Февраль 2016 г. **Том 186, № 2**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в средах с дисперсией

И.Н. Топтыгин, К. Левина

Рассмотрена связь тензора энергии-импульса электромагнитного поля с групповой скоростью квазимонохроматических волн в непоглощающем изотропном диэлектрике с временно́й и пространственной дисперсиями. Показано, что в отсутствие сторонних зарядов и токов в диэлектрике и при использовании плотности импульса, определённой по Абрагаму, для того, чтобы выполнялся закон сохранения импульса, не требуется вводить силу Абрагама, приложенную к веществу. Тензор энергии-импульса оказывается симметричным, а максвелловский тензор напряжений выражается либо через вектор плотности импульса и групповую скорость, либо через плотность энергии и групповую скорость. Тензор напряжений, как и плотность энергии, существенно зависит от производных по частоте и волновому вектору от функций, описывающих электромагнитные свойства среды (электрической и магнитной проницаемостей). Результаты применимы как для обычных, так и для левых сред. Проведено сравнение результатов с данными других авторов. Вычислено давление волн на границу раздела двух сред. Показано, что в обычных и левых средах на границе раздела в зависимости от параметров сред возможны как "световое давление", так и "световое притяжение". Учтён стрикционный эффект для жидких диэлектриков.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса, среды с дисперсией, групповая скорость, световое давление, стрикционный эффект

PACS numbers: 03.50.De, **41.20.–q**, **77.22.–d** DOI: 10.3367/UFNr.0186.201602c.0146

Содержание

1. Введение

Тензор энергии-импульса является фундаментальным понятием, характеризующим электромагнитное поле в вакууме и в средах. При записи в четырёхмерной форме его временны́е компоненты определяют плотности энергии и импульса, а также плотность потока энергии. Пространственные компоненты дают плотность потока импульса. Ввиду важной роли перечисленных величин практически во всех электродинамических явлениях вопрос о тензоре энергии-импульса и смежные вопросы обсуждались многими авторами в различных аспектах (см., например, работы [1–15]).

В среде с дисперсией тензор энергии-импульса удаётся построить только для тех спектральных интервалов, которые соответствуют "окнам прозрачности", т.е. в пренебрежении диссипацией [1]. В этих спектральных областях плотность электромагнитной энергии в среде описывается формулой Бриллюэна

$$w = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\big(\omega\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)\big)E^*_\alpha E_\beta + \mathbf{B}^*\mathbf{B}\right), \tag{1}$$

которая выражена здесь через тензор $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ диэлектрической проницаемости, связывающий фурье-гармоники макроскопического электрического поля $\mathbf{E}$ и вектора обобщённой электрической индукции $\tilde{\mathbf{D}}$. Формула Бриллюэна относится к пакету волн с гармониками, частоты и волновые векторы которых заключены в узких интервалах $\Delta\omega \ll \omega$, $\Delta k \ll k$ в окрестностях заданных значений $\mathbf{k},\omega$. В формуле (1) проведено усреднение по основному периоду $T = 2\pi/\omega$ поля. В отсутствие пространственной

И.Н. Топтыгин, К. Левина. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
ул. Политехническая 29, 195251 С.-Петербург, Российская Федерация
E-mail: igor_toptygin@mail.ru

Статья поступила 28 февраля 2015 г., после доработки 3 ноября 2015 г.

дисперсии и при использовании проницаемостей $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ формула Бриллюэна приобретает обычный вид:

$$w = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\big(\omega\epsilon(\omega)\big)\mathbf{E}^*\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial\omega}\big(\omega\mu(\omega)\big)\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right], \tag{2}$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu(\omega)$.

Подчеркнём, что как сама постановка задачи о плотности энергии в среде с дисперсией, так и её решение являются приближёнными. В выражениях (1) и (2) для плотности энергии при использовании уравнений Максвелла опущены малые слагаемые порядка $\Delta\omega/\omega \ll 1$, $\Delta k/k \ll 1$ (для большей убедительности мы воспроизведём соответствующие вычисления в разделе 4). Что касается постановки задачи, то в этой части ограничения ещё более значительны. Это объясняется тем, что физическая система "поле в веществе" состоит из двух подсистем, находящихся в постоянном взаимодействии. Основные из используемых ограничений — малость внешнего поля по сравнению с внутренними полями в веществе (рассматриваются линейные отклики на поле), близость среды к состоянию статистического равновесия (распределение Гиббса для невозмущённой среды) и отсутствие существенной диссипации, чтобы поле могло достаточно свободно проникать внутрь среды. Слабую диссипацию можно учесть по теории возмущений. При значительной диссипации, как отмечено в [1], тензор энергии-импульса, по-видимому, не может быть выражен только через тензор диэлектрической проницаемости. В него может войти, например, такой макроскопический параметр среды, как теплоёмкость.

Но уже с плотностью импульса $\mathbf{g}$ электромагнитного поля, как свидетельствует история становления этого важного понятия, возникли затруднения, связанные с различными определениями этой величины, принадлежащими Минковскому и Абрагаму [8–10] (см. также обсуждение этого вопроса в [12]). Хотя в настоящее время уже прочно утвердилось представление Абрагама

$$\mathbf{g} = \frac{1}{16\pi c}\left(\mathbf{E}^*\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{B}^* - \frac{\omega}{c}\frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial\mathbf{k}}\,E^*_\alpha E_\beta\right), \tag{3}$$

которое приводит к симметричному четырёхмерному тензору энергии-импульса и обеспечивает сохранение момента импульса в изотропной среде, в разделе 6 мы приведём дополнительные аргументы в пользу этого выражения, относящиеся к средам с временнóй и пространственной дисперсиями. В отсутствие пространственной дисперсии плотность импульса приобретает вид

$$\mathbf{g} = \frac{1}{16\pi c\mu(\omega)}\left(\mathbf{E}^*\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{B}^*\right). \tag{4}$$

Представление Минковского для плотности импульса и его обобщение для диспергирующих сред мы обсудим в разделе 5.

Наименее ясен вопрос о плотности потока импульса в диспергирующей среде. Питаевский в работе [16], ставшей классической, приходит к выводу, что плотность потока импульса в переменном электромагнитном поле при наличии дисперсии выражается так же, как в статических полях, при замене статических проницаемостей ε, μ соответствующими величинами $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, зависящими от частоты, а произведений напряжённостей вида $E_\alpha E_\beta$ — такими же произведениями, но усреднёнными по периоду поля:

$$E_\alpha E_\beta \to \overline{E_\alpha E_\beta}\,, \qquad H_\alpha H_\beta \to \overline{H_\alpha H_\beta}\,. \tag{5}$$

Это приводит к тензору натяжений для жидкого диэлектрика

$$\sigma^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon(\omega)\overline{E_\alpha E_\beta} + \mu(\omega)\overline{H_\alpha H_\beta}\right) - \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon - \rho\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)\overline{E^2}\delta_{\alpha\beta} - {}$$
$$- \frac{1}{8\pi}\left(\mu - \rho\,\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)\overline{H^2}\,\delta_{\alpha\beta}\,, \tag{6}$$

где ρ — плотность массы диэлектрика. Этот же способ перехода к переменному полю рекомендован в недавнем обзоре Макарова и Рухадзе [17].

Заманчивая простота результата вызывает, однако, некоторые сомнения. Известно, что волновые пакеты при наличии дисперсии переносятся (вместе со своими энергией и импульсом) с групповой скоростью $\mathbf{u} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\mathbf{k}$, которую в изотропной среде без пространственной дисперсии можно записать через производные от электрической и магнитной проницаемостей по частоте:

$$\mathbf{u} = \frac{c}{\mathrm{d}\big(\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}\big)/\mathrm{d}\omega}\,\frac{\mathbf{k}}{k}\,. \tag{7}$$

Поэтому отсутствие групповой скорости в выражении для плотности потока импульса вызывает вопросы. Следует отметить, что роль групповой скорости обсуждалась в известном обзоре Полевого и Рытова [18] при релятивистском обобщении этой скорости и построении тензора энергии-импульса в четырёхмерном формализме. Их результаты групповую скорость содержат.

Необходимо отметить, что, в отличие от фазовой скорости, имеющей точный геометрический (и физический) смысл, групповая скорость — понятие приближённое. Эта скорость возникает как линейный член разложения частоты $\omega(k)$ квазимонохроматической волны по волновому вектору (см. ниже формулу (21)). Но следует иметь в виду уже отмеченные ранее приближения, которые заложены в вычисление основной компоненты тензора энергии-импульса, т.е. в плотность энергии. Использование групповой скорости не выходит за пределы изначальных допущений о малости параметров $\Delta\omega/\omega \ll 1$, $\Delta k/k \ll 1$ и является целесообразным при решении поставленной задачи. Групповая скорость весьма наглядна, и она играет важную роль в самых разных задачах о распространении волн.

Отсутствие групповой скорости в формулах Питаевского может быть вызвано использованной им квазистационарной моделью с конденсатором, на обкладки которого подаётся переменное напряжение. Ясно, что в квазистационарном приближении волны в конденсаторе не распространяются и групповая скорость не может проявиться. Но она становится существенной при выходе за рамки этого приближения. Не снимает сомнения и сноска в книге Ландау и Лифшица [1, с. 384], где излагается работа Питаевского: "Для выполнения условий квазистационарности необходимо, чтобы размеры контура были малыми по сравнению с длиной волны c/ω. Это ограничение, однако, не имеет принципиального характера и не умаляет общности излагаемого вывода".

Более того, непосредственная проверка показывает, что тензор натяжений (6) не обеспечивает закона сохранения импульса электромагнитного поля, который должен выполняться в однородной среде без диссипации. Этот недостаток выражения (6) проявляется не только при наличии дисперсии, но и в средах без дисперсии, т.е. в отсутствие зависимости электрической, $\varepsilon > 0$, и магнитной, $\mu > 0$, проницаемостей от частоты и волнового вектора (см. формулы (71)–(74) и сопутствующий текст в разделе 7). Для выполнения закона сохранения импульса при задании его плотности в форме Абрагама (3), (4) и при задании тензора натяжений выражением Питаевского (6) необходимо ввести в уравнение баланса дополнительную силу, приложенную к веществу, — силу Абрагама. В наиболее важном для диспергирующих сред случае узкого пакета поперечных собственных мод диэлектрика нет никаких разумных физических оснований для такого усложнения теории и введения в неё фантомных величин. Более естественно модифицировать тензор натяжений с использованием ясной по смыслу физической величины — групповой скорости.

По указанным причинам целесообразно вернуться к уточнению вида тензора энергии-импульса в среде с дисперсией. Это стимулируется также всё более широким использованием метаматериалов, для которых временна́я и пространственная дисперсии играют первостепенную роль (см., например, обзор Аграновича и Гартштейна [19]). Отметим сразу, что этот очень многообразный и сложный для описания класс искусственно создаваемых веществ мы будем рассматривать в наиболее простой изотропной модели, которая характеризуется следующими главными свойствами: 1) возможно описание этих веществ отрицательными диэлектрической, $\varepsilon(\omega) < 0$, и магнитной, $\mu(\omega) < 0$, проницаемостями, зависящими от частоты; 2) групповая скорость в этих веществах, в отличие от таковой в обычных изотропных диэлектриках, направлена противоположно фазовой скорости и волновому вектору. Последнее условие может выполняться только для сред с дисперсией, в противном случае фазовая и групповая скорости одинаковы по величине и направлению.

2. Исходные уравнения

Будем рассматривать изотропную непоглощающую статистически однородную среду с временно́й и пространственной дисперсиями. Чтобы можно было продвинуться в область достаточно высоких частот, макроскопический ток $\mathbf{j}_{\text{int}}$, наведённый полем в диэлектрике, следует описывать как единое явление, не разделяя его на ток поляризации и ток намагничения. Поэтому удобной для нашей цели является система уравнений Максвелла с тремя векторами поля: $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\tilde{\mathbf{D}}$ [1, 20, 21], где $\tilde{\mathbf{D}}$ — вектор обобщённой электрической индукции, который выражается через полный ток, созданный частицами среды:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^{t} \mathbf{j}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t')\, \mathrm{d}t' , \tag{8}$$

или

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3 r'\, \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')\, E_\beta(\mathbf{r}', t') . \tag{9}$$

Здесь $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ — функция линейного отклика для однородной и стационарной среды, имеющая в рассматриваемом случае в представлении Фурье вид

$$\begin{gathered} \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{\mathrm{l}}(k, \omega)\, \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \varepsilon_{\mathrm{t}}(k, \omega) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) , \\ \tilde{D}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_\beta(\mathbf{k}, \omega) , \end{gathered} \tag{10}$$

где ε_{l}, ε_{t} — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости. В негиротропных средах тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ симметричен. Зависимость ε_{t} и ε_{l} от модуля $k = |\mathbf{k}|$ вызвана предполагаемой изотропией диэлектрика.

В случае идеально прозрачной (непоглощающей) среды тензор $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ действителен. Диссипация электромагнитной энергии описывается мнимыми частями $\varepsilon_{\mathrm{l}}''$ и $\varepsilon_{\mathrm{t}}''$. Вследствие наличия связи между действительными и мнимыми частями функций линейного отклика (дисперсионные соотношения Крамерса–Кронига) не существует среды, в которой диссипация отсутствовала бы при всех частотах поля. Но могут существовать среды с малой диссипацией в определённых спектральных интервалах ("окнах прозрачности"). Мы будем рассматривать именно такие интервалы, считая среду недиссипативной.

Если поле в среде описывается четырьмя векторами, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, без пространственной дисперсии, то полный тензор диэлектрической проницаемости содержит обе проницаемости, электрическую $\varepsilon(\omega)$ и магнитную $\mu(\omega)$, не зависящие от $\mathbf{k}$, но сам сохраняет зависимость от волнового вектора $\mathbf{k}$:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\mu(\omega)}\right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right). \tag{11}$$

Зависимость от $\mathbf{k}$ вызвана тем, что тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ связан с полным током среды, он описывает как электрические, так и магнитные свойства среды. Сопоставляя (10) и (11), находим связь между проницаемостями ε_{t}, ε_{l} и ε, μ:

$$\varepsilon_{\mathrm{l}}(\omega) = \varepsilon(\omega) , \qquad \varepsilon_{\mathrm{t}}(k, \omega) = \varepsilon(\omega) + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\mu(\omega)}\right) . \tag{12}$$

Уравнения Максвелла с тремя векторами поля при наличии сторонних зарядов ρ_{ext} и токов $\mathbf{j}_{\text{ext}}$ имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \tag{13}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) , \tag{14}$$

$$\nabla \tilde{\mathbf{D}} = 4\pi \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) , \qquad \nabla \mathbf{B} = 0 . \tag{15}$$

Запишем с помощью этой системы уравнение баланса энергии, передаваемой полю от внешнего источника:

$$-\mathbf{j}_{\text{ext}}\, \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{B}\, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\, \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} \right) + \frac{c}{4\pi}\, \nabla (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \tag{16}$$

Запишем также плотность силы $\mathbf{f}_{\text{ext}}$, с которой поле действует на сторонние заряды и токи:

$$\begin{gathered} \mathbf{f}_{\text{ext}} = \rho_{\text{ext}} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\, \mathbf{j}_{\text{ext}} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) + \\ + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi}\, \mathbf{E} (\nabla \tilde{\mathbf{D}}) - \\ - \frac{1}{4\pi c} \left(\tilde{\mathbf{D}} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \frac{1}{4\pi}\, \tilde{\mathbf{D}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) . \end{gathered} \tag{17}$$

Последние два слагаемых, в сумме дающие нуль, добавлены для симметрии.

3. Волновой пакет в диспергирующей среде

В среде с дисперсией необходимо рассмотреть электромагнитное поле в виде узкого волнового пакета, как это делается при получении формулы Бриллюэна (1). В противном случае затруднительно выразить представляющие интерес величины через диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{\mathrm{t}}(k,\omega)$ и $\varepsilon_{\mathrm{l}}(k,\omega)$, зависящие от частоты и волнового числа, которые вычисляются в микроскопической теории. (Другие способы введения диэлектрических проницаемостей см., например, в [22, 23].) Векторы электромагнитного поля для узкого в фурье-пространстве волнового пакета можно записать в виде интегралов Фурье по малым интервалам частоты $\alpha \leqslant \Delta\omega \ll \omega$ и волнового вектора $q \leqslant \Delta k \ll k$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\int \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}+\mathbf{q},\omega+\alpha)\exp\left[\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{r}-\mathrm{i}(\omega+\alpha)t\right]\frac{\mathrm{d}^3 q\,\mathrm{d}\alpha}{(2\pi)^4}= \\ =\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)\exp(\mathrm{i}\varphi)\,,\quad \varphi(\mathbf{r},t)=\mathbf{kr}-\omega t\,. \tag{18}$$

Амплитуда $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)$ определяется внешними источниками: ρ_{ext} и $\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}$. Она изменяется в пространстве и во времени медленно по сравнению с быстрым фазовым множителем $\exp(\mathrm{i}\varphi)$. В частности, производные по координатам и по времени от $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)$ имеют порядок величины $\Delta k/k$ и $\Delta\omega/\omega$, в отличие от производных от фазового множителя.

Но в областях, где $\rho_{\mathrm{ext}}=j_{\mathrm{ext}}=0$, можно конкретизировать зависимость амплитуды от координат и времени. В этих областях гармоники Фурье могут быть только собственными модами диэлектрика. Поэтому величины $\mathbf{k}$ и ω связаны уравнением дисперсии, которое следует из системы уравнений Максвелла (13)–(15) и для поперечных волн имеет вид

$$\omega^2(k)\varepsilon_{\mathrm{t}}(k,\omega)=c^2k^2\,. \tag{19}$$

Интеграл Фурье в соотношении (18) становится трёхмерным:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\int \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}+\mathbf{q})\exp\left[\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{r}-\mathrm{i}\omega(\mathbf{k}+\mathbf{q})t\right]\frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\,. \tag{20}$$

Вводя обычным образом групповую скорость $\mathbf{u}$,

$$\omega(\mathbf{k}+\mathbf{q})\approx\omega(k)+\mathbf{uq}\,,\qquad \mathbf{u}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\mathbf{k}}\,, \tag{21}$$

получаем волновой пакет с медленно изменяющейся амплитудой, который перемещается с групповой скоростью $\mathbf{u}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)=\int \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}+\mathbf{q})\exp\left[\mathrm{i}\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)\right]\frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\,, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)\exp(\mathrm{i}\varphi)\,. \tag{22}$$

В рассматриваемом приближении волновой пакет не изменяет своей формы.

Вектор обобщённой электрической индукции $\tilde{\mathbf{D}}$ можно выразить через гармоники Фурье линейного отклика и напряжённости электрического поля:

$$\tilde{D}_\alpha=\exp(\mathrm{i}\varphi)\int \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}+\mathbf{q},\omega+\alpha)\mathcal{E}_\beta(\mathbf{k}+\mathbf{q},\omega+\alpha)\times \\ \times\exp(\mathrm{i}\mathbf{qr}-\mathrm{i}\alpha t)\frac{\mathrm{d}^3 q\,\mathrm{d}\alpha}{(2\pi)^4}\,. \tag{23}$$

Вычислив интеграл, находим электрическую индукцию с точностью до членов первого порядка малости по параметрам $\Delta k/k$, $\Delta\omega/\omega$:

$$\tilde{D}_\alpha(\mathbf{r},t)=\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)\mathcal{E}_\beta(\mathbf{r},t)\exp(\mathrm{i}\varphi)-\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\varphi)\times \\ \times\left(\frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial\mathbf{k}}\,\boldsymbol{\nabla}-\frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{E}_\beta(\mathbf{r},t)\,. \tag{24}$$

Если волновой пакет состоит из собственных мод диэлектрика, то медленная амплитуда электрического поля имеет аргумент $\mathbf{r}-\mathbf{u}t$, т.е. $\mathcal{E}_\beta(\mathbf{r},t)=\mathcal{E}_\beta(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)$.

Магнитная индукция $\mathbf{B}$ определяется через $\mathbf{E}$ с помощью уравнения Максвелла (13). В нулевом порядке связь между векторами такая же, как и в случае монохроматических волн:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}=\frac{c}{\omega}\,\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mathcal{E}}\,, \tag{25}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ — медленно изменяющаяся амплитуда магнитной индукции. С учётом поправки первого порядка получаем

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}=\frac{c}{\omega}\,\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mathcal{E}}-\frac{\mathrm{i}c}{\omega}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\mathcal{E}}+\frac{\mathbf{k}}{\omega}\times\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)\exp(\mathrm{i}\varphi)\,. \tag{26}$$

В свободных от сторонних зарядов и токов областях $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)=\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)$.

4. Усреднение уравнения переноса энергии и групповая скорость

Вычислим плотность тока, которую индуцирует волновой пакет с электрическим полем (18) в однородной среде:

$$\mathbf{j}^{\mathrm{int}}_\alpha(\mathbf{r},t)=\int \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')E_\beta(\mathbf{r}',t')\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}t'= \\ =\exp\left[\mathrm{i}(\mathbf{kr}-\omega t)\right]\int \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\times \\ \times\exp\left[-\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+\mathrm{i}\omega(t-t')\right]\mathcal{E}_\beta(\mathbf{r}',t')\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}t'\,. \tag{27}$$

Здесь тензорная функция линейного отклика $\kappa_{\alpha\beta}$ имеет смысл обобщённой электропроводности. В представлении Фурье оба тензора связаны известным соотношением:

$$\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)=-\frac{\mathrm{i}\omega}{4\pi}\left(\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)-\delta_{\alpha\beta}\right). \tag{28}$$

Медленно изменяющуюся амплитуду можно разложить в степенной ряд в окрестности точки $(\mathbf{r},t)$ с точностью до членов первого порядка:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}',t')\approx\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)+\left[(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}\right]\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)+(t'-t)\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,.$$

Интегрирование после подстановки последнего выражения в (27) позволяет записать наведённый ток через медленно изменяющуюся амплитуду, а также фурье-образ функции линейного отклика и её производные по частоте и волновому вектору:

$$\mathbf{j}^{\mathrm{int}}_\alpha(\mathbf{r},t)=\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)E_\beta(\mathbf{r},t)+\exp\left[\mathrm{i}(\mathbf{kr}-\omega t)\right]\times \\ \times\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\omega(\epsilon_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta})}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\omega}{4\pi}\frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial k_\gamma}\nabla_\gamma\right]\mathcal{E}_\beta(\mathbf{r},t)\,. \tag{29}$$

Усреднение по основному периоду произведения $\mathbf{j}_{\rm int}\mathbf{E}$ приводит к результату

$$\overline{\mathbf{j}_{\rm int}\mathbf{E}} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\epsilon_{\alpha\beta}) - \delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial t}\,E_\alpha^* E_\beta - \\ - \frac{\omega}{16\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial\mathbf{k}}\,E_\alpha^* E_\beta\right). \tag{30}$$

Слагаемое нулевого порядка в (29) не даёт вклада, если пренебречь диссипацией электромагнитной энергии. Использовав предыдущий результат при усреднении исходного уравнения (16), получим баланс энергии в среде с дисперсией:

$$-\overline{\mathbf{j}_{\rm ext}\mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\epsilon_{\alpha\beta})E_\alpha^* E_\beta + \mathbf{B}^*\mathbf{B}\right)\right] + \\ + \operatorname{div}\left[\frac{c}{16\pi}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{B} - \frac{\omega}{c}\,\frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial\mathbf{k}}\,E_\alpha^* E_\beta\right)\right]. \tag{31}$$

Мы видим, что плотность энергии w (величина, стоящая под знаком производной по времени) и плотность потока энергии $\boldsymbol{\gamma}$ (под знаком дивергенции), полученные здесь из уравнений Максвелла, описываются соотношениями (1) и (3) (последнее выражение надо умножить на c^2). Они зависят от медленно изменяющихся амплитуд и не содержат быстро меняющихся фазовых множителей.

Для анализа представим w и $\boldsymbol{\gamma}$ в более простом виде через вектор электрического поля $\mathbf{E}$, исключив вектор $\mathbf{B}$ с помощью соотношений (25), (26) для волнового пакета, полученных из уравнений Максвелла. При этом мы не выйдем за пределы уже указанных выше приближений, поскольку сами соотношения (1) и (3), что очевидно из предыдущего, приближённы. С помощью формул (25), (26) находим

$$w = \frac{1}{16\pi}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\varepsilon_{\rm t} + \frac{\partial}{\partial\omega}\,\omega\varepsilon_{\rm t}\right), \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{c}{8\pi}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\sqrt{\varepsilon_{\rm t}}\left(1 - \frac{k}{2\varepsilon_{\rm t}}\,\frac{\partial\varepsilon_{\rm t}}{\partial k}\right)\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}. \tag{33}$$

Формулы (32), (33) применимы в областях, в которых отсутствуют сторонние источники поля, $\mathbf{j}_{\rm ext} = 0$, $\rho_{\rm ext} = 0$.

Найдём отношение приведённых величин:

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}}{w} = \mathbf{n}v_{\rm ph}\,\frac{\varepsilon_{\rm t} - (k/2)\,\partial\varepsilon_{\rm t}/\partial k}{\varepsilon_{\rm t} + (\omega/2)\,\partial\varepsilon_{\rm t}/\partial\omega}, \qquad v_{\rm ph} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\rm t}}}, \tag{34}$$

где $v_{\rm ph}$ — фазовая скорость. Выражения (34), так же как и $\boldsymbol{\gamma}$ и w по отдельности, не содержат продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\rm l}$, что вполне естественно — в продольных колебаниях отсутствует магнитный вектор $\mathbf{B}$ и они не могут свободно распространяться. Что касается дроби в правой части, то она по смыслу приведённого отношения представляет собой скорость переноса энергии в среде с дисперсией, т.е. групповую скорость

$$\mathbf{u} = \frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}c}{k\sqrt{\varepsilon_{\rm t}}}\,\frac{\varepsilon_{\rm t} - (k/2)\,\partial\varepsilon_{\rm t}/\partial k}{\varepsilon_{\rm t} + (\omega/2)\,\partial\varepsilon_{\rm t}/\partial\omega}. \tag{35}$$

В этом легко убедиться, использовав уравнение дисперсии (19) для поперечных волн и формулу $\mathbf{u} = {\rm d}\omega/{\rm d}\mathbf{k}$:

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon_{\rm t}(k,\omega)}}, \qquad \frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}\mathbf{k}} = \mathbf{n}\,\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\rm t}}} - \frac{ck}{2\varepsilon_{\rm t}^{3/2}}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\rm t}}{\partial\mathbf{k}} - \frac{\partial\varepsilon_{\rm t}}{\partial\omega}\,\frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}\mathbf{k}}\right), \tag{36}$$

откуда получаем (35). Групповая скорость в изотропных средах с дисперсией, как следует из её явного вида, может быть направлена как по волновому вектору, так и противоположно ему.

Проведённое вычисление убеждает нас в том, что групповая скорость возникает естественным образом в задачах по исследованию энергетических характеристик поперечных волн и полностью укладывается в первоначальные приближения, касающиеся "узкого" (в пространстве Фурье) волнового пакета. Как отмечалось, в отсутствие пространственной дисперсии групповую скорость можно вычислить по формуле (7).

5. Усреднение уравнения переноса импульса и представление Минковского

Уравнение (17) билинейно относительно векторов поля, которые должны быть действительными величинами. Учтём комплексный характер описания полей (18)–(26) и представим уравнение (17) через действительные части векторов поля:

$$\mathbf{f}_{\rm ext} = -\frac{1}{16\pi c}\,\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathbf{D}}^*\times\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{D}}\times\mathbf{B}^*) - \\ - \frac{1}{16\pi}\big[\tilde{\mathbf{D}}^*\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) + \tilde{\mathbf{D}}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}^*) + \\ + \mathbf{B}^*\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}^*) - \mathbf{E}^*(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\mathbf{D}}) - \mathbf{E}(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\mathbf{D}}^*)\big]. \tag{37}$$

Здесь опущены члены, содержащие быстро осциллирующие множители $\exp(\pm 2{\rm i}\varphi)$. Усреднение по основному периоду $T = 2\pi/\omega$ членов с производной по времени приводит к результату

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{\partial}{\partial t'}\left[\tilde{\mathbf{D}}^*\times\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{D}}\times\mathbf{B}^*\right]{\rm d}t' = \\ = \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{\mathcal{D}}^*\times\boldsymbol{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\mathcal{D}}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}^*\right]_t^{t+T} \approx \frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{\mathcal{D}}^*\times\boldsymbol{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\mathcal{D}}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}^*\right]. \tag{38}$$

Через $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ без тильды обозначена медленно изменяющаяся амплитуда электрической индукции. Слагаемые, содержащие $\exp(\pm 2{\rm i}\varphi)$, при усреднении дают члены второго порядка малости, которые следует опустить. При усреднении слагаемых, включающих в себя производные по координатам, следует учесть, что дифференцирование экспоненты $\boldsymbol{\nabla}\exp(\pm{\rm i}\varphi) = \pm{\rm i}\mathbf{k}\exp(\pm{\rm i}\varphi)$ даёт члены не только нулевого, но и последующих порядков малости по параметру $\Delta k/k \ll 1$. При порядковой оценке отдельных слагаемых полезно использовать тождества

$${\rm i}\mathbf{k}\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0, \qquad {\rm i}\mathbf{k}\boldsymbol{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0, \tag{39}$$

которые следуют из равенств $\boldsymbol{\nabla}\tilde{\mathbf{D}} = 0$, $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{B} = 0$. Первое из этих равенств применимо в областях, где отсутствуют сторонние заряды.

Члены нулевого порядка взаимно сокращаются. Слагаемые второго порядка должны быть опущены. В результате, используя соотношения (10) и (24), получаем следующие группы усреднённых по периоду слагаемых первого порядка:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left[\tilde{\mathbf{D}}^*\times(\nabla\times\mathbf{E})+\tilde{\mathbf{D}}\times(\nabla\times\mathbf{E}^*)-\mathbf{E}^*(\nabla\tilde{\mathbf{D}})-\mathbf{E}(\nabla\tilde{\mathbf{D}}^*)\right]\mathrm{d}t'=$$
$$=-\varepsilon_{\mathrm{t}}(k,\omega)\left[\nabla(\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*)-(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\nabla)\boldsymbol{\mathcal{E}}-(\boldsymbol{\mathcal{E}}\nabla)\boldsymbol{\mathcal{E}}^*-\boldsymbol{\mathcal{E}}(\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^*)-\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}})\right]-$$
$$-\,\mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{t}}\left[\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}\boldsymbol{\mathcal{E}})-\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*)-\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\nabla\boldsymbol{\mathcal{D}})-\boldsymbol{\mathcal{E}}(\nabla\boldsymbol{\mathcal{D}}^*)-\right.$$
$$\left.-\,\mathbf{k}\left\{\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial k}\frac{1}{k}\left[\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}\nabla)\boldsymbol{\mathcal{E}}^*+\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}\nabla)\boldsymbol{\mathcal{E}}\right]-\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial\omega}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}^*}{\partial t}+\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right)\right\}\right]. \tag{40}$$

Слагаемые, содержащие магнитную индукцию $\mathbf{B}$, имеют более простую структуру:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left[\mathbf{B}^*\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}^*)\right]_\alpha\mathrm{d}t'=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[(\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{B}}^*)\delta_{\alpha\beta}-\mathcal{B}_\alpha\mathcal{B}_\beta^*-\mathcal{B}_\alpha^*\mathcal{B}_\beta\right]. \tag{41}$$

Используем результаты (38)–(41) для усреднения уравнения баланса импульса (37). Слагаемые под знаком производной по времени после усреднения приобрели вид

$$\mathbf{g}^{\mathrm{M}}=\frac{1}{16\pi c}\left(\boldsymbol{\mathcal{D}}^*\times\boldsymbol{\mathcal{B}}+\boldsymbol{\mathcal{D}}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}^*+\mathbf{n}ck\,\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial\omega}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\right). \tag{42}$$

Выражение (42) представляет собой обобщение плотности импульса Минковского [8, 9] для случая диспергирующей среды.

Чтобы в этом убедиться, примем во внимание, что в отсутствие дисперсии ($\partial\varepsilon/\partial\omega=0$, $\partial\mu/\partial\omega=0$) для поперечных волн, согласно равенствам (10)–(12) и (19),

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}=\varepsilon\mu\mathbf{E}=\mu\mathbf{D}\,, \tag{43}$$

где $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ — обычная электрическая индукция, которая используется в уравнениях Максвелла с четырьмя векторами поля. Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ одинаковы в обоих вариантах записи уравнений. Последнее слагаемое в правой части (42) можно в этом случае, используя (12), представить в виде

$$\mathbf{n}ck\,\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial\omega}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}})=-(\mu-1)(\mathbf{D}^*\times\boldsymbol{\mathcal{B}}+\mathbf{D}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}^*)\,. \tag{44}$$

Подставив (43) и (44) в выражение (42), получим плотность импульса по Минковскому, усреднённую по основному периоду. В современных обозначениях (см. [12, 21]) имеем

$$\mathbf{g}^{\mathrm{M}}=\frac{1}{16\pi c}(\mathbf{D}^*\times\mathbf{B}+\mathbf{D}\times\mathbf{B}^*)\,, \tag{45}$$

куда входят необобщённая (обычная) электрическая и магнитная индукции.

Возвращаясь к выражению (42) для общего случая, применим его к волновому пакету, составленному из собственных мод диэлектрика (т.е. предположим, что источник электромагнитного поля (ρ_{ext}, $\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}$) находится за пределами рассматриваемой области). Упростим его, исключая векторы $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ с помощью соотношений (10), (19), (22), (25):

$$\mathbf{g}^{\mathrm{M}}=\frac{\mathbf{n}}{8\pi c}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}})\varepsilon_{\mathrm{t}}^{3/2}\left(1+\frac{\omega}{2\varepsilon_{\mathrm{t}}}\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial\omega}\right),\qquad \mathbf{n}=\frac{\mathbf{k}}{k}\,. \tag{46}$$

Переход к проницаемостям $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ позволяет придать последнему выражению вид

$$\mathbf{g}^{\mathrm{M}}=\frac{\mathbf{n}}{8\pi c}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}})\varepsilon(\omega)\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1+\frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}+\frac{\omega}{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right). \tag{47}$$

При переходе к вакууму все приведённые выше представления вектора $\mathbf{g}^{\mathrm{M}}$ описывают плотность потока импульса волнового пакета

$$\mathbf{g}^{\mathrm{vac}}=\frac{1}{16\pi c}(\boldsymbol{\mathcal{E}}\times\boldsymbol{\mathcal{H}}^*+\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\times\boldsymbol{\mathcal{H}})\,, \tag{48}$$

усреднённую по основному периоду.

Для дальнейшего рассмотрения существенно, что все производные по координатам в правой части (37) выражаются в виде дивергенции $\partial\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}}/\partial x_\beta$ симметричного тензора второго ранга $\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}}$:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}}=\frac{1}{16\pi}\left[\mathcal{E}_\alpha^*\mathcal{E}_\beta+\mathcal{E}_\alpha\mathcal{E}_\beta^*-\left(\varepsilon_{\mathrm{t}}\delta_{\alpha\beta}-n_\alpha n_\beta k\,\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial k}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}+\right.$$
$$\left.+\,\mathcal{B}_\alpha\mathcal{B}_\beta^*+\mathcal{B}_\alpha^*\mathcal{B}_\beta-\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{B}}^*\delta_{\alpha\beta}\right]. \tag{49}$$

При переходе от диэлектрика к вакууму $\varepsilon_{\mathrm{t}}=1$, векторы $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ переходят в микроскопические напряжённости полей $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, вектор $\mathbf{g}$ превращается в плотность импульса электромагнитного поля, а $\sigma_{\alpha\beta}$ — в усреднённый по основному периоду максвелловский тензор натяжений для вакуума (см., например, [24]), отличающийся знаком от плотности потока импульса. В итоге баланс импульса в дифференциальной форме (37) принимает при $f_{\mathrm{ext}}=0$ вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial g_\alpha^{\mathrm{M}}}{\partial t}-\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}}}{\partial x_\beta}=0\,. \tag{50}$$

В областях, где $\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}\neq0$, уравнение (50) приобретает источник:

$$\frac{\partial g_\alpha^{\mathrm{M}}}{\partial t}-\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}}}{\partial x_\beta}=-\bar{\mathbf{f}}_{\mathrm{ext}}\,. \tag{51}$$

При этом вид величин $\mathbf{g}^{\mathrm{M}}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}}$ усложняется, они могут быть вычислены только при конкретизации источников поля ρ_{ext}, $\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}$.

Уравнение (50) выражает закон сохранения интеграла по объёму от вектора $\mathbf{g}^{\mathrm{M}}$, вытекающий из макроскопических уравнений Максвелла, и оно может быть представлено в интегральном виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{(V)}g_\alpha^{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}V=\oint_{(S)}\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}S_\beta\,. \tag{52}$$

Поскольку мы исходили из выражения для плотности силы, приложенной к внешним зарядам и токам, левую часть (52) можно рассматривать как увеличение импульса, связанного с электромагнитным полем, в объёме V. Правая часть (52) даёт поток импульса, втекающего в этот объём через ограничивающую его замкнутую поверхность.

Тензор $\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}}$ можно существенно упростить, воспользовавшись соотношением (25), которое позволяет выразить все слагаемые через электрическое поле:

$$\mathcal{B}_\alpha^*\mathcal{B}_\beta+\mathcal{B}_\alpha\mathcal{B}_\beta^*=\varepsilon_{\mathrm{t}}\left[2(\delta_{\alpha\beta}-n_\alpha n_\beta)\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*-\mathcal{E}_\alpha^*\mathcal{E}_\beta-\mathcal{E}_\alpha\mathcal{E}_\beta^*\right]. \tag{53}$$

Это приводит к компактному выражению:

$$\sigma^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta} = -\frac{n_\alpha n_\beta}{8\pi}\,\varepsilon_{\mathrm{t}}\left(1 - \frac{k}{2\varepsilon_{\mathrm{t}}}\,\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial k}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\,. \tag{54}$$

Во всех равенствах начиная с (38) произведено усреднение по периоду поля. Диэлектрик считался изотропным, несжимаемым, имеющим постоянную плотность и температуру, но учитывались временна́я и пространственная дисперсии.

Следует напомнить, что тензор, стоящий под знаком дивергенции, определён неоднозначно. К нему можно добавить произвольный тензор второго ранга $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$, имеющий нулевую дивергенцию: $\partial\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}/\partial x_\beta = 0$. Наиболее общая форма такого тензора — дивергенция $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \partial\lambda_{\alpha\beta\gamma}/\partial x_\gamma$ некоторого антисимметричного по индексам β, γ тензора третьего ранга $\lambda_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) = -\lambda_{\alpha\gamma\beta}$.

Однако, как было указано В.А. Фоком [25], тензор вида $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$, билинейный по векторам поля, можно построить, только если в него включены производные от этих векторов. Поэтому Фок постулирует принцип, которому должен удовлетворять тензор энергии-импульса электромагнитного поля: *он должен быть функцией состояния рассматриваемой системы*. В данном случае это означает, что тензор должен зависеть от векторов поля, полностью описывающих в совокупности с другими параметрами (плотностью массы и температурой либо плотностью массы и удельной энтропией) состояние диэлектрика. В число параметров, определяющих состояние, не входят производные от векторов поля. Этот принцип позволяет отказаться от неоднозначности, вносимой слагаемыми вида $\partial\lambda_{\alpha\beta\gamma}/\partial x_\gamma$. Сформулированный Фоком принцип существен и для выбора плотности потока энергии $\boldsymbol{\gamma}$, поскольку вектор Пойнтинга изначально входит под знаком дивергенции и к нему тоже относится обсуждавшаяся выше неоднозначность.

Если использовать выражение (35) для групповой скорости, то плотность потока импульса электромагнитного поля по Минковскому приобретает вид произведения соответствующей компоненты плотности самого импульса на скорости перемещения пакета волн, $g^{\mathrm{M}}_\alpha u_\beta$, и позволяет представить этот тензор в наиболее простой и наглядной симметричной форме

$$\sigma^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta} = -g^{\mathrm{M}}_\alpha u_\beta = -g^{\mathrm{M}}_\beta u_\alpha\,. \tag{55}$$

Вновь, как и в разделе 4, групповая скорость возникла из уравнений Максвелла для волнового пакета. В данном случае она представляет собой скорость переноса импульса. В неизменном появлении групповой скорости в уравнениях переноса пакетов квазимонохроматических волн нет никакой мистики. После усреднения по периоду рассматриваемые билинейные по полю физические величины содержат только медленно изменяющиеся амплитуды полей, которые зависят не от $\mathbf{r}$ и t по отдельности, а от единого аргумента $\mathbf{r} - \mathbf{u}t$, включающего в себя групповую скорость. Это обстоятельство было отмечено в разделе 3. Поэтому любой вектор $\mathbf{G}$, зависящий от медленных амплитуд $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial G_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \Sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0\,, \tag{56}$$

где $\Sigma_{\alpha\beta} = -G_\alpha u_\beta$ можно рассматривать как плотность потока вектора $\mathbf{G}$. Тензор $\Sigma_{\alpha\beta}$ будет симметричным, если вектор $\mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t) = G(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)\mathbf{n}$ направлен вдоль волнового вектора $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$. Такая неопределённость выбора плотности импульса электромагнитного поля и его потока в среде с дисперсией показывает, что недостаточно использования только уравнения непрерывности, которое получается из уравнений Максвелла, для определения указанных величин. Требуется привлечь ещё некоторые общефизические принципы.

Тензор $\sigma^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta}$, взятый с противоположным знаком, представляет собой пространственную часть четырёхмерного тензора энергии-импульса электромагнитного поля в прозрачной среде. В аналогичной форме с участием групповой скорости записан тензор натяжений в обзоре Полевого и Рытова [18]. Но в обзоре [18], по нашему мнению, неправильно записана плотность импульса и не дано явных выражений этих величин через диэлектрические проницаемости.

6. Симметрия 4-тензора энергии-импульса и плотность импульса

Несмотря на то что величины $\mathbf{g}^{\mathrm{M}}$ и $\sigma^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta}$ связаны уравнением неразрывности (50), их нельзя считать соответственно плотностью импульса и плотностью потока импульса в диспергирующей среде. Кроме неоднозначности, которая обсуждалась в конце раздела 5, это связано с тем, что четырёхмерный тензор энергии-импульса, в который входят указанные величины, оказывается несимметричным:

$$T^{\mathrm{M}}_{ik} = \begin{pmatrix} w & -c\mathbf{g}^{\mathrm{M}} \\ -\dfrac{\boldsymbol{\gamma}}{c} & -\sigma^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Здесь $i, k = 0,1,2,3$; $\alpha, \beta = 1,2,3$; w — плотность энергии (формула Бриллюэна (1)), которая при использовании тензора (10) принимает вид

$$w = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\,\omega\varepsilon_{\mathrm{t}}(k,\omega)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{B}}^*\boldsymbol{\mathcal{B}}\right), \tag{58}$$

либо, если исключить вектор $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ с помощью уравнений Максвелла,

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{16\pi}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\varepsilon_{\mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial\omega}\,\omega\varepsilon_{\mathrm{t}}\right), \\ w &= \frac{\varepsilon(\omega)}{8\pi}\left[1 + \frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} + \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)\right]\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}. \end{aligned} \tag{59}$$

Последнее выражение не учитывает пространственной дисперсии, в нём использованы проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$, зависящие только от частоты. Отметим, что, хотя производные по частоте, входящие в предыдущие формулы, могут иметь разные знаки, плотность электромагнитной энергии $w \geqslant 0$ не может быть отрицательной — в противном случае генерация поля могла бы происходить без какой-либо затраты энергии источником.

Обобщённый вектор Пойнтинга (плотность потока энергии) может быть представлен как (см. [1, 20, 21], а также результаты раздела 4)

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{c}{16\pi}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}^* - \frac{\omega}{c}\,\frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial\mathbf{k}}\,\mathcal{E}^*_\alpha\mathcal{E}_\beta\right), \tag{60}$$

и для пакета поперечных волн он приобретает вид

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{c}{8\pi}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\,\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\left(1 - \frac{k}{2\varepsilon_{\mathrm{t}}}\,\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial k}\right)\mathbf{n}\,. \tag{61}$$

Отношение величин (61) и (59) равно групповой скорости (35). Если проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ не зависят от волнового числа, то формулу (61) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{c}{16\pi}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{H}} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^*\right), \qquad (62)$$

где $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}/\mu(\omega)$, либо как

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{c}{8\pi\mu}\left(\frac{ck}{\omega}\right)(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}})\mathbf{n} = \frac{c\sqrt{\varepsilon\mu}}{8\pi\mu}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}})\mathbf{n}\,. \qquad (63)$$

Заметим, что $\sqrt{\varepsilon\mu}/\mu \neq \sqrt{\varepsilon/\mu}$, если $\varepsilon < 0$, $\mu < 0$ (метаматериалы) и используется, как обычно, положительное значение квадратного корня. Направление вектора $\boldsymbol{\gamma}$, как и плотности потока импульса $\mathbf{g}$, может совпадать с направлением $\mathbf{n}$ волнового вектора либо быть противоположным ему.

Возвращаясь к тензору энергии-импульса (57) и сравнивая компоненты $T_{0\alpha}^{\mathrm{M}}$ и $T_{\alpha 0}^{\mathrm{M}}$ с использованием выражений (46) и (61), приходим к выводу, что этот тензор несимметричен, $T_{0\alpha}^{\mathrm{M}} \neq T_{\alpha 0}^{\mathrm{M}}$, но тензор напряжений симметричен, $\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}} = \sigma_{\beta\alpha}^{\mathrm{M}}$. Несимметрия T_{ik}^{M} не вызывает удивления, поскольку хорошо известно, что тензор энергии-импульса Минковского несимметричен и в отсутствие дисперсии. Многие авторы, начиная с Абрагама [9], считают несимметрию тензора существенным недостатком трактовки Минковского и принимают для плотности импульса формулу, предложенную Абрагамом (см. [1]):

$$\mathbf{g}^{\mathrm{A}} = \frac{c}{16\pi}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{H}} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^*\right) \qquad (64)$$

(здесь приведено среднее по периоду значение). При этом появляется дополнительное слагаемое в уравнении баланса импульса — сила Абрагама.

Симметрия 4-тензора энергии-импульса требуется для сохранения момента импульса замкнутой системы вещество + поле и записи его в традиционной наглядной форме через плотность самого импульса. Это свойство очевидно для системы, состоящей из электромагнитного поля и заряженных частиц, находящихся в вакууме. В случае неподвижного диэлектрика в плотность импульса вносят вклад как собственно поле, так и электронная подсистема диэлектрика, взаимодействующая с его ядерным остовом, и требование симметрии 4-тензора для такой незамкнутой системы не столь очевидно. В частности, это требование не считают обязательным Полевой и Рытов [18]: "При такой постановке задачи стремиться к симметрии T_{ik} нет физических оснований". Решительно высказывается против тензора Абрагама, лишая его даже статуса тензора, также автор работы [26].

Однако главные свойства симметрии диэлектрической среды, необходимые для сохранения момента импульса, — однородность и изотропия — сохраняются в рассматриваемом случае. Этими свойствами обладает пространство, заполненное однородным и изотропным непоглощающим диэлектриком, который рассматривается как макроскопическая "сплошная среда". Поэтому нет оснований отказываться от симметрии 4-тензора энергии-импульса. Кроме того, в нашем случае волнового пакета в прозрачном диэлектрике возникает дополнительное соображение в пользу симметрии тензора энергии-импульса, вызванное неоднозначностью определения плотности импульса из уравнения непрерывности. Указанная неоднозначность преодолевается, если наложить на тензор энергии-импульса условие симметрии, которой он безусловно обладает в вакуумной модели и, согласно приведённым аргументам, должен обладать в рассматриваемом нами случае однородной и изотропной диэлектрической среды. Условие симметрии приводит к соотношению $T_{0\alpha} = T_{\alpha 0}$ или в трёхмерном случае — к соотношению $c\mathbf{g} = \boldsymbol{\gamma}/c$. С помощью (61) и (63) находим

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{n}}{8\pi c}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}})\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\left(1 - \frac{k}{2\varepsilon_{\mathrm{t}}}\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial k}\right) \qquad (65)$$

при наличии пространственной дисперсии и

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{n}}{8\pi c\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\,(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}})\,, \qquad (66)$$

если использовать зависящие только от частоты проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. При таком выборе плотности импульса её вектор направлен вдоль фазовой скорости $\mathbf{v}_{\mathrm{ph}} = c(\mathbf{k}/k)\sqrt{\varepsilon\mu}$ в обычной среде и противоположно $\mathbf{v}_{\mathrm{ph}}$ в левых средах ($\varepsilon < 0$, $\mu < 0$). Но в обоих случаях направление $\mathbf{g}$ совпадает с направлением групповой скорости, проекция которой на $\mathbf{k}$ может иметь оба знака. Тензор энергии-импульса содержит производные от проницаемостей ($\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\varepsilon_{\mathrm{t}}(k,\omega)$) по частоте не только в компоненте $T_{00} = w$ (плотность энергии), но и в тензоре натяжений

$$\sigma_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta} = -g_\alpha u_\beta = -g_\beta u_\alpha \qquad (67)$$

ввиду наличия в нём групповой скорости. Приведём этот тензор в двух формах в соответствии с двумя выражениями (65), (66) для плотности импульса:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= -\frac{\mathbf{un}}{8\pi c}\,(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}})\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{t}}}\left(1 - \frac{k}{2\varepsilon_{\mathrm{t}}}\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\partial k}\right)n_\alpha n_\beta\,, \\ \sigma_{\alpha\beta} &= -\frac{\mathbf{un}}{8\pi c\mu}\,\sqrt{\varepsilon\mu}\,(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}})\,n_\alpha n_\beta\,. \end{aligned} \qquad (68)$$

В формулы (68) входит только электрическое поле. Нетрудно записать и симметричное выражение, в которое войдут обе напряжённости. Поскольку $g_\alpha = \gamma_\alpha/c^2 = wu_\alpha/c^2$, то из (68) получаем совершенно симметричное выражение

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{u_\alpha u_\beta w}{c^2}\,, \qquad (69)$$

где плотность энергии w даётся формулой Бриллюэна (1) или (2).

7. Сравнение с тензором напряжений других авторов

Вернёмся теперь к тензору напряжений Питаевского (6) и запишем его для волнового пакета в используемых обозначениях:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{P}} = \frac{\varepsilon(\omega)}{8\pi}\left(\mathcal{E}_\alpha\mathcal{E}_\beta^* + \mathcal{E}_\alpha^*\mathcal{E}_\beta - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\delta_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{8\pi\mu(\omega)}\left(\mathcal{B}_\alpha\mathcal{B}_\beta^* + \mathcal{B}_\alpha^*\mathcal{B}_\beta - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{B}}^*\delta_{\alpha\beta}\right). \qquad (70)$$

Здесь опущены стрикционные слагаемые, несущественные для обсуждаемого вопроса, т.е. предполагается несжимаемость среды, $\rho = \mathrm{const}$. С помощью формулы (25) упрощаем выражение для тензора напряжений:

$$\sigma^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta} = -n_\alpha n_\beta \, \frac{\varepsilon(\omega)}{8\pi} \, \boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \,. \tag{71}$$

Ранее мы показали, что выполняется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \,, \tag{72}$$

где g_α — плотность импульса по Абрагаму, которая даётся формулой (4) либо для волнового пакета выражением (66), а $\sigma_{\alpha\beta}$ определяется второй формулой (68). Это означает, что полный импульс пакета $\mathbf{G} = \int \mathbf{g} \, \mathrm{d}V$ сохраняется. Тензор натяжения Питаевского (71) отличается от (68) и при отсутствии дисперсии, и при её наличии:

$$\frac{\sigma^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta}}{\sigma_{\alpha\beta}} = \frac{c}{u} \sqrt{\varepsilon\mu} \neq 1 \,. \tag{73}$$

Тензор напряжений в диспергирующей среде, как и плотность энергии (1), содержит производные по частоте и волновому вектору, которые вносит в теорию групповая скорость. Уравнение непрерывности с тензором Питаевского нарушается:

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \neq \frac{\partial \sigma^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \,. \tag{74}$$

Равенство можно восстановить, либо использовав наш тензор (68), либо добавив в правую часть неравенства (74) плотность некоторой силы ("силы Абрагама"). В этом случае интеграл по объёму $\int \mathbf{g} \, \mathrm{d}V$ не сохраняется и его нельзя считать полным импульсом системы, а можно рассматривать только как некоторую часть импульса. Импульс оказывается распределённым между электромагнитным полем и веществом, причём принцип этого распределения (построение тензора $\sigma^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta}$) основан на квазистационарной модели, неприменимой к волновым явлениям, и поэтому он носит случайный характер. Фактически плотность импульса и его поток создаются совместными колебаниями электромагнитного поля и заряженных частиц вещества. Корректное разделение импульса на две части, принадлежащие только полю и только веществу, вряд ли возможно, так как между этими взаимодействующими подсистемами происходит свободный обмен физическими характеристиками, в том числе и импульсом.

Сравним также наш результат с результатами Полевого и Рытова [18], касающимися электромагнитного поля. В наших обозначениях их формулы (51) и (53) принимают вид

$$w = T_{00} \,, \tag{75а}$$

$$\gamma_\alpha = w u_\alpha = -c T_{\alpha 0} \,, \tag{75б}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -g_\alpha u_\beta = -T_{\alpha\beta} \,, \tag{75в}$$

$$g_\alpha = \frac{w}{\omega} \, k_\alpha = -T_{0\alpha} \,. \tag{75г}$$

Согласно равенству (75в) связь тензора напряжений с плотностью импульса и групповой скоростью соответствует нашему результату. Но плотность импульса $\mathbf{g}$ определена таким образом, что тензор энергии-импульса оказывается несимметричным, что особо оговаривают и сами авторы. Как отмечалось выше, с этим трудно согласиться.

В заключение этого раздела сравним полученный нами результат для тензора напряжений (69) с тензором напряжений электромагнитного поля в вакууме (см., например, [2, 13, 24]). Для квазимонохроматического поля в вакууме имеем усреднённый по периоду тензор

$$\sigma^{\mathrm{v}}_{\alpha\mu} = \frac{1}{16\pi} \left(\mathcal{E}^*_\alpha \mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}^*_\mu + \mathcal{H}^*_\alpha \mathcal{H}_\mu + \mathcal{H}_\alpha \mathcal{H}^*_\mu \right) - \\ - \frac{1}{16\pi} \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}^* \boldsymbol{\mathcal{H}} \right) \delta_{\alpha\mu} \,, \tag{76}$$

а также соотношения между векторами поля

$$\mathbf{n} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{H}} \,, \quad |\boldsymbol{\mathcal{E}}| = |\boldsymbol{\mathcal{H}}| \,, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k} \,, \quad u_\alpha = c n_\alpha \tag{77}$$

и плотность энергии поля

$$w = \frac{1}{16\pi} \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}^* \boldsymbol{\mathcal{H}} \right) . \tag{78}$$

С помощью приведённых формул находим

$$\sigma^{\mathrm{v}}_{\alpha\mu} = -w n_\alpha n_\mu \,. \tag{79}$$

Тензор напряжений (69) в диэлектрике без потерь отличается от выражения (79) для вакуума заменой плотности энергии (78) выражением Бриллюэна (1) и единичных векторов отношениями u_α / c. Максвелловский тензор напряжений (69), как и плотность энергии (1), содержит производные от диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\mathrm{t}}(k, \omega)$ по частоте и волновому вектору.

8. Световое давление на границе раздела двух сред

Наиболее прямая экспериментальная проверка различных соотношений, характеризующих импульс электромагнитного поля, может быть выполнена посредством измерения силы. По-видимому, наиболее подходящим объектом для этой цели выступает световое давление, впервые измеренное в 1899–1907 гг. П.Н. Лебедевым [27]. В связи с этой возможностью вычислим силу, приложенную к плоской границе между средами, одна из которых (либо обе) является прозрачным диэлектриком. Этот вопрос интересен в связи с развернувшейся в последнее время дискуссией [17, 26, 28, 29] о так называемом световом притяжении, которое участники дискуссии связывают с метаматериалами, т.е. искусственными материалами, имеющими отрицательные значения электрической и магнитной проницаемостей, $\varepsilon(\omega) < 0$ и $\mu(\omega) < 0$, в некотором интервале частот (см., например, работы [28, 30], а также [17, 26, 29, 31]).

Будем описывать взаимодействие волны с границей сред в приближении геометрической оптики, как это делается при выводе формул Френеля (см. [32]), и исключим из рассмотрения пространственную дисперсию. Последнее условие очень важно, так как пространственная дисперсия приводит к нелокальной взаимозависимости векторов поля и не позволяет записать граничные условия для них в привычной форме. Напомним также, что мы рассматриваем метаматериалы в простейшей модели (см. конец раздела 1) и не претендуем на сколько-нибудь подробное описание этого весьма разнообразного и сложного по своим свойствам класса искусственных материалов.

Начнём с самого простого случая нормального падения плоской квазимонохроматической волны (волнового пакета) на плоскую границу раздела двух прозрачных диэлектриков с положительными проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 в отсутствие временнóй дисперсии. Коэффициент отражения R, который вычисляется с помощью формул Френеля, имеет вид

$$R = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} - \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} + \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}} \right)^2 . \tag{80}$$

При $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \mu_1/\mu_2$ отражение отсутствует, $R = 0$. На границе раздела векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ непрерывны, поэтому плотность импульса $g = g_1 = g_2$ тоже непрерывна, но групповая скорость испытывает скачок, $u_1/u_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_1 = \mu_2/\mu_1$. Поэтому скачок испытывает и плотность потока импульса. Давление на границу сред P_{rad} создаётся разностью потоков импульса с двух сторон от границы:

$$P_{\text{rad}} = g(u_1 - u_2) = g u_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) , \tag{81}$$

где $g u_1 = \varepsilon_1 \boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*/(8\pi) > 0$ — плотность потока импульса падающей на границу волны. Как следует из (81), волна оказывает давление на границу (толкает её в направлении распространения), если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$; в противном случае имеет место притяжение границы навстречу падающей волне. Таким образом, "световое притяжение" возможно и на границах обычных прозрачных диэлектриков с положительными ε и μ.

Заметим, что формула (81) описывает только давление, которое вызывает электромагнитная волна. Это давление приложено в слое толщиной в несколько длин волн, в котором происходит перестройка поля, по обе стороны от геометрической границы. На этот слой могут действовать и неэлектромагнитные силы, например гравитация и гидростатическое давление в жидком диэлектрике. Для метаматериалов обсуждаемая формула непригодна, так как она не учитывает дисперсии.

Теперь рассмотрим случай, когда первая среда имеет $\varepsilon_1 < 0$ и $\mu_1 < 0$. Квазимонохроматическая волна падает из этой среды на границу с другой средой. Это означает, что вектор Пойнтинга, плотность импульса и групповая скорость направлены в сторону границы. Волновой вектор и фазовая скорость имеют противоположное направление — от границы. Все изложенные соображения о направлениях потоков и скоростей, в том числе для волн с противоположными направлениями фазовой и групповой скоростей, были с исчерпывающей ясностью разъяснены в известных лекциях Л.И. Мандельштама [33, с. 431–437]. Таким образом, к границе в каждую единицу времени поступает поток импульса $g_1 u_1 > 0$, направленный из первой среды во вторую.

Если вторая среда поглощает всю падающую на границу энергию ("абсолютно чёрное тело"), то при нормальном падении

$$P_{\text{rad}} = g_1 u_1 > 0 , \tag{82}$$

т.е. имеет место световое давление на границу, приложенное в слое толщиной порядка длины поглощения. В случае идеально отражающей второй среды давление удваивается. Наши результаты отличаются от утверждений, которые сделаны в работах [17, 26, 29], о том, что световое давление заменяется в левых средах "световым притяжением" вследствие неравенства $\varepsilon < 0$. Из приведённых выше данных ясно, что такое утверждение противоречит закону сохранения импульса. По-видимому, ошибка связана с тем, что тензоры напряжений Питаевского (71) и наш (68) неодинаково ведут себя при переходе от обычной среды к левой среде. Тензор Питаевского (71) меняет знак при замене $\varepsilon \to -\varepsilon$, $\mu \to -\mu$, тогда как знак тензора (68) остаётся неизменным (меняются знаки у $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, ε, μ). Неправильный вывод о "световом притяжении" авторов [17] вызван использованием некорректного выражения (6) для тензора напряжений в диспергирующей среде и пренебрежением силой Абрагама. В нашем расчёте сила Абрагама учитывается, будучи включённой в выражение для тензора напряжений.

При использовании формулы (66) для левой среды в ней нужно дважды поменять знак: сначала при замене знаков величин ε и μ и вторично при замене $\mathbf{n} \to -\mathbf{n}$, так как в левых средах направление волнового вектора противоположно направлению потоков энергии и импульса волны. Что касается групповой скорости, то в левых средах, как и в обычных, она ориентирована в направлении потоков энергии и импульса и оказывается противоположной волновому вектору. Это возможно только в средах с дисперсией и, согласно формуле (7), требует выполнения условия

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\, \omega \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} < 0 \quad \text{либо} \quad 1 + \Pi(\omega) < 0 , \quad \text{где}$$

$$\Pi(\omega) = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega} + \frac{1}{\mu} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \right) . \tag{83}$$

Заметим, что это условие совместимо с распространением электромагнитных волн только для сред, в которых одновременно $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$, в противном случае плотность электромагнитной энергии (59) становится отрицательной:

$$w = \frac{\varepsilon(\omega)}{8\pi}\, \mathbf{E}\mathbf{E}^* \left[1 + \Pi(\omega) \right] = \frac{\mu(\omega)}{8\pi}\, \mathbf{H}\mathbf{H}^* \left[1 + \Pi(\omega) \right] . \tag{84}$$

Это означало бы неустойчивость среды относительно спонтанного возрастания электромагнитного поля, и такая среда не может реализоваться в природе.

При нормальном падении квазимонохроматической волны на границу двух прозрачных сред, из которых первая среда — левая, а вторая — обычная, световое давление на границу можно вычислить как разность плотностей потоков импульса на этой границе с учётом падающей, отражённой и прошедшей во вторую среду волн:

$$P_{\text{rad}} = g_1 u_1 (1 + R) - g_2 u_2 (1 - R) . \tag{85}$$

Здесь величины g, u являются положительными и представляют собой проекции соответствующих векторов на нормаль к границе, направленную из первой среды во вторую. Коэффициент отражения

$$R = \left| \frac{\sqrt{|\varepsilon_1| \mu_2} - \sqrt{\varepsilon_2 |\mu_1|}}{\sqrt{|\varepsilon_1| \mu_2} + \sqrt{\varepsilon_2 |\mu_1|}} \right|^2 \tag{86}$$

легко вычисляется с помощью соответствующих формул Френеля.

При падении волны на границу под произвольным углом θ_0 нужно рассмотреть разные поляризации падающей волны. Для каждой поляризации векторы **g**, **u** нужно спроецировать на нормаль, в результате чего приходим к выражениям

$$P'_{\rm rad} = \mathbf{g}'_1\mathbf{u}_1\big(1 + R_{\perp}(\theta_0)\big)\cos^2\theta_0 - \mathbf{g}'_2\mathbf{u}_2\big(1 - R_{\perp}(\theta_0)\big)\cos^2\theta_{\rm r}\,, \tag{87}$$

$$P''_{\rm rad} = \mathbf{g}''_1\mathbf{u}_1\big(1 + R_{\perp}(\theta_0)\big)\cos^2\theta_0 - \mathbf{g}''_2\mathbf{u}_2\big(1 - R_{\perp}(\theta_0)\big)\cos^2\theta_{\rm r}\,, \tag{88}$$

где $\theta_{\rm r}$ — угол преломления. В равенстве (87) величина $\mathbf{g}'$ представляет собой плотность импульса, созданного компонентами поля $\mathbf{E}_\perp$ и $\mathbf{H}_\parallel$, тогда как в равенстве (88) вектор $\mathbf{g}''$ создаётся компонентами $\mathbf{E}_\parallel$ и $\mathbf{H}_\perp$ падающей волны.

В формулах (85)–(88) величина $P_{\rm rad}$ может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от параметров сред, поэтому возможно как собственно давление, так и "световое притяжение".

9. Стрикционный эффект в среде с дисперсией

В проведённом рассмотрении мы считали среду несжимаемой, т.е. плотность массы $\rho = \text{const}$ предполагалась фиксированной и неизменной. Но электромагнитное поле может вызвать внутренние напряжения в веществе, которые в жидких и газообразных средах приведут к изменению плотности, а в твёрдых телах могут создать также и сдвиговые деформации. Эти эффекты называются стрикционными. Хотя, как отмечено И.Е. Таммом [3], при вычислении полной силы, действующей на диэлектрическое тело в вакууме либо в окружении других тел, находящихся в механическом равновесии, стрикционные силы не дают вклада, их влияние на внутренние деформации нельзя считать малым.

Стрикционный эффект впервые был отмечен и учтён Гельмгольцем [34] ещё в XIX в. В тензоре Питаевского (6) стрикционным вкладам соответствуют слагаемые с производными $\partial\varepsilon/\partial\rho$ и $\partial\mu/\partial\rho$. Ясно, что соответствующие слагаемые возникнут и в нашем рассмотрении, если мы откажемся от условия несжимаемости среды.

Для этой цели ранжируем временны́е и пространственные масштабы нашей макроскопической задачи. Наименьший масштаб $\lambda = 2\pi/k$ имеет длина квазимонохроматической волны. Значительно больший масштаб $l = 2\pi/\Delta k$ имеет пространственный размер рассматриваемого волнового пакета. Чтобы учесть стрикционный эффект в жидком диэлектрике (т.е. в отсутствие возможных сдвиговых напряжений), рассмотрим слегка неоднородную среду, плотность $\rho(\mathbf{r})$ которой зависит от координат. Будем считать масштаб L неоднородности ($\partial\rho/\partial r \approx \rho/L$) большим по сравнению с размерами волнового пакета:

$$\lambda \ll l \ll L\,. \tag{89}$$

В противном случае предыдущее рассмотрение потеряет силу, так как групповая скорость станет зависеть от координат и характер движения волнового пакета сильно усложнится.

В проведённых расчётах мы рассматривали предельный случай $L \to \infty$. Теперь будем считать масштаб L конечным. В этом случае величины $\varepsilon(\omega,\rho)$, $\mu(\omega,\rho)$ и групповая скорость $u(\omega,\rho)$ становятся медленными функциями координат ввиду зависимости $\rho(\mathbf{r})$. Состояние изотропной среды характеризуется кроме плотности ещё одним параметром, в качестве которого используют температуру T или удельную энтропию s. Этот параметр будем считать постоянным, т.е. примем условия изотермичности или адиабатичности (в зависимости от условий опыта).

Вычислим производную по времени от плотности импульса, записав его в симметричной форме через векторы $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$:

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathbf{n}}{16\pi c}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\mu}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\varepsilon}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}^*\boldsymbol{\mathcal{H}}\right). \tag{90}$$

Время входит в аргументы полей $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)$. Дифференцирование даёт

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \approx -u_\beta\,\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial x_\beta}\,,$$

где опущены слагаемые порядка l/L, и аналогичное выражение для магнитного поля. Это позволяет записать производную от плотности импульса:

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = -\frac{n_\alpha n_\beta}{16\pi}\left[\eta_{\rm e}(\omega,\rho)\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}) + \eta_{\rm m}(\omega,\rho)\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\boldsymbol{\mathcal{H}}^*\boldsymbol{\mathcal{H}})\right], \tag{91}$$

в которой величины

$$\eta_{\rm e}(\omega,\rho) = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\,u}{\mu c}\,, \qquad \eta_{\rm m}(\omega,\rho) = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\,u}{\varepsilon c} \tag{92}$$

включают в себя обе проницаемости и групповую скорость, u — её проекция на направление волнового вектора **k**.

Теперь следует преобразовать правую часть в дивергенцию тензора напряжений. Проведя тождественное преобразование

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = -\frac{n_\alpha n_\beta}{16\pi}\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\eta_{\rm e}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}} + \eta_{\rm m}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}^*\boldsymbol{\mathcal{H}}) + \frac{n_\alpha n_\beta}{16\pi}\left[\frac{\partial\eta_{\rm e}}{\partial\rho}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}) + \frac{\partial\eta_{\rm m}}{\partial\rho}(\boldsymbol{\mathcal{H}}^*\boldsymbol{\mathcal{H}})\right]\frac{\partial\rho}{\partial x_\beta}\,, \tag{93}$$

проинтегрируем обе части полученного равенства по области пространства, полностью включающей в себя рассматриваемый волновой пакет. Ввиду сохранения полного импульса электромагнитного поля в среде без потерь имеем

$$\frac{\rm d}{{\rm d}t}\int g_\alpha\,{\rm d}V = 0\,, \tag{94}$$

откуда следует

$$\int\left[\frac{\partial\eta_{\rm e}}{\partial\rho}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}) + \frac{\partial\eta_{\rm m}}{\partial\rho}(\boldsymbol{\mathcal{H}}^*\boldsymbol{\mathcal{H}})\right]\frac{\partial\rho}{\partial x_\beta}\;{\rm d}V = -\int\rho\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{\partial\eta_{\rm e}}{\partial\rho}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}) + \frac{\partial\eta_{\rm m}}{\partial\rho}(\boldsymbol{\mathcal{H}}^*\boldsymbol{\mathcal{H}})\right]. \tag{95}$$

В последнем интеграле с используемой точностью можно внести множитель ρ под знак производной, что даст ошибку порядка l/L. С учётом подынтегрального выражения (95) можно записать уравнение (93) через дивергенцию тензора натяжений

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{n_\alpha n_\beta}{16\pi}\left[\left(\eta_\mathrm{e} + \rho\,\frac{\partial\eta_\mathrm{e}}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}} + \left(\eta_\mathrm{m} + \rho\,\frac{\partial\eta_\mathrm{m}}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{\mathcal{H}}^*\boldsymbol{\mathcal{H}}\right] \quad (96)$$

в обычном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\,. \quad (97)$$

Нужно отметить, что в выражении $\partial\sigma_{\alpha\beta}/\partial x_\beta$, как следует из приведённого вывода, последовательно учтены члены порядка $\mathcal{E}^2/l$, но слагаемые следующего порядка малости $\mathcal{E}^2/L$ вычислены неточно. Поэтому в пренебрежении последними малыми членами при дифференцировании (96) по координатам множители, содержащие ρ, η_e, η_m, можно считать постоянными.

Если дисперсия пренебрежимо мала и $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $u = c/\sqrt{\varepsilon\mu} = v_\mathrm{ph}$, то тензор напряжений принимает вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{n_\alpha n_\beta}{16\pi\varepsilon\mu}\left[\left(\varepsilon - \rho\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\rho}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}} + \left(\mu - \rho\,\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\rho}\right)\boldsymbol{\mathcal{H}}^*\boldsymbol{\mathcal{H}}\right]. \quad (98)$$

Он приобретает значительное сходство с тензором напряжений для статических электрического и магнитного полей [1], но полного тождества быть не может, поскольку в нашем случае речь идёт о поле поперечных электромагнитных волн, распространяющихся в заданном направлении **n**, и тензор усреднён по основному периоду поля.

10. Заключение

Проведённое исследование показало, что пакет собственных мод непоглощающего изотропного диэлектрика обладает простыми и наглядными свойствами. В частности, тензор плотности потока импульса электромагнитного поля выражается точно так же, как и плотность потока импульса классических частиц, т.е. в виде произведения соответствующих компонент плотности самого импульса и групповой скорости перемещения пакета. Последняя выступает как аналог скорости частиц. Это позволяет придать тензору напряжений Максвелла наглядную форму: $\sigma_{\alpha\beta} = -wu_\alpha u_\beta/c^2$, одинаковую для поля в вакууме и в среде с дисперсией. Аналогичное соотношение выполняется и для плотности самого импульса в вакууме и в среде: $g_\alpha = wu_\alpha/c^2$. В вакууме отношение u_α/c заменяется отношением k_α/k.

При этом, разумеется, нельзя упускать из виду тот факт, что групповая скорость, несмотря на её наглядность и важную роль в теории распространения волн (см., в частности, историческую заметку Левина [35]), является понятием по своей сущности приближённым и возникает как линейный член разложения частоты по степеням волнового вектора. Учёт последующих членов разложения приводит к расплыванию волнового пакета и к поправкам в большинстве формул, содержащих групповую скорость. Но и сама постановка задачи о тензоре энергии-импульса в среде с дисперсией приближённа, так как в ней производится разложение по малым параметрам $\Delta k/k$ и $\Delta\omega/\omega$, задающим ширину спектрального интервала. Поэтому использование групповой скорости не выходит за рамки сделанных изначально допущений. Последнее утверждение мы подробно обосновали при выводе уравнений переноса энергии и импульса из уравнений Максвелла в разделах 4 и 5.

Корректное выражение для плотности потока импульса позволяет легко вычислять электромагнитную силу, приложенную к границе двух сред с различными электромагнитными свойствами, в том числе с отрицательными электрической и магнитной проницаемостями, $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$. Указанная сила (давление квазимонохроматических волн) может иметь разные направления по отношению к нормали в зависимости от параметров обеих сред.

Таким образом, на основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Полный импульс **G** пакета квазимонохроматических поперечных волн в непоглощающем изотропном диэлектрике, определённый согласно Абрагаму, сохраняется без введения дополнительной силы Абрагама: $\mathbf{G} = \int \mathbf{g}\,\mathrm{d}V = \mathrm{const}$.
2. Тензор плотности потока импульса электромагнитного поля является симметричным и выражается в виде произведения компонент g_α плотности самого импульса и групповой скорости u_β перемещения пакета: $T_{\alpha\beta} = g_\alpha u_\beta = g_\beta u_\alpha$.
3. Тензор плотности потока импульса, как и плотность энергии, существенно зависит от производных по частоте от функций, описывающих электромагнитные свойства среды (т.е. от электрической и магнитной проницаемостей). Эта зависимость возникает за счёт групповой скорости.
4. Полученные нами результаты применимы как для обычных, так и для "левых" сред, у которых $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$, а групповая и фазовая скорости направлены в противоположные стороны.
5. На границе раздела сред в зависимости от их параметров возможны как "световое давление", так и "световое притяжение", что следует из вычисленного нами давления на границу двух сред с разными электромагнитными свойствами.

Авторы благодарят участников семинаров и конференций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого и Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН за обсуждение работы. Авторы признательны рецензенту за глубокие и очень полезные замечания, способствовавшие, как мы надеемся, более ясному изложению наших результатов.

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000)
3. Тамм И Е *Основы теории электричества* (М.: Наука, 1976); Пер. на англ. яз.: Tamm I E *Fundamentals of the Theory of Electricity* (Moscow: Mir Publ., 1979)
4. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы* 3-е изд. (М.: Наука, 1987); Пер. на англ. яз.: Ginzburg V L *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics* 2nd ed. (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1989)
5. Скобельцын Д В *УФН* **110** 253 (1973); Skobel'tsyn D V *Sov. Phys. Usp.* **16** 381 (1973)
6. Гинзбург В Л *УФН* **110** 309 (1973); Ginzburg V L *Sov. Phys. Usp.* **16** 434 (1973)

7. Болотовский Б М, Столяров С Н *УФН* **114** 569 (1974); Bolotovskii B M, Stolyarov S N *Sov. Phys. Usp.* **18** 875 (1975)
8. Minkowski H "Die Grundlagen für die elektromagnetischen Vorgënge in bewegten Körpern" *Nachr. König. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* 53 (1908); Пер. на русск. яз.: Минковский Г "Основные уравнения электромагнитных процессов в движущихся телах", в сб. *Эйнштейновский сборник 1978–1979* (Под ред. В Л Гинзбурга) (М.: Наука, 1983) с. 5
9. Minkowski H "Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetishen Forgänge in bewegten Körpern fom Standpunkt der Elektronentheorie" *Math. Ann.* **68** 526 (1902); Пер. на русск. яз.: Минковский Г "Вывод основных уравнений для электромагнитных процессов в движущихся телах с точки зрения теории электронов", в сб. *Эйнштейновский сборник 1978–1979* (Под ред. В Л Гинзбурга) (М.: Наука, 1983) с. 64
10. Abraham M *Rend. Circ. Mat. Palermo* **28** 1 (1909); **31** 527 (1910)
11. Pauli W *Relativitätstheorie* (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. V, Tl. 2, Heft IV) (Leipzig: Teubner, 1921) Art. 19; Пер. на англ. яз.: Pauli W *Theory of Relativity* (New York: Pergamon Press, 1958); Пер. на русск. яз.: Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983)
12. Гинзбург В Л, Угаров В А *УФН* **118** 175 (1976); Ginzburg V L, Ugarov V A *Sov. Phys. Usp.* **19** 94 (1976)
13. Угаров В А *Специальная теория относительности* (М.: Наука, 1977)
14. Philbin T G *Phys. Rev. A* **83** 013823 (2011)
15. Зябловский А А и др. *УФН* **184** 1177 (2014); Zyablovsky A A et al. *Phys. Usp.* **57** 1063 (2014)
16. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **39** 1450 (1960); Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **12** 1008 (1961)
17. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **181** 1357 (2011); Makarov V P, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **54** 1285 (2011)
18. Полевой В Г, Рытов С М *УФН* **125** 549 (1978); Polevoi V G, Rytov S M *Sov. Phys. Usp.* **21** 630 (1978)
19. Агранович В М, Гартштейн Ю Н *УФН* **176** 1051 (2006); Agranovich V M, Gartstein Yu N *Phys. Usp.* **49** 1029 (2006)
20. Памятных Е А, Туров Е А *Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях* (М.: Физматлит, 2000)
21. Топтыгин И Н *Современная электродинамика* Ч. 2 *Теория электромагнитных явлений в веществе* (М.–Ижевск: Инст. компьют. исслед., РХД, 2005); Пер. на англ. яз.: Toptygin I N *Electromagnetic Phenomena in Matter. Statistical and Quantum Approaches* (Weinheim: Wiley-VCH, 2015)
22. Виноградов А П *УФН* **172** 363 (2002); Vinogradov A P *Phys. Usp.* **45** 331 (2002)
23. Виноградов А П, Дорофеенко А В, Зухди С *УФН* **178** 511 (2008); Vinogradov A P, Dorofeenko A V, Zouhdi S *Phys. Usp.* **51** 485 (2008)
24. Toptygin I N *Foundations of Classical and Quantum Electrodynamics* (Weinheim: Wiley – VCH, 2014)
25. Фок В А *Теория пространства, времени и тяготения* (М.: ГИТТЛ, 1955); Пер. на англ. яз.: Fok V A *The Theory of Space, Time and Gravitation* (New York: Pergamon Press, 1959)
26. Веселаго В Г *УФН* **179** 689 (2009); Veselago V G *Phys. Usp.* **52** 649 (2009)
27. Лебедев П Н *Собрание сочинений* (М.: Изд-во АН СССР, 1963)
28. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967); Veselago V G *Sov. Phys. Usp.* **10** 509 (1968)
29. Веселаго В Г *УФН* **173** 790 (2003); Veselago V G *Phys. Usp.* **46** 764 (2003)
30. Pendry J B *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966 (2000)
31. Блиох К Ю, Блиох Ю П *УФН* **174** 439 (2004); Bliokh K Yu, Bliokh Yu P *Phys Usp.* **47** 393 (2004)
32. Born M Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1969); Пер. на русск. яз.: Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)
33. Мандельштам Л И *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике* (М.: Наука, 1972)
34. Helmholtz H *Ann. Physik* **249** 385 (1881)
35. Левин М Л *УФН* **125** 565 (1978); Levin M L *Sov. Phys. Usp.* **21** 639 (1978)

Energy–momentum tensor of the electromagnetic field in dispersive media

I.N. Toptygin, K. Levina
Peter The Great Saint-Petersburg Polytechnic University,
ul. Politekhnicheskaya 29, 195251 St. Petersburg, Russian Federation
E-mail: *igor_toptygin@mail.ru*

It is studied how the energy–momentum tensor of the electromagnetic field and the group velocity of quasi-monochromatic waves are related in a nonabsorptive, isotropic, spatially and temporally dispersive dielectric. It is shown that the Abraham force acting on a dielectric need not be introduced to validate momentum conservation if the dielectric is external charge- and current-free and if the used momentum density definition is that of Abraham. The energy–momentum tensor turns out to be symmetric, and the Maxwell stress tensor is expressed either in terms of the momentum density vector and the group velocity or in terms of the energy density and the group velocity. The stress tensor and the energy density are considerably dependent on the frequency and wave vector derivatives of the functions that describe medium electromagnetic properties (i.e., the dielectric permittivity and the magnetic permeability). The obtained results are applicable to both ordinary and left-handed media. The results are compared with those of other authors. The pressure a wave exerts on the interface between two media is calculated. For both ordinary and left-handed media, either "radiation pressure" or "radiation attraction" can occur at the interface depending on the material parameters of the two media. For liquid dielectrics, the striction effect is considered.

Keywords: energy–momentum tensor, dispersive media, group velocity, light pressure, striction effect

PACS numbers: 03.50.De, **41.20.–q**, **77.22.–d** DOI: 10.3367/UFNr.0186.201602c.0146

Bibliography — 35 references *Received 28 February 2015, revised 3 November 2015*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **186** (2) 146–158 (2016) *Physics–Uspekhi* **59** (2) (2016)