

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

# Одномерные модели модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме на основе уравнений Захарова и Силина

А.Г. Загородний, А.В. Киричок, В.М. Куклин

*Рассмотрены механизмы развития модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме в условиях, когда плотность энергии поля меньше (модель Захарова) или больше (модель Силина) плотности тепловой энергии среды. На примере одномерного представления показано, что обнаруженный В.Е. Захаровым механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний в плазме оказывается применимым и для интенсивных полей в холодной плазме, описываемых моделью, разработанной В.П. Силиным. Показано, что процессы модуляционной неустойчивости ленгмюровских колебаний в неизотермической и в холодной плазме подобны. Детально анализируются гибридные модели (электроны описаны с помощью уравнений квазигидродинамики, а ионы — как частицы), которые позволяют исследовать прямой механизм передачи энергии ионам в процессе развития неустойчивости.*

**Ключевые слова:** модуляционная неустойчивость, параметрическая неустойчивость, неизотермическая и холодная плазма, модель Захарова, модель Силина, гибридные модели

PACS numbers: 52.35. – g, 52.65. – y

DOI: 10.3367/UFNr.2016.01.037697

## Содержание

### 1. Введение (743).

1.1. Неизотермическая плазма. 1.2. Холодная плазма. 1.3. О сравнении моделей Захарова и Силина.

### 2. Холодная плазма, одномерные уравнения Силина (747).

2.1. Уравнения гидродинамической модели Силина в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \gg n_0 T_e$ . 2.2. Уравнения гибридной модели Силина в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \gg n_0 T_e$ .

### 3. Неизотермическая плазма, одномерные уравнения Захарова (750).

3.1. Гидродинамическая модель Захарова (сверхзвуковой режим) в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \ll n_0 T_e$ . 3.2. Гибридная модель Захарова в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \ll n_0 T_e$ .

### 4. Линейная теория (752).

### 5. Модуляционная неустойчивость ленгмюровской волны в холодной плазме (753).

5.1. Гидродинамическая модель Силина. 5.2. Гибридная модель Силина. 5.3. Сравнение гидродинамической и гибридной моделей Силина.

### 6. Модуляционная неустойчивость ленгмюровской волны в неизотермической плазме (754).

### 7. Сравнение гибридных моделей Захарова и Силина (755).

7.1. Результаты численного моделирования.

### 8. Заключение (758).

### 9. Приложение А. Отражение электромагнитной волны от ограниченной плазмы (760).

### Список литературы (761).

## 1. Введение

Легко возбуждаемые различными источниками в плазме [1–9] интенсивные ленгмюровские волны оказываются параметрически неустойчивыми. Эта неустойчивость ведёт к возбуждению коротковолнового спектра колебаний, синхронизованного по частоте с интенсивной ленгмюровской волной (накачки), и к образованию глубоких каверн плотности плазмы, заполненных ВЧ полем. Интерес к этим процессам был обусловлен, в частности, открывшимися возможностями нагрева электронов и ионов. Корректный аппарат описания параметрической неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний фактически был создан в основополагающих работах В.П. Силина [10] и В.Е. Захарова [11]. Уже в первых численных одномерных экспериментах по параметрическому распаду ленгмюровских колебаний [12] эти теоретические представления были подтверждены [7] (см. также [13, 14] и обзор [15]). Полная теория

А.Г. Загородний. Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ул. Метрологическая 14-Б, 03680 Киев, Украина  
E-mail: Zagorodny@nas.gov.ua

А.В. Киричок. Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ул. Метрологическая 14-Б, 03680 Киев, Украина; Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы 4, 61022 Харьков, Украина  
E-mail: kirichok@bitp.kiev.ua

В.М. Куклин. Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы 4, 61022 Харьков, Украина  
E-mail: v.m.kuklin@karazin.ua

Статья поступила 7 декабря 2015 г.

параметрического распада плазменных колебаний была позднее представлена в книге [16].

Однако наибольший интерес у научной общественности вызвал обнаруженный и пояснённый В.Е. Захаровым эффективный механизм диссипации волновой энергии — коллапс ленгмюровских волн в неизотермической плазме [17]. Это процесс формирования коротковолнового спектра возмущений и образования каверн плотности плазмы, который может быть описан с помощью уравнений Захарова [17], полученных с использованием гидродинамических уравнений для электронной и ионной жидкостей при плотности энергии длинноволнового ленгмюровского поля, меньшей плотности тепловой энергии электронов плазмы. В гидродинамической модели Захарова возникают области локализации коротковолновых ленгмюровских колебаний. Из этих областей (каверн) плазма выталкивается под действием ВЧ давления, так что плотность плазмы оказывается заметно ниже средней по объёму. Дальнейшая эволюция может привести к так называемому коллапсу — сужению и углублению каверны плотности (так называемый режим с обострением). В этом случае сужение каверны, как может быть замечено в более общих моделях описания этого явления, должно сопровождаться затуханием мелкомасштабных мод ВЧ спектра на электронах и "схлопыванием" каверны из-за выгорания ВЧ поля (так называемый "физический коллапс").

Аналитические исследования, аппаратные и численные эксперименты ещё на ранней стадии изучения этих процессов подтвердили [18–21] тот факт, что заметная часть энергии интенсивных ленгмюровских колебаний в неизотермической плазме в результате модуляционной неустойчивости переходит в энергию коротковолнового ленгмюровского спектра. Похожее явление было обнаружено и в более сильных полях в холодной плазме [22, 23], где, как показано ниже, механизм передачи энергии поля частицам плазмы оказался аналогичным. Это означает, что механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний при превышении плотностью тепловой энергии плазмы плотности ВЧ поля, обнаруженный В.Е. Захаровым [17], оказался применимым и для полей, плотность энергии которых существенно превышает тепловую энергию плазмы. В дальнейшем изучению этого крайне важного для физики плазмы феномена было посвящено множество работ (см., в частности, [24–34]). Особо следует отметить работу Е.А. Кузнецова [35], где наиболее корректно получены уравнения модели В.Е. Захарова, описывающие модуляционную неустойчивость ленгмюровской волны в неизотермической плазме. Представление о масштабах и эффективности этих исследований можно составить, обращаясь к обзорам [36, 37].

Обнаруженное В.Е. Захаровым явление поглощения волновой энергии в результате развития мелкомасштабных модуляционных неустойчивостей получило новое развитие в целом ряде приложений. Многие модели, которые описывают эти процессы, отличаются от прежних традиционных, обнаруживаются всё новые особенности и вскрываются новые последствия развития модуляционных неустойчивостей.

Понятно, что в гидродинамической модели учёт ряда кинетических эффектов (например, затухания Ландау) невозможен. Поэтому обычно применяется феноменологическое описание этого явления за счёт введения в систему гидродинамических уравнений соответствующих

слагаемых. Это в определённой степени допустимо, поскольку природа затухания Ландау достаточно хорошо изучена. С другой стороны, с помощью чисто гидродинамического рассмотрения не вполне корректно описывается поведение захваченных частиц неоднородным в пространстве полем — фактически пренебрегается их инерцией (существенной именно для ионов), что приводит к формированию не только весьма мелкомасштабных и глубоких каверн плотности плазмы, но и к режимам с обострением, которые не всегда адекватны физической реальности.

Для корректного учёта затухания Ландау на электронах часто используется кинетическое уравнение для функции их распределения. Но следует иметь в виду, что при определённых условиях кинетическое затухание на электронах способно нарушить условия развития модуляционной неустойчивости из-за подавления поля ещё на этапе формирования каверн, которые при этом могут исказить свою форму. Таким образом, существуют трудности в интерпретации процесса модуляционной неустойчивости, характер которой может довольно заметно изменяться при включении сильного кинетического затухания. Кроме того, кинетический подход, как и гидродинамический, описывает движение сплошной среды, позволяя существовать не имеющим физической перспективы решениям с обострениями вплоть до сколь угодно малых масштабов.

Ниже мы обсудим различные модели описания модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме с использованием одномерного представления. Выбор одномерных моделей процессов, как отметил Дж. Доусон, сохраняет основные черты процессов, существенно упрощая описание и понимание физических явлений [38]. Кроме того, основной трудностью описания плазмы в трёхмерных моделях является не только различие масс электронов и ионов, но и весьма большое число частиц (электронов и ионов) — порядка  $10^2 - 10^{15}$  в единице объёма и более, что вынуждает использовать достаточно сложные модели, которые, тем не менее, пока остаются приближёнными. Это затрудняет сравнение гидродинамических, кинетических моделей и моделей, использующих частично или полностью описание с помощью крупных частиц, частиц в ячейках и т.п., моделирующих поведение ионов и электронов.

В одномерных моделях, соответствующих приведённому выше трёхмерному случаю, число частиц, отвечающих ионам и электронам, порядка  $10^4 - 10^5$  в единице объёма, поэтому эти частицы по своим характеристикам близки электронам и ионам плазмы. Таким образом, описание с помощью частиц может оказаться более корректным в рамках одномерных моделей, чем гидродинамическое или основанное на кинетических уравнениях для функции их распределения. Это может позволить внести ясность в вопрос правомерности различных способов описания процессов.

### 1.1. Неизотермическая плазма

Наибольший прогресс был достигнут в исследованиях модуляционной неустойчивости интенсивного ленгмюровского поля в неизотермической плазме при плотности энергии поля, существенно меньшей плотности тепловой энергии электронов.

В одномерном случае в неизотермической плазме формируется мелкомасштабная солитоноподобная ка-

верна, где ВЧ давление уравнивается давлением плазменных электронов (см., например, [39]). Однако и в этих низкоразмерных случаях можно наблюдать процесс "схлопывания" каверн плотности плазмы, если ВЧ давление уменьшается в результате выгорания поля за счёт затухания Ландау [40]. Вообще говоря, разрушение каверны поддерживает нагрев не только электронов, но и ионов, он повышает общее давление плазмы, что также разрушает равновесное состояние этих образований. В сверхзвуковом режиме движения стенок каверны вероятность физического коллапса даже в одномерном случае может возрасти. Модуляционная неустойчивость интенсивной ленгмювской волны в неизотермической плазме приводила также к коллективным ионным возмущениям, в частности к генерации ионно-звуковых волн [41–44].

Сравнение одномерной кинетической модели (Власова–Пуассона), которая описывает поведение электронов и ионов с помощью кинетических уравнений для функций распределения, с гидродинамической моделью Захарова для одних и тех же значений параметров и одинаковых начальных условий было проведено, например, в работе [45], где амплитуда длинноволнового поля (накачки) со временем не изменялась. Наиболее корректным было сравнение для случая неизотермической плазмы. При формировании каверны на начальной стадии нелинейного процесса в режиме постоянной накачки заметны отличия в формировании каверн плотности, форма которых в кинетической модели не соответствует структуре возмущений, характерных для модуляционной неустойчивости. Хотя в обоих случаях вытеснение ВЧ полем плазмы приводит к образованию областей с пониженной плотностью, величина изменений последней в модели Захарова оказалась значительно большей, чем в модели Власова–Пуассона. Таким образом, было показано, что кинетическое затухание поля на частицах способно исказить процесс модуляционной неустойчивости, возможно, приводя к иным последствиям, в частности, к появлению групп быстрых частиц и преждевременному разрушению каверн плотности.

Весьма интересно сравнение гидродинамической модели Захарова с моделью, в которой использовано описание электронов с помощью кинетических уравнений для функции их распределения и гидродинамическое — для ионов [46]. Здесь также рассматривался случай постоянной накачки. Данная модель значительно лучше описывает формирование каверн, характерных для развитой модуляционной неустойчивости, которые на начальной стадии нелинейного процесса практически не отличаются от подобных образований в гидродинамической модели Захарова. Надо отметить, что модели, в которых используется такое кинетическое описание электронного компонента плазмы, а ионы описаны гидродинамически, позволяют не только увидеть формирование каверн плотности плазмы, но и способны более точно определить характеристики распределения электронов по скоростям, в частности их температуру, хотя не способны ответить на вопросы о распределении ионов по энергиям.

При представлении ионов частицами в рамках так называемых гибридных моделей<sup>1</sup> (электроны описаны

гидродинамически, а ионы — крупными частицами) флуктуации ионной плотности оказываются весьма значительными [47–49], по крайней мере, в рассматриваемых одномерных моделях неизотермической плазмы Захарова. Это ускоряет процесс развития модуляционной неустойчивости настолько, что линейная стадия роста возмущений практически выпадает из наблюдения (хотя это, как будет отмечено ниже, обусловлено тем, что инкремент неустойчивости в широкой области значений волнового числа оказался практически одинаковым для обсуждаемых сверхзвуковых режимов процесса).

Рассмотрение в рамках таких гибридных моделей позволяло бы учесть инерцию ионов при формировании и эволюции каверн плотности плазмы, в частности, механизм разрушения каверн. Именно прямое моделирование коллапса методом частиц, по мнению, высказанному В.Е. Захаровым и его коллегами (см. [50]), является "наиболее последовательным". Действительно, кинетическое и гидродинамическое описания оперируют объектами, которые представляют собой не частицы, а малые фазовые объёмы, и в классическом пределе эти фазовые объёмы сколь угодно малы. Это приводит к меньшей инерционности вещества, чем при описании его частицами.

Что касается методов описания с помощью крупных частиц в высокоразмерных моделях, то здесь другая крайность. Крупные частицы обладают излишне большой инерционностью, поэтому их часто заменяют локальными объектами — областями-ячейками, где происходит усреднение внутреннего содержимого. Это приближает такой подход к гидродинамическому описанию на малых масштабах, сохраняя на больших масштабах особенности метода крупных частиц и их усреднённую инерционность. Можно увеличивать число модельных частиц в описании, уменьшая удельную долю (заряд и массу) каждой, хотя приблизиться к реальным физическим параметрам в трёхмерном пространстве вряд ли удастся.

Ниже основное внимание уделим одномерным гибридным моделям. Используем для одномерного моделирования  $(2-5) \times 10^4$  модельных частиц-ионов (что в трёхмерной модели соответствовало бы  $10^{13} - 10^{14}$  таких объектов в объёме рассмотрения), причём эти частицы уже по своим характеристикам отвечают отдельным ионам. Поэтому динамика моделирующих ионы частиц в таком случае в значительной степени адекватна динамике ионов плазмы, более того, механизмы обмена энергией между полем и частицами отвечают реальному взаимодействию ионов со спектром НЧ колебаний. Это означает, что в одномерных гибридных моделях с большим числом частиц можно обеспечить корректное описание нелинейного затухания Ландау медленных возмущений плотности плазмы на ионах, оставляя за рамками этого подхода проблемы описания деталей функции распределения электронов. Учёт нерезонансного взаимодействия частиц-ионов с модами НЧ спектра, захват ионов в потенциальные ямы таких колебаний приводит к дополнительной нестабильности каверн плотности, возникающих в результате модуляционной неустойчивости, а также к появлению групп быстрых частиц.

В работе [49] было проведено сравнение двух моделей — гидродинамической и гибридной моделей Захарова при одинаковых значениях параметров и одинаковых начальных условиях. За счёт большего уровня

<sup>1</sup> Это название было предложено авторами работы [49].

флуктуаций ионной плотности количество каверн в гибридной модели оказалось заметно больше, и они были менее глубокими, чем в модели Захарова. Интегральные показатели обеих моделей оказались практически одинаковыми. Недостатком работы этих авторов является несамосогласованное описание, т.е. отсутствие учёта влияния возбуждаемого спектра на волну накачки. Подчеркнём, что в случаях описания с помощью гидродинамической модели Захарова [49] и описания в рамках кинетических уравнений для функции распределения электронов и гидродинамического — для ионов [51] каверны оставались неподвижными, что не наблюдалось в гибридной модели.

## 1.2. Холодная плазма

С появлением мощных источников энергии, которые возбуждали весьма интенсивные ленгмюровские колебания, плотность энергии поля которых существенно превосходила плотность тепловой энергии электронов, оказалась востребована разработанная В.П. Силиным [10, 16] и развитая им и его сотрудниками модель описания параметрической неустойчивости интенсивного поля в холодной плазме. При таких условиях дисперсионный член в уравнении для поля ленгмюровской волны, обусловленный тепловым движением плазмы, достаточно мал и во многих случаях им можно пренебречь, считая плазму холодной.

Действительно, если плотность энергии поля заметно превосходит плотность тепловой энергии плазмы, развитие модуляционной неустойчивости по крайней мере на начальной стадии процесса происходит по сценариям, предложенным В.П. Силиным [10, 22]. В моделях В.П. Силина мощная ленгмюровская волна в холодной плазме приводит к интенсивным осцилляциям скорости электронов, амплитуда которых сравнима с длиной волны мод возбуждаемого спектра. В этом случае, вообще говоря, неустойчивость следовало бы называть параметрической [16]. Тем не менее обе модели Захарова и Силина оказываются физически подобными [52]. Именно из-за этого термин "модуляционная неустойчивость" применим для описания процесса неустойчивости мощного ленгмюровского поля и в модели Силина.

В частности, даже при одномерном численном моделировании процесса на базе обобщённых в работах [53, 54] гидродинамических уравнений Силина развивалась модуляционная неустойчивость и происходил частичный обмен энергией между её коротковолновым спектром и интенсивной волной накачки. Результаты такого моделирования процесса качественно и количественно согласовывались с результатами ранее проведённых в ФИАНе численных экспериментов [22]. Можно было наблюдать режим с обострением, который характеризовался уменьшением масштаба каверны и срывом счёта. Именно это последнее обстоятельство и вынудило перейти к описанию ионов частицами.

В гибридной модели Силина (электроны описаны гидродинамически, а ионы — крупными частицами) точно так же формировались каверны плотности, которые затем разрушались [48], что было обусловлено не только неравновесным начальным состоянием каверн (из-за нарушения баланса между ВЧ давлением и давлением плазмы) и эффектом выгорания поля, но и учётом инерции моделирующих ионы частиц, число которых в чис-

ленном эксперименте было недостаточно велико. При этом ионная каверна "схлопывалась", ионный компонент переходил в режим пересечения траекторий частиц [47, 48]. Энергия, которую отбирали ионы, оказалась порядка  $(m_e/M)^{1/3}$  начальной энергии волны накачки [48] (здесь  $m_e$  и  $M$  — массы электронов и ионов соответственно). Для электронов переход в режим пересечения траекторий мог сдерживаться существованием ионной каверны, что способно было синхронизовать выброс быстрых электронов и ионов в момент её разрушения. Эксперименты по созданию вблизи плазменного резонанса в неоднородной плазме значительной плотности энергии поля  $W$ , превышающей плотность тепловой энергии плазмы  $n_{e0}T_{e0}$ , с частотой, близкой к ленгмюровской, демонстрировали на фоне нагрева электронов вблизи плазменного резонанса появление коротких импульсов быстрых частиц. При этом имел место вынос энергии из области плазменного резонанса не только электронами, но и ионами [55–57] с достаточно большими энергиями (см., например, обзорную работу [57]). Область источников электронных импульсов соответствовала малым размерам каверн плотности. Соотношение энергии, запасённой в быстрых ионах после разрушения каверны, примерно отвечало приведённым в теории [48, 58–60] значениям.

Часто в литературе процесс неустойчивости колебательного движения электронов с ленгмюровской частотой относительно неподвижных ионов называли осциляторной бунемановской неустойчивостью. О подобии процессов бунемановской неустойчивости и неустойчивости ленгмюровской волны в холодной плазме свидетельствует примерное равенство инкрементов и начальной скорости относительного движения электронов и ионов. Анализ развития бунемановской неустойчивости был приведён в книге [6], где на нелинейной стадии процесса наблюдалось снижение скорости (срыв тока) относительного движения и возрастание возмущений электронного и ионного компонентов, что качественно соответствует протекающим процессам при развитии параметрической неустойчивости интенсивной ленгмюровской волны в холодной плазме.

Обсуждение процессов параметрической неустойчивости ленгмюровских волн в условиях применимости уравнений Захарова и уравнений Силина обычно проводилось теоретиками отдельно, хотя при проведении экспериментов эти процессы часто не различали. Поэтому представляет интерес сравнить характер протекания модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в горячей и холодной плазме в рамках гибридных самосогласованных моделей. Основное внимание обращалось на поведение ионного компонента плазмы. Оказалось, что доля энергии ВЧ поля, передаваемая ионам в случае неизотермической плазмы, порядка  $W/n_0T_{e0}$ , а в случае холодной плазмы были подтверждены оценки [48] порядка  $(m_e/M)^{1/3}$ , причём в последнем случае доля быстрых частиц в распределении их по энергиям оказалась выше [58–60].

Особое внимание в настоящей работе уделено также сравнению характера возбуждения коллективных степеней свободы низкочастотных движений, в частности, генерации ионных волн в гибридных моделях Захарова и Силина. Важно также выяснить, как влияет скорость выгорания ВЧ поля в кавернах на характер динамики ионов. Эти и другие вопросы обсуждаются ниже.

**1.3. О сравнении моделей Захарова и Силина**

Основной целью данной работы является обсуждение различных одномерных моделей описания процесса модуляционной неустойчивости интенсивных длинноволновых ленгмюровских колебаний и выяснение особенностей передачи энергии ионам и коллективным ионным возмущениям в неизотермической и холодной плазме [59–61].

Как показано в настоящей работе, предложенное В.П. Силиным [10, 16] описание параметрической неустойчивости интенсивного длинноволнового ленгмюровского поля в плазме с возбуждением коротковолнового спектра ленгмюровских колебаний является универсальным как для холодной плазмы (т.е. при превышении плотностью энергии поля плотности тепловой энергии среды,  $W = |E_0|^2/4\pi \gg n_0 T_e$ ), так и для плазмы неизотермической (при плотности тепловой энергии плазмы, превышающей плотность энергии поля,  $W = |E_0|^2/4\pi \ll n_0 T_e$ , где  $E_0$  — начальная напряжённость поля длинноволновой ленгмюровской волны,  $n_0$  — невозмущённая плотность плазмы,  $T_e$  — температура электронов, ионы полагаем холодными). Поэтому для получения систем уравнений каждой из моделей Силина и Захарова воспользуемся подходом, который изложен в книге В.П. Силина [16].

Несмотря на то что обсуждаемые модели Силина и Захарова, полученные для разных физических условий, были разработаны довольно давно и развивались долгое время независимо, до настоящего времени отсутствует ясное понимание тесной связи между ними. В данной работе мы попытались продемонстрировать такую связь и показать подобие физических механизмов, лежащих в основе описываемых этими моделями явлений, что представляется важным, в том числе и с методической точки зрения.

**2. Холодная плазма, одномерные уравнения Силина**

Сначала рассмотрим случай параметрической неустойчивости внешнего длинноволнового ленгмюровского поля большой интенсивности для холодной плазмы, т.е. в условиях превышения плотностью энергии поля плотности тепловой энергии среды,  $W = |E_0|^2/4\pi \gg n_0 T_e$ . Уравнения квазигидродинамики для частиц сорта  $\alpha$ , как известно, имеют вид [16]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + u_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial x} v_x - \frac{e_x}{m_x} E = -v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial t} + u_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial x} n_x + n_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial x} v_x = -\frac{\partial}{\partial x} (n_x v_x), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 4\pi \sum_{\beta} e_{\beta} n_{\beta}, \tag{2.3}$$

где  $\alpha = e$  и  $\alpha = i$  соответствуют электронам и ионам.

Частицы находятся в поле внешней волны (длину которой для упрощения расчётов положим равной бесконечности), осциллируя со скоростью  $u_{0\alpha} = -(e_x |E_0|/m_x \omega_0) \cos \Phi$ .

Компоненты напряжённости поля внешней волны определяются следующим образом:

$$E_0 = -\frac{i}{2} [|E_0| \exp(i\omega_0 t + i\phi) - |E_0| \exp(-i\omega_0 t - i\phi)]. \tag{2.4}$$

В фурье-представлении, исключая

$$E_n = -\frac{4\pi e (n_{i,n} - n_{e,n})}{k_0 n},$$

перепишем первое уравнение системы (2.1)–(2.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\alpha,n}}{\partial t} + u_{0\alpha} i k_0 m v_{\alpha,n} + \frac{4\pi e_x i}{k_0 n m_x} \sum_{\beta} e_{\beta} n_{\beta,n} = \\ = -i k_0 \sum_m m v_{\alpha,n-m} v_{\alpha,m}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Используем ниже следующие переменные:

$$v_{\alpha,n} = e_{\alpha} n_{\alpha,n} \exp(-i a_{\alpha,n} \sin \Phi), \tag{2.6}$$

$$\theta_{\alpha,n} = v_{\alpha,n} \exp(-i a_{\alpha,n} \sin \Phi), \tag{2.7}$$

где

$$a_{\alpha,n} = \frac{n e_x k_0 E_0}{m_x \omega_0^2}, \quad \Phi = \omega_0 t + \phi. \tag{2.8}$$

При этом уравнения (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial v_{\alpha,n}}{\partial t} + \theta_{\alpha,n} i k_0 n e_{\alpha} n_{\alpha,0} = -i k_0 n \sum_m v_{\alpha,n-m} \theta_{\alpha,m}, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{\alpha,n}}{\partial t} + \frac{4\pi e_x i}{k_0 n m_x} \sum_{\beta} v_{\beta,n} \exp[i(a_{\beta,n} - a_{\alpha,n}) \sin \Phi] = \\ = -i k_0 \sum_m m \theta_{\alpha,n-m} \theta_{\alpha,m}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Очевидно, что  $a_{i,n} - a_{e,n} = n(e k_0 E_0 / M \omega_0^2) + n(e k_0 E_0 / m_e \omega_0^2) \approx n(e k_0 E_0 / m_e \omega_0^2) = a_n$ , где величина  $k_n = n k_0$  определяет дискретный набор волновых чисел мод коротковолнового спектра. Для электронов уравнения (2.9), (2.10) можно записать как

$$\frac{\partial v_{e,n}}{\partial t} - \theta_{e,n} i k_0 n e n_0 = -i k_0 n \sum_m v_{e,n-m} \theta_{e,m}, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{e,n}}{\partial t} - \frac{4\pi e i}{k_0 n m_e} (v_{e,n} + v_{i,n} \exp(i a_n \sin \Phi)) = \\ = -i k_0 \sum_m m \theta_{e,n-m} \theta_{e,m}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Используем представление

$$\begin{aligned} v_{e,n} = \sum_s u_n^{(s)} \exp(i s \omega_0 t) = u_n^{(0)} + u_n^{(1)} \exp(i \omega_0 t) + \\ + u_n^{(-1)} \exp(-i \omega_0 t) + u_n^{(2)} \exp(i 2 \omega_0 t) + u_n^{(-2)} \exp(-i 2 \omega_0 t), \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} \theta_{e,n} = \sum_s v_n^{(s)} \exp(i s \omega_0 t) = v_n^{(0)} + v_n^{(1)} \exp(i \omega_0 t) + \\ + v_n^{(-1)} \exp(-i \omega_0 t) + v_n^{(2)} \exp(i 2 \omega_0 t) + v_n^{(-2)} \exp(-i 2 \omega_0 t), \end{aligned} \tag{2.14}$$

и известное разложение

$$\exp(i a \sin \Phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a) \exp(i m \Phi), \tag{2.15}$$

где  $J_m(x)$  — функция Бесселя, причём  $J_0(x) = J_0(-x)$ ,  $J_1(x) = -J_1(-x) = J_{-1}(-x)$ ,  $J_2(x) = J_{-2}(x) = J_2(-x)$  [39]. После этого найдём нерезонансные величины возмуще-

ний плотности  $u_n^{(0)}$ ,  $u_n^{(2)}$ ,  $u_n^{(-2)}$  и скорости  $v_n^{(0)}$ ,  $v_n^{(2)}$ ,  $v_n^{(-2)}$  в осциллирующей системе отсчёта:

$$v_n^{(0)} = \frac{k_0}{\omega_0} \sum_m (n-m) [v_{n-m}^{(1)} v_m^{(-1)} - v_{n-m}^{(-1)} v_m^{(1)}] = \frac{1}{i\omega_0} \left[ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right]_n, \quad (2.16)$$

$$u_n^{(0)} = -v_{i,n} J_0(a_n) + \frac{k_0^2 n^2 m_e}{4\pi e} \sum_m v_{n-m}^{(1)} v_m^{(-1)} = -v_{i,n} J_0(a_n) - \frac{m_e}{4\pi e} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v^{(1)} v^{(-1)}) \right]_n, \quad (2.17)$$

$$v_n^{(\pm 2)} = \pm \frac{2\omega_0}{3k_0 n e n_0} v_{i,n} J_{\pm 2}(a_n) \exp(\pm 2i\phi) \mp \frac{k_0}{\omega_0} \sum_m m v_{n-m}^{(\pm 1)} v_m^{(\pm 1)} = \pm \frac{2\omega_0}{3k_0 n e n_0} v_{i,n} J_{\pm 2}(a_n) \exp(\pm 2i\phi) \mp \frac{1}{i\omega_0} \left[ \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]_n, \quad (2.18)$$

$$u_n^{(\pm 2)} = \frac{1}{3} v_{i,n} J_{\pm 2}(a_n) \exp(\pm 2i\phi) - \frac{k_0^2 n e n_0}{\omega_{pe}^2} \sum_s s v_s^{(\pm 1)} v_{n-s}^{(\pm 1)} = \frac{1}{3} v_{i,n} J_{\pm 2}(a_n) \exp(\pm 2i\phi) + \frac{e n_0}{\omega_{pe}^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right) \right]_n. \quad (2.19)$$

Выражения (2.16) и (2.17), пропорциональные  $J_0(a_n)$ , отвечают медленным движениям, а выражения (2.18) и (2.19), пропорциональные  $J_{\pm 2}(a_n)$ , определяются вкладом в нелинейность второй гармоники.

В работах [52, 53] было использовано представление  $u_n^{(\pm 1)} = \pm k_0 n e n_0 v_n^{(\pm 1)} / \omega_0 = i k_0 n E_n^{(\pm 1)} / 4\pi$ , где  $v_n^{(\pm 1)} = \pm i e E_n^{(\pm 1)} / m \omega_0$ . В этом случае, собирая в правую часть слагаемые, ответственные только за электронную нелинейность, получим уравнение для коротковолновых возмущений в виде

$$\begin{aligned} & \pm 2i\omega_0 \left[ \frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp \right. \\ & \left. \mp i v_{i,n} \frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n) \exp(\pm i\phi)}{2\omega_0} \right] \exp(\pm i\omega_0 t) + \\ & + \frac{\omega_0^2}{e n_0} n \exp(\pm i\omega_0 t) \sum_m \frac{v_{i,n-m}}{m} [u_m^{(\mp 1)} J_{\pm 2}(a_{n-m}) \exp(\pm 2i\phi) + \\ & + u_m^{(\pm 1)} J_0(a_{n-m})] = \frac{k_0 n e n_0}{\omega_0} I, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где вклад электронной нелинейности  $I$  можно записать как

$$\begin{aligned} I = & -\frac{\partial}{\partial x} \left( v^{(\pm 1)} \left[ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \right) \mp \\ & \mp v^{(\pm 1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v^{(1)} v^{(-1)}] - \\ & - \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} \left[ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \pm \\ & \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, что правая часть уравнения (2.20), отвечающая вкладу электронной нелинейности в рассматриваемом одномерном случае, оказывается равной нулю, что прежде независимо отмечалось в работах В.П. Силина [10, 15] и В.Е. Захарова [11].

Если использовать представление для резонансного поля в виде  $(E_n^{(1)} \exp(i\omega_0 t) + E_n^{(-1)} \exp(-i\omega_0 t))/2$ , как это было сделано в работе Е.А. Кузнецова [35] (см. ниже уравнение (3.10)), то  $E_n^{(\pm 1)} \rightarrow E_n^{(\pm 1)}/2 = -4\pi i u_n^{(\pm 1)}/k_0 n$  и уравнение (2.20) можно записать иначе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_n^{(\pm 1)} \mp \frac{8\pi\omega_{pe} v_{i,n}}{2k_0 n} J_{\pm 1}(a_n) \exp(\pm i\phi) \mp \\ \mp i \frac{\omega_0}{2e n_0} \sum_m v_{i,n-m} [E_m^{(\mp 1)} J_{\pm 2}(a_{n-m}) \exp(\pm 2i\phi) + \\ + E_m^{(\pm 1)} J_0(a_{n-m})] = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Приведём также уравнение для волны накачки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_0^{(\pm 1)} \mp \\ \mp \frac{8\pi\omega_0}{2e n_0 k_0} \sum_m \frac{v_{i,-m}}{m} [u_m^{(\mp 1)} J_{\pm 2}(a_{-m}) \exp(\pm 2i\phi) + \\ + u_m^{(\pm 1)} J_0(a_{-m})] = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из представления волны накачки, соответствующего выбранной скорости осцилляций  $u_{0z} = -(e_x E_0 / m_x \omega_0) \times \cos \Phi$ , получим  $E_0 \rightarrow -iE_0$  и  $E_0^* \rightarrow iE_0^*$  и для  $E_0$  уравнение (2.22) можно переписать [52], выражая возмущения плотности через напряжённости электрического поля мод:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = -\frac{\omega_0}{2e n_0} \sum_m v_{i,-m} [E_m^{(-1)} J_2(a_m) \exp(2i\phi) + \\ + E_m^{(+1)} J_0(a_m)], \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2)/2\omega_0$ . Здесь также члены в правой части (2.23), пропорциональные  $J_0(a_n)$ , отвечают медленным движениям, а члены, пропорциональные  $J_{\pm 2}(a_n)$ , определяются вкладом в нелинейность второй гармоники.

Медленно изменяющаяся во времени напряжённость электрического поля может быть представлена как

$$\begin{aligned} \bar{E}_n = & -\frac{4\pi i}{k_0 n} v_{i,n} \left[ 1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \\ & + \frac{1}{2} [E_n^{(1)} J_1(a_n) \exp(-i\phi) + E_n^{(-1)} J_{-1}(a_n) \exp(i\phi)] - \\ & - \frac{ink_0}{16\pi e n_0} J_0(a_n) \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)} - \\ & - \frac{ik_0}{16\pi e n_0} J_2(a_n) \sum_m (n-m) [E_{n-m}^{(1)} E_m^{(1)} \exp(-2i\phi) + \\ & + E_{n-m}^{(-1)} E_m^{(-1)} \exp(2i\phi)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Это позволяет описывать ионы крупными частицами, уравнения движения для которых имеют вид

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{M} \sum_n \bar{E}_n \exp(ik_0 n x_s), \quad (2.25)$$

<sup>2</sup> Фактически это означает, что  $|E_0| \exp(i\phi) \rightarrow |E_0| \exp(i\phi - i\pi/2)$ , так как фаза  $\phi_0 = i\pi/2$  связана с выбором вида скорости осцилляций.

а плотность ионов определяется выражениями

$$v_{i,n} = en_{i,n} = en_0 \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(-ink_0 x_s(x_{s0}, t)) dx_{s0}. \quad (2.26)$$

Заметим, что описание ионов крупными частицами, как показано в [48], позволяет, кроме всего прочего, увеличить устойчивость расчётной схемы. Используя уравнения (2.9), (2.10), в которых правыми частями можно пренебречь вследствие их малости, возможно перейти к гидродинамическому описанию ионов. Уравнение для ионной плотности при этом имеет вид [52]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_{i,n}}{\partial t^2} = & -\Omega_i^2 \left\{ v_{i,n} \left[ 1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \right. \\ & + \frac{ik_0 n}{8\pi} [E_n^{(1)} J_1(a_n) \exp(-i\phi) + E_n^{(-1)} J_{-1}(a_n) \exp(i\phi)] + \\ & + \frac{n^2 k_0^2}{64\pi^2 en_0} \sum_m J_0(a_n) E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)} + \\ & + \frac{nk_0^2}{64\pi^2 en_0} J_2(a_n) \sum_m (n-m) [E_{n-m}^{(1)} E_m^{(1)} \exp(-2i\phi) + \\ & \left. + E_{n-m}^{(-1)} E_m^{(-1)} \exp(2i\phi)] \right\}. \quad (2.27) \end{aligned}$$

Можно убедиться в том, что комплексно-сопряжённое уравнение (2.22) при нижнем знаке принимает вид (при суммировании можно заменить немой индекс  $m \rightarrow -m$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial (E_{-n}^{(-1)})^*}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} (E_{-n}^{(-1)})^* - \frac{4\pi\omega_{pe} v_{i,-n}^*}{k_0 n} J_1(a_n) \exp(i\phi) - \\ - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-n+m}^* [(E_{-m}^{(1)})^* J_{-2}(a_{-n+m}) \exp(2i\phi) + \\ + (E_{-m}^{(-1)})^* J_0(a_{-n+m})] = 0. \quad (2.28) \end{aligned}$$

В то же время для положительных индексов это же уравнение может быть записано как

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n^{(1)}}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_n^{(1)} - \frac{4\pi\omega_{pe} v_{i,n}}{k_0 n} J_{\pm 1}(a_n) \exp(i\phi) - \\ - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,n-m} [E_m^{(-1)} J_2(a_{n-m}) \exp(2i\phi) + \\ + E_m^{(1)} J_0(a_{n-m})] = 0. \quad (2.29) \end{aligned}$$

Легко увидеть, что при  $E_{-n}^{(-1)} = (E_n^{(1)})^*$  и  $v_{i,-n} = v_{i,n}^*$  уравнения (2.28) и (2.29) идентичны. Точно так же можно убедиться, что из подобных преобразований следует  $E_n^{(-1)} = (E_{-n}^{(1)})^*$  и  $v_{i,n} = v_{i,-n}^*$ . Возмущения заряда ионов обладают симметрией:  $n_{i,-n} = n_{i,n}^*$ . При этом для корректного описания процесса неустойчивости достаточно использовать компоненты ВЧ поля  $E_n^{(1)}$ ,  $E_{-n}^{(1)}$  и  $E_0^{(1)}$ , а также возмущения заряда ионов  $v_{i,n}$  при положительно определённых значениях индекса  $n$ . Так можно сделать, поскольку остальные величины выражаются через них, т.е. можно отказаться от использования верхнего индекса. Системы уравнений гидродинамической (2.21), (2.23), (2.27) и гибридной (2.21), (2.23), (2.26) моделей в этих условиях могут быть записаны в следующем виде.

**2.1. Уравнения гидродинамической модели Силина в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \gg n_0 T_e$**

Уравнения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial t} - i \left( \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} + \beta n^2 \right) E_n + \theta \frac{n^6}{n_M^6} E_n - \\ - \frac{4\pi\omega_{pe} v_{i,n}}{k_0 n} J_1(a_n) \exp(i\phi) - \\ - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,n-m} [E_{-m}^* J_2(a_{n-m}) \exp(2i\phi) + E_m J_0(a_{n-m})] = 0, \\ \frac{\partial^2 v_{i,n}}{\partial t^2} = -\Omega_i^2 \left\{ v_{i,n} \left[ 1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \right. \\ + \frac{ik_0 n}{8\pi} J_1(a_n) [E_n \exp(-i\phi) - E_{-n}^* \exp(i\phi)] + \\ + \frac{n^2 k_0^2}{64\pi^2 en_0} J_0(a_n) \sum_m E_{n-m} E_{-m}^* + \\ + \frac{nk_0^2}{64\pi^2 en_0} J_2(a_n) \sum_m (n-m) [E_{n-m} E_m \exp(-2i\phi) + \\ \left. + E_{m-n}^* E_{-m}^* \exp(2i\phi)] \right\}, \quad (2.30) \\ \frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = \\ = - \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} [E_{-m}^* J_2(a_m) \exp(2i\phi) + E_m J_0(a_m)]. \end{aligned}$$

**2.2. Уравнения гибридной модели Силина в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \gg n_0 T_e$**

Система уравнений для этого случая имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial t} - i \left( \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} + \beta n^2 \right) E_n + \\ + \theta \frac{n^6}{n_M^6} E_n - \frac{4\pi\omega_{pe} v_{i,n}}{k_0 n} J_1(a_n) \exp(i\phi) - \\ - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,n-m} [E_{-m}^* J_2(a_{n-m}) \exp(2i\phi) + E_m J_0(a_{n-m})] = 0, \\ \bar{E}_n = - \frac{4\pi i}{k_0 n} v_{i,n} \left[ 1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \\ + \frac{1}{2} J_1(a_n) [E_n \exp(-i\phi) - E_{-n}^* \exp(i\phi)] - \\ - \frac{ink_0}{16\pi en_0} J_0(a_n) \sum_m E_{n-m} E_{-m}^* - \\ - \frac{ik_0}{16\pi en_0} J_2(a_n) \sum_m (n-m) [E_{n-m} E_m \exp(-2i\phi) + \\ + E_{m-n}^* E_{-m}^* \exp(2i\phi)], \\ \frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{M} \sum_n \bar{E}_n \exp(ik_0 n x_s), \quad (2.31) \\ v_{i,n} = en_0 \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(-ink_0 x_s(x_{s0}, t)) dx_{s0}, \\ \frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = \\ = - \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} [E_{-m}^* J_2(a_m) \exp(2i\phi) + E_m J_0(a_m)]. \end{aligned}$$

Слагаемое  $\theta(n/n_M)^6 E_n$  в первых уравнениях систем (2.30) и (2.31) моделирует затухание ВЧ мод спектра на электронах, причём  $n_M = 20$ ,  $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2)/2\omega_0$ . Кроме того, в первые уравнения систем (2.30) и (2.31) добавлен дисперсионный член, пропорциональный  $\beta = k_0^2 v_{Te}^2/2\omega_0$ .

### 3. Неизотермическая плазма, одномерные уравнения Захарова

Получим уравнения, описывающие неустойчивость интенсивного длинноволнового ленгмюровского поля в неизотермической плазме с возбуждением коротковолнового спектра ленгмюровских колебаний в условиях, когда плотность тепловой энергии плазмы превышает плотность энергии поля,  $W = |E_0|^2/4\pi \ll n_0 T_e$  (так называемая модель Захарова). Описание поведения электронов плазмы в условиях, когда фазовые скорости ленгмюровских волн превосходят их тепловую скорость, может быть гидродинамическим. Ионы также можно описывать как гидродинамически, так и с помощью крупных частиц. Наиболее корректный вывод этих уравнений, как было отмечено выше, сделан в работе [35]. Однако ниже для общности рассмотрения воспользуемся подходом В.П. Силина, изложенным в книге [16] и использованным в [52, 53] для описания параметрической неустойчивости интенсивного длинноволнового ленгмюровского поля в плазме.

Ограничимся одномерным случаем. При этом для скорости  $v_e$  и плотности  $n_e$  электронов справедливы следующие уравнения:

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + \frac{e}{m_e} E + \frac{1}{m_e n_e} \frac{\partial P_e}{\partial x} = -v_e \frac{\partial}{\partial x} v_e, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial}{\partial x} v_e = -\frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 4\pi e (n_i - n_e), \quad (3.3)$$

где  $E = -\partial\phi/\partial x$ ,  $E$  и  $\phi$  — напряжённость и потенциал электрического поля колебаний,  $P_e = n_e T_e$  — давление,  $T_e$  — температура электронов в энергетических единицах и  $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$  — тепловая скорость электронов,  $n_i$  — плотность ионов плазмы,  $n_0$  — невозмущённая плотность как электронов, так и ионов плазмы.

Представим электрическое поле в виде

$$E = \sum_n E_n \exp(ik_n x) = \sum_n E_n \exp(ink_0 x),$$

где величина  $k_n = nk_0$ , как отмечено выше, определяет дискретный набор волновых чисел мод спектра.

Перепишем уравнения (3.1), (3.2) в виде

$$\frac{\partial v_{e,n}}{\partial t} - \frac{e}{m_e} E_n + \frac{v_{Te}^2}{n_0} ik_0 n n_e = -ik_0 \sum_m m v_{e,n-m} v_{e,m}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial n_{e,n}}{\partial t} + n_0 ik_0 n v_{e,n} = -ik_0 n \sum_m n_{e,n-m} v_{e,m}, \quad (3.5)$$

$$ik_0 n E_n = 4\pi e (n_{i,n} - n_{e,n}). \quad (3.6)$$

Исключим  $E_n = -4\pi i e (n_{i,n} - n_{e,n})/k_0 n$ , и (3.4) примет вид

$$\frac{\partial v_{e,n}}{\partial t} = \frac{4\pi e^2 i}{k_0 n m_e} (n_{i,n} - n_{e,n}) - \frac{v_{Te}^2}{n_0} ik_0 n n_e - ik_0 \sum_m m v_{e,n-m} v_{e,m}. \quad (3.7)$$

Следуя [14], подобно тому как это сделано в [35], представим плотность и скорость электронов в виде

$$-en_{e,n} = \sum_s u_n^{(s)} \exp(is\omega_0 t) = u_n^{(0)} + u_n^{(1)} \exp(i\omega_0 t) + u_n^{(-1)} \exp(-i\omega_0 t) + u_n^{(2)} \exp(i2\omega_0 t) + u_n^{(-2)} \exp(-i2\omega_0 t), \quad (3.8)$$

$$v_{e,n} = \sum_s v_n^{(s)} \exp(is\omega_0 t) = v_n^{(0)} + v_n^{(1)} \exp(i\omega_0 t) + v_n^{(-1)} \exp(-i\omega_0 t) + v_n^{(2)} \exp(i2\omega_0 t) + v_n^{(-2)} \exp(-i2\omega_0 t), \quad (3.9)$$

$$E_n = \sum_s E_n^{(s)} \exp(is\omega_0 t) = \bar{E}_n + E_n^{(1)} \exp(i\omega_0 t) + E_n^{(-1)} \exp(-i\omega_0 t) + E_n^{(2)} \exp(i2\omega_0 t) + E_n^{(-2)} \exp(-i2\omega_0 t). \quad (3.10)$$

Воспользуемся линейными соотношениями  $u_{n-m}^{(\pm 1)} = \pm k_0 (n-m) e n_0 \omega_0^{-1} v_{n-m}^{(\pm 1)}$  и найдём нерезонансные величины

$$v_n^{(0)} = \frac{1}{en_0} \sum_m (u_{n-m}^{(1)} v_m^{(-1)} + u_{n-m}^{(-1)} v_m^{(1)}) = \frac{1}{i\omega_0} \left[ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right]_n, \quad (3.11)$$

$$u_n^{(0)} + en_{i,n} = -\frac{m_e}{4\pi e} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v^{(1)} v^{(-1)}) \right]_n, \quad (3.12)$$

$$v_n^{(\pm 2)} = \mp \frac{k_0}{\omega_0} \sum_m m v_{n-m}^{(\pm 1)} v_m^{(\pm 1)} = \mp \frac{1}{i\omega_0} \left[ \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]_n, \quad (3.13)$$

$$u_n^{(\pm 2)} = -\frac{k_0^2 n e n_0}{\omega_{pe}^2} \sum_s s v_s^{(\pm 1)} v_{n-s}^{(\pm 1)} = \frac{en_0}{\omega_{pe}^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right) \right]_n. \quad (3.14)$$

Уравнение для резонансных величин принимает вид

$$\begin{aligned} \pm 2i\omega_0 \left[ \frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp \mp i \frac{\omega_0 n}{2n_0} \sum_m n_{i,n-m} \frac{u_m^{(\pm 1)}}{m} \right] = \\ = k_0^2 n e n_0 \sum_m m [v_{n-m}^{(0)} v_m^{(\pm 1)} + v_{n-m}^{(\pm 1)} v_m^{(0)}] - \\ - ik_0 n (\pm i\omega_0) \sum_m [(u_{n-m}^{(0)} + v_{i,n-m}) v_m^{(\pm 1)} + u_{n-m}^{(\pm 1)} v_m^{(0)}] + \\ + k_0^2 n e n_0 \sum_m m v_{n-m}^{(\mp 1)} v_m^{(\pm 2)} - ik_0 n (\pm i\omega_0) \sum_m u_{n-m}^{(\pm 2)} v_m^{(\mp 1)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Правая часть (3.15) определяет так называемую электронную нелинейность, которая в одномерном случае, как было показано в работе В.Е. Захарова [11], обращается в нуль (см. также [35]). Действительно, правая часть (3.15) равна  $(k_0 n e n_0 / \omega_0) I$ , где для  $I$  справедливо тождество

$$\begin{aligned} I = -\frac{\partial}{\partial x} \left( v^{(\pm 1)} \left[ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \right) \mp \\ \mp v^{(\pm 1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v^{(1)} v^{(-1)}] - \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} \left[ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \pm \\ \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$



Таким образом, для резонансных возмущений плотности можно записать уравнение

$$\frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp \frac{\omega_0}{2n_0} n \sum_m \frac{n_{i,n-m}}{m} u_m^{(\pm 1)} = 0, \quad (3.17)$$

или, переходя к напряжённости электрического поля,

$$E_n^{(\pm 1)} = \frac{4\pi e u_n^{(\pm 1)}}{2k_0 n}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial E_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n^{(\pm 1)} \mp i \frac{\omega_0}{2n_0} \sum_m n_{i,n-m} E_m^{(\pm 1)} = 0. \quad (3.19)$$

Ионы можно описывать крупными частицами, уравнение движения для которых имеет вид (2.25), а плотность определяется (2.26). Компонента медленно меняющегося электрического поля может быть определена следующим образом. Для медленных движений справедливо приближение [35]

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\bar{\phi} - U}{T}\right), \quad (3.20)$$

поэтому, удерживая в уравнении Пуассона первые члены разложения, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\phi} = 4\pi e \left(\frac{e\bar{\phi} - U}{T} n_0 - n_i\right). \quad (3.21)$$

Здесь  $\bar{\phi}$  и  $\bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n$  — потенциал и напряжённость усреднённого по быстрым осцилляциям поля. Для ВЧ потенциала имеем

$$U = \sum_n U_n \exp(ik_0 n x), \quad (3.22)$$

причём

$$U_n = \frac{e^2}{4m\omega_{pe}^2} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}. \quad (3.23)$$

Очевидно, левой частью уравнения (3.21) можно пренебречь в условиях  $k_0^2 n^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}^2 = v_{Te}^2 / v_{\bar{\phi}}^2 \ll 1$ , и тогда напряжённость усреднённого по быстрым осцилляциям поля

$$\bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n = \frac{-ik_0 m n_i T}{en_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m\omega_{pe}^2} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}. \quad (3.24)$$

Описывать ионы можно и гидродинамически. Уравнения для медленных возмущений плотности и скорости ионов имеют вид

$$\frac{\partial n_{i,n}}{\partial t} + v_{i,n} ik_0 n m_0 = -ik_0 n \sum_m n_{i,n-m} v_{i,m}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v_{i,n}}{\partial t} - \frac{e}{M} \bar{E} = -ik_0 \sum_m m v_{i,n-m} v_{i,m}. \quad (3.26)$$

Правыми частями (3.25) и (3.26) пренебрежём, полагая их малыми. Тогда для возмущений плотности

справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 n_{i,n}}{\partial t^2} + k_0^2 n^2 c_s^2 n_{i,n} = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi M} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}, \quad (3.27)$$

где скорость звука  $c_s = \sqrt{T_e/M}$ .

Уравнения (3.19) и (3.27), при  $\omega_0 = \omega_{pe}$  имеющие вид

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E - \frac{\omega_{pe}}{2n_0} n_i E = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2, \quad (3.29)$$

известны как уравнения Захарова [11] в одномерном случае.

Можно убедиться в том, что комплексно-сопряжённое уравнение (3.19) при верхнем знаке принимает вид

$$\frac{\partial (E_n^{(1)})^*}{\partial t} + i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} (E_n^{(1)})^* + i \frac{\omega_0}{2n_0} \left[ n_{i,n}^* (E_0^{(1)})^* + \sum_{m \neq 0} n_{i,n-m}^* (E_m^{(1)})^* \right] = 0. \quad (3.30)$$

В то же время для отрицательных индексов это уравнение может быть записано как (при суммировании можно заменить немой индекс  $m \rightarrow -m$ )

$$\frac{\partial E_{-n}^{(-1)}}{\partial t} + i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_{-n}^{(-1)} + i \frac{\omega_0}{2n_0} \left[ n_{i,-n} E_0^{(-1)} + \sum_{m \neq 0} n_{i,-n+m} E_m^{(-1)} \right] = 0. \quad (3.31)$$

Легко увидеть, что при  $E_{-n}^{(-1)} = (E_n^{(1)})^*$  и  $n_{i,-n} = n_{i,n}^*$  уравнения (2.26) и (3.31) идентичны. Точно так же можно убедиться, что из подобных преобразований следует  $E_n^{(-1)} = (E_{-n}^{(1)})^*$  и  $n_{i,-n} = n_{i,n}^*$ . Таким образом, возмущение плотности ионов обладает симметрией:  $n_{i,-n} = n_{i,n}^*$ . При этом для корректного описания такой ионной каверны достаточно использовать компоненты ВЧ поля  $E_n^{(1)}$ ,  $E_{-n}^{(1)}$  и  $E_0^{(1)}$ , а также возмущения плотности ионов  $n_{i,n}$ , так как остальные величины выражаются через них, т.е. можно отказаться от использования верхнего индекса. Система уравнений (3.18), (3.27) в этих условиях может быть записана в виде

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n - i \frac{\omega_0}{2n_0} \sum_m n_{i,n-m} E_m = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 n_{i,n}}{\partial t^2} + k_0^2 n^2 c_s^2 n_{i,n} = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi M} \sum_m E_{n-m} E_m^*. \quad (3.33)$$

Ниже ограничимся рассмотрением так называемого сверхзвукового режима неустойчивости, при котором  $\partial^2 n_{i,n} / n_{i,n} \partial t^2 \gg k_n^2 c_s^2$ . При описании ионов частицами можно воспользоваться уравнениями движения (2.25) и выражением для ионной плотности (2.26), где напряжённость медленно меняющегося электрического поля

$$\bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n = \frac{-ik_0 m n_i T}{en_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m\omega_{pe}^2} \sum_m E_{n-m} E_m^*. \quad (3.34)$$

Для поля накачки, которой в рассматриваемом случае является длинноволновая ленгмюровская волна

большой амплитуды, получим

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i \frac{\omega_0}{2n_0} \sum_m n_{i,-m} E_m = 0. \quad (3.35)$$

Системы уравнений гидродинамической (3.32), (3.33), (3.35) и гибридной (2.26), (3.32), (3.34), (3.35) моделей в этих условиях могут быть записаны в следующем виде.

### 3.1. Гидродинамическая модель Захарова (сверхзвуковой режим)

в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \ll n_0 T_e$

Система уравнений для этого случая имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n + \theta \frac{n^6}{n_M^6} E_n - \\ - i \frac{\omega_0}{2n_0} \left[ n_{i,n} E_0 + \sum_{m \neq 0} n_{i,n-m} E_m \right] = 0, \\ \frac{\partial^2 n_{i,n}}{\partial t^2} = - \frac{k_0^2 n^2}{16\pi M} \left[ E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^* \right], \quad (3.36) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i \frac{\omega_0}{2n_0} \sum_m n_{i,-m} E_m = 0.$$

### 3.2. Гибридная модель Захарова

в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \ll n_0 T_e$

Система уравнений в этом случае записывается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n + \theta \frac{n^6}{n_M^6} E_n - \\ - i \frac{\omega_0}{2n_0} \left[ n_{i,n} E_0 + \sum_{m \neq 0} n_{i,n-m} E_m \right] = 0, \\ \bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n = \frac{-ik_0 n m_{i,n} T}{en_0} + \\ + \frac{-ik_0 n e}{4m\omega_{pe}^2} \left[ E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^* \right], \\ \frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{M} \sum_n \bar{E}_n \exp(ik_0 n x_s), \quad (3.37) \end{aligned}$$

$$n_{i,n} = n_0 \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(-ink_0 x_s(x_{s0}, t)) dx_{s0},$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i \frac{\omega_0}{2n_0} \sum_m n_{i,-m} E_m = 0,$$

где слагаемое  $\theta(n/n_M)^6 E_n$  в первых уравнениях систем (3.36) и (3.37) моделирует затухание ВЧ мод спектра на электронах, причём  $n_M = 20$ .

При  $a_n \ll 1$  уравнения гидродинамической модели (2.30) и гибридной модели (2.31) Силина с учётом представления  $J_1(a_n) \approx a_n/2$ ,  $J_0(a_n) \approx 1$ ,  $J_2(a_n) \approx a_n^2/8$  совпадают с уравнениями, полученными для неизотермической плазмы гидродинамической модели (3.36) и гибридной модели (3.37) Захарова соответственно, с точностью до величины расстройки и с учётом замен  $E_0 \rightarrow -iE_0$  и  $E_0^* \rightarrow iE_0^*$ .

## 4. Линейная теория

Ограничимся ниже рассмотрением наиболее интересного случая длинноволновой накачки. Из уравнений Захарова (3.36) в линейном случае, используя представление  $\partial E/E \partial t \Rightarrow i\Omega$ , можно получить дисперсионное уравнение для неизотермического случая в сверхзвуковом пределе  $\partial^2 n_{i,n}/n_{i,n} \partial t^2 \gg k_0^2 c_s^2 n^2$ :

$$-\Omega^2(\Omega^2 - \Delta^2) + \Delta A = 0, \quad (4.1)$$

где расстройка  $\Delta = v_{Te}^2 n^2 k_0^2 / 2\omega_p$  и

$$A = \frac{1}{2} \frac{m_e}{M} \frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \omega_{pe}^3.$$

С другой стороны, линеаризуя уравнения (2.30), получим точно такое же дисперсионное уравнение для случая холодной плазмы, где, однако,  $\Delta = \Delta_0 = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2)/2\omega_0$ , а величина  $A = J_1^2(a_n) \omega_{pe}^3 m/M$ . Заметим, что дисперсионные уравнения (4.1) при  $a_n \ll 1$  и с учётом замен  $E_0 \rightarrow -iE_0$  и  $E_0^* \rightarrow iE_0^*$  при соответствующем выборе расстройки в этих двух случаях совпадают. Положительная определённость расстройки  $\Delta = v_{Te}^2 n^2 k_0^2 / 2\omega_{pe}$  в модели Захарова очевидна. А что касается расстройки  $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2)/2\omega_0$  в модели Силина, то в книге [9] показано, что она также положительно определена и имеет порядок  $\delta$ , по крайней мере, в случае возбуждения длинноволновых ленгмюровских колебаний сильноточным релятивистским пучком электронов.

Для нормированных величин  $\delta' = \Omega/\omega_{pe}$  и  $A' = A/\omega_{pe}^3$  в табл. 1 приведены значения, отвечающие двум моделям описания модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн.

В модели Захарова нормированная на ленгмюровскую частоту поправка  $\delta' = \Omega/\omega_{pe}$ , вообще говоря, должна быть записана в виде

$$(\delta')^2 = \frac{(A')^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(A')^4}{4} + B(A')^2}, \quad (4.2)$$

Таблица 1. Ключевые параметры линейной теории для моделей Захарова и Силина

| Параметр                                 | Модель Захарова  | Модель Силина   |
|--|--|---|
| Квадрат поправки к нормированной частоте | $(\delta')^2 = \frac{(A')^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(A')^4}{4} + A'(A')}$  |   |
| Расстройка $\Delta'$                     | $(\Delta')_n = \frac{\omega_{pe}^2 + v_{Te}^2 k_0^2 n^2 - \omega_0^2}{2\omega_{pe}^2} \approx \frac{v_{Te}^2 k_0^2 n^2}{2\omega_{pe}^2}$ | $\Delta' = \Delta'_0 = \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_{pe}^2}$ |
| Коэффициент $A'$                         | $A' = A'(n) = \frac{1}{2} \frac{m_e}{M} \frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{ E_0 ^2}{4\pi n_0 T_e}$                            | $A' = A'(n) = \frac{m_e}{M} J_1^2(a_n)$                                   |

где

$$B = \frac{1}{2} \frac{m_e}{M} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \quad (4.3)$$

Величина  $[(\Delta')^4 + 4B(\Delta')^2]^{1/2} - (\Delta')^2$  с ростом  $\Delta'$  монотонно возрастает, не имея выраженного максимума, поэтому при малых  $(\Delta')^2 \ll B$  имеем  $\Omega^2 \approx -\Delta'\sqrt{B}$ . При этом  $|\Omega^2| < B$ , а инкремент неустойчивости равен

$$\text{Im } \Omega = |\Omega| \approx \left( \frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \frac{m_e}{M} \right)^{1/4} \omega_{pe} \quad (4.4)$$

При больших  $(\Delta')^2 \gg B$  величина  $\Omega^2 \approx -B$ , при этом инкремент неустойчивости

$$\text{Im } \Omega = |\Omega| \approx \left( \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \frac{m_e}{M} \right)^{1/2} \omega_{pe} \quad (4.5)$$

Отсюда видно, что инкремент увеличивается с ростом волнового числа возмущений, выходя при больших значениях волнового числа на своё наибольшее значение (4.5).

В модели Сирина при значениях расстройки  $(\Delta')^3 = A'/2$  или, что то же самое,  $\Delta' = (m_e/2M)^{1/3} J_1^{2/3}(a_{nm})$  относительный инкремент достигает значений [14]

$$\delta' = \pm \frac{i}{\sqrt[3]{2}} (\Delta')^{1/3} = \pm \frac{i}{\sqrt[3]{2}} \left( \frac{m_e}{M} \right)^{1/3} J_1^{2/3}(a_n) \quad (4.6)$$

Для возмущений с волновым числом  $k_m = k_0 n_m$ , для которых  $a_{nm} = 1,84$ , значение функции Бесселя максимально, и величина относительного инкремента для таких возмущений достигает своего наибольшего значения

$$\delta'_{\text{max}} = \pm 0,44i \left( \frac{m_e}{M} \right)^{1/3} \quad (4.7)$$

Таким образом, в модели Сирина наибольшим инкрементом обладают волновые векторы, для которых  $a_{nm} = 1,84$ . При развитии неустойчивости амплитуда волны накачки уменьшается и максимум инкремента перемещается в коротковолновую область.

Важно отметить, что значения максимальных инкрементов параметрической неустойчивости в модели Захарова для сверхзвуковых возмущений подрастают при уменьшении их масштаба. При этом, если в модели Захарова уменьшение амплитуды поля накачки приводит к снижению инкрементов во всей области неустойчи-

вости, то в модели Сирина подобный процесс сдвигает максимум инкремента в коротковолновую область, не уменьшая его значения (4.7). Таким образом, процесс движения энергии в коротковолновую часть спектра в двух моделях в значительной степени обусловлен линейными механизмами роста возмущений.

Кроме того, следует отметить взрывной рост амплитуд мод спектра неустойчивости в сверхзвуковом режиме процесса распада интенсивного ленгмюровского поля в неизотермической плазме в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \ll n_0 T_e$ , который обусловлен большими значениями инкремента практически во всей области неустойчивости. Именно этот взрывной рост амплитуд спектра на начальной стадии процесса наблюдали во многих численных экспериментах.

### 5. Модуляционная неустойчивость ленгмюровской волны в холодной плазме

#### 5.1. Гидродинамическая модель Сирина

Неустойчивость мощной длинноволновой (длину волны полагаем равной бесконечности) ленгмюровской волны (волны накачки) с возбуждением коротковолнового спектра ленгмюровских колебаний может быть описана уравнениями гидродинамической модели Сирина (2.30) при условии  $W = |E_0|^2/4\pi \gg n_0 T_e$ .

Воспользуемся следующими переменными и параметрами:  $\beta = k_0^2 v_{Te}^2/2\omega_0$ ,  $\Delta_0 = \omega_0(1 - \omega_{pe}^2/\omega_0^2)/2$ ,  $\delta = (m_e/M)^{1/3} \omega_{pe}$ ,  $a = ek_0 E_0/m_e \omega_0^2$ ,  $\tau = \delta t$ ,  $N_n = u_{e,n}^{(1)}/en_0 n$ ,  $M_n = (v_{i,n}/en_0)(\omega_0/\delta)$ ,  $v_{i,n}$  — фурье-компонента ионной плотности,  $E_n = |E_n| \exp(i\Psi_n)$  — медленно меняющаяся комплексная амплитуда напряжённости электрического поля плазменных электронных колебаний, волновое число которых равно  $k_n = nk_0$ ,  $k_0$  — выбранный достаточно малый масштаб в пространстве волновых чисел,  $a_n = an$ ,  $n$  — целые числа, не равные нулю и  $\pm 1$ , т.е.  $n(ek_0 E_0/m_e \omega_0^2) = nk_0 b = a_n$ . Связь между возмущениями плотности и электрического поля определяется соотношением  $E_n = 4\pi i e N_n/2k_0 n$ , слагаемое  $\theta(n/n_M)^6 E_n$  в первом уравнении (2.30) моделирует затухание ВЧ мод спектра на электронах, причём  $n_M = 20$ . Заданы следующие начальные условия:  $\beta = 10^{-2} \delta$ ,  $-n_{\text{max}} < n < n_{\text{max}} = 40 - 100$ ,  $a|_{\tau=0} = 6 \times 10^{-2}$ ,  $\Psi_n|_{\tau=0} = 0$ ,  $M_n|_{\tau=0} = 3 \times 10^{-4}$ ,  $N_n|_{\tau=0} = 10^{-4}/n$ . Характеристики спектра мод неустойчивости как функции времени представлены на рис. 1.

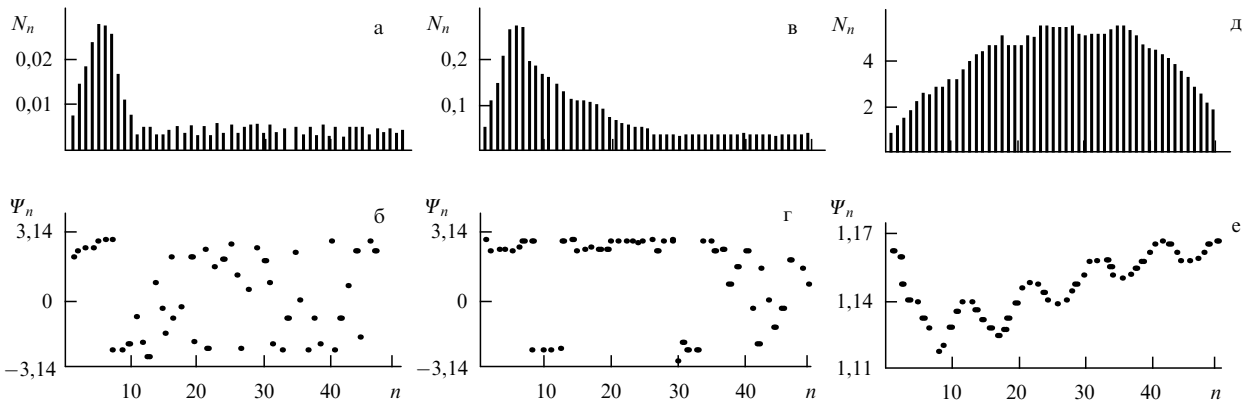


Рис. 1. Процесс формирования волнового пакета ленгмюровских волн при неустойчивости [54]. Видны синхронизация фаз (нижние рисунки) и уширение спектра  $N_n = N_n \exp(i\Psi_n)$  (верхние рисунки) для моментов времени  $\tau = 4$  (а, б), 7 (в, г), 8 (д, е) [46].

Важно отметить, что быстрое расширение спектра возмущений в коротковолновую область обусловлено в значительной степени неустойчивостью волны накачки, что следует из рассмотрения линейного инкремента. Действительно, расстройка  $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2)/2\delta\omega_{pe}$  достигает величины  $(m_e/2M)^{1/3} J_1^{2/3}(a_m)$  в случае максимального инкремента линейной неустойчивости, нормированного на частоту ленгмюровской волны [14]:

$$\frac{\delta}{\omega_{pe}} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_e}{M} \right)^{1/3} J_1^{2/3}(a_m). \quad (5.1)$$

С уменьшением амплитуды волны накачки максимум инкремента смещается в сторону больших волновых чисел, не меняя своего значения. Кроме этого, волна накачки способствует синхронизации фаз растущих мод спектра, формируя тем самым пространственную структуру каверны (ямки плотностей электронов и ионов плазмы, формы которых, вообще говоря, не совпадают) и ВЧ наполнения. Решая систему уравнений (3.19), можно убедиться [54] в том, что энергия, заключённая в коротковолновом быстро уширяющемся в пространстве волновых чисел спектре ленгмюровских волн, возбуждаемых волной накачки, возрастает. Неустойчивость приводит к сужению линейных размеров каверны в конфигурационном пространстве, формированию достаточно резких перепадов плотности, "опрокидывание" которых должно, вообще говоря, приводить к интенсивной передаче энергии спектра электронам плазмы. Однако в рамках данной модели этот процесс описать не представляется возможным. Поведение ионной плотности также демонстрирует склонность к переходу к режиму с обострением. Неустойчивость расчётной схемы при этом вынудило перейти к описанию ионов частицами.

## 5.2. Гибридная модель Силина

В гибридной модели Силина электроны описаны гидродинамически, а ионы — крупными частицами. Уравнения модели (2.31) решались при выборе тех же переменных параметров, что и уравнения гидродинамической модели. При расчётах использовалось соотношение  $k_0 x_s = 2\pi \xi_s$ , частицы, моделирующие ионы, число которых выбиралось из соотношения 50 частиц на одну моду спектра, равномерно располагались на интервале  $-0,5 < \xi_s < 0,5$ . Анализ динамики процесса показал [48], что и в этой модели так же точно формировались каверны плотности, которые затем разрушались. При этом процесс разрушения уже не сопровождался срывом счёта. Причиной разрушения каверн было выгорание поля и инерция моделирующих ионы частиц, число которых в численном эксперименте не превышало  $5 \times 10^3$ , число мод спектра имело значение 40–100.

При этом ионная каверна "схлопывалась", ионный компонент переходил в режим пересечения траекторий частиц [47, 48]. Энергия, которую отбирали ионы, оказалась порядка  $(m_e/m_i)^{1/3}$  начальной энергии волны накачки [48] (здесь  $m_e$  и  $m_i$  — массы электронов и ионов соответственно). При малых уровнях поглощения и малых начальных флуктуирующих поведении волны накачки представлено на рис. 2. Большая часть энергии поля накачки в результате неустойчивости переходит в энергию коротковолнового ленгмюровского спектра, затем можно наблюдать частичный обмен энергией между спектром и волной накачки и при  $\tau > 40$  ионная каверна "схлопывается", т.е. переходит в режим пересечения траекторий частиц.

Развитие неустойчивости в гибридных моделях (2.31) позднее было детально рассмотрено в работах [58, 59]. Основное внимание было уделено режимам сильного поглощения энергии коротковолнового спектра за счёт затухания

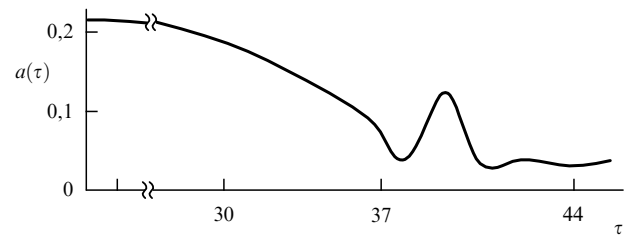


Рис. 2. Амплитуда поля накачки  $a(\tau)$  как функция времени  $\tau$  в гибридной модели в случае слабого поглощения энергии коротковолновых колебаний [40].

Ландау, которое было введено феноменологически. Темп затухания ВЧ мод определял скорость выгорания поля в кавернах плотности, откуда ВЧ поле вытесняло частицы. Основная энергия неустойчивости сначала была сосредоточена в ВЧ поле коротковолнового ленгмюровского спектра, при этом формировался НЧ спектр возмущений. Затем энергия ВЧ спектра в значительной степени передавалась электронам. Сформированные каверны плотности при этом "схлопывались", траектории ионов пересекались, возмущения ионной плотности сглаживались, их масштаб увеличивался. Связь между ионными возмущениями и ВЧ полем ослаблялась и неустойчивость насыщалась. Амплитуда основной волны, испытав несколько небольших осцилляций, стабилизировалась на достаточно низком уровне. Основная энергия теперь содержалась в возмущениях электронного компонента плазмы. Некоторая небольшая часть энергии порядка  $(m_e/m_i)^{1/3}$  начальной энергии волны переходила в кинетическую энергию ионов.

## 5.3. Сравнение гидродинамической и гибридной моделей Силина

Поведение спектра убеждает в том, что в области взаимодействия формируется каверна плотности, причём её размеры быстро уменьшаются [48]. В дальнейшем при слабых уровнях поглощения энергии в системе неустойчивость переходит в режим частичного обмена энергией между возбуждённым спектром модуляционной неустойчивости и волной накачки. Однако дальнейшее уменьшение размеров каверны, т.е. возникающий в отсутствие электронного давления в холодной плазме коллапс, приводит в гидродинамической модели к срыву счёта. С другой стороны, инерция ионов, которая в гибридной модели учитывается естественным образом, позволяет избежать такого срыва. Ионы, переходя в режим пересечения траекторий, разрушают каверну и неустойчивость насыщается. При этом можно выяснить характер распределения ионов по скоростям. Энергия, которую отбирают ионы, оказывается порядка  $(m_e/m_i)^{1/3}$  начальной энергии волны накачки [48]. Запасённая в коротковолновом ленгмюровском спектре энергия, скорее всего, также должна быть в значительной степени передана электронам плазмы, причём для электронов переход в режим пересечения траекторий (в этом случае гидродинамические уравнения неприменимы для описания электронов) может сдерживаться существованием ионной каверны, что способно синхронизовать выброс быстрых электронов и ионов в момент её разрушения.

## 6. Модуляционная неустойчивость ленгмюровской волны в неизотермической плазме

Неустойчивость мощной длинноволновой ленгмюровской волны с возбуждением коротковолнового спектра ленгмю-

ровских колебаний может быть описана уравнениями гидродинамической модели Захарова (3.36) или гибридной модели (3.37) в условиях  $W = |E_0|^2/4\pi \ll n_0 T_e$ . Обсудим результаты сравнения этих моделей в численных экспериментах, представленных в работе [49].

В данном разделе рассмотрим две модели: традиционную гидродинамическую модель Захарова (3.36) и гибридную модель Захарова (3.37). Последнее уравнение для накачки в двух этих системах уравнений авторы [49] заменили уравнением в рамках простой динамики слабого затухания накачки. Для этого авторы [49] положили все параметры одинаковыми, отношение масс считалось  $m_e/M = 1/(16 \times 1836)$ , плазма — изотермической, область рассмотрения  $L = 1,8 \times 10^3 \lambda_{de}$ , для гидродинамического описания использовано 600 мод спектра, для гибридного — 3000 позиций, т.е. координатная область разбита именно на такое количество участков. Так же как и в предыдущих работах [45, 46], авторы [49] рассмотрели несамосогласованный случай постоянного или слабо меняющегося поля интенсивной ленгмюровской волны, влиянием на которую спектра возбуждаемых коротковолновых возмущений пренебрегалось. Однако, как и в предыдущем случае, важным итогом такого сравнения является выявление различий в динамике процесса, описываемого разными моделями.

Прежде всего, авторы [49] отметили значительно более быстрый рост возмущений в гибридной модели, который они пояснили большими значениями возмущений ионной плотности в выбранной ими координатной сетке. Интегральные показатели — энергия ВЧ коротковолнового спектра на начальной стадии модуляционной неустойчивости — оказались подобны (рис. 3).

На начальной стадии развитого режима процесса было обнаружено, что выполняется соотношение между относительными возмущениями плотности ионов  $\delta n_{i,n}/n_0$  и плотностью энергии коротковолнового поля  $|E|^2 = \sum_n |E_n|^2$  (рис. 4, 5):

$$\frac{\delta n_{i,n}}{n_0} \propto \frac{|E|^2}{8} \quad (6.1)$$

Здесь для удобства сравнения выбраны подобные режимы неустойчивости, которые характеризуются примерно равными максимальными амплитудами поля и возмущений плотности. Прежде всего, следует отметить заметно большее число каверн плотности плазмы, значительные флуктуации плотности ионов. Соответственно, количество солитонообразных возмущений плотности коротковолно-

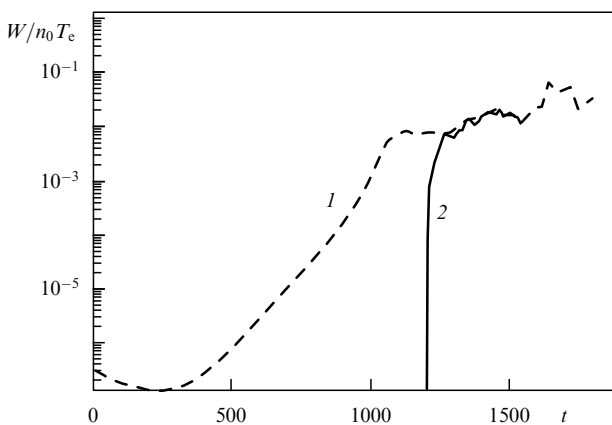


Рис. 3. Зависимость от времени  $t$  отношения плотности энергии поля к плотности тепловой энергии электронов для случаев гидродинамической (1) и гибридной (2) моделей Захарова [41].

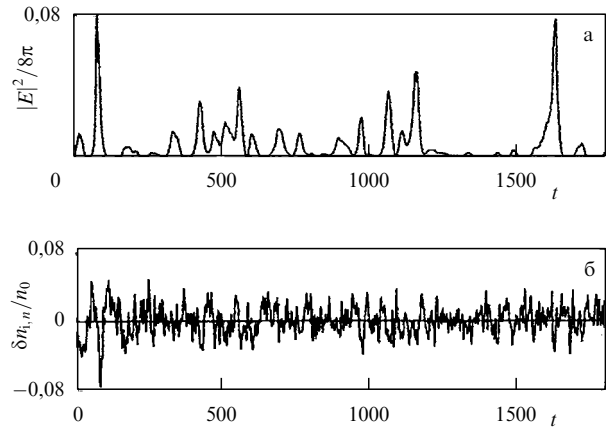


Рис. 4. Огибающая ВЧ поля  $|E|^2/8\pi$  (а) и относительные отклонения плотности ионов  $\delta n_{i,n}/n_0$  (б) в гибридной модели в момент времени  $340\omega_{pe}^{-1}$  [49].

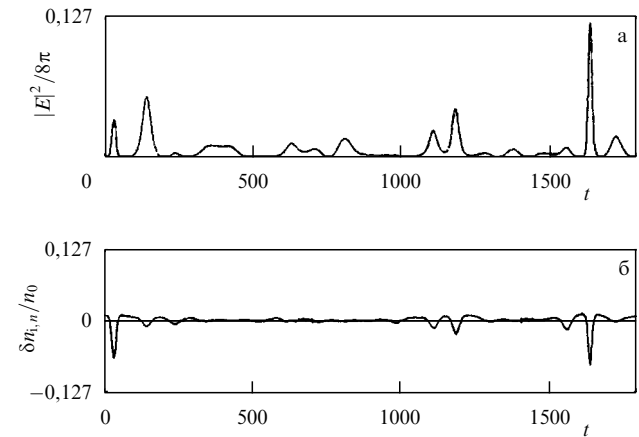


Рис. 5. Огибающая ВЧ поля  $|E|^2/8\pi$  (а) и относительные отклонения плотности ионов  $\delta n_{i,n}/n_0$  (б) в гибридной модели в момент времени  $1363\omega_{pe}^{-1}$  [49].

вого поля также больше в гибридной модели. Максимальная глубина каверн в гибридной модели всегда меньше, характерные размеры вдоль системы подобны. Оценки нагрева ионов в условиях постоянной величины или медленного изменения поля накачки вряд ли представляют интерес, так как влияние коротковолнового спектра на накачку авторы не учитывали.

### 7. Сравнение гибридных моделей Захарова и Силина

Ниже проведём сравнение динамики развития модуляционной неустойчивости интенсивной ленгмюровской волны для двух представляющих значительный интерес случаев. В первом случае, описываемом моделью Силина, плотность энергии поля значительно превышает плотность тепловой энергии холодной плазмы. Во втором случае, описываемом моделью Захарова, плотность энергии поля заметно меньше тепловой энергии неизотермической плазмы, где температура ионов много меньше температуры плазмы.

Основное внимание обратим на эффективность передачи энергии ионам и ионным возмущениям в результате развития модуляционных неустойчивостей в случаях неизотермической и холодной плазмы в рамках гибридных моделей.

**Таблица 2.** Параметры численного моделирования для гибридных моделей

| Модель          | Лёгкие ионы<br>$M/m_e = 2 \times 10^3$   | Тяжёлые ионы<br>$m_e/M = 8 \times 10^{-6}$  |
|-----------------|--|---|
| Модель Силина   | $(m_e/M)(\omega_{pe}^2/\delta^2) = 0,43$<br>$\delta/\omega_0 = 0,44(m_e/M)^{1/3} = 0,034$<br>$\omega_0/\delta \approx \omega_{pe}/\delta = 29,4$                               | $(m_e/M)(\omega_{pe}^2/\delta^2) = 0,1$<br>$\delta/\omega_0 = 0,44(m_e/M)^{1/3} = 0,0088$<br>$\omega_0/\delta \approx \omega_{pe}/\delta = 113,6$                               |
| Модель Захарова | $(m_e/M)(\omega_p^2/\delta^2) = 2n_0 T_e/W = 20$<br>$\omega_0/\delta = 2(n_0 T_e/W)^{1/2}(M/m_e)^{1/2} = 282,6$<br>$\delta/\omega_0 = \delta/\omega_{pe} = 3,5 \times 10^{-3}$ | $(m_e/M)(\omega_p^2/\delta^2) = 2n_0 T_e/W = 20$<br>$\omega_0/\delta = 2(n_0 T_e/W)^{1/2}(M/m_e)^{1/2} = 2234,4$<br>$\delta/\omega_0 = \delta/\omega_{pe} = 4,5 \times 10^{-4}$ |

Для каждой модели рассмотрены также два случая: лёгких и тяжёлых ионов. Параметры для этих случаев представлены в табл. 2. Также представляет интерес выяснить, как влияет затухание ВЧ спектра и соответственно выгорание поля в кавернах плотности на характер передачи энергии ионам плазмы.

Количество крупных частиц, моделирующих ионы, выбрано следующим образом:  $0 < s \leq S = 20000$ . Крупные частицы равномерно распределены на интервале  $-1/2 < \xi < 1/2$ ,  $\xi = k_0 x/2\pi$ ,  $v_s = d\xi/d\tau$ , начальные условия для частиц  $d\xi_s/d\tau|_{\tau=0} = v_s|_{\tau=0} = 0$ , число мод спектра  $-N < n < N$ ,  $N = S/100$ . Начальная нормированная амплитуда интенсивных колебаний  $a_0(0) = ek_0 E_0(0)/m_e \omega_{pe}^2 = 0,06$ . Начальные амплитуды ВЧ мод задаются выражением  $e_n|_{\tau=0} = e_{n0} = (2 + g) \times 10^{-3}$  в модели Силина и  $e_n|_{\tau=0} = e_{n0} = (0,5 + g) \times 10^{-4}$  в модели Захарова, где  $g \in [0; 1]$  — случайное число,  $ek_0 E_n/m_e \omega_{pe}^2 = e_n \exp(i\psi_n)$ ,  $\psi_n|_{\tau=0}$  также случайным образом распределялись в интервале  $0 - 2\pi$ . Для возмущений плотности ионов  $n_{ni}$  и медленно меняющегося электрического поля  $\bar{E}_n$  использованы также безразмерные представления

$$M_n = M_{nr} + iM_{ni} = \frac{n_{ni}\omega_{pe}}{n_0\delta} = \frac{\omega_{pe}}{\delta} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(2\pi n \xi_s) d\xi_{s0},$$

$$\frac{ek_0 \bar{E}_n}{m_e \omega_{pe}^2} = E_{nr} + iE_{ni}.$$

Программа, реализующая математическую модель задачи, была создана с использованием технологии CUDA. CUDA обеспечивает взаимодействие с технологией CUDA из Java-программы и даёт возможность проводить вычисления с высокой скоростью параллельно на графическом процессоре.

Развитие неустойчивости в гибридных моделях (2.31) и (3.37) было рассмотрено в работах [58, 59]. Темп затухания ВЧ мод определял скорость выгорания поля в кавернах плотности, откуда ВЧ поле вытесняло частицы. Основная энергия неустойчивости сначала была сосредоточена в ВЧ поле коротковолнового ленгмюровского спектра, при этом формировался НЧ спектр возмущений. Затем энергия ВЧ спектра в значительной степени передавалась электронам. Сформированные каверны плотности при этом "схлопывались", траектории ионов пересекались, возмущения ионной плотности сглаживались, их масштаб увеличивался. Связь между ионными возмущениями и ВЧ полем ослаблялась и неустойчивость насыщалась. Амплитуда основной волны, испытав несколько осцилляций, стабилизировалась на достаточно низком уровне. Основная энергия теперь содержалась в возмущениях электронного компонента плазмы. Некоторая небольшая часть начальной энергии переходила в кинетическую энергию ионов. Оценка плотности передаваемой ионам энергии  $E_{kin}$  определялась выраже-

нием

$$\frac{E_{kin}}{W_0} \approx 0,27I \frac{M}{m_e} \frac{\delta^2}{\omega_{pe}^2}, \quad (7.1)$$

где  $W_0$  — начальная плотность энергии интенсивной ленгмюровской волны,  $I = \sum_s (d\xi_s/d\tau)^2$  — энергия ионов в соответствующей нормировке,  $\delta$  — инкремент линейной неустойчивости. Доля энергии интенсивной ленгмюровской волны, передаваемая ионам, в случае неизотермической плазмы (модель Захарова) определялась отношением  $W_0/n_0 T_e$ , а в случае холодной плазмы (модель Силина) — отношением  $(m/M)^{1/3}$ .

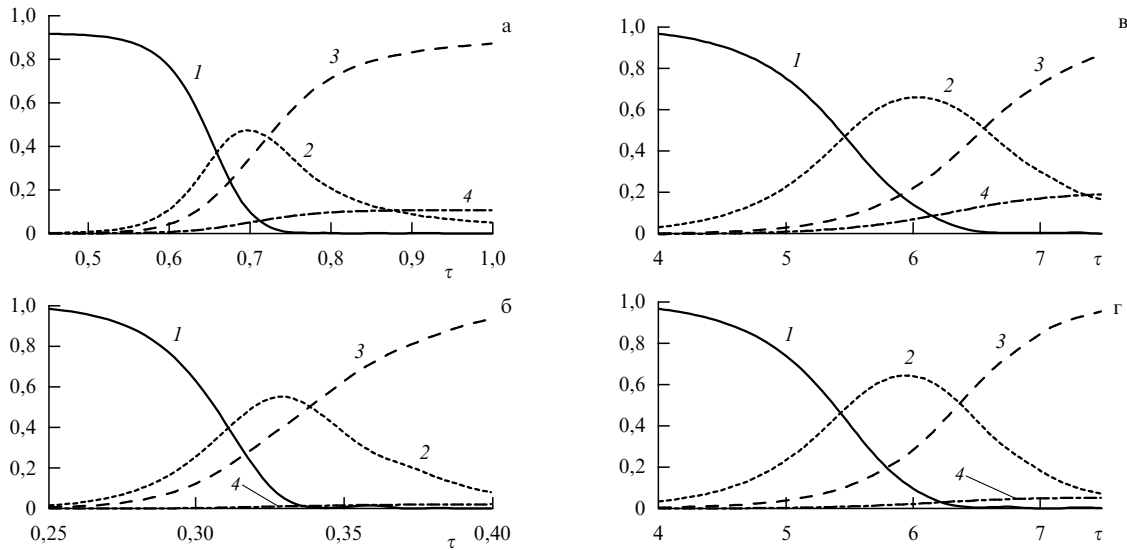
Ниже рассмотрим детальнее характер распределения энергии в целом и для НЧ возмущений в частности [60, 61]. Обсудим особенности возбуждения НЧ коллективных движений ионно-звуковых волн в неизотермической плазме и НЧ колебаний в модели Силина. Особое внимание уделим роли поглощения ВЧ спектра, ответственного за выгорание ВЧ поля в кавернах плотности. Выясним, как этот процесс влияет на возбуждение мод НЧ спектра, а главное, на вид функции распределения ионов и на общую энергию, приобретаемую ионами.

### 7.1. Результаты численного моделирования

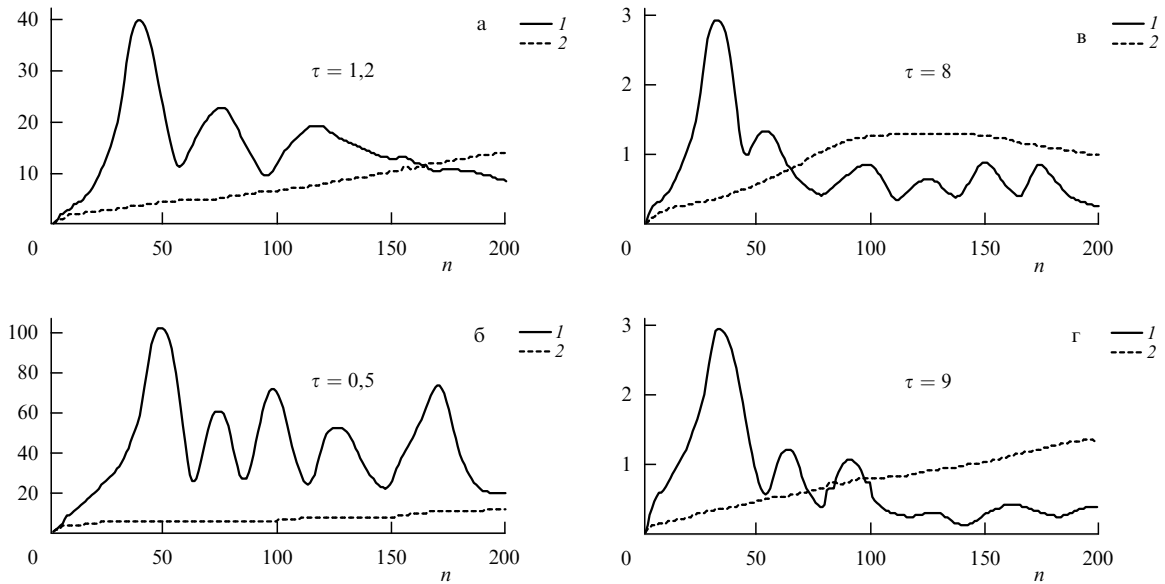
Для параметров, определяющих характер поглощения энергии ВЧ спектра,  $n_M = 20$  и  $\Theta = \theta/\delta = 0,05$  на рис. 6 представлены энергия основной волны, энергия мелко-масштабного ленгмюровского спектра, энергия, переданная электронам и ионам плазмы, нормированные на начальную энергию основной волны.

Анализ результатов численного моделирования показывает, что энергия интенсивной длинноволновой ленгмюровской волны переходит сначала в энергию ВЧ ленгмюровского коротковолнового спектра. Именно на этой стадии формируются каверны плотности плазмы, заполненные ВЧ полем. Затем ВЧ поле вследствие затухания на электронах, учтённого в данных моделях феноменологически, выгорает (при этом передавая свою энергию электронам плазмы). Каверны в этих условиях "схлопываются", возбуждаются НЧ волны, траектории ионов пересекаются и энергия "схлопнувшихся" каверн и НЧ спектра передаётся ионам.

Можно определить в конце численного моделирования среднеквадратичную скорость  $\sigma(v_s) = \sqrt{\sum_s v_s^2/S}$ , при этом в модели Захарова для лёгких ионов получим  $\sigma(v_s) = 0,015$ , для тяжёлых —  $\sigma(v_s) = 0,006$ . В модели Силина для лёгких ионов  $\sigma(v_s) = 0,002$ , а для тяжёлых —  $\sigma(v_s) = 0,0005$ . Полная энергия частиц в выбранной нормировке  $I = \sum_s (d\xi_s/d\tau)^2$  в модели Захарова для лёгких ионов равна 4,689, для тяжёлых — 0,808, в модели Силина для лёгких ионов равна 0,086, а для тяжёлых — 0,005. Различия в величинах полной энергии в разных моделях определяются разными значениями



**Рис. 6.** Относительные значения энергии основной волны (1), энергии мелкомасштабного ленгмюровского спектра (2), энергии, переданной электронам (3) и ионам (4) плазмы, для модели Захарова (а, б) и модели Силина (в, г) для лёгких ионов (а, в) и тяжёлых ионов (б, г).



**Рис. 7.** Амплитуда мод НЧ спектра и зависимость частоты от волнового числа мод для модели Захарова (а, б) и модели Силина (в, г) для лёгких ионов (а, в) и тяжёлых ионов (б, г); 1 — спектр  $M_n$ , 2 — сглаженная средняя  $\partial\Phi_n/\partial\tau$  на развитой стадии неустойчивости.

линейного инкремента, а для случаев лёгких и тяжёлых ионов — выбором массы иона. Можно построить на основе значений среднеквадратичной скорости нормальное распределение, тогда частицы, которые находятся вне его (в основном в так называемых "хвостах функции распределения") в модели Захарова для лёгких ионов обладают 13,8 % полной энергии, для тяжёлых — 9,2 %, а в модели Силина заметно больше, т.е. для лёгких ионов — 25,6 %, для тяжёлых — 13 %. Таким образом, в случае неустойчивости интенсивной волны в холодной плазме можно ожидать существенно большей доли быстрых частиц.

Представляет интерес не только распределение ионов по энергиям, но и возбуждение коллективных ионных колебаний (рис. 7), поэтому определим частоту моды с волновым вектором  $nk_0$  этих колебаний:

$$\frac{d\Phi_n}{d\tau} = - \left( \frac{d}{d\tau} \frac{M_{nr}}{\sqrt{M_{nr}^2 + M_{ni}^2}} \right) \left( \frac{M_{ni}}{\sqrt{M_{nr}^2 + M_{ni}^2}} \right)^{-1}, \quad (7.2)$$

где фазы  $\Phi_n$  НЧ мод спектра можно найти из выражения

$$M_n = M_{nr} + iM_{ni} = \sqrt{M_{nr}^2 + M_{ni}^2} \exp(i\Phi_n).$$

Следует обратить внимание на тот факт, что интенсивность НЧ спектра в случае неизотермической плазмы (модель Захарова) достаточно велика в широком интервале волновых чисел, что соответствует спектру ионного звука после разрушения каверн плотности, обнаруженному в численных экспериментах [41 – 44]. Напротив, в холодной плазме в спектре доминируют длинноволновые колебания.

Для обеих моделей кинетическая энергия ионов в выбранной выше нормировке равна

$$\frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_{s0} \left( \frac{d\xi_s}{d\tau} \right)^2, \quad (7.3)$$

а энергии коллективных возбуждений для моделей Захарова и Силина имеют вид соответственно

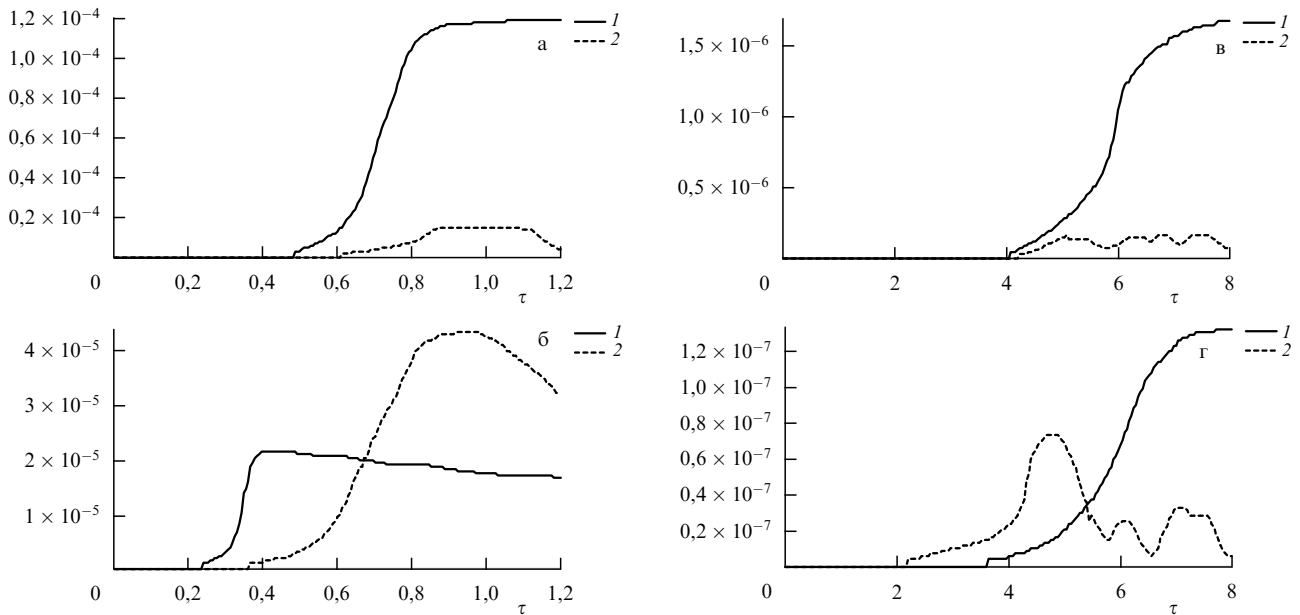


Рис. 8. Энергия ионов и НЧ поля для модели Захарова (а, б) и модели Силина (в, г) для лёгких ионов (а, в) и тяжёлых ионов (б, г); 1 — кинетическая энергия, 2 — энергия поля колебаний, умноженная на 70.

$$\frac{1}{8\pi^2} \frac{m}{M} \frac{1}{n_M^2} \frac{\delta}{\omega_{pe}} \sum_n |M_n|^2, \quad (7.4)$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \frac{m}{M} \sum_n \frac{1}{n^2} \left[ 1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] |M_n|^2,$$

причём в модели Захарова эти колебания носят название ионно-звуковых. На рисунке 8 показана динамика изменения энергии ионов и энергии НЧ поля во времени.

Стоит обратить внимание на тот факт, что энергия НЧ поля значительно меньше энергии ионов во всех рассмотренных случаях. Уменьшение энергии поля со временем происходит из-за передачи энергии ионам, а также из-за разрушения каверн плотности плазмы, на что было указано в работе [43].

Выбранный темп выгорания ВЧ поля в кавернах определяется величиной  $\Theta = \theta/\delta = 0,05$ . Представляет интерес выяснить, как зависят результаты расчётов от этого параметра. Очевидно, уменьшение этого параметра не только замедляет выгорание ВЧ поля в кавернах, но и уширяет спектр ВЧ мод, т.е. увеличивает долю мелкомасштабных его компонент, что приводит к углублению каверн плотности плазмы и к увеличению кинетической энергии выталкиваемых из каверн ионов. Отметим, что с уменьшением затухания ВЧ мод функция распределения ионов по скоростям в двух моделях по форме всё больше приближается к нормальному распределению, т.е. к функции Максвелла, что изображено на рис. 9.

В таблице 3 показана степень отличия распределения по скоростям, полученного численным моделированием, от наиболее близкого по форме нормального распределения по скоростям, отвечающая рис. 9.

Таблица 3. Отличия расчётного распределения скоростей от нормального распределения

| Уровень поглощения | Гибридная модель Захарова | Гибридная модель Силина |
|--------------------|---------------------------|-------------------------|
| $\Theta = 0,05$    | 19,9 %                    | 13 %                    |
| $\Theta = 0,015$   | 9,9 %                     | 13,4 %                  |
| $\Theta = 0,001$   | 6,9 %                     | 8,8 %                   |

На рисунке 10 показано, что максимальное значение энергии ионно-звуковых колебаний при уменьшении поглощения ВЧ поля для неизотермической плазмы практически не изменяется, но формирование НЧ спектра ускоряется. В холодной плазме, напротив, заметно растёт интенсивность длинноволновых НЧ колебаний при уменьшении поглощения ВЧ мод. В дальнейшем НЧ спектр подавляется, передавая свою энергию ионам.

Как и следовало ожидать, с уменьшением поглощения ВЧ спектра энергия, в конечном итоге передаваемая ионам, растёт практически в одной и той же пропорции в неизотермической и в холодной плазме (рис. 11).

Отметим в заключение, что масштабы возмущений ионной плотности, меньшие дебаевского радиуса ионов  $r_{Di} = v_{Ti}/\omega_{pi}$ , не дают вклада в формирование низкочастотных электрических полей из-за эффекта экранирования. В терминах  $r_{Di}k_0/2\pi$  ионный дебаевский радиус можно оценить [50–52] как

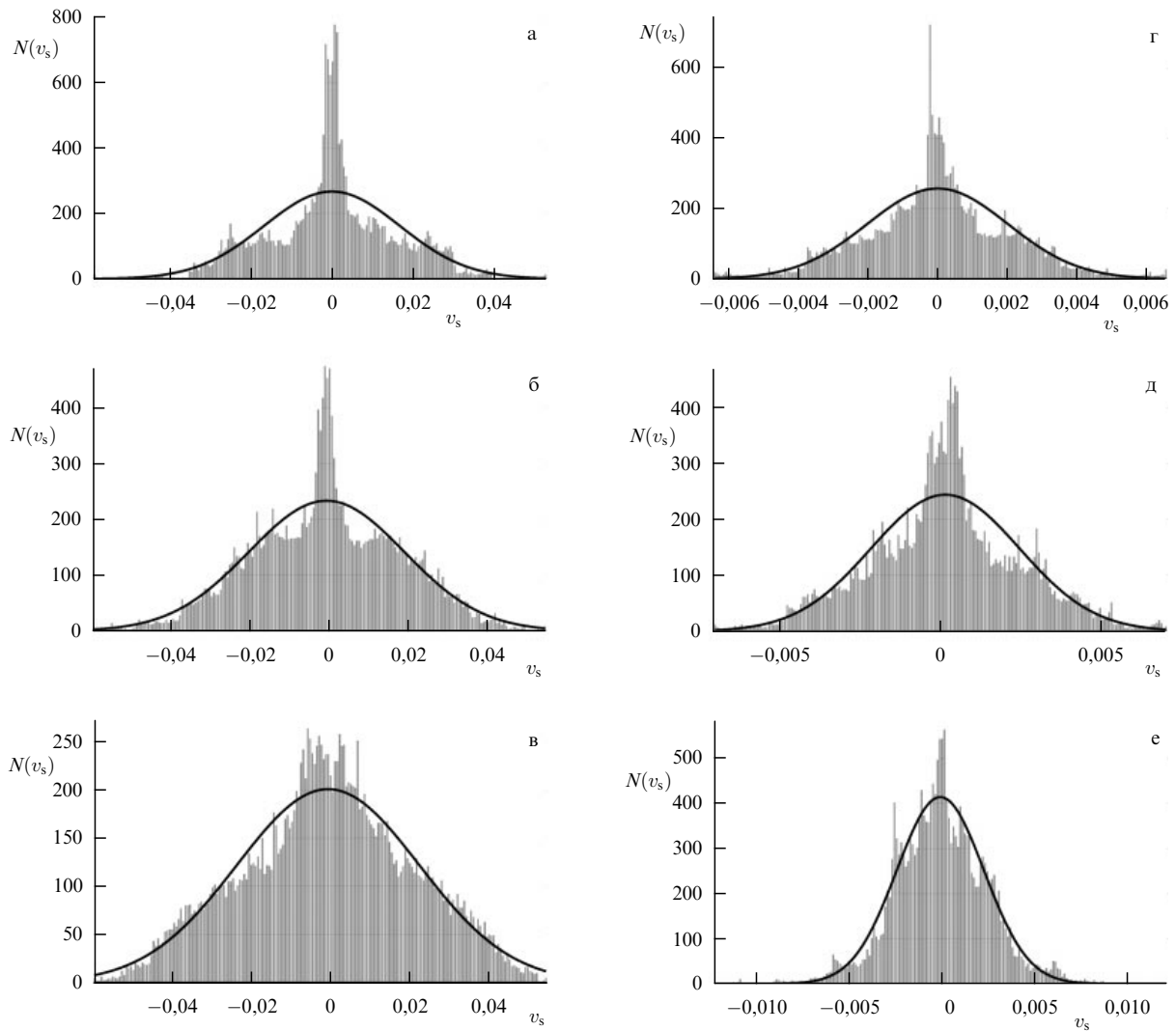
$$\frac{r_{Di}k_0}{2\pi} = R_{Di} \propto \left\langle \frac{v_i k_0}{2\pi \gamma_L} \right\rangle \frac{\delta}{\omega_{pe}} \left( \frac{M}{m_e} \right)^{1/2} = \langle v_s \rangle \frac{\delta}{\omega_{pe}} \left( \frac{M}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (7.5)$$

В режиме развитой неустойчивости эта величина оказывается порядка  $R_{Di} \leq 10^{-3}$ , а число мод спектра ионной плотности не превышает величины  $1/R_{Di}$ , что не противоречит проведённому анализу.

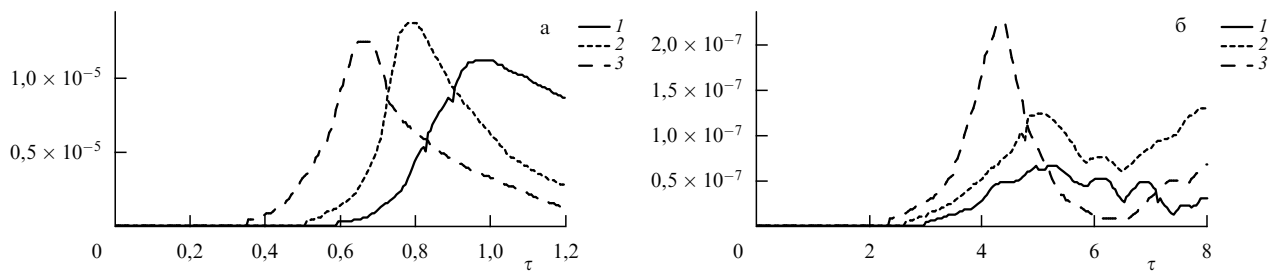
## 8. Заключение

Показано, что обнаруженный В.Е. Захаровым механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний при превышении плотностью тепловой энергии плазмы плотности ВЧ поля применим и для полей, плотность энергии которых значительно превышает тепловую энергию плазмы. Обсуждается подобие процессов модуляционной неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний в горячей и холодной плазме, описываемой соответственно уравнениями Захарова и Силина. Характер возбуждения возмущений имеет одинаковую симметрию, механизмы возбуждения обширного коротковолнового спектра





**Рис. 9.** Распределение ионов по скоростям для модели Захарова (а–в) и модели Силина (г–е) для лёгких ионов;  $\Theta = 0,05$  (а, г),  $0,015$  (б, д),  $0,001$  (в, е).



**Рис. 10.** Зависимости от времени  $\tau$  энергии НЧ спектра в модели Захарова (а) и в модели Силина (б) для лёгких ионов;  $\Theta = 0,05$  (1),  $0,015$  (2),  $0,001$  (3).

также подобны. Уравнения Захарова для неизотермической плазмы в условиях, когда плотность энергии поля меньше плотности тепловой энергии среды, можно получить из уравнений Силина для низкотемпературной плазмы, когда плотность энергии поля существенно превышает плотность тепловой энергии среды. Действительно, уменьшая плотность энергии поля, легко перейти от случая, рассмотренного В.П. Силиным и коллегами, к случаю, описываемому уравнениями Захарова.

Движение энергии по спектру в моделях Захарова и Силина связано не только с перестройкой поля — взаи-

модействием мод между собой, — а в значительной степени является следствием линейной неустойчивости. Максимальные инкременты для модели Захарова с уменьшением масштаба возмущений увеличиваются. Практически постоянное значение инкремента в широкой области волновых чисел в сверхзвуковом режиме приводит к взрывному росту каверн плотности плазмы. В модели Силина максимальный инкремент при уменьшении амплитуды накачки сдвигается в коротковолновую область, что подтвердили результаты изучения нелинейной стадии процесса. Важно также, что максимальный инкремент в холодной плазме при уменьше-

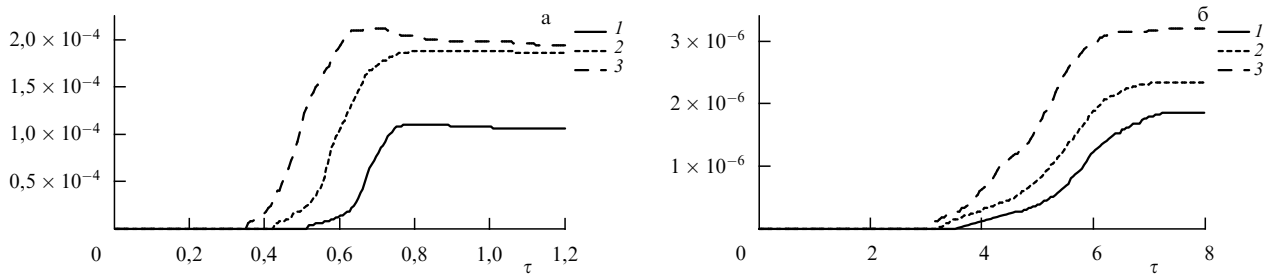


Рис. 11. Зависимости от времени  $\tau$  кинетической энергии ионов в модели Захарова (а) и в модели Силина (б) для лёгких ионов;  $\Theta = 0,05$  (1), 0,015 (2), 0,001 (3).

нии амплитуды поля накачки не изменяется, а инкременты в неизотермической плазме при тех же условиях уменьшаются во всей области неустойчивости.

Наиболее важным следствием развития неустойчивости интенсивных ленгмюровских волн в плазме является передача части энергии поля ионам и НЧ колебаниям плазмы. Этот вопрос рационально решать, рассматривая гибридные модели, где электроны описаны уравнениями квазигидродинамики, а ионы — крупными частицами. Процессы неустойчивости интенсивных длинноволновых ленгмюровских колебаний как в горячей, так и в холодной плазме оказываются подобны [48, 49].

Анализ результатов численного моделирования показывает, что в результате неустойчивости интенсивной длинноволновой ленгмюровской волны возбуждается ВЧ ленгмюровский коротковолновый спектр и коротковолновый НЧ спектр. Именно на этой стадии формируются каверны плотности плазмы, заполненные ВЧ полем. Затем ВЧ поле вследствие затухания на электронах, учтённого в данных моделях феноменологически, выгорает, передавая свою энергию электронам плазмы. Каверны в этих условиях "схлопываются", возбуждаются собственные НЧ волны (ионный звук), траектории ионов пересекаются и энергия "схлопнувшихся" каверн и НЧ спектра передаётся ионам. Ранее отмечалось [48], что в неизотермической плазме доля энергии поля в условиях, когда плотность энергии поля меньше плотности тепловой энергии среды, которая передаётся ионам, пропорциональна отношению энергии поля к тепловой энергии плазмы. В холодной плазме доля энергии поля, которая передаётся ионам, порядка отношения инкремента к частоте или, что практически то же самое, пропорциональна кубическому корню из отношения массы электрона к массе иона. В случае тяжёлых ионов энергия, переданная ионному компоненту, заметно меньше, чем для случая лёгких ионов. При этом доля энергии, переданная ионам, в случае холодной плазмы обратно пропорциональна кубическому корню из массы ионов, а в случае горячей плазмы с ростом массы ионов уменьшение доли энергии, переданной ионам, становится значительнее [58–60]. Распределение ионов по энергиям в гибридной модели Силина характеризуется наличием большой доли быстрых частиц.

Интенсивность НЧ спектра (ионно-звуковые волны) в случае неизотермической плазмы (модель Захарова) является величиной одного порядка в широком интервале волновых чисел. В холодной плазме (модель Силина) в НЧ спектре доминируют длинноволновые колебания. При этом энергия НЧ поля оказывается значительно меньше конечной энергии ионов во всех рассмотренных случаях. Уменьшение энергии НЧ поля со временем происходит из-за передачи энергии ионам.

Уменьшение уровня поглощения ВЧ поля соответствует замедлению выгорания ВЧ поля в кавернах и уширяет

спектр ВЧ мод, что приводит к углублению каверн плотности плазмы и увеличению кинетической энергии выталкиваемых из каверн ионов. Отметим, что с уменьшением затухания ВЧ мод функция распределения ионов по скоростям в двух моделях по форме всё больше приближается к нормальному распределению, т.е. к функции Максвелла, что позволяет говорить о температуре ионов. Максимальное значение энергии ионно-звуковых колебаний при уменьшении поглощения ВЧ поля для неизотермической плазмы практически не изменяется, но формирование НЧ спектра ускоряется. В холодной плазме велика интенсивность именно длинноволновых НЧ колебаний, причём она увеличивается при уменьшении уровня поглощения ВЧ мод. Важно отметить, что с уменьшением поглощения ВЧ спектра энергия, в конечном итоге передаваемая ионам, возрастает.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность В.П. Силину и А.А. Рухадзе за поддержку и внимание к работе, а также Е.А. Кузнецову за конструктивные замечания.

## 9. Приложение А. Отражение электромагнитной волны от ограниченной плазмы

Следующая задача [62] демонстрирует конструктивность подхода В.П. Силина к описанию параметрической неустойчивости интенсивного поля в плазме. Интенсивные электромагнитные поля, воздействующие на поверхность плазмы, приводят к значительным осцилляциям электронного компонента. При этом тепловым движением электронов можно пренебречь, считая плазму холодной. Характер воздействия такого внешнего электромагнитного поля на поверхность холодной плазмы подробно рассмотрен в книге В.П. Силина [16].

Ниже обобщим этот подход на случай самосогласованного описания воздействия внешнего нормально падающего на границу плазмы электромагнитного излучения с возбуждением широкого спектра поверхностных колебаний.

Пусть на плазменное полупространство ( $x < 0$ ) с невозмущённой постоянной плотностью плазмы  $n_0$  нормально падает электромагнитная волна с компонентами  $(0, H_y, E_z)$ , где  $|H_y| = |E_z| = E_0$ . Интенсивность поля падающей волны будем считать достаточно большой и пренебрежём тепловым разбросом электронов плазмы ( $E_0^2 > 4\pi n_0 T_e$ ). Для возмущений поверхностной плотности заряда

$$\sigma_\alpha = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{\rho} n'_\alpha dx,$$

где  $e_\alpha$ ,  $m_\alpha$ ,  $n'_\alpha$  — заряд, масса и возмущённая плотность заряда частиц сорта  $\alpha$ , запишем следующую систему уравнений В.П. Силина, сформулированных им в

книге [16]:

$$\exp [i a_{\alpha n} \sin (\omega_0 t + \varphi)] \frac{\partial^2 v_{\alpha, n}}{\partial t^2} + \frac{\omega_{\alpha}^2}{2} \sum_{\beta} v_{\beta n} = 0, \quad (\text{A.1})$$

где

$$v_{\alpha, n} = e_{\alpha} \sigma_{\alpha, n} \exp [-i a_{\alpha, n} \sin (\omega_0 t + \varphi)],$$

$$a_{\alpha, n} = \frac{e_{\alpha} n E_z(k_z = 0)}{m_{\alpha} \omega_0 c}, \quad \omega_{\alpha}^2 = \frac{4 \pi e^2 n_0}{m_{\alpha}},$$

$\omega_0 t + \varphi$  — фаза поля с  $k_z = 0$  в плазме,  $\omega_0$  — частота падающей волны. Волновое число таких возмущений  $k_{zn} = n \omega_0 / c$ . Решение (A.1) будем искать в виде ряда [16]

$$v_{\alpha, n} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} u_{\alpha, n}^{(s)} \exp (i s \omega_0 t). \quad (\text{A.2})$$

Для поверхностных возмущений ионной плотности можно удержать только первый член ряда. Слагаемые в сумме для  $v_{e, n}$ , пропорциональные  $\exp (\pm i \omega_0 t)$ , превышают остальные члены ряда, однако необходимо удержать члены, соответствующие "нулевой" и второй гармоникам. Ограничимся учётом симметричных возмущений ионов  $u_{i, n}^{(0)} = u_{i, -n}^{(0)}$ . Кроме того, имеют место соотношения

$$u_{e, n}^{(0)} = u_{e, -n}^{(0)}, \quad u_{e, n}^{(\pm 2)} = u_{e, -n}^{(\pm 2)}, \quad u_{e, n}^{(\pm 1)} = -u_{e, -n}^{(\pm 1)}, \quad (u_{e, n}^{(1)})^* = u_{e, n}^{(-1)}.$$

Самосогласованная обобщённая система уравнений Си-лина, учитывающая обратное воздействие поля возбуждаемого коротковолнового спектра поверхностных колебаний на отражённую волну (параметры падающей волны, очевидно, не меняются), имеет вид

$$\frac{d u_{e, n}}{d t} + (\theta_n - i A_1 \omega_0) u_{e, n} = i \frac{\omega_0}{2} J_1(a_n) u_{i, n} \exp (i \varphi), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d^2 u_{i, n}}{d t^2} = -\omega_0 \frac{m_e}{M} J_1(a_n) [u_{e, n} \exp (-i \varphi) + u_{e, n}^* \exp (i \varphi)], \quad (\text{A.4})$$

$$D(R - R_0) = \frac{8 \pi}{e n_0 E_0} \sum_n u_{i, n} [J_0(a_n) u_{e, n}^* \exp (i \varphi) - J_2(a_n) u_{e, n} \exp (-i \varphi)], \quad (\text{A.5})$$

где

$$1 + R = |1 + R| \exp (-i \varphi) = \frac{a_n \exp (-i \varphi)}{\beta_0 n},$$

$$\omega_0 = \frac{(1 - A_1) \omega_{pe}}{\sqrt{2}}, \quad \beta_0 = \frac{2 e E_0}{m_e c \omega_0}, \quad R_0 = -\frac{D_0^*}{D_0},$$

$$D_0 = \frac{\varepsilon_0}{\kappa_0} + \frac{i c}{\omega_0}, \quad \varepsilon_0 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2}, \quad \kappa_0^2 = -\frac{\omega_0^2 \varepsilon_0}{c^2},$$

$$A_1 = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \Delta,$$

$R$  — амплитудный коэффициент отражения,  $u_{e, n} = u_{e, n}^{(1)}$ ,  $u_{i, n} = u_{i, n}^{(0)}$ .

Слагаемые, пропорциональные  $J_0(a_n)$  и  $J_2(a_n)$ , отвечают вкладу в нелинейное взаимодействие соответственно "нулевой" и второй гармоник. Из уравнений системы (A.3)–(A.5) можно получить соотношение

$$1 - |R|^2 = \frac{16 \pi}{e \beta_0 n_0 c E_0} \sum_n \frac{1}{n} \left( \frac{d |u_{e, n}|^2}{d t} + 2 \theta_n |u_{e, n}|^2 \right), \quad (\text{A.6})$$

которое представляет собой закон сохранения энергии.

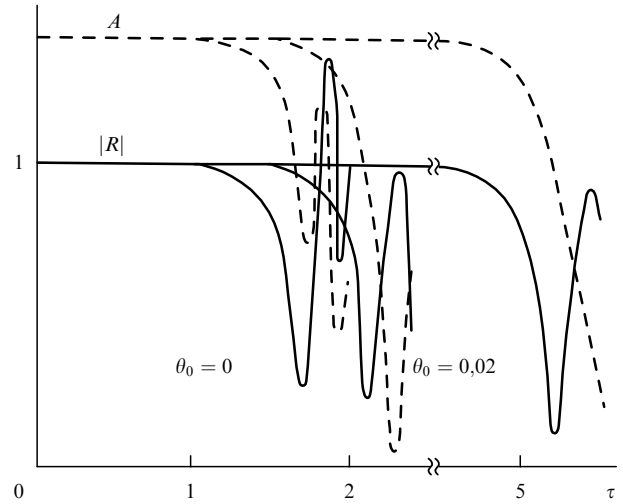


Рис. 12. Коэффициент отражения  $R$  и поле в плазме  $A E_0$  для  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0,02$ .

Для численного решения уравнений (A.3)–(A.5) переходим к переменным

$$\tau = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \omega_0 t, \quad \theta_n = n \theta_0 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \omega_0,$$

$$u_{e, n} = |u_{e, n}| \exp (i \varphi_n), \quad N_n = 4 \pi \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/6} E_0^{-1} |u_{e, n}| \beta_0^{1/2},$$

$$M_n = 4 \pi \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{-1/6} E_0^{-1} |u_{i, n}| \beta_0^{1/2}.$$

Особенности затухания поверхностных волн таковы, что оно возрастает с ростом волнового числа колебаний [63]. В процессе развития неустойчивости разброс по фазам  $\varphi_n$  быстро уменьшается за времена в несколько единиц  $\tau$ , формируя области поверхностной электронной и ионной плотности быстро уменьшающегося масштаба. Этот же эффект синхронизации мод приводит к сильному взаимодействию коротковолнового спектра неустойчивости с отражённой волной и порождает значительные осцилляции коэффициента отражения при малой диссипации в интервале  $R = 0,5 - 1,3$  (рис. 12). Учёт потерь сужает пространственный спектр неустойчивости, уменьшает интегральный уровень энергии спектра, затягивает развитие неустойчивости, а при колебаниях коэффициента отражения последний не превышает единицу.

### Список литературы

1. Файнберг Я Б *Укр. физ. журн.* **23** 1885 (1978)
2. Рабинович М С, Рухадзе А А *Физика плазмы* **2** 715 (1976); Rabinovich M S, Rukhadze A A *Sov. J. Plasma Phys.* **2** 715 (1976)
3. Dawson J M *Phys. Fluids* **7** 981 (1964)
4. Пашинин П П, Прохоров А М *ЖЭТФ* **60** 1630 (1971); Pashinin P P, Prokhorov A M *Sov. Phys. JETP* **33** 883 (1971)
5. Файнберг Я Б *Физика плазмы* **11** 1398 (1985); Fainberg Ya B *Sov. J. Plasma Phys.* **11** 803 (1985)
6. Кузель М В, Рухадзе А А *Электродинамика плотных электронных пучков в плазме* (М.: Наука, 1990)
7. Шайро В Д, Шевченко В И *Иzv. вузов. Радиофизика* **19** 767 (1976); Shapiro V D, Shevchenko V I *Radiophys. Quantum Electron.* **19** 543 (1976)
8. Кондратенко А Н, Куклин В М *Основы плазменной электроники* (М.: Энергоатомиздат, 1988)
9. Буц В А, Лебедев А Н *Когерентное излучение интенсивных электронных пучков* (М.: Физический ин-т им. П.Н. Лебедева

- РАН, 2006); Buts V A, Lebedev A N, Kurilko V I *The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams* (Berlin: Springer, 2006)
10. Силин В П *ЖЭТФ* **48** 1679 (1965); Silin V P *Sov. Phys. JETP* **21** 1127 (1965)
  11. Захаров В Е *ЖЭТФ* **51** 688 (1966); Zakharov V E *Sov. Phys. JETP* **24** 455 (1967)
  12. Алиев Ю М, Силин В П *ЖЭТФ* **48** 901 (1965); Aliev Yu M, Silin V P *Sov. Phys. JETP* **21** 601 (1965)
  13. Горбунов Л М, Силин В П *ЖЭТФ* **49** 973 (1965); Gorbunov L M, Silin V P *Sov. Phys. JETP* **22** 1347 (1966)
  14. Krueger W L et al. *Phys. Rev. Lett.* **24** 987 (1970)
  15. Силин В П *УФН* **108** 625 (1972); Silin V P *Sov. Phys. Usp.* **15** 742 (1973)
  16. Силин В П *Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму* (М.: Наука, 1973)
  17. Захаров В Е *ЖЭТФ* **62** 1745 (1972); Zakharov V E *Sov. Phys. JETP* **35** 908 (1972)
  18. Krueger W L *Phys. Fluids* **16** 1548 (1973)
  19. Иванов А А, Никулин М Г *ЖЭТФ* **65** 168 (1973); Ivanov A A, Nikulin M G *Sov. Phys. JETP* **38** 83 (1974)
  20. Kim H C, Stenzel R L, Wong A Y *Phys. Rev. Lett.* **33** 886 (1974)
  21. Дегтярев Л М, Захаров В Е *Письма в ЖЭТФ* **21** 9 (1975); Degtyarev L M, Zakharov V E *JETP Lett.* **21** 4 (1975)
  22. Андреев Н Е, Силин В П, Стенчиков Г Л *Физика плазмы* **3** 1088 (1977); Andreev N E, Silin V P, Stenichikov G L *Sov. J. Plasma Phys.* **3** 602 (1977)
  23. Коврижных Л М *Физика плазмы* **3** 1097 (1977); Kovrizhnykh L M *Sov. J. Plasma Phys.* **3** 607 (1977)
  24. Захаров В Е, Львов В С, Рубенчик А М *Письма в ЖЭТФ* **25** 11 (1977); Zakharov V E, L'vov V S, Rubenchik A M *JETP Lett.* **25** 8 (1977)
  25. Бучельникова Н С, Маточкин Е П, Препринт № 79-115 (Новосибирск: Ин-т ядерной физики АН СССР, 1979)
  26. Сагдеев Р З, Шапиро В Д, Шевченко В И *Физика плазмы* **6** 377 (1980); Sagdeev R Z, Shapiro V D, Shevchenko V I *Sov. J. Plasma Phys.* **6** 207 (1980)
  27. Дегтярев Л М и др. *ЖЭТФ* **85** 1221 (1983); Degtyarev L M et al. *Sov. Phys. JETP* **58** 710 (1983)
  28. Wong A Y, Cheung P Y *Phys. Rev. Lett.* **52** 1222 (1984)
  29. Cheung P Y, Wong A Y *Phys. Fluids* **28** 1538 (1985)
  30. Popel S I, Tsytovich V N, Vladimirov S V *Phys. Plasmas* **1** 2176 (1994)
  31. Захаров В Е и др. *ЖЭТФ* **96** 591 (1989); Zakharov V E et al. *Sov. Phys. JETP* **69** 334 (1989)
  32. Карфидов Д М и др. *ЖЭТФ* **98** 1592 (1990); Karfidov D M et al. *Sov. Phys. JETP* **71** 892 (1990)
  33. Vyacheslavov L N et al. *Phys. Plasmas* **2** 2224 (1995)
  34. McFarland M D, Wong A Y *Phys. Plasmas* **4** 945 (1997)
  35. Kuznetsov E A *Sov. Plasma Phys.* **2** 327 (1976); Kuznetsov E A *Sov. J. Plasma Phys.* **2** 178 (1976)
  36. Захаров В Е *УФН* **155** 529 (1988); Zakharov V E *Sov. Phys. Usp.* **31** 672 (1988)
  37. Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **182** 569 (2012); Zakharov V E, Kuznetsov E A *Phys. Usp.* **55** 535 (2012)
  38. Dawson J M, Report No. МАТТ-152 (Princeton, NJ: Princeton Univ., NJ Plasma Physics Lab., 1962)
  39. Shen M-M, Nicholson D R *Phys. Fluids* **30** 1096 (1987)
  40. Дегтярев Л М и др. *Физика плазмы* **6** 485 (1980); Degtyarev L M et al. *Sov. J. Plasma Phys.* **6** 263 (1980)
  41. Галеев А А и др. *Физика плазмы* **1** 10 (1975); Galeev A A et al. *Sov. J. Plasma Phys.* **1** 5 (1975)
  42. Сигов Ю С, Ходырев Ю В *ДАН СССР* **229** 833 (1976); Sigov Yu S, Khodyrev Yu V *Sov. Phys. Dokl.* **21** 444 (1976)
  43. Sigov Yu S, Zakharov V E *J. Physique* **40** (Colloq. C-7) 63 (1979)
  44. Robinson P A, de Oliveira G I *Phys. Plasmas* **6** 3057 (1999)
  45. Wang J G et al. *Phys. Plasmas* **1** 2531 (1994)
  46. Wang J G et al. *Phys. Plasmas* **3** 111 (1996)
  47. Куклин В М, Панченко И П, Севидов С М *Радиотехника и электроника* **33** 2135 (1988)
  48. Черноусенко В В, Куклин В М, Панченко И П, в сб. *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов* (Отв. ред. В Г Барьяхтар, В Е Захаров, В М Черноусенко) (Киев: Наукова думка, 1990) с. 472
  49. Clark K L, Payne G L, Nicholson D R *Phys. Fluids* **4** 708 (1992)
  50. Дьяченко А И и др. *Письма в ЖЭТФ* **44** 504 (1986); D'yachenko A I et al. *JETP Lett.* **44** 648 (1986)
  51. Henri P et al. *Europhys. Lett.* **96** 55004 (2011)
  52. Kuklin V M *J. Kharkiv Natl. Univ. Phys. Ser. Nucl. Part. Fields* (1041(2)) **20** (2013)
  53. Kuklin V M, in *Proc. Contr. Papers of Int. Conf. on Plasma Physics, Kiev, April 6–12, 1987*, Vol. 4, p. 101
  54. Куклин В М, Севидов С М *Физика плазмы* **14** 1180 (1988)
  55. Koch P, Albritton J *Phys. Rev. Lett.* **32** 1420 (1974)
  56. Буланов С В, Сасоров П В *Физика плазмы* **12** 54 (1986); Bulanov S V, Sasorov P V *Sov. J. Plasma Phys.* **12** 29 (1986)
  57. Батанов Г М и др. *Физика плазмы* **12** 552 (1986); Batanov G M et al. *Sov. J. Plasma Phys.* **12** 317 (1986)
  58. Белкин Е В и др. *Вопр. атом. науки и тех. Плазменная электроника и новые методы ускорения* (4) 260 (2013)
  59. Загородний А Г и др. *Физические основы приборостроения* **3** (1) 58 (2014)
  60. Kirichok A V et al. *Phys. Plasmas* **22** 092118 (2015)
  61. Kirichok A V et al., arXiv:1411.3011
  62. Куклин В М, Панченко И П *Письма в ЖЭТФ* **43** 237 (1986); Kuklin V M, Panchenko I P *JETP Lett.* **43** 302 (1986)
  63. Кодратенко А Н *Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме* (М.: Энергоатомиздат, 1985)

### One-dimensional modulational instability models of intense Langmuir plasma oscillations using the Silin–Zakharov equations

A.G. Zagorodny<sup>(1,2)</sup>, A.V. Kirichok<sup>(1,2)</sup>, V.M. Kuklin<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 14-b Metrolohichna str., 03680 Kiev, Ukraine

<sup>(2)</sup> V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody sq., 61022 Kharkiv, Ukraine

E-mail: <sup>(1)</sup> Zagorodny@nas.gov.ua, <sup>(1,2)</sup> kirichok@bitp.kiev.ua, <sup>(2)</sup> v.m.kuklin@karazin.ua

The modulational instability mechanisms of intense Langmuir oscillations in a plasma are reviewed both for field energy densities below (Zakharov's model) and above (Silin's model) the plasma's thermal energy density. It is shown by a one-dimensional example that V.E. Zakharov's mechanism involving nonlinear absorption of plasma waves also holds for intense cold plasma fields described by V.P. Silin's model. It is also shown that the development mechanisms of the modulational instability of Langmuir oscillations are similar for nonisothermal and cold plasmas. Hybrid models treating the electrons quasi-hydrodynamically and the ions as particles are analyzed in detail which allow the study of the direct mechanism by which energy is transferred to ions in the process as an instability develops.

**Keywords:** modulational instability, parametric instability, non-isothermal and cold plasmas, Zakharov's model, Silin's model, hybrid models

PACS numbers: **52.35** – g, **52.65** – y

Bibliography — 63 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **186** (7) 743–762 (2016)

DOI: 10.3367/UFN.2016.01.037697

Received 7 December 2015

*Physics – Uspekhi* **59** (7) (2016)

DOI: 10.3367/UFN.2016.01.037697