

Система конвективных термиков как обобщённый ансамбль броуновских частиц

А.Н. Вульфсон, О.О. Бородин

Рассмотрена система термиков, формирующая тонкую структуру турбулентного конвективного слоя жидкости или газа. Изложен упрощённый вероятностно-геометрический подход, позволяющий определить средние параметры системы термиков на плоскости по измерениям вдоль линии наблюдения. Для изолированного термика построено динамическое уравнение, учитывающее его взаимодействие с окружающей средой. Для системы термиков построено стохастическое уравнение Ланжевена, подобное уравнению ансамбля "быстрых" броуновских частиц. Нелинейное уравнение Ланжевена системы термиков приводит к ассоциированной кинетической форме уравнения Фоккера – Планка. Показано, что стационарное решение кинетического уравнения Фоккера – Планка имеет форму распределения Максвелла и аппроксимирует экспериментально наблюдаемые распределения в турбулентном конвективном слое атмосферы.

Ключевые слова: стохастический ансамбль конвективных термиков, нелинейное уравнение Ланжевена, уравнение Фоккера – Планка, распределение Максвелла по скоростям в ансамбле конвективных термиков

PACS numbers: 05.10.Gg, 05.40.Jc, 44.25.+f, 92.60.Fm, 92.60.hk

DOI: 10.3367/UFN.0186.201602a.0113

Содержание

1. Введение (113).
 2. Турбулентный конвективный слой и его параметры (114).
 3. Эмпирические средние параметры системы атмосферных конвективных термиков слоя перемешивания и их аппроксимации (116).
 4. Уравнения движения изолированного термика в слое перемешивания (117).
 5. Уравнения движения термиков ансамбля в слое перемешивания (118).
 6. Вертикальная однородность плотности вероятности распределения конвективных термиков по скоростям (119).
 7. Плотность вероятности распределения конвективных термиков по скоростям. Нелинейное уравнение Ланжевена и кинетическое уравнение Фоккера – Планка (120).
 8. Обобщённое распределение Максвелла для ансамбля конвективных термиков. Сопоставление с экспериментальными данными (121).
 9. Заключение (121).
- Приложение А. Средние радиусы системы термиков на плоскости и прямой (122).
- Приложение Б. Средние плавучести системы термиков на плоскости и прямой (122).
- Список литературы (124).

1. Введение

Ансамбль броуновских частиц является наиболее известным стохастическим ансамблем физической кинетики. Изучение этого ансамбля, начатое в исследованиях [1–3], получило исчерпывающее завершение в работах [4, 5].

Допустим, что сферические броуновские частицы с постоянными массами и радиусами движутся с различными скоростями в среде, обладающей постоянными параметрами плотности, температуры и вязкости. Броуновские частицы имеют микроскопические или ультрамикроскопические размеры, поэтому их движение в вязкой жидкости характеризуется малыми числами Рейнольдса, $Re \leq 1$. В соответствии с приближением Стокса при постоянных значениях радиуса и вязкости сила сопротивления p_{md} пропорциональна скорости движения частиц, т.е. $p_{md} \sim Re$, а соответствующее уравнение Ланжевена является линейным.

Математическая модель ансамбля "быстрых" броуновских частиц была предложена в работах [6–9]. В этой модели сила сопротивления произвольным образом зависит от скорости движения частиц, т.е. $p_{md} = p_{md}(Re)$, а соответствующее уравнение Ланжевена является нелинейным. Приложение модели ансамбля быстрых частиц к релятивистскому броуновскому движению рассмотрено в работах [10, 11].

Заметим, что классические ансамбли броуновских частиц являются "термодинамическими" системами, так как расположены в термостате с фиксированной температурой T . Такие "термодинамические" системы характеризуются постоянным средним значением квадрата тепловой скорости $\overline{v^2} = 3k_B T / (2m) = \text{const}$, где k_B — постоянная Больцмана, m — масса частицы.

Существуют также не "термодинамические" стохастические системы, т.е. системы, не связанные с термо-

А.Н. Вульфсон, О.О. Бородин. Институт проблем нефти и газа РАН, ул. Губкина 3, 119333 Москва, Российская Федерация; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", ул. Мясницкая 20, 101000 Москва, Российская Федерация
E-mail: vulfson@ipng.ru, borodin@ipng.ru

Статья поступила 20 августа 2015 г.,
после доработки 30 ноября 2015 г.

статом, которые можно рассматривать как аналоги ансамбля броуновских частиц. Известно, что в условиях развитой турбулентной конвекции над горизонтально однородной нагретой поверхностью всегда возникает система изолированных плавучих вихрей (термиков), равномерно заполняющих конвективный слой и образующих его тонкую структуру [12–14].

Изолинии полей вертикальной скорости и пульсации температуры достаточно чётко отделяют более тёплый восходящий термик от окружающей среды. При этом форма изолиний позволяет рассматривать термик как тело вращения с вертикальной осью и характеризовать его форму радиусом наибольшего горизонтального сечения. Это обстоятельство позволяет интерпретировать систему термиком как ансамбль частиц.

Конвективные термики зарождаются в сравнительно тонком поверхностном слое вблизи нагретой поверхности, а затем поднимаются вверх под действием силы Архимеда. Существенно, что процесс возникновения термиком связан с неустойчивостью поверхностного слоя и он является случайным. Взаимодействие конвективных вихрей между собой и со своим окружением также является случайным процессом, поэтому система термиком представляет собой стохастический ансамбль.

Значительную часть конвективного слоя составляет так называемый слой интенсивного перемешивания, в котором значение второго турбулентного момента вертикальной скорости практически постоянно, т.е. $\overline{w^2} = \text{const}$. Эта аналогия между термостатом и слоем перемешивания позволяет использовать в уравнениях Ланжевена системы термиком и ансамбля броуновских частиц случайные силы одной и той же структуры.

В условиях атмосферы развитие проникающей турбулентной конвекции происходит над нагретой горизонтально однородной подстилающей поверхностью суши или океана. На существование системы атмосферных термиком и тонкой структуры конвективного слоя впервые было указано в работе [15]. Систематическая обработка самолётных измерений пульсаций температур всплывающих термиком впервые была проведена в [12]. Измерения с помощью самолётов-лабораторий являются наиболее эффективным методом комплексного исследования турбулентной конвекции в атмосфере (см., например, [16, 17]).

Более тёплые атмосферные термики достаточно хорошо идентифицируются лидарами [18] и доплеровскими радаром [19]. Характерные размеры атмосферных термиком изменяются от нескольких десятков сантиметров до нескольких десятков метров. Характерные значения скорости и положительных пульсаций температуры атмосферных термиком имеют порядок $0,5 \text{ м с}^{-1}$ и $0,3^\circ\text{С}$ соответственно.

Системы термиком возникают и пограничном слое океана при резком охлаждении его поверхности. Однако хаотическое движение термиком при этом носит нисходящий характер [20]. Наглядные представления о системе термиком можно получить на основе лабораторного моделирования при больших числах Рэлея. Результаты экспериментов [21], представленные на рис. 1, отчётливо демонстрируют хаотический характер движения термиком.

В настоящем обзоре считается, что конвективные термики являются изолированными более тёплыми вихрями, всплывающими со случайными вертикальными скоростями. При этом предполагается, что термики



Рис. 1. Ансамбль термиком в форме тяжёлых солевых пальцев, опускающихся в водяном слое, согласно [21]. Нисходящее движение термиком визуализируется добавлением в соль флуоресцеина и освещением через щель.

обладают одинаковыми геометрическими размерами и плавучестями. Таким образом, система конвективных термиком рассматривается как обобщённый ансамбль броуновских частиц. В рамках предложенной модели для описания системы термиком используется специальное уравнение Ланжевена с нелинейной диссипативной силой и случайной силой, структура которой известна для системы броуновских частиц. Иными словами, стохастическая сила в уравнении движения термиком задаётся как произведение корня из коэффициента диффузии Эйнштейна и белого шума Гаусса.

Построенное уравнение Ланжевена определяет в фазовом пространстве вертикальных скоростей кинетическое уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности термиком стохастического ансамбля. Выбирается такая интерпретация стохастического интеграла в уравнении Ланжевена, чтобы плотность вероятности термиком удовлетворяла К-форме ассоциированного уравнения Фоккера–Планка с переменными коэффициентами (см. [9; 22, pp. 292–294; 23]). Позднее подобные уравнения рассматривались также в исследованиях [24, 25].

С кинетической точки зрения использование К-формы уравнения Фоккера–Планка с переменными коэффициентами является весьма существенным, так как только для этого уравнения нестационарные распределения по вертикальным скоростям сходятся на больших временах к распределению Максвелла.

Равновесное распределение конвективных термиком по вертикальным скоростям строится как стационарное решение К-формы уравнения Фоккера–Планка. Показано, что построенное теоретически распределение Максвелла по вертикальным скоростям качественно и количественно согласуется с известными эмпирическими распределениями восходящих движений, полученными в натуральных экспериментах.

Возможность распространения методов физической кинетики на турбулентные течения однородной жидкости обсуждалась в монографиях [26, 27]. Предложенные методы оказались эффективными при описании однородной изотропной турбулентности. Приложение кинетического подхода к задаче турбулентной конвекции впервые рассмотрено в работах [28, 29]. Результаты исследований, представленные в настоящем обзоре, являются продолжением и обоснованием этих работ.

2. Турбулентный конвективный слой и его параметры

Рассмотрим статический слой жидкости или газа в поле силы тяжести, ограниченный снизу плоской поверх-

ностью. Турбулентный конвективный слой формируется над плоской поверхностью при однородном нагревании среды.

Пусть t — время, x, y, z — координаты декартовой системы координат с осью z , направленной противоположно силе тяжести g , и осями x и y , лежащими на плоской нагретой подстилающей поверхности; u, w — компоненты вектора скорости на плоскости xu и вдоль оси z соответственно; $\rho(x, y, z, t), \Theta(x, y, z, t)$ и $p(x, y, z, t)$ — локальные значения плотности, потенциальной температуры и давления соответственно, а $\bar{\rho}(z), \bar{\Theta}(z), \bar{p}(z)$ — фоновые значения плотности, потенциальной температуры и давления, связанные уравнениями состояния идеального газа и статики; $\Theta' = \Theta - \bar{\Theta}, p' = p - \bar{p}$ — отклонения потенциальной температуры и давления от их статических фоновых величин. Модифицированное давление и безразмерные пульсации потенциальной температуры обозначим как

$$\Phi = \frac{p'}{\bar{\rho}}, \quad \theta = \frac{\Theta'}{\bar{\Theta}}. \quad (1)$$

Тогда уравнения теории мелкой конвекции Буссинеска в форме [30, 31] с заданным нейтрально стратифицированным профилем потенциальной температуры примут вид

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla\Phi, & \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} + g\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = 0, & \nabla\mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Усредняя всевозможные произведения w и θ по площади, получим различные турбулентные моменты конвективного слоя.

Пусть h — высота конвективного слоя, $gS_\theta = g\bar{\theta}w_0$ — поток плавучести на единице площади подстилающей поверхности, имеющий размерность $[m^2 c^{-3}]$. Существование параметров gS_θ и h позволяет ввести в конвективном слое параметры Дирдорфа для скорости и плавучести [32]:

$$w_D = h^{1/3}(gS_\theta)^{1/3}, \quad g\theta_D = h^{-1/3}(gS_\theta)^{2/3}. \quad (3)$$

Последующие рассуждения будут связаны с конвективным слоем, достаточно развитым по высоте. Для таких слоёв параметры Дирдорфа можно считать постоянными, $w_D = \text{const}, g\theta_D = \text{const}$.

Нижнюю половину турбулентного конвективного слоя, $0 < z/h < 0,5$, будем называть мезослоем интенсивной конвекции. Этот слой заполнен ансамблем развивающихся термиков. В вышележащем слое, $0,5 < z/h < 1,0$, конвективные термики движутся по инерции, так как при пересечении верхней границы яруса интенсивной конвекции $z/h = 0,5$ средняя плавучесть термиков значительно уменьшается. Качественные различия между нижней и верхней частями турбулентного конвективного слоя полностью подтверждаются лабораторными измерениями [33].

Турбулентность яруса интенсивной конвекции характеризуется теорией локального подобия (см. [34]). Согласно [35] второй турбулентный момент вертикальной скорости в конвективном слое может быть аппроксимирован соотношением

$$\frac{\overline{w^2}}{w_D^2} = \lambda_{ww} \left(\frac{z}{h}\right)^{2/3} \left(1 - 0,8 \frac{z}{h}\right)^2. \quad (4)$$

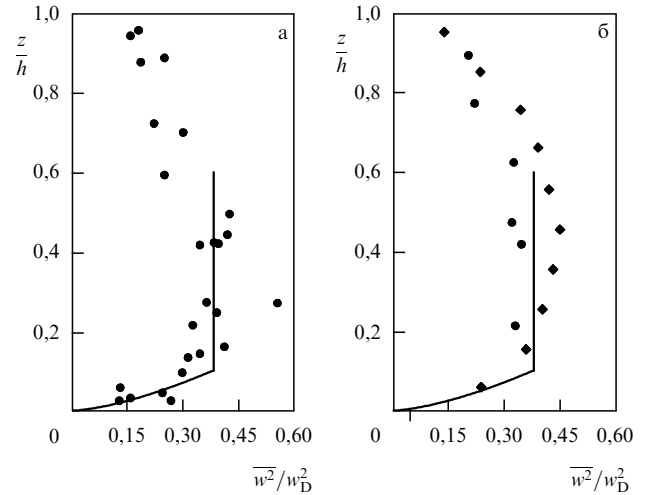


Рис. 2. Значения безразмерных вторых моментов вертикальной скорости. Вертикальные линии соответствуют соотношению $w^2/w_D^2 = 0,38$. (а) Кружками представлены эмпирические значения w^2/w_D^2 в атмосфере по данным экспериментов AMTEX-1975 согласно [35]. (б) Ромбы и кружки представляют эмпирические значения w^2/w_D^2 в жидкости по данным лабораторных экспериментов [37, 38] соответственно.

Коэффициент $\lambda_{ww} = 1,8$ получен в процессе прямых измерений вторых моментов конвективного приземного слоя в экспериментах Minnesota 1973 Atmospheric Boundary Layer Experiment и AMTEX 1975 (Air-Mass Transportation Experiment 1975) (подробнее см. [35, 36]).

Некоторые данные натурных измерений [35] второго момента вертикальной скорости в атмосферном мезослое интенсивной конвекции, а также результаты лабораторных экспериментов [37, 38] представлены на рис. 2. Эти данные указывают на сравнительно слабую зависимость w^2 от высоты z в слое $0,1 < z/h < 0,5$.

Наблюдаемый разброс точек, который является следствием стохастичности конвективного процесса, характерен для любых измерений в турбулентных потоках.

С учётом классификации [39] выделим в мезослое интенсивной конвекции следующие слои:

- 1) слой свободной конвекции, $0 < z/h < 0,1$;
- 2) слой интенсивного перемешивания, $0,1 < z/h < 0,5$.

В случае развитой турбулентности слой свободной конвекции представляет собой слой жидкости или газа, прилегающий к нагретой поверхности. Слой свободной конвекции определяется как слой постоянного потока, $gS_\theta = \text{const} > 0$.

Турбулентные моменты слоя свободной конвекции $0 < z/h < 0,1$ могут быть определены на основании теории подобия (подробнее см. [34, 40–43]).

Турбулентные моменты слоя интенсивного перемешивания $0,1 < z/h < 0,5$, представляющие интерес для физической кинетики, удовлетворяют соотношениям

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0, \quad \overline{w^2} = 0,38w_D^2. \quad (5)$$

Первое равенство в (5), следующее из уравнения неразрывности, справедливо для всего конвективного слоя.

Второе равенство в (5) показывает, что в слое перемешивания стратификация потенциальной температуры близка к нейтральной, что позволяет рассматривать слой перемешивания как аналог слоя однородной жидкости.

Третье равенство в (5) указывает на пространственную однородность второго момента вертикальной скорости (см. рис. 2), что предоставляет возможность рассматривать слой перемешивания как некоторый аналог термостата в статистической механике.

3. Эмпирические средние параметры системы атмосферных конвективных термиков слоя перемешивания и их аппроксимации

Существенно, что самолётные атмосферные измерения параметров системы термиком выполняются вдоль некоторой линии наблюдения [12, 14, 16]. В условиях, когда система термиком переносится ветром, данные, полученные на метеобашнях и метеомачтах [13, 44], также соответствуют измерениям вдоль некоторой горизонтальной линии наблюдения.

Пусть \bar{R}_l , $g\bar{\theta}_l$ — средние значения радиусов и плавучести термиком ансамбля вдоль линии наблюдения l , расположенной на уровне z . Измерения [12, 16, 45] позволили получить натурные данные о средних значениях \bar{R}_l и $\bar{\theta}_l$ в зависимости от безразмерной высоты z/h (рис. 3).

Согласно [16, 45] средний радиус \bar{R}_l и плавучесть $g\bar{\theta}_l$ резко изменяются в свободном конвективном слое $0 < z/h < 0,1$ и остаются практически постоянными в слое интенсивного перемешивания $0,1 < z/h < 0,5$ (см. рис. 3). Используя теорию подобия, будем предполагать, что для среднего радиуса и средней плавучести термиком слоя перемешивания справедливы аппроксимации

$$\frac{2\bar{R}_l}{h} = 0,1, \quad \frac{g\bar{\theta}_l}{g\theta_D} = 1,12. \quad (6)$$

Первое соотношение в (6) означает, что средний диаметр термиком $2\bar{R}_l$ определяется толщиной свободно-конвективного слоя $0,1h$. Второе соотношение в (6) означает, что средняя безразмерная температура термиком $\bar{\theta}_l$ определяется параметром Дирдорфа θ_D . Сопостав-

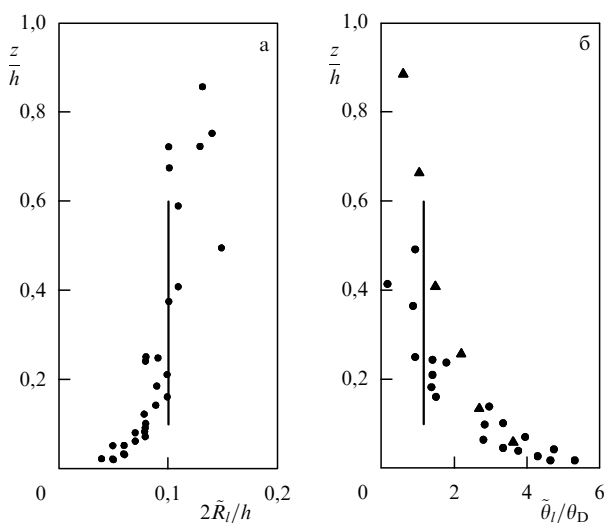


Рис. 3. Зависимости средних значений (а) диаметров $2\bar{R}_l/h$ и (б) плавучестей $\bar{\theta}_l/\theta_D$ системы тёплых восходящих потоков от безразмерной высоты z/h в конвективном слое по данным натурных измерений [16] (кружки) и [45] (треугольники). Вертикальные отрезки соответствуют аппроксимации данных в слое перемешивания (6).

ление аппроксимаций (6) с данными атмосферных наблюдений [16] и [45] представлено на рис. 3а и б соответственно.

Пусть \bar{R}_a и $\bar{\theta}_a$ — средние значения радиуса и плавучести ансамбля термиком на горизонтальной плоскости a , расположенной на уровне z . Очевидно, что сечение системы сферических термиком горизонтальной плоскостью $z = \text{const}$ формирует на плоскости a систему случайно расположенных кругов. Самолёт, проводящий измерения, пересекает только часть этих кругов вдоль случайных хорд. Учитывая, что длина хорды всегда меньше диаметра, можно утверждать, что $\bar{R}_a \geq \bar{R}_l$. Соответствие средних параметров на плоскости и средних параметров вдоль линии наблюдений подробно обсуждалось в работах [12–14]. Далее будем считать, что

$$\bar{R}_a = \frac{4}{\pi} \bar{R}_l, \quad \bar{\theta}_a = \bar{\theta}_l. \quad (7)$$

Обоснование (7) с использованием метода геометрических вероятностей приведено в приложениях А и Б.

Из уравнений (5)–(7) следует, что средние параметры \bar{R}_a , $g\bar{\theta}_a$ и \bar{w}^2 удовлетворяют соотношению

$$\frac{2}{3} g\bar{\theta}_a \bar{R}_a = 0,04753 \bar{w}_D^2 = 0,125 \bar{w}^2. \quad (8)$$

Существование равенства, подобного равенству (8), следует также из лабораторных исследований с изолированными пузырями, всплывающими в однородной жидкости [46, 47]. В этих экспериментах установлено эмпирическое соотношение

$$\frac{2}{3} g\bar{\theta} R_s = \alpha_S \bar{w}^2. \quad (9)$$

Здесь \bar{w} и $\bar{\theta}$ — средние по объёму значения вертикальной скорости и пульсации потенциальной температуры, R_s — радиус максимального сечения пузыря, α_S — постоянный безразмерный коэффициент. При этом коэффициент пропорциональности $\alpha_S \simeq 0,2$, согласно [46], и $\alpha_S = 0,26$, согласно [47].

По аналогии с моделью совершенного газа рассмотрим идеализированный ансамбль "изолированных" термиком, в котором каждый конвективный элемент движется так, как если бы других элементов не было. Используем усреднённый инвариант (9) для описания ансамбля термиком с различными плавучестями и радиусами, тогда $(2/3) \langle g\bar{\theta} R_s \rangle = \alpha_S \langle \bar{w}^2 \rangle$. Так как термики всплывают в практически неподвижном окружении, можно считать, что $\langle \bar{w}^2 \rangle = \bar{w}^2$. Следовательно, усреднённый инвариант ансамбля "изолированных" термиком будет иметь вид

$$\frac{2}{3} g\bar{\theta}_a \bar{R}_a = 0,26 \bar{w}^2. \quad (10)$$

Очевидно, что термики реального конвективного ансамбля взаимодействуют между собой, так как они расположены достаточно близко друг к другу (см. рис. 1). Так, среднее расстояние между конвективными термиками, согласно [12], составляет примерно $3\bar{R}_a$. Потому термики ансамбля расширяются меньше, чем свободные изолированные термики. Именно этим объясняется меньшая величина числового множителя в правой части соотношения (8) по сравнению с числовым множителем в правой части (10).

4. Уравнения движения изолированного термика в слое перемешивания

Изолированный термик является базовым элементом турбулентной конвекции (см. [48–50]). Рассмотрим более подробно динамические уравнения изолированного термика.

Пусть $\psi(x, y, z, t) = 0$ — произвольная замкнутая гладкая поверхность с площадью $S_\psi = S_\psi(t)$, а объём, ограниченный этой поверхностью, $V_\psi = V_\psi(t)$, \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности, D_n — нормальная скорость поверхности, $b = b(x, y, z, t)$ — произвольная субстанция, заполняющая объём V_ψ . Следуя [51], используем теорему о дифференцировании по подвижному объёму, тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\psi} b \, dv = \int_{V_\psi} \frac{\partial b}{\partial t} \, dv + \int_{S_\psi} b D_n \, ds. \quad (11)$$

Интегрируя уравнения движения и сохранения энтропии в форме Буссинеска (2) по произвольному объёму $V_\psi = V_\psi(t)$ с учётом (11), получим

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_\psi} w \, dv + \int_{S_\psi} w(v_n - D_n) \, ds = g \int_{V_\psi} \theta \, dv + \frac{p_{md}}{\rho}, \\ \frac{d}{dt} \int_{V_\psi} \theta \, dv + \int_{S_\psi} \theta(v_n - D_n) \, ds = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь v_n — нормальная скорость на подвижной поверхности, p_{md} — связанная с давлением поверхностная сила взаимодействия термика с окружающей средой, отличная от силы Архимеда, $\rho = \text{const}$ — плотность среды.

Введём усреднённые по объёму V_ψ параметры: среднюю скорость \hat{w} и возмущение безразмерной потенциальной температуры $\hat{\theta}$,

$$\hat{w} = \frac{1}{V_\psi} \int_{V_\psi} w \, dv, \quad \hat{\theta} = \frac{1}{V_\psi} \int_{V_\psi} \theta \, dv. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{w} V_\psi + \int_{S_\psi} w(v_n - D_n) \, ds = g \hat{\theta} V_\psi + \frac{p_{md}}{\rho}, \\ \frac{d}{dt} \hat{\theta} V_\psi + \int_{S_\psi} \theta(v_n - D_n) \, ds = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Конвективный термик можно определить либо как замкнутую поверхность $w = 0$, либо как замкнутую поверхность $\theta = 0$. Оба определения приводят к некоторому упрощению уравнений (14).

Следуя [12], будем рассматривать далее восходящий термик как относительно более тёплую область пространства $\theta \geq 0$, ограниченную замкнутой подвижной поверхностью $\theta = 0$. Тогда при $\psi = \theta$ получим

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{w} V_\theta + \int_{S_\theta} w(v_n - D_n) \, ds = g \hat{\theta} V_\theta + \frac{p_{md}}{\rho}, \\ \frac{d}{dt} \hat{\theta} V_\theta = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Допустим, что термик в любой момент времени представляет собой сферу с переменным радиусом R и центром масс \hat{z} . При этом предполагается, что в процессе вертикального движения сферическая форма термика

сохраняет подобие. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{z}}{dt} &= \hat{w}, & \frac{dR}{dt} &= \frac{dR}{d\hat{z}} \frac{d\hat{z}}{dt} = \alpha_R(\hat{z}) \hat{w}, \\ \frac{1}{V_\theta} \frac{dV_\theta}{dt} &= \frac{3}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{3}{R} \alpha_R(\hat{z}) \hat{w}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\alpha_R(\hat{z})$ — коэффициент вовлечения термика.

Далее будем считать, что $\alpha_R(\hat{z}) = \alpha_R = \text{const}$. Согласно экспериментальным наблюдениям над изолированными плавучими термиками коэффициент вовлечения $\alpha_R = 0,2-0,26$ (подробнее см. [46, 47]).

В приближении неподвижного окружения, $w = 0$, $\Phi = 0$, поэтому поверхностный интеграл и поверхностная сила взаимодействия термика со средой отсутствуют, т.е. $p_{md} = 0$. Тогда из уравнений (15), (16) следует, что

$$\begin{cases} \frac{d\hat{z}}{dt} = \hat{w}, & \frac{d\hat{w}}{dt} = g\hat{\theta} - \frac{3}{R} \alpha_R \hat{w}^2, \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{3}{R} \alpha_R \hat{w} \hat{\theta}, & \frac{dR}{dt} = \alpha_R \hat{w}. \end{cases} \quad (17)$$

Модель термика (17), соответствующая приближению неподвижного окружения, рассмотрена в работах [48–50].

Заметим, что при $\theta = 0$ уравнения Буссинеска (2) переходят в уравнения однородной жидкости. Поэтому для построения модели движения термика с учётом его взаимодействия с нейтрально стратифицированным окружением целесообразно опираться на уравнение движения твёрдого тела в однородной среде.

Известно, что уравнение равномерного движения твёрдого тела в однородной жидкости [52] включает в себя силу вихревого сопротивления

$$p_{md} = -\frac{1}{2} c_d^0 S \rho \hat{w}^2, \quad (18)$$

где $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости, S — площадь наибольшего горизонтального сечения, c_d^0 — эффективный коэффициент вихревого сопротивления твёрдого тела.

В частности, при равномерном движении шара постоянного радиуса R

$$p_{md} = -\frac{1}{2} c_d^0 \pi R^2 \rho \hat{w}^2 = -\frac{3}{8} c_d^0 V \rho \frac{\hat{w}^2}{R}, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (19)$$

С учётом (19) уравнение движения шара в однородной идеальной жидкости под действием силы плавучести можно представить в виде

$$\rho_S V \frac{d\hat{w}}{dt} = -(\rho_S - \rho) V g - \frac{3}{8} c_d^0 \rho V \frac{\hat{w}^2}{R}, \quad (20)$$

где $\rho_S = \text{const}$ — плотность шара.

В работах [53, 54] для описания движения термика использовано уравнение движения шара с постоянным радиусом (20) при коэффициенте вихревого сопротивления $c_d \neq c_d^0$. При этом в рамках вихревой модели [53] для постоянного безразмерного коэффициента сопротивления существует теоретическая оценка $c_d \leq 9/8$.

Заметим, что уравнение (20) включает в себя силу вихревого сопротивления (18), но не учитывает силу воздействия окружения на твёрдый шар, связанную с присоединённой массой. Эта сила возникает при уско-

ренном движении тела и выражается в дополнительном сопротивлении, равном произведению присоединённой массы на ускорение. В случае, когда твёрдое тело является шаром, более точное выражение для силы сопротивления p_{md} имеет вид

$$\begin{cases} p_{md} = -\mu\rho V \frac{d\hat{w}}{dt} - \frac{1}{2} c_d^0 S \rho \hat{w}^2, \\ \mu = \frac{1}{2}, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad S = \pi R^2. \end{cases} \quad (21)$$

Модифицируя (20) с учётом силы сопротивления (21), включающей присоединённую массу, получим

$$\left(\rho_s + \frac{1}{2}\rho\right) V \frac{d\hat{w}}{dt} = -(\rho_s - \rho) V g - \frac{3}{8} c_d^0 \rho V \frac{\hat{w}^2}{R}. \quad (22)$$

Для твёрдого шара, плотность которого близка к плотности жидкости, $\rho_s \approx \rho$, уравнение (22) принимает предельную форму:

$$\frac{d\hat{w}}{dt} = -\frac{2}{3} g \frac{\rho_s - \rho}{\rho} - \frac{1}{4} c_d^0 \frac{\hat{w}^2}{R}. \quad (23)$$

Существенно, что соотношение (23) имеет гидродинамическое обоснование, приведённое в монографии [55].

Рассмотрим случай, когда шар с твёрдой оболочкой способен изменять свой радиус. В этой ситуации для построения эвристического уравнения движения вместо (22) целесообразно использовать аналог уравнения Мещерского

$$\rho_s \frac{d}{dt}(\hat{w}V) = -(\rho_s - \rho) V g - \frac{3}{8} c_d^0 \rho V \frac{\hat{w}^2}{R} - \frac{1}{2} \rho V \frac{d\hat{w}}{dt}. \quad (24)$$

Преобразование (24) с учётом (16) приводит к равенству

$$\left(\rho_s + \frac{1}{2}\rho\right) \frac{d\hat{w}}{dt} = -(\rho_s - \rho) g - \frac{3}{8} c_d^0 \rho \frac{\hat{w}^2}{R} - 3\rho_s \frac{\hat{w}}{R} \frac{dR}{dt}. \quad (25)$$

Задача о движении в идеальной жидкости шара с твёрдой оболочкой и переменным радиусом рассмотрена в монографии [55], где показано, что использование гидродинамического метода и ряда упрощающих предположений приводит к уравнению движения, подобному (25). Приближённое уравнение, предложенное в [55], можно получить, заменяя коэффициент 3 в последнем слагаемом (25) коэффициентом 3/2.

Построим эвристическое уравнение для шара с твёрдой оболочкой и переменным радиусом в случае, когда его плотность близка к плотности жидкости, $\rho_s \approx \rho$. Опираясь на (25) и привлекая коэффициент вовлечения (16), получим

$$\frac{d\hat{w}}{dt} = -\frac{2}{3} g \frac{\rho_s - \rho}{\rho} - \left(\frac{1}{4} c_d^0 + 2\alpha_R\right) \frac{\hat{w}^2}{R}. \quad (26)$$

С учётом изложенного выше перейдём к описанию движения термика в движущейся адиабатической среде, $d\hat{\theta}/dz = 0$, $\theta = 0$.

Опираясь на (19), аппроксимируем поверхностный интеграл в (15) соотношением

$$\int_{S_0} w(v_n - D_n) ds = \frac{3}{8} c_d^1 V \frac{\hat{w}^2}{R}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (15) и учитывая воздействие присоединённой массы, получим

$$\frac{d\hat{w}}{dt} = \frac{2}{3} g\theta - \left(\frac{1}{4} c_d + 2\alpha_R\right) \frac{\hat{w}^2}{R}. \quad (28)$$

Заметим, что коэффициент вихревого сопротивления термика $c_d = c_d^0 + c_d^1$ может несколько отличаться от соответствующего коэффициента твёрдого шара c_d^0 .

В приближении теории конвекции соотношение (28) является полным аналогом уравнения движения шара с твёрдой оболочкой и переменным радиусом (26).

С учётом изложенного выше систему уравнений изолированного термика, движущегося в слое перемешивания и взаимодействующего с нейтрально стратифицированной средой, можно представить в виде

$$\begin{cases} \frac{d\hat{z}}{dt} = \hat{w}, \quad \frac{d\hat{w}}{dt} = \frac{2}{3} g\hat{\theta} - \left(\frac{1}{4} c_d + 2\alpha_R\right) \frac{\hat{w}^2}{R}, \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{3}{R} \alpha_R \hat{w} \hat{\theta}, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha_R \hat{w}, \quad c_d \leq \frac{9}{8}. \end{cases} \quad (29)$$

Модель изолированного термика (29) подобна моделям термиков [53, 54, 56], использующим несколько иные формы уравнения движения.

5. Уравнения движения термиков ансамбля в слое перемешивания

Рассмотрим теперь ансамбль термиков слоя перемешивания. Очевидно, что термики ансамбля перемещаются в случайной среде и взаимодействуют между собой и поэтому они несколько отличаются от изолированных термиков слоя перемешивания.

Допустим, что воздействие на i -й термик ансамбля всех остальных термиков системы может быть учтено включением случайной быстро осциллирующей во времени силы $q_i(\hat{w}_i, t)$ в уравнение движения (29):

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\theta}_i}{dt} = -\frac{3}{R_i} \alpha_R \hat{w}_i \hat{\theta}_i, \quad \frac{dR_i}{dt} = \alpha_R \hat{w}_i, \\ \frac{d\hat{w}_i}{dt} = \frac{2}{3} g\hat{\theta}_i - \gamma(\hat{w}_i, R_i) \hat{w}_i + q_i(\hat{w}_i, t), \\ \gamma(\hat{w}_i, R_i) = \left(\frac{c_d}{4} + 2\alpha_R\right) \frac{\hat{w}_i}{R_i}, \quad c_d \leq \frac{9}{8}. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь $\gamma(\hat{w}_i, R_i)$ — коэффициент подвижности, линейно зависящий от скорости и имеющий размерность $[c^{-1}]$.

Используем приближение $\alpha_R = 0$, полагая, что взаимодействие каждого термика с соседними элементами ансамбля ограничивает изменение его радиуса с изменением высоты. В этой ситуации индивидуальные радиусы термиков ансамбля остаются постоянными, что вполне согласуется с аппроксимацией экспериментальных данных (рис. 3а).

В приближении $\alpha_R = 0$ динамические уравнения ансамбля термиков слоя перемешивания примут вид

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\theta}_i}{dt} = 0, \quad \frac{dR_i}{dt} = 0, \\ \frac{d\hat{w}_i}{dt} = \frac{2}{3} g\hat{\theta}_i - \gamma(\hat{w}_i, R_i) \hat{w}_i + q_i(\hat{w}_i, t), \\ \gamma(\hat{w}_i, R_i) = \frac{c_d}{4} \frac{\hat{w}_i}{R_i}, \quad c_d \leq \frac{9}{8}. \end{cases} \quad (31)$$

Допустим, что все термики ансамбля обладают идентичными значениями пульсации температуры $\hat{\theta}_a$ и радиуса \hat{R}_a . Принятые предположения позволяют проинтегрировать первые два уравнения системы (31) с учётом средних параметров (6), (7). Опуская индивидуальный индекс термика i , получим

$$\begin{cases} \frac{d\hat{w}}{dt} = \frac{2}{3} g\hat{\theta}_a - \gamma(\hat{w})\hat{w} + q(\hat{w}, t), \\ \gamma(\hat{w}) = \frac{1}{4} c_d \frac{\hat{w}}{\hat{R}_a}, \quad \frac{2}{3} g\hat{\theta}_a \hat{R}_a = \frac{1}{8} \overline{w^2}, \quad c_d \leq \frac{9}{8}. \end{cases} \quad (32)$$

В рамках предложенной модели ансамбля термики слоя перемешивания обладают одинаковыми плавучестями, радиусами и случайными вертикальными скоростями. При этом число конвективных термиков в слое перемешивания, опираясь на измерения [12, 16, 45], можно также считать постоянным.

Определим величину случайной быстро осциллирующей силы $q(\hat{w}, t)$ по аналогии с определением таковой для ансамбля броуновских частиц, используя произведение обобщённого коэффициента диффузии Эйнштейна $D_E(\hat{w}) = \gamma(\hat{w})\overline{w^2}$ и временной функции $\xi(t)$, где $\xi(t)$ — белый шум Гаусса. Таким образом, следуя [8, 57, 58], получим

$$\begin{cases} q(\hat{w}, t) = \sqrt{D_E(\hat{w})} \xi(t), \quad D_E(\hat{w}) = \gamma(\hat{w})\overline{w^2}, \\ \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\delta(t-t'). \end{cases} \quad (33)$$

Здесь коэффициент диффузии Эйнштейна $D_E(\hat{w})$ выражается в единицах $[m^2 c^{-3}]$, $\xi(t)$ — случайная функция времени с размерностью $[c^{-1/2}]$, $\delta(t-t')$ — дельта-функция Дирака, t, t' — произвольные моменты времени, угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Соотношение $\langle \xi(t) \rangle = 0$ в (33) естественным образом следует из корректности приложения уравнения движения изолированного термика (29) к описанию движения термика ансамбля. Последнее соотношение в (33) выражает свойство дельта-коррелированности.

Коэффициенты системы (33) позволяют преобразовать параметр плавучести $g\hat{\theta}_a$ в уравнении движения. В самом деле, пусть β — числовой параметр, удовлетворяющий условию $\beta c_d = 1$. Тогда из равенства (8) следует

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} g\hat{\theta}_a &= \frac{1}{8} \frac{\overline{w^2}}{\hat{R}_a} = \frac{1}{2} \beta \frac{c_d}{4} \frac{\overline{w^2}}{\hat{R}_a} = \frac{1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial \hat{w}} \left(\frac{1}{4} \frac{c_d}{\hat{R}_a} \hat{w} \overline{w^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial \hat{w}} \gamma(\hat{w}) \overline{w^2} = \frac{1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial \hat{w}} D_E(\hat{w}). \end{aligned} \quad (34)$$

Преобразование (32) с учётом (33), (34) приводит к нелинейному стохастическому уравнению ансамбля конвективных термиков в виде [24]

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{w}}{dt} &= \frac{1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial \hat{w}} D_E(\hat{w}) - \gamma(\hat{w})\hat{w} + \sqrt{D_E(\hat{w})} \xi(t), \\ \gamma(\hat{w}) &= \frac{c_d}{4} \frac{\hat{w}}{\hat{R}_a}, \quad D_E(\hat{w}) = \gamma(\hat{w})\overline{w^2}, \quad \beta c_d = 1, \quad c_d \leq \frac{9}{8}, \\ \langle \xi(t) \rangle &= 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\delta(t-t'). \end{aligned} \quad (35)$$

Полагая $c_d = 1$, найдём, что $\beta = 1$. В этом случае специальная форма (35) подобна нелинейному уравнению Ланжевена в термостате в интерпретации Стратоновича, предложенному в [7–9, 23].

Существенно, что нелинейное уравнение Ланжевена (35) справедливо в слое интенсивного перемешивания $0,1h \leq z \leq 0,5h$.

6. Вертикальная однородность плотности вероятности распределения конвективных термиков по скоростям

Наличие случайной силы в уравнении (35) приводит к необходимости статистического описания ансамбля конвективных термиков элементарного слоя.

Пусть a — горизонтальная плоскость, расположенная на произвольном уровне z , $0,1h \leq z \leq 0,5h$. На плоскости a можно определить плотность вероятности $f_{aw}(z, \hat{w}, t)$.

Допустим, что $n_a^w(z, \hat{w}, t) d\hat{w}$ — число термиков на единичной площади плоскости a , скорость которых находится в интервале от \hat{w} до $\hat{w} + d\hat{w}$. Пусть $n_a(z, t)$ — общее число термиков на единичной площади плоскости a , или концентрация термиков на плоскости.

Используя статистическое определение, будем считать, что вероятность появления термика в элементарном фазовом объёме $d\hat{w}$ на плоскости a задаётся соотношением

$$f_{aw}(z, \hat{w}, t) d\hat{w} = \frac{n_a^w(z, \hat{w}, t) d\hat{w}}{n_a(z, t)}, \quad (36)$$

$$\int_0^\infty n_a^w(z, \hat{w}, t) d\hat{w} = n_a(z, t).$$

Допустим, что для функций $n_a^w(z, \hat{w}, t)$ справедлива аппроксимация, основанная на разделении переменных

$$n_a^w(z, \hat{w}, t) = M_a(z) m_a^w(\hat{w}, t), \quad (37)$$

где $M_a(z), m_a^w(\hat{w}, t)$ — множители факторизации. Соотношение (37) далее будем называть условием вертикальной однородности.

Подставляя (37) в (36), получим аппроксимацию концентрации термиков на плоскости

$$n_a(z, t) = M_a(z) m_a(t), \quad m_a(t) = \int_0^\infty m_a^w(\hat{w}, t) d\hat{w}. \quad (38)$$

Здесь функция $M_a(z)$ характеризует изменение концентрации термиков по высоте в фиксированный момент времени t . Функция $m_a(t)$ характеризует изменение концентрации термиков во времени на фиксированном уровне z .

Существование аппроксимации (38) для концентрации атмосферных термиков слоя интенсивного перемешивания $0,1h \leq z \leq 0,5h$ подтверждается измерениями [12] (рис. 4).

При высоте конвективного слоя $h \approx 2500$ м слой интенсивного перемешивания $0,1 \leq z/h \leq 0,5$ ограничен высотами $250 \text{ м} \leq z \leq 1250 \text{ м}$. Поэтому данные, представленные на рис. 4, следует рассматривать как эмпирическое обоснование аппроксимации (38) и условия вертикальной однородности (37).

Подставляя соотношения (37), (38) в определение (36), получим

$$f_{aw}(z, \hat{w}, t) d\hat{w} = \frac{n_a^w(z, \hat{w}, t) d\hat{w}}{n_a(z, t)} = \frac{m_a^w(\hat{w}, t) d\hat{w}}{m_a(t)} = f_w(\hat{w}, t) d\hat{w}. \quad (39)$$

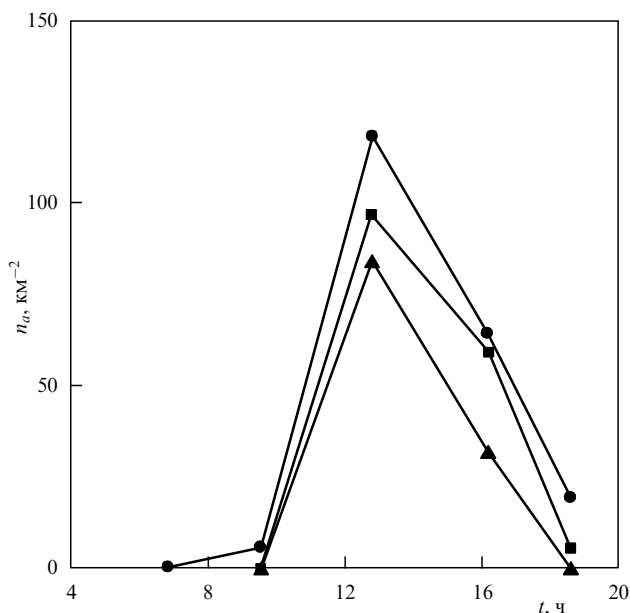


Рис. 4. Суточный ход концентрации термиков на плоскости в слое интенсивного перемешивания. Кружки, квадраты и треугольники — результаты измерения концентрации термиков на высотах 300 м, 500 м и 1000 м соответственно.

Таким образом, на любом уровне z справедливо равенство $f_{\theta w}(z, \hat{w}, t) \equiv f_w(\hat{w}, t)$, выражающее свойство вертикальной однородности плотности вероятности в слое интенсивного перемешивания $0,1h \leq z \leq 0,5h$.

7. Плотность вероятности распределения конвективных термиков по скоростям. Нелинейное уравнение Ланжевена и кинетическое уравнение Фоккера – Планка

Метрическое пространство $\Omega_w^+ = \{\hat{w} : 0 \leq \hat{w} < \infty\}$ далее будем называть фазовым пространством Максвелла. Ансамбль конвективных термиков в пространстве Максвелла изображается "облаком" частиц. В процессе движения ансамбля конвективных термиков "облако" изображающих точек перемещается в фазовом пространстве как сплошная среда с плотностью $f_w(\hat{w}, t)$.

Введём фазовую жидкость, скорость которой в метрическом пространстве Максвелла определяется уравнениями Ланжевена вида (35).

В монографиях [8, 57–59] показано, что для ансамблей частиц, удовлетворяющих уравнениям Ланжевена, плотности вероятности $f_w(\hat{w}, t)$ удовлетворяют ассоциированным уравнениям Фоккера – Планка.

Заметим, что при наличии белого шума Гаусса в стохастическом уравнении Ланжевена коррелятор уравнения (33) включает в себя обобщённую функцию Дирака. Поэтому процесс $\xi(t)$ является обобщённым стохастическим процессом. Математическое описание обобщённых стохастических процессов возможно только на основе интегрального представления. Стохастический интеграл определяется как предел интегральной суммы. Прямоугольник в интегральной сумме может вычисляться по-разному, в зависимости от расположения высоты на элементарном отрезке разбиения (подробнее см. [60]). Таким образом, единственность определения интегральной суммы регулируется внутренним параметром $0 \leq \alpha \leq 1$, связанным с интерпретацией стохастического

интеграла. В частности, случай $\alpha = 0$ соответствует выбору высоты прямоугольника на левой границе элементарного отрезка разбиения и представляет интерпретацию Ито. Случай $\alpha = 1/2$ соответствует выбору высоты прямоугольника в середине элементарного отрезка разбиения и представляет интерпретацию Стратоновича. Случай $\alpha = 1$ соответствует выбору высоты прямоугольника на правой границе элементарного отрезка разбиения и представляет интерпретацию Ханги – Климонтовича (подробнее см. [10, 60]).

Согласно [24] при фиксированном параметре $0 \leq \alpha \leq 1$ уравнение Фоккера – Планка, ассоциированное с уравнением (35), имеет вид

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{w}} \left(\gamma(\hat{w}) \hat{w} f_w + D_E(\hat{w}) \frac{\partial f_w}{\partial \hat{w}} \right) - (\beta + 2\alpha - 2) \frac{1}{2} \frac{\partial f_w}{\partial \hat{w}} \frac{\partial D_E(\hat{w})}{\partial \hat{w}}. \quad (40)$$

Если выбирать параметр интерпретации α исходя из условия

$$\beta + 2\alpha - 2 = 0, \quad (41)$$

то соответствующее уравнение Фоккера – Планка примет вид кинетического уравнения

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{w}} \left(\gamma(\hat{w}) \hat{w} f_w + D_E(\hat{w}) \frac{\partial f_w}{\partial \hat{w}} \right). \quad (42)$$

Уравнение (42) рассматривалось в работах [7–9] (см. также [61, 62]).

В рамках вихревой модели [53] коэффициент сопротивления c_d не определён, но ограничен неравенством $c_d \leq 9/8$. Допустим, что коэффициент вихревого сопротивления $c_d = 0,5$, тогда $\beta = 1/c_d = 2$ и, следовательно, $\alpha = 0$. В этом случае нелинейное уравнение Ланжевена (35) соответствует интерпретации Ито.

Допустим, что коэффициент вихревого сопротивления $c_d = 1$, тогда $\beta = 1/c_d = 1$ и, следовательно, $\alpha = 1/2$. В этом случае уравнение Ланжевена (35) соответствует интерпретации Стратоновича.

Рассмотрим свойства К-формы уравнения Фоккера – Планка (42) более подробно. Очевидно, что любое решение (42), согласно его построению, удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} f_w(\hat{w}, t) d\hat{w} = 1. \quad (43)$$

Кроме того, решение кинетического уравнения Фоккера – Планка (42) предполагает задание начальных и краевых условий. В качестве начальных условия можно использовать произвольную положительную функцию $f_w^0 = f_w^0(\hat{w})$, такую, что

$$f_w(\hat{w}, 0) = f_w^0(\hat{w}) > 0, \quad \int_0^{\infty} f_w^0(\hat{w}) d\hat{w} = 1. \quad (44)$$

В качестве краевых условий примем следующие соотношения:

$$\lim_{\hat{w} \rightarrow +\infty} \left[\gamma(\hat{w}) \hat{w} f_w + D_E(\hat{w}) \frac{\partial f_w}{\partial \hat{w}} \right] = 0, \quad (45)$$

$$\lim_{\hat{w} \rightarrow 0} \left(D_E(\hat{w}) \frac{\partial f_w}{\partial \hat{w}} \right) = 0.$$

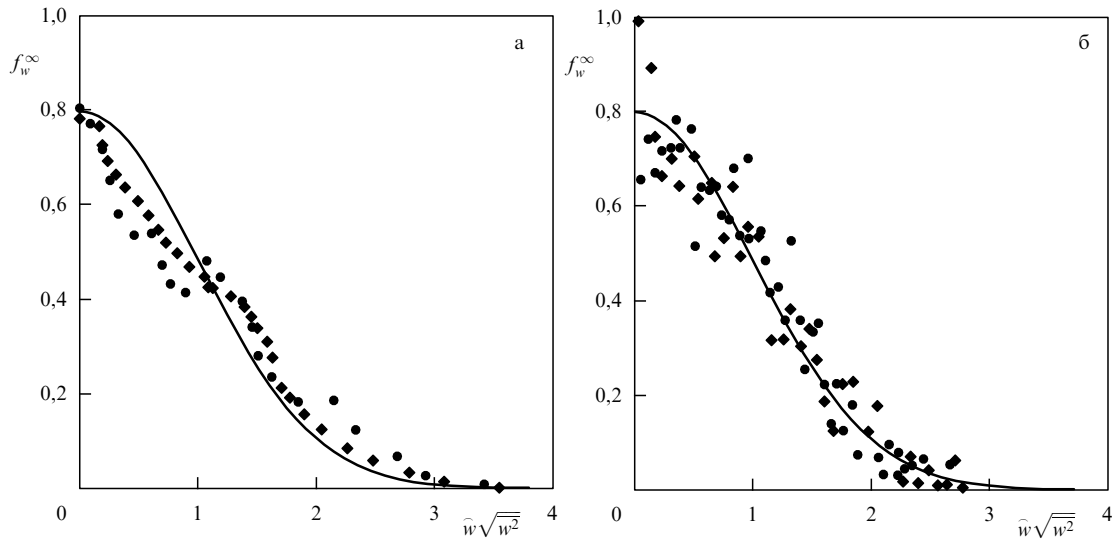


Рис. 5. (а) Плотность вероятности распределения вертикальной скорости согласно экспериментальным данным [63]. Кружки и ромбы соответствуют самолётным измерениям вдоль горизонтальных прямых на высоте 100 м в направлениях, параллельном и перпендикулярном направлению ветра. Обобщённое распределение Максвелла (47) изображено сплошной кривой. (б) Плотность вероятности распределения вертикальной скорости согласно экспериментальным данным [64]. Кружками и ромбами показаны пересчитанные баллонные измерения вдоль ветра на уровнях $z/h = 0,42$ и $z/h = 0,55$ соответственно. Обобщённое распределение Максвелла (47) показано сплошной кривой.

Краевые условия вида (45) могут рассматриваться как условие отсутствия полного диффузионного потока в фазовом пространстве. Первый предел в (45) означает, что функция $f_w(\hat{w}, t)$ достаточно быстро убывает при $\hat{w} \rightarrow +\infty$.

Интегрирование уравнения Фоккера–Планка (42) по пространству скоростей Ω_w^+ с учётом краевых условий (45) приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty f_w d\hat{w} = -\gamma(\hat{w})\hat{w}f_w \Big|_0 = 0. \quad (46)$$

Следовательно, краевые условия (45) согласованы с условием нормировки (43).

8. Обобщённое распределение Максвелла для ансамбля конвективных термик. Сопоставление с экспериментальными данными

Кинетическая форма уравнения Фоккера–Планка (42) допускает единственное стационарное решение, удовлетворяющее крайевым условиям (45) в форме обобщённого одномерного распределения Максвелла:

$$f_w^\infty(\hat{w}) d\hat{w} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\overline{w^2})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\hat{w}^2}{\overline{w^2}}\right) d\hat{w}, \quad 0 \leq \hat{w} < \infty. \quad (47)$$

Классическое одномерное распределение Максвелла по скоростям для молекул идеального газа и броуновских частиц следует из распределения (47), если считать, что средний параметр w^2 пропорционален температуре среды.

Можно показать, что стационарное решение Максвелла (47) является пределом любого нестационарного решения уравнения Фоккера–Планка (42) при $t \rightarrow +\infty$.

Эмпирические плотности распределения вертикальной скорости в атмосферном слое перемешивания, по-

лученные в результате полевых измерений, приведены в работах [63–65]. Однако сопоставление с распределением Максвелла (47) возможно только для тех данных, пересчёт которых допускает представление эмпирической плотности вероятности в виде $\varphi(v)$, где $v = \hat{w}/(\overline{w^2})^{1/2}$.

Распределение по вертикальным скоростям в ансамбле конвективных термик на нижней границе атмосферного слоя перемешивания ($z = 100 \text{ м} \approx 0,1h$), было построено в [63]. Обобщённое распределение Максвелла (47) сопоставлено с результатами самолётных измерений [63] на рис. 5а.

Распределение по вертикальным скоростям в ансамбле термик слоя перемешивания на уровнях $z/h = 0,42$ и $z/h = 0,55$ построено в [64]. Сопоставление обобщённого распределения Максвелла (47) с пересчитанными результатами баллонных измерений [64] приведено на рис. 5б.

Однако в конвективном турбулентном слое область восходящих движений связана исключительно с плавучими термиками. Результаты, представленные на рис. 5, показывают, что в области восходящих движений $\Omega_w^+ = \{\hat{w}: 0 \leq \hat{w} < \infty\}$ для аппроксимации экспериментальных данных можно использовать нормальную кривую (47). Следовательно, обобщённое одномерное распределение Максвелла (47) действительно реализуется в ансамбле термик конвективного слоя перемешивания.

9. Заключение

Экспериментально наблюдаемое распределение Максвелла по скоростям в системе восходящих потоков позволяет рассматривать систему конвективных термик как ансамбль "быстрых" броуновских частиц. Последовательное развитие такого кинетического подхода открывает новые возможности при описании моментов турбулентного конвективного слоя.

Таблица 1. Изменение с высотой средних радиусов системы атмосферных термик

Высота полёта, м	10	30	50	100	300	500	1000	2000	3000
Число измерений	761	2480	7611	8728	4748	4007	2656	1409	523
Средние радиусы термик, м	21,0	24,5	27,5	30,5	34,0	35,0	36,0	37,0	40,5

Теоретическое построение одномерного распределения Максвелла в системе восходящих конвективных потоков убедительно демонстрирует возможность конструктивного использования методов физической кинетики для описания не "термодинамических" стохастических систем, т.е. систем, не связанных с термостатом. Этот результат, безусловно, имеет общезначимую физическую значимость.

Авторы выражают признательность рецензенту УФН за ряд конструктивных замечаний.

Работа поддержана грантом 15-05-068491-а Российского фонда фундаментальных исследований.

Приложение А. Средние радиусы системы термик на плоскости и прямой

Установим связь средней длины полухорды \tilde{R}_l с модельным средним радиусом системы термик \hat{R}_a на плоскости. Для упрощения геометрических рассуждений заменим каждый сферический термик вертикальным цилиндром с радиусом кругового сечения \hat{R}_a и высотой $4\hat{R}_a/3$, т.е. имеющим тот же объём.

Очевидно, что сечение системы модельных цилиндрических термик плоскостью $z = \text{const}$ формирует на плоскости систему идентичных случайно расположенных кругов. Самолёт при движении вдоль горизонтальной прямой, параллельной оси y , пересекает только часть этих кругов (рис. 6а). При этом предполагается, что пересечение изолированного модельного термика кругового сечения происходит вдоль случайной хорды $x = \text{const}$ длиной $2\tilde{R}(x)$ (рис. 6б).

Допустим, что $\varphi(x) dx$ — вероятность падения хорды на отрезок $[x, x + dx]$, перпендикулярный линии наблюдения (рис. 6б). Тогда из геометрических соображений следует, что

$$\varphi(x) dx = \frac{dx}{2\hat{R}_a}, \quad \int_{-\hat{R}_a}^{\hat{R}_a} \varphi(x) dx = 1. \quad (\text{A.1})$$

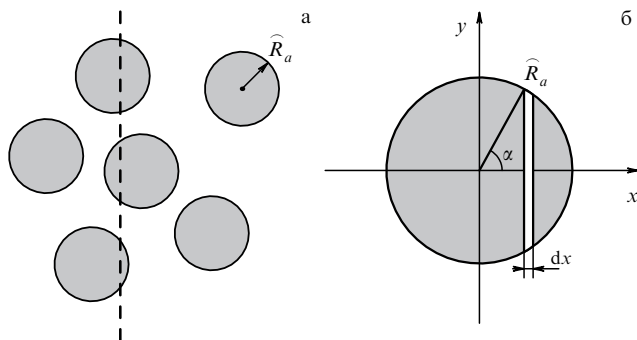


Рис. 6. Взаимное расположение сечений горизонтально-идентичных термик и линии наблюдения на плоскости $z = \text{const}$. (а) Пересечение линии наблюдения системы горизонтально-идентичных термик. (б) Сечение изолированного термика случайной хордой.

Пусть \tilde{R}_l — средняя длина полухорды вдоль линии наблюдения, заданная математическим ожиданием

$$\tilde{R}_l = \int_{-\hat{R}_a}^{\hat{R}_a} \tilde{R}(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{\hat{R}_a} \int_0^{\hat{R}_a} \tilde{R}(x) dx, \quad (\text{A.2})$$

где $\varphi(x) dx$ — вероятность попадания хорды на отрезок dx .

Преобразуем (A.2), используя полярные координаты \hat{R}_a, α (рис. 6б). Тогда

$$x = \hat{R}_a \cos \alpha, \quad dx = -\hat{R}_a \sin \alpha d\alpha, \quad \tilde{R}(x) = \hat{R}_a \sin \alpha. \quad (\text{A.3})$$

Подставляя (A.3) в (A.2), получим

$$\begin{aligned} \tilde{R}_l &= -\hat{R}_a \int_{\pi/2}^0 \sin^2 \alpha d\alpha = \hat{R}_a \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha = \\ &= \hat{R}_a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Интегрирование (A.4) приводит к соотношению

$$\tilde{R}_l = \frac{\pi}{4} \hat{R}_a. \quad (\text{A.5})$$

Равенство (A.5) связывает наблюдаемую среднюю длину полухорды \tilde{R}_l с модельным средним радиусом системы термик \hat{R}_a и является обоснованием соотношения (7).

Приведённые выше рассуждения, справедливые в случае ансамбля идентичных термик цилиндрической формы, можно провести и для случая ансамбля сферических термик. Описание этого более сложного варианта не приводится, чтобы не загромождать приложение излишними деталями.

Зависимость среднего радиуса \hat{R}_a от высоты z , вычисленная по данным [12], представлена в табл. 1.

При высоте конвективного слоя $h \approx 2500$ м слой интенсивного перемешивания $0,1 \leq z/h \leq 0,5$ ограничен высотами $250 \text{ м} \leq z \leq 1250 \text{ м}$. Существенно, что в конвективном слое интенсивного перемешивания средние радиусы системы восходящих термик можно считать постоянными, т.е. $\hat{R}_a = \text{const}$.

Приложение Б. Средние плавучести системы термик на плоскости и прямой

Рассмотрим систему горизонтально-идентичных термик, безразмерные потенциальные температуры и вертикальные скорости которых удовлетворяют аппроксимациям

$$\theta(r, z) = \theta_a^0(z) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\hat{R}_a}\right)^2}. \quad (\text{B.1})$$

Пусть $\zeta = r/\hat{R}_a$ — безразмерная полярная координата в круговом сечении термика. Тогда с учётом формы профиля (B.1) средняя по сечению плавучесть термика

Таблица 2. Изменение с высотой средних пульсаций температуры системы атмосферных термиков

Высота полёта, м	10	30	50	100	300	500	1000	1500	2000	2500	3000
Возмущения температуры, °C	0,70	0,32	0,28	0,25	0,17	0,13	0,12	0,11	0,10	0,18	0,19

$g\hat{\theta}_a$ будет иметь вид

$$g\hat{\theta}_a(z) = \frac{1}{\pi \hat{R}_a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{R}_a} g\theta(r, z) r dr d\alpha = \frac{2}{\hat{R}_a^2} \int_0^{\hat{R}_a} g\theta(r, z) r dr = 2g\theta_a^0 \int_0^1 (1 - \zeta^2)^{1/2} \zeta d\zeta = \frac{2}{3} g\theta_a^0(z). \quad (Б.2)$$

Равенство (Б.2) связывает на уровне z среднюю безразмерную потенциальную температуру системы горизонтально-идентичных термиков $\hat{\theta}_a$ и их общую амплитуду θ_a^0 .

Допустим, что самолёт пересекает термик кругового сечения вдоль хорды $x = \text{const}$ длиной $2\hat{R}(x)$. Соответствующий профиль пульсации температуры термика представлен на рис. 7.

Тогда температура термика вдоль хорды $x = \text{const}$ будет задаваться соотношениями

$$\theta(x, y, z) = \theta_l(x, z) \sqrt{1 - \left(\frac{y}{\hat{R}}\right)^2}, \quad (Б.3)$$

$$\theta_l(x, z) = \theta_a^0(z) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\hat{R}}\right)^2},$$

где $\theta_l(x, z)$ — безразмерная потенциальная температура термика в центре случайной хорды, y — координата вдоль хорды. При этом $\tilde{\theta}(x, z)$ — средняя безразмерная температура вдоль произвольной хорды $x = \text{const}$ кругового сечения термика — будет иметь вид

$$\tilde{\theta}(x, z) = \frac{1}{2\hat{R}} \int_{-\hat{R}}^{\hat{R}} g\theta(x, y, z) dy = \frac{\theta_l(x, z)}{\hat{R}} \int_0^{\hat{R}} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{\hat{R}}\right)^2} dy = \frac{\pi}{4} \theta_l(x, z). \quad (Б.4)$$

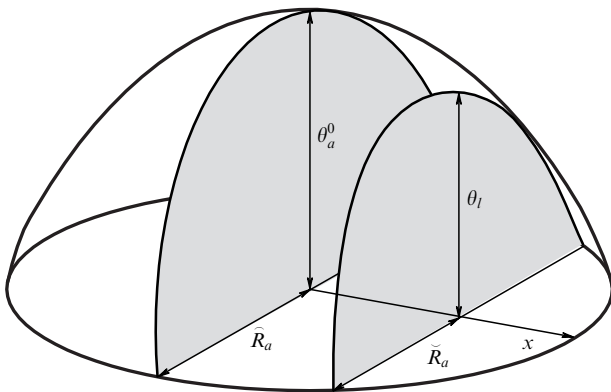


Рис. 7. Поверхность безразмерной потенциальной температуры и её сечение случайной вертикальной плоскостью $x = \text{const}$; θ_a^0 , θ_l — безразмерные потенциальные температуры в центрах термика и случайной хорды соответственно, \hat{R}_a — радиус термика, \hat{R}_a — длина случайной полухорды.

Соответственно, средняя безразмерная потенциальная температура $\tilde{\theta}_l(x, z)$ вдоль линии наблюдения l определяется математическим ожиданием

$$\tilde{\theta}_l(z) = \int_{-\hat{R}_a}^{\hat{R}_a} \tilde{\theta}(x, z) \varphi(x) dx = \frac{1}{2\hat{R}_a} \int_{-\hat{R}_a}^{\hat{R}_a} \tilde{\theta}(x, z) dx = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\hat{R}_a} \int_0^{\hat{R}_a} \theta_l(x, z) dx. \quad (Б.5)$$

Преобразуем (Б.5) с учётом (Б.3), используя полярные координаты \hat{R}_a, α (см. (А.3)), тогда

$$x = \hat{R}_a \cos \alpha, \quad dx = -\hat{R}_a \sin \alpha d\alpha, \quad (Б.6)$$

$$\theta_l = \theta_a^0 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \theta_a^0 \sin \alpha.$$

Подстановка (Б.6) в (Б.5) приводит к равенству

$$\tilde{\theta}_l = \frac{\pi}{4} \theta_a^0 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi^2}{16} \theta_a^0. \quad (Б.7)$$

Откуда с учётом (Б.2) следует, что

$$g\tilde{\theta}_l = \frac{3\pi^2}{32} g\hat{\theta}_a \approx 0,92g\hat{\theta}_a. \quad (Б.8)$$

Равенство (Б.8) связывает среднюю плавучесть вдоль линии наблюдения $g\tilde{\theta}_l$ с модельной плавучестью системы термиков на плоскости $g\hat{\theta}_a$.

Вывод соотношения (Б.8) существенно опирается на предположение о том, что граница термика совпадает с изолинией $\theta = 0$ (см. равенство (Б.1)). Лабораторное и численное моделирование изолированного термика показывает, что область, ограниченная поверхностью $w = 0$, располагается внутри области, ограниченной поверхностью $\theta = 0$ (подробнее см., например, [48]). Поэтому, если определять границу термика как поверхность $w = 0$, соотношение (Б.8) примет вид

$$g\tilde{\theta}_l = kg\hat{\theta}_a, \quad k > 0,92. \quad (Б.9)$$

Следовательно, корректно приближение $g\tilde{\theta}_l = g\hat{\theta}_a$. Равенство $g\tilde{\theta}_l = g\hat{\theta}_a$ связывает наблюдаемую среднюю плавучесть вдоль линии наблюдений $g\tilde{\theta}_l$ с модельной средней плавучестью системы термиков на плоскости $g\hat{\theta}_a$ и является обоснованием соотношения (7).

Зависимости средней пульсации температуры $\Theta_0 \hat{\theta}_a$ от высоты z , вычисленные по данным [12], представлены в табл. 2.

При высоте конвективного слоя $h \approx 2500$ м, слой интенсивного перемешивания $0,1 \leq z/h \leq 0,5$ ограничен высотами $250 \text{ м} \leq z \leq 1250 \text{ м}$. Существенно, что в конвективном слое интенсивного перемешивания средние пульсации безразмерной температуры системы восходящих термиков можно считать постоянными, т.е. $\hat{\theta}_a = \text{const}$.

Список литературы

1. Einstein A *Ann. Physik* **17** 549 (1905)
2. Einstein A *Investigations on the Theory of the Brownian Movement* (New York: BN Publ., 2011)
3. von Smoluchowski M *Ann. Physik* **21** 756 (1906)
4. Kramers H A *Physica* **7** 284 (1940)
5. Chandrasekhar S *Rev. Mod. Phys.* **15** 1 (1943); Пер. на русск. яз.: Чандрасекар С *Стохастические проблемы в физике и астрономии* (М.: ИЛ, 1947)
6. Климонтович Ю Л *Статистическая теория открытых систем* (М.: Янус, 1995); Пер. на англ. яз.: Klimontovich Yu L *Statistical Theory of Open Systems* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998)
7. Klimontovich Yu L *Physica A* **163** 515 (1990)
8. Климонтович Ю Л *Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем* (М.: Наука, 1990); Пер. на англ. яз.: Klimontovich Yu L *Turbulent Motion and the Structure of Chaos: A New Approach to the Statistical Theory of Open Systems* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991)
9. Климонтович Ю Л *УФН* **164** 811 (1994); Klimontovich Yu L *Phys. Usp.* **37** 737 (1994)
10. Dunkel J, Hänggi P *Phys. Rev. E* **71** 016124 (2005)
11. Fa K S *Braz. J. Phys.* **36** 777 (2006)
12. Вульфсон Н И *Исследование конвективных движений в свободной атмосфере* (М.: Изд-во АН СССР, 1961); Пер. на англ. яз.: Vulfson N I *Convective Motions in a Free Atmosphere* (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1964)
13. Frish A S, Businger J A *Boundary-Layer Meteor.* **3** 301 (1973)
14. Manton M J *Boundary-Layer Meteor.* **12** 491 (1977)
15. Scorer R S, Ludlam F H *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **79** 94 (1953)
16. Lenschow D H, Stephens P L *Boundary-Layer Meteor.* **19** 509 (1980)
17. Renno N O et al. *J. Geophys. Res.* **109** E07001 (2004)
18. Hooper W P, James J E J. *Atmos. Sci.* **57** 2649 (2000)
19. Wilczak J M, Tillman J E J. *Atmos. Sci.* **37** 2424 (1980)
20. Marshall J, Schott F *Rev. Geophys.* **37** 1 (1999)
21. Huppert H E, Turner J S J. *Fluid Mech.* **106** 299 (1981)
22. Hänggi P, Thomas H *Phys. Rep.* **88** 207 (1982)
23. Sancho J M, San Miguel M, Dürr D J. *Stat. Phys.* **28** 291 (1982)
24. Sancho J M *Phys. Rev. E* **84** 062102 (2011)
25. Kwon C, Ao P *Phys. Rev. E* **84** 061106 (2011)
26. Голицын Г С *Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты* (М.: КРАСАНД, 2013)
27. Pope S B *Turbulent Flows* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
28. Вульфсон А Н, Бородин О О *Докл. РАН. Сер. Геофизика* **440** 120 (2011); Vulfson A N, Borodin O O *Dokl. Earth Sci.* **440** 1287 (2011)
29. Vulfson A N, Borodin O O *Proc. IUTAM* **8** 238 (2013)
30. Ogura Y, Phillips N A *J. Atmos. Sci.* **32** 173 (1962)
31. Вульфсон А Н *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **17** 873 (1981); Vulfson A N *Izv. Acad. Sci. USSR. Atmos. Oceanic Phys.* **17** 646 (1981)
32. Deardorff J W *J. Atmos. Sci.* **27** 1211 (1970)
33. Adrian R J, Ferreira R T D S, Boberg B *Exp. Fluids* **4** 121 (1986)
34. Zeman O, Lamley J L *J. Atmos. Sci.* **33** 1974 (1976)
35. Lenschow D H, Wyngaard J C, Pennell W T J. *Atmos. Sci.* **37** 1313 (1980)
36. Kaimal J C et al. *J. Atmos. Sci.* **33** 2152 (1976)
37. Willis G E, Deardorff J W *J. Atmos. Sci.* **31** 1297 (1974)
38. Deardorff J W, Willis G E *Boundary-Layer Meteor.* **32** 205 (1985)
39. Caughey S J, in *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modeling* (Eds F T M Nieuwstadt, H Van Dop) (Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1982) p. 107
40. Монин А С, Обуков А М *Труды Геофиз. инст. АН СССР* **151** 163 (1954)
41. Priestly С Н В *Turbulent Transfer in the Lower Atmosphere* (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1959); Пер. на русск. яз.: Пристли С *Турбулентный перенос в приземном слое воздуха* (Л.: Гидрометеоздат, 1964)
42. Вульфсон А Н, Володин И А, Бородин О О *Метеорология и гидрология* **10** 5 (2004); Vulfson A N, Volodin I A, Borodin O O *Russ. Meteor. Hydrology* **10** 1 (2004)
43. Вульфсон А Н, Бородин О О *Метеорология и гидрология* **8** 5 (2009); Vulfson A N, Borodin O O *Russ. Meteor. Hydrology* **8** 491 (2009)
44. Бызова Н Л, Гаргер Е К, Иванов В Н *Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси* (Л.: Гидрометеоздат, 1991)
45. Greenhut G K, Khalsa S J S J. *Climate Appl. Meteor.* **26** 813 (1987)
46. Wilkins E M et al. *J. Geophys. Res.* **74** 4472 (1969)
47. Scorer R S *Environmental Aerodynamics* (New York: Halsted Press, 1978); Пер. на русск. яз.: Скорер Р *Аэрогидродинамика окружающей среды* (М.: Мир, 1980)
48. Turner J S *Viscosity Effects in Fluids* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995); Пер. на русск. яз.: Тернер Дж *Эффекты вязкости в жидкостях* (М.: Мир, 1977)
49. Андреев В, Панчев С *Динамика атмосферных термиков* (Л.: Гидрометеоздат, 1975)
50. Yano J I *Atmos. Chem. Phys.* **14** 7019 (2014)
51. Седов Л И *Механика сплошной среды* (СПб.: Лань, 2004); Пер. на англ. яз.: Sedov L I *A Course in Continuum Mechanics* (Groningen, Netherlands: Wolters-Noordhoff, 1971)
52. Goldstein S *Modern Developments in Fluid Dynamics* (New York: Dover, 1965); Пер. на русск. яз.: Гольдштейн С *Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости* (М.: ИЛ, 1948)
53. Levine J J. *Meteor.* **16** 653 (1959)
54. Wang C P *Phys. Fluids* **14** 1643 (1971)
55. Петров А Г *Аналитическая гидродинамика* (М.: Физматлит, 2010)
56. Вульфсон Н И, Левин Л М *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **10** 344 (1974); Vulfson A N, Levin L M *Izv. Acad. Sci. USSR. Atmos. Oceanic Phys.* **10** 344 (1974)
57. van Kampen N G *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* 3rd ed. (Amsterdam: North-Holland, 2007); Пер. на русск. яз.: Ван Кампен Н Г *Стохастические процессы в физике и химии* (М.: Высшая школа, 1990)
58. Gardiner С W *Stochastic Methods: Handbook for the Natural and Social Sciences* 4th ed. (Berlin–New York: Springer-Verlag, 2009); Пер. на русск. яз.: Гардинер К В *Стохастические методы в естественных науках* (М.: Мир, 1986)
59. Coffey W T, Kalmykov Y P *The Langevin Equation: With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering* (World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics, Vol. 27) 3rd ed. (Singapore: World Scientific, 2012)
60. Файнберг В Я *ТМФ* **149** 483 (2006); Fainberg V Ya *Theor. Math. Phys.* **149** 1710 (2006)
61. Ao P, Kwon C, Qian H *Complexity* **12** 19 (2007)
62. Ao P *Commun. Theor. Phys.* **49** 1073 (2008)
63. Lenschow D H J. *Appl. Meteor.* **9** 874 (1970)
64. Caughey S J, Kitchen M, Leighton J R *Boundary-Layer Meteor.* **25** 345 (1983)
65. Quintarelli F *Boundary-Layer Meteor.* **52** 209 (1990)

The system of convective thermals as a generalized ensemble of Brownian particles

A.N. Vulfson, O.O. Borodin. *Oil and Gas Research Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Gubkina 3, 119333 Moscow, Russian Federation; National Research University "Higher School of Economics", ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation*
E-mail: vulfson@ipng.ru, borodin@ipng.ru

The system of thermals that makes the fine structure of a turbulent convective layer of liquid or gas is considered. A simplified probabilistic-geometrical approach is outlined that uses measurements along the observation line to determine the average in-plane parameters of this system. A dynamic equation for an isolated thermal interacting with its environment is derived. A Langevin equation similar to the stochastic equation for an ensemble of "fast" Brownian particles is constructed for a system of thermals. The nonlinear Langevin equation for such a system leads to the associated kinetic form of the Fokker–Planck equation. It is shown that the stationary solution of the kinetic Fokker–Planck equation is identical to the Maxwell distribution and approximately consistent with the distributions measured in the turbulent convective layer of the atmosphere.

Keywords: stochastic ensemble of convective thermals, the nonlinear Langevin equation, Fokker–Planck equation, Maxwell velocity distribution for an ensemble of convective thermals

PACS numbers: 05.10.Gg, 05.40.Jc, **44.25.+f**, 92.60.Fm, 92.60.hk
Bibliography — 65 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **186** (2) 113–124 (2016)

DOI: 10.3367/UFNr.0186.201602a.0113
Received 20 August 2015, revised 30 November 2015
Physics–Uspekhi **59** (2) (2016)