0 + 2a, \quad (24)$$

т.е. там же, где оно было бы при отражении от плоскости $y = a$. Аналогично при $|bx_0| \ll 1$, $|by_0| \ll 1$ (т.е. в случае, когда источник расположен вблизи поверхности) изображение снова будет в точке с координатами (24).

Сопоставляя полученный результат с теми, которые описаны выше при рассмотрении компактных рассеивателей, можно сформулировать следующий принцип локальности: *если источник расположен у выпуклой криволинейной поверхности на расстоянии, малом по сравнению с радиусом кривизны этой поверхности в рассматриваемой точке, то его изображение находится (приближённо) так же, как при отражении от касательной плоскости.*

4. Заключение

Теперь мы можем попытаться дать ответ на поставленный в разделе 3.1 вопрос: почему мы видим сферу, а не светящуюся точку в её центре? Из приведённых в разделах 2 и 3 примеров понятно, что, поместив идеально отполированную сферу (разумеется, в масштабах, превышающих разрешающую способность глаза) в поле плоской волны (например, облучив лучом лазера) в комнату с поглощающими стенами, мы и в самом деле ничего, кроме светящейся точки в центре сферы, не увидим. Яркость этой точки будет определяться свойствами поверхности сферы, т.е., например, идеально отполированная сфера из поглощающего материала будет в описанной ситуации восприниматься как тусклая точка. В обычной обстановке мы видим, например, ту же сферу в окружении множества других предметов, изображающихся в ней и формирующих совокупностью этих изображений зрительный образ, воспринимаемый нами как сфера. Если поверхность сферы шероховатая, то это по существу означает, что мы имеем дело с объектом, имеющим форму, близкую к сферической, со множеством особых точек на поверхности, являющихся источниками рассеянного поля.

Обобщение приведённого выше рассуждения для несферических объектов позволяет в общих чертах понять, почему мы видим то, что мы видим. В самом деле, у объекта с зеркальной поверхностью источники рассеянного им поля находятся внутри него. Поэтому такой объект распознаётся тем лучше, чем больше посторонних предметов находится вблизи него и отображается в нём. И наоборот, если объект имеет шероховатую поверхность, то источники рассеянного поля лежат непосредственно на этой поверхности, что делает задачу распознавания формы объекта совсем простой.

Таким образом, мы приходим к выводу: для того чтобы рассеиватель обладал свойствами "невидимки", т.е. был плохо распознаваемым, его форма должна быть как можно более близкой к идеальной аналитической поверхности, не иметь углов, выступов и иных иррегулярностей, а поверхность должна обладать поглощающими свойствами [2, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-02-00247).

Список литературы

- Colton D, Kress R *Integral Equation Methods in Scattering Theory* (New York: Wiley, 1983); Пер. на русск. яз.: Колтон Д, Кресс Р *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния* (М.: Мир, 1987)
- Кюркчан А Г, Смирнова Н И *Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения* (М.: Медиа Паблишер, 2014); Пер. на англ. яз.: Kyurkchan A G, Smirnova N I *Mathema-*

- tical Modeling in Diffraction Theory Based on a Priori Information on the Analytic Properties of the Solution* (Amsterdam: Elsevier, 2016)
3. Апельцин В Ф, Кюркчан А Г *Аналитические свойства волновых полей* (М.: Изд-во МГУ, 1990)
 4. Кюркчан А Г, Стернин Б Ю, Шаталов В Е *УФН* **166** 1285 (1996); Kyurkchan A G, Sternin B Yu, Shatalov V E *Phys. Usp.* **39** 1221 (1996)
 5. Sternin B, Shatalov V *Differential Equations on Complex Manifolds* (Dordrecht: Academic Publ., 1994)

About recognition of mirror-like objects

A.G. Kyurkchan

*Moscow Technical University of Communications and Informatics,
ul. Aviamotornaya 8a, 111024 Moscow, Russian Federation;
Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Fryazino Branch, Russian Academy of Sciences,
pl. Vvedenskogo 1, 141190 Fryazino, Moscow region, Russian Federation;
Central Research Institute of Communication,
Pervyi proezd Perova polya 8, 111141 Moscow, Russian Federation
E-mail: agkmtuci@yandex.ru*

In this work the problem of the visual recognition of mirror-like objects, i.e., bodies with ideally smooth (analytical) surface is discussed. The visual perception of such objects is essentially dependent on their environment — unlike bodies with an uneven (rough) surface, whose visual images are environment-invariant.

Keywords: mirror-like object, wave field, scatterer, analytical continuation, singularities of analytical continuation of the wave field, carrier of secondary sources, crosscut, Riemannian surface, imagery

PACS number: 42.25.Fx

Bibliography — 5 references

Received 27 September 2016

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **187** (10) 1097–1104 (2017)

Physics–Uspekhi **60** (10) (2017)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038104>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.03.038104>