

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Процессы квантовой электродинамики при взаимодействии частиц высокой энергии с атомами

П.А. Крачков, Р.Н. Ли, А.И. Мильштейн

Развитый в последние годы метод квазиклассических функций Грина уравнения Дирака во внешних полях различных конфигураций позволил совершить прорыв в теоретическом описании фундаментальных процессов квантовой электродинамики, протекающих при взаимодействии частиц высокой энергии с атомами. Описываются новейшие результаты вычисления точно по параметрам атомного поля сечений фоторождения электрон-позитронных пар фотоном высокой энергии, сечения однократного тормозного излучения релятивистских электронов и мюонов в атомном поле, сечения двойного тормозного излучения и других процессов. Во многих случаях обсуждаемые результаты получены в квазиклассическом приближении с учётом первой квазиклассической поправки.

Ключевые слова: квантовая электродинамика, сильное поле, фоторождение, тормозное излучение

PACS numbers: 12.20.Ds, 32.80. – t

DOI: 10.3367/UFNr.2016.03.037743

Содержание

Памяти Владимира Николаевича Байера

1. Введение (689).
2. Квазиклассические функции Грина и волновые функции уравнения Дирака (690).
3. Фоторождение e^+e^- -пары (691).
 - 3.1. Дифференциальное сечение фоторождения e^+e^- -пары.
 - 3.2. Дифференциальное сечение фоторождения $\mu^+\mu^-$ -пары.
 - 3.3. Спектр электронов в процессе фоторождения e^+e^- -пар.
 - 3.4. Кулоновские поправки к полному сечению фоторождения.
 - 3.5. Фоторождение e^+e^- -пары при $\varepsilon_p \sim t$ или $\varepsilon_q \sim t$.
4. Однократное тормозное излучение релятивистских частиц в атомном поле (700).
 - 4.1. Дифференциальное сечение тормозного излучения.
 - 4.2. Кулоновские поправки к сечению тормозного излучения электронов.
 - 4.3. Кулоновские поправки к сечению тормозного излучения мюонов.
5. Двойное тормозное излучение релятивистской заряженной частицы в атомном поле (703).
6. Фоторождение e^+e^- -пары, сопровождаемое излучением фотона (706).
7. Квазиклассическое приближение и рассеяние на малые углы при высоких энергиях (707).
 - 7.1. Рассеяние поляризованных электронов в квазиклассическом приближении.
 - 7.2. Разложение точной амплитуды кулоновского рассеяния по малым углам.
8. Заключение (710).

Список литературы (711).

П.А. Крачков, Р.Н. Ли, А.И. Мильштейн. Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, просп. Академика Лаврентьева 11, 630090 Новосибирск, Российская Федерация
E-mail: peter_phys@mail.ru, r.n.lee@inp.nsk.su, a.i.milstein@inp.nsk.su
Статья поступила 21 января 2016 г.

1. Введение

Между опубликованием П. Дираком своего знаменитого уравнения [1] и первыми работами [2, 3] по исследованию в рамках этого уравнения основных процессов квантовой электродинамики в атомном поле прошло лишь несколько лет. Рассмотрение в этих работах было проведено в основном порядке теории возмущений по постоянной тонкой структуре α и по параметру $\eta = Z\alpha$ (Z — атомный номер). Точность результатов, полученных в низшем по η порядке (далее такие результаты мы будем называть борновскими), оказывается весьма невысокой уже при сравнительно небольших значениях Z , и поэтому для приложений очень часто необходимо точно учитывать зависимость от η . Разницу между точным по η результатом и борновским называют кулоновскими поправками. К сожалению, решение уравнения Дирака для релятивистской частицы в кулоновском поле, необходимое для вычисления сечений различных процессов, может быть записано только в виде суммы по угловым моментам [4], в отличие от решения уравнения Шрёдингера в кулоновском поле, для которого существует простое замкнутое выражение.

Для ультрарелятивистских частиц основной вклад в сечения обычно дают малые углы θ между импульсами начальных и конечных частиц. При этом характерный угловой момент l_c можно оценить как $l_c \sim p\rho$, где p — характерный импульс, $\rho \sim 1/\delta p$ — характерный прицельный параметр, $\delta p \sim p\theta$ — характерная передача импульса ($\hbar = c = 1$). Таким образом, мы видим, что $l_c \sim 1/\theta \gg 1$. Поэтому, хотя существуют формальные выражения для сечения фоторождения пар и тормозного излучения в кулоновском поле, справедливые для любых

энергий и значений параметра $\eta < 1$ [5], использование этих выражений для численных вычислений даже при сравнительно невысоких энергиях является чрезвычайно сложной задачей [6]. Эти трудности становятся непреодолимыми при высоких энергиях частиц. К счастью, при малых углах применимо квазиклассическое приближение, которое позволяет учесть вклад больших угловых моментов в амплитуды процессов.

Важный шаг в применении квазиклассического приближения к изучению фоторождения и тормозного излучения в атомном поле точно по η был сделан в работах [7–9], где было получено простое выражение для кулоновских поправок к сечениям этих процессов. Сразу заметим, что полученные выражения имеют достаточно высокую точность только при очень больших энергиях ($\varepsilon \gtrsim 100$ МэВ). В работах [7–9] использовались волновые функции в приближении Фарри–Зоммерфельда–Мауэ [10, 11]. Как станет ясно из дальнейшего рассмотрения, эти функции являются волновыми функциями электрона в кулоновском поле, вычисленными в главном квазиклассическом приближении.

Следующим шагом в развитии квазиклассического подхода к изучению процессов квантовой электродинамики во внешних полях явилась операторная квазиклассическая техника В.Н. Байера и В.М. Каткова [12]. Эта техника позволила не только значительно упростить вывод предыдущих результатов, но и получить множество новых важных результатов [13] в главном квазиклассическом приближении. Однако подход В.Н. Байера и В.М. Каткова не позволяет найти квазиклассические поправки к результатам, полученным в главном квазиклассическом приближении (поправки по $1/l_c \sim \theta \ll 1$). Эта трудность была преодолена в методе квазиклассических функций Грина уравнения Дирака в электромагнитном поле. Мощь метода состоит в том, что он позволяет вычислить не только главный вклад в сечения, но и первую квазиклассическую поправку. Кроме того, в рамках этого метода удаётся получать аналитические результаты даже в случае, когда точное аналитическое решение уравнения Дирака в данном электромагнитном поле отсутствует. Квазиклассическая функция Грина получена в работах [14, 15] для случая кулоновского поля, в работах [16, 17] — для произвольного сферически-симметричного поля, в работе [18] — для произвольного локализованного поля и в работе [19] — для суперпозиции сильного лазерного поля и атомного поля. В работах [18, 20] вычислены первые поправки ко всем матричным структурам квазиклассической функции Грина для произвольного сферически-симметричного локализованного поля. С помощью квазиклассических функций Грина получены простые формулы для дифференциального сечения дельбрюкковского рассеяния при высоких энергиях (упругое рассеяние фотона на атоме за счёт рождения виртуальной электрон-позитронной пары) и впервые правильно вычислено полное сечение этого процесса [21], наиболее точное измерение которого проведено в [22]. Кроме того, использование квазиклассических функций Грина впервые позволило вычислить сечение расщепления фотона большой энергии в атомном поле [23]. Этот эффект впервые был измерен в эксперименте [24]. Учёт поправок к квазиклассическим функциям Грина и соответствующим волновым функциям позволил существенно повысить точность вычисления сечений таких фундаментальных процессов квантовой электродинамики, как фоторождение пар и тормозное излучение в атомном поле, и впервые количественно предсказать зарядовую асимметрию в этих процессах при высоких энергиях (изменение сечений при замене электрона позитроном). Процессы фоторождения и тормозного излучения играют принципиальную роль при описании электромагнитных ливней в детекторах, а также являются большим фоном при поиске новой физики в прецизионных экспериментах. Поэтому сечения этих процессов должны быть определены с высокой точностью. Рассмотрению современного состояния теории фоторождения и тормозного излучения при высоких энергиях и посвящается настоящий обзор.

2. Квазиклассические функции Грина и волновые функции уравнения Дирака

2. Квазиклассические функции Грина и волновые функции уравнения Дирака

Так же как и в случае уравнения свободного движения, пропагатор частицы во внешнем поле совпадает с функцией Грина соответствующего волнового уравнения. Поскольку во внешнем поле, зависящем от координаты, импульс не сохраняется, выделенная роль импульсного представления исчезает, и все вычисления, как правило, проводятся в координатном представлении. Функцию Грина уравнения Дирака в потенциале $V(r)$ можно представить в виде

$$G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = (\hat{\mathcal{P}} + m) D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon), \quad (1)$$

$$D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = \left\langle \mathbf{r}_2 \left| \frac{1}{\hat{\mathcal{P}}^2 - m^2 + i0} \right| \mathbf{r}_1 \right\rangle,$$

где m — масса электрона, $\hat{\mathcal{P}} = \gamma^\nu \mathcal{P}_\nu$, $\mathcal{P}_\nu = (\varepsilon - V(r), i\mathbf{V})$, γ^ν — матрица Дирака, $D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ — функция Грина квадратированного уравнения Дирака. Так как функция $D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ содержит чётное число гамма-матриц, её можно записать в виде

$$D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = d_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{d}_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) + \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{d}_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) + \gamma^5 d_3(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon), \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}^5 \boldsymbol{\gamma}$, $d_i(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ — некоторые функции. Для сферически-симметричного потенциала коэффициент $d_3(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ равен нулю, так как в силу сохранения чётности он должен быть псевдоскаляром, а из двух векторов, \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , псевдоскаляр построить нельзя. Если функция $D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ известна, то легко найти положительно-частотные $u_{\mathbf{p}}^\pm(\mathbf{r})$ и отрицательно-частотные $v_{\mathbf{p}}^\pm(\mathbf{r})$ решения уравнения Дирака, используя соотношения [25]

$$\begin{aligned} \frac{\exp(i\mathbf{p}r_1)}{4\pi r_1} u_{\mathbf{p}}^+(\mathbf{r}_2) &= - \lim_{r_1 \rightarrow \infty} D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon_p) u_{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p} = -p\mathbf{n}_1, \\ \frac{\exp(i\mathbf{p}r_2)}{4\pi r_2} \bar{u}_{\mathbf{p}}^-(\mathbf{r}_1) &= - \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \bar{u}_{\mathbf{p}} D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon_p), \quad \mathbf{p} = p\mathbf{n}_2, \\ \frac{\exp(i\mathbf{p}r_1)}{4\pi r_1} v_{\mathbf{p}}^+(\mathbf{r}_2) &= - \lim_{r_1 \rightarrow \infty} D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|-\varepsilon_p) v_{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p} = p\mathbf{n}_1, \\ \frac{\exp(i\mathbf{p}r_2)}{4\pi r_2} \bar{v}_{\mathbf{p}}^-(\mathbf{r}_1) &= - \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \bar{v}_{\mathbf{p}} D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|-\varepsilon_p), \quad \mathbf{p} = -p\mathbf{n}_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1/r_1$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{r}_2/r_2$, $\varepsilon_p = \sqrt{p^2 + m^2}$, $u_{\mathbf{p}}$ и $v_{\mathbf{p}}$ — положительно-частотные и отрицательно-частотные дираковские спиноры. Асимптотика решений $u_{\mathbf{p}}^\pm(\mathbf{r})$ и $v_{\mathbf{p}}^\pm(\mathbf{r})$ на больших расстояниях содержит плоскую волну

и расходящуюся сферическую волну, а асимптотика решений $u_{\mathbf{p}}^{-}(\mathbf{r})$ и $v_{\mathbf{p}}^{-}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях содержит плоскую волну и сходящуюся сферическую волну. Из (2) и (3) следует вид волновых функций:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\mathbf{p}}^{-}(\mathbf{r}) &= \bar{u}_{\mathbf{p}} [f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \alpha \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \Sigma \mathbf{f}_2(\mathbf{r}, \mathbf{p})], \\ u_{\mathbf{p}}^{+}(\mathbf{r}) &= [f_0(\mathbf{r}, -\mathbf{p}) - \alpha \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, -\mathbf{p}) + \Sigma \mathbf{f}_2(\mathbf{r}, -\mathbf{p})] u_{\mathbf{p}}, \\ v_{\mathbf{p}}^{+}(\mathbf{r}) &= [g_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \alpha \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \Sigma \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{p})] v_{\mathbf{p}}, \\ \bar{v}_{\mathbf{p}}^{-}(\mathbf{r}) &= \bar{v}_{\mathbf{p}} [g_0(\mathbf{r}, -\mathbf{p}) + \alpha \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, -\mathbf{p}) - \Sigma \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, -\mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты g_i отличаются от f_i заменой $V(r) \rightarrow -V(r)$.

Для произвольного локализованного потенциала $V(r)$ коэффициенты d_0 , \mathbf{d}_1 , f_0 и \mathbf{f}_1 вычислены в работе [18] в ведущем квазиклассическом приближении вместе с первыми квазиклассическими поправками к коэффициентам d_0 и f_0 . Первые квазиклассические поправки к коэффициентам \mathbf{d}_1 и \mathbf{f}_1 вычислены в работе [20] вместе с ведущим квазиклассическим вкладом в \mathbf{d}_2 и \mathbf{f}_2 . Заметим, что относительная величина коэффициентов f_0 , $\mathbf{f}_{1,2}$, d_0 и $\mathbf{d}_{1,2}$ различна:

$$f_0 \sim l_c f_1 \sim l_c^2 f_2, \quad d_0 \sim l_c d_1 \sim l_c^2 d_2. \quad (5)$$

Здесь $l_c \sim 1/\theta \gg 1$ — характерный угловой момент в процессе. Так как коэффициенты стоят при разных гамма-матричных структурах, ввиду сокращений в матричных элементах тормозного излучения и фоторождения необходимо для вычисления первой квазиклассической поправки к сечению учитывать первую квазиклассическую поправку к коэффициентам f_0 , \mathbf{f}_1 , d_0 и \mathbf{d}_1 , а коэффициенты \mathbf{f}_2 и \mathbf{d}_2 можно учитывать в ведущем квазиклассическом приближении.

Коэффициенты d_0 и \mathbf{d}_1 с учётом первой квазиклассической поправки имеют вид [18, 20]:

$$\begin{aligned} d_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) &= \frac{i \exp(i\kappa r)}{4\pi^2 r} \times \\ &\times \int d\mathbf{Q} \left(1 + \frac{ir^3}{2\kappa} \int_0^1 dx \int_0^x dy (x-y) \nabla_{\perp} V(\mathbf{R}_x) \nabla_{\perp} V(\mathbf{R}_y) \right) \mathcal{T}, \\ \mathbf{d}_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) &= -\frac{i}{2\varepsilon} (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) d_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) - \\ &- \frac{i \exp(i\kappa r)}{16\pi^2 \varepsilon^2} \int d\mathbf{Q} \int_0^1 dx \nabla V^2(\mathbf{R}_x) \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathcal{T} = \exp \left(iQ^2 - ir \int_0^1 dx V(\mathbf{R}_x) \right), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{r}_1 + x\mathbf{r} + \mathbf{Q} \sqrt{\frac{2r_1 r_2}{\kappa r}},$$

где $\kappa = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, \mathbf{Q} — двумерный вектор, перпендикулярный вектору \mathbf{r} , ∇_{\perp} — компонента градиента, перпендикулярная \mathbf{r} . В работе [20] также получен коэффициент \mathbf{d}_2 в главном приближении:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) &= -\frac{r \exp(i\kappa r)}{16\pi^2 \varepsilon^2} \times \\ &\times \int d\mathbf{Q} \int_0^1 dx \int_0^x dy [\nabla V(\mathbf{R}_x) \times \nabla V(\mathbf{R}_y)] \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для кулоновского поля формулы (6) и (7) согласуются с соответствующими формулами работы [26]. Если опу-

стить в векторе \mathbf{R}_x (6) вклад, пропорциональный вектору \mathbf{Q} , то интеграл по \mathbf{Q} в (6) и (7) становится тривиальным и мы получим функцию Грина, вычисленную в приближении эйконала [27]. В этой функции интегрирование по x соответствует интегрированию по прямой вдоль вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Учёт вклада, пропорционального вектору \mathbf{Q} , в \mathbf{R}_x соответствует учёту квантовых флуктуаций в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{r} .

Формулы для коэффициентов f_i следуют из уравнений (2)–(4), (6) и (7):

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= -\frac{i}{\pi} \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r}) \times \\ &\times \int d\mathbf{Q} \left(1 + \frac{i}{2\varepsilon_p} \int_0^{\infty} dx \int_0^x dy (x-y) \nabla_{\perp} V(\mathbf{r}_x) \nabla_{\perp} V(\mathbf{r}_y) \right) \mathcal{T}_1, \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2\varepsilon_p} (i\mathbf{V} - \mathbf{p}) f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \frac{i}{4\pi\varepsilon_p^2} \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r}) \times \\ &\times \int d\mathbf{Q} \int_0^{\infty} dx \nabla V^2(\mathbf{r}_x) \mathcal{T}_1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{\exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r})}{4\pi\varepsilon_p^2} \int d\mathbf{Q} \int_0^{\infty} dx \int_0^x dy [\nabla V(\mathbf{r}_x) \times \nabla V(\mathbf{r}_y)] \mathcal{T}_1,$$

$$\mathcal{T}_1 = \exp \left(iQ^2 - i \int_0^{\infty} dx V(\mathbf{r}_x) \right), \quad \mathbf{r}_x = \mathbf{r} + x\mathbf{n}_{\mathbf{p}} + \mathbf{Q} \sqrt{\frac{2r}{\varepsilon_p}},$$

где $\mathbf{Q}\mathbf{n}_{\mathbf{p}} = 0$, ∇_{\perp} — компонента градиента, перпендикулярная вектору $\mathbf{n}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$.

Приведённые в этом разделе формулы достаточны для вычисления сечений фоторождения и тормозного излучения в квазиклассическом приближении с учётом первой квазиклассической поправки.

3. Фоторождение e^+e^- -пары

Рождение e^+e^- -пары фотоном в атомном поле является одним из наиболее важных для различных приложений процессов квантовой электродинамики (КЭД) [28, 29]. Изучению этого процесса посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ. Сечение процесса в борновском приближении известно для произвольной энергии фотона ω [2, 3]. Формальное выражение для сечения, точное по параметру η и энергии ω , получено в работе [5]. Однако численные результаты с использованием этого выражения найдены только для $\omega < 12,5$ МэВ [6] из-за трудностей численных вычислений, быстро возрастающих с увеличением ω . С использованием волновых функций в приближении Фарри–Зоммерфельда–Мауэ [10, 11], которые в действительности являются волновыми функциями, вычисленными в главном квазиклассическом приближении, в работах [7, 8] получены простые выражения для кулоновских поправок в главном приближении по отношению $m/\omega \ll 1$. Однако эти результаты имеют хорошую точность только для очень высоких энергий, $\omega \gtrsim 100$ МэВ.

В течение длительного времени описание кулоновских поправок к полному сечению фоторождения при промежуточных энергиях фотона (5–100 МэВ) основывалось на выражении, приведённом в работе [30]. Это выражение является интерполяционной формулой между результатами, полученными при $\omega < 5$ МэВ, и высокоэнергетической асимптотикой. С использованием ква-

зиклассической функции Грина в работе [31] была найдена первая поправка по m/ω к спектру электронов и к полному сечению процесса в e^+e^- -фоторождении в сильном атомном поле. Поправка к спектру получена в области, в которой обе родившиеся частицы являются релятивистскими. Эта поправка оказалась антисимметричной по перестановке $\varepsilon_p \leftrightarrow \varepsilon_q$, где ε_p и ε_q — энергии электрона и позитрона соответственно. Поэтому поправка к полному сечению определяется областью энергий, близкой к краю спектра, где $\varepsilon_p \sim m$ или $\varepsilon_q \sim m$. В работе [31] поправка к полному сечению найдена с помощью дисперсионного соотношения для амплитуды дельбрюкского рассеяния вперёд. Учёт этой поправки привёл к согласию между теоретическим предсказанием и экспериментальными данными для промежуточной энергии фотона. Поправка к спектру при $\omega \gg m$ в случае $\varepsilon_p \sim m$ или $\varepsilon_q \sim m$ вычислена в работе [32]. Оказалось, что кулоновские поправки на краю спектра радикальным образом отличаются от кулоновских поправок в области $\varepsilon_p \gg m$ и $\varepsilon_q \gg m$. Интегрирование поправок к спектру, найденных в [32], подтвердило результат для поправок к полному сечению, найденных в [31] с помощью дисперсионного соотношения.

Для многих приложений важно, чтобы было известно с высокой точностью дифференциальное сечение фоторождения для энергий фотона $\omega \lesssim 100$ МэВ, для которых точность результатов, полученных в главном квазиклассическом приближении, не является достаточной. В работе [26] дифференциальное сечение фоторождения электрон-позитронных пар найдено точно по η с учётом первой квазиклассической поправки. В области $\omega \lesssim 100$ МэВ полученные в [26] результаты имеют гораздо более высокую точность, чем вычисленные в главном квазиклассическом приближении.

Для фоторождения e^+e^- -пары учёт экранирования поля ядра атомными электронами важен только для борновского вклада, а для кулоновских поправок такой учёт даёт малый эффект. Вместе с тем учёт отличия атомного поля от кулоновского на малых расстояниях (эффект конечного размера ядра) для фоторождения e^+e^- -пары вообще не важен. Для фоторождения $\mu^+\mu^-$ -пары важен учёт не только экранирования, но и конечного размера ядра. Вычисление дифференциального сечения фоторождения $\mu^+\mu^-$ -пары с учётом первой квазиклассической поправки недавно было проведено в работе [25].

3.1. Дифференциальное сечение фоторождения e^+e^- -пары

Дифференциальное сечение рождения e^+e^- -пары фотоном в атомном поле имеет вид [4]

$$d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) = \frac{\alpha}{(2\pi)^4 \omega} d\mathbf{p} d\mathbf{q} \delta(\omega - \varepsilon_p - \varepsilon_q) |M|^2, \quad (9)$$

$$M = \int d\mathbf{r} \bar{u}_p^-(\mathbf{r}) \gamma e v_q^+(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Здесь \mathbf{e} и \mathbf{k} — вектор поляризации и импульс фотона, \mathbf{p} и \mathbf{q} — импульсы электрона и позитрона.

Далее мы предполагаем, что в дифференциальном сечении $d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)$ проведены суммирование по поляризациям конечных частиц и усреднение по поляризации фотона. Это сечение можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной относительно пере-

становки импульсов \mathbf{p} и \mathbf{q} частей:

$$d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) = d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) + d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta),$$

$$d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) = \frac{d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) + d\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \eta)}{2}, \quad (10)$$

$$d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) = \frac{d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) - d\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \eta)}{2}.$$

Поскольку замена электрона позитроном соответствует изменению знака η , то $d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) = d\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}, -\eta)$, так что $d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)$ является чётной функцией η , а $d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)$ — нечётной функцией η . В ведущем квазиклассическом приближении дифференциальное сечение фоторождения найдено в работах [7, 8]. Полученное в этих работах сечение является чётной функцией η и даёт вклад только в $d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)$. Таким образом, имеем

$$d\sigma_s = \frac{2am^2 |\Gamma(1 - i\eta)|^4 d\varepsilon_p d\delta_p d\delta_q}{\pi^2 \omega^3 \Delta^4} \times$$

$$\times \left\{ [(1-u)(\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2) + 2\varepsilon_p \varepsilon_q (\xi_p - \xi_q)^2] \eta^2 \mathcal{F}^2 + \right.$$

$$\left. + [u(\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2) + 2\varepsilon_p \varepsilon_q (1 - \xi_p - \xi_q)^2] (1-u)^2 \mathcal{F}'^2 \right\},$$

$$\mathcal{F} = F(-i\eta, i\eta, 1, u), \quad \mathcal{F}' = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}, \quad u = 1 - \frac{\Delta^2}{m^2} \xi_p \xi_q, \quad (11)$$

$$\xi_p = \frac{1}{1 + \delta_p^2}, \quad \xi_q = \frac{1}{1 + \delta_q^2},$$

$$\delta_p = \frac{\mathbf{p}_\perp}{m}, \quad \delta_q = \frac{\mathbf{q}_\perp}{m}, \quad \Delta = \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k},$$

где $F(a, b, c, x)$ — гипергеометрическая функция, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, \mathbf{p}_\perp , \mathbf{q}_\perp и Δ_\perp — компоненты векторов \mathbf{p} , \mathbf{q} и Δ , перпендикулярные вектору \mathbf{k} .

Квазиклассическая поправка к сечению, найденная точно по η в работе [26], является нечётной функцией η и даёт вклад только в $d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)$, т.е. в зарядовую асимметрию в процессе фоторождения:

$$d\sigma_a = - \frac{am^2 \eta^2 |\Gamma(1 - i\eta)|^2 d\varepsilon_p d\delta_p d\delta_q}{2\pi^{3/2} \omega^3 \Delta^3} \times$$

$$\times \text{Im} \left[\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1 + \xi_p \lambda}{1 + \xi_q \lambda} \right)^{i\eta} \frac{\sqrt{\xi_p} \Gamma(1 - i\eta) \Gamma(1/2 + i\eta)}{\varepsilon_q \sqrt{1 + \xi_p \lambda}} \mathcal{M} + \right.$$

$$\left. + (\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}, \eta \rightarrow -\eta) \right],$$

$$\mathcal{M} = [(\xi_p - \xi_q) i\eta \mathcal{F} + (1 - \xi_p - \xi_q) (1 - u) \mathcal{F}'] \times$$

$$\times [4\varepsilon_p \varepsilon_q (\xi_p f_1 + \xi_q f_2 + f_3) + (\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2) (f_1 + f_2 + 2f_3)] +$$

$$+ (\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2) (1 - u) [(f_1 - f_2) i\eta \mathcal{F} - u(f_1 + f_2) \mathcal{F}'],$$

$$f_1 = \frac{(1/2 - i\eta) \mathcal{G} - (1 - z) \mathcal{G}'}{1 + \xi_p \lambda}, \quad f_2 = \frac{i\eta \mathcal{G} - (1 - z) \mathcal{G}'}{1 + \xi_q \lambda},$$

$$f_3 = \frac{(1 - z) \mathcal{G}'}{1 + \lambda}, \quad \mathcal{G} = F\left(\frac{1}{2} - i\eta, i\eta, 1, z\right), \quad \mathcal{G}' = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z},$$

$$z = 1 - \frac{\Delta^2 \xi_p \xi_q (1 + \lambda)}{m^2 (1 + \xi_p \lambda) (1 + \xi_q \lambda)}. \quad (12)$$

Как и должно быть, поправка $d\sigma_a$ инвариантна относительно замены $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}, \eta \rightarrow -\eta$. Так как i входит в

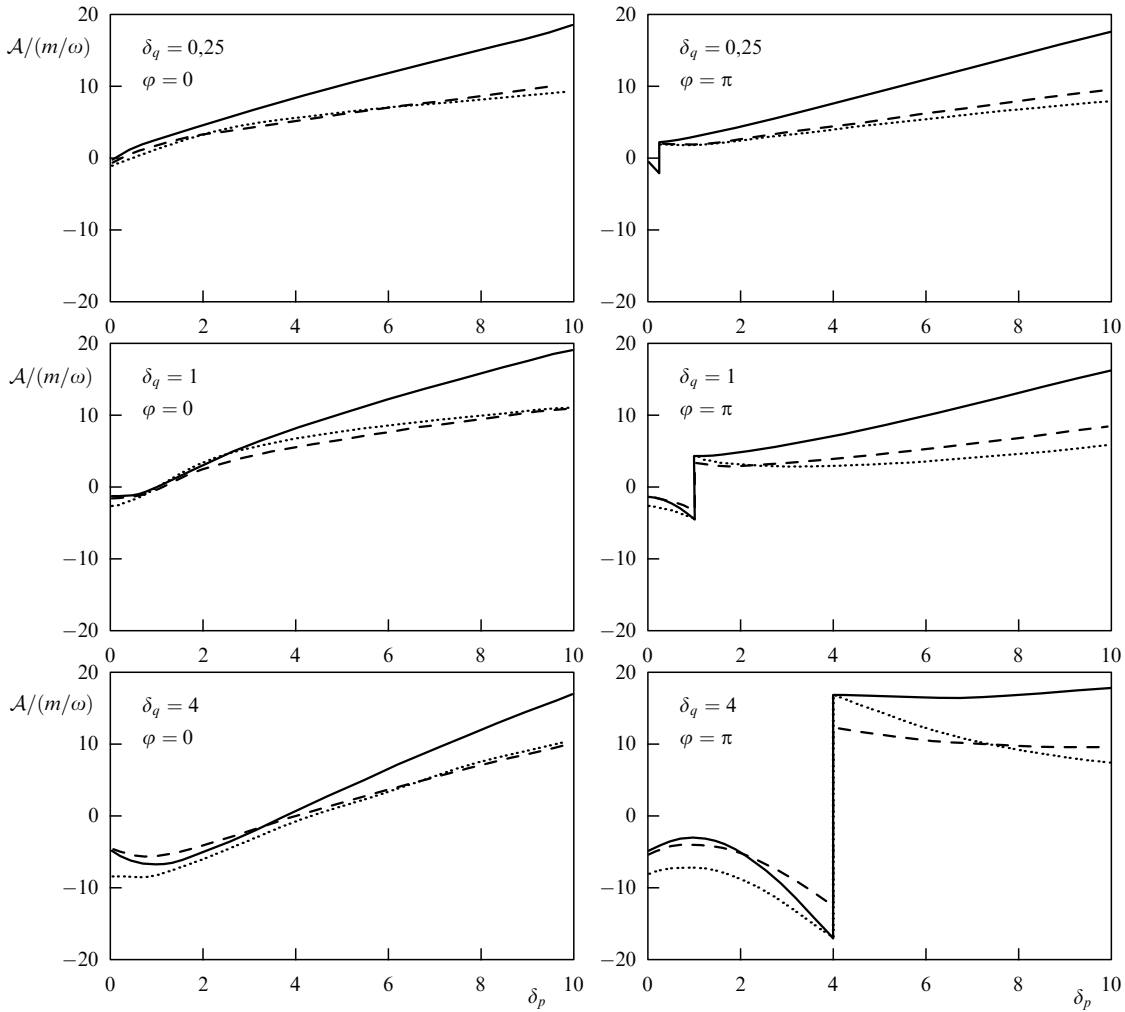


Рис. 1. Зависимость \mathcal{A} (в единицах m/ω) от δ_p для нескольких значений δ_q , φ и $x = \varepsilon_p/\omega$: $x = 0,25$ (сплошная кривая), $x = 0,5$ (штриховая кривая) и $x = 0,75$ (пунктирная кривая), $\eta = 0,54$ (вольфрам).

выражение для $d\sigma_a$ только в комбинации $i\eta$, становится очевидной антисимметрия поправки $d\sigma_a$ относительно замены $\eta \rightarrow -\eta$, а также относительно замены $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$.

Для учёта экранирования достаточно умножить $d\sigma_s$ (11) на $|F(\Delta^2)|^2$, где $F(\Delta^2)$ — атомный формфактор. Это связано с тем, что кулоновские поправки существенны только в области $\Delta \gtrsim m$, где $F(\Delta^2) \approx 1$. Следовательно, атомный формфактор влияет только на величину борновского сечения при малых $\Delta \sim r_{\text{scr}}^{-1} \ll m$, где r_{scr} — радиус экранирования, $r_{\text{scr}} \sim Z^{-1/3}/(m\alpha)$. Разложение $d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)$ по η начинается с членов, пропорциональных η^3 , т.е. величина $d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)$ целиком определяется кулоновскими поправками и является нечувствительной к экранированию. Поэтому формула для $d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)$, полученная для случая кулоновского поля, справедлива и для атомного поля.

Зарядовая асимметрия \mathcal{A} в дифференциальном сечении фоторождения определяется отношением

$$\mathcal{A} = \frac{d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)}{d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)}. \quad (13)$$

Вне очень узкой области, $\Delta_{\perp} \lesssim |\Delta_{\parallel}| = |\mathbf{k}\Delta|/\omega \sim m^2/\omega$, можно сделать замену $\Delta^2 \rightarrow \Delta_{\perp}^2 = m^2(\delta_p + \delta_q)^2$. Поэтому, как видно из уравнений (11) и (12), при фиксирован-

ных значениях δ_p , δ_q и $x = \varepsilon_p/\omega$ асимметрия \mathcal{A} обратно пропорциональна ω . На рисунке 1 показана зависимость \mathcal{A} от δ_p для вольфрама ($\eta = 0,54$) при нескольких значениях δ_q и φ , где φ — угол между векторами δ_p и δ_q . Видно, что зарядовая асимметрия может быть достаточно большой ($\mathcal{A} \sim 20-30\%$ для $\omega/m = 50$). Асимметрия увеличивается, когда δ_p и (или) δ_q являются большими по сравнению с единицей.

Для $\varphi = \pi$ наблюдается скачок в асимметрии \mathcal{A} в точке $\delta_p = \delta_q$, где $|\Delta_{\perp}| = 0$. В этой точке \mathcal{A} меняет знак. Заметим, что экранирование в \mathcal{A} необходимо учитывать только в очень узкой области, $|\Delta_{\perp}| \lesssim r_{\text{scr}}^{-1}$.

Важность вкладов высших порядков по η в асимметрию иллюстрируется рис. 2, на котором показана зависимость \mathcal{A} от $\eta = Z\alpha$ при $\delta_p = 2$, $\delta_q = 4$ и нескольких значениях $x = \varepsilon_p/\omega$ и φ . Штриховая кривая получена в главном по η приближении (линейном по η). Видно, что зависимость \mathcal{A} от η является весьма сильной уже при промежуточных значениях η .

Обсудим сечение фоторождения, проинтегрированное по углам вылета позитрона (по δ_q). Прямое интегрирование формулы (12) довольно затруднительно. Однако мы можем использовать тот факт, что для такого проинтегрированного сечения справедлив пересчёт из соответствующего сечения для тормозного излучения. Ис-

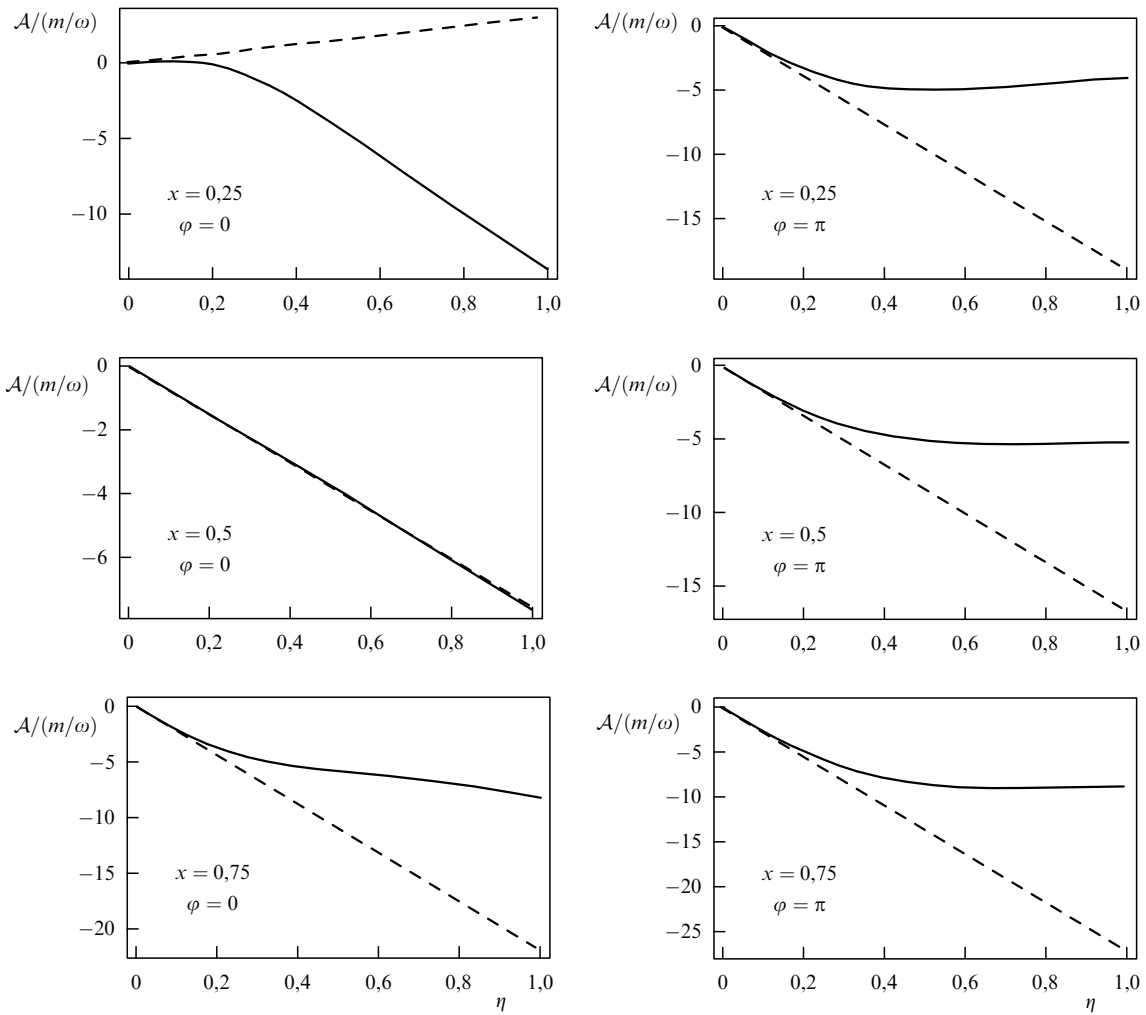


Рис. 2. Зависимость \mathcal{A} (в единицах m/ω) от $\eta = Z\alpha$ для $\delta_p = 2, \delta_q = 4$ и нескольких значений x и φ . Сплошная кривая — точный по η результат. Штриховая кривая получена в основном по η приближении (линейном по η).

пользуя формулу (56) из раздела 4, получаем

$$\frac{d\sigma_s}{d\mathbf{p}} = \frac{4\alpha\eta^2 \xi_p^2}{\pi m^4 \omega^3} \left\{ (\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2)L + \varepsilon_p \varepsilon_q \left[1 + 4\xi_p(1 - \xi_p) \left(L - \frac{3}{2} \right) \right] \right\},$$

$$\frac{d\sigma_a}{d\mathbf{p}} = \frac{\pi\alpha\eta^2 \operatorname{Re} g(\eta)}{m^3 \omega^3 \varepsilon_p \varepsilon_q} \left\{ \xi_p [\varepsilon_q(\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2 + 2\varepsilon_p \omega \xi_p) F_1 - \xi_p(\varepsilon_p^2 \omega + \varepsilon_q^3 + 4\varepsilon_p \varepsilon_q \omega \xi_p) F_2] \right\},$$

$$L = \ln \left(\frac{2\varepsilon_p \varepsilon_q}{m\omega} \right) - \frac{1}{2} - f(\eta), \tag{14}$$

$$F_1 = F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\delta_p^2 \right) = \frac{2}{\pi} K(-\delta_p^2),$$

$$F_2 = F \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\delta_p^2 \right) = \frac{2}{\pi} E(-\delta_p^2),$$

где K и E — эллиптические функции. Функции f и g в (14) выражаются через гамма-функцию Эйлера $\Gamma(t)$ и её логарифмическую производную $\psi(t) = d \ln \Gamma(t)/dt$:

$$f(\eta) = \operatorname{Re} [\psi(1 + i\eta) - \psi(1)], \tag{15}$$

$$g(\eta) = \eta \frac{\Gamma(1 - i\eta) \Gamma(1/2 + i\eta)}{\Gamma(1 + i\eta) \Gamma(1/2 - i\eta)}.$$

Выражение (14) справедливо для случая кулоновского поля. Влияние экранирования на борновский вклад хорошо изучено, и оно сводится к изменению аргумента логарифма и константы в L (см. [12]). Что касается кулоновских поправок, то влиянием на них экранирования можно пренебречь.

Определим зарядовую асимметрию \mathcal{A}_1 формулой

$$\mathcal{A}_1 = \frac{d\sigma_a/d\mathbf{p}}{d\sigma_s/d\mathbf{p}}. \tag{16}$$

На рисунке 3 показана зависимость \mathcal{A}_1 от δ_p при $\eta = 0,54$ (вольфрам), $\omega/m = 50$ и нескольких значениях x . Зависимость \mathcal{A}_1 от ω , в отличие от $\mathcal{A}(\omega)$, не сводится к множителю m/ω из-за логарифмической зависимости $d\sigma_s(\mathbf{p}, \eta)$ от ω . Видно, что асимметрия \mathcal{A}_1 является заметной, хотя и гораздо меньшей, чем асимметрия \mathcal{A} .

3.2. Дифференциальное сечение фоторождения $\mu^+ \mu^-$ -пары

Фоторождение пары $\mu^+ \mu^-$ на тяжёлых атомах также является важным процессом КЭД. Вычисление сечения фоторождения для мюонов, в отличие от вычисления сечения для $e^+ e^-$ -пары, требует учёта конечности размера ядра R (отличие поля ядра от кулоновского на

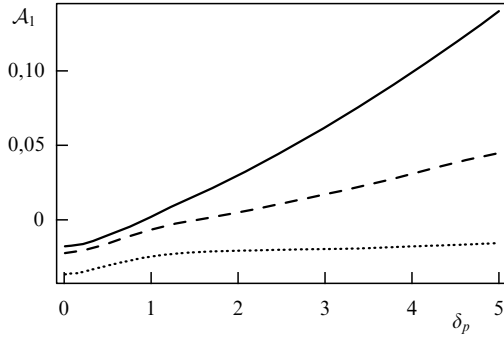


Рис. 3. Зависимость A_1 от δ_p для $x = 0,25$ (сплошная кривая), $x = 0,5$ (штриховая кривая) и $x = 0,75$ (пунктирная кривая); $\eta = 0,54$ (вольфрам), $\omega/m = 50$.

расстояниях $r < R$). Борновское сечение пропорционально квадрату ядерного формфактора $F_n(\Delta^2)$ и чувствительно к виду этого формфактора, так как для тяжёлых ядер комптоновская длина волны мюона $\lambda_\mu = 1/m_\mu = 1,87$ фм (m_μ — масса мюона) меньше радиуса ядра ($R = 7,3$ фм для золота и $R = 7,2$ фм для свинца). Кулоновские поправки для полного сечения фоторождения мюонной пары обсуждались в работах [33–35]. В отличие от главного вклада полного борновского сечения, который определяется прицельными параметрами ρ в области $R \ll \rho \ll \omega^2/m$, главный вклад в кулоновские поправки к полному сечению определяется областью прицельных параметров $\rho \sim \lambda_\mu \lesssim R$. В результате кулоновские поправки к полному сечению сильно подавлены ядерным формфактором. В течение длительного времени считалось, что это утверждение справедливо для всех величин, связанных с кулоновскими поправками. Однако изучение в недавней работе [25] зарядовой асимметрии в дифференциальном сечении фоторождения $\mu^+\mu^-$ -пары при $\omega \gg m_\mu$ показало, что это не так.

Для передачи импульса $\Delta_\perp \gtrsim 1/R$ учёт формфактора приводит к сильному подавлению сечения, здесь $\Delta = \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}$, \mathbf{p} — импульс μ^- , \mathbf{q} — импульс μ^+ . Поэтому зарядовая асимметрия является заметной в области $\Delta_\perp \lesssim 1/R$, но при $p_\perp \sim q_\perp \sim m \gg \Delta_\perp$, так что $|\mathbf{p}_\perp + \mathbf{q}_\perp| \ll |\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp|$. Как показано в работе [26], в этой области в разложении кулоновских поправок по η остаётся только вклад, пропорциональный η^3 , даже при $\eta \sim 1$. Вклад в сечение $d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta)$, пропорциональный η^3 , в области $|\mathbf{p}_\perp + \mathbf{q}_\perp| \ll |\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp|$ с учётом ядерного формфактора вычислен в работе [25]. Этот вклад определяет зарядовую асимметрию $\mathcal{A} \propto \eta$. Показано, что в этой области обе величины, \mathcal{A} и $d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \eta) \propto \eta^2$, достаточно велики для того, чтобы их можно было наблюдать экспериментально. Заметим, что для $p_\perp \gg m$ и $q_\perp \gg m$ сечение $d\sigma_a$ исследовалось в работе [36] для фоторождения пары скалярных частиц.

Для фоторождения пары $\mu^+\mu^-$ ведущий по η вклад в сечение $d\sigma_s$ имеет вид [4]

$$d\sigma_s = \frac{2\alpha m^2 d\varepsilon_p d\delta_p d\delta_q}{(2\pi)^4 \omega^3} V_F^2(\Delta^2) \times \left[\frac{\Delta^2}{m^2} \xi_p \xi_q (\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2) + 2\varepsilon_p \varepsilon_q (\xi_p - \xi_q)^2 \right], \quad (17)$$

где $V_F(\Delta^2) = -4\pi\eta F_n(\Delta^2)/\Delta^2$, $F_n(\Delta^2)$ — ядерный формфактор, который заметно отличается от единицы при $\Delta \gtrsim 1/R$, остальные обозначения введены в (11). Для антисимметричной части сечения в работе [36] получен следующий результат:

$$d\sigma_a = \frac{\alpha m^2 d\varepsilon_p d\delta_p d\delta_q}{(2\pi)^4 \omega^3} \left\{ (\xi_p - \xi_q) \left[4(\varepsilon_p \xi_p + \varepsilon_q \xi_q) + \frac{\omega(\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2)}{\varepsilon_p \varepsilon_q} \right] + (\varepsilon_p - \varepsilon_q) \frac{\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2}{\varepsilon_p \varepsilon_q} \frac{\Delta^2}{m^2} \xi_p \xi_q \right\} V_F(\Delta^2) J(\Delta), \quad (18)$$

где

$$J(\Delta) = \int \frac{d\mathbf{s}}{(2\pi)^3} [V_F(Q_+) V_F(Q_-) + (\Delta^2 - 4s_\parallel^2) V_F(Q_+) V_F'(Q_-)], \quad (19)$$

$$Q_\pm = \left(\mathbf{s} \pm \frac{\Delta}{2} \right)^2, \quad s_\parallel = \mathbf{s} \cdot \frac{\Delta}{\Delta}, \quad V_F'(Q) = \frac{\partial V_F(Q)}{\partial Q}. \quad (20)$$

Для кулоновского поля $J(\Delta) = 2\pi^2 \eta^2 / \Delta$. В формуле для зарядовой асимметрии $\mathcal{A} = d\sigma_a / d\sigma_s$ вся зависимость от заряда ядра содержится в отношении $J(\Delta) / V_F(\Delta^2)$. Ядерный формфактор достаточно хорошо аппроксимируется функцией

$$F_n(\Delta^2) = \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + \Lambda^2}, \quad (21)$$

где $\Lambda \sim 60$ МэВ для тяжёлых ядер. В этом случае функция $\mathcal{F}(\Delta) = -2J(\Delta) / (\pi\eta\Delta V_F(\Delta^2))$ имеет простой вид:

$$\mathcal{F}(\Delta) = \left(1 + \frac{\Delta^2}{\Lambda^2} \right) \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\Delta}{2\Lambda} \right) - \frac{4}{\pi} \arctan \left(\frac{\Delta}{\Lambda} \right) \right] - \frac{12\Delta\Lambda}{\pi(\Delta^2 + 4\Lambda^2)}. \quad (22)$$

При $\Delta \ll \Lambda$ имеем асимптотику $\mathcal{F}(\Delta) \approx 1 - 6\Delta / (\pi\Lambda)$, так что функция $\mathcal{F}(\Delta)$ быстро убывает с возрастанием Δ . На рисунке 4 показана зависимость $\mathcal{F}(\Delta)$ от Δ для свинца ($Z = 82$).

Для $\Delta \ll |\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp|$ формула (18) упрощается:

$$d\sigma_a = \frac{\alpha m^2 d\varepsilon_p d\delta_p d\delta_q}{(2\pi)^4 \omega^2} (\xi_p - \xi_q) \times \left[2(\xi_p + \xi_q) + \frac{\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2}{\varepsilon_p \varepsilon_q} \right] V_F(\Delta^2) J(\Delta). \quad (23)$$

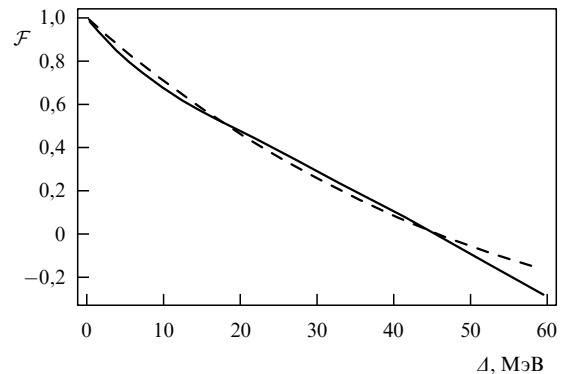


Рис. 4. Зависимость функции $\mathcal{F}(\Delta)$ от Δ для свинца ($Z = 82$). Сплошная кривая соответствует реальному распределению заряда, штриховая кривая соответствует формуле (22) с $\Lambda = 60$ МэВ.

В результате для асимметрии получаем

$$A = \frac{\pi\eta\omega\kappa(\xi_p + \xi_q + B)}{4\varepsilon_p\varepsilon_q(B + \kappa^2\xi_p\xi_q)} \mathcal{F}(A), \quad (24)$$

$$B = \frac{\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2}{2\varepsilon_p\varepsilon_q}, \quad \kappa = \frac{m(\xi_q - \xi_p)}{A\xi_p\xi_q}.$$

Для того чтобы выяснить характерную величину асимметрии A , рассмотрим область, интересную с экспериментальной точки зрения: $|\phi| \ll |\varepsilon_p - \varepsilon_q|/\omega \ll 1$ и $|\theta_p - \theta_q|/|\theta_p + \theta_q| \ll |\varepsilon_p - \varepsilon_q|/\omega$, где ϕ — угол между векторами \mathbf{p}_\perp и $-\mathbf{q}_\perp$. В этой области

$$A = \frac{\pi\eta\theta(1 + 2\xi)}{(1 + 4\xi^2\delta^2)} \mathcal{F}(\theta|\varepsilon_p - \varepsilon_q|) \operatorname{sgn}(\varepsilon_p - \varepsilon_q), \quad (25)$$

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_p + \theta_q), \quad \delta = \frac{\omega\theta}{2m}, \quad \xi = \frac{1}{1 + \delta^2},$$

и вся зависимость от $\varepsilon_p - \varepsilon_q$ содержится в функции \mathcal{F} . Так как уравнение (24) справедливо для всех $\eta \lesssim 1$, множитель перед \mathcal{F} в (25) может легко превысить 10 %.

3.3. Спектр электронов

в процессе фоторождения e^+e^- -пар

Для того чтобы найти спектр процесса фоторождения в области $\varepsilon_{p,q} \gg m$, достаточно проинтегрировать по углам электрона выражения для $d\sigma_s$ и $d\sigma_a$ из (14). Результат имеет вид

$$\frac{d\sigma_s}{dx} = 4\sigma_0 \left[1 - \frac{4}{3}x(1-x) \right] L, \quad (26)$$

$$\frac{d\sigma_a}{dx} = \frac{\sigma_0\pi^3(1-2x)m}{2x(1-x)\omega} \left[1 - \frac{3}{2}x(1-x) \right] \operatorname{Re} g(\eta),$$

где L и $g(\eta)$ определены в (14) и (15) соответственно, $x = \varepsilon_p/\omega$ — доля энергии электрона, $\sigma_0 = \alpha\eta^2/m^2$. Сумма $d\sigma_s/dx + d\sigma_a/dx$ является спектром процесса фоторождения, вычисленным в квазиклассическом подходе с учётом первой квазиклассической поправки. Чтобы получить выражение для кулоновских поправок к спектру, $d\sigma_C/dx$, достаточно в $d\sigma_s/dx$ заменить L функцией $-f(\eta)$, а $d\sigma_a/dx$ оставить без изменений. Как и (14), формула (26) верна для кулоновского поля, однако влияние экранирования существенно только в борновском вкладе. Влияние экранирования на кулоновские поправки сводится к малому по параметру $1/(m r_{\text{scr}})$ вкладу [8]. Количественное рассмотрение влияния экранирования на кулоновские поправки проведено в работе [26]. Заметим, что кулоновские поправки к спектру были найдены в работе [31] ещё до вычисления дифференциального и проинтегрированного по одной частице сечений. Вклад $d\sigma_a/dx$ увеличивает вероятность рождения электронов при $x < 1/2$ и уменьшает при $x > 1/2$. Очевидно, что для позитронов ситуация противоположная. Такое свойство спектра имеет место для любых ω и наиболее ярко проявляется при низких энергиях фотона, $\omega > 2m$ [5]. Для промежуточных ω спектр (26) существенно отличается от спектра, вычисленного в главном квазиклассическом приближении. Это утверждение иллюстрирует рис. 5, на котором показаны $\sigma_0^{-1}d\sigma_C/dx$ с поправкой (сплошная кривая) и без поправки (штриховая кривая) для свинца ($Z = 82$) при $\omega = 50$ МэВ.

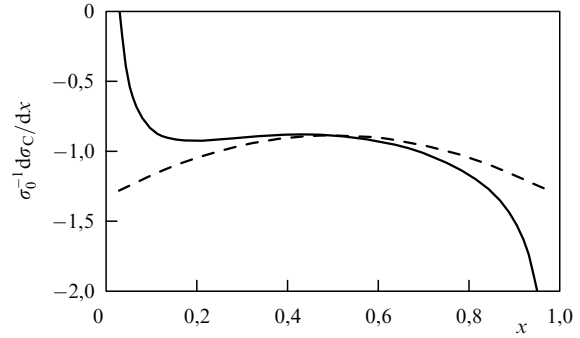


Рис. 5. Зависимость $\sigma_0^{-1}d\sigma_C/dx$ от x (26) для свинца ($Z = 82$) при $\omega = 50$ МэВ. Штриховая кривая — главный вклад, сплошная кривая — вклад с учётом первой квазиклассической поправки.

3.4. Кулоновские поправки к полному сечению фоторождения

Кулоновская поправка к полному сечению фоторождения в кулоновском поле вычислена в главном квазиклассическом приближении в работе [8]:

$$\sigma_C^{(0)} = -\frac{28}{9} \sigma_0 f(\eta). \quad (27)$$

В работе [26] показано, что изменение вследствие экранирования кулоновских поправок к полному сечению хорошо аппроксимируется формулой

$$\sigma_C^{\text{scr}} \approx -5,4 \times 10^{-4} Z \sigma_C^{(0)}. \quad (28)$$

Из-за антисимметрии $d\sigma_C^{(1)}/dx$ при $\varepsilon_{p,q} \gg m$ вклад $\sigma_C^{(1)}$ в полное сечение может давать только область энергий $\varepsilon_p \sim m$ или $\varepsilon_q = \omega - \varepsilon_p \sim m$. Квазиклассическое приближение в этих областях неприменимо и для вычисления спектра необходимо использовать другой подход (см. раздел 3.5).

Тем не менее поправку к полному сечению можно вычислить, используя только квазиклассическое приближение. Для этого в работе [31] была применена оптическая теорема, которая связывает мнимую часть амплитуды дельбрюкковского рассеяния M_D вперёд (рассеяние фотона в атомном поле через рождение и последующую аннигиляцию виртуальной электрон-позитронной пары [21]) и сумму сечений фоторождения с электроном в непрерывном спектре σ_{coh} и связанном состоянии σ_{bf} :

$$\frac{1}{\omega} \operatorname{Im} M_D = \sigma_{\text{coh}} + \sigma_{\text{bf}}. \quad (29)$$

В действительности благодаря принципу Паули при рождении e^+e^- -пары фотоном на нейтральном атоме рождения электрона в связанном состоянии не происходит. Тем не менее слагаемое σ_{bf} должно быть учтено в правой части уравнения (29). Полное сечение σ_{bf} в кулоновском поле найдено в работе [37] для $\omega \gg m$. В этом пределе сечение σ_{bf} обратно пропорционально ω и оно должно быть учтено при использовании соотношения (29) для вычисления поправок к σ_{coh} . Главный вклад в σ_{bf} при $\omega \gg m$ даётся электронами в низколежащих связанных состояниях, для которых экранированием можно пренебречь. Поэтому в (29) можно использовать полученное в [37] сечение σ_{bf} , которое может быть

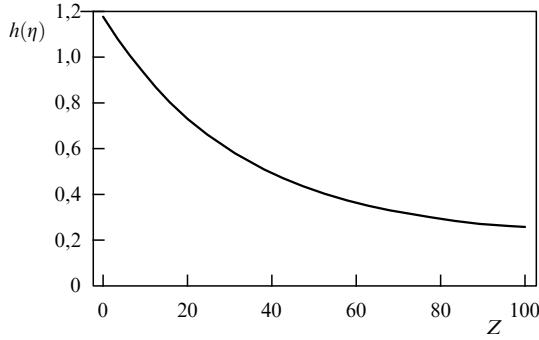


Рис. 6. Зависимость функции $h(\eta)$ от Z , $\eta = Z\alpha$.

представлено в виде [37]

$$\sigma_{\text{bf}} = 4\pi\sigma_0\eta^3 h(\eta) \frac{m}{\omega}, \quad (30)$$

функция $h(\eta)$ показана на рис. 6.

Ведущий квазиклассический вклад в кулоновские поправки к амплитуде дельбрюкковского рассеяния вперёд следует из (27) и (29):

$$M_{\text{DC}}^{(0)} = -i \frac{28}{9} \omega\sigma_0 f(\eta). \quad (31)$$

Действительная часть первой по m/ω поправки $M_{\text{DC}}^{(1)}$ также может быть вычислена в рамках квазиклассического подхода [31]:

$$\text{Re } M_{\text{DC}}^{(1)} = \frac{\alpha\eta^2\pi^3 \text{Im } g(\eta)}{m} \ln \frac{\omega}{m}. \quad (32)$$

Большое значение логарифма $\ln(\omega/m)$ возникает вследствие интегрирования по энергии ε виртуального электрона в области $\delta < \varepsilon < \omega - \delta$, где $\omega \gg \delta \gg m$. Именно с этим связана возможность использования квазиклассического приближения для вычисления $\text{Re } M_{\text{DC}}^{(1)}$. Мнимая часть $M_{\text{DC}}^{(1)}$ не содержит $\ln(\omega/m)$ и определяется областями интегрирования $\varepsilon \sim m$ и $\omega - \varepsilon \sim m$, в которых квазиклассическое приближение неприменимо. Тем не менее величина $\text{Im } M_{\text{DC}}^{(1)}$, которая связана с $\sigma_{\text{C}}^{(1)}$ (29), может быть получена из дисперсионного уравнения для M_{D} [38]

$$\text{Re } M_{\text{D}}(\omega) = \frac{2}{\pi} \omega^2 \text{P} \int_0^\infty \frac{\text{Im } M_{\text{D}}(\omega') d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}, \quad (33)$$

где P обозначает интегрирование в смысле главного значения. Из этого уравнения следует, что высокоэнергетическая асимптотика $\text{Re } M_{\text{DC}}^{(1)}$ (32) однозначно связана с высокоэнергетической асимптотикой $\text{Im } M_{\text{DC}}^{(1)}$:

$$\text{Im } M_{\text{DC}}^{(1)} = -\frac{\alpha\eta^2\pi^4 \text{Im } g(\eta)}{2m}. \quad (34)$$

В результате из оптической теоремы (29) следует выражение для поправки $\sigma_{\text{C}}^{(1)}$

$$\sigma_{\text{C}}^{(1)} = \sigma_0 \left(-\frac{\pi^4}{2} \text{Im } g(\eta) - 4\pi\eta^3 h(\eta) \right) \frac{m}{\omega}. \quad (35)$$

Величина $(\omega/m)\sigma_{\text{C}}^{(1)}/\sigma_{\text{C}}^{(0)}$ показана на рис. 7 (сплошная кривая). Видно, что это отношение велико для любых Z . Поэтому $\sigma_{\text{C}}^{(1)}$ даёт значительный вклад в кулоновские поправки σ_{C} к полному сечению фоторождения при промежуточных энергиях фотона. Штриховая кривая на рис. 7 соответствует этому же отношению без учёта σ_{bf} в

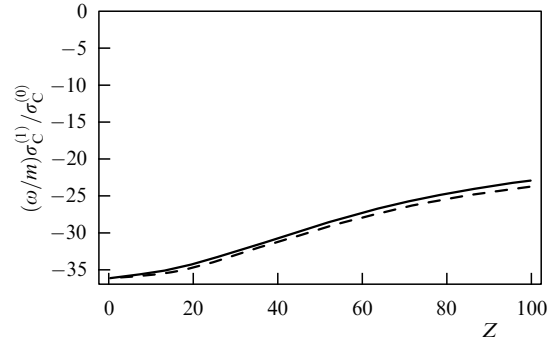


Рис. 7. Отношение $(\omega/m)\sigma_{\text{C}}^{(1)}/\sigma_{\text{C}}^{(0)}$ как функция Z (сплошная кривая). Штриховая кривая соответствует тому же отношению, вычисленному без учёта рождения электрона в связанном состоянии.

уравнении (35). Видно, что относительный вклад слагаемого в (35), пропорционального $h(\eta)$, численно мал.

Из аргументов, приведённых в работе [8], следует, что кулоновские поправки σ_{C} к полному сечению фоторождения в кулоновском поле можно представить в виде разложения

$$\sigma_{\text{C}} = \sigma_{\text{C}}^{(0)} + \sigma_{\text{C}}^{(1)} + \sigma_{\text{C}}^{(2)} + \dots \quad (36)$$

Слагаемое $\sigma_{\text{C}}^{(n)}$ имеет вид $(m/\omega)^n L^{(n)}(\ln(\omega/m))$, где $L^{(n)}(x)$ — некоторый полином. Независимое от ω слагаемое $\sigma_{\text{C}}^{(0)}$ соответствует результату [8]. Как следует из выражения (35) для $\sigma_{\text{C}}^{(1)}$, коэффициент $L^{(1)}$ не зависит от ω , а это противоречит предположению в работе [30] о том, что $L^{(1)}(x)$ — полином второй степени. Наиболее точные экспериментальные данные для сечения фоторождения получены для промежуточных значений энергии фотона [39–41]. В этой области поправка $\sigma_{\text{C}}^{(1)}$ велика (см. рис. 7) и следующая поправка $\sigma_{\text{C}}^{(2)}$ в разложении (36) также может быть существенной. Для этой поправки в работе [31] использовалась параметризация

$$\sigma_{\text{C}}^{(2)} = \sigma_0 \left(b \ln \frac{\omega}{2m} + c \right) \left(\frac{m}{\omega} \right)^2, \quad (37)$$

где b и c — некоторые функции η . Экспериментальные данные для σ_{coh} хорошо описываются формулой

$$\sigma_{\text{coh}} = \sigma_{\text{B}} + \sigma_{\text{C}}^{(0)} + \sigma_{\text{C}}^{\text{scr}} + \sigma_{\text{C}}^{(1)} + \sigma_{\text{C}}^{(2)}, \quad (38)$$

где σ_{B} — борновское сечение [4], $\sigma_{\text{C}}^{(0)}$, $\sigma_{\text{C}}^{\text{scr}}$ и $\sigma_{\text{C}}^{(1)}$ даны формулами (27), (28) и (35); $\sigma_{\text{C}}^{(2)}$ определено в (37) с $b = 3,78 (\omega/m)\sigma_0^{-1}\sigma_{\text{C}}^{(1)}$ и $c = 0$.

На рисунке 8 показано отношение $S = (\sigma_{\text{coh}} - \sigma_{\text{B}})/\sigma_{\text{C}}^{(0)}$, которое является кулоновской поправкой в единицах $\sigma_{\text{C}}^{(0)}$ (27).

Результаты работы [31] показаны сплошной кривой, предсказание работы [30] представлено штриховой кривой. Экспериментальные данные для S взяты из работы [39] для висмута и работ [40, 41] для свинца. Видно, что результаты [31] находятся в прекрасном согласии с данными экспериментов. Разница между результатами [30] и [31] мала при относительно малых энергиях и становится заметной с увеличением энергии. Эта разница стремится к константе $\sigma_{\text{C}}^{\text{scr}}/\sigma_{\text{C}}^{(0)}$ при $\omega \rightarrow \infty$, т.е. связана с тем, что в работе [30] влияние экранирования на кулоновские поправки не учитывалось.

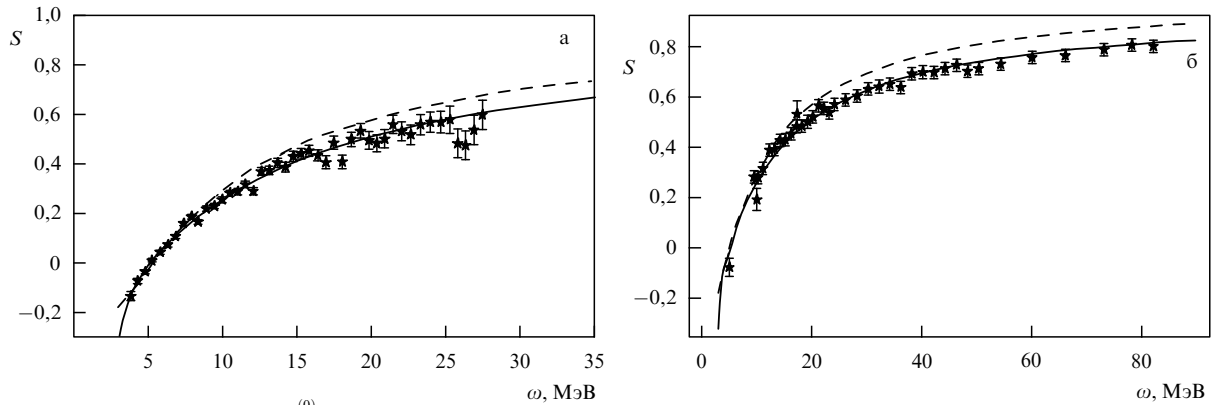


Рис. 8. Зависимость $S = (\sigma_{\text{coh}} - \sigma_{\text{B}})/\sigma_{\text{C}}^{(0)}$ от ω : (а) $Z = 83$ (висмут), (б) $Z = 82$ (свинец). Сплошная кривая — результат работы [31], штриховая кривая — результат работы [30]. Экспериментальные данные взяты из работы [39] для висмута и из работ [40, 41] для свинца.

3.5. Фоторождение e^+e^- -пары при $\varepsilon_p \sim m$ или $\varepsilon_q \sim m$

Сечение фоторождения в конце спектра ($\varepsilon_p \sim m$ или $\varepsilon_q \sim m$) изучалось в работах [32, 42]. В работе [42] изучалось распределение по углам θ между импульсом позитрона \mathbf{q} и импульсом фотона \mathbf{k} для энергий электрона ε_p , много меньших энергии позитрона ε_q , так что электрон не обязан быть ультрарелятивистским. Кроме того, предполагалось выполнение условия $\sqrt{\varepsilon_p/\omega} \gg \theta \gg \varepsilon_p/\omega$, что означает большой поперечный импульс позитрона $\Delta = \varepsilon_q \theta \gg \varepsilon_p$, но малый угол θ . В этой области борновское сечение, проинтегрированное по углам вылета электрона, имеет вид [4]

$$\frac{d\sigma_{\text{B}}}{d\mathbf{q}} = \frac{2\alpha\eta^2}{\pi\omega\Delta^4} \ln\left(\frac{1+\beta_p}{1-\beta_p}\right), \quad \beta_p = \frac{p}{\varepsilon_p}. \quad (39)$$

Сечение $d\sigma_{\text{B}}/d\mathbf{q}$ стремится к нулю при $\beta_p \rightarrow 0$, однако точное по η сечение не равно нулю в этом пределе:

$$\frac{d\sigma}{d\mathbf{q}} = \frac{4\alpha}{\omega\Delta^4} \exp(-\pi\eta) \sum_{l=1}^{\infty} l^3 (2\eta)^{2\gamma+1} \frac{|\Gamma(\gamma - i\eta)|^2}{\Gamma^2(2\gamma + 1)} \times \\ \times (|\mathcal{G}_1|^2 + 2\eta^2 |\mathcal{G}_2|^2 - 2\eta \text{Im}(\mathcal{G}_1^* \mathcal{G}_2)), \quad (40)$$

$$\mathcal{G}_1 = F(\gamma - i\eta, 2\gamma + 1, 2i\eta), \quad \mathcal{G}_2 = \frac{F(\gamma + 1 - i\eta, 2\gamma + 2, 2i\eta)}{2\gamma + 1},$$

где $\gamma = \sqrt{l^2 - \eta^2}$. При $\eta \ll 1$ формула (40) имеет асимптотику

$$\frac{d\sigma}{d\mathbf{q}} = \frac{8\alpha\eta^3}{\omega\Delta^4}. \quad (41)$$

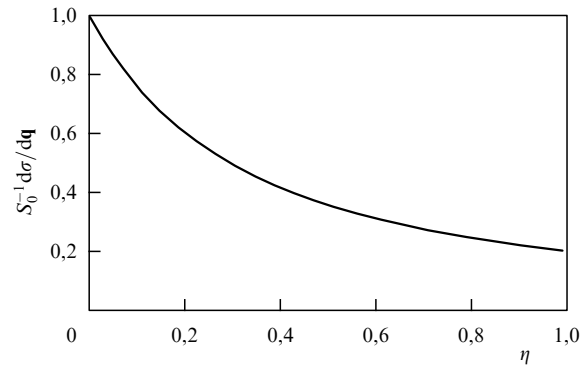


Рис. 9. Зависимость $d\sigma/d\mathbf{q}$ (в единицах $S_0 = 8\alpha\eta^3/\omega\Delta^4$) от η при $\beta_p \rightarrow 0$.

Отношение сечения $d\sigma/d\mathbf{q}$ (40) и асимптотики (41) показано на рис. 9 в зависимости от η . Видно, что члены высших порядков по η существенно меняют результат, полученный в низшем по η приближении. Заметим, что сечение $d\sigma/d\mathbf{p}$ исчезает в пределе $\beta_q \rightarrow 0$, так как волновая функция для медленных позитронов экспоненциально подавлена на расстояниях порядка $\lambda_{\text{C}} = 1/m$.

При $\beta_p \rightarrow 1$ разница $d\sigma/d\mathbf{q} - d\sigma_{\text{B}}/d\mathbf{q}$ (кулоновские поправки) стремится к нулю, как видно из рис. 10, на котором эта разница показана в единицах $S_1 = \alpha\eta^2/(\omega\Delta^4)$ как функция β_p . Аналогичное утверждение справедливо и для разницы $d\sigma/d\mathbf{p} - d\sigma_{\text{B}}/d\mathbf{p}$ при $\beta_q = q/\varepsilon_q \rightarrow 1$. Этот факт можно объяснить следующим образом. Главный вклад в кулоновские поправки определяется прицель-

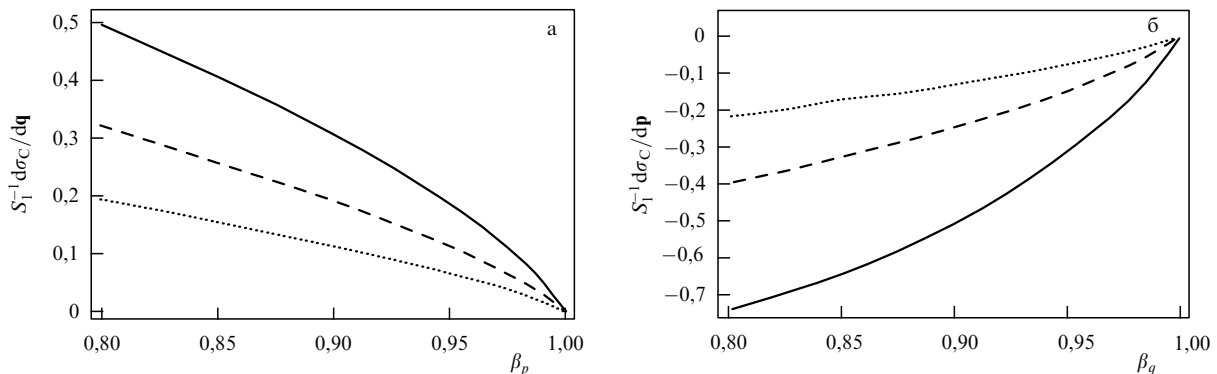


Рис. 10. Величина (а) $d\sigma_{\text{C}}/d\mathbf{q} = d\sigma/d\mathbf{q} - d\sigma_{\text{B}}/d\mathbf{q}$ в единицах $S_1 = \alpha\eta^2/(\omega\Delta^4)$ как функция β_p вблизи $\beta_p = 1$ и (б) $d\sigma_{\text{C}}/d\mathbf{p} = d\sigma/d\mathbf{p} - d\sigma_{\text{B}}/d\mathbf{p}$ в единицах S_1 как функция β_q вблизи $\beta_q = 1$. Сплошная кривая — $Z = 92$, штриховая — $Z = 47$, пунктирная — $Z = 26$.

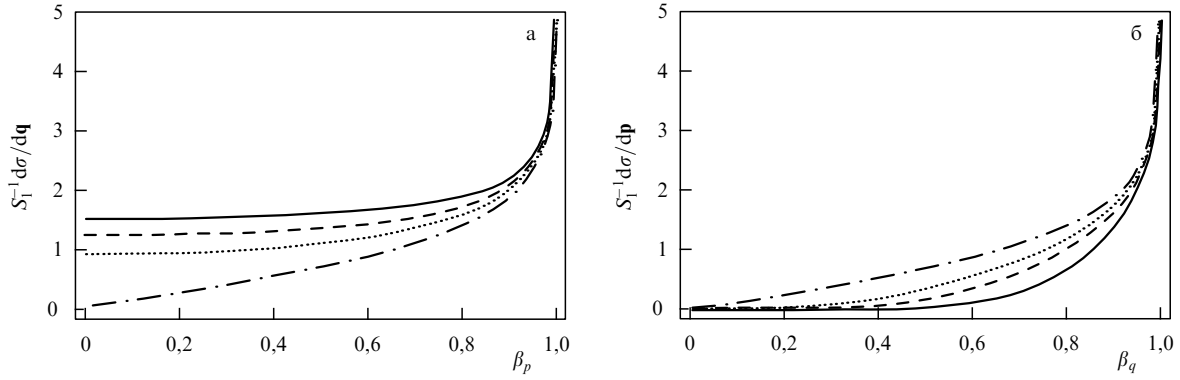


Рис. 11. (а) Сечение $d\sigma/dq$ в единицах $S_1 = \alpha\eta^2/(\omega\Delta^4)$ как функция β_p . (б) Сечение $d\sigma/dp$ в единицах S_1 как функция β_q . Сплошная кривая — $Z = 92$, штриховая — $Z = 47$, пунктирная — $Z = 26$, штрихпунктирная — $Z = 1$.

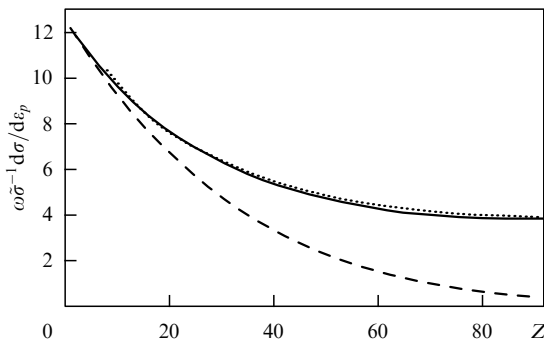


Рис. 12. Сечение $\omega\bar{\sigma}^{-1}d\sigma/d\varepsilon_p$ при нулевой скорости электрона в единицах $\bar{\sigma} = \alpha\eta^3/m^2$: результаты работ [32] (сплошная кривая), [43] (штриховая кривая) (см. уравнение (42)) и результат работы [6] (пунктирная кривая), полученный по точным формулам при $\omega = 40$ МэВ и $\beta_p = 0,1265$.

ными параметрами ρ порядка λ_C , но в обсуждаемой кинематике $\rho \ll \lambda_C$ при $\beta_{p,q} \rightarrow 1$.

Сечение $d\sigma/dq$ в единицах S_1 показано как функция β_p на рис. 11 во всём интервале β_p для нескольких значений Z . Видна важность кулоновских поправок для всех β_p , за исключением области вблизи точки $\beta_p = 1$.

В работе [32] изучался спектр электронов в областях энергий $\varepsilon_p \sim m$ и $\varepsilon_q \sim m$. Зависимость $\omega d\sigma/d\varepsilon_p$ (в единицах $\bar{\sigma} = \alpha\eta^3/m^2$) от Z при нулевой скорости электрона показана на рис. 12 сплошной кривой. При $\eta \rightarrow 0$ имеем асимптотику $\omega d\sigma/d\varepsilon_p = 4\pi\bar{\sigma}$. В работе [43] предложена формула для $\omega d\sigma/d\varepsilon_p$ при нулевой скорости электрона:

$$\omega \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = 4\pi \frac{\alpha\eta^3}{m^2} \frac{2\pi\eta}{\exp(2\pi\eta) - 1} \left(1 - \frac{4\pi}{15}\eta \right). \quad (42)$$

Результат табулирования этой формулы показан на рис. 12 пунктирной кривой. Как видно из рисунка, формула (42) применима только при малых значениях η . Заметим, что сечение $\omega d\sigma_B/d\varepsilon_p$ в борновском приближении обнуляется в пределе $\beta_p \rightarrow 0$, так как при $\beta_p \ll 1$ сечение $\omega d\sigma_B/d\varepsilon_p \approx 2\alpha\eta^2\beta_p/m^2$. В работе [6] сечение $\omega d\sigma/d\varepsilon$ найдено с помощью точных формул [5] при $\omega = 40$ МэВ и $\varepsilon_p = 1,008m$ (что соответствует $\beta_p = 0,1265$). Этот результат показан на рис. 12 пунктирной кривой начиная с $Z = 11$. Видно прекрасное согласие между результатами [6] и [32]. При $Z = 1$ результаты различаются, так как при малых Z и $\beta_p = 0,1265$ становится важным вклад борновского слагаемого.

Борновское сечение $d\sigma_B/d\varepsilon$ при $\omega \gg m$ и $p \ll \omega$ хорошо известно [4]:

$$\frac{d\sigma_B}{d\varepsilon_p} = \frac{\sigma_0}{\omega} \frac{2\varepsilon_p}{p^3} \left[2\varepsilon_p p \ln \left(\frac{\varepsilon_p + p}{m} \right) - p^2 - m^2 \ln^2 \left(\frac{\varepsilon_p + p}{m} \right) \right]. \quad (43)$$

В частности, при $p \ll m$ имеем $d\sigma_B/d\varepsilon_p = 2\sigma_0 p/m$, а при $p \gg m$

$$\frac{d\sigma_B}{d\varepsilon_p} = \frac{4\sigma_0}{\omega} \left[\ln \left(\frac{2\varepsilon_p}{m} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (44)$$

Кулоновская поправка к $d\sigma/d\varepsilon_p$ получена в ведущем квазиклассическом приближении в работе [8] при $\omega \gg p \gg m$:

$$\frac{d\sigma_C^{(0)}}{d\varepsilon_p} = -\frac{4\sigma_0}{\omega} f(\eta), \quad (45)$$

где функция $f(\eta)$ определена в (15). Поправка (45) не зависит от ε_p , она одна и та же для электрона и позитрона (т.е. является чётной функцией η). Первая квазиклассическая поправка к (45) найдена в [31]:

$$\frac{d\sigma_C^{(1)}}{d\varepsilon_p} = \frac{\sigma_0}{\omega} \frac{\pi^3 m}{2\varepsilon_p} \operatorname{Re} g(\eta), \quad (46)$$

где функция $g(\eta)$ определена в (15). Формулы (44)–(46) соответствуют асимптотике формул (26) при малых $x = \varepsilon_p/\omega$.

Поправка (46) имеет противоположный знак для электрона и позитрона, так как $g(\eta)$, являющаяся нечётной функцией η , увеличивает сечение для медленных электронов и уменьшает его для медленных позитронов. Результаты работы [32] для кулоновских поправок $\omega\sigma_0^{-1}d\sigma_C/d\varepsilon_{p,q} = \omega\sigma_0^{-1}(d\sigma/d\varepsilon_{p,q} - d\sigma_B/d\varepsilon_{p,q})$ к спектру медленных электронов и медленных позитронов показаны на рис. 13 и 14 сплошными кривыми для нескольких значений Z . Эти результаты сравниваются с асимптотическими выражениями $\omega\sigma_0^{-1}d\sigma_C^{(0)}/d\varepsilon_{p,q}$ (штриховая кривая) и $\omega\sigma_0^{-1}(d\sigma_C^{(0)}/d\varepsilon_{p,q} + d\sigma_C^{(1)}/d\varepsilon_{p,q})$ (пунктирная кривая). Видно, что для каждого Z результат [32] стремится при больших энергиях к постоянному значению $-4f(\eta)$. С другой стороны, учёт поправки $d\sigma_C^{(1)}/d\varepsilon_{p,q}$ существенно улучшает согласие между точным и асимптотическим результатами для медленных электронов и позитронов.

С использованием результатов работы [32] поправка $\sigma_C^{(1)}$ может быть получена из формулы

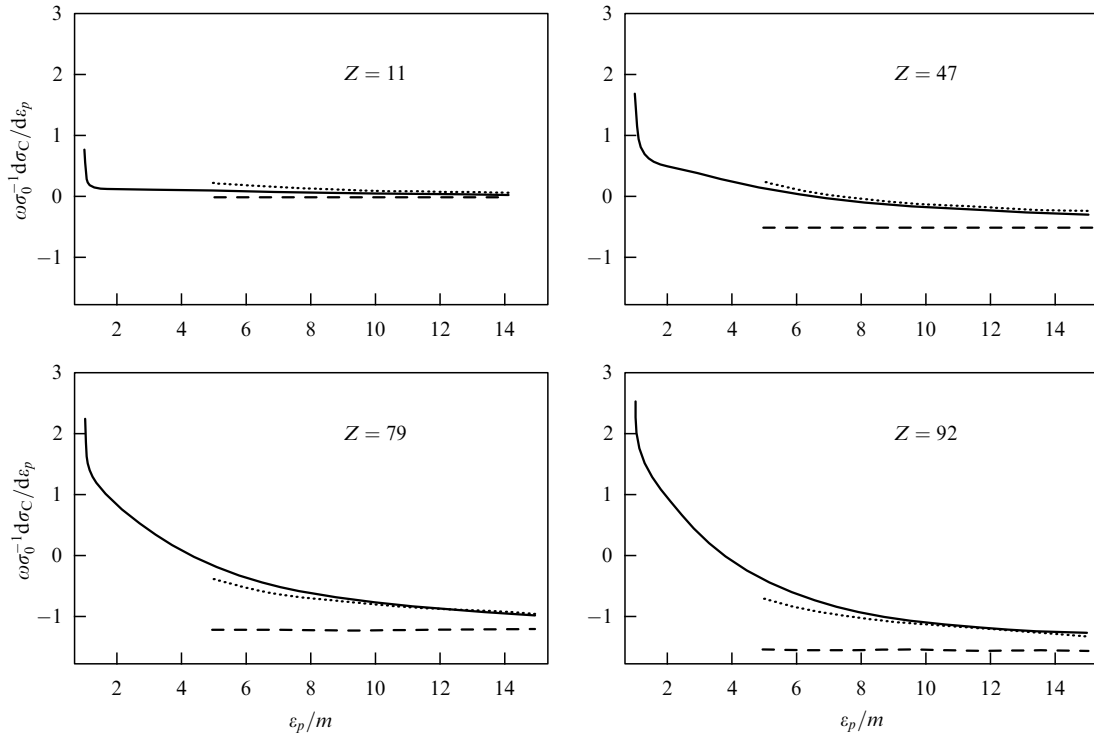


Рис. 13. Зависимость кулоновских поправок $\omega\sigma_0^{-1}d\sigma_C/d\varepsilon_p$ в единицах $\sigma_0 = \alpha\eta^2/m^2$ от энергии электрона ε_p в единицах m (сплошная кривая) для нескольких значений Z . Штриховая кривая соответствует ведущей кулоновской поправке, полученной в пределе $\varepsilon_p \gg m$, пунктирная кривая включает в себя поправки, пропорциональные m/ε_p .

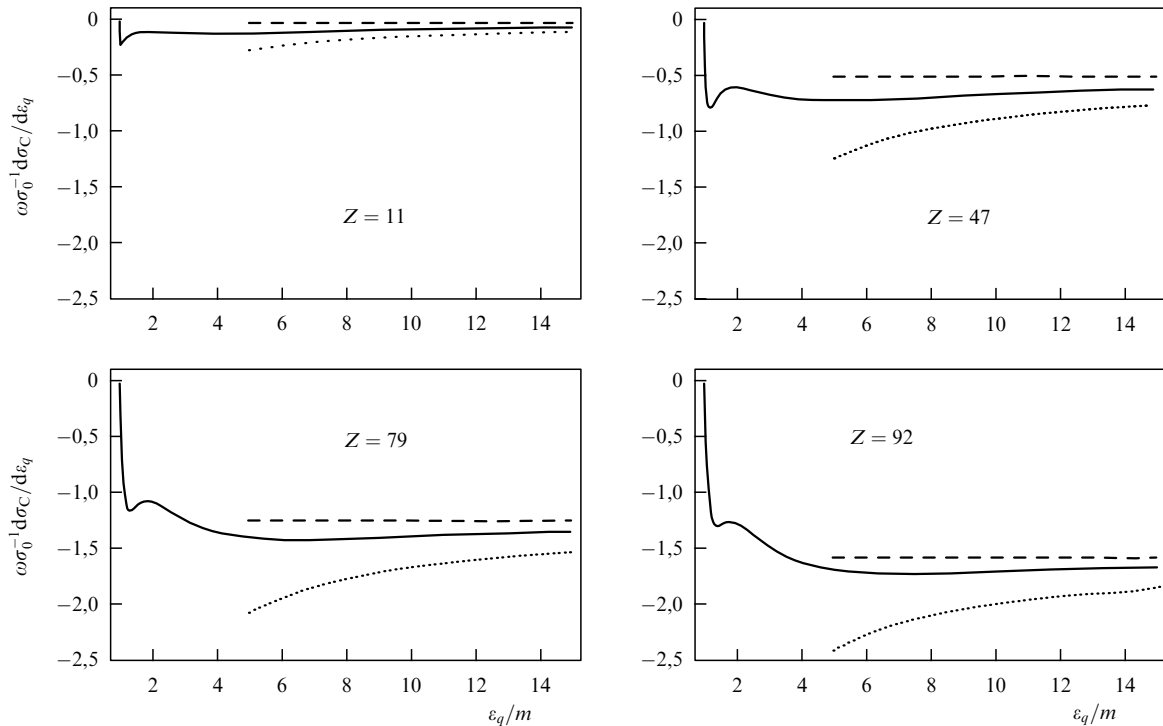


Рис. 14. Зависимость кулоновских поправок $\omega\sigma_0^{-1}d\sigma_C/d\varepsilon_q$ в единицах $\sigma_0 = \alpha\eta^2/m^2$ от энергии позитрона ε_q в единицах m (сплошная кривая) для нескольких значений Z . Штриховая кривая соответствует ведущей кулоновской поправке, полученной в пределе $\varepsilon_q \gg m$, пунктирная кривая включает в себя поправки, пропорциональные m/ε_q . Штриховые и пунктирные кривые начинаются с $\varepsilon_q = 5m$, так как соответствуют асимптотике, полученной при $\varepsilon_q \gg m$.

$$\sigma_C^{(1)} = \int_m^\infty d\varepsilon_p \left(\frac{d\sigma_C}{d\varepsilon_p} + \frac{d\sigma_C}{d\varepsilon_p}(\eta \rightarrow -\eta) + \frac{8\sigma_0 f(\eta)}{\omega} \right). \quad (47)$$

Численное интегрирование формулы (47) согласуется с уравнением (35).

4. Однократное тормозное излучение релятивистских частиц в атомном поле

Сечение тормозного излучения в борновском приближении известно для любой энергии частиц и произвольного

атомного формфактора [2, 3] (см. также [4]). В главном квазиклассическом приближении сечение тормозного излучения получено в работах [7–9, 44, 45]. Первая квазиклассическая поправка к спектру тормозного излучения вычислена в [31, 46]. Как уже говорилось, влияние экранирования на кулоновские поправки к сечению фоторождения весьма мало. Влияние экранирования на процесс тормозного излучения в атомном поле, в отличие от влияния на фоторождение, является весьма нетривиальным. В работах [9, 46] показано, что кулоновские поправки к дифференциальному сечению тормозного излучения очень чувствительны к экранированию. Однако кулоновские поправки к сечению, проинтегрированному по импульсам конечной заряженной частицы, не зависят от экранирования в главном приближении по параметру $1/mr_{scr} \ll 1$, где $r_{scr} \sim Z^{-1/3}(m\alpha)^{-1}$ — радиус экранирования. Количественное исследование влияния эффекта экранирования на кулоновские поправки к спектру тормозного излучения проведено в [46]. Дифференциальное сечение тормозного излучения, вычисленное в главном квазиклассическом приближении, одно и то же для электрона и позитрона (для μ^+ и μ^-). Поэтому для предсказания зарядовой асимметрии (разницы между дифференциальными сечениями тормозного излучения частицы и античастицы в атомном поле) необходимо учесть первую квазиклассическую поправку, что было сделано в работе [20]. Результат получен точно по параметру η . Для мюонов учтён также эффект конечного размера ядра.

4.1. Дифференциальное сечение тормозного излучения

Рассмотрим дифференциальное сечение тормозного излучения релятивистской заряженной частицы с импульсом \mathbf{p} и спиральностью $\mu_p = \pm 1$ в атомном потенциале $V(\mathbf{r})$, просуммированное по спиральности фотона и спиральности конечной заряженной частицы с импульсом \mathbf{q} .

С учётом первой квазиклассической поправки это сечение имеет вид [20]

$$\begin{aligned} d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta) &= \frac{2\alpha\epsilon_q^2}{\omega m^2 (2\pi)^4} d\Omega_{\mathbf{k}} d\Omega_{\mathbf{q}} d\omega (S_0 + S_1 + S_2), \\ S_0 &= |A_0|^2 \left[\frac{\Delta^2}{m^2} (\epsilon_p^2 + \epsilon_q^2) \xi_p \xi_q - 2\epsilon_p \epsilon_q (\xi_p - \xi_q)^2 \right], \\ S_1 &= \text{Re } A_0 A_1^* \left\{ \frac{\Delta^2}{m^2} (\epsilon_p^2 + \epsilon_q^2) (\epsilon_p + \epsilon_q) \xi_p \xi_q + \right. \\ &\quad \left. + [(\epsilon_p^2 + \epsilon_q^2)(\epsilon_p - \epsilon_q) - 4\epsilon_p \epsilon_q (\epsilon_p \xi_p - \epsilon_q \xi_q)] (\xi_p - \xi_q) \right\}, \\ S_2 &= -\frac{2\mu_p}{m^2} \text{Im } A_0 A_1^* \omega^2 (\epsilon_p + \epsilon_q) \xi_p \xi_q [\mathbf{p}_{\perp} \times \mathbf{q}_{\perp}] \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (48)$$

где $d\Omega_{\mathbf{k}}$ и $d\Omega_{\mathbf{q}}$ — телесные углы, соответствующие импульсу фотона \mathbf{k} и моменту \mathbf{q} , $\omega = \epsilon_p - \epsilon_q$ — энергия фотона. Предполагается, что $\epsilon_p \gg m$ и $\epsilon_q \gg m$. В уравнении (48) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{i}{\Delta_{\perp}^2} \int d\mathbf{r} \exp(-i\Delta \mathbf{r} - i\chi(\rho)) \Delta_{\perp} \mathbf{V}_{\perp} V(\mathbf{r}), \\ A_1 &= -\frac{1}{2\epsilon_p \epsilon_q} \int d\mathbf{r} \exp(-i\Delta \mathbf{r} - i\chi(\rho)) \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dx x \mathbf{V}_{\perp} V(\mathbf{r} - x\mathbf{v}) \mathbf{V}_{\perp} V(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

$$\chi(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} V(z, \boldsymbol{\rho}) dz, \quad \xi_p = \frac{m^2}{m^2 + p_{\perp}^2}, \quad \xi_q = \frac{m^2}{m^2 + q_{\perp}^2}, \quad (49)$$

ось z направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{v} = \mathbf{k}/\omega$; $\Delta = \mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{p}$ — передача импульса, Δ_{\perp} , $\boldsymbol{\rho}$, \mathbf{p}_{\perp} и \mathbf{q}_{\perp} — компоненты векторов Δ , \mathbf{r} , \mathbf{p} и \mathbf{q} , перпендикулярные вектору \mathbf{v} .

Сечение $d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta)$, может быть представлено в виде суммы:

$$\begin{aligned} d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta) &= d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta) + d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta), \\ d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta) &= \frac{d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta) + d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, -\eta)}{2}, \\ d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta) &= \frac{d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta) - d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, -\eta)}{2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Очевидно, что дифференциальное сечение тормозного излучения античастицы может быть получено из $d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta)$ с помощью замены $\eta \rightarrow -\eta$, так что оно будет равно $d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta) - d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta)$. В ведущем квазиклассическом приближении вся зависимость от η в сечении содержится в множителе $|A_0|^2$ в слагаемом S_0 из (48). Так как $A_0 \rightarrow -A_0^*$ при $\eta \rightarrow -\eta$, сечение, вычисленное в ведущем квазиклассическом приближении, одинаково для частицы и античастицы. Слагаемое S_1 является нечётной функцией η и определяет антисимметричную часть сечения $d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta)$. Слагаемое S_2 является чётной функцией η , оно даёт вклад в симметричную часть сечения $d\sigma_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta)$ и исчезает после усреднения по спиральности μ_p начальной частицы. Заметим, что слагаемое S_2 приводит к асимметрии сечения относительно замены $\varphi_i \rightarrow -\varphi_i$, где φ_i — азимутальные углы вылета конечных частиц в системе с осью z , направленной вдоль вектора \mathbf{p} . Эта асимметрия отсутствует в сечении, вычисленном в главном квазиклассическом приближении. Подчёркнём, что слагаемые S_1 и S_2 отличны от нуля только благодаря учёту следующего за главным квазиклассического вклада. Важным обстоятельством является также то, что антисимметричная часть сечения $d\sigma_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \eta)$ не зависит от экранирования в кинематической области, которая даёт главный вклад в антисимметричную часть сечения.

Коэффициенты A_0 и A_1 зависят от импульсов \mathbf{p} , \mathbf{q} и \mathbf{k} только через зависимость от передачи импульса Δ . Поэтому легко написать формулу для сечения $d\sigma/d\omega d\Delta_{\perp}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_s}{d\omega d\Delta_{\perp}} &= \frac{\alpha\epsilon_q}{2\pi^3 \omega \epsilon_p} |A_0|^2 \Phi(\zeta), \\ \frac{d\sigma_a}{d\omega d\Delta_{\perp}} &= \frac{\alpha\epsilon_q(\epsilon_p + \epsilon_q)}{2\pi^3 \omega \epsilon_p} \text{Re } A_0 A_1^* \Phi, \\ \Phi &= \frac{\ln(\zeta + \sqrt{1 + \zeta^2})}{\zeta \sqrt{1 + \zeta^2}} \left(\zeta^2 \frac{\epsilon_p^2 + \epsilon_q^2}{\epsilon_p \epsilon_q} + 1 \right) - 1, \quad \zeta = \frac{\Delta_{\perp}}{2m}. \end{aligned} \quad (51)$$

4.2. Кулоновские поправки

к сечению тормозного излучения электронов

Главный вклад в кулоновские поправки к симметричной части дифференциального сечения тормозного излучения определяется областью $\Delta \sim \max(r_{scr}^{-1}, \Delta_{min})$ [9, 46], где $\Delta_{min} = p - q - \omega \approx m^2 \omega / (2\epsilon_q \epsilon_p)$. Действительно, в области $\Delta \gg \max(r_{scr}^{-1}, \Delta_{min})$ можно пренебречь экранированием, заменить $V(r)$ кулоновским потенциалом

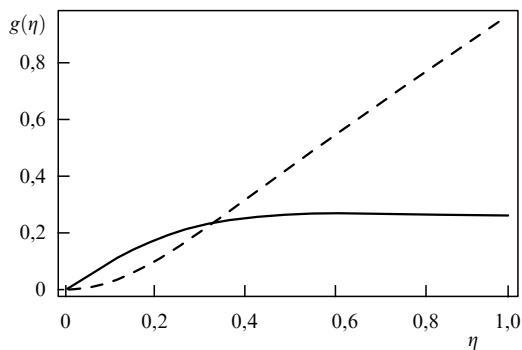


Рис. 15. Функции $\text{Re } g(\eta)$ (сплошная кривая) и $-\text{Im } g(\eta)$ (штриховая кривая).

$V_C(r) = -\eta/r$ и пренебречь компонентой Δ_{\parallel} ввиду её малости по сравнению с Δ_{\perp} . Тогда простое вычисление приводит к следующим формулам для коэффициентов во вкладах S_0 , S_1 и S_2 в (48):

$$|A_0|^2 = \left(\frac{4\pi\eta}{\Delta^2} \right)^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } A_0 A_1^* \\ \text{Im } A_0 A_1^* \end{array} \right\} = \frac{\pi\Delta}{4\varepsilon_p \varepsilon_q} |A_0|^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } g(\eta) \\ \text{Im } g(\eta) \end{array} \right\}, \quad (52)$$

где $g(\eta)$ определена в (15). Таким образом, $|A_0|^2$ совпадает со своим борновским значением $|A_{0B}|^2$. Зависимость от η слагаемого S_1 в $d\sigma_a$ и слагаемого S_2 в $d\sigma_s$ определяется функциями $\text{Re } g(\eta)$ и $\text{Im } g(\eta)$, показанными на рис. 15. При $\eta \ll 1$ имеем $\text{Re } g(\eta) \approx \eta$ и $\text{Im } g(\eta) \approx -(4 \ln 2)\eta^2$. Из рисунка 15 видно, что $\text{Re } g(\eta)$ и $\text{Im } g(\eta)$ значительно отличаются от своих асимптотических значений уже при очень малых значениях η .

При $\omega \ll \varepsilon_p$ отношение антисимметричной части сечения к симметричной части,

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{\pi\Delta \text{Re } g(\eta)}{2\varepsilon_p}, \quad (53)$$

возрастает с увеличением Δ/ε_p и может превысить 10%. Отношение S_2/S_0 мало при $\omega \ll \varepsilon_p$, так как оно подавлено фактором $(\omega/\varepsilon_p)^2$.

Если $|\mathbf{p}_{\perp}| \gg m$ и $|\mathbf{q}_{\perp}| \gg m$, то

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{\pi \text{Re } g(\eta)}{2\Delta} \Delta \boldsymbol{\theta}_{qp}, \quad \frac{S_2}{S_0} = \mu_p \frac{\pi\omega(\varepsilon_p + \varepsilon_q) \text{Im } g(\eta)}{2(\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2)\Delta} [\Delta \times \boldsymbol{\theta}_{qp}] \mathbf{v}, \quad (54)$$

где $\boldsymbol{\theta}_{qp} = \mathbf{p}_{\perp}/p - \mathbf{q}_{\perp}/q$. Таким образом, азимутальная асимметрия возрастает с увеличением ω и может быть важной.

Обсудим теперь сечение $d\sigma/d\omega d\Delta_{\perp}$ при $\Delta \gg \max(r_{\text{scr}}^{-1}, \Delta_{\text{min}})$ (см. уравнение (51)):

$$\frac{d\sigma_s}{d\omega d\Delta_{\perp}} = \frac{8\chi\eta^2 \varepsilon_q}{\pi\omega \varepsilon_p \Delta^4} \Phi, \quad (55)$$

$$\frac{d\sigma_a}{d\omega d\Delta_{\perp}} = \frac{\pi \text{Re } g(\eta)(\varepsilon_p + \varepsilon_q)\Delta}{4\varepsilon_p \varepsilon_q} \frac{d\sigma_s}{d\omega d\Delta_{\perp}},$$

где функция Φ определена в (51). На рисунке 16 показана зависимость величины $A = \sigma_{0a}^{-1} d\sigma_a/d\omega d\Delta_{\perp}$ от $\zeta = \Delta_{\perp}/(2m)$ для нескольких значений $t = \varepsilon_q/\varepsilon_p$; $\sigma_{0a} = \chi\eta^2 \text{Re } g(\eta)/(2m^2\omega \varepsilon_p \Delta_{\perp})$. Из рисунка видно, что главный вклад в антисимметричную часть сечения определяется областью $\Delta \sim m$.

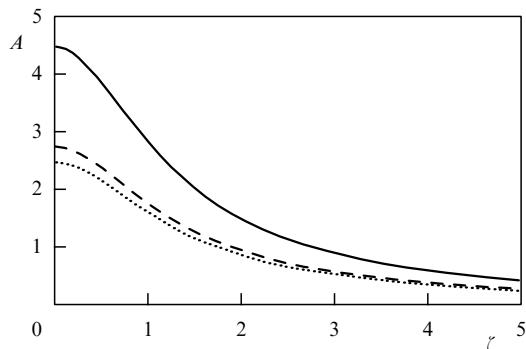


Рис. 16. Зависимость $A = \sigma_{0a}^{-1} d\sigma_a/d\omega d\Delta_{\perp}$ от $\zeta = \Delta_{\perp}/(2m)$ (уравнение (55)), $\sigma_{0a} = \chi\eta^2 \text{Re } g(\eta)/(2m^2\omega \varepsilon_p \Delta_{\perp})$ при значениях $t = \varepsilon_q/\varepsilon_p$: $t = 0,25$ (сплошная кривая), $t = 0,5$ (штриховая кривая) и $t = 0,75$ (пунктирная кривая).

Несколько сложнее получить сечение, проинтегрированное по углам конечного электрона. Подставляя в (48) выражения (52) для $|A_0|^2$, $\text{Re } A_0 A_1^*$, $\text{Im } A_0 A_1^*$ и интегрируя по \mathbf{q} , получаем

$$\frac{d\sigma_s}{d\mathbf{k}} = \frac{4\chi\eta^2 \xi_p^2}{\pi m^4 \omega^3} \left\{ (\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2)L - \varepsilon_p \varepsilon_q \left[1 + 4\xi_p(1 - \xi_p) \left(L - \frac{3}{2} \right) \right] \right\},$$

$$\frac{d\sigma_a}{d\mathbf{k}} = \frac{\pi\chi\eta^2 \text{Re } g(\eta)}{m^3 \omega^3 \varepsilon_p \varepsilon_q} \xi_p \times$$

$$\times [\varepsilon_q(\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2 + 2\varepsilon_p \omega \xi_p)F_1 + \xi_p(\varepsilon_p^2 \omega - \varepsilon_q^3 - 4\varepsilon_p \varepsilon_q \omega \xi_p)F_2],$$

$$L = \ln \left(\frac{2\varepsilon_p \varepsilon_q}{m\omega} \right) - \frac{1}{2} - f(\eta), \quad (56)$$

$$F_1 = F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{p_{\perp}^2}{m^2} \right) = \frac{2}{\pi} K \left(-\frac{p_{\perp}^2}{m^2} \right),$$

$$F_2 = F \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{p_{\perp}^2}{m^2} \right) = \frac{2}{\pi} E \left(-\frac{p_{\perp}^2}{m^2} \right),$$

где $K(x)$ и $E(x)$ — эллиптические функции.

Антисимметричная часть спектра получается интегрированием сечения (51) по Δ_{\perp} [31, 46]:

$$\frac{d\sigma_a}{d\omega} = \frac{\alpha\pi^3 \eta^2 \text{Re } g(\eta)}{4m\omega \varepsilon_p^2} \left(2 \frac{\varepsilon_p^2 + \varepsilon_q^2}{\varepsilon_p \varepsilon_q} - 1 \right) (\varepsilon_p + \varepsilon_q). \quad (57)$$

Для определения кулоновской поправки к симметричной части спектра тормозного излучения необходимо рассмотреть область $\Delta \sim \max(r_{\text{scr}}^{-1}, \Delta_{\text{min}})$. Как показано в работе [46], величина $|A_0(\Delta)|^2$ в этой области сильно зависит от экранирования. Однако кулоновские поправки к симметричной части спектра являются универсальной функцией η и от экранирования не зависят, так как [46]

$$\int \Delta_{\perp}^2 [|A_0(\Delta)|^2 - |A_{0B}(\Delta)|^2] d\Delta_{\perp} = -32\pi^3 \eta^2 f(\eta). \quad (58)$$

В результате [9]

$$\frac{d\sigma_C}{d\omega} = -\frac{4\chi\eta^2 f(\eta)}{m^2 \omega} \left(\frac{\varepsilon_q^2}{\varepsilon_p^2} - \frac{2\varepsilon_q}{3\varepsilon_p} + 1 \right). \quad (59)$$

Таким образом, $d\sigma/d\omega$ в кулоновском поле имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{4\chi\eta^2}{m^2 \omega} \left(\frac{\varepsilon_q^2}{\varepsilon_p^2} - \frac{2\varepsilon_q}{3\varepsilon_p} + 1 \right) L, \quad (60)$$

где функция L определена в (56). Результат учёта экранирования в борновском вкладе в спектр хорошо известен [12], и мы не будем его обсуждать в нашем обзоре.

4.3. Кулоновские поправки к сечению тормозного излучения мюонов

При изучении кулоновских поправок к дифференциальному сечению тормозного излучения релятивистских мюонов в атомном поле необходимо учитывать эффект конечного размера ядра R (отличие потенциала $V(r)$ от кулоновского на расстояниях $r \lesssim R$). Этот вопрос изучался в работе [20] с учётом первой квазиклассической поправки. Запишем преобразование Фурье $V_F(\Delta^2)$ потенциала $V(r)$ в виде

$$V_F(\Delta^2) = -\frac{4\pi\eta F(\Delta^2)}{\Delta^2}, \quad (61)$$

где $F(\Delta^2)$ — формфактор, который заметно отличен от единицы при $\Delta \gtrsim 1/R$ и $\Delta \lesssim 1/r_{\text{scr}}$. Рассмотрим сначала кулоновские поправки к симметричной части сечения, вычисленного в ведущем квазиклассическом приближении. В этом случае сечение $d\sigma_s$ зависит от параметров поля только через множитель A_0 (49). В борновском приближении

$$A_{0\text{B}} = -\frac{i}{\Delta_{\perp}^2} \int d\mathbf{r} \exp(-i\Delta\mathbf{r}) \Delta_{\perp} \nabla_{\perp} V(\mathbf{r}) = V_F(\Delta^2). \quad (62)$$

Кулоновские поправки $|A_0|^2 - |A_{0\text{B}}|^2$ исчезают при $r_{\text{scr}}^{-1} \ll \Delta \ll R^{-1}$ и имеют два пика: при $\Delta \sim r_{\text{scr}}^{-1}$ и при $\Delta \sim R^{-1}$. Вклады этих пиков в интеграл $\int d\Delta_{\perp} [|A_0|^2 - |A_{0\text{B}}|^2] d\Delta_{\perp}$ противоположны и равны соответственно $\mp 32\pi^3 \eta^2 f(\eta)$. Оба вклада являются универсальными функциями η , не зависящими от формы потенциала в областях $r \sim r_{\text{scr}}$ и $r \sim R$, в то время как форма пиков очень чувствительна к виду потенциала в этих областях [9, 46]. Так как для электронов выполняется условие $m \ll R^{-1}$, вклад в кулоновские поправки к $d\sigma_s/d\omega$ даёт только область $r \sim r_{\text{scr}}$ [9]. Однако для мюонов, считая выполненным условие $m_{\mu} \gg R^{-1}$, надо просуммировать вклады обоих пиков. В результате полная кулоновская поправка исчезает в сечении, проинтегрированном по Δ_{\perp} . Подчеркнём ещё раз, что кулоновские поправки к дифференциальному сечению при $\Delta \sim R^{-1}$ и при $\Delta \sim r_{\text{scr}}^{-1}$ велики. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим формфактор $F(\Delta^2)$ в виде (21). Этот вид справедлив при передачах $\Delta \gtrsim r_{\text{scr}}^{-1}$, для которых множитель A_0 определяется формулой

$$A_0 = -\frac{4\pi\eta}{\Delta^2} \int_0^{\infty} d\rho J_1(\rho) \left[1 - \frac{A\rho}{\Delta} K_1\left(\frac{A\rho}{\Delta}\right) \right] \times \\ \times \exp \left\{ -2i\eta \left[\ln \frac{\rho}{2} + K_0\left(\frac{A\rho}{\Delta}\right) \right] \right\}, \quad (63)$$

$$A_{0\text{B}} = -\frac{4\pi\eta}{\Delta^2 + A^2}.$$

Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя, $K_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. На рисунке 17 показана зависимость относительной величины кулоновских поправок $|A_0|^2/|A_{0\text{B}}|^2 - 1$ от Δ/A при нескольких значениях η . Заметим, что очень узкий пик при $\Delta \sim r_{\text{scr}}^{-1}$ на рисунке не показан. Зависимость этого пика от формы атомного потенциала при $\Delta \sim r_{\text{scr}}^{-1}$ подробно исследова-

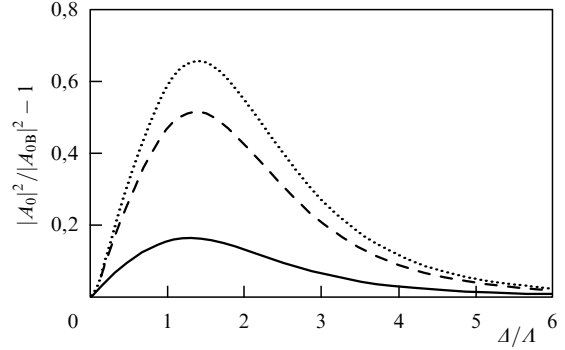


Рис. 17. Относительная величина кулоновских поправок как функция от Δ/A при $\Delta \gtrsim 1/r_{\text{scr}}$ и $\eta = 0,34$ (серебро, сплошная кривая), $\eta = 0,6$ (свинец, штриховая кривая), $\eta = 0,67$ (уран, пунктирная кривая).

лась в работе [46]. Из рисунка 17 видно, что кулоновские поправки к $|A_0|^2$ очень велики в области $\Delta/A \sim 1$.

Рассмотрим теперь величину A_1 (см. формулу (49)). Низшее по η приближение $A_{1\text{B}}$ выражается через тот же интеграл $J(\Delta)$ (19), который фигурировал в поправке к сечению рождения $\mu^+\mu^-$ -пары:

$$A_{1\text{B}}(\Delta) = -\frac{J(\Delta)}{2\varepsilon_p \varepsilon_q}. \quad (64)$$

Точный по η множитель A_1 при $\Delta \gtrsim r_{\text{scr}}^{-1}$ можно представить в виде

$$A_1(\Delta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dx d\rho A_{1\text{B}}\left(\frac{\Delta x}{\rho A}\right) J_0(\rho) J_0(x) \times \\ \times \exp \left\{ -2i\eta \left[\ln \frac{\rho}{2} + K_0\left(\frac{\rho A}{\Delta}\right) \right] \right\}. \quad (65)$$

Для формфактора (21) $A_{1\text{B}}(\Delta)$ выражается через функцию \mathcal{F} , определённую в (22):

$$A_{1\text{B}}(\Delta) = -\frac{\pi^2 \eta^2 \Delta^2 \mathcal{F}}{\varepsilon_p \varepsilon_q \Delta (\Delta^2 + A^2)}. \quad (66)$$

На рисунке 18 показана зависимость величин G_1 и G_2 от отношения $\beta = \Delta/A$,

$$G_1 = \frac{\text{Re } A_0 A_1^*}{|A_0|^2 \Sigma_R}, \quad \Sigma_R = \frac{\pi \text{Re } g(\eta) \Delta}{4\varepsilon_p \varepsilon_q}, \quad (67)$$

$$G_2 = \frac{\text{Im } A_0 A_1^*}{|A_0|^2 \Sigma_I}, \quad \Sigma_I = \frac{\pi \text{Im } g(\eta) \Delta}{4\varepsilon_p \varepsilon_q}.$$

Для кулоновского поля $G_1 = G_2 = 1$ (см. (52)). Поэтому отличие $G_{1,2}$ от единицы связано с влиянием конечного размера ядра. Видно, что G_1 и G_2 быстро убывают с увеличением β при $\beta \lesssim 1$.

5. Двойное тормозное излучение релятивистской заряженной частицы в атомном поле

До недавнего времени двойное тормозное излучение электрона в атомном поле изучалось или при низких энергиях электрона [47, 48], или при любых энергиях электрона, но в борновском приближении [49]. В недавней работе [50] в ведущем квазиклассическом приближении было получено точно по η дифференциальное сечение двойного тормозного излучения релятивистского электрона в атомном поле. Оказалось, что кулоновские поправки к дифференциальному сечению двойного тор-

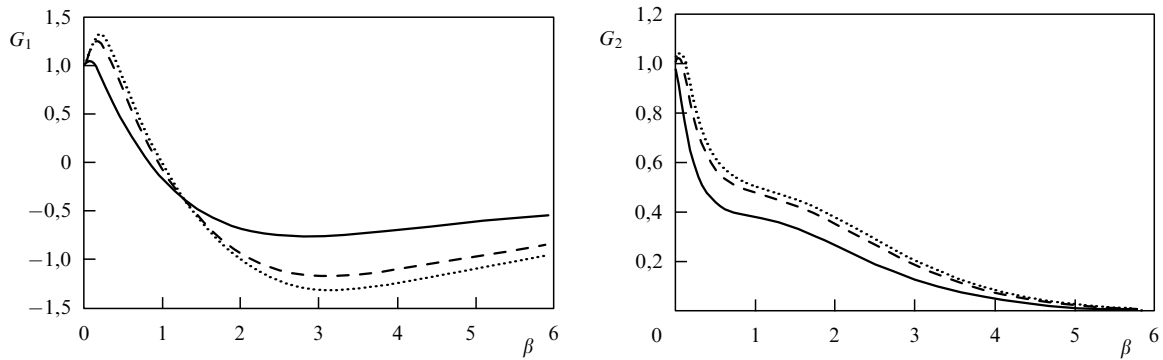


Рис. 18. Зависимости $G_1 = \Sigma_R^{-1} \operatorname{Re} A_0 A_1^* / |A_0|^2$ и $G_2 = \Sigma_R^{-1} \operatorname{Im} A_0 A_1^* / |A_0|^2$ от $\beta = \Delta / A$ (см. (67)) при $\eta = 0,34$ (серебро, сплошная кривая), $\eta = 0,6$ (свинец, штриховая кривая), $\eta = 0,67$ (уран, пунктирная кривая).

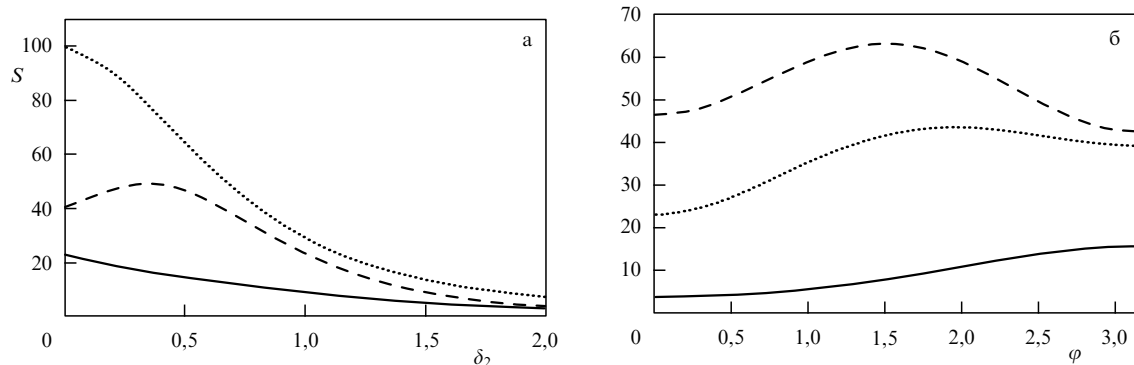


Рис. 19. (а) Зависимость S (72) от $\delta_2 = pk_{2\perp} / (m\omega_2)$ при $\omega_1 / \varepsilon_p = 0,2$, $\omega_2 / \varepsilon_p = 0,4$, $\varphi = 0$, $\delta_1 = pk_{1\perp} / (m\omega_1) = 0,2$ (штриховая кривая), $\delta_1 = 1$ (пунктирная кривая) и $\delta_1 = 2$ (сплошная кривая). (б) Зависимость S (72) от азимутального угла φ между векторами $\mathbf{k}_{1\perp}$ и $\mathbf{k}_{2\perp}$ при $\omega_1 / \varepsilon_p = 0,2$, $\omega_2 / \varepsilon_p = 0,4$, $\delta_1 = 0,2$, $\delta_2 = 0,5$ (штриховая кривая), $\delta_2 = 1$ (пунктирная кривая) и $\delta_2 = 2$ (сплошная кривая).

мозного излучения очень чувствительны к экранированию.

Более того, эти кулоновские поправки содержатся в том же множителе A_0 (49), что и в случае дифференциального сечения однократного тормозного излучения, вычисленного в ведущем квазиклассическом приближении [46]. А именно сечение $d\sigma$ двойного тормозного излучения можно представить в виде суммы борновского вклада $d\sigma^B$ и кулоновских поправок $d\sigma^C$:

$$d\sigma_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2} = d\sigma_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^B + d\sigma_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^C, \quad (68)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^B \\ d\sigma_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^C \end{array} \right\} = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\Delta_{\perp} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} |A_{0B}(\Delta)|^2 \\ [|A_0(\Delta)|^2 - |A_{0B}(\Delta)|^2] \end{array} \right\} |T_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}|^2,$$

$$T_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2} = \Delta_{\perp} [T_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \Delta_{\perp}) + T_{\mu_p \mu_q \lambda_2 \lambda_1}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \Delta_{\perp})],$$

где $\mathbf{k}_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ — импульсы и энергии конечных фотонов, $\Delta = \mathbf{q} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}$, \mathbf{p} и \mathbf{q} — начальный и конечный импульсы заряженной частицы, Δ_{\perp} — компонента Δ , перпендикулярная вектору \mathbf{p} , μ_p , μ_q , λ_1 , λ_2 — спиральности начального электрона, конечного электрона и излучённых фотонов, $T_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \Delta_{\perp})$ — не зависящая от η величина, явный вид которой приведён в [50]. Так же как и в случае однократного тормозного излучения, только область малых $\Delta_{\perp} \sim \max(r_{scr}^{-1}, |\Delta_{\parallel}|) \ll m$ даёт вклад в $d\sigma^C$. Как уже говорилось, несмотря на то что величина $|A_0(\Delta)|^2 - |A_{0B}(\Delta)|^2$ очень чувствительна к экранированию, кулоновские поправки к сечению, проинтегриро-

ванному по Δ_{\perp} , не зависят от формы атомного потенциала при $r \sim r_{scr}$ [46]:

$$d\sigma_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^C = -\frac{\alpha^2 \eta^2 f(\eta)}{4\pi^3 \omega_1 \omega_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \times$$

$$\times |T_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + T_{\mu_p \mu_q \lambda_2 \lambda_1}^{(0)}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)|^2, \quad (69)$$

где $T_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = T_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0)$. Главный вклад в борновское сечение, проинтегрированное по $d\Delta_{\perp}$, определяется областью малых Δ_{\perp} , т.е. $m \gg \Delta_{\perp} \gg m\beta$,

$$\beta = \max \left\{ \frac{1}{mr_{scr}}, \frac{|\Delta_{\parallel}|}{m} \right\}, \quad (70)$$

$$\Delta_{\parallel} = -\frac{1}{2} \left[\frac{q_{\perp}^2}{q} + \frac{k_{1\perp}^2}{\omega_1} + \frac{k_{2\perp}^2}{\omega_2} + \frac{m^2(\omega_1 + \omega_2)}{pq} \right],$$

где \mathbf{q}_{\perp} , $\mathbf{k}_{1\perp}$ и $\mathbf{k}_{2\perp}$ — компоненты векторов \mathbf{q} , \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , перпендикулярные вектору \mathbf{p} . При $\ln(1/\beta) \gg 1$ с логарифмической точностью имеем

$$d\sigma_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^B = \frac{\alpha^2 \eta^2}{4\pi^3 \omega_1 \omega_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \ln \frac{1}{\beta} \times$$

$$\times |T_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + T_{\mu_p \mu_q \lambda_2 \lambda_1}^{(0)}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)|^2. \quad (71)$$

Для того чтобы продемонстрировать угловую зависимость кулоновских поправок, введём безразмерную величину S ,

$$S = \frac{m^6}{2} \sum_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2} |T_{\mu_p \mu_q \lambda_1 \lambda_2}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + T_{\mu_p \mu_q \lambda_2 \lambda_1}^{(0)}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)|^2. \quad (72)$$

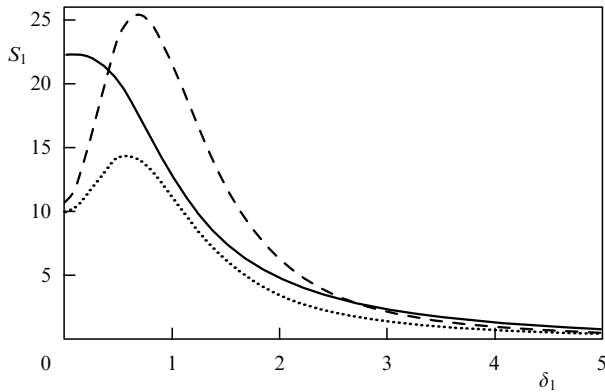


Рис. 20. Зависимость S_1 (73) от δ_1 при $\omega_1/\varepsilon_p = \Omega x$ и $\omega_2/\varepsilon_p = \Omega(1-x)$, где $\Omega = 0,4$, $x = 0,3$ (штриховая кривая), $x = 0,5$ (пунктирная кривая) и $x = 0,7$ (сплошная кривая).

На рисунке 19а показана зависимость S от $\delta_2 = pk_{2\perp}/(m\omega_2)$ при фиксированных значениях $\delta_1 = pk_{1\perp}/(m\omega_1)$, ω_1/ε_p , ω_2/ε_p и азимутальном угле φ между векторами $\mathbf{k}_{1\perp}$ и $\mathbf{k}_{2\perp}$. На рисунке 19б показана зависимость S от φ при фиксированных значениях δ_1 , δ_2 , ω_1/ε_p и ω_2/ε_p . Заметим, что S инвариантна относительно замены $\varphi \rightarrow -\varphi$. Как видно из рис. 19, угловая зависимость S является плавной.

На рисунке 20 показана зависимость S_1 от δ_1 при фиксированных значениях ω_1/ε_p и ω_2/ε_p , где

$$S_1 = \frac{p^2}{16\pi^2 m^2} \int S d\Omega_{\mathbf{k}_2}. \quad (73)$$

Видно, что главный вклад в сечение определяется областью $\delta_1 \sim 1$.

Рассмотрим кулоновские поправки к сечению, проинтегрированному по $d\Omega_{\mathbf{k}_1}$ и $d\Omega_{\mathbf{k}_2}$ (кулоновские поправки к спектру), усреднённые по поляризации начального электрона и просуммированные по поляризациям конечных частиц:

$$d\sigma^C = -\frac{8\alpha^2 \eta^2 f(\eta) d\omega_1 d\omega_2}{\pi m^2 \omega_1 \omega_2} G\left(\frac{\omega_1}{\varepsilon_p}, \frac{\omega_2}{\varepsilon_p}\right), \quad (74)$$

где функция $f(\eta)$ определена в (15), а функция $G(\omega_1/\varepsilon_p, \omega_2/\varepsilon_p)$ для произвольных частот получается с помощью численного интегрирования сечения (69) по углам вылета фотонов. Для $\omega_2 \ll \omega_1, \varepsilon_q$ получается результат, соответствующий приближению мягких фотонов [4]:

$$F(x) = G(x, 0) = \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)^2} \left[1 + (1-x)^2 - \frac{4y(1-x)}{(1+y)^2} \right] \Phi(x, y),$$

$$\Phi(x, y) = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \ln(t + \sqrt{t^2-1}) - 1, \quad t = 1 + \frac{x^2(1+y)}{2(1-x)}. \quad (75)$$

Функция $F(x)$ показана на рис. 21. Она имеет следующие асимптотики:

$$F(x) \approx \frac{4}{3} x^2 \ln \frac{1}{x} \quad \text{при } x \ll 1,$$

$$F(x) \approx \ln \frac{1}{1-x} \quad \text{при } 1-x \ll 1. \quad (76)$$

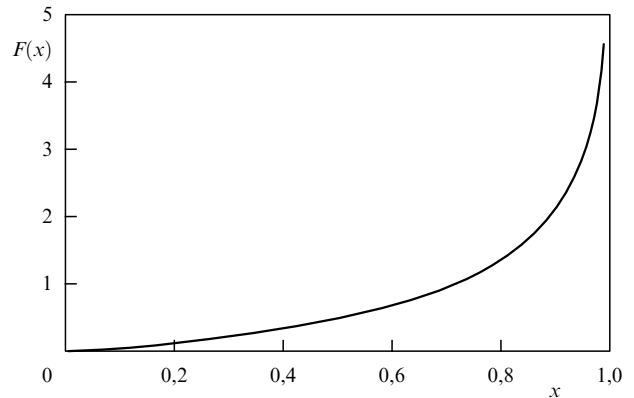


Рис. 21. Зависимость $F(x)$ от $x = \omega_1/\varepsilon_p$ (уравнение (75)).

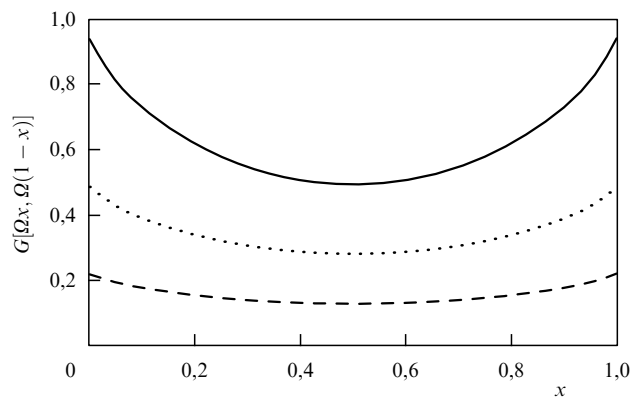


Рис. 22. Зависимость $G[\Omega x, \Omega(1-x)]$ от x (74) при фиксированных значениях Ω , где $\Omega = 0,3$ (штриховая кривая), $\Omega = 0,5$ (пунктирная кривая) и $\Omega = 0,7$ (сплошная кривая). Здесь $\Omega = (\omega_1 + \omega_2)/\varepsilon_p$ и $x = \omega_1/(\omega_1 + \omega_2)$.

На рисунке 22 показана зависимость функции $G[\Omega x, \Omega(1-x)]$ от x при фиксированных значениях Ω , где $\Omega = (\omega_1 + \omega_2)/\varepsilon_p$, $x = \omega_1/(\omega_1 + \omega_2)$.

С логарифмической точностью спектр в борновском приближении имеет вид

$$d\sigma^B = \frac{8\alpha^2 \eta^2 d\omega_1 d\omega_2}{\pi m^2 \omega_1 \omega_2} G\left(\frac{\omega_1}{\varepsilon_p}, \frac{\omega_2}{\varepsilon_p}\right) \ln \frac{1}{\beta_0}, \quad (77)$$

где функция G та же, что и в уравнении (74), а

$$\beta_0 = \max \left\{ \frac{1}{mr_{scr}}, \frac{m(\omega_1 + \omega_2)}{\varepsilon_p \varepsilon_q} \right\} \ll 1. \quad (78)$$

Таким образом, проведённое в [50] точно по η исследование дифференциального сечения двойного тормозного излучения релятивистской частицы в атомном поле показало, что в главном квазиклассическом приближении потенциал входит в сечение процесса только через множитель $|A_0(\Delta)|^2$. Этот множитель совпадает с аналогичным множителем в сечении однократного тормозного излучения, вычисленном в главном квазиклассическом приближении. Заметим, что такая факторизация нарушается при учёте первой квазиклассической поправки [20]. Проведённое в [50] исследование позволило сформулировать простой метод вычисления точно по η сечения многократного тормозного излучения в ведущем квазиклассическом приближении. Для этого необходимо найти сечение в борновском приближении для произвольного потенциала $V(r)$ и затем заменить

преобразование Фурье потенциала $V_F(\Delta^2)$ фактором $A_0(\Delta)$ из (49).

6. Фоторождение e^+e^- -пары, сопровождаемое излучением фотона

Фоторождение e^+e^- -пары в поле атома, сопровождаемое излучением фотона ($\gamma Z \rightarrow e^+e^-\gamma'Z$), даёт важный вклад в радиационные поправки к процессу фоторождения e^+e^- -пары, а также является фоном к процессу дельбрюкковского рассеяния [21]. Процесс $\gamma Z \rightarrow e^+e^-\gamma'Z$ должен также учитываться при изучении электромагнитных ливней в веществе. Несмотря на важность этого процесса, существует только несколько работ, в которых он рассматривался в борновском приближении [51, 52], а точные по параметру η результаты вообще отсутствуют, что связано с большой сложностью вычислений. В недавней работе [53] дифференциальное сечение процесса $\gamma Z \rightarrow e^+e^-\gamma'Z$ было вычислено точно по η в главном квазиклассическом приближении.

Оказалось, что кулоновские поправки значительно меняют результат по сравнению с борновским, за исключением узкой области очень малых передач импульса.

Сечение процесса имеет вид

$$d\sigma_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} = \alpha^2 |M_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}|^2 \frac{d\mathbf{p}_\perp d\mathbf{q}_\perp d\mathbf{k}_{2\perp} d\varepsilon_p d\varepsilon_q}{(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2}, \quad (79)$$

где \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{p} и \mathbf{q} — импульсы начального фотона, конечного фотона, электрона и позитрона, λ_1 , λ_2 , μ_p и μ_q — спиральности начального фотона, конечного фотона, электрона и позитрона; \mathbf{X}_\perp обозначает компоненту вектора \mathbf{X} , перпендикулярную вектору \mathbf{k}_1 , который мы направим вдоль оси z . Амплитуду M представим в виде суммы $M = M^B + M^C$, где M^B — линейное по η слагаемое (борновская амплитуда), M^C — вклад старших по η слагаемых (кулоновские поправки). В работе [53] для борновской амплитуды найдено представление

$$M_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}^B = \frac{64\pi\eta}{\omega_1\omega_2\Delta^2} [\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\Delta_\perp) - \mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(-\Delta_\perp)], \quad (80)$$

где $\Delta = \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ — передача импульса, $\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\mathbf{T})$ — некоторые элементарные функции, явный вид которых приведён в [53]. Кулоновские поправки также выражаются через эти функции:

$$M_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}^C = -\frac{128i\eta^2}{\omega_1\omega_2\Delta^2} \int \frac{d\mathbf{T}}{(\mathbf{T} + \Delta_\perp)^2 (\mathbf{T} - \Delta_\perp)^2} \left(\frac{|\mathbf{T} + \Delta_\perp|}{|\mathbf{T} - \Delta_\perp|} \right)^{2i\eta} \times \left\{ (\Delta_\perp^2 + \mathbf{T}\Delta_\perp) [\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\mathbf{T}) - \mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\Delta_\perp)] + (\Delta_\perp^2 - \mathbf{T}\Delta_\perp) [\mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(\mathbf{T}) - \mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}(-\Delta_\perp)] \right\}, \quad (81)$$

где \mathbf{T} — двумерный вектор, перпендикулярный \mathbf{k}_1 . Эффект экранирования важен только для малой передачи импульса $\Delta \lesssim r_{scr}^{-1} \ll m$, где r_{scr} — радиус экранирования. Для таких Δ кулоновскими поправками можно пренебречь. Поэтому эффект экранирования может быть учтён умножением $M_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}^B$ на атомный формфактор $F_a(\Delta^2)$, который равен единице при $\Delta \gg r_{scr}^{-1}$.

На рисунке 23 показана зависимость величины S (дифференциальное сечение в единицах γ , усреднённое по поляризации начального фотона и просуммированное

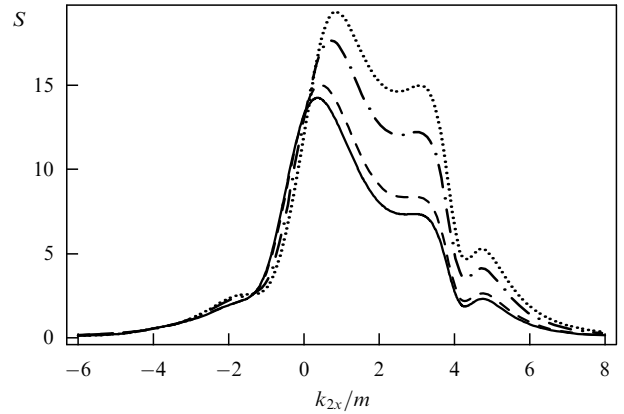


Рис. 23. Зависимость S (дифференциальное сечение в единицах γ , усреднённое по поляризации начального фотона и просуммированное по поляризациям конечных частиц (82)) от k_{2x}/m для $\varepsilon_p = 0,4\omega_1$, $\varepsilon_q = 0,25\omega_1$, $p_x = 4,7m$, $q_x = -0,8m$, $p_y = q_y = k_{2y} = 0$; борновский результат (пунктирная кривая), $Z = 47$ (серебро, штрихпунктирная кривая), $Z = 82$ (свинец, штриховая кривая) и $Z = 92$ (уран, сплошная кривая). Величина S , вычисленная для кулоновского поля, не зависит от ω_1 . Учёт экранирования, где сохраняется зависимость от ω_1 через атомный формфактор, меняет S только в малой окрестности точки $\Delta_\perp = 0$ ($k_{2x} = -3,9m$ на рисунке), где кулоновские поправки неважны.

по поляризациям конечных частиц),

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q} \frac{\gamma^{-1} d\sigma_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}}{d\mathbf{p}_\perp d\mathbf{q}_\perp d\mathbf{k}_{2\perp} d\varepsilon_p d\varepsilon_q}, \quad \gamma = \frac{\alpha^2 \eta^2 \Delta_\perp^2}{(2\pi)^6 m^6 \omega_1 \omega_2 \Delta^4}, \quad (82)$$

от k_{2x} при фиксированных значениях \mathbf{p}_\perp , \mathbf{q}_\perp , ε_p , ε_q , $k_{2y} = 0$ и нескольких значениях атомного зарядового номера Z . В окрестности точки $\Delta_\perp = 0$ ($k_{2x} = -3,9m$) борновское сечение доминирует над кулоновскими поправками, как и должно быть. Однако в общем случае кулоновские поправки значительно меняют борновский результат. Заметим, что величина S для кулоновского поля не зависит от ω_1 при фиксированных значениях ε_p/ω_1 , ε_q/ω_1 , \mathbf{p}_\perp/m , \mathbf{q}_\perp/m и $\mathbf{k}_{2\perp}/m$. Для атомного поля зависимость S от ω_1 существует только благодаря атомному формфактору. Однако этот формфактор важен лишь в узкой окрестности точки $\Delta_\perp = 0$, где кулоновские поправки неважны.

Возникает интересный вопрос об асимметрии A дифференциального сечения для циркулярной поляризации начального фотона,

$$A = \frac{d\sigma_+ - d\sigma_-}{d\sigma_+ + d\sigma_-}, \quad (83)$$

$$d\sigma_\pm = \sum_{\lambda_2\mu_p\mu_q} d\sigma_{\pm\lambda_2\mu_p\mu_q}.$$

В борновском приближении асимметрия отсутствует для любых \mathbf{p} , \mathbf{q} и \mathbf{k}_2 . Этот факт следует из соотношения

$$M_{\lambda_1\lambda_2\mu_p\mu_q}^B = -\mu_p\mu_q (M_{\lambda_1\bar{\lambda}_2\bar{\mu}_p\bar{\mu}_q}^B)^*. \quad (84)$$

Однако для кулоновских поправок соотношение (84) несправедливо из-за наличия комплексного множителя $(|\mathbf{T} + \Delta_\perp|/|\mathbf{T} - \Delta_\perp|)^{2i\eta}$ в подынтегральном выражении в (81). На рисунке 24 показана зависимость асимметрии от угла φ между векторами $\mathbf{k}_{2\perp}$ и \mathbf{p}_\perp . Как и должно быть, асимметрия исчезает для \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{p} и \mathbf{q} , лежащих в одной

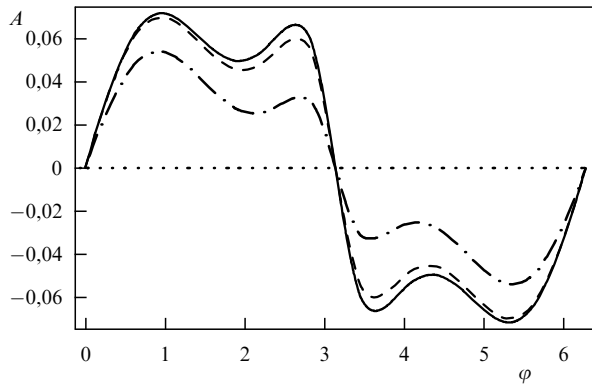


Рис. 24. Асимметрия A (уравнение (83)) как функция угла φ между векторами $\mathbf{k}_{2\perp}$ и \mathbf{p}_{\perp} для $\varepsilon_p = 0,4\omega_1$, $\varepsilon_q = 0,25\omega_1$, $\mathbf{p}_{\perp} \parallel -\mathbf{q}_{\perp}$, $p_{\perp} = 4,7m$, $q_{\perp} = 0,8m$, $k_{2\perp} = m$; борновский результат — пунктирная кривая, $Z = 47$ (серебро) — штрихпунктирная кривая, $Z = 82$ (свинец) — штриховая кривая и $Z = 92$ (уран) — сплошная кривая.

плоскости ($\varphi = 0, \pi$). Видно, что асимметрия может достигать нескольких десятков процентов даже для средних значений Z .

Таким образом, использование квазиклассического приближения позволило получить формулы для точного по η дифференциального сечения процесса $\gamma Z \rightarrow e^+e^-\gamma Z$, которые несомненно сложнее борновского результата. Оказалось, что кулоновские поправки значительно модифицируют величину сечения процесса и их надо обязательно учитывать при анализе экспериментальных данных.

7. Квазиклассическое приближение и рассеяние на малые углы при высоких энергиях

Как уже говорилось, основной вклад в сечения различных процессов квантовой электродинамики в атомном поле при высоких энергиях определяется малыми углами между импульсами начальных и конечных частиц и, соответственно, большими орбитальными моментами. Использование квазиклассического подхода позволяет систематически учитывать вклад больших орбитальных моментов, что было продемонстрировано в разделах 2–6. Результаты, полученные в рамках этого подхода, являются точными по параметру $\eta = Z\alpha$. Кроме того, учёт следующего за главным квазиклассического приближения позволяет значительно повысить точность результатов по сравнению с полученными в главном квазиклассическом приближении. Подчеркнём принципиальную разницу между квазиклассическим приближением и эйкональным приближением, часто используемым для описания процессов при высоких энергиях (см., например, книгу [27]). Эта разница была отмечена ещё в работе [9], в которой показано, что кулоновские поправки к сечению фоторождения e^+e^- -пары могут быть получены в рамках квазиклассического приближения, но не в рамках эйконального приближения. Возникает естественный вопрос о том, как далеко можно продвинуться в повышении точности вычисления сечений в рамках квазиклассического подхода. Этот вопрос был исследован в недавней работе [54] на примере вычисления сечения рассеяния на малые углы поляризованных частиц высокой энергии в атомном поле. Сечение

этого процесса может быть представлено в следующем виде [27]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_0}{d\Omega} [1 + S\xi(\zeta_1 + \zeta_2) + T^{ij}\xi_1^i\xi_2^j], \quad \xi = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}{|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|}, \quad (85)$$

где $d\sigma_0/d\Omega$ — дифференциальное сечение для неполяризованных частиц, \mathbf{p} и \mathbf{q} — импульсы начального и конечного электронов, ζ_1 — вектор поляризации начального электрона, ζ_2 — регистрируемый вектор поляризации конечного электрона, S — так называемая функция Шермана, T^{ij} — некоторый тензор. Сечение $d\sigma_0/d\Omega$ в главном и следующем за главным приближении по углу рассеяния $\theta \ll 1$ известно давно для произвольного локализованного потенциала $V(r)$ [55]. С этой точностью сечение может быть вычислено в рамках квазиклассического подхода. Функция Шермана S , вычисленная в ведущем квазиклассическом приближении, пропорциональна θ^2 . Если вычислять S с помощью разложения по параметру η , то ведущий по η вклад (линейный по η) возникает в результате интерференции амплитуд рассеяния, вычисленных в первом и во втором борновском приближении [56–60]. В отличие от ведущего квазиклассического вклада, пропорционального θ^2 , ведущий по η вклад пропорционален θ^3 при малых θ . Противоречия между двумя результатами не возникает, так как разложение по η квазиклассического вклада начинается с η^2 . Таким образом, в зависимости от отношения η/θ доминирующий вклад в функцию Шермана определяется или ведущим квазиклассическим вкладом, или интерференцией между первой и второй борновскими амплитудами. Можно было бы предположить, что вклад $O(\theta^3)$ в функции S соответствует следующей квазиклассической поправке, т.е. тоже соответствует вкладу больших орбитальных моментов. Однако рассмотренный в работе [54] случай кулоновского поля показал, что учёт угловых моментов $l \sim 1$ абсолютно необходим для этих членов. В результате в работе [54] был сделан важный вывод о том, что нельзя выйти за рамки точности следующего за главным квазиклассического приближения без учёта неквазиклассических вкладов, отвечающих угловым моментам $l \sim 1$.

7.1. Рассеяние поляризованных электронов в квазиклассическом приближении

Для задачи рассеяния в произвольном локализованном потенциале $V(r)$ асимптотика волновой функции $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях r имеет вид

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \approx \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r})u_{\mathbf{p}} + \frac{\exp(i\mathbf{p}\mathbf{r})}{r}(G_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{G}_1 - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{G}_2)u_{\mathbf{p}}. \quad (86)$$

Коэффициенты G_0 , \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 легко находятся из разложения функций f_0 , \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 (см. (4)):

$$G_0 = a_0 + \delta a_0, \quad \mathbf{G}_1 = -\frac{\Delta_{\perp}}{2\varepsilon}(a_0 + \delta a_0 + \delta a_1), \quad (87)$$

$$\mathbf{G}_2 = i\frac{\mathbf{q} \times \mathbf{p}}{2\varepsilon^2} \delta a_1,$$

где

$$a_0 = -\frac{i\varepsilon}{2\pi} \int d\mathbf{p} \exp(-i\Delta_{\perp}\mathbf{p}) [\exp(-i\chi(\mathbf{p})) - 1],$$

$$\delta a_0 = -\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{p} \exp(-i\Delta_{\perp}\mathbf{p} - i\chi(\mathbf{p})) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} dx V^2(r_x),$$

$$\delta a_1 = \frac{i}{4\pi\Delta_\perp} \int d\mathbf{p} \exp(-i\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{p} - i\chi(\mathbf{p})) \mathbf{\Lambda} \cdot \frac{\mathbf{p}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} dx V^2(r_x),$$

$$\chi(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx V(r_x), \quad r_x = \sqrt{x^2 + \rho^2}. \quad (88)$$

Здесь $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$, $\mathbf{q} = p\mathbf{r}/r$, \mathbf{p} — двумерный вектор, перпендикулярный вектору $\mathbf{n}_p = \mathbf{p}/p$, вдоль которого мы направляем ось z . Для малых углов рассеяния $\theta \ll 1$ имеем $\delta a_0 \sim \delta a_1 \sim \theta a_0$. В результате для $d\sigma_0/d\Omega$, T^{ij} и S в уравнении (85) получаем

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = |a_0|^2 \left(1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\delta a_0}{a_0} \right), \quad (89)$$

$$T^{ij} = \delta^{ij} + \theta \varepsilon^{ijk} \xi^k,$$

$$S = -\frac{m\theta}{\varepsilon} \operatorname{Im} \frac{\delta a_1}{a_0}. \quad (90)$$

В уравнении (89) учтены только ведущие и следующие за ведущими члены по θ в $d\sigma_0/d\Omega$ и T^{ij} , а в уравнении (90) учтён ведущий вклад в функцию Шермана S . Форма T^{ij} является простым следствием сохранения спиральности для рассеяния ультрарелятивистских частиц.

Заметим, что при малых углах рассеяния всегда выполняется условие $|\Delta_z| \approx p\theta^2/2 \ll \Delta_\perp \approx p\theta$. Благодаря этому условию $a_0(\Delta)$ в уравнении (88) выражается через коэффициент $A_0(\Delta)$ (49)

$$a_0(\Delta) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} A_0(\Delta). \quad (91)$$

В силу этого соотношения сечение тормозного излучения при поперечных передачах импульса, больших по сравнению с минимальной передачей, может быть представлено в главном квазиклассическом приближении в виде произведения сечения рассеяния и вероятности излучения [12]. При малых передачах импульса, а также в следующем за главным квазиклассическом приближении эта факторизация нарушается (см. раздел 4).

Разложение для $d\sigma_0/d\Omega$ совпадает с полученным в эйкональном приближении [55]. Однако здесь надо сделать следующее важное замечание [18]. При выводе выражения для a_0 в рамках эйконального приближения обычно исходят из формулы

$$a_0 = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int d\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) V(r) \psi_{\mathbf{p}}^+(\mathbf{r}) \quad (92)$$

и используют в качестве $\psi_{\mathbf{p}}^+(\mathbf{r})$ эйкональную функцию

$$\psi_{\mathbf{p}}^{\text{eik}}(\mathbf{r}) = \exp \left[i\mathbf{p}\mathbf{r} - i \int_0^\infty dx V(\mathbf{r} - x\mathbf{n}_p) \right], \quad (93)$$

которая получается из квазиклассической волновой функции при пренебрежении квантовыми флуктуациями (см. раздел 2). Затем, пренебрегая Δ_z ввиду малости этой величины по сравнению с Δ_\perp , берут интеграл по z и получают a_0 в уравнении (88). Этот вывод в случае кулоновского поля вызывает вопросы, поскольку Δ_z умножается на $z \sim \rho/\theta$, т.е. $z\Delta_z \sim \rho\Delta_\perp$. Если не пренебрегать Δ_z , но оставить волновую функцию в эйкональном приближении, то интегрирование в (92) приводит к выражению для $|a_0|^2$, отличающемуся от правильного наличием дополнительного множителя $2\pi\eta/[\exp(2\pi\eta) - 1]$. Если же взять волновую функцию в квазиклассическом приближении, но пренебречь Δ_z , то интегрирование в (92)

приводит к выражению для $|a_0|^2$, отличающемуся от правильного наличием дополнительного множителя $2\pi\eta/[1 - \exp(-2\pi\eta)]$. И только одновременно удерживая Δ_z и используя квазиклассическую волновую функцию, можно из (92) получить правильный результат для a_0 в (88) (см. работу [18]).

Заметим, что $a_0 \rightarrow -a_0^*$, $\delta a_0 \rightarrow \delta a_0^*$ и $\delta a_1 \rightarrow \delta a_1^*$ при замене $V \rightarrow -V$. Поэтому квазиклассический результат для функции Шермана S (уравнение (90)) инвариантен относительно замены $V \rightarrow -V$. Напротив, вклад $2 \operatorname{Re}(\delta a_0/a_0)$ в $d\sigma_0/d\Omega$ в (89) приводит к зарядовой асимметрии в рассеянии, т.е. к разнице между сечениями рассеяния электрона и позитрона (см., например, [27]). Для кулоновского поля $V(r) = -\eta/r$ из уравнения (88) следует

$$a_0 = \frac{2\eta}{\varepsilon\theta^{2-2i\eta}} \frac{\Gamma(1-i\eta)}{\Gamma(1+i\eta)}, \quad (94)$$

$$\frac{\delta a_0}{a_0} = \frac{1}{4} \pi\theta g^*(\eta), \quad \frac{\delta a_1}{a_0} = -\frac{\pi\theta g^*(\eta)}{4(1+2i\eta)},$$

где функция $g(\eta)$ определена в (15). Квазиклассическое сечение и функция S для кулоновского поля имеют вид

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{4\eta^2}{\varepsilon^2\theta^4} \left(1 + \frac{\pi\theta}{2} \operatorname{Re} g(\eta) \right), \quad (95)$$

$$S = -\frac{\pi m\theta^2}{4\varepsilon} \operatorname{Im} \frac{g(\eta)}{1-2i\eta}. \quad (96)$$

Таким образом, квазиклассическая функция Шермана пропорциональна θ^2 , а знаменитый результат Мотта [56] для ведущего по η вклада в S пропорционален $\theta^3 \ln \theta$. Поэтому результат Мотта неприменим при $\theta \lesssim \eta$.

Обсудим теперь влияние эффекта конечного размера ядра на сечение $d\sigma_0/d\Omega$ и функцию Шермана S , взяв модельный потенциал

$$V(r) = -\frac{\eta}{\sqrt{r^2 + R^2}}, \quad (97)$$

где R — характерный размер ядра. Для этого потенциала все интегралы в (88) берутся, в результате

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{4\eta^2}{\varepsilon^2\theta^4} \left| \frac{bK_{1-i\eta}(b)}{\Gamma(1+i\eta)} \right|^2 (1+A), \quad (98)$$

$$A = \frac{\pi\eta\theta}{2} \operatorname{Re} \frac{\Gamma(1+i\eta)(2K_{1/2-i\eta}(b) - bK_{3/2-i\eta}(b))}{\Gamma(3/2+i\eta)\sqrt{2b}K_{1-i\eta}(b)}, \quad (99)$$

$$S = \frac{\pi\eta m\theta^2}{4\varepsilon} \operatorname{Im} \frac{\Gamma(1+i\eta)K_{1/2-i\eta}(b)}{\Gamma(3/2+i\eta)\sqrt{2b}K_{1-i\eta}(b)}, \quad b = \theta\varepsilon R, \quad (100)$$

где $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. Величина A в уравнении (99) является зарядовой асимметрией,

$$A = \frac{d\sigma_0(\eta) - d\sigma_0(-\eta)}{d\sigma_0(\eta) + d\sigma_0(-\eta)}. \quad (101)$$

В пределе $b \rightarrow 0$ результаты (98) и (100) совпадают с (95) и (96). На рисунках 25 и 26 показаны асимметрия A и функция S в зависимости от b для нескольких значений η . Видно, что обе функции сильно зависят от b и η . Интересно, что обе функции меняют свой знак при $b \sim 1$. По-видимому, это свойство сохранится и для обычных параметризаций электрического потенциала ядер.

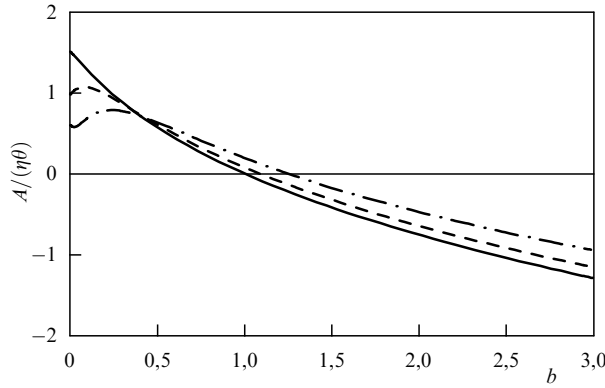


Рис. 25. Асимметрия A (99) в единицах $\eta\theta$ как функция $b = \theta\epsilon R$ для $\eta = 0,1$ (сплошная кривая), $\eta = 0,4$ (штриховая кривая) и $\eta = 0,7$ (штрихпунктирная кривая).

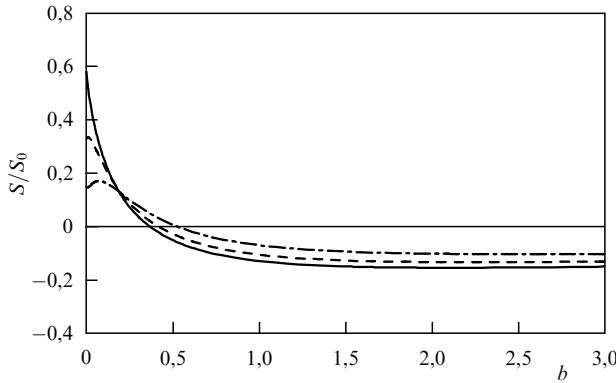


Рис. 26. Функция Шермана S (100) в единицах $S_0 = m\eta^2\theta^2/\epsilon$ в зависимости от $b = \theta\epsilon R$ для $\eta = 0,1$ (сплошная кривая), $\eta = 0,4$ (штриховая кривая) и $\eta = 0,7$ (штрихпунктирная кривая).

7.2. Разложение точной амплитуды

кулоновского рассеяния по малым углам

Амплитуда рассеяния электрона в кулоновском поле известна точно по η для любых энергий электрона и углов рассеяния (см., например, [4, 27]):

$$M_{\text{н}} = \frac{i}{2p} \phi_f^\dagger \left[G(\theta) - \frac{i\eta m}{p} F(\theta) - i \left(G(\theta) \tan \frac{\theta}{2} + \frac{i\eta m}{p} F(\theta) \cot \frac{\theta}{2} \right) \xi \sigma \right] \phi_i,$$

где ϕ_i и ϕ_f — спиноры, соответствующие начальному и конечному электрону, функции $F(\theta)$ и $G(\theta)$ имеют вид

$$F(\theta) = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma_l - iv)}{\Gamma(\gamma_l + iv + 1)} \exp[i\pi(l - \gamma_l)] l (P_l - P_{l-1}), \quad (102)$$

$$G(\theta) = - \cot \frac{\theta}{2} \frac{dF}{d\theta}. \quad (103)$$

Здесь $P_l = P_l(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, $\gamma_l = \sqrt{l^2 - \eta^2}$. Если амплитуда известна точно, то это позволяет исследовать нетривиальное соотношение между вкладами больших орбитальных моментов l (квазиклассический вклад) и вкладом $l \sim 1$ в сечение и функцию Шермана для рассеяния электронов в кулоновском поле. Заметим, что для малых углов рассеяния θ

главный вклад в амплитуду рассеяния определяется угловыми моментами $l \gg 1$ не только в ультрарелятивистском случае, но и при произвольных $\beta = p/\epsilon$. Поэтому в этом разделе мы будем рассматривать параметры $\eta = Z\alpha$ и $v = Z\alpha/\beta$ как независимые. Мы рассмотрим разложение по малым углам, но не будем подразумевать выполнения условия $\eta \ll 1$, которое было принято в работе [60].

Дифференциальное сечение для неполяризованных частиц $d\sigma_0/d\Omega$ и функция Шермана $S(\theta)$, выраженные через $F(\theta)$ и $G(\theta)$, имеют вид

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{1}{4p^2} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{\cos^2(\theta/2)} + \frac{\eta^2 m^2 |F(\theta)|^2}{p^2 \sin^2(\theta/2)} \right], \quad (104)$$

$$S(\theta) = \frac{\eta m p \sin \theta \operatorname{Re} FG^*}{|G(\theta)|^2 p^2 \sin^2(\theta/2) + \eta^2 m^2 |F(\theta)|^2 \cos^2(\theta/2)}.$$

В работе [54] получено следующее представление для функции $F(\theta)$ при $\theta \ll 1$:

$$F \approx F_{\text{QC}} + \delta F, \quad (105)$$

$$F_{\text{QC}} = \frac{\Gamma(1 - iv)}{\Gamma(1 + iv)} s^{2iv} \left[1 + \frac{i\pi\eta^2}{(1 + 2iv)v} g^*(v)s + \frac{i\eta^2}{2(1 + iv)v} \left(1 + 2iv - \frac{\pi^2\eta^2}{4} \right) s^2 \right],$$

$$\delta F = \frac{\Gamma(1 - iv)}{\Gamma(1 + iv)} C(\eta, v) s^2.$$

Здесь

$$C(\eta, v) = -i\eta^2 \left[\frac{1}{2v} + i + \frac{\pi}{2(1 - 2iv)} - \frac{\pi^2\eta^2}{8v} \right] + \frac{\Gamma(1 + iv)}{\Gamma(1 - iv)} \sum_{l=1}^{\infty} 2l^2 \left[\frac{\Gamma(\gamma_l - iv) \exp[i\pi(l - \gamma_l)]}{\Gamma(\gamma_l + iv + 1)} - \frac{\Gamma(l - iv)}{\Gamma(l + iv + 1)} T_l \right], \quad (106)$$

$$T_l = 1 + \frac{i\pi}{2l} \eta^2 + \frac{\eta^2}{2l^2} \left(1 + 2iv - \frac{\pi^2\eta^2}{4} \right),$$

где $s = \sin(\theta/2)$. Слагаемое F_{QC} определяется вкладом больших l (квазиклассический вклад), а сумма по l в слагаемом δF сходится при $l \sim 1$ (неквазиклассический вклад). Функция $C(\eta, v)$ имеет сильную зависимость от η и v . Это утверждение подтверждается рис. 27, на котором действительная и мнимая части функции $C(\eta, v)$ при $v = \eta$ ($\beta = 1$) показаны в зависимости от η .

В результате подстановки (105) в (104) получаем:

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{v^2}{4p^2 s^4} \left[1 + \pi\beta^2 \operatorname{Re} g(v)s - 2v^{-1} \operatorname{Im} (s^{2iv} C^*(\eta, v)) s^2 \right], \quad (107)$$

$$S(\theta) = \frac{ms^2}{\epsilon v} \left\{ -\pi\eta\beta \operatorname{Im} \left(\frac{g(v)}{1 - 2iv} \right) + \left[\frac{\eta^2}{1 + v^2} \left(1 - \frac{3\pi^2\eta^2}{4(1 + 4v^2)} \right) + \pi^2\eta\beta^3 \operatorname{Im} \left(\frac{g(v)}{1 - 2iv} \right) \operatorname{Re} g(v) - 2 \operatorname{Re} [(1 + iv)s^{2iv} C^*(\eta, v)] s \right] \right\}. \quad (108)$$

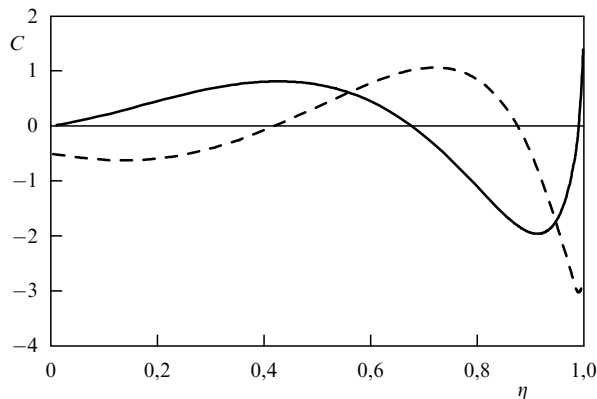


Рис. 27. Действительная (сплошная кривая) и мнимая (штриховая кривая) части функции $C(\eta, \nu)$ (уравнение (106)) при $\nu = \eta$ как функции η .

Вторая поправка к сечению возникает из-за интерференции между квазиклассическим и неквазиклассическим вкладом в амплитуду. Следовательно, эта поправка не может быть получена в рамках квазиклассического подхода. В работе [18] показано, что амплитуда упругого рассеяния электрона на малые углы при высоких энергиях, полученная в рамках квазиклассического подхода с учётом первой квазиклассической поправки, совпадает с амплитудой, полученной в эйкональном подходе с учётом первой поправки. Эйкональный подход позволяет выполнить регулярное разложение волновой функции (см., например, работы [61, 62]). Поэтому возникает вопрос о том, можно ли получить вклад $O(s^2)$ в (107) в рамках эйконального подхода. Нетрудно понять, что ответ отрицателен. Действительно, эйкональная амплитуда рассеяния для $\Delta_{\perp} \neq 0$ имеет вид

$$M_{\text{fi}} = -\frac{ip}{2\pi} \int d\mathbf{p} \exp(-i\Delta_{\perp}\mathbf{p} - i\chi_0(\mathbf{p})) \times \phi_f^{\dagger} \left[1 - i\chi_1 - i\chi_2 - \frac{\chi_1^2}{2} + \dots \right] \phi_i. \quad (109)$$

В кулоновском поле $\chi_0 = 2\nu \ln p\rho$. Из размерных соображений следует, что эйкональные поправки имеют вид $\chi_{n>0}(\rho) = \mathcal{P}_n(\ln p\rho)/(p\rho)^n$, где $\mathcal{P}_n(x)$ — некоторые полиномы с матричными коэффициентами. Проводя замену переменных $\mathbf{p} \rightarrow (2/\Delta_{\perp})\mathbf{p}$, получаем

$$M_{\text{fi}} = -s^{2iv} \frac{2ip}{\pi\Delta_{\perp}^2} \int d\mathbf{p} \exp(-2i\delta\mathbf{p}) \rho^{-2iv} \phi_f^{\dagger} \left\{ 1 - i \frac{s}{\rho} \mathcal{P}_1\left(\ln \frac{\rho}{s}\right) - \frac{s^2}{\rho^2} \left[i\mathcal{P}_2\left(\ln \frac{\rho}{s}\right) + \frac{1}{2} \mathcal{P}_1^2\left(\ln \frac{\rho}{s}\right) + \dots \right] \right\} \phi_i, \quad (110)$$

где $\delta = \Delta_{\perp}/\Delta_{\perp}$ — единичный вектор. Взяв интегралы по \mathbf{p} , находим амплитуду M_{fi} в эйкональном приближении:

$$M_{\text{fi}} = \frac{\Gamma(1-iv)}{\Gamma(1+iv)} s^{2iv} \frac{\nu}{2ps^2} \times \phi_f^{\dagger} [1 + s\mathcal{Q}_1(\ln s) + s^2\mathcal{Q}_2(\ln s) + \dots] \phi_i, \quad (111)$$

где \mathcal{Q}_1 и \mathcal{Q}_2 — некоторые полиномы с коэффициентами, являющимися функциями ν и η . Общий фазовый множитель s^{2iv} исчезает в $|M_{\text{fi}}|^2$. Следовательно, уравнение (111) не может воспроизвести осциллирующий множитель $\text{Im}[s^{2iv}C^*(\eta, \nu)]$ в уравнении (107). Это не является сюр-

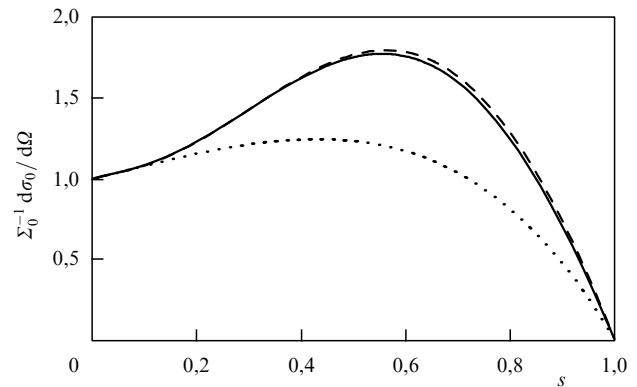


Рис. 28. Зависимость дифференциального сечения $d\sigma_0/d\Omega$ (уравнение (104)) в единицах $\Sigma_0 = \nu^2/(4p^2s^4)$ от $s = \sin(\theta/2)$ для $\epsilon \gg m$ и $\nu = \eta = 0.6$. Сплошная кривая — точный результат, полученный из (102) и (103), штриховая кривая — результат, полученный из (103) и (105), пунктирная кривая — результат, полученный из F в квазиклассическом приближении с учётом первой квазиклассической поправки (определяется формулой (105) с отброшенными членами $\propto s^2$).

призом, так как условие применимости эйконального приближения нарушается на малых расстояниях.

Обсудим теперь нетривиальное соотношение между амплитудами, полученными в результате разложения по малым углам, и амплитудами, полученными разложением по малым ν . Удерживая только ведущие члены по ν в разложении коэффициентов по s , находим

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{\nu^2}{4p^2s^4} (1 + s\pi\eta\beta - s^2\beta^2), \quad (112)$$

$$S(\theta) = \frac{2\eta m s^2}{\epsilon} [\pi\eta(2\ln 2 - 1) + \beta s \ln s]. \quad (113)$$

Сечение (112) согласуется с разложением по малым углам результатов, полученных в работах [57, 58]. Функция S (уравнение (113)) согласуется с разложением по малым углам выражения для функции Шермана, полученной в [59]. Слагаемое, пропорциональное $s \ln s$ в (113), согласуется с известным результатом Мотта [56].

Видно, что относительные величины первой и второй поправок по s к дифференциальному сечению пропорциональны отношению ν/θ двух малых параметров, и это отношение может быть больше или меньше единицы. Аналогичное явление имеет место и для функции Шермана: отношение ведущего квазиклассического вклада и поправки пропорционально $\nu/(\theta \ln \theta)$.

Результат (105) получен в приближении малых углов рассеяния, $\theta \ll 1$. Однако оказалось, что выражение (105) для функции F удивительно хорошо согласуется с точной функцией (102) для всех θ . Поэтому, используя уравнения (103) и (105) в (104), можно получить очень хорошие аппроксимации для сечения и функции Шермана во всём интервале углов и зарядов ядра. Это утверждение иллюстрируется рис. 28, на котором показано сечение рассеяния ультрарелятивистской частицы на ядре свинца $Z = 82$ как функция $s = \sin(\theta/2)$. Заметим, что согласие при больших углах исчезает, если пренебречь в уравнении (105) вкладами порядка s^2 (пунктирная кривая).

8. Заключение

В настоящем обзоре описано современное состояние исследования основных процессов квантовой электро-

намики в поле атомов при высоких энергиях. Для различных приложений важно, чтобы сечения этих процессов были известны с высокой точностью. Показано, что во всех случаях использование квазиклассического подхода позволяет получить точные по параметру $\eta = Z\alpha$ результаты, вид которых ненамного сложнее соответствующих результатов, полученных в борновском приближении. Вычисление в следующем за главным квазиклассическом приближении позволяет не только получить формулы, имеющие высокую точность при промежуточных энергиях, но и впервые количественно предсказать такие явления, как зарядовая асимметрия в процессе фоторождения и тормозного излучения в поле атома при высоких энергиях.

Работа выполнена при поддержке Российским научным фондом (грант 14-50-00080).

Список литературы

- Dirac P A M *Proc. R. Soc. London A* **117** 610 (1928)
- Bethe H, Heitler W *Proc. R. Soc. London A* **146** 83 (1934)
- Racah G *Nuovo Cimento* **11** 461 (1934)
- Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989); Пер. на англ. яз.: Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Pergamon Press, 1982)
- Øverbø I, Mork K J, Olsen H A *Phys. Rev.* **175** 1978 (1968)
- Sud K K, Sharma D K *Rad. Phys. Chem.* **75** 631 (2006)
- Bethe H A, Maximon L C *Phys. Rev.* **93** 768 (1954)
- Davies H, Bethe H A, Maximon L C *Phys. Rev.* **93** 788 (1954)
- Olsen H A, Maximon L C, Wergeland H *Phys. Rev.* **106** 27 (1957)
- Furry W *Phys. Rev.* **46** 391 (1934)
- Sommerfeld A, Maue A W *Ann. Phys.* **22** 629 (1935)
- Байер В Н, Катков В М, Фадин В С *Излучение релятивистских электронов* (М.: Атомиздат, 1973)
- Байер В Н, Катков В М, Страховенко В М *Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах* (Новосибирск: Наука, 1989); Baier V N, Katkov V M, Strakhovenko V M *Electromagnetic Processes at High Energies in Oriented Single Crystals* (Singapore: World Scientific, 1998)
- Mil'shtein A I, Strakhovenko V M *Phys. Lett. A* **95** 135 (1983)
- Мильштейн А И, Страховенко В М *ЖЭТФ* **85** 14 (1983); Mil'shtein A I, Strakhovenko V M *Sov. Phys. JETP* **58** 8 (1983)
- Lee R N, Milstein A I *Phys. Lett. A* **198** 217 (1995)
- Ли Р Н, Мильштейн А И *ЖЭТФ* **107** 1393 (1995); Lee R N, Milstein A I *JETP* **80** 777 (1995)
- Ли Р Н, Мильштейн А И, Страховенко В М *ЖЭТФ* **117** 75 (2000); Lee R N, Milstein A I, Strakhovenko V M *JETP* **90** 66 (2000)
- Di Piazza A, Milstein A I *Phys. Lett. B* **717** 224 (2012)
- Krachkov P A, Milstein A I *Phys. Rev. A* **91** 032106 (2015)
- Milstein A I, Schumacher M *Phys. Rep.* **243** 183 (1994)
- Akhmadaliev Sh Zh et al. *Phys. Rev. C* **58** 2844 (1998)
- Lee R N et al. *Phys. Rep.* **373** 213 (2003)
- Akhmadaliev Sh Zh et al. *Phys. Rev. Lett.* **89** 061802 (2002)
- Downie E J et al. *Phys. Lett. B* **728** 645 (2014)
- Lee R N, Milstein A I, Strakhovenko V M *Phys. Rev. A* **85** 042104 (2012)
- Überall H *Electron Scattering From Complex Nuclei* (Pure and Applied Physics, Vol. 36A) (New York: Academic Press, 2012)
- Hubbell J H, Gimm H A, Øverbø I *J. Phys. Chem. Rev. Data* **9** 1023 (1980)
- Hubbell J H *Rad. Phys. Chem.* **59** 113 (2000)
- Øverbø I *Phys. Lett. B* **71** 412 (1977)
- Lee R N, Milstein A I, Strakhovenko V M *Phys. Rev. A* **69** 022708 (2004)
- Di Piazza A, Milstein A I *Phys. Rev. A* **82** 042106 (2010)
- Ivanov D, Melnikov K *Phys. Rev. D* **57** 4025 (1998)
- Hencken K, Kuraev E A, Serbo V G *Phys. Rev. C* **75** 034903 (2007)
- Jentschura U D, Serbo V G *Eur. Phys. J. C* **64** 309 (2009)
- Brodsky S J, Gillespie J R *Phys. Rev.* **173** 1011 (1968)
- Мильштейн А И, Страховенко В М *ЖЭТФ* **103** 1584 (1993); Mil'shtein A I, Strakhovenko V M *JETP* **76** 775 (1993)
- Rohrlich F *Phys. Rev.* **108** 169 (1957)
- Sherman N K, Ross C K, Lokan K H *Phys. Rev. C* **21** 2328 (1980)
- Rosenblum E S, Shrader E F, Warner R M (Jr.) *Phys. Rev.* **88** 612 (1952)
- Gimm H A, Hubbell J H, National Bureau of Standards (U.S.) Technical Note No. 968 (Washington, D.C.: U.S. GPO, 1978)
- Di Piazza A, Milstein A I *Phys. Rev. A* **85** 042107 (2012)
- Deck R T, Moroi D S, Alling W R *Nucl. Phys. A* **133** 321 (1969)
- Olsen H *Phys. Rev.* **99** 1335 (1955)
- Olsen H, Maximon L C *Phys. Rev.* **114** 887 (1959)
- Lee R N, Milstein A I, Strakhovenko V M, Schwarz O Ya *ЖЭТФ* **127** 5 (2005); *JETP* **100** 1 (2005)
- Korol A V *J. Phys. B* **26** 3137 (1993)
- Крыловецкий А А и др. *ЖЭТФ* **122** 1168 (2002); Krylovetskii A A et al. *JETP* **95** 1006 (2002)
- Смирнов А И *ЯФ* **25** 1030 (1977); Smirnov A I *Sov. J. Nucl. Phys.* **25** 548 (1977)
- Krachkov P A, Lee R N, Milstein A I *Phys. Rev. A* **91** 062109 (2015)
- Huld B *Phys. Lett. B* **24** 185 (1967)
- Corbò G *Phys. Rev. D* **17** 725 (1978)
- Krachkov P A, Lee R N, Milstein A I *Phys. Rev. A* **90** 062112 (2014)
- Krachkov P A, Lee R N, Milstein A I *Phys. Lett. B* **751** 284 (2015)
- Ахизер А И, Болдышев В Ф, Шульга Н Ф *ТМФ* **23** 11 (1975); Akhiezer A I, Boldyshev V F, Shul'ga N F *Theor. Math. Phys.* **23** 311 (1975)
- Mott N F *Proc. R. Soc. London A* **124** 425 (1929)
- McKinley W A (Jr.), Feshbach H *Phys. Rev.* **74** 1759 (1948)
- Dalitz R H *Proc. R. Soc. London A* **206** 509 (1951)
- Johnson W R, Weber T A, Mullin C J *Phys. Rev.* **121** 933 (1961)
- Gluckstern R L, Lin S-R *J. Math. Phys.* **5** 1594 (1964)
- Wallace S J *Phys. Rev. D* **8** 1846 (1973)
- Tjon J A, Wallace S J *Phys. Rev. C* **74** 064602 (2006)

Quantum electrodynamics processes in the interaction of high-energy particles with atoms

P.A. Krachkov, R.N. Lee, A.I. Mil'shtein

Budker Institute of Nuclear Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, prosp. Akademika Lavrent'eva 11, 630090 Novosibirsk, Russian Federation
E-mail: peter_phys@mail.ru, r.n.lee@inp.nsk.su, a.i.milstein@inp.nsk.su

The recently developed method of employing quasiclassical Green's functions in solving the Dirac equation for various external field configurations has provided a breakthrough insight into the fundamental quantum electrodynamics processes whereby high-energy particles interact with atoms. This paper reviews recent results, exact in the atomic field parameters, on the cross sections for the electron-positron high-energy photoproduction, the single bremsstrahlung cross section for relativistic electrons and muons in the atomic field, double bremsstrahlung cross sections, etc. In many cases, the calculations are performed in the quasiclassical approximation with the inclusion of the first-order quasiclassical correction.

Keywords: quantum electrodynamics, strong field, photoproduction, bremsstrahlung

PACS numbers: 12.20.Ds, **32.80. - t**

Bibliography — 62 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **186** (7) 689–711 (2016)

DOI: 10.3367/UFN.2016.03.037743

Received 21 January 2016

Physics – Uspekhi **59** (7) (2016)

DOI:10.3367/UFN.2016.03.037743