

## Свойства турбулентности, возникающей под воздействием внешней случайной силы в модели Бюргерса

К.П. Зыбин, А.С. Ильин

*Исследуются статистические свойства течений, возникающих под действием крупномасштабной случайной силы в средах, описываемых уравнением Бюргерса. Получены структурные корреляционные функции в случае, когда возбуждающая сила носит скейлинговый характер.*

**Ключевые слова:** турбулентность, статистическая теория, уравнение Бюргерса, скейлинг

PACS numbers: 05.40. – a, 47.10.ad, 47.27.E –

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.07.037865>

### Содержание

1. Введение (1349).
  2. Производящая функция и производящий функционал (1350).
  3.  $N$ -частичные функции распределения (1351).
  4. Заключение (1352).
- Список литературы (1352).

### 1. Введение

Уравнение Бюргерса подробно исследовалось в течение многих лет в связи с многочисленными физическими приложениями. Ему посвящены многочисленные обзоры и монографии (см., например, [1–3]). В частности, эти исследования отражены в ряде публикаций в УФН [4–6]. В настоящей статье мы ограничимся связанными с гидродинамической турбулентностью вопросами, которые, на наш взгляд, ещё не достаточно изучены. Уравнение Бюргерса, как известно, является простейшим вариантом уравнения Навье–Стокса. В течение многих лет с помощью анализа стохастических свойств этого уравнения надеялись пролить свет на проблему гидродинамической турбулентности, понять физическую картину турбулентного каскада. Одной из "моделей" каскада является сингулярность. Существует идея, что временная эволюция уравнения Навье–Стокса, возбуждаемого крупномасштабной силой, приводит (в пределах нулевой вязкости) к возникновению сингулярности [7, 8]. Эта сингулярность и определяет колмогоровский скейлинг. Хорошо известно, что в отсутствие вязкости в уравнении Бюргерса за конечное время действительно

развивается сингулярность  $v \propto x^{1/3}$ , однако она существует лишь мгновение и, как показывает численное моделирование [1], не оказывает влияния на стационарные статистические свойства решения.

Традиционный способ возбуждения турбулентности в уравнении Бюргерса основан на введении в его правую часть случайной силы:

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx} + g(x, t). \quad (1)$$

Такой подход обсуждался, например, в обзорах [4, 5].

Уравнение (1) будем считать нормированным на характерные параметры задачи, тогда  $\nu$  представляет собой обратное число Рейнольдса. Случайная сила  $g(x, t)$  предполагается гауссовой, дельта-коррелированной во времени,

$$\langle g(x_1, t_1) g(x_2, t_2) \rangle = \kappa(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2).$$

Крупномасштабность случайной силы  $g(x, t)$  означает, что корреляционная длина, т.е. масштаб затухания функции  $\kappa(x_1 - x_2)$ , существенно превышает вязкий масштаб. В безразмерных величинах корреляционная длина равна единице. Такое различие масштабов подразумевает существование инерционного интервала

$$\nu^{-1} \ll l \ll 1,$$

аналогичного инерционному интервалу уравнения Навье–Стокса для колмогоровской турбулентности.

Кроме случая крупномасштабной силы, сосредоточенной при малых волновых числах, представляет интерес анализ решений уравнения Бюргерса, возбуждаемого скейлинговой силой. Для такой силы фурье-образ коррелятора  $\kappa(x_1 - x_2)$  представляют в степенном виде

$$\kappa(k) = 2D_0 |k|^\beta.$$

Показатель степени  $\beta$  задаёт скейлинговые свойства возбуждающей силы. В случае, когда  $\beta > 0$ , сила рабо-

К.П. Зыбин, А.С. Ильин. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация  
E-mail: [zybin@lpi.ru](mailto:zybin@lpi.ru)

Статья поступила 31 мая 2016 г., после доработки 11 июля 2016 г.

тает в малых масштабах; так, например,  $\beta = 2$  соответствует тепловому шуму для модели Кардара–Паризи–Цванга (Kardar–Parisi–Zhang — KPZ) [9]. Хорошо известно, что в этом случае (см., например, [10]) задача решается и решение обладает простым скейлингом. Для нас представляет интерес случай  $\beta < 0$ . Тогда сила действует в больших масштабах (предполагается, что расходимость обрезана на этом масштабе). При этом метод ренормгруппы не работает [11] и нелинейность играет решающую роль. В случае  $\beta < -3$  возбуждающая сила дифференцируемая, решение, как показывает численное моделирование, становится кусочно-непрерывным и содержит конечное число скачков, показатели структурных функций при этом имеют вид  $\xi_n = \min(1, n)$ .

В случае недифференцируемой внешней силы, т.е. такой силы, для которой корреляции производных расходятся при  $k \rightarrow \infty$  ( $-3 < \beta < 0$ ), наличие скачков и соображения размерности дают следующие значения показателей структурных функций [12]:  $\xi_n = \min(1, -n\beta/3)$ . Однако ни в том, ни в другом случае нет последовательного вывода скейлинга структурных функций. Заметим также, что соображения размерности именно в случае уравнения Бюргера работают не всегда. Действительно, для третьей корреляционной функции  $S_3 = \langle (\delta v(l))^3 \rangle$  при наличии крупномасштабной случайной силы имеется колмогоровский закон [1]:  $\langle (\delta v(l))^3 \rangle = \varepsilon l$ , где  $\varepsilon = \kappa(0)$  — поток энергии. Соображения размерности, аналогичные тем, которые используются при турбулентности Навье–Стокса с учётом конечного числа скачков, должны были бы давать  $\xi_n = \min(1, n/3)$ , однако наблюдается совсем другая зависимость —  $\xi_n = \min(1, n)$ .

## 2. Производящая функция и производящий функционал

Целью настоящей статьи является последовательный вывод скейлинговых законов, приведённых выше. Ранее для получения структурных функций А. Поляков предложил использовать производящую  $n$ -точечную функцию [13]:

$$Z_n(\lambda_j, x_j, t) = \left\langle \exp \left( \sum \lambda_j v_j(x_j) \right) \right\rangle. \quad (2)$$

Корреляционные функции получаются из (2) дифференцированием по  $\lambda_i$  при  $\lambda_i = 0$ ,

$$\langle v_{i_1} \dots v_{i_k} \rangle = \left. \frac{\partial^k Z_n}{\partial \lambda_{i_1} \dots \partial \lambda_{i_k}} \right|_{\lambda_i=0}.$$

Этот подход был обобщён для случая производящего функционала [14]. Анализ этого функционала проводился при больших  $\lambda$ , что даёт возможность найти некоторое инстантонное решение [13, 14], но не позволяет вычислить структурные функции.

Мы также рассмотрим производящий функционал, но для его анализа воспользуемся другим методом — многомасштабными разложениями [15].

Производящий функционал имеет вид

$$Z[\eta(x), t] = \left\langle \exp \left( \int \eta(x) v(x, t) dx \right) \right\rangle. \quad (3)$$

Если выбрать функции  $\eta(x) = \sum_i \lambda_i \delta(x - x_i)$  в виде дельта-функций, находящихся в разных точках  $x_i$ , с

амплитудами  $\lambda_i$ , то получим (2). Усреднение, как обычно, проводится по ансамблю реализаций случайной силы. Однако если корреляционные функции скорости имеют конечную корреляционную длину, то справедлива эргодическая гипотеза и среднее можно вычислять, интегрируя по пространству:

$$\begin{aligned} Z[\eta(x), t] &= \left\langle \exp \left( \int \eta(x) v(x, t) dx \right) \right\rangle = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \exp \left( \int \eta(x) v(x - y, t) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим стационарное уравнение, тогда уравнение в вариациях для производящего функционала примет вид

$$\int dx \eta(x) \left\{ \partial_x \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta^2(x)} - v \partial_{xx} \frac{\delta Z}{\delta \eta(x)} - \frac{1}{2} \gamma(x) Z[\eta(x)] \right\} = 0. \quad (4)$$

Здесь мы ввели функцию  $\gamma(x) = \int \kappa(x - y) \eta(y) dy$ . Заметим, что функция  $\gamma(x)$  — это просто сглаженная по корреляционному масштабу функция  $\eta(x)$ . Однако в уравнении при  $v \rightarrow 0$  есть и "быстрый" масштаб, пропорциональный  $1/v$ . Введём  $y = x/v$  и будем искать решение в виде разложения по малому параметру, используя метод многомасштабных разложений [15]. Для этого считаем число  $Z$  порядка единицы, функции  $A(x) = \delta^2 Z / \delta \eta^2(x)$  и  $B(x) = \delta Z / \delta \eta(x)$  зависящими от многих масштабированных переменных:  $A = A(y_0, y_1, \dots)$ ,  $B = B(y_0, y_1, \dots)$ ; при этом ввиду вышесказанного  $\gamma(x) = \gamma(y_1, y_2, \dots)$ . Следуя принципу многомасштабных разложений, представим производную в виде  $\partial_y = \partial_{y_0} + v \partial_{y_1} + \dots$ . Так как переменные  $y_0, y_1, \dots$  асимптотически сильно различаются, дифференцирование и интегрирование по ним производятся независимо. Подставив разложение в (4), получим

$$\begin{aligned} \int dy_0 dy_1 \dots \eta(y_0, y_1, \dots) &\left[ (\partial_{y_0} + v \partial_{y_1} + \dots) A(y_0, y_1, \dots) - \right. \\ &\left. - (\partial_{y_0 y_0} + 2 \partial_{y_0} \partial_{y_1}) B(y_0, y_1, \dots) - v \frac{1}{2} \gamma(y_1, y_2, \dots) Z \right] = 0. \end{aligned}$$

Разложим функции  $A$  и  $B$  в ряд по  $v$  и выпишем получившиеся соотношения при одинаковых степенях  $v$ :

$$\int dy_0 \eta(y_0, y_1, \dots) (\partial_{y_0} A_0 - \partial_{y_0 y_0} B_0) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int dy_0 \eta(y_0, y_1, \dots) &\left[ \partial_{y_1} A_0 + \partial_{y_0} A_1 - \partial_{y_0 y_0} B_1 - 2 \partial_{y_0} \partial_{y_1} B_0 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \gamma(y_1, \dots) Z \right] = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Уравнения (5) и (6) должны выполняться при любой функции  $\eta(y_0, y_1, \dots)$ . Положив в уравнении (5)  $\eta(y_0, y_1, \dots) = \delta(y_0 - y)$ , где  $y$  — произвольная точка, получим

$$\partial_y \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta^2(y)} - \partial_{yy} \frac{\delta Z}{\delta \eta(y)} = 0.$$

Понятно, что если выполняется это уравнение, то и уравнение (5) справедливо для любой функции  $\eta$ . Решение последнего уравнения легко найти,

$$Z = \left\langle \exp \left[ \int \eta(x) \sum U_i(x - x_i) dx \right] \right\rangle,$$

где

$$\frac{dU_i^2}{dy} - \frac{d^2U_i}{dy^2} = 0.$$

Последнее уравнение справедливо вблизи некоторого набора точек  $x_i$ . При этом рассматриваем случай, когда  $x_i - x_{i-1} \approx 1 \gg v$ . Тем самым мы пренебрегаем взаимодействием точек  $i$  и  $i - 1$  в точном решении. Как мы увидим, взаимодействие экспоненциально мало,  $\propto \exp(-1/v)$ , и, следовательно, оно может не учитываться в асимптотическом разложении.

Решение вышеприведённого уравнения хорошо известно:

$$U_i = V_0 \frac{1 - \exp(V_0 y)}{1 + \exp(V_0 y)}.$$

Здесь  $V_0(x) = V_0(i)$  — медленно изменяющаяся на масштабе  $1/v$  функция, кроме того,  $x_i$ , вблизи которого справедливо это решение, также является медленно изменяющейся функцией.

Таким образом,

$$U(x) = \sum_i U_i(x), \quad U_i(x) = V_0(i) \frac{1 - \exp[V_0(i)(x - x_i)/v]}{1 + \exp[V_0(i)(x - x_i)/v]}.$$

Положения скачков  $x_i$  и амплитуды  $V_0(i)$  в рассматриваемом приближении не определены. Ввиду однородности случайной силы считаем, что  $x_i$  распределены равномерно по всей оси  $x$  и среднее следует понимать как среднее по пространству. Для определения соотношений для параметров скачков (ступенчатых функций или ступенек) воспользуемся уравнением, которое точно следует из усреднения уравнения Бюргерса. Умножим уравнение на  $V^2(x)$  и  $V^2(x')$ , после стандартных преобразований получим

$$\partial_t S_3 - v \partial_{ll} S_2 = \kappa. \tag{7}$$

При этом, как обычно,

$$S_3 = \frac{1}{L} \int_0^L (U(x+l) - U(x))^3 dx,$$

$$S_2 = \frac{1}{L} \int_0^L (U(x+l) - U(x))^2 dx.$$

Зафиксируем  $v$  и пусть  $l \rightarrow 0$ , так как функции  $U_i$  гладкие, очевидно, что  $S_n \propto l^n$  и  $S_3 \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow 0$ . Для функции  $S_2$  получим

$$-v \sum_i \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx = \kappa(0).$$

При  $v \rightarrow 0$  вклад дают только ступеньки, разобьём интеграл на отрезки  $L_i$  и, проинтегрировав нашу конкретную функцию, найдём

$$\frac{1}{N} \sum_i^N \frac{V_0^3(i)}{3L_0} = -\kappa(0), \tag{8}$$

где  $V_0(i)$  — амплитуда ступенчатой функции,  $N$  — число ступенек,  $L_0 = L/N$  — среднее расстояние между ступеньками.

Положим теперь  $v = 0$ ,  $S_3$  превращается в ступеньки, коррелятор на каждой  $\propto V_0^3(i)/L_0 l$  (коррелятор функции  $\text{sign } x$  самой с собой). Получаем то же соотношение (8). Таким образом, найдено соотношение связи между амплитудами ступенек, диссипацией энергии и средним расстоянием между ступеньками. Это соотношение напоминает закон Колмогорова (см. обсуждение ниже).

Рассмотрим теперь уравнение (6). Выберем  $\eta(y_0, y_1, \dots) = \eta(y_1, \dots)$  медленно меняющейся функцией. Проинтегрируем по  $y_0$  и  $y_1$ . Тогда в уравнении (6) появятся расходящиеся (секулярные) члены, пропорциональные  $y_0$  при  $y_0 \rightarrow \infty$ . Согласно общему принципу построения асимптотических разложений их необходимо обнулить, получив тем самым уравнение для медленно меняющихся функций:

$$\int \eta(y_1) dy_1 \partial_{y_1} \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta^2(y_1)} = \frac{1}{2} \int dy_1 dy \kappa(y_1 - y) \eta(y) \eta(y_1) Z. \tag{9}$$

### 3. N-частичные функции распределения

Мы нашли вид производящего функционала в главном приближении по параметру  $1/v$  и получили уравнение (9) в следующем приближении. Далее мы ограничимся построением производящей функции. Для этого, как указывалось выше, положим  $\eta(y_1) = \sum \lambda_i \delta(y_1 - x_i)$  в уравнении (9), получим [13]

$$\sum_j \lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left( \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} \kappa(x_i - x_j) \lambda_i \lambda_j Z. \tag{10}$$

Следуя [13], введём функцию  $F$ :

$$Z = \lambda_1 \dots \lambda_N F(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_N x_N).$$

Подставим в (10) последнее выражение, тогда оно примет вид

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \lambda_i} F = \sum \kappa(x_i - x_j) \lambda_i \lambda_j F. \tag{11}$$

В дальнейшем нам удобно рассматривать другие функции  $F_N$ , которые являются преобразованием Лапласа функции  $F$ :

$$F_N = \langle \theta(u_1 - v(x_1)) \theta(u_2 - v(x_2)) \dots \theta(u_n - v(x_n)) \rangle.$$

$N$ -частичные функции распределения при этом задаются соотношениями

$$P_n = \frac{\partial^n F_N}{\partial u_1 \dots \partial u_n}. \tag{12}$$

Сделаем преобразование Лапласа уравнения (11), получим

$$\sum u_k \partial_{x_k} F_N - \sum \kappa(x_i - x_j) \partial_{u_i u_j}^2 F_N = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) линейное, и его легко решить. Заметим, однако, что здесь представлено асимптотическое разложение и оно получено в предположении, что члены  $A_0$  и  $B_0$  одного порядка. В уравнении (13) видно, что это не так в области малых скоростей,  $u_i \approx 0$ , за исключением случая, когда скорости стремятся к нулю согласованно с градиентами функции. Как мы увидим ниже, такая согласованность и задаёт скейлинг.

Рассмотрим двухточечную функцию  $F_2$ , вводя переменные  $l = x_1 - x_2$  и  $v = u_1 - u_2$ . Полагая, что парная функция  $F_2$  зависит только от этих переменных, получим

$$v \partial_l F_2 = (2\kappa(0) - \kappa(l) - \kappa(-l)) \partial_{vv}^2 F_2. \quad (14)$$

В соответствии с (12) уравнение для плотности вероятности  $P_2$  примет вид

$$\partial_l P_2 = (2\kappa(0) - \kappa(l) - \kappa(-l)) \partial_{vv}^2 \left( \frac{P_2}{v} \right).$$

Рассмотрим случай, когда случайная сила локализована в крупных масштабах, тогда  $2\kappa(0) - \kappa(l) - \kappa(-l) = \kappa_1 l^2$ . Вводя  $S_n = \int v^n P_2 dv$ , где  $n$  — любое число, получим

$$\frac{dS_n}{dl} = \kappa_1 l^2 n(n-1) S_{n-2}.$$

Видно, что получившаяся цепочка структурных функций имеет скейлинговое решение  $S_n \propto l^n$ . Напомним, что этот скейлинг задаётся медленно меняющейся частью функции распределения. Быстрая часть, как мы видели ранее, всегда даёт  $S_n \propto l$ . Таким образом, мы получаем бифрактальный скейлинг:  $\xi_n = \min(1, n)$ .

Рассмотрим общий случай, когда корреляционная функция представима в виде степенного закона. Коррелятор при этом имеет вид  $\kappa(l) = \kappa_0 - \kappa_1 |l|^{-1-\beta}$  для  $\beta < -1$  и  $\kappa = \kappa_1 l^{-1-\beta}$  для  $-1 < \beta < 0$ .

Если  $-1 < \beta < 0$ , то стационарное уравнение (14) в пределе  $l \rightarrow 0$  принимает следующий вид:

$$v \partial_l F_2 = \kappa_1 l^{-\beta-1} \partial_{vv}^2 F_2.$$

Так же как и в предыдущем рассмотрении, легко убедиться, что структурные функции, определяемые медленной частью функции распределения, имеют скейлинговый вид:

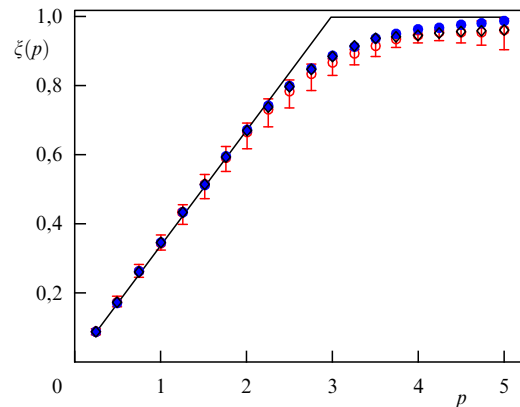
$$\langle v^n \rangle \propto l^{-\beta n/3}. \quad (15)$$

Таким образом, в случае скейлинговой силы показатель структурной функции также имеет бифрактальный скейлинг  $\xi_n = \min(1, \beta n/3)$ .

#### 4. Заключение

Итак, метод многомасштабных разложений позволяет разделить функции распределения на быструю и медленную. Быстрая функция отвечает за корреляцию скачков уравнения Бюргерса, а медленная — за гладкие флуктуации в случае крупномасштабной силы или за скейлинг  $\beta n/3$  в случае степенного спектра возбуждающей силы.

Стандартные рассуждения подобия в случае турбулентности Навье–Стокса основаны на соотношении (7) [16]. Мы видим, что (7) выполняется и в случае уравнения Бюргерса, но оно не даёт скейлинга структурных функций  $n/3$ . Заметим, однако, что колмогоровский скейлинг справедлив не только для  $S_3$ , но и для корреляции скачков скорости на разрывах, он заключён в соотношении (8). Действительно, поток энергии  $\kappa(0)$  не зависит от масштаба корреляционной функции, которая в данном рассмотрении порядка  $L$ . Таким образом, можно существенно менять корреляционную длину, сохраняя поток



**Рисунок.** (В цвете онлайн.) Показатели структурных функций  $S_{\text{mod}}(p) = \langle |v|^p \rangle$  как функция  $p$  при  $\beta = 1$ . Видно, что для корреляционных функций  $S_{\text{mod}}(p)$  не выполняется колмогоровский закон, поскольку  $\xi_3 = 0,85$ . В работе [17] было установлено, что кривая  $\xi(p)$ , приведённая на рисунке, имеет вид  $\xi(p) = \min(p/3, 1)$ , если структурные функции вычислять при условии  $vl > 0$ .

энергии фиксированным, при этом в соответствии с (8) средний куб скачков скорости будет пропорционален  $\kappa(0)L$ .

В литературе значительное внимание уделялось исследованию случая  $\beta = 1$  [1], поскольку он формально соответствует колмогоровскому скейлингу (с точностью до логарифмической поправки). Кроме того, скейлинговые показатели структурных функций  $\langle |v|^n \rangle$  с хорошей точностью задавались гладкой кривой (см. рисунок). Важно, что при  $n = 3$  соответствующий показатель структурной функции  $\xi_3 = 0,85$  и практически не менялся при изменении сетки от  $2^{-16}$  до  $2^{-18}$  (на рисунке соответствующие значения показаны синими и красными кружками). Наблюдаемое противоречие с теоретическим рассмотрением было устранено в работе [17]. Авторы обратили внимание, что бифрактальная структура восстанавливается, если рассматривать структурные функции при условии  $vl > 0$ . Заметим, что это свойство также присутствует и в нашем решении — стационарное решение полученного нами уравнения (14) существует, если  $vl > 0$ .

Отметим также, что закон Колмогорова для третьей корреляционной функции (7) выводится не для  $\langle |v|^3 \rangle$ , а для  $\langle v^3 \rangle$ . Как указывалось выше, обсуждаемый скейлинг  $n/3$  уравнения Бюргерса при  $\beta = 1$  не связан с диссипацией энергии и, следовательно, имеет мало общего с турбулентностью в уравнении Навье–Стокса.

Работа частично поддержана Программой РАН "Нелинейная динамика в математических и физических науках".

#### Список литературы

1. Вес J, Ханин К *Phys. Rep.* **447** 1 (2007)
2. Гурбатов С Н, Малахов А Н, Саичев А И *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии* (Сер. Современные проблемы физики, Вып. 81) (М.: Наука, 1990); Пер. на англ. яз.: Gurbatov S N, Malakhov A N, Saichev A I *Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media. Waves, Rays, Particles* (Manchester: Manchester Univ. Press, 1991)
3. Гурбатов С Н, Руденко О В, Саичев А И *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложение к нелинейной акустике* (М.: Физматлит, 2008); Пер. на англ. яз.: Gurbatov S N,

- Rudenko O V, Saichev A I *Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media. General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics* (Berlin: Springer-Verlag, 2011)
4. Гурбатов С Н, Саичев А И, Якушкин И Г *УФН* **141** 221 (1983); Gurbatov S N, Saichev A I, Yakushkin I G *Sov. Phys. Usp.* **26** 857 (1983)
  5. Руденко О В *УФН* **149** 413 (1986); Rudenko O V *Sov. Phys. Usp.* **29** 620 (1986)
  6. Гурбатов С Н, Саичев А И, Шандарин С Ф *УФН* **182** 233 (2012); Gurbatov S N, Saichev A I, Shandarin S F *Phys. Usp.* **55** 223 (2012)
  7. Frisch U *Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995); Пер. на русск. яз.: Фриш У *Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова* (М.: ФАЗИС, 1998)
  8. Agafontsev D S, Kuznetsov E A, Mailybaev A A *Phys. Fluids* **27** 085102 (2015)
  9. Kardar M, Parisi G, Zhang Y-C *Phys. Rev. Lett.* **56** 889 (1986)
  10. Barabási A-L, Stanley H E *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
  11. Hayot F, Jayaprakash C *Phys. Rev. E* **54** 4681 (1996)
  12. Chekhlov A, Yakhot V *Phys. Rev. E* **51** R2739 (1995)
  13. Polyakov A M *Phys. Rev. E* **52** 6183 (1995)
  14. Falkovich G et al. *Phys. Rev. E* **54** 4896 (1996)
  15. Nayfeh A H *Perturbation Methods* (New York: Wiley, 1973)
  16. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
  17. Mitra D et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 194501 (2005)

### Properties of turbulence driven by random external force in the Burgers model

K.P. Zybin, A.S. Il'yn

*Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,  
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation  
E-mail: zybin@lpi.ru*

This paper reviews the statistical properties and calculates the velocity structure functions of flows produced by a large-scale random scaling force in the Burgers model.

**Keywords:** turbulence, statistics, Burgers equation, scaling

PACS numbers: **05.40. - a**, 47.10.ad, 47.27.E -

Bibliography — 17 references

*Received 31 May 2016, revised 11 July 2016*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **186** (12) 1349–1353 (2016)

*Physics–Uspekhi* **59** (12) (2016)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.07.037865>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2016.07.037865>