Июль 2016 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 186, № 7*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Векторные поля Киллинга и однородная и изотропная вселенная

М.О. Катанаев

Приведены основные теоремы о векторных полях Киллинга. В частности, рассмотрены пространства постоянной кривизны. Дано подробное доказательство теоремы, описывающей наиболее общий вид метрики однородного и изотропного пространства-времени. Хотя теорему можно считать общеизвестной, её полное доказательство трудно найти в литературе. В качестве примера рассмотрена метрика, пространственные сечения которой имеют постоянную кривизну, но, тем не менее, вся метрика не является однородной и изотропной. Дано также новое эквивалентное определение однородной и изотропной вселенной в геометрических терминах вложенных многообразий.

Ключевые слова: векторное поле Киллинга, однородная вселенная, изотропная вселенная, метрика Фридмана

PACS number: **04.20.–q** DOI: 10.3367/UFNr.2016.05.037808

Содержание

1. Введение

Сначала введём обозначения и дадим определения, а затем сформулируем теорему.

Определение. *Пространством-временем называется пара* $(\mathbb{M}, g)$, *где* $\mathbb{M}$ *— четырёхмерное дифференцируемое многообразие,* g *— метрика лоренцевой сигнатуры* $(+---)$, *которая на нём задана.*

Мы предполагаем, что и многообразие $\mathbb{M}$, и метрика g являются достаточно гладкими. Более того, мы предположим также, что многообразие является геодезически полным, т.е. любую геодезическую линию можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра в обоих направлениях. В общей теории относительности пространство-время часто оказывается геодезически неполным из-за особенностей, которые возникают при решении уравнений Эйнштейна. В настоящей статье мы рассматриваем только кинематические аспекты задачи, не обращаясь к каким-либо уравнениям движения. Поэтому предположение о геодезической полноте является вполне естественным и позволяет нам не рассматривать, например, вместо целой сферы только её часть.

М.О. Катанаев. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, ул. Губкина 8, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: katanaev@mi.ras.ru

Статья поступила 4 декабря 2015 г.

Если в локальной системе координат x^α, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, нулевая координатная линия времениподобна: $(\partial_0, \partial_0) = g_{00} > 0$, где скобки обозначают скалярное произведение, то координата $x^0 := t$ называется временем. Пространственные индексы будем обозначать греческими буквами из середины алфавита: $\mu, \nu, \ldots = 1, 2, 3$. Тогда $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^\mu\}$.

Современные наблюдательные данные свидетельствуют о том, что наша Вселенная является однородной и изотропной (космологический принцип) по крайней мере в первом приближении. Большинство космологических моделей основано на следующем утверждении.

Теорема 1.1. *Пусть четырёхмерное пространство-время представляет собой топологическое произведение* $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$, *где* $t \in \mathbb{R}$ *— временна́я координата,* $x \in \mathbb{S}$ *— трёхмерное пространство постоянной кривизны. Мы предполагаем, что достаточно гладкая метрика лоренцевой сигнатуры задана на* $\mathbb{M}$. *Тогда если пространство-время однородно и изотропно, то в окрестности каждой точки существует такая система координат* t, x^μ, $\mu = 1, 2, 3$, *в которой метрика имеет вид*

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu\,, \tag{1}$$

где $a(t) > 0$ *— произвольная функция времени (масштабный множитель),* $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$ *— отрицательно определённая метрика пространства постоянной кривизны на* $\mathbb{S}$, *зависящая только от пространственных координат* $x \in \mathbb{S}$.

Таким образом, наиболее общая метрика однородной и изотропной вселенной имеет вид (1) с точностью до преобразования координат.

Эта теорема нечувствительна к размерности многообразия $\mathbb{M}$ и сигнатуре метрики g. Первое условие теоремы можно заменить предложением: "Пусть каждое сечение пространства-времени $\mathbb{M}$, соответствующее постоянному времени $t \in \mathbb{R}$, является пространством постоянной кривизны". Точное определение однородной и изотропной вселенной дано в разделе 3.

Теорема 1.1 является базисом релятивистской космологии, и поэтому она очень важна. Стандартными ссылками на метрику (1) являются статьи [1–11]. Прокомментируем оригинальные статьи в той части, которая относится к виду метрики.

А. Фридман первым рассмотрел метрику (1) для построения космологических моделей в рамках общей теории относительности [1, 2]. Он не писал об однородной и изотропной вселенной, а просто потребовал, чтобы все пространственные сечения, соответствующие постоянному времени $t = \text{const}$, являлись пространствами постоянной кривизны, и предположил, что метрика имеет вид (1). А. Фридман рассмотрел пространственные сечения положительной и отрицательной кривизны соответственно в первой и второй статье.

Аббат Дж. Леметр проанализировал решения уравнений Эйнштейна, описывающие замкнутую вселенную [3]. Он не сформулировал утверждение теоремы 1.1. В статье [4] был рассмотрен более широкий класс космологических моделей также без формулировки теоремы.

Х.П. Робертсон сформулировал теорему в обеих статьях [5, 6], но не доказал её. Вместо этого он сослался на статьи [12, 13]. Доказательство теоремы состоит из двух частей. Первая часть в общем случае (теорема 5.1 раздела 5) была доказана Д. Гильбертом [12]. Вторая часть (теорема 5.2 раздела 5) была доказана Г. Фубини [13] (см. также [14], гл. VI, упражнение 3) в одну сторону. То есть Фубини доказал, что метрика (1) однородна и изотропна, но обратное утверждение о том, что *любая* однородная и изотропная метрика имеет такой вид, доказано не было. В статье [7] метрика (1) была получена из других соображений путём рассмотрения системы наблюдателей с некоторыми свойствами. По построению метрика была однородна и изотропна. Однако Робертсоном было сделано предположение (перед уравнением (2.1) в статье [13]), что пространственная часть метрики описывает пространства постоянной кривизны, которая может принимать только дискретные значения $\pm 1, 0$, и поэтому утверждение о том, что метрика (1) представляет собой наиболее общий вид метрики, не было доказано. Метрика (49), которая приведена ниже, подходит под конструкцию, но не имеет вида (1).

Р.С. Толман получил линейный элемент (1) из других предположений [8–10]. В частности, он предположил сферическую симметрию, то, что временны́е координатные линии являются геодезическими, и потребовал выполнения уравнений Эйнштейна. Он не обсудил однородность и изотропию вселенной в своих статьях.

В статье [11, раздел 10] А.Г. Волкер доказал теорему 1.1 в одну сторону: метрика (1) однородна и изотропна, но не привёл доказательства того, что *любая* однородная и изотропная метрика имеет такой вид. Действительно, метрика (49), которая приведена в разделе 6, удовлетворяет уравнению (52) статьи [11], но не имеет вида (1).

Я просмотрел также более 30 монографий по общей теории относительности, включая мои любимые [15–19], и нашёл доказательство теоремы 1.1 только в книге [16].

Целью статьи является детальный обзор доказательства теоремы 1.1. В разделах 2–4 дан краткий обзор общих свойств векторных полей Киллинга и необходимых характеристик римановых (псевдоримановых) пространств постоянной кривизны. Доказательство теоремы 1.1 дано двумя теоремами, 5.1 и 5.2. Идея доказательства взята из монографии [16], но детали различаются. В частности, доказательство теоремы 5.1 проще, и оно взято из книги [14]. В разделе 6 описан пример метрики, все пространственные сечения которой являются пространствами постоянной кривизны, однако метрика в целом не является однородной и изотропной. Здесь же дано новое эквивалентное определение однородной и изотропной метрики.

Мы предполагаем, что читатель знаком с дифференциальной геометрией (см., например, [20, 21]).

2. Векторные поля Киллинга

Рассмотрим n-мерное риманово (псевдориманово) многообразие $(\mathbb{M}, g)$ с метрикой $g(x) = g_{\alpha\beta}(x)\,\mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta$, $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1$, и соответствующей связностью Леви–Чивиты Γ.

Определение. *Диффеоморфизм*

$$\imath: \ \mathbb{M} \ni \quad x \mapsto x' = \imath(x) \quad \in \mathbb{M}$$

называется изометрией *риманова* (*псевдориманова*) *многообразия* $(\mathbb{M}, g)$, *если он сохраняет метрику*

$$g(x) = \imath^* g(x')\,, \tag{2}$$

где $\imath^*$ — *сопряжённое отображение дифференциальных форм* $\imath$.

Поскольку изометрия сохраняет метрику, она также сохраняет связность Леви–Чивиты, геодезические, тензор кривизны и все другие структуры, которые определяются только метрикой.

Отображение (2) можно записать в координатах. Пусть точки x и x' лежат в одной координатной окрестности и имеют координаты x^α и x'^α соответственно. Тогда изометрия $\imath$, которая имеет вид

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta}\, g_{\gamma\delta}(x')\,, \tag{3}$$

связывает компоненты метрики в различных точках многообразия.

Предложение 2.1. *Множество изометрий данного риманова* (*псевдориманова*) *многообразия* $(\mathbb{M}, g)$ *образует группу изометрий, которая обозначается* $\mathbb{I}(\mathbb{M}) \ni \imath$.

Доказательство. Две последовательные изометрии являются изометрией. Произведение изометрий ассоциативно. Тождественное отображение $\mathbb{M}$ представляет собой изометрию, которая является единицей группы. Каждая изометрия имеет обратное отображение, которое также является изометрией.

Если метрика задана, то уравнение (3) определяет функции $x'(x)$, которые задают изометрию. В общем случае данное уравнение не имеет решений и соответствующее многообразие не имеет нетривиальных изометрий. В этом случае группа изометрий состоит из одного элемента — единицы. Чем группа изометрий больше, тем меньше класс римановых (псевдоримановых) многообразий.

Пример 2.1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой $\delta_{\alpha\beta}$ допускает группу изометрий, которой является неоднородная группа вращений $\mathbb{IO}(n,\mathbb{R})$, $\dim \mathbb{IO}(n,\mathbb{R}) = n(n+1)/2$, состоящая из вращений, трансляций и отражений.

Группа изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$ может быть дискретной группой или группой Ли.

Определение. *Если группа изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$ является группой Ли, то имеет смысл рассматривать бесконечно малые преобразования. В этом случае говорят об инфинитезимальных изометриях*:

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon K^\alpha\,, \qquad \epsilon \ll 1\,. \tag{4}$$

Каждая инфинитезимальная изометрия генерируется достаточно гладким векторным полем $K(x) = K^\alpha(x)\partial_\alpha$, которое называется векторным полем Киллинга.

Пусть $K = K^\alpha\partial_\alpha$ — векторное поле Киллинга. Тогда требование инвариантности метрики (4) в инфинитезимальной форме принимает вид

$$\mathsf{L}_K g = 0\,, \tag{5}$$

где L_K — производная Ли вдоль векторного поля K. В координатах это уравнение имеет следующий вид:

$$\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha = 0\,, \tag{6}$$

где $K_\alpha := K^\beta g_{\beta\alpha}$ — компоненты 1-формы Киллинга, а ковариантная производная

$$\nabla_\alpha K_\beta := \partial_\alpha K_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma K_\gamma$$

определяется символами Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ (компонентами связности Леви – Чивиты).

Определение. *Уравнение* (6) *называется уравнением Киллинга, а интегральные кривые векторного поля Киллинга $K = K^\alpha\partial_\alpha$ называются траекториями Киллинга. Каждому векторному полю Киллинга взаимно однозначно соответствует* 1*-форма $K = \mathrm{d}x^\alpha K_\alpha$, где $K_\alpha := K^\beta g_{\beta\alpha}$, которая называется формой Киллинга.*

Уравнение Киллинга (5) всегда имеет тривиальное решение $K = 0$ для произвольного риманова (псевдориманова) многообразия $(\mathbb{M}, g)$. Если оно допускает только нулевое решение, то нетривиальные непрерывные симметрии отсутствуют.

Траектории Киллинга $\{x^\alpha(\tau)\} \in \mathbb{M}$, где $\tau \in \mathbb{R}$, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha\,, \tag{7}$$

которая для дифференцируемого векторного поля Киллинга имеет единственное решение, проходящее через каждую точку $p = \{p^\alpha\} \in \mathbb{M}$. Для малых $\tau \ll 1$ траектория имеет вид

$$x^\alpha(t) = p^\alpha + \tau K^\alpha(p) + o(\tau)\,, \tag{8}$$

где постоянная интегрирования выбрана таким образом, что траектория проходит через точку p при $\tau = 0$.

Каждое векторное поле Киллинга генерирует однопараметрическую подгруппу в группе изометрий. Если векторное поле Киллинга обращается в нуль в какой-либо точке, то эта точка является стационарной по отношению к действию группы изометрий, генерируемой данным векторным полем. Векторные поля Киллинга называются полными, если траектории Киллинга определены при всех $\tau \in \mathbb{R}$. Они должны быть такими в силу определения, так как изометрии образуют группу.

Если векторное поле Киллинга известно, то оно определяет не только инфинитезимальные изометрии, но и всю однопараметрическую подгруппу изометрий в $\mathbb{I}(\mathbb{M})$. Для этого необходимо найти интегральные кривые (траектории Киллинга), проходящие через каждую точку $p \in \mathbb{M}$. Если $x(0) = p$, то тогда существует диффеоморфизм

$$\imath:\ \mathbb{M} \ni \quad p \mapsto x(t) \quad \in \mathbb{M}\,,$$

соответствующий каждому значению $\tau \in \mathbb{R}$.

Для контравариантных компонент уравнение Киллинга (6) имеет вид

$$g_{\alpha\gamma}\partial_\beta K^\gamma + g_{\beta\gamma}\partial_\alpha K^\gamma + K^\gamma\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{9}$$

Это уравнение линейно и по вектору Киллинга, и по компонентам метрики. Как следствие, две метрики, различающиеся постоянным множителем, имеют одинаковые траектории Киллинга. Кроме того, векторные поля Киллинга определены с точностью до умножения на произвольную отличную от нуля постоянную. В частности, если K — вектор Киллинга, то $-K$ — также вектор Киллинга. Если известны несколько векторных полей Киллинга, то их произвольная линейная комбинация также является векторным полем Киллинга. Другими словами, поля Киллинга образуют векторное пространство над полем вещественных чисел, которое является подпространством в векторном пространстве всех векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ на многообразии $\mathbb{M}$. В этом пространстве определена билинейная операция. Нетрудно проверить, что коммутатор двух векторных полей Киллинга, K_1 и K_2, снова даёт векторное поле Киллинга:

$$\mathsf{L}_{[K_1,\,K_2]}g = \mathsf{L}_{K_1} \circ \mathsf{L}_{K_2}g - \mathsf{L}_{K_2} \circ \mathsf{L}_{K_1}g = 0\,.$$

В результате векторные поля Киллинга образуют алгебру Ли $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$ над полем вещественных чисел, которая является подалгеброй в бесконечномерной алгебре Ли всех векторных полей, $\mathfrak{i}(\mathbb{M}) \subset \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Это есть алгебра Ли группы Ли изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$.

Предложение 2.2. *Пусть риманово* (*псевдориманово*) *пространство* $(\mathbb{M}, g)$ *допускает* $N \leqslant \dim\mathbb{M}$ *ненулевых коммутирующих и линейно независимых векторных полей Киллинга K_i, $i = 1, \ldots, N$. Тогда существует такая система координат, в которой компоненты метрики не зависят от N координат, соответствующих траекториям Киллинга. Обратно, если компоненты метрики не зависят от N координат в какой-либо системе отсчёта, то метрика g допускает локально по крайней мере N коммутирующих ненулевых векторных полей Киллинга.*

Доказательство. Для каждого ненулевого векторного поля Киллинга существует система координат, в которой оно имеет компоненты $(1, 0, \ldots, 0)$. Для набора линейно независимых коммутирующих векторных полей K_i это означает, что существует такая система координат $x^1, \ldots, x^n$, в которой каждое векторное поле Киллинга имеет только одну отличную от нуля компоненту $K_i = \partial_i$. В этой системе координат уравнение Киллинга (9) принимает особенно простой вид:

$$\partial_i g_{\alpha\beta} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, N \leqslant \dim\mathbb{M}\,. \tag{10}$$

Это означает, что компоненты метрики не зависят от координат x^i.

В такой системе координат траектории Киллинга определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = 1\,, \qquad \dot{x}^\mu = 0, \qquad \mu \neq i\,.$$

Мы видим, что координатные линии x^i являются траекториями Киллинга.

Обратно. Если компоненты метрики не зависят от N координат, то уравнения (10) выполняются. Они являются уравнениями Киллинга для векторных полей $K_i := \partial_i$, которые коммутируют.

Как следствие, в предельном случае, когда число коммутирующих векторов Киллинга равно размерности многообразия, $N = n$, существует система координат, в которой компоненты метрики постоянны.

Пример 2.2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в декартовой системе координат x^α, $\alpha = 1, \ldots, n$, метрика имеет постоянные компоненты, $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Эта метрика допускает n коммутирующих векторов Киллинга, $K_\alpha := \partial_\alpha$, генерирующих трансляции. Все координатные линии являются траекториями Киллинга.

Если риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ имеет два или более некоммутирующих векторов Киллинга, то это не обеспечивает наличия системы координат, в которой компоненты метрики не зависят от двух или более координат.

Пример 2.3. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, вложенную в трёхмерное евклидово пространство обычным образом. Пусть метрика g на сфере индуцирована вложением. Тогда риманово многообразие $(\mathbb{S}^2, g)$ имеет три некоммутирующих векторных поля Киллинга, соответствующих группе вращений $\mathbb{SO}(3)$. Легко увидеть, что не существует такой системы координат на сфере, в которой компоненты метрики не зависели бы от двух координат. Действительно, в такой системе координат компоненты метрики постоянны и, следовательно, кривизна равна нулю. Но это невозможно, так как кривизна сферы отлична от нуля.

В общей теории относительности мы предполагаем, что пространство-время является псевдоримановым многообразием $(\mathbb{M}, g)$ с метрикой лоренцевой сигнатуры. Используя понятие векторного поля Киллинга, можно дать следующее инвариантное определение.

Определение. *Пространство-время $(\mathbb{M}, g)$ или его область называются статическими, если существует времениподобное векторное поле Киллинга.*

Векторные поля Киллинга обладают рядом замечательных свойств. Опишем простейшие.

Предложение 2.3 *Векторы Киллинга имеют постоянную длину вдоль траекторий Киллинга*:

$$\mathsf{L}_K K^2 = \nabla_K K^2 = K^\alpha\,\partial_\alpha K^2 = 0\,. \tag{11}$$

Доказательство. Свёртка уравнений (6) с $K^\alpha K^\beta$ приводит к равенствам

$$2K^\alpha K^\beta \nabla_\alpha K_\beta = K^\alpha \nabla_\alpha K^2 = K^\alpha \partial_\alpha K^2 = 0\,.$$

Следствие. *Если векторные поля Киллинга определены на лоренцевом многообразии, то они имеют определённую ориентацию*: *времениподобную, светоподобную или пространственноподобную.*

Метрика на многообразии определяет два типа выделенных кривых: геодезические (экстремали) и траектории Киллинга, если такие существуют. Сравним их.

Предложение 2.4. *Пусть $(\mathbb{M}, g)$ — риманово (псевдориманово) многообразие с векторным полем Киллинга K. Траектории Киллинга являются геодезическими тогда и только тогда, когда длина векторов Киллинга постоянна на $\mathbb{M}$: $K^2 = \mathrm{const}$ для всех $x \in \mathbb{M}$.*

Доказательство. Траектории Киллинга $x^\alpha(\tau)$ определяются системой уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha\,. \tag{12}$$

Длина бесконечно малого отрезка траектории Киллинга

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\,\mathrm{d}\tau^2 = K^2\,\mathrm{d}\tau^2$$

постоянна вдоль траектории, т.е. параметр τ пропорционален длине траектории и, как следствие, является каноническим. Дифференцирование уравнения (12) по каноническому параметру τ приводит к равенствам

$$\ddot{x}^\alpha = \partial_\beta K^\alpha \dot{x}^\beta = (\nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha K^\gamma)\dot{x}^\beta\,,$$

которые мы представим в виде

$$\ddot{x}^\alpha = K^\beta \nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma\,. \tag{13}$$

Уравнения Киллинга позволяют переписать первое слагаемое в правой части в виде

$$K^\beta \nabla_\beta K^\alpha = -\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\partial_\beta K^2\,.$$

Тогда уравнения (13) принимают вид

$$\ddot{x}^\alpha = -\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\partial_\beta K^2 - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma\,.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением геодезических линий тогда и только тогда, когда $K^2 = \mathrm{const}$.

Это означает, что в общем случае траектории Киллинга отличаются от геодезических.

Пример 2.4. Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой. Эта метрика инвариантна относительно трёхпараметрической неоднородной группы вращений $\mathbb{IO}(2)$. Обозначим декартовы и полярные координаты на плоскости через x, y и r, φ. Тогда векторными полями Киллинга являются $K_1 = \partial_\varphi$ для вращений и $K_2 = \partial_x$, $K_3 = \partial_y$ для сдвигов. Квадраты этих векторов равны,

$$K_1^2 = r^2\,, \qquad K_2^2 = K_3^2 = 1\,.$$

Векторные поля Киллинга K_2 и K_3 имеют постоянную длину на всей плоскости, их траектории представляют собой прямые линии, которые являются геодезическими. Это находится в согласии с предложением 2.4. Траекториями Киллинга для вращений K_1 являются концентрические окружности вокруг начала координат. Длина вектора Киллинга K_1 постоянна вдоль окружностей в соответствии с предложением 2.3, но не постоянна на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Соответствующие траектории Киллинга представляют собой окружности, которые не являются геодезическими.

Пример 2.5. Рассмотрим полупростую группу Ли $\mathbb{G}$ как риманово (псевдориманово) многообразие с формой

Киллинга – Картана в качестве инвариантной метрики. Тогда лево- и правоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$ генерируют правые и левые групповые преобразования соответственно. Групповые преобразования и слева, и справа сохраняют метрику. Поэтому лево- и правоинвариантные векторные поля являются векторными полями Киллинга. Их длина равна ± 1. Поэтому соответствующие траектории Киллинга являются геодезическими.

Свёртка уравнений Киллинга (6) с метрикой показывает, что дивергенция векторного поля Киллинга равна нулю:

$$\nabla_\alpha K^\alpha = 0\,. \tag{14}$$

Ковариантная производная ∇^β от уравнения Киллинга (6) выражается как

$$\nabla^\beta(\nabla_\beta K_\alpha + \nabla_\alpha K_\beta) = \Delta K_\alpha + (\nabla^\beta\nabla_\alpha - \nabla_\alpha\nabla^\beta)K_\beta = 0\,,$$

где $\Delta := \nabla^\beta\nabla_\beta$ — оператор Лапласа – Бельтрами на многообразии $\mathbb{M}$ и использовано соотношение (14). С помощью равенства

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]K_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta K_\delta$$

для коммутатора ковариантных производных получаем следующее уравнение для компонент векторов Киллинга:

$$\Delta K_\alpha = R_{\alpha\beta}K^\beta\,, \tag{15}$$

где $R_{\alpha\beta} := R_{\alpha\gamma\beta}{}^\gamma$ — тензор Риччи.

Для пространств постоянной кривизны тензор Риччи пропорционален скалярной кривизне (26) и уравнение (15) упрощается:

$$\Delta K_\alpha = \frac{R}{n}\,K_\alpha\,, \qquad R = \text{const}\,.$$

То есть каждая компонента вектора Киллинга является собственным вектором оператора Лапласа – Бельтрами.

Предложение 2.5. *Пусть* $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ — *два произвольных векторных поля на римановом* (*псевдоримановом*) *многообразии* $(\mathbb{M}, g)$, K — *вектор Киллинга. Тогда справедливо следующее равенство*:

$$g\big((\mathsf{L}_K - \nabla_K)X, Y\big) + g\big(X, (\mathsf{L}_K - \nabla_K)Y\big) = 0\,,$$

где $\mathsf{L}_K X = [K, X]$ — *производная Ли,* $\nabla_K X = K^\alpha(\partial_\alpha X^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta X^\gamma)\partial_\beta$ — *ковариантная производная векторного поля* X *вдоль векторного поля Киллинга* K.

Доказательство. Прямая проверка с использованием явного вида символов Кристоффеля и уравнений Киллинга (6).

3. Однородные и изотропные пространства

Уравнения Киллинга (6) накладывают на векторные поля Киллинга жёсткие ограничения, которые необходимо обсудить. Используя формулу для коммутатора ковариантных производных, получаем равенство

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\beta\nabla_\alpha K_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta K_\delta\,. \tag{16}$$

Теперь используем тождество

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta + R_{\beta\gamma\alpha}{}^\delta + R_{\gamma\alpha\beta}{}^\delta = 0$$

для тензора кривизны и уравнения Киллинга (6). В результате получаем равенство для компонент векторов Киллинга:

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta K_\gamma + \nabla_\beta\nabla_\gamma K_\alpha + \nabla_\gamma\nabla_\alpha K_\beta = 0\,,$$

где слагаемые различаются циклической перестановкой индексов. Это равенство позволяет переписать уравнение (16) следующим образом:

$$\nabla_\gamma\nabla_\alpha K_\beta = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta K_\delta\,. \tag{17}$$

Если свернуть индексы γ, α, то мы получим в точности равенство (15) из раздела 2.

Уравнение (17) является следствием уравнений Киллинга, однако оно не эквивалентно им. Тем не менее из (17) вытекают очень важные следствия. Допустим, что векторные поля Киллинга вещественно аналитичны, т.е. их компоненты разлагаются в ряды Тейлора, которые сходятся в некоторой окрестности $\mathbb{U}_p$ каждой точки $p \in \mathbb{M}$. Предположим, что в некоторой фиксированной точке $p \in \mathbb{M}$ заданы все компоненты 1-формы Киллинга $K_\alpha(p)$ и их первые производные $\partial_\beta K_\alpha(p)$. Тогда из уравнения (17) следуют выражения для вторых частных производных от 1-формы Киллинга $\partial^2_{\beta\gamma}K_\alpha$. Теперь возьмём ковариантную производную от уравнения (17) и получим некоторое соотношение для третьих производных и так далее до бесконечности. Важно, что все равенства будут линейны по компонентам форм Киллинга и их производным. Это означает, что в некоторой окрестности $\mathbb{U}_p$ компоненты 1-формы Киллинга имеют вид

$$K_\alpha(x,p) = A_\alpha{}^\beta(x,p)K_\beta(p) + B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)\big[\partial_\beta K_\gamma(p) - \partial_\gamma K_\beta(p)\big]\,, \tag{18}$$

где $A_\alpha{}^\beta(x,p)$ и $B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)$ — некоторые функции. Антисимметрия последнего слагаемого по индексам β, γ вытекает из того, что есть возможность выразить симметризованную частную производную через компоненты векторов Киллинга, используя уравнения Киллинга (6). Таким образом, компоненты 1-формы Киллинга в некоторой окрестности $\mathbb{U}_p$ являются линейными комбинациями компонент формы Киллинга и её внешней производной в точке p.

Форма Киллинга $K_\alpha(x,p)$ имеет два аргумента. Второй аргумент p показывает, что форма имеет заданные свойства в точке $p \in \mathbb{M}$. По предположению, представление (18) справедливо во всех точках $p \in \mathbb{M}$: необходимо просто знать значения $K(p)$ и $\mathrm{d}K(p)$. Мы предполагаем, что функции $K_\alpha(x,p)$ вещественно аналитичны по обоим аргументам, x и p.

Предполагается, что компоненты формы Киллинга разлагаются в ряды Тейлора вблизи каждой точки $p \in \mathbb{M}$. Обозначим через $\mathbb{U}_p$ окрестность точки p, где представление (18) имеет место и является обратимым, т.е. аргументы x и p можно поменять местами для некоторых новых функций A и B. Рассмотрим точку q, которая лежит вне $\mathbb{U}_p$. Для этой точки обратимое представление типа (18) также имеет место в некоторой окрестности $\mathbb{U}_q$. Предположим, что точка q лежит достаточно близко к $\mathbb{U}_p$, так что окрестности пересекаются, $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q \neq \emptyset$. Тогда для каждой точки из пересечения $x \in \mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$ представление (18) верно по отношению к компонентам $K(p)$ и $K(q)$ и их внешним производным. Мы видим, что компоненты формы Киллинга и её внешней производной в точке q можно линейно выразить через её компоненты в точке p. Таким образом, представление (18) имеет место в объединении $\mathbb{U}_p \cup \mathbb{U}_q$. Это построение можно продолжить на всё многообразие $\mathbb{M}$. Следовательно, представление (18) справедливо для всех точек $x, p \in \mathbb{M}$.

Теперь предположим, что риманово (псевдориманово) многообразие $(\mathbb{M}, g)$ допускает несколько векторных полей Киллинга K_i, $i = 1, \ldots, N$. Тогда для каждого вектора Киллинга мы имеем представление (18)

$$K_{i\alpha}(x,p) = A_\alpha{}^\beta(x,p) K_{i\beta}(p) + B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)\left[\partial_\beta K_{i\gamma}(p) - \partial_\gamma K_{i\beta}(p)\right]. \tag{19}$$

Функции $A_\alpha{}^\beta(x,p)$ и $B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)$ одинаковы для всех форм Киллинга, поскольку они определяются соотношением (17), которое линейно по компонентам формы Киллинга и их производным. Они определяются единственным образом метрикой, кривизной и её ковариантными производными. В полученном представлении предполагается, что точка $p \in \mathbb{M}$ произвольна, но фиксирована, а точка $x \in \mathbb{M}$ пробегает всё многообразие $\mathbb{M}$.

Равенство (17) является системой уравнений в частных производных для компонент формы Киллинга и имеет нетривиальные условия интегрируемости. Одно из них в ковариантной форме имеет вид

$$[\nabla_\gamma, \nabla_\delta]\nabla_\alpha K_\beta = -R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon \nabla_\epsilon K_\beta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon \nabla_\alpha K_\epsilon \,,$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор ковариантных производных. После простых вычислений и подстановки исходного уравнения (17) для вторых производных формы Киллинга в левую часть этого уравнения получаем равенство

$$\begin{aligned}\big(R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon \delta^\zeta_\delta - R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon \delta^\zeta_\gamma + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon \delta^\zeta_\beta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon \delta^\zeta_\alpha\big)\nabla_\zeta K_\epsilon = \\ = (\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon - \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon) K_\epsilon \,. \end{aligned}\tag{20}$$

Если кривизна нетривиальна, то тогда это уравнение представляет собой линейное соотношение между компонентами формы Киллинга K_α и их ковариантными производными $\nabla_\beta K_\alpha$. Обратно, если нам известны некоторые свойства форм Киллинга, то полученное равенство может определить структуру тензора кривизны. Ниже в теореме 3.1 уравнение (20) использовано для доказательства утверждения о том, что однородное и изотропное многообразие представляет собой пространство постоянной кривизны.

Определение. *Риманово (псевдориманово) многообразие $(\mathbb{M}, g)$ размерностью* $\dim \mathbb{M} = n$ *называется однородным в точке $p \in \mathbb{M}$, если существуют инфинитезимальные изометрии, которые отображают эту точку в любую другую точку некоторой окрестности $\mathbb{U}_p$ данной точки. Другими словами, метрика должна допускать такие векторные поля Киллинга, которые имеют произвольные направления в точке p. Поскольку векторы Киллинга образуют линейное пространство, для этого необходимо и достаточно иметь такой набор n форм Киллинга в сопряжённом пространстве $K^{(\gamma)} = \mathrm{d}x^\alpha K_\alpha{}^{(\gamma)}(x,p)$, где индекс γ в скобках нумерует формы Киллинга, чтобы выполнялись следующие равенства*:

$$K_\alpha{}^{(\gamma)}(p,p) = \delta^\gamma_\alpha \,. \tag{21}$$

Если риманово (псевдориманово) пространство $(\mathbb{M}, g)$ однородно в каждой точке $x \in \mathbb{M}$, то оно называется однородным. Другими словами, группа изометрий действует на $\mathbb{M}$ транзитивно.

Риманово (псевдориманово) многообразие $(\mathbb{M}, g)$ называется изотропным в точке $p \in \mathbb{M}$, если существуют такие инфинитезимальные изометрии с формами Киллинга $K(x,p)$, которые не сдвигают данную точку, т.е. $K(p,p) = 0$, и для которых внешняя производная $\mathrm{d}K(x,p)$ в точке p принимает все возможные значения в пространстве 2-форм $\Lambda_2(\mathbb{M})\big|_p$ в данной точке p. Для этого необходимо и достаточно существования такого набора из $n(n-1)/2$ форм Киллинга $K^{[\gamma\delta]} = -K^{[\delta\gamma]} = \mathrm{d}x^\alpha K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(x,p)$, где индексы γ, δ нумеруют формы Киллинга, при котором выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(p,p) = 0\,, \\ &\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial x^\alpha}\bigg|_{x=p} = \delta^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} - \delta^{\delta\gamma}_{\alpha\beta}\,. \end{aligned}\tag{22}$$

Если риманово (псевдориманово) многообразие $(\mathbb{M}, g)$ изотропно в каждой точке, то оно называется изотропным.

Из непрерывности следует, что формы $K^{(\gamma)}$ и $K^{[\gamma\delta]}$ линейно независимы в некоторой окрестности точки p.

Предложение 3.1. *Произвольное изотропное риманово (псевдориманово) многообразие $(\mathbb{M}, g)$ является также однородным.*

Доказательство. Если многообразие является изотропным, то формы Киллинга $K^{[\gamma,\delta]}(x,p)$ и $K^{[\gamma,\delta]}(x,p+\mathrm{d}p)$ удовлетворяют уравнениям (22) в некоторой окрестности точек p и $p + \mathrm{d}p$ соответственно. Их произвольная линейная комбинация и, следовательно, произвольная линейная комбинация производных

$$c^\alpha \frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\alpha} := c^\alpha \lim_{\mathrm{d}p^\alpha \to 0} \frac{K_\beta{}^{[\gamma,\delta]}(x,p+\mathrm{d}p) - K_\beta{}^{[\gamma,\delta]}(x,p)}{\mathrm{d}p^\alpha}$$

представляют собой формы Киллинга для произвольного набора постоянных c^α. Вычислим производную формы Киллинга $K^{[\gamma\delta]}$ по x в точке p. Из первого соотношения (22) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial p^\alpha} K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(p,p) = \frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial x^\alpha}\bigg|_{x=p} + \frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\alpha}\bigg|_{x=p} = 0\,.$$

Используя второе условие (22), получаем равенство

$$\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\alpha}\bigg|_{x=p} = -\delta^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} + \delta^{\delta\gamma}_{\alpha\beta}\,.$$

Теперь из $K^{[\gamma\delta]}$ можно построить такие формы Киллинга, которые принимают произвольные значения $\mathrm{d}x^\alpha a_\alpha$, где $a_\alpha \in \mathbb{R}$, в точке p. Для этого достаточно положить

$$K_\alpha := \frac{a_\gamma}{n-1} \frac{\partial K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\delta}\,.$$

Выбрав соответствующим образом постоянные a_γ, мы получим набор форм Киллинга, которые удовлетворяют равенствам (21).

Благодаря данной теореме достаточно говорить "изотропная вселенная", однако мы предпочитаем называть её "однородной и изотропной", поскольку это название отражает важные физические свойства.

Теорема 3.1. *Алгебра Ли инфинитезимальных изометрий $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$ связного риманова (псевдориманова) многообра-*

зия $\mathbb{M}$ *имеет размерность, не превосходящую* $n(n+1)/2$, *где* $n := \dim \mathbb{M}$. *Если размерность максимальна,* $\dim \mathfrak{i}(\mathbb{M}) = n(n+1)/2$, *то многообразие* $\mathbb{M}$ *является однородным и изотропным и представляет собой пространство постоянной кривизны.*

Доказательство. Размерность алгебры Ли $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$ равна максимальному числу линейно независимых векторных полей Киллинга на многообразии $\mathbb{M}$. Как следствие уравнения (19), число N линейно независимых векторов Киллинга не может превышать число независимых компонент форм Киллинга $\{K_\alpha(p)\}$ и их внешних производных $\{\partial_\beta K_\alpha(p) - \partial_\alpha K_\beta(p)\}$ в фиксированной точке $p \in \mathbb{M}$. Число независимых компонент произвольной 1-формы не превышает n, а число независимых компонент её внешней производной не может превышать $n(n-1)/2$. Таким образом, мы получаем ограничение на размерность алгебры Ли изометрий, которая генерируется векторными полями Киллинга:

$$\dim \mathfrak{i}(\mathbb{M}) \leqslant n + \frac{1}{2}\, n(n-1) = \frac{1}{2}\, n(n+1)\,.$$

Это доказывает первое утверждение теоремы.

В данном месте важна вещественная аналитичность метрики, так как она была использована для получения представления (19).

Связность многообразия $\mathbb{M}$ необходима для того, чтобы число независимых векторных полей Киллинга было определено однозначно. Если $\mathbb{M}$ состоит из нескольких компонент связности, то число независимых векторных полей Киллинга на компонентах может различаться.

Однородные и изотропные многообразия имеют максимальное число $n(n+1)/2$ независимых векторных полей Киллинга и благодаря уравнению (19) определяют все возможные векторные поля Киллинга на многообразии $\mathbb{M}$. Следовательно, если многообразие допускает максимальное число независимых полей Киллинга, то оно с необходимостью является однородным и изотропным.

Теперь докажем, что произвольное однородное и изотропное многообразие является пространством постоянной кривизны. Если многообразие однородно и изотропно, то для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существуют такие формы Киллинга, что $K_\alpha(x) = 0$ и производные $\nabla_\beta K_\alpha(x)$ могут образовывать произвольную антисимметричную матрицу. Как следствие, антисимметричный коэффициент при $\nabla_\zeta K_\epsilon$ в уравнении (20) должен быть равен нулю. Это приводит к равенству

$$\begin{aligned} &R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon}\delta_\delta^\zeta - R_{\alpha\beta\delta}{}^{\epsilon}\delta_\gamma^\zeta + R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\epsilon}\delta_\beta^\zeta - R_{\gamma\delta\beta}{}^{\epsilon}\delta_\alpha^\zeta = \\ &\qquad = R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\zeta}\delta_\delta^\epsilon - R_{\alpha\beta\delta}{}^{\zeta}\delta_\gamma^\epsilon + R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\zeta}\delta_\beta^\epsilon - R_{\gamma\delta\beta}{}^{\zeta}\delta_\alpha^\epsilon\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Если пространство однородно и изотропно, то для произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ существуют такие формы Киллинга, которые принимают произвольные значения в этой точке. Как следствие уравнений (20) и (23), получаем ещё одно равенство:

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}{}^{\epsilon} = \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon}\,. \tag{24}$$

Свернём уравнение (23) по индексам δ, ζ и опустим верхний индекс. Это приводит к выражению тензора кривизны через тензор Риччи и метрику

$$(n-1)R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\,. \tag{25}$$

Поскольку правая часть формулы (25) должна быть антисимметрична по индексам δ, γ, возникает дополнительное ограничение:

$$R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} = -R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} + R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}\,.$$

Свёртка индексов β, γ приводит к соотношению между тензором Риччи и скалярной кривизной:

$$R_{\alpha\delta} = \frac{1}{n}\, Rg_{\alpha\delta}\,, \tag{26}$$

где $R := g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ — скалярная кривизна. Подстановка полученного выражения в равенство (25) приводит к следующему выражению для полного тензора кривизны:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{R}{n(n-1)}\,(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})\,. \tag{27}$$

Теперь осталось доказать, что скалярная кривизна R однородного и изотропного пространства постоянна. С этой целью мы используем свёрнутые тождества Бианки

$$2\nabla_\beta R_\alpha{}^\beta - \nabla_\alpha R = 0\,.$$

Подстановка выражения (26) для тензора Риччи в это тождество приводит к уравнению

$$\left(\frac{2}{n} - 1\right)\partial_\alpha R = 0\,.$$

Для $n \geqslant 3$ отсюда следует равенство $R = \mathrm{const}$.

Случай $n = 2$ требует отдельного рассмотрения. Свёртка уравнения (24) по индексам β, ϵ приводит к равенству

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\delta} - \nabla_\delta R_{\alpha\gamma} = 0\,.$$

Последующая свёртка с $g^{\alpha\delta}$ и выражение (26) приводят к уравнению $\partial_\gamma R = 0$, т.е. $R = \mathrm{const}$ также в случае $n = 2$.

Таким образом, скалярная кривизна в выражении (27) должна быть постоянной, $R = \mathrm{const}$, и, следовательно, максимально симметричное риманово (псевдориманово) многообразие является пространством постоянной кривизны.

Пример 3.1. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой нулевой кривизны, т.е. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Ясно, что это пространство постоянной нулевой кривизны. Тогда существует такая система координат x^α, $\alpha = 1, \ldots, n$, в которой все компоненты метрики постоянны. В этой системе координат символы Кристоффеля равны нулю и уравнение (17) для векторных полей Киллинга принимает простой вид:

$$\partial^2_{\beta\gamma}K_\alpha = 0\,.$$

Общее решение этого уравнения линейно по координатам:

$$K_\alpha(x) = a_\alpha + b_{\alpha\beta}x^\beta\,,$$

где a_α и $b_{\alpha\beta}$ — некоторые постоянные. Из уравнения Киллинга (6) следует, что это выражение определяет форму Киллинга тогда и только тогда, когда матрица $b_{\alpha\beta}$ антисимметрична, т.е. $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$. Поэтому мы можем определить $n(n+1)/2$ линейно независимых форм Киллинга:

$$K_\alpha{}^{(\gamma)}(x) = \delta_\alpha^\gamma\,,$$
$$K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(x) = \delta_\alpha^\delta x^\gamma - \delta_\alpha^\gamma x^\delta\,.$$

Тогда произвольная форма Киллинга является линейной комбинацией

$$K_\alpha = a_\gamma K_\alpha{}^{(\gamma)} + \frac{1}{2}\, b_{\delta\gamma} K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}\,.$$

В этом выражении n векторов Киллинга $K^{(\gamma)}$ генерируют трансляции в $\mathbb{R}^n$ вдоль осей координат, а $n(n-1)/2$ векторов Киллинга $K^{[\gamma\delta]}$ — вращения вокруг начала координат. Таким образом, метрика нулевой кривизны допускает максимальное число $n(n+1)/2$ векторов Киллинга, и поэтому пространство однородно и изотропно.

Известно, что метрику можно привести к диагональному виду линейным преобразованием координат, при этом на диагонали будут стоять ± 1 в зависимости от сигнатуры метрики. Если метрика риманова (положительно определённая), то после преобразования она примет стандартный вид $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Эта метрика инвариантна относительно неоднородной группы вращений $\mathbb{IO}(n)$.

Мы доказали, что однородное и изотропное пространство является пространством постоянной кривизны. Обратное утверждение также верно. Мы сформулируем его в несколько шагов.

Теорема 3.2. *Пусть* $(\mathbb{M}, g)$ — *риманово* (*псевдориманово*) *пространство постоянной кривизны с тензором кривизны вида* (27), *где* $R = \text{const}$ — *скалярная кривизна. Допустим, что метрика имеет сигнатуру* (p, q). *Тогда в некоторой окрестности произвольной точки* $x \in \mathbb{M}$ *существует такая система координат* (*стереографические координаты*), *в которой метрика имеет вид*

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta}{(1 - Rx^2/8)^2}\,, \tag{28}$$

где

$$\eta := \operatorname{diag}(\underbrace{+\ldots+}_{p}\underbrace{-\ldots-}_{q})\,, \qquad x^2 := \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta\,.$$

Доказательство. (См., например, [22, теорема 2.4.12].)

Если $R = 0$, то полный тензор кривизны (27) также равен нулю. Следовательно, пространство нулевой кривизны локально изометрично евклидову (псевдоевклидову) пространству $\mathbb{R}^{p,q}$, и формула (28) справедлива.

Рассмотрим случай $R \neq 0$. Метрика (28) является метрикой, индуцированной на сфере $\mathbb{S}^{p+q}$ или гиперболоиде $\mathbb{H}^{p+q}$, вложенном в евклидово (псевдоевклидово) пространство $\mathbb{R}^{p+1,q}$ большей размерности. Действительно, пусть u, x^α — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{p+1,q}$. Тогда метрика имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 := \mathrm{d}u^2 + \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\,. \tag{29}$$

Рассмотрим сферу (гиперболоид), вложенный в евклидово (псевдоевклидово) пространство $\mathbb{R}^{p+1,q}$ следующим уравнением

$$u^2 + \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = b\,, \qquad b = \text{const} \neq 0\,. \tag{30}$$

Для упрощения вычислений мы не будем следить за знаками и областями определения подкоренных выражений, зависящих от постоянной b и сигнатуры метрики $\eta_{\mu\nu}$. Это можно легко проделать в каждом конкретном случае.

Введём сферические координаты $\{x^\alpha\} \mapsto \{r, \chi^1, \ldots, \chi^{p+q-1}\}$, где r — радиальная координата, χ обозначает угловые координаты в евклидовом (псевдоевклидовом) пространстве $\mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{R}^{p+1,q}$. Тогда метрика (29) и уравнение вложения (30) примут вид

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega\,, \tag{31}$$

$$u^2 + r^2 = b\,, \tag{32}$$

где $\mathrm{d}\Omega(\chi, \mathrm{d}\chi)$ — угловая часть евклидовой (псевдоевклидовой) метрики, явный вид которой не является существенным. Уравнение (32) приводит к равенствам:

$$u = \pm\sqrt{b - r^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \mp\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{b - r^2}}\,.$$

Подстановка $\mathrm{d}u$ в выражение (31) даёт индуцированную метрику:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{b\,\mathrm{d}r^2}{b - r^2} + r^2\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{33}$$

Теперь совершим преобразование радиальной координаты $r \mapsto \rho$:

$$r := \frac{\rho}{1 + \rho^2/(4b)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}r = \frac{1 - \rho^2/(4b)}{\left[1 + \rho^2/(4b)\right]^2}\,.$$

Тогда индуцированная метрика становится конформно евклидовой (псевдоевклидовой),

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\Omega}{\left[1 + \rho^2/(4b)\right]^2}\,.$$

Возвращаясь к декартовым координатам $\{\rho, \chi^1, \ldots, \chi^{p+q-1}\} \mapsto \{x^\alpha\}$, получим метрику (28), где

$$R = -\frac{2}{b}\,.$$

Приведённая выше конструкция показывает, что метрика пространства постоянной кривизны локально изометрична либо плоскому евклидову (псевдоевклидову) пространству ($R = 0$), либо сфере $\mathbb{S}^{p+q}$ или гиперболоиду $\mathbb{H}^{p+q}$ в зависимости от сигнатуры метрики и знака скалярной кривизны.

Евклидова (псевдоевклидова) метрика (29) и гиперповерхности, определённые уравнением (30), инвариантны относительно действия группы вращений $\mathbb{O}(p+1, q)$. Поэтому

$$\dim \mathbb{O}(p+1, q) = \frac{n(n+1)}{2}\,, \qquad n := p + q\,,$$

число независимых векторов Киллинга максимально и пространство постоянной кривизны однородно и изотропно согласно теореме 3.1.

4. Симметричные тензоры на пространстве постоянной кривизны

В разделе 3 показано, что однородное и изотропное n-мерное многообразие с необходимостью является пространством постоянной кривизны, имеющим максимальное число $n(n+1)/2$ линейно независимых векторных полей Киллинга. Такие пространства часто встречаются в приложениях, при этом на них задаются другие тензорные поля, например поля материи в общей теории относительности. Для того чтобы вся модель была симметричной, необходимо потребовать симметричности не только метрики, но и других полей. В настоящем разделе будут получены условия, при которых простейшие тензорные поля, заданные на пространстве постоянной кривизны, будут также однородными и изотропными.

Пусть на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ задано произвольное тензорное поле

$$T = \mathrm{d}x^\alpha \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^\beta\, T_{\alpha\ldots\beta}\,.$$

Для определённости мы рассмотрим ковариантные тензорные поля. Допустим, что задана изометрия $\imath:\ x \mapsto x'$. Тогда требование симметрии тензорного поля относительно группы изометрий имеет тот же вид, что и для метрики (2):

$$T(x) = \imath^* T(x')\,,$$

где $\imath^*$ — отображение дифференциальных форм. Это требование имеет следующий вид в компонентах:

$$T_{\alpha\ldots\beta}(x) = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\alpha}\ldots\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta}\, T_{\gamma\ldots\delta}(x')\,. \tag{34}$$

Пусть инфинитезимальная изометрия генерируется векторным полем Киллинга $K = K^\alpha\partial_\alpha$. Тогда условие симметрии (34) означает равенство нулю производной Ли:

$$\mathsf{L}_K T = 0\,. \tag{35}$$

Такое же условие симметрии должно быть выполнено для произвольного тензорного поля, имеющего как ковариантные, так и контравариантные индексы.

Теперь рассмотрим простейшие случаи, которые часто встречаются в приложениях.

Пример 4.1. Пусть дифференцируемое скалярное поле $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S})$ (функция) задано на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$. Тогда равенство нулю производной Ли имеет вид

$$K^\alpha(x)\partial_\alpha\varphi(x) = 0\,.$$

Так как компоненты $K^\alpha(x)$ векторных полей Киллинга могут принимать произвольные значения в любой точке $x \in \mathbb{S}$, инвариантное скалярное поле должно быть постоянным, $\varphi = \mathrm{const}$, на всём $\mathbb{S}$. Таким образом, однородное и изотропное скалярное поле на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ является константой: $\varphi(x) = \mathrm{const}$ для всех $x \in \mathbb{S}$.

Пример 4.2. Рассмотрим дифференцируемое ковекторное поле $A = \mathrm{d}x^\alpha A_\alpha$. Тогда требование инвариантности (35) принимает вид

$$K^\beta\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha K^\beta A_\beta = 0\,.$$

Выберем векторы Киллинга таким образом, чтобы выполнялось равенство $K^\beta(x) = 0$ в произвольной, но фиксированной точке $x \in \mathbb{S}$. Кроме того, векторы Киллинга можно выбрать таким образом, чтобы частные производные $\partial_\beta K_\alpha$ в данной точке были антисимметричны и произвольны. Поскольку в выбранной точке $\partial_\alpha K^\beta = \nabla_\alpha K^\beta$, справедливы равенства:

$$\partial_\alpha K^\beta A_\beta = \partial_\alpha K_\beta A^\beta = \partial_\gamma K_\beta(\delta_\alpha^\gamma A^\beta)\,.$$

Отсюда следует

$$\delta_\alpha^\gamma A^\beta = \delta_\alpha^\beta A^\gamma\,,$$

так как эта конструкция имеет место для произвольной точки $\mathbb{S}$. Свёртка индексов α и γ приводит к равенству

$$nA^\beta = A^\beta\,.$$

Таким образом, за исключением тривиального случая $n = 1$, после опускания индекса получаем равенство $A_\alpha = 0$. Следовательно, если ковекторное поле однородно и изотропно, то оно тождественно равно нулю.

Это же верно для векторных полей $X = X^\alpha\partial_\alpha$: однородное и изотропное векторное поле на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ с необходимостью равно нулю.

Пример 4.3. В качестве третьего примера рассмотрим дифференцируемый ковариантный тензор второго ранга $T_{\alpha\beta}$. Мы не предполагаем какой-либо симметрии по индексам α и β. Производная Ли от тензора второго ранга имеет вид

$$\mathsf{L}_K T_{\alpha\beta} = K^\gamma\partial_\gamma T_{\alpha\beta} + \partial_\alpha K^\gamma T_{\gamma\beta} + \partial_\beta K^\gamma T_{\alpha\gamma}\,.$$

Как и в предыдущем случае, выберем такие векторы Киллинга, чтобы в точке $x \in \mathbb{S}$ было выполнено равенство $K^\gamma(x) = 0$ и частные производные $\partial_\alpha K_\beta$ были антисимметричны. Тогда, приравняв производную Ли нулю, получаем равенство

$$\delta_\alpha^\delta T^\gamma{}_\beta + \delta_\beta^\delta T_\alpha{}^\gamma = \delta_\alpha^\gamma T^\delta{}_\beta + \delta_\beta^\gamma T_\alpha{}^\delta\,.$$

Свёртка индексов α, δ и опускание γ дают

$$(n-1)T_{\gamma\beta} + T_{\beta\gamma} = g_{\beta\gamma}T\,, \qquad T := T_\alpha{}^\alpha\,.$$

Теперь поменяем индексы β и γ и вычтем полученное равенство:

$$(n-2)(T_{\gamma\beta} - T_{\beta\gamma}) = 0\,.$$

Отсюда вытекает, что при $n \neq 2$ инвариантный тензор второго ранга должен быть симметричен. Используя эту симметрию, получаем выражение для тензора второго ранга

$$T_{\alpha\beta} = \frac{T}{n}\, g_{\alpha\beta}\,.$$

Поскольку след T является скаляром, он должен быть постоянной из соображений симметрии в первом примере. Таким образом, однородный и изотропный ковариантный тензор второго ранга на пространстве постоянной кривизны имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = Cg_{\alpha\beta}\,, \qquad C = \mathrm{const}\,. \tag{36}$$

Эта формула справедлива при $n \geqslant 3$, а также для симметричной части тензора при $n = 2$.

В двумерном случае однородный и изотропный ковариантный тензор может иметь антисимметричную часть, пропорциональную полностью антисимметричному тензору второго ранга $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$:

$$T_{[\alpha\beta]} = -T_{[\beta\alpha]} = C\varepsilon_{\alpha\beta}\,,$$

если не принимать во внимание симметрию относительно пространственных отражений. При отражениях полностью антисимметричный тензор меняет свой знак: $\varepsilon_{\alpha\beta} \mapsto -\varepsilon_{\alpha\beta}$. Поэтому однородный и изотропный тензор, который также инвариантен относительно отражений в двух измерениях, имеет ту же форму (36), что и в большем числе измерений.

Аналогично рассматриваются однородные и изотропные контравариантные тензоры второго ранга и тензоры со смешанными индексами:

$$T^{\alpha\beta} = Cg^{\alpha\beta}, \qquad T^{\alpha}{}_{\beta} = C\delta^{\alpha}_{\beta}\,.$$

Полученные выражения для однородных и изотропных тензоров используются в космологических моделях, где тензор энергии-импульса материи играет роль $T_{\alpha\beta}$.

5. Многообразия с максимально симметричными подмногообразиями

Во многих физических приложениях, например в космологии, риманово (псевдориманово) многообразие $\mathbb{M}$, $\dim\mathbb{M} = n$, имеет вид топологического произведения двух многообразий, $\mathbb{M} = \mathbb{R}\times\mathbb{S}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, которая отождествляется с временем, и $\mathbb{S}$ — пространство постоянной кривизны. Для каждого значения $t\in\mathbb{R}$ мы имеем подмногообразие $\mathbb{S}\subset\mathbb{M}$. Поскольку $\mathbb{S}$ — пространство постоянной кривизны, оно является однородным и изотропным. Соответствующая группа изометрий генерируется $n(n-1)/2$ векторами Киллинга на $\mathbb{S}$, где $n := \dim\mathbb{M}$. В настоящем разделе мы найдём наиболее общий вид метрики на $\mathbb{M}$, инвариантной относительно группы преобразований, которая генерируется группой изометрий подмногообразия $\mathbb{S}$.

Обозначим координаты на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ как x^{μ}, $\mu = 1,\ldots,n-1$. Тогда метрика на $\mathbb{S}$ имеет компоненты $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$. По построению она инвариантна относительно группы изометрий, генерируемой векторными полями Киллинга $K_i = K_i^{\mu}(x)\partial_{\mu}$, $i = 1,\ldots, n(n-1)/2$.

Предположим, что достаточно гладкая метрика g лоренцевой сигнатуры задана на всём $\mathbb{M} = \mathbb{R}\times\mathbb{S}$ и $t\in\mathbb{R}$ — временна́я координата, т.е. $g_{00} > 0$. Предположим также, что все сечения $t = \mathrm{const}$ пространственноподобны. Кроме того, будем считать, что сужение метрики g на $\mathbb{S}$ совпадает с $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ для каждого фиксированного момента времени. Ясно, что такая метрика имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0\nu} \\ g_{\mu 0} & h_{\mu\nu}\end{pmatrix}, \tag{37}$$

где $g_{00}(t,x)$ и $g_{0\mu}(t,x) = g_{\mu 0}(t,x)$ — произвольные функции от t и x, а $h_{\mu\nu}(t,x)$ — метрика постоянной кривизны на $\mathbb{S}$, которая зависит от t как от параметра. Все компоненты метрики предполагаются достаточно гладкими функциями и от t, и от x. Матрица

$$h_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}}$$

является отрицательно определённой, поскольку метрика $g_{\alpha\beta}$ имеет лоренцеву сигнатуру. Кроме того, матрица $h_{\mu\nu}$ также отрицательно определена по построению.

Во-первых, продолжим действие группы изометрий с $\mathbb{S}$ на всё $\mathbb{M}$ следующим образом. Предположим, что компоненты векторных полей Киллинга $K_i^{\mu}(t,x)$ зависят от t как от параметра. Определим действие инфинитезимальных изометрий на $\mathbb{M}$ соотношениями

$$\begin{aligned} &t \mapsto t' = t\,, \\ &x^{\mu} \mapsto x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon K^{\mu}, \qquad \epsilon \ll 1\,, \end{aligned} \tag{38}$$

где K — произвольный вектор Киллинга из алгебры Ли, генерируемой векторами K_i. То есть преобразования изометрии не сдвигают точки на вещественной оси $t\in\mathbb{R}\subset\mathbb{M}$. Это означает, что векторы Киллинга продолжаются на все $\mathbb{M}$ таким образом, что у них не возникает дополнительной компоненты: $K^0\partial_0 = 0$. Нетривиальность продолжения сводится только к тому, что векторные поля Киллинга становятся зависящими от t как от параметра. В результате алгебра Ли продолженных на $\mathbb{M}$ векторов Киллинга остаётся прежней.

Пример 5.1. В четырёх измерениях векторные поля Киллинга, продолженные на всё $\mathbb{M} = \mathbb{R}\times\mathbb{S}$, генерируют группу изометрий $(\mathbb{M},\mathbb{G})$, где

$$\mathbb{G} = \begin{cases} \mathbb{SO}(4)\,, & \mathbb{S} = \mathbb{S}^3 \text{ — сфера,} \\ \mathbb{ISO}(3)\,, & \mathbb{S} = \mathbb{R}^3 \text{ — евклидово пространство,} \\ \mathbb{SO}(3,1)\,, & \mathbb{S} = \mathbb{H}^3 \text{ — двуполостный гиперболоид.} \end{cases}$$

Этот пример важен в космологии.

Теперь мы можем дать определение однородного и изотропного пространства-времени.

Определение. *Пространство-время* $(\mathbb{M}, g)$ *называется однородным и изотропным, если*

1) *многообразие представляет собой топологическое произведение* $\mathbb{M} = \mathbb{R}\times\mathbb{S}$, *где* $\mathbb{R}$ *— ось времени,* $\mathbb{S}$ *— трёхмерное пространство постоянной кривизны с отрицательно определённой метрикой*;

2) *метрика* g *инвариантна относительно преобразований* (38), *генерируемых группой изометрий* $\mathbb{S}$.

Найдём наиболее общий вид однородной и изотропной метрики вселенной.

Теорема 5.1. *Пусть метрика* (37) *на* $\mathbb{M} = \mathbb{R}\times\mathbb{S}$ *является достаточно гладкой и инвариантной относительно преобразований* (38). *Тогда в некоторой окрестности произвольной точки существует такая система координат, в которой метрика имеет блочно-диагональный вид*:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 + h_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu}\,, \tag{39}$$

где $h_{\mu\nu}(t,x)$ *— метрика постоянной кривизны на* $\mathbb{S}$ *для всех* $t\in\mathbb{R}$. *Кроме того, компоненты векторных полей Киллинга не зависят от времени.*

Доказательство. Пусть x^{μ} — координаты на $\mathbb{S}$. Зафиксируем одну из гиперповерхностей $t = \mathrm{const}$. Вектор, касательный к этой гиперповерхности, имеет только пространственные компоненты: $X = X^{\mu}\partial_{\mu}$. Вектор, ортогональный к гиперповерхности, $n^{\alpha}\partial_{\alpha}$, должен удовлетворять равенству

$$n^0 X^{\nu} g_{0\nu} + n^{\mu} X^{\nu} g_{\mu\nu} = 0\,.$$

Это равенство должно быть выполнено для всех касательных векторов X, и поэтому оно определяет пространственные компоненты нормальных векторов

$$n^\mu = -n^0 g_{0\nu}\hat{g}^{\mu\nu},$$

где $\hat{g}^{\mu\nu}$ — обратная пространственная метрика, $\hat{g}^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$. Легко проверить, что нормальные векторы являются времениподобными.

Теперь проведём через каждую точку пространственной гиперповерхности $x \in \mathbb{S}$ геодезическую вдоль нормального направления. Выберем длину геодезической s в качестве временно́й координаты. Без потери общности будем считать, что исходная пространственноподобная гиперповерхность соответствует $s = 0$. Таким образом, построена система координат $\{x^\alpha\} = \{x^0 := s, x^\mu\}$ в некоторой окрестности гиперповерхности $\mathbb{S}$.

По построению линии $x^\alpha(\tau)$ вида $\{x^0 = s, x^\mu = \text{const}\}$, где $\tau := s$, являются геодезическими с вектором скорости $\dot{x}^\alpha = \delta^\alpha_0$. Из уравнения для геодезических

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma$$

вытекает, что в рассматриваемой системе координат $\Gamma_{00}{}^\alpha = 0$. Опустив индекс α, получаем уравнения для компонент метрики:

$$\partial_0 g_{0\alpha} - \frac{1}{2}\,\partial_\alpha g_{00} = 0\,. \tag{40}$$

Касательный вектор ∂_0 к оси времени имеет единичную длину по построению. Поэтому $g_{00} = 1$. Тогда уравнение (40) принимает вид $\partial_0 g_{0\mu} = 0$. Это дифференциальное уравнение решается с начальным условием $g_{0\mu}(s=0)=0$, поскольку вектор n перпендикулярен начальной гиперповерхности. Для дифференцируемых функций $g_{0\mu}$ оно имеет единственное решение $g_{0\mu} = 0$. Поэтому в построенной системе координат метрика имеет блочно-диагональный вид (39).

Гиперповерхности $t = \text{const}$, построенные выше, называются *геодезически параллельными*.

До сих пор мы не учитывали свойства поверхностей постоянной кривизны. Доказательство является общим и означает локальное существование "временно́й калибровки" для метрики (или синхронной системы координат).

На гиперповерхности $s = 0$ нулевая компонента вектора Киллинга равна нулю, $K^0(0, x) = 0$, по построению. $(0, 0)$-компонента уравнений Киллинга, которые удобнее записать в форме (9), даёт уравнение $\partial_s K^0(s, x) = 0$. Для достаточно гладких функций это уравнение с начальным условием $K^0(0, x) = 0$ имеет единственное решение $K^0(s, x) = 0$ для всех значений s из области определения координатной системы. Следовательно, все гиперповерхности $s = \text{const}$ являются поверхностями постоянной кривизны в некоторой окрестности начальной гиперповерхности.

Если метрика блочно-диагональна (39), то $(0, \mu)$-компоненты уравнений Киллинга (9) принимают вид $\partial_s K^\mu = 0$. Отсюда следует, что компоненты векторных полей Киллинга не зависят от времени.

Пространственные (μ, ν)-компоненты уравнений Киллинга удовлетворяются, поскольку K — векторное поле Киллинга на $\mathbb{S}$.

Возвращаясь к исходным обозначениям $s \mapsto t$, получаем метрику (39).

Д. Гильберт построил систему координат, в которой метрика является блочно-диагональной (39) (уравнение (22) из его статьи [12]) и назвал её гауссовой. Его пространственные сечения не были пространствами постоянной кривизны, и он не рассматривал векторные поля Киллинга.

Если метрика блочно-диагональна (39) и $K = K^\mu\partial_\mu$, то уравнения Киллинга (9) расщепляются на временну́ю и пространственные компоненты:

$$(\alpha, \beta) = (0, 0): \qquad 0 = 0\,, \tag{41}$$

$$(\alpha, \beta) = (0, \mu): \qquad h_{\mu\nu}\partial_0 K^\nu = 0\,, \tag{42}$$

$$(\alpha, \beta) = (\mu, \nu): \quad h_{\mu\rho}\partial_\nu K^\rho + h_{\nu\rho}\partial_\mu K^\rho + K^\rho\partial_\rho h_{\mu\nu} = 0\,. \tag{43}$$

Теорема 5.2. *В предположениях теоремы* 5.1 *метрика* (39) *имеет вид*

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu\,, \tag{44}$$

где $a(t) > 0$ — произвольная достаточно гладкая функция (масштабный множитель), $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$ — метрика постоянной кривизны, зависящая только от пространственных координат $x \in \mathbb{S}$.

Доказательство. Поскольку $h_{\mu\nu}(t, x)$ — метрика постоянной кривизны на $\mathbb{S}$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то уравнения Киллинга (43) выполнены. Теорема 5.1 утверждает, что векторные поля Киллинга не зависят от времени. Поэтому, продифференцировав уравнение (43) по времени, получаем равенство

$$\dot{h}_{\mu\rho}\partial_\nu K^\rho + \dot{h}_{\nu\rho}\partial_\mu K^\rho + K^\rho\partial_\rho \dot{h}_{\mu\nu} = 0\,.$$

Это означает, что производная по времени от метрики $\dot{h}_{\mu\nu}$ является однородным и изотропным тензором второго ранга. Пример 4.3 говорит нам, что производная по времени от метрики должна быть пропорциональна самой метрике:

$$\dot{h}_{\mu\nu} = f h_{\mu\nu}\,, \tag{45}$$

где $f(t)$ — произвольная достаточно гладкая функция времени.

Если $f = 0$, то доказывать нечего, и метрика уже имеет вид (44) для $a = \text{const}$.

Пусть $f \neq 0$. Тогда введём новую временну́ю координату $t \mapsto t'$, определённую дифференциальным уравнением

$$dt' = f(t)\, dt\,.$$

После этого уравнение (45) принимает вид

$$\frac{dh_{\mu\nu}}{dt'} = h_{\mu\nu}\,.$$

Его общим решением является

$$h_{\mu\nu}(t', x) = C\exp(t')\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x), \qquad C = \text{const} \neq 0\,,$$

где $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$ — метрика постоянной кривизны на $\mathbb{S}$, которая не зависит от времени. Отсюда следует представление (44).

Теорема 1.1 является следствием теорем 5.1 и 5.2.

6. Пример

Явный вид метрики Фридмана для однородной и изотропной вселенной (44) зависит от координат, которые выбираются на пространстве постоянной кривизны. В стереографических координатах метрика Фридмана диагональна

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{a^2\eta_{\mu\nu}}{(1+b_0x^2)^2} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где $b_0 = -1, 0, 1$, $\eta_{\mu\nu} := \operatorname{diag}(---)$ — отрицательно определённая евклидова метрика и $x^2 := \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \leqslant 0$. Поскольку выбрана отрицательно определённая метрика на пространственных сечениях, значения $b_0 = -1, 0, 1$ соответствуют пространствам постоянной положительной, нулевой и отрицательной кривизны соответственно. Для положительной и отрицательной кривизны стереографические координаты определены на всём евклидовом пространстве $x \in \mathbb{R}^3$. Для пространств отрицательной кривизны стереографические координаты определены внутри шара $|x^2| < 1/b_0$.

Проведём преобразование координат $x^\mu \mapsto x^\mu/a$. Тогда метрика становится недиагональной и конформный множитель исчезает:

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\dot b^2 x^2}{4b^2(1+bx^2)^2} & \dfrac{\dot b x_\nu}{2b(1+bx^2)^2} \\ \dfrac{\dot b x_\mu}{2b(1+bx^2)^2} & \dfrac{\eta_{\mu\nu}}{(1+bx^2)^2} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

где

$$b(t) := \frac{b_0}{a^2(t)}, \tag{48}$$

точка обозначает производную по времени.

Мы видим, что метрика однородной и изотропной вселенной может быть недиагональной и не содержать конформного множителя. Кроме того, скалярная кривизна пространственных сечений, которая пропорциональна $b(t)$, явно зависит от времени.

Теперь просто отбросим недиагональные члены, положим $g_{00} = 1$ и добавим масштабный множитель. Тогда метрика примет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{a^2\eta_{\mu\nu}}{(1+bx^2)^2} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Эта метрика содержит две независимые произвольные функции времени: $a(t) > 0$ и $b(t)$. Она невырождена для всех значений b, включая нуль. Все сечения $t = \text{const}$ соответствующего пространства-времени, очевидно, являются пространствами постоянной кривизны и, следовательно, однородны и изотропны. Данная метрика представляет интерес, так как в общем случае позволяет анализировать решения, которые проходят через нуль $b = 0$. Если такие решения существуют, то тогда пространственные сечения в процессе эволюции меняют положительную кривизну на отрицательную и наоборот.

От произвольной функции $b(t)$ нельзя избавиться посредством преобразования координат без появления недиагональных членов.

Возникает интересная ситуация. С одной стороны, все пространственные сечения метрики (49) являются однородными и изотропными. С другой стороны, любая однородная и изотропная метрика должна иметь вид (1). Ответ на данный вопрос следующий: метрика (49) в целом не является однородной изотропной. Действительно, каждое сечение $t = \text{const}$ пространства-времени $\mathbb{M}$ является пространством постоянной кривизны, и пространственные (μ, ν)-компоненты уравнений Киллинга (32) удовлетворены, однако смешанные $(0, \mu)$-компоненты — нет. Шесть независимых векторов Киллинга пространственных сечений в стереографических координатах выражаются как

$$\begin{aligned} \hat K_{0\mu} &= (1+bx^2)\partial_\mu - \frac{2}{b}\, x_\mu x^\nu \partial_\nu, \\ \hat K_{\mu\nu} &= x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \end{aligned} \tag{50}$$

где индексы $\mu, \nu = 1, 2, 3$ нумеруют векторные поля Киллинга. Первые три вектора Киллинга генерируют трансляции в начале системы координат $x^2 = 0$, а последние три вектора Киллинга — вращения. Мы видим, что первые три векторных поля Киллинга явно зависят от времени через функцию $b(t)$ и уравнения (42) не выполняются.

Существует другой метод увидеть, что метрика (49) не является однородной и изотропной. Прямые вычисления дают следующее выражение для скалярной кривизны:

$$R = -\frac{24b}{a^2} + 6\left[\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2} - \frac{1}{1+bx^2}\left(4\,\frac{\dot a\dot b x^2}{a} + \ddot b x^2\right) + 3\,\frac{\dot b^2 x^4}{(1+bx^2)^2}\right],$$

которая явно зависит от x и, следовательно, не является однородной и изотропной.

Этот пример показывает, что однородность и изотропность пространственных сечений не дают достаточных условий однородности и изотропности полной четырёхмерной метрики. Эквивалентное определение следующее.

Определение. *Пространство-время называется однородным и изотропным, если:*

1) *все сечения постоянного времени,* $t = \text{const}$, *являются пространствами постоянной кривизны* $\mathbb{S}$;

2) *внешняя кривизна гиперповерхностей* $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{M}$ *однородна и изотропна.*

Определение внешней кривизны вложенных гиперповерхностей читатель может найти, например, в [19, 23]. В наших обозначениях внешняя кривизна $K_{\mu\nu}$ для блочно-диагональной метрики (39) пропорциональна производной по времени от пространственной части метрики:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\dot h_{\mu\nu}.$$

Последнее определение однородного и изотропного пространства-времени эквивалентно определению, данному в разделе 5. Действительно, первое требование означает, что пространство-время представляет собой топологическое произведение $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$. После этого метрику можно привести к блочно-диагональному виду (39). Затем второе условие определения приводит к уравнению (45), и можно следовать доказательству теоремы 5.2.

Отметим, что второе условие в определении однородной и изотропной вселенной является необходимым, так как метрика (49) даёт контрпример.

7. Заключение

В статье даны два эквивалентных определения однородного и изотропного пространства-времени, а также подробное доказательство теоремы 1.1, которая описывает наиболее общий вид метрики однородной и изотропной вселенной с точностью до преобразования координат. Это метрика Фридмана. Хотя теорему можно считать известной, её доказательство с соответствующими определениями трудно найти в литературе. Доказательство теоремы 5.2 и второе определение однородного и изотропного пространства-времени, по-видимому, являются новыми. Доказательство теоремы 5.2 простое, но не проще, чем доказательство в книге [16]. Однако оно хорошо приспособлено для доказательства эквивалентности определений.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Список литературы

1. Friedman A A *Z. Phys.* **10** 377 (1922); Пер. на русск. яз.: Фридман А А *Журн. Русск. физ.-хим. общ-ва Ч. физ.* **56** (1) 59 (1924); *УФН* **80** 439 (1963); *УФН* **93** 280 (1967)
2. Friedmann A *Z. Phys.* **21** 326 (1924); Пер. на русск. яз.: Фридман А А *УФН* **80** 447 (1963)
3. Lemaître G *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* **47** 49 (1927); Пер. на англ. яз.: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **91** 483 (1931)
4. Lemaître G *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* **53** 51 (1933); Пер. на англ. яз.: *Gen. Rel. Grav.* **29** 641 (1997)
5. Robertson H P *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **15** 822 (1929)
6. Robertson H P *Rev. Mod. Phys.* **5** 62 (1933)
7. Robertson H P *Astrophys. J.* **82** 284 (1935)
8. Tolman R C *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **16** 320 (1930)
9. Tolman R C *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **16** 409 (1930)
10. Tolman R C *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **16** 511 (1930)
11. Walker A G *Proc. London Math. Soc. 2* **42** 90 (1936)
12. Hilbert D *Math. Ann.* **15** 1 (1924)
13. Fubini G *Ann. Mat. 3* **9** 33 (1904)
14. Eisenhart L P *Riemannian Geometry* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1926); Пер. на русск. яз.: Эйзенхарт Л П *Риманова геометрия* (М.: ИЛ, 1948)
15. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* 2nd ed. (New York: Pergamon, 1962)
16. Weinberg S *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (New York: Wiley, 1972)
17. Hawking S W, Ellis G F R *The Large Scale Structure of Space–Time* (Cambridge: Univ. Press, 1973)
18. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973)
19. Wald R M *General Relativity* (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1984)
20. Kobayashi S, Nomizu K *Foundations of Differential Geometry* Vols 1, 2 (New York: Interscience Publ., 1963, 1969); Пер. на русск. яз.: Кобаяси Ш, Номидзу К *Основы дифференциальной геометрии* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1981)
21. Дубровин Б А, Новиков С П, Фоменко А Т *Современная геометрия. Методы и приложения* 4-е изд. (М.: Наука, 1998); Пер. на англ. яз.: Dubrovin B A, Fomenko A T, Novikov S P *Modern Geometry — Methods and Applications* 2nd ed. (New York : Springer-Verlag, 1992)
22. Wolf J A *Spaces of Constant Curvature* (Berkley, Calif.: Univ. of California Press, 1972)
23. Katanaev M O, arXiv:1311.0733

Killing vector fields and a homogeneous isotropic universe

M.O. Katanaev
Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Gubkina 8, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: *katanaev@mi.ras.ru*

Some basic theorems on Killing vector fields are reviewed. In particular, the topic of a constant curvature space is examined. A detailed proof is given for a theorem describing the most general form of the metric of a homogeneous isotropic space-time. Although this theorem can be considered commonly known, its complete proof is difficult to find in the literature. An example metric is presented which, while all its spatial cross sections correspond to constant curvature spaces, still is not homogeneous and isotropic as a whole. An equivalent definition of a homogeneous isotropic space-time in terms of embedded manifolds is also given.

Keywords: Killing vector field, homogeneous universe, isotropic universe, Friedmann metric

PACS number: **04.20.–q**

Bibliography — 23 references *Received 4 December 2015*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **186** (7) 763 – 775 (2016) *Physics – Uspekhi* **59** (7) (2016)

DOI: 10.3367/UFNr.2016.05.037808 DOI: 10.3367/UFNe.2016.05.037808