

Аналитическая теория самосогласованных токовых структур в бесстолкновительной плазме

В.В. Кочаровский, Вл.В. Кочаровский, В.Ю. Мартъянов, С.В. Тарасов

Дан обзор наиболее разработанных классов точных решений уравнений Власова – Максвелла для стационарных нейтральных токовых структур в бесстолкновительной релятивистской плазме, допускающих свободу выбора функций распределения частиц (ФРЧ). Предложена общая классификация токовых слоёв и филаментов, описываемых методом инвариантов движения частиц при наличии определённой симметрии их ФРЧ (в координатном и импульсном пространствах). Обсуждается возможность использования этих решений для моделирования наблюдаемых и/или ожидаемых особенностей токовых структур в космической и лабораторной плазме. Затронута также проблема образования магнитного поля и аналитического описания так называемой вейбелевской неустойчивости в плазме с произвольной ФРЧ.

Ключевые слова: нейтральные токовые структуры, бесстолкновительная релятивистская плазма, инварианты движения, кинетическая теория, магнитосфера

PACS numbers: 52.30. – q, 52.35. – g, 94.30. – d

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.08.037893>

Содержание

1. Введение. Магнитные поля в бесстолкновительной плазме и вейбелевская неустойчивость (1267).

1.1. Цель обзора. 1.2. Проблема магнитного поля в бесстолкновительной плазме. 1.3. Вейбелевская неустойчивость и её зависимость от функции распределения частиц.

2. Аналитическое описание нейтральных магнитостатических структур в плазме с произвольным энергетическим распределением частиц (1276).

2.1. Метод инвариантов движения частиц. 2.2. Самосогласованные распределения, зависящие от трёх инвариантов движения частиц, и токовые слои с широм магнитного поля. 2.3. Уравнение Грэда – Шафранова для токовых слоёв без шира магнитного поля. 2.4. Двумерно-неоднородные магнитные структуры и токовые филаменты с цилиндрически-симметричными распределениями частиц. 2.5. Классификация плоскостойких магнитостатических структур без шира магнитного поля. 2.6. Суперпозиция токовых слоёв, магнитные поля которых ортогональны.

3. Типичные строго решаемые задачи для самосогласованных токовых слоёв (1288).

3.1. Степенные распределения частиц. 3.2. Экспоненциальные распределения частиц. 3.3. Полиномиально-экспоненциальные распределения частиц. 3.4. Негладкие распределения частиц.

4. Возможные приложения точных решений к интерпретации наблюдений токовых структур и результатов их численного моделирования (1305).

4.1. Особенности токовых конфигураций, ведущих к пересоединению силовых линий магнитного поля. 4.2. Двухмасштабные и расщеплённые токовые слои в магнитосферной плазме. 4.3. Токовые структуры с внешним магнитным полем на границе двух областей плазмы с различными параметрами. 4.4. Спектрально-угловые свойства синхротронного излучения токовых слоёв со степенными энергетическими распределениями частиц.

5. Заключение (1311).

Список литературы (1312).

1. Введение. Магнитные поля в бесстолкновительной плазме и вейбелевская неустойчивость

1.1. Цель обзора

Квазистационарные магнитные поля, поддерживаемые собственными токами в плазме, в значительной мере определяют её кинетические, динамические и радиационные свойства. Сказанное особенно существенно в бесстолкновительных нейтральных структурах, где эти поля обуславливают межчастичное взаимодействие и согласованы с локальной анизотропией распределения частиц. При этом в самых различных физических ситуациях как в космической, так и в лабораторной, в том числе лазерной, плазме энергетическое распределение частиц может быть далеко не максвелловским. Несмотря на недостаток количественных данных, общим для всех натуральных наблюдений, лабораторных экспериментов и численных

В.В. Кочаровский. Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация; Department of Physics and Astronomy, Texas A&M University, College Station, TX 77843-4242, USA
E-mail: kochar@appl.sci-nnov.ru

Вл.В. Кочаровский, В.Ю. Мартъянов, С.В. Тарасов.

Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация

Статья поступила 15 июня 2016 г., после доработки 16 августа 2016 г.

расчётов является вывод о возможности существования в бесстолкновительной плазме самых разнообразных долгоживущих (квазистационарных) токовых структур, значительно различающихся по анизотропии распределения частиц, их энергетическому распределению, пространственной конфигурации плотности тока и создаваемого им магнитного поля.

Попыткам кинетического описания самосогласованных магнитостатических структур в бесстолкновительной плазме посвящены многочисленные работы, например [1–36], большинство из которых являются аналитическими, поскольку численное моделирование пока не позволяет составить сколько-нибудь общее представление о решении данной сложной нелинейной задачи. К сожалению, подобные работы ограничены весьма узким набором анизотропных распределений частиц, чаще всего сдвинутым максвелловским распределением, и оставляют мало свободы в выборе пространственного распределения плотности тока. Работы, допускающие достаточно произвольные распределения частиц по энергиям и/или достаточно произвольные пространственные профили тока, несмотря на свою востребованность, немногочисленны и не дают ясного понимания возможных типов самосогласованных токовых структур и их характерных свойств (ср., например, [14, 22, 27, 37]).

Последовательная аналитическая теория самосогласованных токовых структур в бесстолкновительной плазме с произвольным энергетическим распределением частиц стала развиваться только в самое последнее время. Подавляющая часть новых результатов здесь получена с использованием разработанного нами метода, основанного на инвариантах движения частиц и допускающего анализ общего случая релятивистской многокомпонентной сильно анизотропной плазмы [38].

Предлагаемый обзор является первым в указанной области физики плазмы и охватывает большинство известных к 2016 году классов стационарных аналитических решений самосогласованных уравнений Максвелла и кинетических уравнений движения частиц. Он включает плоскослоистые, цилиндрически-симметричные и двумерные структуры с самыми разнообразными профилями токов и магнитных полей — локализованных и нет — при строгом учёте сложного движения захваченных и пролётных частиц и пространственной неоднородности анизотропии их функций распределения. Дано также аналитическое описание ряда возможных токовых структур границы между немагнитной плазмой и плазмой в сильном внешнем магнитном поле. Наличие большого числа точных решений для специальных функций распределения частиц (ФРЧ) делает практически невозможным сколько-нибудь детальный разбор всех найденных решений в одном обзоре. Мы рассчитываем на понимание этого обстоятельства теми авторами, результаты которых остались за пределами изложенного, и приводим далеко не все полученные нами результаты.

В обзоре представлен сравнительный анализ наиболее представительных решений и обсуждается их применение для построения аналитических моделей различных токовых конфигураций в космической и лабораторной плазме, а также для интерпретации результатов численного моделирования динамики бесстолкновительной плазмы. Дополнительно для полноты картины во введении проведён краткий анализ неустойчивости вейбелевского типа, которая в существенной мере зависит от

ФРЧ и может приводить как к формированию, так и к разрушению токовых структур. Кроме того, в заключительном разделе 4.4 отмечены возможные особенности анизотропии спектра синхротронного излучения самосогласованных токовых слоёв, недавно ставшие понятными благодаря точным решениям для структур с полиномиальными ФРЧ.

1.2. Проблема магнитного поля в бесстолкновительной плазме

Вопросы образования и длительного существования магнитного поля в неравновесной слабостолкновительной плазме остаются актуальными на протяжении десятиков лет (см., например, обзорные работы [39–46]).

Наряду с анализом развития и насыщения неустойчивостей вейбелевского типа, ответственных за генерацию магнитного поля, данная проблема включает решение сложной нелинейной задачи о возможных квазистационарных токовых структурах, согласованных с собственным и/или внешним магнитным полем. Такие структуры могут качественно изменять динамику частиц и поля в плазме, а следовательно, её кинетические и динамические свойства в целом. Исследования в этой области особенно актуальны для сильно неравновесной плазмы, например, для взрывных процессов в астрофизических объектах и в активных областях магнитосфер Солнца и планет или для явлений выброса вещества из мишеней, облучаемых сильными лазерными полями.

Серьёзные успехи в решении этой проблемы пока достигнуты лишь в магнитогидродинамическом приближении, справедливом для достаточно плотной плазмы и для структур с масштабами, много большими длины свободного пробега частиц [43, 47, 48]. Для структур с меньшими масштабами, т.е. для более разрежённой, так называемой бесстолкновительной плазмы, имеющиеся результаты являются весьма фрагментарными (см., например, [9, 40–42, 49–54]) и до сих пор не позволяют составить сколько-нибудь ясную картину механизмов коллективного взаимодействия частиц посредством создаваемого ими сложно структурированного магнитного поля. Без участия этого поля фактически не обходится ни одно из существенных явлений в бесстолкновительной плазме, таких как образование бесстолкновительных ударных волн, явление пересоединения силовых трубок магнитного поля, ускорение частиц в различных стратифицированных потоках плазмы, формирование взаимно согласованных спектров излучения и ФРЧ в плазме. Для такого рода задач с неизбежностью требуется анализ структуры самосогласованного магнитного поля в плазме с достаточно произвольным энергетическим распределением частиц.

Описание возможного многообразия и свойств квазистационарных токовых структур приобретает особое значение, если учесть, что именно данными о подобных структурах в основном ограничены результаты экспериментов в лабораторной плазме, например лазерной, и результаты наблюдений космической плазмы, например гео- и гелиосферной. Эта задача стала особенно актуальной в последние годы (см., например, [34, 42, 45, 46, 55]) благодаря появлению как мощных лазеров и систем диагностики лазерной плазмы, так и целого ряда специализированных космических аппаратов, предоставляющих информацию и о структуре магнитного поля, и о ФРЧ. Данные такого рода экспериментов и наблюдений

самосогласованных токовых конфигураций, а также соответствующих численных расчётов показывают, что ФРЧ могут быть весьма разнообразными и сильно отличающимися от максвелловского типа, а пространственные профили токов и магнитных полей — мультимасштабными, расщеплёнными и даже изрезанными [34, 44, 52, 56]. Как известно, подобные токовые образования, обеспечивающие длительное существование квазистационарного магнитного поля в бесстолкновительной неравновесной плазме, важны для описания крупномасштабных регулярных структур (например, токовых слоёв в магнитосфере Земли [34, 45], на Солнце [47], в экваториальной области магнитосфер нейтронных звёзд с пульсарным ветром [57, 58]) и мелкомасштабных турбулентных структур (например, хаотических токовых образований в турбулентной части токового слоя земной магнитосферы [59] и токовых филаментов в плазменных джетах или в окрестности фронта бесстолкновительных ударных волн [51, 53, 54, 60]).

Применим приближение бесстолкновительной плазмы, т.е. будем интересоваться масштабами l , много меньшими длины свободного пробега заряженных частиц l_{sc} :

$$l \ll l_{sc}. \quad (1)$$

Важнейшими структурными элементами такой плазмы, определяющими динамику частиц и электромагнитного поля, являются самосогласованные квазистатические конфигурации токов и магнитных полей, время жизни которых существенно превышает время l/v_T свободного разлёта частиц со средней скоростью v_T (как в нерелятивистской, где $v_T \ll c$, так и в релятивистской, где $v_T \sim c$, плазме). На существование таких структур указывают не только их непосредственные наблюдения — прежде всего в областях пересоединения силовых линий магнитного поля — в лабораторной, особенно лазерной, плазме (см., например, [46, 55, 61–71]) и в магнитосферах Солнца и планет (см., например, [14, 17, 45, 47, 72–78]) или косвенные наблюдения в джетах, аккреционных дисках, межзвёздном и межгалактическом пространстве (см., скажем, [43, 44, 57, 79–83]), но и, например, численные расчёты эволюции вейбелевской неустойчивости [40, 48, 52, 54, 56, 60, 84–91] и формирования бесстолкновительных ударных волн [90, 92–98], а также наличие синхротронного излучения из неравновесной плазмы удалённых космических объектов [58, 99–104]. Интерпретация последнего при известной энергетике этих объектов, по видимому, требует долгоживущих магнитных полей с большой плотностью энергии, вплоть до равномерной, т.е. сравнимой с плотностью кинетической энергии частиц.

Если бы масштаб неоднородности магнитного поля и создающих его токов не удовлетворял неравенству (1), то в соответствии с магнитогидродинамическим (МГД) приближением затухание поля определялось бы следующим декрементом [47, 105]:

$$\nu = \frac{c^2}{4\pi l^2 \sigma_0} \sim \frac{\gamma c^2 v_T}{\omega_p^2 l^2 l_{sc}}, \quad (2)$$

где в последнем соотношении использована простейшая оценка для омической проводимости $\sigma_0 \sim l_{sc} N e^2 / \gamma m_e v_T$ электронной плазмы с концентрацией N и введена

электронная плазменная частота $\omega_p = (4\pi N e^2 / m_e)^{1/2}$ (e и m_e — заряд и масса электрона), c — скорость света в вакууме, γ — характерный лоренц-фактор частиц. Отсюда ясно, что МГД затухание магнитных полей с характерным масштабом l происходит за время, большее формального времени свободного разлёта частиц l/v_T , если

$$\frac{\gamma c^2}{\omega_p^2 l} < l_{sc} < l, \quad (3)$$

т.е. только при достаточно большом масштабе l , превышающем плазменный $c\sqrt{\gamma}/\omega_p$.

Однако если интересоваться бесстолкновительным случаем (1), то для этих больших масштабов, превышающих плазменный, МГД приближение неприменимо и, следовательно, не даёт объяснения длительного существования токовых структур на временах, превышающих время разлёта l/v_T . Вместе с тем, для токовых структур с масштабами меньше или порядка плазменного уже формально вычисленное время МГД затухания оказывается меньше времени разлёта и поэтому объяснение длительного существования таких структур заведомо должно быть кинетическим (ср. [70, 74, 82]).

Как будет ясно из дальнейшего, в общем случае и, в частности, при $c\sqrt{\gamma}/\omega_p > l$, т.е. при нарушении неравенств (3), имеется большое многообразие мелкомасштабных магнитостатических структур, которые созданы самосогласованными токами в неоднородной анизотропной, вообще говоря, неравновесной плазме, и могут существовать на временах, много больших времени свободного разлёта частиц, т.е., как и крупномасштабные МГД поля, быть долгоживущими. Это утверждение, для обоснования которого требуется решение довольно сложной нелинейной задачи, неоднократно ставилось под сомнение вплоть до самого последнего времени (ср., например, [95, 99]).

Для простоты ограничимся нейтральными токовыми структурами, для которых пространственное разделение зарядов несущественно или отсутствует вовсе (что естественно для масштабов больше дебаевского), и покажем, что самосогласованные (квази)стационарные токовые конфигурации в бесстолкновительной плазме могут иметь произвольный масштаб и существовать практически для произвольной ФРЧ по энергии. Правда, вопрос об устойчивости подобных конфигураций в большинстве случаев остаётся открытым. Это и не удивительно, поскольку даже в отсутствие магнитного поля известная вейбелевская неустойчивость, включая её критерий, условия насыщения и зависимость от ФРЧ, остаётся малоисследованной (см. раздел 1.3).

Ниже мы представим широкий класс точных (в основном одномерных) решений указанной нелинейной задачи и покажем, что возможно детальное аналитическое исследование довольно сложных самосогласованных стационарных токовых конфигураций с различными параметрами, профилями и даже функциями распределения частиц.

Основное внимание будет уделено имеющимся разработкам эффективных методов аналитического описания самосогласованных нейтральных магнитостатических структур с использованием специальных разложений ФРЧ по инвариантам их движения и классификации получаемых этими методами решений нелинейного уравнения типа Грэда–Шафранова. Будут представле-

ны также иллюстративные примеры поддающихся аналитическому описанию структур и указаны некоторые возможности их использования для интерпретации наблюдений токовых конфигураций в космической и лазерной плазме и для анализа результатов численного моделирования подобных структур. Ввиду краткости данного обзора в нём не затрагиваются проблемы их фактического возникновения, устойчивости, учёта флуктуаций, нарушения квазинейтральности и возможной медленной динамической эволюции под воздействием внешних факторов.

В большинстве известных точных решений использован метод инвариантов движения частиц, опирающийся на определённую симметрию задачи и имеющий вековую историю применения в теоретической физике, начиная с основополагающей работы Джинса [106]. Применительно к рассматриваемой проблеме аналитического описания стационарных решений уравнений Власова–Максвелла этот метод, кратко изложенный в разделе 2.1, позволяет найти явное функциональное выражение плотности тока через векторный потенциал. Следует подчеркнуть принципиальную роль магнитного поля, которое существенно усложняет задачу по сравнению с известными задачами для невзаимодействующих частиц, например, частиц тёмной материи или звёзд в галактиках.

Магнитостатические структуры, описываемые с использованием трёх инвариантов движения частиц и включающие важный случай шира магнитного поля, в котором задействованы две компоненты векторного потенциала, рассмотрены в разделах 2.2, 2.3. Раздел 2.4 посвящён решению двумерных задач, ограниченных наличием одной компоненты векторного потенциала и использованием двух инвариантов движения частиц; здесь кратко рассмотрены и аксиально-симметричные филаменты тока, описание которых является одномерным в цилиндрической системе координат. Всевозможные одномерные решения качественно описаны в разделе 2.5, где дана полная классификация соответствующих нейтральных плоскостных токовых структур, в том числе при наличии внешнего магнитного поля. Допустимые нелинейные суперпозиции подобных плоскостных структур с ортогональными магнитными полями, образующими в результате конфигурации с широм силовых линий, рассмотрены в разделе 2.6.

В разделе 3 представлены типичные точные решения для плоскостных токовых структур без шира магнитного поля в случаях, когда удаётся найти явную функциональную связь эффективного потенциала в уравнении Грэда–Шафранова и распределения частиц, которые являются функциями векторного потенциала. А именно, рассмотрены степенные (раздел 3.1), экспоненциальные (раздел 3.2), полиномиально-экспоненциальные (раздел 3.3) и негладкие (раздел 3.4) разложения ФРЧ по проекции обобщённого импульса на направление тока.

В разделе 4 обсуждаются ожидаемые приложения рассмотренных точных решений к интерпретации современных наблюдений и диагностике токовых структур, прежде всего, в околоземной и солнечной плазме и в лазерной плазме, а также к надлежащей трактовке результатов численного моделирования соответствующих плазменных процессов с участием магнитного поля. Заключение посвящено общим выводам и открытым проблемам теоретического анализа самосогласованных токовых структур.

1.3. Вейбелевская неустойчивость

и её зависимость от функции распределения частиц

1.3.1. Дисперсионное уравнение для релятивистской плазмы. Пусть плазма состоит из частиц разных сортов, которые мы будем обозначать индексом α . Распределение по скоростям и динамику частиц сорта α будем описывать с помощью соответствующей функции распределения $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, причём импульсы \mathbf{p} могут принимать релятивистские значения. В тех местах, где это не может привести к недоразумениям, будем иногда опускать у f_α некоторые или даже все аргументы. Заряд частиц сорта α , который может быть как положительным, так и отрицательным, обозначим e_α , а их массу — m_α .

Кинетическое уравнение в отсутствие столкновений имеет вид [107]

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{B} — электрическое и магнитное (самосогласованные) поля (в точке \mathbf{r} в момент времени t), $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{p}/m_\alpha \gamma_\alpha$ — скорость частиц, $\gamma_\alpha = (1 + \mathbf{p}^2/m_\alpha^2 c^2)^{1/2}$ — их лоренц-фактор.

Электромагнитное поле будем описывать уравнениями Максвелла в дифференциальной форме, с явным учётом зарядов и токов, т.е. не переводя плазму в роль "среды" и не вводя соответствующих векторов электрической и магнитной индукции [107]:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (7)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (8)$$

где ρ и \mathbf{j} — суммарная плотность заряда и суммарная плотность тока всех частиц плазмы в данной точке, определяемые выражениями

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha N_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad (9)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha N_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{\mathbf{p}}{m_\alpha \gamma_\alpha} d^3p. \quad (10)$$

Здесь N_α — константы, связанные с нормировкой функций f_α (формально произвольной в силу линейности уравнения (4)). При анализе задач в неограниченных пространственных областях удобна нормировка

$$\left\langle \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p \right\rangle_{\mathbf{r}} = 1, \quad (11)$$

где скобки $\langle \dots \rangle_{\mathbf{r}}$ обозначают усреднение по пространству (по всему объёму плазмы). В этом случае константа N_α имеет физический смысл средней по пространству концентрации частиц сорта α . При описании некоторых неоднородных структур подобное усреднение невозможно либо неуместно; тогда используется другая нормировка, оговариваемая отдельно. Локальную концентрацию частиц сорта α будем обозначать n_α .

Анализ неустойчивости и дисперсионных характеристик проведём методом комплексных амплитуд, сделав ряд дополнительных предположений. Пусть в невозмущённом состоянии плазма однородна, а макроскопические электрические и магнитные поля отсутствуют. Это, в частности, означает, что плазма находится в равновесии (возможно, неустойчивом) и функции распределения всех сортов частиц не зависят от времени. Обозначим их $f_{0\alpha}(\mathbf{p})$. Условие отсутствия макроскопических магнитных полей подразумевает отсутствие макроскопической плотности тока: $\mathbf{j} = 0$. Поскольку нас не интересуют флуктуационные поля и токи, слово "макроскопические" будем опускать.

При наличии возмущений описанного выше состояния будем записывать функции распределения в виде сумм:

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_{0\alpha}(\mathbf{p}) + \delta f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (12)$$

Рассмотрим начальную задачу и, линеаризуя кинетическое уравнение (4), как обычно, проанализируем гармонические возмущения вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ с действительным волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω , возможно, имеющей мнимую часть (комплексные амплитуды, чтобы не усложнять обозначений, будем обозначать теми же символами, что и зависящие от времени и координат величины). Такая процедура, т.е. использование преобразования Фурье по пространственным переменным и преобразования Лапласа по времени, позволяет избавиться от дифференциальных операторов и получить следующие алгебраические соотношения:

$$-i\omega \delta f_{\alpha} + i\mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha} \delta f_{\alpha} + e_{\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B} \right) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (13)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi i}{c} \mathbf{j} - \frac{\omega}{c} \mathbf{E}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (14)$$

$$\mathbf{k}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{E} = -4\pi i \rho.$$

Отсюда

$$\delta f_{\alpha} = -ie_{\alpha} \frac{\omega \mathbf{E} + \mathbf{k}(\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{k})}{\omega(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (15)$$

так что плотности заряда и тока принимают вид

$$\rho = -i \sum_{\alpha} N_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int \frac{\omega \mathbf{E} + \mathbf{k}(\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{k})}{\omega(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} d^3 p, \quad (16)$$

$$\mathbf{j} = -i \sum_{\alpha} N_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int \left(\frac{\omega \mathbf{E} + \mathbf{k}(\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{k})}{\omega(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} \right) d^3 p. \quad (17)$$

Из уравнений Максвелла (14) получается соотношение

$$\mathbf{E}k^2 - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j} = 0. \quad (18)$$

Подставляя сюда плотность тока из формулы (17), приходим к выражению

$$\mathbf{E}k^2 - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} c^2} \int \mathbf{p} \left(\frac{-\omega \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{E}) + \mathbf{E}(\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{k})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{d^3 p}{\gamma_{\alpha}} = 0, \quad (19)$$

в котором все члены пропорциональны величине электрического поля. Условие совместности (19) как системы трёх скалярных линейных уравнений для компонент электрического поля представляет собой хорошо известное дисперсионное соотношение для рассматриваемых малых волновых возмущений.

Выражение (19) в тензорном виде можно записать как [108, 109]

$$\left[k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right] E_j = 0, \quad (20)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера и всюду по повторяющимся индексам подразумевается суммирование ($i, j = 1, 2, 3$). Здесь введён тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{\omega} \int p_i \frac{k_l p_j / m_{\alpha} \gamma_{\alpha} + \delta_{lj}(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})}{\omega(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})} \times \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_l} \frac{d^3 p}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}}, \quad (21)$$

обычно используемый в кинетической теории плазмы [105]. Общее дисперсионное соотношение имеет вид

$$\left\| \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \delta_{ij} - k_i k_j + \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} c^2} \times \int p_i \frac{k_l p_j / m_{\alpha} \gamma_{\alpha} + \delta_{lj}(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_l} \frac{d^3 p}{\gamma_{\alpha}} \right\| = 0, \quad (22)$$

где символ $\| \dots \|$ обозначает определитель матрицы.

Выражение для компонент тензора диэлектрической проницаемости (21) ε_{ij} удобно записать в виде, не содержащем производных от функций распределения. Проведя интегрирование (21) по частям и воспользовавшись тем, что при $p \rightarrow \infty$ функции распределения $f_{0\alpha}$ стремятся к нулю, после довольно громоздких выкладок получаем выражение

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} - \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{\omega^2} \times \int \frac{f_{0\alpha}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} \left[\delta_{ij} + \frac{k_i v_{\alpha j} + k_j v_{\alpha i}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}} + \frac{v_{\alpha i} v_{\alpha j} (k^2 c^2 - \omega^2)}{c^2 (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})^2} \right] d^3 p, \quad (23)$$

из которого, в частности, явно видно, что тензор ε_{ij} является симметричным: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Отметим, что, хотя выражение (21) не содержит в явном виде скорость света c , в одном из членов (23) появился множитель $(k^2 c^2 - \omega^2)$. Это кажущееся несоответствие объясняется тем, что скорость света участвует в связи между импульсом p и лоренц-фактором γ_{α} . При интегрировании по частям производные берутся в том числе от лоренц-фактора γ_{α} , и в результирующем выражении скорость света появляется явно.

1.3.2. Общий критерий вейбелевской неустойчивости как неустойчивости типа мягкой моды. Анализ вейбелевской, чисто аperiodической неустойчивости для функции распределения сколько-нибудь общего вида встречается со значительными математическими трудностями и проблема установления явного критерия её существования до сих пор остаётся открытой (см., например, [110]). Мы рассмотрим с общих позиций один важный с практической точки зрения случай, когда функция распределения зеркально симметрична относительно некоторой плоскости, а вектор \mathbf{k} параллелен этой плоскости. Посколь-

ку нас интересует ситуация, в которой в невозмущённом состоянии в плазме отсутствует ток, предположение о зеркальной симметрии функции распределения является довольно естественным. Неустойчивость асимметричных распределений, сопровождающаяся генерацией электрического поля с ненулевой проекцией E_x на волновой вектор из-за ненулевого значения компоненты ε_{xz} , рассмотрена в работах [111, 112] на примере сдвинутых максвелловских распределений с анизотропной температурой. Как показано в этих работах, для указанных распределений присутствие продольной компоненты поля E_x уменьшает инкремент по сравнению с инкрементом вейбелевской неустойчивости, которая возникала бы для аналогичных, но симметричных по отношению к плоскости $p_z = 0$ распределений и допускала бы только поперечное поле E_z .

Пусть система координат ориентирована так, что указанная выше плоскость перпендикулярна оси z , т.е. $k_z = 0$ и $f_{0x}(p_x, p_y, p_z) = f_{0x}(p_x, p_y, -p_z)$. Тогда из (23) следует, что из недиагональных компонент тензора ε_{ij} отличными от нуля могут быть только ε_{xy} и ε_{yx} , и от системы (20) отделяется одно уравнение, описывающее так называемые обыкновенные волны:

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz}(\omega, \mathbf{k}) \right] E_z = 0. \quad (24)$$

Подставляя в него выражение для ε_{zz} из (23), получаем дисперсионное соотношение:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{c^2} \int \frac{f_{0\alpha}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} \left[1 + \frac{v_{\alpha z}^2 (k^2 c^2 - \omega^2)}{c^2 (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha})^2} \right] d^3 p = 0. \quad (25)$$

При определённых условиях это уравнение описывает неустойчивость вейбелевского типа, механизм которой хорошо известен [109, 113, 114] (вейбелевская неустойчивость необыкновенной волны также возможна, но её дисперсионное уравнение гораздо сложнее и поэтому пока исследовалось в основном численно (см., например, [115])).

Неустойчивость имеет аperiодический характер, её инкремент с ростом волнового числа k сначала возрастает, а затем уменьшается до нуля, так что на дисперсионной кривой существует точка, в которой $\omega = 0$ и $k > 0$. Перейдём в уравнении (25) к пределу $\omega \rightarrow 0$:

$$k^2 = - \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{c^2} \int \frac{f_{0\alpha}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} \left(1 + \frac{p_z^2}{p_k^2} \right) d^3 p. \quad (26)$$

Не касаясь пока вопроса регуляризации полученного выражения по отношению к "черенковской" особенности подынтегральной функции при $p_k = 0$ (см. ниже), заметим, что правая часть зависит от направления вектора \mathbf{k} , но не зависит от его модуля, так как p_k^2 — квадрат модуля проекции импульса \mathbf{p} на направление вектора \mathbf{k} . Соответственно, при выбранном направлении волнового вектора для существования на дисперсионной кривой точки с $\omega = 0$, $k \neq 0$ необходимо, чтобы правая часть выражения (26) была положительной. Выражение (26) определяет *границу области волновых чисел, в которой реализуется неустойчивость*, а условие её существования имеет вид

$$\sum_{\alpha} N_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int \frac{f_{0\alpha}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} \left(1 + \frac{p_z^2}{p_k^2} \right) d^3 p < 0. \quad (27)$$

Подынтегральное выражение в (27) содержит особенность, требующую обхода в комплексной плоскости, — именно этим объясняется возможная отрицательность значения интеграла, в котором при действительных значениях \mathbf{p} подынтегральное выражение нигде не отрицательно. Однако наличие особенности не мешает применению критерия (27), поскольку значение интеграла не зависит от способа её обхода, если функция распределения является гладкой в окрестности значения $p_k = 0$.

Неравенство (27) является достаточным условием существования неустойчивости, если существует конечное значение величины k^2 , определяемое формулой (26), для которого $\omega^2 = 0$. Эта неустойчивость реализуется по крайней мере в окрестности указанной величины k , но, вообще говоря, может не быть аperiодической и может сопровождаться неустойчивостью в других диапазонах волновых чисел, к которым критерий (27) не имеет никакого отношения.

Достаточный критерий становится более информативным и относится к чисто аperiодической неустойчивости (типа мягкой моды с $\text{Re } \omega = 0$) в случае, когда функции распределения частиц f_{α} обладают также центральной симметрией, $f_{\alpha}(\mathbf{p}) = f_{\alpha}(-\mathbf{p})$, что, в частности, гарантирует выполнение потребованного выше равенства нулю плотности тока. Действительно, домножим в дисперсионном уравнении (25) числитель и знаменатель дроби на $(\omega + \mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha})^2$ и получим

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{c^2} \times \int \frac{f_{0\alpha}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} \left[1 + \frac{v_{\alpha z}^2 (k^2 c^2 - \omega^2) (\omega + \mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha})^2}{c^2 (\omega^2 - (\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha})^2)^2} \right] d^3 p = 0. \quad (28)$$

Из центральной симметрии функций распределения f_{α} следует, что интеграл от слагаемого, содержащего $\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}$ в первой степени, будет равен нулю, и дисперсионное уравнение принимает следующий вид:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{c^2} \times \int \left\{ \frac{f_{0\alpha}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} \left[1 + \frac{v_{\alpha z}^2 (k^2 c^2 - \omega^2) (\omega^2 + (\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha})^2)}{c^2 (\omega^2 - (\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha})^2)^2} \right] - \frac{v_{\alpha z}^2 f_{0\alpha} |_{p_k=0}}{(v_{\alpha k} - i |\sqrt{\omega^2/k^2}|)^2 \sqrt{m_{\alpha}^2 + (p^2 - p_k^2)/c^2}} \right\} d^3 p = 0. \quad (29)$$

В нём добавлено подынтегральное слагаемое, которое при интегрировании даёт нуль, но регуляризует подынтегральную функцию, т.е. явно нивелирует её особенность.

В последнее уравнение частота входит только через ω^2 , что позволяет, зафиксировав значение k , формально рассмотреть левую часть (29) как функцию от ω^2 на вещественной оси. Обозначим эту функцию $L_k(\omega^2)$. Она конечна при $\omega^2 = (\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha})^2$, несмотря на обращение в нуль имеющихся в ней знаменателей. Из очевидного неравенства $0 \leq (\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha})^2 < c^2 k^2$ можно заключить, что функция $L_k(\omega^2)$ непрерывна на лучах $\omega^2 \in (-\infty, 0)$ и $\omega^2 \in (c^2 k^2, \infty)$. При $\omega^2 \rightarrow \pm\infty$ знак функции $L_k(\omega^2)$ определяется знаком слагаемого ω^2/c^2 , т.е. $L_k(-\infty) < 0$, $L_k(+\infty) > 0$. Подстановка $\omega^2 = c^2 k^2$ даёт

$$L_k(c^2 k^2) = - \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{c^2} \int \frac{f_{0\alpha}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} d^3 p < 0, \quad (30)$$

откуда следует, что для любого значения k существует значение $\omega^2 > c^2 k^2$, такое что пара (ω^2, k) удовлетворяет дисперсионному уравнению (29), т.е. для любых ФРЧ, удовлетворяющих указанным условиям симметрии, существует устойчивая ветвь быстрых волн с фазовой скоростью, большей скорости света. Подстановка $\omega^2 = 0$ даёт

$$L_k(0) = -k^2 - \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} c^2} \times \int \left\{ \frac{f_{0\alpha}}{\gamma_{\alpha}} + \frac{p_z^2}{p_k^2} \left[\frac{f_{0\alpha}}{\gamma_{\alpha}} - \left(\frac{f_{0\alpha}}{\gamma_{\alpha}} \right)_{p_k=0} \right] \right\} d^3 p \quad (31)$$

и свидетельствует о существовании конечного значения квадрата волнового числа (26), для которого решение дисперсионного уравнения является нулевым.

Отсюда можно заключить, что при любом k , меньшем значения, определяемого формулой (26), существует значение $\omega^2 < 0$, удовлетворяющее дисперсионному уравнению (29). Так, при выполнении условия (27), оказывающегося "самодостаточным", неустойчивость существует во всём интервале волновых чисел от нуля до максимального значения (26), причём она обязана быть аperiодической, т.е. неустойчивостью типа мягкой моды. Отметим также, что если ФРЧ обладают аксиальной симметрией по отношению к направлению генерируемого тока, то инкремент неустойчивости будет одинаков для любой линейной суперпозиции возмущений с одинаковыми величинами волновых векторов, направленных поперёк выделенного направления генерируемого тока.

Чтобы получить грубое представление о физическом смысле полученного критерия вейбелевской неустойчивости (27), рассмотрим один сорт частиц α , ответственных за неустойчивость, положим $k_y = 0$, т.е. направим \mathbf{k} по оси x , и обозначим $F(p_x, p_y, p_z) := f_{0\alpha} N_{\alpha} e_{\alpha}^2 / m_{\alpha} \gamma_{\alpha}$. Вычитая из левой части (27) равный нулю интеграл

$$\int \frac{p_z^2}{p_x^2} F(0, p_y, p_z) d^3 p, \quad (32)$$

согласно указанной выше процедуре регуляризации получаем условие

$$\int (F - F(0, p_y, p_z)) \frac{p_z^2}{p_x^2} d^3 p + \int F d^3 p < 0. \quad (33)$$

Если предположить, что F как функция p_x имеет максимум при $p_x = 0$, характерную величину F_0 и характерную ширину \tilde{p}_x , а выражение $(F - F(0, p_y, p_z)) / p_x^2$ имеет характерное значение $-F_0 / \tilde{p}_x^2$ и ту же характерную ширину \tilde{p}_x , то условие неустойчивости приближённо перепишется в виде

$$\tilde{p}_x \iint F_0 \frac{p_z^2}{\tilde{p}_x^2} dp_y dp_z > \tilde{p}_x \iint F_0 dp_y dp_z. \quad (34)$$

Последнее неравенство можно условно интерпретировать как условие для среднеквадратичных компонент импульсов частиц $\langle p_z^2 \rangle > \langle p_x^2 \rangle$. Максимальное волновое число, т.е. граница области неустойчивости, в этом случае оценивается как

$$c^2 k_{\max}^2 \sim \frac{\omega_p^2}{\tilde{\gamma}} \left(\frac{\tilde{p}_z^2}{\tilde{p}_x^2} - 1 \right), \quad (35)$$

где тильда означает характерное значение соответствующих величин. Как будет видно из строгого анализа приведённого ниже примера, указанная грубая оценка хорошо описывает границу области неустойчивости. Для бимаксвелловских распределений со слабой анизотропией результат (35) фактически является точным (см. [116, 117]).

Проведённый общий анализ согласуется с известными численными и аналитическими решениями (например, [40, 41, 53, 118–144]) и показывает, что масштабы возмущений с максимальным инкрементом развития неустойчивости вейбелевского типа, оптимальные для генерации магнитных полей в бесстолкновительной релятивистской плазме, отвечают либо плазменному масштабу (при сильном превышении порога и сильной анизотропии распределения частиц), либо масштабам, много большим плазменного (при малом превышении порога и/или слабой анизотропии).

При этом наиболее благоприятная анизотропия соответствует вытянутости функции распределения поперёк волнового вектора возмущения $\mathbf{k} = kx_0$ и её силносности вдоль него. В общем случае неустойчивость не является аperiодической ($\text{Re } \omega \neq 0$) и существует для целого конуса волновых векторов, охватывающего выделенное направление анизотропии плазмы x_0 .

Согласно общему дисперсионному уравнению (25), описание вейбелевской неустойчивости как неустойчивости длинноволновой мягкой моды, для которой $|\varepsilon_{zz}| \gg 1$, упрощает поиск инкремента как функции волнового числа, что неявно использовалось выше. Подобная ситуация хорошо известна в физике твёрдого тела и объясняет возникновение различных структур, несоизмерных с периодом кристаллической решётки, например, сегнетоэлектрических и магнитостатических (см., в частности, [145–148]).

Следует отметить также, что отличия вейбелевских неустойчивостей в релятивистской и нерелятивистской плазме в основном определяются различиями эффективных масс частиц, поскольку их динамические свойства в релятивистском случае определяются величиной γm , зависящей от лоренц-фактора γ , что, в частности, приводит к уменьшению инкремента в целом и подавлению неустойчивости коротковолновых возмущений при росте средней энергии частиц в плазме с заданной анизотропией распределения частиц. С этим же обстоятельством связано и различие вкладов в неустойчивость разных компонент плазмы, обладающих одинаковой анизотропией, но различными массами частиц. Для сильно анизотропной электрон-позитронной плазмы, в которой роль электронов и позитронов одинакова, наиболее длинноволновые возмущения, для которых инкремент близок к максимальному, отвечают волновому числу $k \sim \omega_p / c\sqrt{\gamma}$. Максимальное значение инкремента Γ в случае достаточно сильной анизотропии ФРЧ, ответственных за неустойчивость, имеет порядок их релятивистской плазменной частоты, точнее, $\omega_p v / c\sqrt{\gamma}$, где v и $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — характерные скорость и лоренц-фактор этих частиц. При уменьшении степени анизотропии максимальный инкремент уменьшается, а интервал волновых чисел, отвечающих неустойчивости, становится уже, пока не исчезнет совсем.

Порог вейбелевской неустойчивости может быть обусловлен ограничениями для формы ФРЧ, столкновениями частиц, присутствием однородного магнитного

поля или наличием компонент плазмы с подавляющими неустойчивость функциями распределения [111, 120, 131], причём все указанные факторы могут нарушать аперидичность неустойчивости. В отсутствие подобных факторов можно так деформировать изотропные ФРЧ в бесстолкновительной немагнитной плазме, что неустойчивость вейбелевского типа возникнет при любой сколь угодно малой степени анизотропии. Сказанное следует из общего критерия неустойчивости (27) в случае эллипсоидального вида функции распределения, примером которого служит бимаксвелловское (двухтемпературное) распределение [116].

1.3.3. Анализ вейбелевской неустойчивости для специальных распределений частиц. Сделанные общие утверждения согласуются с известными результатами исследований вейбелевской неустойчивости для ряда специальных распределений частиц, включая бимаксвелловские [53, 116, 117, 125, 127, 128], степенные [40], параллелепipedное [149] и различные варианты так называемых waterbag распределений [40, 50, 85, 114]. В частности, для релятивистского бимаксвелловского распределения, рассмотренного в работе [116], и для ультрарелятивистского степенного распределения, рассмотренного в работе [40], при малой степени анизотропии $T_{\perp}/T_{\parallel} - 1$ максимальный инкремент ведёт себя как $\Gamma_{\max} \sim \sim \omega_p \gamma^{-1/2} (T_{\perp}/T_{\parallel} - 1)^{3/2}$, а его отношение к величине $k_{\text{опт}} v_T$ подчиняется линейному закону $\Gamma_{\max}/k_{\text{опт}} v_T \sim \sim T_{\perp}/T_{\parallel} - 1$, где $k_{\text{опт}}$ — волновое число наиболее неустойчивых возмущений, v_T — характерная тепловая скорость частиц в случае близких по величине поперечной T_{\perp} (поперёк \mathbf{k}) и продольной T_{\parallel} (вдоль \mathbf{k}) температур.

В качестве характерного примера вейбелевской неустойчивости рассмотрим плазму с функцией распределения электронов вида

$$f_{0e}(\mathbf{p}) = \tilde{F}(p_{\perp}) H(p_x - m_e c \beta_2 \gamma_e) H(p_x + m_e c \beta_2 \gamma_e),$$

$$4\pi m_e c \beta_2 \int_0^{\infty} p_{\perp} \tilde{F}(p_{\perp}) \sqrt{\frac{1 + p_{\perp}^2/m_e^2 c^2}{1 - \beta_2^2}} dp_{\perp} = 1, \quad (36)$$

имеющей ось симметрии $p_x \parallel k$ и допускающей варьирование их энергетического распределения за счёт произвольной неотрицательной функции $\tilde{F}(p_{\perp})$ от поперечного импульса (ионы считаем неподвижными и компенсируемыми заряд электронов в состоянии равновесия). Здесь $H(\dots)$ — функция Хевисайда, т.е. ступенчатая функция, равная единице при положительных значениях аргумента и нулю — при отрицательных.

Указанная функция распределения является однородной по продольному импульсу и имеет вид, вообще говоря, неоднородного по радиусу цилиндра, ограниченного гиперболическими поверхностями $p_x = \pm \beta_2 (m_e^2 c^2 + p_x^2 + p_{\perp}^2)^{1/2}$, которые соответствуют фиксированной продольной скорости $v_x \equiv c \beta_2 = \text{const}$. В нерелятивистском случае это действительно может быть цилиндр, определяемый условиями $|p_x| \leq m_e c \beta_2$, $p_{\perp} \leq p_0$, если функция $\tilde{F}(p_{\perp})$ принимает нулевое значение при $p_{\perp} > p_0$. В релятивистском случае основания "цилиндра" в пространстве импульсов уже не являются плоскими.

Дисперсионное уравнение (25) оказывается квадратным относительно ω^2 :

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \frac{4\pi N e^2}{m_i} - I_1 \ln \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} + I_2 \frac{\beta_2 (\omega^2 - c^2 k^2)}{\omega^2 - c^2 k^2 \beta_2^2} = 0, \quad (37)$$

$$I_1 = 8\pi^2 N e^2 c \int_0^{\infty} \tilde{F}(p_{\perp}) p_{\perp} dp_{\perp}, \quad (38)$$

$$I_2 = 8\pi^2 N e^2 c \int_0^{\infty} \frac{\tilde{F}(p_{\perp}) p_{\perp}^3}{m_e^2 c^2 + p_{\perp}^2} dp_{\perp}.$$

Его решение

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (c^2 k^2 (1 + \beta_2^2) + \Omega^2) \pm \left[\frac{1}{4} (c^2 k^2 (1 + \beta_2^2) + \Omega^2)^2 - c^2 k^2 \beta_2^2 \Omega^2 - c^4 k^4 \beta_2^2 + I_2 \beta_2 c^2 k^2 (1 - \beta_2^2) \right]^{1/2}, \quad (39)$$

$$\Omega^2 = \frac{4\pi N e^2}{m_i} + I_1 \ln \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} - I_2 \beta_2, \quad (40)$$

показывает, что неустойчивость ($\omega^2 < 0$) есть при

$$c^2 k^2 < \frac{I_2}{\beta_2} - I_1 \ln \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} - \frac{4\pi N e^2}{m_i}, \quad (41)$$

в полном согласии с общим выражением для верхней границы (26) интервала волновых чисел, отвечающих неустойчивости. Максимальный инкремент можно найти, решая систему из уравнения (37) и условия, выражающего равенство нулю дискриминанта (37) как квадратного уравнения относительно k^2 . В результате получается простой ответ:

$$\Gamma_{\max} = \frac{\beta_2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} \left(\sqrt{\frac{I_2}{\beta_2}} - \sqrt{I_1 \ln \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} + \frac{4\pi N e^2}{m_i}} \right). \quad (42)$$

Это максимальное значение инкремента достигается при

$$c^2 k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{I_2}{\beta_2} - I_1 \ln \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} - \frac{4\pi N e^2}{m_i} - \frac{1 + \beta_2^2}{1 - \beta_2^2} \left(\sqrt{\frac{I_2}{\beta_2}} - \sqrt{I_1 \ln \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} + \frac{4\pi N e^2}{m_i}} \right)^2 \right]. \quad (43)$$

В простейшем случае равномерного заполнения "цилиндра", когда

$$\tilde{F}(p_{\perp}) = \frac{3\sqrt{1 - \beta_2^2}}{4\pi\beta_2 m_e^3 c^3 (\gamma_m^3 (1 - \beta_2^2)^{3/2} - 1)} = \text{const} \quad (44)$$

при $p_{\perp} \leq p_0$ (и $\tilde{F}(p_{\perp}) = 0$ при $p_{\perp} > p_0$), где $\gamma_m = (1 + p_0^2/m_e^2 c^2)^{1/2} (1 - \beta_2^2)^{-1/2}$ — максимальный лоренц-фактор частиц, имеем

$$I_1 = \frac{4\pi N e^2}{m_e} \frac{3(\gamma_m^2 (1 - \beta_2^2) - 1) \sqrt{1 - \beta_2^2}}{4\beta_2 (\gamma_m^3 (1 - \beta_2^2)^{3/2} - 1)}, \quad (45)$$

$$I_2 = \frac{4\pi N e^2}{m_e} \frac{3[(\gamma_m^2 (1 - \beta_2^2) - 1) - \ln(\gamma_m^2 (1 - \beta_2^2))] \sqrt{1 - \beta_2^2}}{4\beta_2 (\gamma_m^3 (1 - \beta_2^2)^{3/2} - 1)}. \quad (46)$$

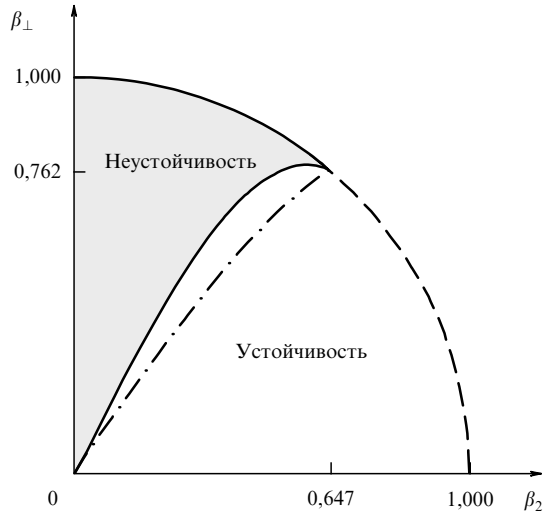


Рис. 1. Области параметров β_2, β_{\perp} , при которых плазма с функцией распределения электронов (36), (44) в виде однородно заполненного цилиндра подвержена или не подвержена вейбелевской неустойчивости с волновым вектором, параллельным оси симметрии распределения. Штриховая кривая отвечает уравнению $\beta_2^2 + \beta_{\perp}^2 = 1$. Отношение масс ионов и электронов $m_i/m_e = 1837$. Для сравнения штрихпунктирной кривой показана граница неустойчивости для трубчатого распределения.

Обозначая поперечную скорость самых быстрых частиц распределения, нормированную на скорость света, как

$$\beta_{\perp} = \sqrt{1 - \beta_2^2 - \frac{1}{\gamma_m^2}}, \quad (47)$$

область неустойчивости (41) в переменных β_2, β_{\perp} можно изобразить наглядно (рис. 1). В нерелятивистском случае $\beta_2, \beta_{\perp} \ll 1$ условие существования неустойчивости переходит в неравенство $\beta_{\perp} > 2\beta_2$. Нетрудно проверить, что цилиндрическое распределение более устойчиво по отношению к рассматриваемой вейбелевской неустойчивости, чем покое трубчатое распределение тех же габаритов, в котором все частицы имеют один и тот же поперечный импульс $p_{\perp} = p_0$ (ср. [114]).

Дисперсионные кривые для $\gamma_m = 10$ и различных соотношений между максимальной поперечной и продольной скоростями, β_{\perp}/β_2 , показаны на рис. 2. В частности, максимальный (по отношению к $\omega_{pe}/\sqrt{\gamma_m}$) инкремент достигается при $\beta_2 \ll 1, \gamma_m \gg 1$ и стремится к

$\omega_{pe}/(\sqrt{2}\gamma_m)^{1/2}$. Нетрудно проверить, что в релятивистском случае для рассмотренного однородно заполненного цилиндрического распределения диапазон охваченных неустойчивостью волновых чисел оказывается шире, а величины инкрементов — больше по сравнению с соответствующими величинами для трубчатого распределения, где максимальный инкремент равен $\omega_{pe}/\sqrt{2}\gamma_m$.

1.3.4. Оценки насыщающего магнитного поля. Нелинейная динамика релятивистской вейбелевской неустойчивости не поддается столь же строгому математическому исследованию, как линейная. Имеющиеся фрагментарные численные исследования [40, 51, 52, 56, 60, 87, 96, 144, 150–152] свидетельствуют о том, что неустойчивость насыщается в результате уменьшения степени анизотропии ФРЧ и формирования квазихаотических в пространстве токовых структур (часть которых обладает долгоживущим магнитным полем благодаря надлежащему самосоглашению с пространственно неоднородной анизотропной ФРЧ). В данном разделе мы ограничимся простыми качественными оценками уровня магнитных полей, насыщающих неустойчивость. Для определенности будем иметь в виду только один сорт частиц. Особенности насыщения неустойчивости, связанные с многокомпонентностью плазмы, обсуждаются, например, в работах [50, 54, 153].

Линейная стадия развития неустойчивости заведомо заканчивается, когда развившиеся электромагнитные возмущения существенно меняют импульсное распределение частиц, отвечающих за неустойчивость, а также кардинально перемешивают их траектории на масштабе неоднородности поля в случае генерации гармоник в достаточно широком интервале волновых чисел Δk .

Различные оценки насыщающего магнитного поля обсуждались, например, в работах [33, 40, 41, 50, 153]. Простейшая оценка уровня насыщения получается, если потребовать, чтобы угол поворота скорости частиц в генерируемом магнитном поле B_{sat} за время развития неустойчивости, т.е. за время порядка обратного инкремента, стал порядка единицы. Тогда в квазиоднородном насыщающем магнитном поле циклотронная частота сравнивается с инкрементом неустойчивости Γ :

$$\frac{eB_{sat}}{mc\gamma} \sim \Gamma. \quad (48)$$

Подставляя максимальный инкремент в виде $\Gamma \sim (v/c)\omega_p/\sqrt{\gamma}$ и учитывая, что он реализуется для волно-

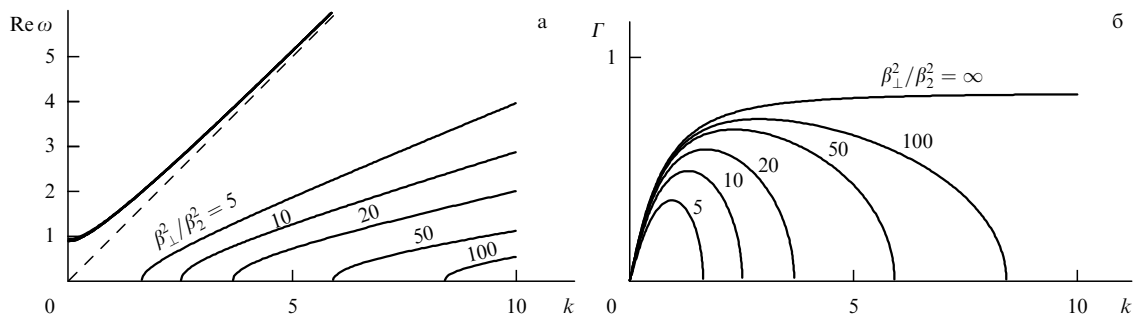


Рис. 2. Дисперсионные кривые (39) с подстановкой (45) и (46) при $\gamma_m = 10, m_i/m_e = 1837$ и различных значениях отношения $\beta_{\perp}^2/\beta_2^2$. Частота $\text{Re } \omega$ и инкремент неустойчивости Γ нормированы на $(4\pi Ne^2/m_e\gamma_m)^{1/2}$, волновое число $k = k_x$ нормировано на $(1/c)(4\pi Ne^2/m_e\gamma_m)^{1/2}$. Штриховая линия соответствует прямой $\omega = ck$, выше которой на рис. а изображена дисперсионная кривая не интересующей нас (устойчивой) электромагнитной волны.

вых чисел $k \sim \omega_p/c\sqrt{\gamma}$, получаем соотношения

$$\frac{B_{\text{sat}}^2/8\pi}{Nmc^2\gamma} \sim \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}, \quad \frac{B_{\text{sat}}^2/8\pi}{Nmv^2/2} \sim \gamma \quad (49)$$

и заключаем, что как в релятивистской, так и в нерелятивистской плазме при $\Gamma \sim kv$ энергия магнитного поля, насыщающего неустойчивость вейбелевского типа, может быть порядка кинетической энергии частиц плазмы. Если же для волновых чисел гармоник, возрастающих с инкрементом порядка максимального Γ , выполнены неравенства $\Gamma \gg kv$ либо $\Gamma \ll kv$, то насыщающее (квазиоднородное) поле будет слабее и не достигнет "равнораспределительного" значения.

В трудно реализуемом, гипотетическом случае $\Gamma \gg kv$ насыщение происходит тогда, когда за время обратного инкремента изменение импульса частиц под действием индукционного электрического поля $E_{\text{sat}} = \Gamma B_{\text{sat}}/kc$, сопровождающего появление магнитного поля, сравнивается с характерным импульсом частиц $mv\gamma$, т.е. $eE_{\text{sat}}/\Gamma \sim mv\gamma$. Следовательно, в этом случае насыщающее магнитное поле не зависит от инкремента: $B_{\text{sat}} \sim mc\gamma kv/e$. Эта оценка наступления нелинейной стадии соответствует "замагничиванию" частиц плазмы, когда их гирорадиус сравнивается с масштабом возрастающего крупномасштабного возмущения.

При малом превышении порога вейбелевской неустойчивости (или в случае слабой анизотропии), когда $\Gamma \ll kv$, генерируется относительно крупномасштабное магнитное поле с волновыми числами $k \ll \omega_p/c\sqrt{\gamma}$ и за время обратного инкремента большая часть частиц успевает сместиться на много длин волн гармоник этого поля, двигаясь в знакопеременном магнитном поле и в среднем изменяя направление своей скорости гораздо медленнее, чем в знакопостоянном магнитном поле. В результате для гармонического в пространстве возмущения угол отклонения оценивается как $(eB/mc\gamma\Gamma)(\Gamma/kv)$, а в случае генерации большого числа независимых случайных гармоник в широком интервале волновых чисел $\Delta k \sim k$ угол отклонения скорости частицы меняется по диффузионному закону и за время обратного инкремента достигает величины порядка $\phi \sim (eB/mc\gamma\Gamma)\sqrt{\Gamma/kv}$. В последнем, наиболее реалистичном, случае к моменту насыщения плотность энергии магнитного поля по порядку величины оценивается как

$$\frac{B_{\text{sat}}^2}{8\pi} \sim \frac{1}{2} N\gamma m v^2 \left(\frac{k^2 c^2}{\omega_p^2 \gamma} \right) \left(\frac{\Gamma^3}{k^3 v^3} \right), \quad (50)$$

если условием насыщения считать равенство характерного масштаба магнитного поля $1/k$ величине среднеквадратичного дополнительного смещения частиц, происходящего за время обратного инкремента благодаря диффузионным флуктуациям скорости порядка ϕv .

В соотношении (50) оба коэффициента в круглых скобках малы по сравнению с единицей и определяют отличие данной оценки от максимально возможной (49). Естественно, что максимальная плотность энергии будет приходиться на магнитные поля с масштабами порядка $2\pi/k$, отвечающими максимальному инкременту. При этом указанные масштабы малы по сравнению с гирорадиусами частиц, которые, следовательно, не являются захваченными. Отметим, что в случае слабой анизотропии ФРЧ, когда $\Gamma \ll kv$, известная оценка плотности

энергии насыщающего магнитного поля, отвечающая примерно равенству инкремента Γ частоте баунс-осцилляций $\sqrt{kveB_{\text{sat}}/\gamma mc}$ частиц в окрестности областей нулевого магнитного поля [5, 33, 50, 150], может занижать истинное значение в kv/Γ раз, поскольку в случае общего положения подобным баунс-осцилляциям подвержена лишь малая часть частиц. Разумеется, из-за влияния специальных условий или каких-либо геометрических ограничений, обусловленных, например, внешними воздействиями, селекцией тех или иных неустойчивых пространственных гармоник, вкладом других фракций плазмы и пр., указанные оценки насыщающего магнитного поля для вейбелевской неустойчивости данного сорта частиц и роль захваченных магнитным полем частиц могут изменяться.

Ниже мы рассмотрим самые разные токовые структуры, образованные самосогласованным движением как пролётных, так и захваченных магнитным полем частиц. Захваченные частицы в той или иной мере присутствуют всегда, по крайней мере, для определённых направлений движения, отвечающих баунс-осцилляциям в окрестности минимума магнитного поля. Однако рассматриваемые самосогласованные токовые структуры, вообще говоря, допускают произвольное соотношение между гирорадиусом частиц и периодом структуры, в том числе возможность ситуации $r_H \ll 1/k$, когда практически все частицы являются захваченными, "замагничеными". Поскольку насыщение вейбелевской неустойчивости, как мы видели, наступает раньше, при $kr_H \gtrsim 1$, формирование подобных токовых структур с сильно замагниченными частицами возможно лишь благодаря существенно нелинейной динамике плазмы или при наличии внешних воздействий. Отметим также, что, согласно разделу 1.2, фактически наиболее актуальным является описание самосогласованных конфигураций магнитного поля и тока на масштабах, больших или порядка плазменного, когда разделение зарядов можно не принимать во внимание, по крайней мере, в отсутствие внешних факторов.

2. Аналитическое описание нейтральных магнитостатических структур в плазме с произвольным энергетическим распределением частиц

2.1. Метод инвариантов движения частиц

Описание стационарных конфигураций магнитного поля в бесстолкновительной плазме основано на кинетических уравнениях Власова (4) для функций распределения $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ по импульсам $\mathbf{p} = \gamma_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ всех сортов частиц α и уравнениях магнито- и электростатики. В отсутствие границ рассматриваются, конечно, только решения, ограниченные во всём пространстве.

Уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$ и $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ удовлетворяются автоматически при переходе к описанию полей $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ посредством векторного и скалярного потенциалов \mathbf{A} и φ , уравнения для которых имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha N_\alpha e_\alpha \int f_\alpha \mathbf{v}_\alpha d^3 p, \\ \Delta\varphi &= -4\pi \sum_\alpha N_\alpha e_\alpha \int f_\alpha d^3 p. \end{aligned} \quad (51)$$

Поскольку фазовое пространство одной частицы шестимерно, в стационарных полях траектория каждой частицы в нём однозначно выбирается набором из пяти координат, так что существует (разумеется, далеко не единственный) набор из пяти независимых функций $\mathcal{I}_{x1}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, $\mathcal{I}_{x2}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, $\mathcal{I}_{x3}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, $\mathcal{I}_{x4}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, $\mathcal{I}_{x5}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, значения которых постоянны вдоль траекторий частиц. В стационарном состоянии функция распределения имеет постоянное значение на фазовой траектории каждой частицы [106, 154], поэтому её можно выразить через функции $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_5$: $f_x(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_x(\mathcal{I}_{x1}, \mathcal{I}_{x2}, \mathcal{I}_{x3}, \mathcal{I}_{x4}, \mathcal{I}_{x5})$. В этом случае кинетическое уравнение (4) удовлетворяется автоматически при любой зависимости f_x от $\mathcal{I}_{x1}, \dots, \mathcal{I}_{x5}$. Наибольший практический интерес такая замена переменных имеет тогда, когда первые несколько функций $\mathcal{I}_{x1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \mathcal{I}_{x2}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \dots$ можно записать аналитически — в виде явных интегралов движения, а от оставшихся \mathcal{I}_x функция распределения не зависит [155, 156].

Одним из интегралов движения в стационарных полях является энергия частицы $\mathcal{I}_{x1} \equiv \mathcal{E} = e_x \varphi + \sqrt{m_x^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}$ (его существование обязано тому обстоятельству, что явной зависимости от времени нет ни в одном из исходных уравнений).

Далее мы ограничимся анализом стационарных конфигураций, однородных по направлению некоторой оси z . Тогда для каждой частицы сохраняются также проекция её обобщённого импульса на эту ось: $\mathcal{I}_{x2} \equiv P_z = p_z + (e_x/c)A_z$.

Если система однородна ещё и по направлению оси y , как это имеет место всюду ниже, кроме раздела 2.4, то интегралом движения будет ещё и проекция обобщённого импульса частицы на ось y : $\mathcal{I}_{x3} \equiv P_y = p_y + (e_x/c)A_y$ (см. разделы 2.2, 2.3).

Если же система имеет цилиндрическую симметрию по отношению к оси z (конфигурация типа пинча), то интегралом движения будет проекция обобщённого момента импульса на ось z : $\mathcal{I}_{x3} \equiv L_z = xp_y - yp_x + (e_x/c)(xA_y - yA_x)$. В этом случае удобно использовать цилиндрическую систему координат. В варианте z -пинча, когда ток параллелен оси z (и согласно закону сохранения заряда не зависит от z), фактически имеется только одна, азимутальная, компонента магнитного поля B_φ и задача сводится к одномерному уравнению магнитостатики, число известных точных решений которого крайне невелико. Поэтому мы только кратко остановимся на подобной задаче о цилиндрически-симметричных филаментах (см. раздел 2.4), хотя она и актуальна для физики космической плазмы, например, в теории бесстолкновительных ударных волн. В варианте θ -пинча, когда имеется только азимутальная компонента тока, в общем случае зависящая от z , магнитное поле существует двумерно и точное решение соответствующего двумерного уравнения магнитостатики найти ещё труднее. Примеры подобного решения существуют для максвелловского и k -распределения и представляют собой автономную структуру, определяемую одномерными уравнениями для магнитного потока, причём для k -распределения с параметром $k = 7/2$ она описывается простой аналитической формулой [157]. Такие решения могут быть полезными для моделирования глобальных магнитосферных структур планет и звёзд.

Если функции распределения зависят лишь от интегралов движения, то, как только вид этих зависимостей зафиксирован, после выполнения интегрирования в пра-

вых частях уравнений (51) система вместо интегральной становится обычной системой уравнений в частных производных. При этом некоторая тонкость состоит в том, что в разных областях пространства могут быть частицы с одинаковыми значениями всех интегралов движения, имеющие в фазовом пространстве несовпадающие траектории [158–160] (например, в периодическом электростатическом потенциале две частицы с одинаковыми энергиями колеблются вблизи двух разных минимумов этого потенциала). Стационарному кинетическому уравнению не противоречит то, что значения функции распределения на этих двух траекториях могут быть различными. Если мы хотим строить решения такого типа, то нужно решать уравнения отдельно в разных частях пространства и потом "сшивать" решения на границе. Пример такой сшивки для электростатической задачи дан в работе [161]. Мы ограничимся построением решений с универсальными, одинаковыми во всех точках пространства зависимостями $f_x(\mathcal{I}_{x1}, \dots, \mathcal{I}_{x5})$.

Отметим также, что для ряда конфигураций магнитного поля, благодаря частым в масштабе его неоднородности осцилляциям частиц, движение значительных фракций частиц может быть описано при помощи дополнительных приближённых (квазиadiaбатических) инвариантов. Хорошо известны примеры таких квазиadiaбатических инвариантов для ловушечных конфигураций — это первый (связанный с магнитным моментом) и второй (продольный) aдиабатические инварианты [162]. Другими примерами, важными для описания движения частиц в хвосте земной магнитосферы, являются инварианты $I_z = (2\pi)^{-1} \oint p_z dz$ и $I_\chi = (2\pi)^{-1} \oint p_\chi d\chi$ [34, 35, 163, 164]. Однако они, в отличие от точных инвариантов, в общем случае приводят лишь к интегральной связи плотностей тока и заряда с векторным и скалярным потенциалами и дают только приближённое описание вклада тех или иных фракций частиц в самосогласованный токовый слой, а поэтому не будут использоваться в данном обзоре, ограниченном исключительно точными решениями (пример приближённого решения для слоя Харриса со слабым внешним поперечным магнитным полем дан в работе [165]).

Возможности точного решения стационарных уравнений Власова–Максвелла с ненулевыми плотностью заряда и скалярным потенциалом крайне ограничены и обсуждались в основном лишь в связи с узким классом цилиндрически-симметричных вращающихся плазменных конфигураций [36, 166] (аналогичных известным МГД-конфигурациям, например, [79, 167]), в которых частицы имеют "сдвинутые" максвелловские или k -распределения. (Здесь нас не интересуют хорошо известные бестоковые стационарные распределения плотности заряда в плазме [161, 168, 169], отыскание которых также основано на методе инвариантов движения частиц.) Как правило, электростатические структуры с ненулевой плотностью заряда внутри плазмы оказываются неустойчивыми, по крайней мере, на масштабах много больше дебаевского, что фактически является следствием дебаевского экранирования зарядов (см., например, [166, 169, 170]). Наличие квазистатического разделения зарядов не исключено в узких слоях с сильным изменением свойств плазмы, например, на плазменной границе, определяемой внешним магнитным полем, или в области контакта плазменных образований с существенно разными параметрами, стабилизированного маг-

нитным полем. Однако в настоящее время отсутствуют сколько-нибудь общие представления о конфигурациях подобного типа и тем более об их устойчивости [171]. При наличии внешнего магнитного поля и внешних сил, например, гравитации, или при использовании других инвариантов движения в ФРЧ, например, момента количества движения в цилиндрически-симметричных токовых структурах, присутствие ненулевой плотности заряда учитывалось, к примеру, в работах [36, 160, 165].

Ниже мы ограничимся нейтральными токовыми конфигурациями с $\varphi \approx 0$ и $\rho \approx 0$. Системы отсчёта, в которых это условие выполняется, иногда называются системами де Хоффмана – Теллера [34, 172, 173]. Разумеется, будучи выполненным в одной (используемой) системе отсчёта, данное условие может не выполняться в других инерциальных системах отсчёта, движущихся под углом к магнитному полю. В них стационарность всей структуры не нарушается, как это хорошо известно, например, для слоя Харриса со сдвинутыми максвелловскими распределениями электронов и ионов, который в системах отсчёта, движущихся вдоль плотности тока, содержит неоднородное электрическое поле и согласованную с ним плотность заряда [174]. Сказанное имеет место и в релятивистских самосогласованных токовых структурах [30, 175–178] (например, с ютгнеровским распределением частиц), но иногда не принимается во внимание при оценке роли электростатических полей и нарушения квазинейтральности в аналитически отыскиваемых самосогласованных структурах; подобное некорректное утверждение о невыполнении квазинейтральности имеется, например, в работе [26].

Ввиду сложности поставленной магнитостатической задачи значительная часть полученных решений явно или неявно апеллирует только к части фракций частиц, имеющих в плазме, допуская включение других фракций частиц или фоновой плазмы для обеспечения выполнения ряда естественных условий, например, неотрицательности концентраций всех фракций частиц или общей электронейтральности плазмы. Так, последнее условие можно выполнить, например, считая, что токи создаются только электронами, и решать задачу (51) для электронов, а к найденному решению добавить покоящиеся положительные частицы (ионы или позитроны) с тем же пространственным распределением плотности. Другой способ обеспечить электронейтральность состоит в том, чтобы использовать зарядовую инверсию функции распределения, т.е. положить в каждой точке $f_+(\mathbf{p}) = f_-(-\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})$, $N_+ = N_- = N/2$, где индексами "+" и "-" обозначены величины, относящиеся соответственно к положительно и отрицательно заряженным частицам.

Разумеется, применение полученных точных решений, описывающих нейтральные токовые конфигурации, к интерпретации плазменных структур в реальных экспериментах или численных расчётах предполагает возможность пренебречь совокупной плотностью заряда или учесть нарушение электронейтральности в используемых решениях каким-либо расширением ФРЧ, моделирующей рассматриваемые структуры магнитных полей и токов, согласно уравнениям (51). Что касается нестационарных решений уравнений Власова – Максвелла, описывающих переход неравновесной плазмы в рассматриваемые магнитостатические конфигурации и, в частности, образование нелинейных вейбелевских волн

или солитонов [33, 171], то сколько-нибудь ясная аналитическая картина здесь отсутствует ввиду целого ряда усложняющих обстоятельств: кинетическое уравнение в общем случае невозможно удовлетворить с использованием ФРЧ, зависящих только от инвариантов движения частиц; уравнения для скалярного и векторного потенциалов оказываются связанными, вообще говоря, нелинейно; получение физически осмысленных решений требует привлечения внешних сил и/или каких-либо граничных условий и т.д. Указанный круг вопросов ниже не рассматривается.

2.2. Самосогласованные распределения, зависящие от трёх инвариантов движения частиц, и токовые слои с широм магнитного поля

Пусть все величины зависят только от одной пространственной координаты x , а магнитное поле перпендикулярно оси x . Тогда его можно описывать с помощью векторного потенциала, имеющего две компоненты $A_y(x)$ и $A_z(x)$:

$$B_y = -\frac{dA_z}{dx}, \quad B_z = \frac{dA_y}{dx}. \quad (52)$$

Силовые линии такого магнитного поля по необходимости являются прямыми, ортогональными оси x . Интегралы движения частиц в этом случае являются полным импульсом и две компоненты обобщённого импульса:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \quad P_y = p_y + \frac{e_x A_y}{c}, \quad P_z = p_z + \frac{e_x A_z}{c}, \quad (53)$$

а любая функция распределения вида $f_x = f_x(p, P_z, P_y)$ тождественно удовлетворяет кинетическому уравнению [106, 179]. Второе уравнение системы (51) даёт условие нейтральности плазмы:

$$\sum_{\alpha} N_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3 p = 0. \quad (54)$$

В общем случае токовые слои с широм магнитного поля (52) описываются двумя связанными уравнениями:

$$\frac{d^2 A_{y,z}}{dx^2} = -4\pi \frac{dp_{xx}}{dA_{y,z}}, \quad (55)$$

в которых ток выражен через xx -компоненту тензора натяжения, зависящего от компонент векторного потенциала (см., например, [24, 159]):

$$p_{xx} = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \int p_x v_x f_{\alpha} d^3 p, \quad (56)$$

$$\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_x = \frac{dp_{xx}}{dx}, \quad (57)$$

причём неоднородность давления плазмы полностью определяется пространственной зависимостью векторного потенциала согласно известному соотношению баланса:

$$\frac{B_y^2 + B_z^2}{8\pi} + p_{xx} = \text{const}. \quad (58)$$

В частном случае максвелловских функций распределения, для которых зависимость от энергии является

экспоненциальной, указанная компонента тензора натяжения сводится к сумме произведений концентраций на температуру для частиц всех фракций [156, 173, 180]. В общем случае один и тот же профиль x -компоненты тензора натяжения может быть обеспечен, разумеется, самыми различными анизотропными функциями распределения, и однозначное восстановление их зависимости от обобщённых импульсов P_y, P_z по заданному профилю $p_{xx}(x)$ невозможно, в отличие от специального случая максвелловских функций распределения [3, 7, 13, 159, 181].

Следует отметить, что, согласно работам [7, 24, 155, 159, 160, 170, 173, 182], для самосогласованных магнито-статических структур, описываемых уравнением (55), возможен учёт слабого нарушения квазинейтральности плазмы без использования уравнения Пуассона для электростатического потенциала φ в случаях, когда его наличие в функциях распределения частиц благодаря инварианту энергии $c\sqrt{m_x^2 c^2 + p_x^2} + e_x \varphi$ изменяет зависимость x -компоненты тензора натяжения p_{xx} от компонент векторного потенциала $A_{y,z}$ посредством связи $\varphi = \varphi(A_{y,z})$, налагаемой условием $\rho \equiv -\partial p_{xx} / \partial \varphi \approx 0$. Первые попытки использования данного условия для аналитического и численного поиска самосогласованных структур с нарушенной квазинейтральностью были сделаны в работах [155] и [159] соответственно, однако надежды на получение физически значимых аналитических решений подобного вида до сих пор не оправдались.

Решение системы связанных уравнений (55) известно только для весьма частных случаев, которые вряд ли можно назвать представительными, в том числе в отношении ФРЧ, особенно учитывая наличие функциональной свободы в распределениях, согласованных с фиксированной конфигурацией магнитного поля и тока (см., например, [7, 13]). Первый пример подобного решения с широм в виде комбинации однородного магнитного поля и двух слоёв с одинаковым харрисовским профилем тока вида $\tanh x$ [2] и ортогонально направленными магнитными полями найден в работе [3] для "сдвинутых" максвелловских распределений электронов и ионов с одинаковой температурой. При этом профиль тока, направленного вдоль однородного магнитного поля, определяется токовым слоем Харриса, в котором распределения частиц всех сортов содержат одну и ту же экспоненциальную зависимость от векторного потенциала, а ортогональный ток отвечает обобщённому слою Харриса, в котором распределения частиц содержат линейную суперпозицию двух экспоненциальных зависимостей от векторного потенциала, отличающихся фактором 2 (см. раздел 3.2.1).

В работах [7, 13, 24] обсуждается более простой пример — эллиптическое вращение вектора магнитного поля по гармоническому закону при смещении вдоль оси неоднородности x для нерелятивистской плазмы с функциями распределения, анизотропная часть которых является произведением максвелловского распределения по энергии частиц и квадрата их обобщённого импульса $P_y^2 + P_z^2$. Следуя [38], можно убедиться, что данное решение справедливо и для релятивистской плазмы с произвольными (немаксвелловскими) распределениями частиц по энергии, даже различными для разных сортов частиц. При этом нетрудно показать, что плотность энергии частиц плазмы не может быть существенно меньше плотности энергии магнитного поля, но про-

странственный масштаб его изменения не ограничен гирорадиусами частиц и может быть сколь угодно мал при достаточно большой концентрации частиц.

Общий подход к построению подобных решений с широм магнитного поля для произвольного распределения частиц по энергии изложен в разделе 2.6. Этот подход позволяет получать токовые слои с широм магнитного поля путём попарного объединения любых известных токовых слоёв без шира, функции распределения в каждом из которых зависят, кроме энергии, от одной из двух ортогональных компонент обобщённого импульса $P_{y,z}$. Впервые, по-видимому, частный случай подобной нейтральной конфигурации неявно был указан Каном [173], использовавшим максвелловское распределение по энергии и совместившим слой Харриса и слой Никольсона [183], в которых распределения частиц экспоненциально зависят от линейной и квадратичной функций обобщённого импульса соответственно. Строго говоря, для существования указанного решения принципиально наличие внешнего магнитного поля, вдоль которого направлен ток частиц, формирующих слой Харриса, и которое обеспечивает конечную ширину плазменного слоя Никольсона, создающего диамагнитный ток вдоль магнитного поля слоя Харриса, т.е. ортогонально внешнему магнитному полю. Подобные локализованные токовые конфигурации, существующие и без внешнего магнитного поля, исследовались начиная с работ [8, 173, 182, 184–186], в основном численно, для конкретных зависимостей функций распределения частиц от обобщённых импульсов (например, типа \exp и erf , допускающих анизотропные модификации максвелловских распределений).

Имеется широкий класс самосогласованных токовых структур, для которого уравнения (55) представляют собой систему двух связанных нелинейных осцилляторов, и, следовательно, вращение силовых линий магнитного поля при смещении вдоль оси x (шир) может быть весьма сложным, даже хаотическим. До сих пор и эта задача исследовалась только численно; в частности, хаотический характер шира магнитного поля продемонстрирован в работе [22] на примере функций распределения, являющихся квадратичными полиномами от двух компонент обобщённого импульса и приводящих к уравнениям вида

$$\frac{d^2 A_{y,z}}{dx^2} + \kappa^2 A_{y,z} + \epsilon A_{y,z} A_{z,y}^2 = 0, \quad (59)$$

где κ и ϵ — постоянные.

При дополнительном условии $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$, т.е. для бессиловых конфигураций, в которых в одномерном случае значение x -компоненты тензора натяжения плазмы и величина магнитного поля постоянны (см. (57), (58)), плоские слои с широм магнитного поля рассматривались в работах [20, 24, 25, 176, 181, 187–190]. Простейшим примером служат слои с геликоидальным магнитным полем [24, 187–189, 191] $B_y = B_0 \sin(kx)$, $B_z = B_0 \cos(kx)$, в которых распределения f_x могут быть произвольными (неотрицательными) функциями не только релятивистской энергии, как в указанном выше случае не строго геликоидального шира, но и квадрата обобщённого импульса частиц $P_y^2 + P_z^2$, тоже различными для разных сортов частиц.

Единственным известным периодическим бессильным слоем с неравномерным широм магнитного поля

является так называемый слой Якоби [190] с пространственной зависимостью магнитного поля в виде эллиптических функций, согласованной с модифицированным максвелловским распределением частиц, содержащим комбинации косинусоидальной и двух различных экспоненциальных зависимостей от обобщённых импульсов частиц. Следуя [38], опять нетрудно убедиться, что данное решение естественным образом распространяется и на случай релятивистской плазмы с произвольными распределениями частиц по энергии. В предельном случае функций распределения, которые в дополнение к косинусоидальной содержат только одну экспоненциальную зависимость от обобщённого импульса частиц, слой Якоби сводится к слою локализованного тока, который называется бессловым слоем Харриса и описывает поворот магнитного поля на 180° типа доменной стенки, найденный в работах [23, 25, 176, 181]. Фактически это решение представляет собой известный слой Харриса без шира магнитного поля, дополненный слоем плазмы, который создаёт ортогональную компоненту магнитного поля и обеспечивает постоянство общего кинетического давления частиц, а следовательно, согласно (58), и модуля магнитного поля (как и в любых одномерных бессловых конфигурациях).

Из равенства плотностей силы Лоренца и силы давления (57) следует, что самосогласованные структуры с широм не допускают добавления никакого, даже однородного, внешнего магнитного поля, не изменяющего их. Если же шир отсутствует, т.е. имеется лишь одна декартова компонента магнитного поля, например B_y , то в структуру не будет вносить искажений только внешнее однородное магнитное поле, направленное вдоль тока (по оси z), причём лишь при наличии цилиндрической симметрии функции распределения относительно этой оси, т.е. в отсутствие зависимости функций f_x от инварианта P_y (см. раздел 2.4). В последнем случае добавление однородного магнитного поля приводит к шире силовых линий общего магнитного поля, как это показано в работе [7] на примере слоя Харриса. Указанное наложение внешнего магнитного поля в случае функций распределения, зависящих лишь от инвариантов \mathcal{E} и P_z , не изменяет и двумерно-неоднородные структуры с самосогласованным магнитным полем, лежащим в плоскости неоднородности.

Нетривиальный подход к построению самосогласованных токовых слоёв с функциями распределения широкого класса, обеспечивающих переход между областями плазмы с однородным, но по-разному ориентированным магнитным полем, был предложен в работе [3] (см. также [14, 159, 173, 176]). В ней анализировались монотонные профили компонент векторного потенциала $A_{y,z}(x)$ и монотонные зависимости концентраций электронов и ионов от этих компонент для тепловых распределений по энергии с температурой T , допускающих взаимно-однозначную связь указанных зависимостей с функциями распределения от обобщённого импульса на основе преобразования Гаусса, фактически апеллирующего к разложениям функций распределения электронов и ионов по полиномам Эрмита. Данная связь в частном случае, когда указанные разложения сводятся к суперпозициям двух экспоненциальных функций, одна из которых зависит от одной, а другая — от другой компоненты обобщённого импульса P_y, P_z , позволила найти класс распределений, согласованных с поворотом маг-

нитного поля на конечный угол по закону

$$B_z(x) = B_1 \tanh(\kappa x), \quad B_y(x) = B_2(1 + \tanh(\kappa x)), \quad (60)$$

где κ, B_1, B_2 — постоянные (аналогичный, но симметричный токовый слой с $B_1 = -B_2$ и дополнительным однородным магнитным полем B_2 вдоль оси z рассмотрен в работе [7]). На периферии одной стороны слоя ($x \rightarrow -\infty$) магнитное поле направлено по оси z и вдоль него текут противоположно направленные токи электронов и ионов слоя, концентрации которых конечны. На периферии другой стороны слоя ($x \rightarrow +\infty$) магнитное поле направлено под углом к оси z (и к оси y), а электроны и ионы, хотя и обладают конечной концентрацией, но не создают никакого тока. Токовые слои с широм, подобные последнему и, по существу, не требующие анализа распределений, зависящих от трёх инвариантов движения частиц, подробнее рассмотрены в разделе 2.6.

2.3. Уравнение Грэда – Шафранова для токовых слоёв без шира магнитного поля

Остановимся теперь на плоских слоях без шира магнитного поля, ограничиваясь векторным потенциалом с единственной отличной от нуля компонентой $A_z(x)$ ($A_y = 0, B_z = 0$), но сохраняя зависимость функции распределения от трёх инвариантов (53): p, p_y, P_z . Векторный потенциал удобно выбрать имеющим единственную отличную от нуля компоненту A_z — компоненты A_x и A_y в выбранной геометрии задачи можно приравнять нулю калибровочным преобразованием. В этом случае токи текут вдоль оси z , а магнитное поле направлено вдоль оси y (вариант с непостоянным по направлению магнитным полем рассмотрен в разделе 2.6).

Закон Ампера принимает вид

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} \sum_x N_x e_x \int f_x \left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z, p_y \right) \frac{p_z}{m_x \gamma_x} d^3 p, \quad (61)$$

в котором правая часть не содержит в явном виде пространственных координат и является некоторой функцией от A_z (при заданной зависимости функций f_x от интегралов движения). Уравнение (61) называется *уравнением Грэда – Шафранова* [158, 192] (уравнения такого вида хорошо известны и широко применяются в магнитной гидродинамике; см., например, [167]).

Для рассматриваемых нейтральных токовых слоёв это уравнение изучалось в работах [3, 7, 14], оно допускает любые распределения частиц по импульсу p_y , отвечающие отсутствию тока вдоль оси y . Эти распределения не сказываются на структуре токового слоя и в простейшем случае могут быть выбраны в привычном виде сдвинутого максвелловского распределения [17] или даже в виде δ -функций [193–195], что упрощает интерпретацию наблюдательных данных, например, о токовом слое в хвостах магнитосфер Земли и Юпитера. В этой связи отметим неявное решение уравнения Грэда – Шафранова, которое изучено в работах [14, 17] и является смешением известных решений Харриса [2] и Шанеля [7], т.е. описывается модифицированным максвелловским распределением, содержащим квадратичную зависимость от P_z .

Поскольку магнитное поле направлено вдоль оси y , проекция импульса частиц на эту ось не изменяется под влиянием магнитного поля, и наоборот — движение

частиц вдоль оси y не оказывает влияния на магнитное поле. Последнее формально отражается в том, что проекция p_y входит в уравнение (61) только через релятивистский фактор γ_x . Фактически, функцию распределения можно рассматривать как набор "слоёв" с различными фиксированными значениями p_y , которые не перемешиваются между собой. Плотность тока определяется суммарным вкладом всех таких слоёв, поэтому уравнение Грэда – Шафранова можно переписать в более точном виде. А именно, учитывая, что при сохранении p и p_y инвариантом является также $p_t = (p^2 - p_y^2)^{1/2} = (p_x^2 + p_z^2)^{1/2}$, без ограничения общности можно представить f_x как функции от p_t , $p_z + e_x A_z/c$ и p_y , а потом перейти к цилиндрическим координатам p_y, p_t, φ , так что $p_z = p_t \cos \varphi$, $p_x = p_t \sin \varphi$:

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} \sum_x N_x e_x \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f_x \left(p_t, p_t \cos \varphi + \frac{e_x}{c} A_z, p_y \right) \times \\ \times \frac{c p_t^2}{\sqrt{m_x^2 c^2 + p_t^2 + p_y^2}} \cos \varphi dp_y, d\varphi dp_t. \quad (62)$$

Обозначая результат взятия внутреннего интеграла по переменной p_y как

$$F_x \left(p_t, p_t \cos \varphi + \frac{e_x}{c} A_z \right) = \int_{-\infty}^\infty f_x \left(p_t, p_t \cos \varphi + \frac{e_x}{c} A_z, p_y \right) \times \\ \times \frac{c p_t^2}{\sqrt{m_x^2 c^2 + p_t^2 + p_y^2}} dp_y, \quad (63)$$

получаем преобразованное уравнение Грэда – Шафранова:

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} \sum_x N_x e_x \times \\ \times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F_x \left(p_t, p_t \cos \varphi + \frac{e_x}{c} A_z \right) \cos \varphi d\varphi dp_t. \quad (64)$$

Возможность получения аналитических решений этого уравнения так или иначе связана с определённой фиксацией зависимости функций F_x от своих аргументов и до сих пор остаётся мало исследованной в сколько-нибудь общем случае. В этой связи отметим ряд попыток численного решения данной задачи, например, с использованием разложения функций распределения по полиномам Эрмита, [14, 159, 182] и возможность перехода к решению упрощённой задачи путём фактического исключения зависимости от одной из двух компонент обобщённого импульса [6, 7, 25, 176–178, 194, 196], обсуждаемую ниже.

Заметим, что ФРЧ, возникающие из самосогласованных решений подобных уравнений типа Грэда – Шафранова, могут быть самыми различными, например, немасвелловскими по энергии и несимметричными или двугорбыми по координате, и их реализация в природе и в экспериментах ограничена лишь требованием достаточной устойчивости токовых слоёв. Последняя до сих пор исследовалась крайне фрагментарно и в основном численно, для узкого класса возмущений и лишь для нескольких примеров токовых слоёв как с широм магнитного поля, так и без него (см., например, [8, 38, 175, 197–205]).

2.4. Двумерно-неоднородные магнитные структуры и токовые филаменты с цилиндрически-симметричными распределениями частиц

Если отказаться от однородности задачи вдоль оси y , тогда из трёх инвариантов движения (53) с необходимостью останутся только первые два. Выбирая f_x в виде цилиндрически-симметричной функции, зависящей от этих двух инвариантов,

$$f_x = f_x \left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z \right), \quad (65)$$

получаем уравнение Грэда – Шафранова в виде

$$\Delta_{xy} A_z \equiv \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = \\ = -\frac{4\pi}{c} \sum_x N_x e_x \int f_x \left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z \right) \frac{p_z}{m_x \gamma_x} d^3 p. \quad (66)$$

На этот раз удобно перейти к сферическим координатам p, θ, φ ($p_z = p \cos \theta$, $p_x = p \sin \theta \cos \varphi$, $p_y = p \sin \theta \sin \varphi$) и выполнить тривиальное интегрирование по азимутальному углу φ , а от интегрирования по полярному углу θ перейти к интегрированию по проекции импульса p_z :

$$\Delta_{xy} A_z = -\frac{8\pi^2}{c} \sum_x N_x e_x \int_0^\infty \int_{-p}^p f_x \left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z \right) \frac{p_z p}{m_x \gamma_x} dp_z dp. \quad (67)$$

Правая часть (64) либо (67) является функцией A_z , которую для качественного анализа решений уравнения часто бывает удобно представить в виде $-dU(A_z)/dA_z$, выразив через другую функцию, $U(A_z)$, которую будем называть *потенциалом Грэда – Шафранова*. Тогда одномерное уравнение (64) принимает вид уравнения нелинейного осциллятора, хорошо известного из классической механики:

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{dU(A_z)}{dA_z}, \quad (68)$$

а двумерное уравнение (67) принимает форму

$$\Delta_{xy} A_z = -\frac{dU(A_z)}{dA_z}. \quad (69)$$

Заметим, что потенциал $U(A_z)$ имеет размерность плотности энергии и, как нетрудно показать, лишь коэффициентом отличается от компоненты тензора натяжения p_{xx} (равной p_{yy}), что мы уже видели в одномерном случае (55), (56), когда цилиндрическая симметрия функций распределения была не обязательна и они могли зависеть от трёх инвариантов движения частиц.

Для некоторых видов зависимости функций F_x и f_x от своих аргументов интегралы в правых частях (64) и (67) удаётся взять аналитически, сводя тем самым задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка в одномерном случае либо к уравнению в частных производных в двумерном случае. Конкретные примеры будут рассмотрены ниже.

Начнём с цилиндрически-симметричного случая, когда ток течёт вдоль оси z и величина A_z зависит лишь от радиальной координаты $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, но не зависит от азимутального угла. В этом случае уравнение Грэда –

Шафранова (69) имеет вид

$$\frac{d^2 A_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_z}{d\rho} = -\frac{dU(A_z)}{dA_z}. \quad (70)$$

Аналогом этого уравнения в классической механике является уравнение движения частицы в потенциале $U(A_z)$ при наличии вязкого, т.е. пропорционального скорости, трения. Роль времени играет радиус ρ , роль скорости — величина $dA_z/d\rho$. Коэффициент трения при этом зависит от "времени" ρ и пропорционален ρ^{-1} . Граничные условия также меняются по сравнению с одномерным плоскостойстым случаем. Координата ρ изменяется в пределах полуоси от нуля до бесконечности, в точке $\rho = 0$ магнитное поле обращается в нуль, т.е. $dA_z/d\rho|_{\rho=0} = 0$ (иначе, согласно формуле для азимутального магнитного поля $B_\phi = 2I/c\rho$, где I — полный ток внутри цилиндра радиуса ρ , получалось бы, что по оси z течёт бесконечно большой ток). В "механической" аналогии это означает, что частица начинает своё движение при $\rho = 0$ без начальной скорости. По существу возможны всего *три качественно различных варианта*.

I. Область значений компоненты векторного потенциала A_z ограничена, с ростом ρ значение A_z бесконечно осциллирует вблизи дна потенциальной ямы. В случае общего положения на мере убывания амплитуды этих осцилляций форму ямы можно аппроксимировать параболическим профилем, и решение приближается по форме к функции Бесселя. Амплитуды колебаний A_z , магнитного поля и плотности тока убывают с ростом ρ как $1/\rho$. В случае, если разложение потенциала Грэда–Шафранова в ряд Тейлора вблизи дна потенциальной ямы начинается не с квадратичного члена, также имеются бесконечные осцилляции, но их период возрастает с ростом ρ . В результате получающаяся токовая конфигурация представляет собой конечный или бесконечный набор концентрических токовых цилиндров, среди которых внешние, как правило, имеют большую величину полного тока и меньшую величину плотности тока, чем внутренние.

II. Область значений компоненты векторного потенциала A_z ограничена, а его производная по переменной ρ (азимутальная компонента магнитного поля) меняет знак конечное количество раз. Тогда "движение" A_z начинается при $\rho = 0$ со скатывания со склона потенциальной ямы и завершается на локальной вершине¹. Между началом и концом движения возможно несколько отражений от стенок потенциальной ямы, более высоких, чем финальная вершина. Полный ток равен нулю, магнитное поле с ростом ρ убывает быстрее, чем $1/\rho$. В случае общего положения вершина на профиле потенциала имеет квадратичный профиль, а следовательно, магнитное поле и плотность тока с ростом ρ уменьшаются экспоненциально.

¹ Либо, в вырожденном случае, заканчивается на точке с равными нулю первой и второй производной $U(A_z)$ по A_z (аналогично одномерному плоскостойстому варианту в разделе 2.5). Бесконечно медленное монотонное приближение к дну потенциальной ямы невозможно: общее решение уравнения (70) с нулевой правой частью имеет вид $A_z = c_1 + c_2 \ln \rho$, поэтому даже для полностью плоского дна ямы движение не ограничено и "трение" оказывается недостаточным, чтобы остановить частицу на конечном расстоянии.

III. Значение компоненты векторного потенциала A_z изменяется неограниченно. Из этого с необходимостью следует, что A_z изменяется монотонно и азимутальная компонента магнитного поля при всех ρ имеет один и тот же знак. Плотность тока может быть знакопеременной, однако ток через любую круглую площадку, перпендикулярную оси z , с центром на оси z имеет один знак. Полный ток может быть как конечен, так и равен нулю. При этом возможен случай, в рамках которого плазма локализована вблизи оси z и её плотность экспоненциально стремится к нулю с удалением от этой оси.

В качестве примера рассмотрим *аналитическое обобщение известного пинча Беннетта на случай произвольных энергетических распределений*, которое отвечает экспоненциальной зависимости ФРЧ от обобщённого импульса: $f_\alpha = F_{\alpha 0}(\rho) \exp(\zeta_\alpha P_z / m_\alpha c)$. В этом случае уравнение Грэда–Шафранова принимает вид

$$\frac{d^2 A_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_z}{d\rho} = -\frac{W_0}{A_0} \exp\left(\frac{A_z}{A_0}\right), \quad (71)$$

где $A_0 = m_\alpha c^2 / \zeta_\alpha e_\alpha$ (предполагаем эту величину одинаковой для всех сортов токнесущих частиц α), а величина W_0 положительна и выражается посредством интеграла, включающего произвольную функцию $F_{\alpha 0}(\rho)$. Семейство решений, удовлетворяющее граничному условию $dA_z/d\rho|_{\rho=0} = 0$, описывается формулой (ср. [1, 179])

$$A_z = -2A_0 \ln \frac{\sqrt{2W_0}(1 + \kappa^2 \rho^2)}{4\kappa A_0} \quad (72)$$

и параметризуется положительной величиной κ , обратной радиусу филамента. Для определённости будем считать $A_0 > 0$, тогда κ также должна быть положительной. Соответствующее магнитное поле

$$B_\phi = \frac{4A_0 \kappa^2 \rho}{1 + \kappa^2 \rho^2}, \quad (73)$$

не зависящее от энергетического распределения частиц $F_{\alpha 0}$, максимально при $\rho = \kappa^{-1}$ и достигает значения $2\kappa A_0$. Плотность тока определяется выражением (рис. 3)

$$j_z = \frac{2cA_0 \kappa^2}{\pi(1 + \kappa^2 \rho^2)^2}, \quad (74)$$

из которого простым интегрированием получаем, что полный ток равен $2cA_0$ и не зависит от величины κ , а следовательно, от радиуса филамента.

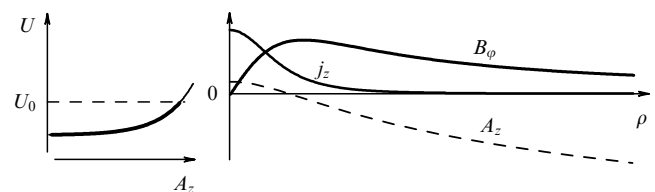


Рис. 3. Типичный профиль потенциала Грэда–Шафранова уравнения (71) и зависимости A_z , B_ϕ и j_z от цилиндрической координаты ρ для решения (72)–(74) в форме пинча Беннетта. Здесь и всюду далее на графиках потенциала Грэда–Шафранова жирной линией выделена область изменения значений A_z .

Благодаря экспоненциальной зависимости ФРЧ от проекции обобщённого импульса, распределения по импульсам для каждого сорта частиц во всех точках пространства одинаковы и различаются лишь не зависящим от импульсов множителем. Поэтому профиль концентрации частиц по форме повторяет профиль плотности тока: $N_x = N_{x \max} / (1 + \kappa^2 \rho^2)^2$. Интеграл от N_x по плоскости x, y , представляющий собой число частиц на единицу длины пинча, равен $\pi \kappa^{-2} N_{x \max}$, что ещё раз говорит о том, что за радиус рассматриваемого токового филамента можно условно принять величину κ^{-1} . Этот радиус может быть как больше, так и меньше характерного гирорадиуса частиц, зависящего от их энергетического распределения.

Другим интересным примером служит квадратичная зависимость функций распределения от обобщённого импульса, $f_x = \hat{F}_{x0}(\rho) + \hat{F}_{x2}(\rho) P_z^2$, приводящая к линейному уравнению Грэда – Шафранова

$$\rho^2 \frac{d^2 A_z}{d\rho^2} + \rho \frac{dA_z}{d\rho} + k^2 \rho^2 A_z = 0, \tag{75}$$

которое является уравнением Бесселя нулевого порядка и при поставленном граничном условии имеет следующее общее решение:

$$A_z = A_{z \max} J_0(k\rho), \quad k^2 = \sum_x \frac{32\pi^2 N_x e_x^2}{3m_x^3 c^4} \int_0^\infty \hat{F}_{x2}(\rho) p^4 \frac{dp}{\gamma_x}. \tag{76}$$

В отличие от предыдущего примера, теперь свободным параметром является амплитуда $A_{z \max}$, а пространственный масштаб k^{-1} определяется энергетическим распределением частиц. Профиль плотности тока по форме совпадает с профилем векторного потенциала, поскольку $j_z \propto dU/dA_z$ и $U \propto A_z^2$, а профиль магнитного поля описывается функцией Бесселя первого рода первого порядка: $B_\phi = -k_{z \max} J_1(k\rho)$. Профили показаны на рис. 4, где, как на рис. 3 и других рисунках, жирной линией отмечена область изменения компоненты векторного потенциала A_z .

Это решение осциллирует с ростом радиальной координаты ρ , причём амплитуда осцилляций магнитного поля уменьшается пропорционально $\rho^{-1/2}$, а амплитуда осцилляций тока, протекающего внутри цилиндра радиусом ρ , соответственно возрастает пропорционально $\rho^{1/2}$. По мере удаления от оси, когда $k\rho \gg 1$, амплитуды колебаний магнитного поля и плотности тока уменьшаются, а решение (76) локально всё меньше отличается от гармонического. Поэтому при превышении некоторого радиуса ρ_f , при котором характерный гирорадиус

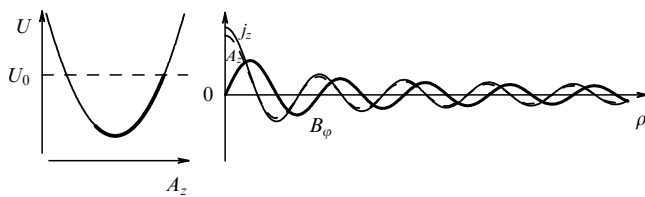


Рис. 4. Квадратичный профиль потенциала Грэда – Шафранова и зависимости A_z , B_ϕ и j_z от цилиндрической координаты ρ для решения бesselового типа (76).

частиц r_H оказывается порядка масштаба неоднородности k^{-1} , плотность энергии магнитного поля заведомо станет меньше равномерной, степень анизотропии функции распределения будет близка к постоянной порядка двойки, и в этой области можно ожидать наличия неустойчивости вейбелевского типа. С учётом сказанного наибольший интерес представляет внутренняя часть решения (76) ($\rho \lesssim \rho_f$), где $r_H k \lesssim 1$ и, в отсутствие значительной фракции изотропных частиц $\hat{F}_{x0}(\rho)$, плотность энергии магнитного поля может быть порядка равномерной.

Другие интересные классы решений возникают при использовании функций распределения частиц с более высоким порядком полиномиального разложения по обобщённому импульсу P_z . При этом потенциал Грэда – Шафранова как функция компоненты векторного потенциала A_z оказывается полиномом того же порядка, и пространственная структура филамента может быть довольно сложной. Так, если область изменения A_z ограничена и при стремлении ρ к бесконечности A_z монотонно, без осцилляций, стремится к некоторой константе, то описываемый им филамент представляет собой центральный ток, окружённый равным ему противотоком, так что суммарный ток равен нулю (возможно и более одной смены знака плотности тока). Пример решения такого вида для уравнения Грэда – Шафранова с потенциалом, пропорциональным $A_z^3 - A_0 A_z^2$ при некотором постоянном значении A_0 , приведён на рис. 5а. Это решение отвечает такому подбору параметров ФРЧ, при котором изображающая точка A_z как переменная уравнения (70) стремится к локальному максимуму на потенциале Грэда – Шафранова при $\rho \rightarrow \infty$. В этом случае единственная отличная от нуля компонента магнитного поля B_ϕ везде имеет один знак, а плотность тока с увеличением координаты ρ меняет знак один раз.

Если потенциал Грэда – Шафранова имеет вид полинома четвёртого порядка, например, $U(A_z) \propto A_z^4 - A_0^2 A_z^2$ для некоторого постоянного A_0 , то возможны решения с более чем одной сменой направления плотности тока и с несколькими сменами знака компоненты B_ϕ . Решение, в котором B_ϕ меняет знак единственный раз, а распределение тока представляет собой два вложенных друг в друга цилиндрических противотока, представлено на рис. 5б. Анализ асимптотического поведения такого

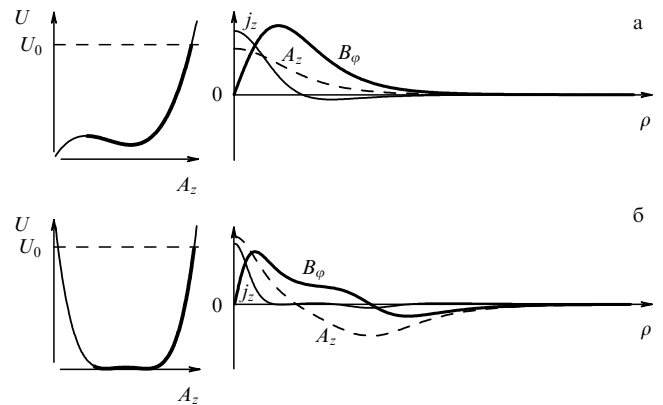


Рис. 5. Профиль потенциала Грэда – Шафранова $U(A_z)$ и зависимости A_z , B_ϕ и j_z от цилиндрической координаты ρ для (а) филамента с противотоком, $U(A_z) \propto A_z^3 - A_0 A_z^2$, и (б) филамента со сменой направления азимутального магнитного поля, $U(A_z) \propto A_z^4 - A_0^2 A_z^2$.

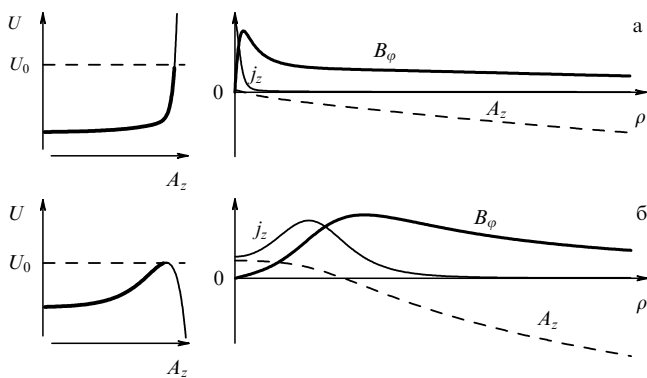


Рис. 6. Профиль потенциала Грэда–Шафранова $U(A_z)$ и зависимости A_z , B_ϕ и j_z от цилиндрической координаты ρ для (а) двухмасштабного филамента, $U(A_z) \propto \exp(A_z/A_0) + \exp(10A_z/A_0)$, и (б) "трубчатого" филамента, $U(A_z) \propto \exp(A_z) - \exp(2A_z)$.

типа филаментов при больших ρ показывает, что они экспоненциально уменьшаются.

Ещё один важный класс токовых филаментов даёт решение уравнения Грэда–Шафранова для функций распределения, представляющих собой сумму двух компонент, которые имеют экспоненциальные зависимости от обобщённого импульса P_z с разными показателями, отношение которых равно w , и могут иметь произвольные зависимости от энергии частиц:

$$\frac{d^2 A_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_z}{d\rho} = -\frac{W_1}{A_0} \exp\left(\frac{A_z}{A_0}\right) - \frac{W_2}{wA_0} \exp\left(\frac{A_z}{wA_0}\right). \quad (77)$$

Здесь, как и при обобщении пинча Беннетта, $A_0 = m_e c^2 / \zeta_x e_x$, а постоянные W_1 , W_2 определяются интегралами от энергетических распределений. Наибольший интерес представляет случай, когда показатели экспонент имеют одинаковые знаки, поэтому будем для определённости считать A_0 и w положительными. Кроме того, без ограничения общности положим $w < 1$, считая, что из двух показателей экспонент быстрее меняется второй.

Если $W_1 > 0$ и $W_2 > 0$, а $w \ll 1$, то возможно двухмасштабное решение, пример которого для $w = 0,1$ приведён на рис. 6а. Если же положить $W_1 > 0$, $W_2 < 0$, то решение будет иметь вид "трубчатого" токового филамента, в котором максимум плотности тока смещён с оси цилиндрической симметрии на некоторый цилиндр вокруг неё (рис. 6б).

Полный ток в обоих этих решениях отличается от значения $2cA_0$, полученного для прямого обобщения пинча Беннетта, и соответственно асимптотическое поведение решений вдали от оси будет иным (несмотря на то что при больших ρ из двух экспонент в правой части (77) существенна только одна и уравнение по форме совпадает с (71), решениями которого являлись пинчи типа Беннетта). Анализ асимптотического поведения подобных филаментов при больших ρ показывает, что магнитное поле убывает обратно пропорционально расстоянию до оси.

Рассмотрим теперь кратко решения двумерного уравнения Грэда–Шафранова, не сводящиеся к плоскостным либо цилиндрически-симметричным. Сделаем это в двух простейших случаях: для квадратичного и экспоненциального видов потенциала Грэда–Шафранова.

О других возможных решениях двумерного уравнения Грэда–Шафранова см., например, [11, 31, 32, 49, 157, 206, 207].

Для квадратичной зависимости потенциала Грэда–Шафранова от A_z , уже рассмотренной при анализе филамента с бесселевским профилем, в двумерном случае (69) очевидным решением является произвольная линейная комбинация гармоник вида

$$A_z = \sum_l A_l \cos(kx \cos \varphi_l + ky \sin \varphi_l + \phi_l) \quad (78)$$

с произвольными фазами ϕ_l и углами φ_l . Хотя волновое число k всех гармоник одинаково (см. (76)), результирующая структура токов и магнитного поля может быть сложной и даже квазихаотической в пространстве.

Нетрудно показать, что энергия магнитного поля для любого набора гармоник (78) может быть близка к $2/3$ кинетической энергии частиц в нерелятивистской плазме и к $1/3$ полной энергии частиц в релятивистской плазме (поскольку при усреднении по пространству интерференционные члены от слагаемых с разными направлениями вектора \mathbf{k} принимают нулевые значения). Оказывается также, что если магнитное поле имеет величину порядка равномерной, то почти всюду гирорадиус типичных, не слишком высокоэнергичных частиц оказывается меньше или порядка характерного пространственного масштаба k^{-1} самосогласованной токовой структуры [208].

Специальным выбором амплитуд, фаз и направлений синусоидальных компонент, $A_l = A_1 = \text{const}$, $\phi_l = 0$, $\varphi_l = \pi l/n$, можно получить решение

$$A_z = A_1 \sum_{l=1}^n \cos\left(kx \cos \frac{\pi l}{n} + ky \sin \frac{\pi l}{n}\right), \quad (79)$$

аппроксимирующее не слишком далеко от оси цилиндрически-симметричное решение (76) (рис. 7а). При $n = 2$ получается регулярная решётка токовых филаментов, в которой направления токов распределены в шахматном порядке, а плотность тока обращается в нуль на границах квадратных клеток, как показано на левом рис. 7б. При $n = 3$ имеем направленные в одну сторону токовые филаменты, образующие гексагональную решётку, с противотоком, распределённым между ними (правый рис. 7б).

При наличии только одного члена в сумме (78) имеем чисто гармоническое одномерное нелинейное решение — периодически чередующиеся противоположно направленные токовые слои. При суммировании двух членов с близкими углами φ с одинаковыми амплитудами получаем решётку чередующихся токовых слоёв ограниченной протяжённости, при суммировании двух членов с близкими углами и сильно различными амплитудами — периодически модулированные токовые слои. На рисунке 7в показан пример для случая $\varphi_2 - \varphi_1 = 30^\circ$.

Нетрудно проверить, что во всех рассмотренных случаях для любой функции распределения $F_{j2}(p)$ указанное решение вида (78) не подвержено вейбелевской неустойчивости для коротковолновых возмущений с масштабами меньше k^{-1} в областях наиболее сильной анизотропии распределения частиц. Действительно, в этих областях величина A_z близка к нулю, степень анизотропии порядка двойки и, согласно критерию (27), волновые

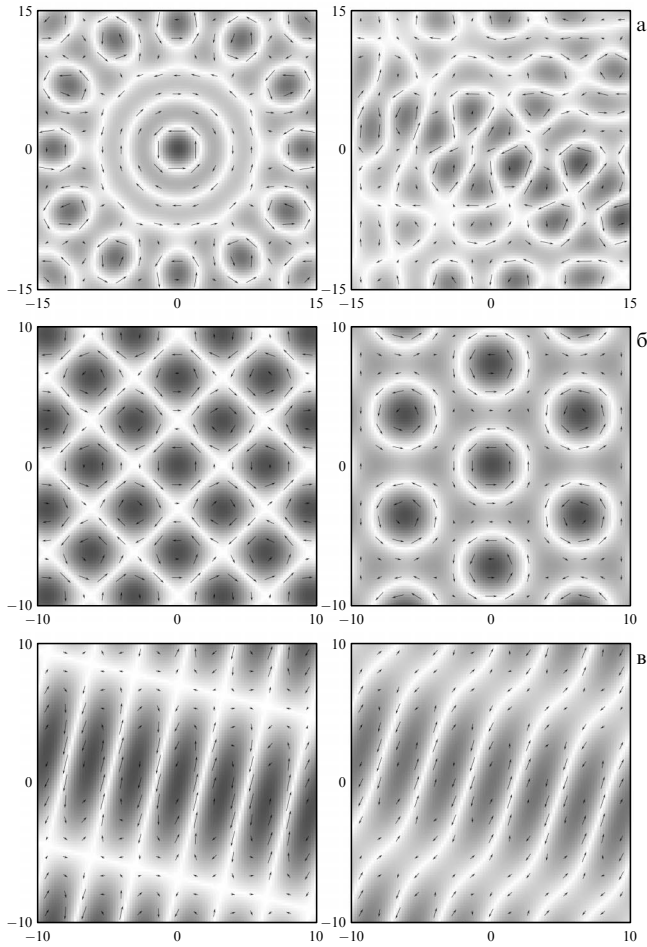


Рис. 7. Двумерно-неоднородные токовые конфигурации. Оттенки серого характеризуют модуль плотности тока (белому цвету соответствует нулевая плотность тока), стрелки показывают величину и направление магнитного поля. Масштаб по осям отсчитывается в единицах k^{-1} . (а) Конфигурации, описываемые потенциалом (78) с $n = 6$ синусоидальными компонентами: левая соответствует специальному выбору направлений, амплитуд и фаз (79), правая — "случайному" их выбору. (б) Конфигурации, описываемые потенциалом (79) с $n = 2$ (слева) и $n = 3$ (справа) синусоидальными компонентами. (в) Конфигурации, описываемые потенциалом (78) с $n = 2$ синусоидальными компонентами с углом $\varphi_2 - \varphi_1 = 30^\circ$ между ними: $A_1 = A_2$ (слева), $A_1 = 2A_2$ (справа).

числа неустойчивых возмущений ограничены в точности величиной k (ср. формулы (26) и (76))².

Наконец, для функций распределения с экспоненциальной зависимостью от компоненты обобщённого импульса P_z и произвольным фактором, зависящим от

² Указанный критерий получен в пренебрежении магнитным полем и не позволяет судить о возможных неустойчивостях с масштабами порядка или более характерного гирорадиуса частиц. Поэтому в полях порядка равномерного поля вопрос о неустойчивости возмущений с масштабами в интервале от характерного гирорадиуса r_H до характерного масштаба неоднородности k^{-1} остаётся открытым. Проблема устойчивости длинноволновых возмущений с масштабами больше k^{-1} также нуждается в дополнительном анализе, учитывающем неоднородность структуры. Изучение устойчивости как рассмотренной простейшей самосогласованной токовой структуры, так и приводимых ниже более сложных структур в общем случае, по-видимому, требует численного анализа.

энергии частиц, аналогично цилиндрически-симметричному случаю пинча Беннетта (71) можно получить двумерные решения уравнения Грэда – Шафранова

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\frac{W_0}{A_0} \exp\left(\frac{A_z}{A_0}\right) \tag{80}$$

в виде, обобщающем решение Фадеева [209]:

$$A_z = -2A_0 \ln\left(\sqrt{1 + \mu^2} \cosh(\kappa x) + \mu \cos(\kappa y)\right) + 2A_0 \ln\left(\kappa \sqrt{\frac{2A_0^2}{W_0}}\right). \tag{81}$$

Здесь свободный параметр μ отвечает за степень неоднородности структуры вдоль координаты y . При $\mu = 0$ получаем обобщение слоя Харриса на случай произвольного энергетического распределения частиц, подробно рассматриваемое в разделе 3.2.1. Ещё один свободный параметр κ^{-1} задаёт масштаб изменения магнитного поля по осям x и y . Равенство этих масштабов является существенным.

Плотность тока в решении (81) определяется формулой

$$j_z = -\frac{c}{4\pi} \Delta_{xy} A_z = \frac{cA_0 \kappa^2}{2\pi(\sqrt{1 + \mu^2} \cosh(\kappa x) + \mu \cos(\kappa y))^2}, \tag{82}$$

которая показывает, что при достаточно больших значениях μ самосогласованная структура фактически состоит из периодической цепочки обобщённых пинчей Беннетта, расположенных с периодом $2\pi/\kappa$ и несущих ток $2cA_0$ каждый. Вид магнитного поля и плотности тока в решении (81) при двух различных значениях параметра неоднородности μ показан на рис. 8.

Поскольку имеющиеся двумерные аналитические решения крайне фрагментарны, порой обладают особенностями и не дают сколько-нибудь общей картины возможных самосогласованных структур, мы не будем их больше обсуждать (см., например, [5, 6, 10, 32, 49, 157]) и ниже сосредоточимся на одномерных конфигурациях, современные представления о многообразии которых являются гораздо более полными.

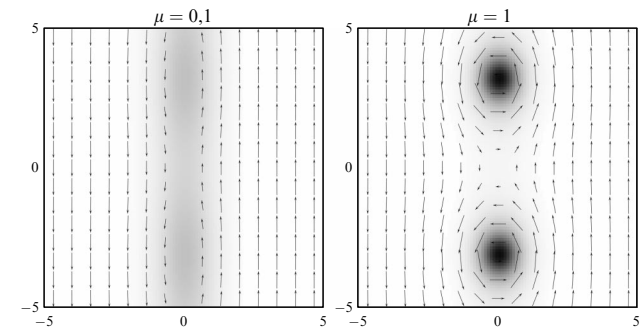


Рис. 8. Двумерно-неоднородные конфигурации, описываемые потенциалом (81) при различных значениях параметра неоднородности μ . Оттенки серого показывают плотность тока (белому цвету соответствует нулевая плотность тока), стрелки показывают величину и направление магнитного поля. Масштаб по осям отсчитывается в единицах κ^{-1} .

2.5. Классификация плоскостных магнитостатических структур без шира магнитного поля

В "одномерной" геометрии, при отсутствии зависимости от координат y и z , в классе функций распределения, зависящих от трёх интегралов движения, токовые слои описываются уравнением Грэда–Шафранова (68) с потенциалом $U(A_z)$, равным интегралу по A_z от правой части уравнения (61). Для качественного анализа решений удобна аналогия с известным из классической механики уравнением движения материальной точки в зависящем от координат потенциале. Роль координаты материальной точки играет компонента векторного потенциала A_z , роль времени — пространственная переменная x , роль скорости — взятое с обратным знаком магнитное поле $-B_y = dA_z/dx$. Важнейшим является первый интеграл уравнения (68)

$$U_0 = U(A_z) + \frac{B_y^2}{2} = U(A_z) + \frac{1}{2} \left(\frac{dA_z}{dx} \right)^2, \quad (83)$$

который позволяет записать неявное представление решения по заданной константе U_0 и выбранному местоположению (точка x_0):

$$x(A_z) - x_0 = \pm \int^{A_z} \frac{dA'_z}{\sqrt{2(U_0 - U(A'_z))}}. \quad (84)$$

Рассмотрим, какие классы токовых структур возможны в зависимости от вида потенциала $U(A_z)$ и значения U_0 . Из самых общих соображений можно выделить *три качественно различные ситуации*: магнитное поле B_y с изменением x от $-\infty$ до $+\infty$ может либо менять знак более одного раза, либо менять знак ровно один раз, либо вообще не менять знак. В результате получается следующая классификация.

I. Из аналогии с механической системой очевидно, что если магнитное поле меняет знак более одного раза, то самосогласованная токовая структура является периодической. Функция $U(A_z)$ в этом случае служит "потенциальной ямой", а кривая $A_z(x)$ представляет собой колебания (вообще говоря, нелинейные) в этой яме между некоторыми двумя крайними значениями A_{\min} и A_{\max} , такими что $U(A_{\min}) = U(A_{\max}) = U_0$. В "точках поворота", соответствующих $A_z = A_{\min}$ и $A_z = A_{\max}$ (и только в них), магнитное поле обращается в нуль, а профили магнитного поля с различными знаками магнитного поля между этими точками являются зеркальными изображениями друг друга: если $B_y(x_0) = 0$, то $B_y(x) = -B_y(2x_0 - x)$. Соответственно, плотность тока, пропорциональная производной от магнитного поля B_y по x , является симметричной относительно любой плоскости нулевого магнитного поля.

II. Обратимся к случаю, когда магнитное поле меняет знак один раз. Без ограничения общности можно выбрать плоскость, в которой магнитное поле обращается в нуль, за начало отсчёта координаты x , $B_y(x=0) = 0$. Тогда в окрестности значения $x = 0$ динамика функции $A_z(x)$ отвечает отражению от потенциального барьера $U(A_z)$. Магнитное поле является антисимметричным, $B_y(x) = -B_y(-x)$, а плотность тока — симметричной, $j_z(x) = j_z(-x)$. В отличие от магнитного поля плотность тока может быть знакопостоянной, а также менять знак любое чётное количество раз — если профиль потен-

циала $U(A_z)$ не монотонный, а содержит неровности, не поднимающиеся, однако, во всей области изменения A_z выше уровня $U_0 = U(A_z(x=0))$. В силу того что производная функции $A_z(x)$ меняет знак только один раз, существует предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} A_z(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} A_z(x)$. Этот предел может быть конечным или бесконечным.

Если указанный предел конечен, $\lim_{x \rightarrow \infty} A_z(x) = A_0$, то $U(A_0) = U_0$ и $dU(A_z)/dA_z|_{A_z=A_0} = 0$, откуда следует, что "движение" точки A_z представляет собой скатывание с вершины³ горки при $A_z = A_0$, отражение от точки поворота при $x = 0$ и подъём обратно на горку в точку $A_z = A_0$. В случае общего положения потенциал в окрестности $A_z = A_0$ аппроксимируется параболой и функции $A_z(x) - A_0$, $B_y(x)$ и $j_z(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ стремятся к нулю экспоненциально.

Если предел бесконечен, $\lim_{x \rightarrow \infty} A_z(x) = \pm\infty$, то на всём луче от $A_z(x=0)$ до соответствующей бесконечности $A_z(\infty)$ значение потенциала $U(A_z)$ не поднимается выше уровня U_0 . В этом случае магнитное поле вдали от точки $x = 0$ не может быть экспоненциально малым. Оно может либо уменьшаться степенным образом не быстрее, чем $1/|x|$, либо стремиться к некоторой ненулевой величине. (Здесь подразумевается, что $U(A_z \rightarrow \pm\infty) = \text{const}$, поскольку иные варианты представляются нефизичными и предполагают либо неограниченно большие значения функций распределения, либо наличие в них существенных зависимостей от обобщённых импульсов при сколь угодно больших значениях последних.) В случае уменьшения плотность тока также стремится к нулю не быстрее, чем $1/|x|^2$, возможно со сменами знака, в отличие от магнитного поля. Если же магнитное поле стремится к ненулевой константе, то плотность тока может быть локализованной с любым степенным показателем или даже экспоненциально, а полный ток всей токовой структуры не равен нулю.

III. Пусть теперь магнитное поле не меняет знака. Это означает, что $U(A_z)$ изменяется монотонно. Если мы рассматриваем самосогласованные структуры, в которых магнитное поле создаётся и поддерживается самой плазмой, то магнитное поле не может иметь различные значения одного знака вдали от токовой структуры. Следовательно, если магнитное поле не меняет знака, то $B(x \rightarrow -\infty) = B(x \rightarrow +\infty) = 0$ и плотность тока меняет знак по крайней мере один раз, а полный ток всей токовой структуры равен нулю. Если область изменения A_z ограничена, то "движение" точки A_z выглядит как скатывание с вершины высоты U_0 и подъём на другую вершину той же высоты U_0 .

В случае общего положения потенциал в окрестности обеих вершин аппроксимируется параболой, а следовательно, магнитное поле $B_y(x)$ и плотность тока $j_z(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ стремятся к нулю экспоненциально. Если же область изменения A_z не ограничена, то при стремлении A_z к соответствующей бесконечности потенциал $U(A_z)$ стремится к U_0 , обеспечивая тем самым уменьшение магнитного поля, а токовая структура является несим-

³ Строго говоря, утверждать, что это именно локальный максимум, можно только в случае, когда $d^2U(A_z)/dA_z^2|_{A_z=A_0} \neq 0$. Если же вторая производная равна нулю, а младшей ненулевой производной является производная нечётного порядка, то это будет не вершина горки, а "плато" — точка на склоне, в которой угол наклона обращается в нуль и в окрестности которой он является бесконечно малой величиной по крайней мере второго порядка по $A_z - A_0$.

метричной — с экспоненциальным убыванием плотности тока в одну сторону и степенным убыванием не быстрее $1/|x|^2$ в другую сторону. Можно представить себе такой профиль A_z , при котором его область изменения будет неограниченной с обеих сторон (например, в потенциале вида $U(A_z) \propto -\cosh^{-2}(A_z/A_0)$), однако необходимый для этого вид потенциала не может быть получен аналитически с помощью рассмотренных в разделе 3 разложений (например, типа (173)) с конечным числом членов.

В ситуации, когда магнитное поле не меняет знака, при помощи уравнения Грэда–Шафранова можно также описать несамосогласованные токовые структуры, т.е. находящиеся во *внешнем магнитном поле*. В этом случае при $x \rightarrow \pm\infty$ магнитное поле стремится к двум, вообще говоря, различным константам и хотя бы одна из этих констант является ненулевой, а хотя бы один из пределов $U(A_z \rightarrow -\infty)$ и $U(A_z \rightarrow +\infty)$ конечен и меньше U_0 . Если $U(A_z)$ везде меньше U_0 , а пределы $U(A_z \rightarrow -\infty)$ и $U(A_z \rightarrow +\infty)$ равны между собой, то мы имеем находящуюся во внешнем однородном магнитном поле локализованную токовую структуру, полный ток которой равен нулю. Если $U(A_z)$ везде меньше U_0 , а указанные пределы между собой не равны, то полный ток структуры не равен нулю и магнитное поле частично экранируется этим током (в случае $U(A_z \rightarrow \pm\infty) = U_0$ экранирование будет полным, но локализация будет слабой — плотность тока уменьшается не быстрее, чем $1/|x|^2$). Если же $U(A_z)$ достигает значения U_0 при конечном значении компоненты векторного потенциала A_z , то в силу сделанного предположения о знакопостоянстве магнитного поля производная потенциала $U(A_z)$ в этой точке равна нулю, и мы имеем полную экранировку внешнего магнитного поля, т.е. описываем границу между немагнитичной (вообще говоря, анизотропной) плазмой и плазмой (либо вакуумом) с однородным магнитным полем (см. разделы 3.4 и 4.3). В случае общего положения вторая производная потенциала $U(A_z)$ в точке остановки не равна нулю и затухание магнитного поля и плотности тока при углублении в плазму является экспоненциальным.

2.6. Суперпозиция токовых слоёв, магнитные поля которых ортогональны

Сформулированная классификация токовых слоёв может быть расширена на случай шира магнитного поля для ФРЧ, представимых в виде суммы двух цилиндрически-симметричных функций с ортогональными осями:

$$f_x = f_x^{(1)}\left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z\right) + f_x^{(2)}\left(p, p_y + \frac{e_x}{c} A_y\right). \quad (85)$$

В этой простой, но пока ещё мало исследованной ситуации уравнения магнитостатики распадаются на два уравнения Грэда–Шафранова:

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} \sum_x N_x e_x \int f_x^{(1)}\left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z\right) \frac{p_z}{m_x \gamma_x} d^3 p, \quad (86)$$

$$\frac{d^2 A_y}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} \sum_x N_x e_x \int f_x^{(2)}\left(p, p_y + \frac{e_x}{c} A_y\right) \frac{p_y}{m_x \gamma_x} d^3 p, \quad (87)$$

не зависящих друг от друга, но нелинейных каждое само по себе.

Таким образом, если известно два одномерных самосогласованных решения магнитостатической задачи в бесстолкновительной плазме с цилиндрически-симметричными функциями распределения $f_x^{(1)}(p, P_z)$ и $f_x^{(2)}(p, P_y)$, то их суперпозиция (85), взятая так, что магнитное поле одного решения направлено вдоль оси цилиндрической симметрии функции распределения другого, также является решением той же системы уравнений и удовлетворяет общему уравнению баланса давлений (58). Это позволяет конструировать решения с фактически произвольным широм магнитного поля, т.е. зависимостью угла поворота магнитного поля в плоскости yz от координаты x . Получающиеся решения $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(1)} + \mathbf{V}^{(2)}$ легко классифицируются по форме соответствующих потенциалов Грэда–Шафранова $U^{(1)}(A_z)$ и $U^{(2)}(A_y)$ согласно вышеизложенному.

В частности, возможны периодические геликоидальные структуры или локализованные токовые слои с неизменным направлением вращения магнитного поля, а также слои с однократно меняющимся направлением шира магнитного поля. При этом в каждом из двух "складываемых" решений допускается наличие внешнего магнитного поля в соответствии со сказанным в конце раздела 2.5. Допускается также тривиальная возможность положить $f_x^{(2)} \equiv 0$, $A_y = xB_z$, где $B_z = \text{const}$, и это будет означать наложение на плоский слой с единственной компонентой магнитного поля B_y произвольного постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси z , т.е. вдоль направления плотности тока. Частное решение такого типа, в котором к известному слою Харриса добавлена ещё одна компонента магнитного поля таким образом, что модуль магнитного поля постоянен во всём пространстве, приведено в работе [23].

Существуют несколько и менее тривиальных примеров суперпозиционных токовых слоёв с широм магнитного поля, число которых с использованием предложенного выше аналитического метода построения подобных решений может быть значительно расширено. Так, полученное в работе [3] решение (60) и обсуждавшееся в разделе 2.2 совмещение слоёв Харриса и Никольсона из работы [173] могут быть легко обобщены на случай наличия в функциях распределения частиц факторов с произвольной зависимостью от их энергии. В работе [7] найдено "волноподобное" решение, в котором функция распределения представляется в виде суммы квадратично зависящего от P_y и квадратично зависящего от P_z членов с одинаковыми коэффициентами; магнитные поля $\mathbf{V}^{(1)}$ и $\mathbf{V}^{(2)}$ при этом гармонически зависят от координаты x с одинаковым пространственным периодом. В работе [25] использовалась экспоненциальная зависимость функции распределения от одной компоненты обобщённого импульса и гармоническая зависимость от другой, что для непериодического решения соответствует $B^{(1)} \propto \tanh(x/L)$, $B^{(2)} \propto \cosh^{-1}(x/L)$, где L — характерная толщина слоя. При определённом соотношении между указанными двумя компонентами суммарное магнитное поле оказывается постоянным по величине во всём пространстве.

Перейдём далее к рассмотрению конкретных примеров самосогласованных токовых слоёв без шира магнитного поля, качественно описанных в разделе 2.5, на основе специальных разложений ФРЧ.

3. Типичные строго решаемые задачи для самосогласованных токовых слоёв

3.1. Степенные распределения частиц

3.1.1. Общий степенной вид потенциала Грэда–Шафранова. Пусть цилиндрически-симметричные функции распределения f_x в уравнении Грэда–Шафранова (61) при каждом значении импульса p разложены в ряд Тейлора по проекции обобщённого импульса $p_z + e_x A_z/c$, содержащего компоненту векторного потенциала A_z :

$$f_x\left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{xi}(p) \left(\frac{p_z + e_x A_z/c}{m_x c}\right)^i. \quad (88)$$

Тогда интеграл по p_z в выражении для потенциала Грэда–Шафранова (см. (68)) легко берётся:

$$U(A_z) = \sum_x \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{F}_{xi}(p) \left\{ \frac{8\pi^2 N_x m_x^2 c^3 p}{\gamma_x (i+1)(i+2)(i+3)} \times \right. \\ \times \left[\left(\frac{e_x A_z/c + p}{m_x c}\right)^{i+2} \frac{(i+2)p - e_x A_z/c}{m_x c} + \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{e_x A_z/c - p}{m_x c}\right)^{i+2} \frac{(i+2)p + e_x A_z/c}{m_x c} \right] \right\} dp. \quad (89)$$

Если в разложении (88) отличны от нуля лишь конечное число членов со степенями вплоть до d , т.е. $\hat{F}_{xi} \equiv 0$ при $i > d$, то потенциал (89) $U(A_z)$ представляет собой многочлен степени d — раскрывая скобки, можно убедиться, что коэффициенты при $A_z^{i+3}, A_z^{i+2}, A_z^{i+1}$ в (89) равны нулю. От вида функций $\hat{F}_{xi}(p)$, т.е. от энергетического распределения частиц, зависят лишь коэффициенты этого универсального многочлена.

Заметим, что формула (89) справедлива не только при неотрицательных целых i , но при всех $i \neq -1, -2, -3$, что позволяет рассматривать функции распределения, в которых зависимости от проекции обобщённого импульса являются степенными с отрицательными или нецелыми показателями. Для $i = -1, -2, -3$ выражение для потенциала Грэда–Шафранова тоже хорошо определено и получается из формулы (89) предельным переходом $i \rightarrow -1, -2, -3$ соответственно.

Таким образом, для цилиндрически-симметричных функций распределения, разложенных по степеням проекции обобщённого импульса, в случае конечного числа целых неотрицательных степеней имеется универсальный полиномиальный вид потенциала Грэда–Шафранова, а энергетические распределения частиц определяют лишь конечный набор коэффициентов указанного полинома. Моделирование полиномиальными функциями тех или иных профилей потенциала Грэда–Шафранова согласно разложению (89) позволяет анализировать самые разнообразные самосогласованные токовые слои.

3.1.2. Периодические токовые структуры. Для построения простейшего периодического решения достаточно ограничиться квадратичным членом полиномиального разложения цилиндрически-симметричной функции распределения (88):

$$f_x\left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z\right) = \hat{F}_{x0}(p) + \hat{F}_{x1}(p) \left(\frac{p_z + e_x A_z/c}{m_x c}\right) + \\ + \hat{F}_{x2}(p) \left(\frac{p_z + e_x A_z/c}{m_x c}\right)^2. \quad (90)$$

Потенциал Грэда–Шафранова (89) в этом случае равен

$$U(A_z) = \sum_x \int_0^{\infty} \hat{F}_{x0}(p) \frac{16\pi^2 N_x p^4}{3m_x \gamma_x} dp + \\ + \sum_x \int_0^{\infty} \hat{F}_{x1}(p) \frac{16\pi^2 N_x p^4 e_x A_z/c}{3m_x^2 c \gamma_x} dp + \\ + \sum_x \int_0^{\infty} \hat{F}_{x2}(p) \frac{16\pi^2 N_x p^4 (5e_x^2 A_z^2/c^2 + p^2)}{15m_x^3 c^2 \gamma_x} dp, \quad (91)$$

а профиль концентрации частиц диктуется зависимостью векторного потенциала от координаты x согласно формуле

$$N_x = 4\pi \int_0^{\infty} \left(\hat{F}_{x0}(p) + \hat{F}_{x1}(p) \frac{e_x A_z}{m_x c^2} + \hat{F}_{x2}(p) \frac{e_x^2 A_z^2}{m_x^2 c^4} \right) p^2 dp + \\ + \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \hat{F}_{x2}(p) \frac{p^4}{m_x^2 c^2} dp. \quad (92)$$

От линейного по A_z слагаемого в (91) можно избавиться с помощью калибровочного преобразования $A_z \Rightarrow A_z + \text{const}$, а независимые от A_z слагаемые не дают вклада в уравнение Грэда–Шафранова, поскольку последнее содержит лишь производную $dU(A_z)/dA_z$. Поэтому можно полагать $\hat{F}_{x1} \equiv 0$. В итоге исходная нелинейная задача магнитоэлектродинамики сводится к линейному уравнению Грэда–Шафранова вида

$$\Delta_{xy} A_z + k^2 A_z = 0, \quad (93)$$

где волновое число k уже было определено в формуле (76). В одномерном случае его решениями являются синусоиды

$$A_z = A_{\max} \cos(kx + \varphi) \quad (94)$$

с произвольной амплитудой A_{\max} и фазой φ .

Для подобных решений с достаточно слабым магнитным полем, когда вариации векторного потенциала и, следовательно, анизотропии функции распределения в самосогласованной токовой структуре оказываются малыми, есть все основания ожидать возникновения длинноволновой вейбелевской неустойчивости с масштабами, большими k^{-1} , но меньшими характерного гирорадиуса r_H . Речь идёт о тех возмущениях, для которых статическое магнитное поле не играет особой роли, т.е. дисперсионное уравнение (22) даёт инкремент, значительно превышающий характерную гирочастоту частиц. Из сказанного и из обсуждения в разделе 2.4 ясно, что на подавление вейбелевской неустойчивости для решений (90), (94) следует рассчитывать только при достаточно сильном магнитном поле, скажем, порядка равномерного, когда $r_H \lesssim k^{-1}$.

Для гармонического решения (94) с квадратичными функциями распределения частиц (90) легко посчитать

⁴ Калибровочное преобразование позволяет избавиться лишь от интегрального вклада слагаемых с \hat{F}_{x1} в потенциал Грэда–Шафранова. Для одного сорта токнесущих частиц, имеющих одинаковую энергию, линейное по A_z слагаемое при этом исключается и из функции распределения (90). В общем же случае линейное по A_z слагаемое в (90) влияет на форму функции распределения, но оставляет параболическим профиль потенциала Грэда–Шафранова. Поскольку мы не ставим здесь целью исчерпывающее описание всевозможных видов функций распределения, ограничимся случаем $\hat{F}_{x1} \equiv 0$.

соотношение между средней плотностью магнитной энергии и средней плотностью энергии частиц. При максимально исключённых изотропных составляющих функций распределения, $\hat{F}_{z0} \equiv 0$, получаем

$$\epsilon_B = \frac{\langle W_B \rangle_{\mathbf{r}}}{\sum_{\alpha} \langle W_{\alpha} \rangle_{\mathbf{r}}} = \frac{A_{\max}^2 \sum_{\alpha} \int e_{\alpha}^2 (\gamma_{\alpha} m_{\alpha} c^2)^{-1} \hat{F}_{z2}(p) p^4 dp}{3A_{\max}^2 \sum_{\alpha} \int e_{\alpha}^2 \gamma_{\alpha} m_{\alpha} \hat{F}_{z2}(p) p^2 dp + 2 \sum_{\alpha} \int \gamma_{\alpha} m_{\alpha} c^2 \hat{F}_{z2}(p) p^4 dp} \quad (95)$$

Для последнего выражения можно получить простую оценку сверху:

$$\epsilon_B < \frac{1}{3} \frac{\sum_{\alpha} \int (p^2 / m_{\alpha}^2 c^2 \gamma_{\alpha}^2) e_{\alpha}^2 \gamma_{\alpha} m_{\alpha} \hat{F}_{z2}(p) p^2 dp}{\sum_{\alpha} \int e_{\alpha}^2 \gamma_{\alpha} m_{\alpha} \hat{F}_{z2}(p) p^2 dp} < \frac{1}{3}, \quad (96)$$

причём в релятивистском случае при A_{\max} , много больших характерных значений pc/e_{α} , величина ϵ_B может быть близка к 1/3.

В нерелятивистском случае интерес представляет соотношение между средней плотностью энергии магнитного поля и средней кинетической энергией частиц:

$$\epsilon_B^{NR} \approx \frac{\langle W_B \rangle_{\mathbf{r}}}{\sum_{\alpha} \langle N_{\alpha} m_{\alpha} v^2 / 2 \rangle_{\mathbf{r}}} = \frac{A_{\max}^2 \sum_{\alpha} \int e_{\alpha}^2 (m_{\alpha} c^2)^{-1} \hat{F}_{z2}(p) p^4 dp}{(3/2) A_{\max}^2 \sum_{\alpha} \int e_{\alpha}^2 v^2 c^{-2} m_{\alpha} \hat{F}_{z2}(p) p^2 dp + \sum_{\alpha} \int v^2 m_{\alpha} \hat{F}_{z2}(p) p^4 dp} \quad (97)$$

Аналогичная (96) оценка сверху для нерелятивистского случая принимает вид $\epsilon_B^{NR} < 2/3$, причём значения ϵ_B^{NR} , близкие к 2/3, достигаются при амплитудах A_{\max} , много больших характерных величин pc/e_{α} . Наличие ненулевой изотропной компоненты плазмы, описываемой компонентой функции распределения \hat{F}_{z0} , лишь уменьшает долю энергии магнитного поля.

Если оставить в полиномиальном разложении (88) более старшие члены, то можно получить сильно негармонические периодические токовые слои. Примеры некоторых таких слоёв представлены на рис. 9 для случая, когда потенциальная яма $U(A_z)$ симметрична, а разложение (88) начинается с высокой степени. Видно, что при больших степенях дно потенциальной ямы почти пло-

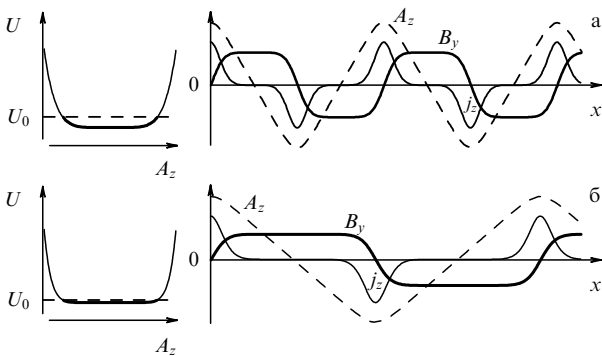


Рис. 9. Профиль ангармонического потенциала Грэда–Шафранова U и зависимости A_z , B_y и j_z от координаты; (а) $U \propto A_z^6$, (б) $U \propto A_z^{10}$.

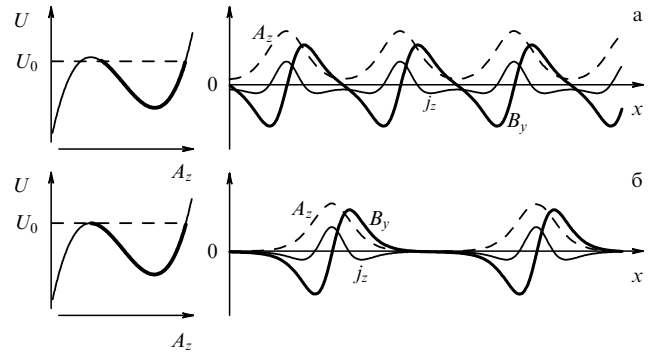


Рис. 10. Типичный профиль ангармонического потенциала Грэда–Шафранова (89) в форме кубической параболы и зависимости A_z , B_y и j_z от координаты для периодического решения при двух различных значениях первого интеграла U_0 .

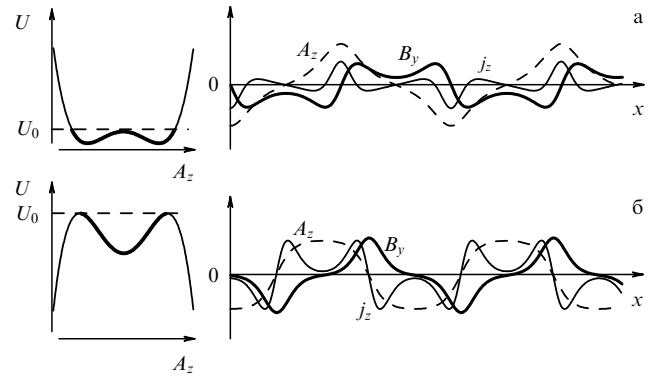


Рис. 11. Варианты профиля потенциала Грэда–Шафранова (89) в форме биквадратной параболы и зависимости A_z , B_y и j_z от координаты для периодических решений.

ское и в значительной части пространства плотность тока мала, а магнитное поле близко к константе. Фактически мы имеем серию чередующихся токовых слоёв с противоположным направлением тока, разделённых участками бестоковой плазмы с магнитным полем.

Если оставить в полиномиальном разложении (88) члены до третьего порядка включительно (подробнее этот случай рассмотрен ниже, при анализе экранированного токового слоя), то потенциальная яма будет несимметричной, а вместе с ней несимметричным станет и профиль магнитного поля. Решения для двух различных значений первого интеграла U_0 показаны на рис. 10. Чем больше величина U_0 , тем сильнее решение отличается от гармонического. Когда U_0 становится близким к величине локального максимума потенциала Грэда–Шафранова, решение фактически представляет собой серию экранированных токовых слоёв (подробнее о таких слоях будет сказано ниже в разделе 3.1.3), периодически расположенных в пространстве.

Если же оставить в разложении (88) члены до четвёртого порядка включительно (подробнее этот случай рассмотрен ниже, при анализе двойного токового слоя), то можно получить профили и ещё более сложной формы; примеры приведены на рис. 11. Примеры негармонических периодических решений, основанных на экспоненциальных разложениях функции распределения, для которых профили магнитного поля и тока описываются аналитическими формулами, приведены в разделе 3.2.2.

3.1.3. Экранированный токовый слой. Рассмотрим теперь локализованное решение, в котором магнитное поле на бесконечности обращается в нуль. Для этого оставим в разложении (88) слагаемые вплоть до кубического:

$$f_x = \hat{F}_{x0}(p) + \hat{F}_{x1}(p) \frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c} + \hat{F}_{x2}(p) \left(\frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c} \right)^2 + \hat{F}_{x3}(p) \left(\frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c} \right)^3. \quad (98)$$

Потенциал Грэда–Шафранова (89) после исключения не зависящих от A_z слагаемых, не дающих вклада в уравнение, имеет вид

$$U(A_z) = \sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x1}(p) \frac{16\pi^2 N_x p^4 e_x A_z}{3m_x^2 c^2 \gamma_x} dp + \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{16p^4 e_x^2 A_z^2}{3m_x^3 c^4} dp + \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x3}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \left[\frac{16p^4 e_x^3 A_z^3}{3m_x^4 c^6} + \frac{16p^6 e_x A_z}{5m_x^4 c^4} \right] dp. \quad (99)$$

Нас интересует локализованное решение, в котором при $x \rightarrow \pm\infty$ значение компоненты векторного потенциала A_z стремится к константе, одной и той же на обеих бесконечностях. Учитывая калибровочное преобразование, без ограничения общности можно считать, что эта константа равна нулю, т.е. что локальный максимум потенциала (99) достигается в точке $A_z = 0$, а значит, в нём отсутствуют линейные по A_z слагаемые:

$$U(A_z) = \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{16p^4 e_x^2 A_z^2}{3m_x^3 c^4} dp + \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x3}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{16p^4 e_x^3 A_z^3}{3m_x^4 c^6} dp. \quad (100)$$

Тогда решение уравнения Грэда–Шафранова (68) при граничных условиях $A_z(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ находится аналитически:

$$A_z = - \frac{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x2}(p) p^4 N_x e_x^2 c^2 / (m_x^3 \gamma_x) dp}{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x3}(p) p^4 N_x e_x^3 / (m_x^4 \gamma_x) dp} \times \cosh^{-2} \left(\sqrt{- \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{8p^4 e_x^2}{3m_x^3 c^4} dp} x \right). \quad (101)$$

Отсюда легко выражаются магнитное поле

$$B_y = -2 \frac{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x2}(p) p^4 N_x e_x^2 c^2 / (m_x^3 \gamma_x) dp}{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x3}(p) p^4 N_x e_x^3 / (m_x^4 \gamma_x) dp} \times \sqrt{- \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{8p^4 e_x^2}{3m_x^3 c^4} dp} \times \cosh^{-2} \left(\sqrt{- \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{8p^4 e_x^2}{3m_x^3 c^4} dp} x \right) \times \tanh \left(\sqrt{- \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{8p^4 e_x^2}{3m_x^3 c^4} dp} x \right), \quad (102)$$

плотность тока

$$j_z = \frac{4\pi}{3c^5} \frac{\left(\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x2}(p) p^4 N_x e_x^2 c^2 / (m_x^3 \gamma_x) dp \right)^2}{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x3}(p) p^4 N_x e_x^3 / (m_x^4 \gamma_x) dp} \times \cosh^{-2} \left(\sqrt{- \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{8p^4 e_x^2}{3m_x^3 c^4} dp} x \right) \times \left[1 - 3 \tanh^2 \left(\sqrt{- \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{8p^4 e_x^2}{3m_x^3 c^4} dp} x \right) \right], \quad (103)$$

концентрация

$$N_x = 4\pi \int_0^\infty \left[\hat{F}_{x0}(p) + \hat{F}_{x1}(p) \frac{e_x A_z}{m_x c^2} + \hat{F}_{x2}(p) \frac{e_x^2 A_z^2}{m_x^2 c^4} + \hat{F}_{x3}(p) \frac{p^2}{3m_x^2 c^2} + \hat{F}_{x3}(p) \frac{e_x A_z (e_x^2 A_z^2 + p^2 c^2)}{m_x^3 c^6} \right] p^2 dp. \quad (104)$$

Окончательное выражение для концентрации как функции координаты x получается подстановкой (101) в (104) и имеет довольно громоздкий вид.

Магнитное поле и плотность тока достигают следующих максимальных значений:

$$B_{y \max} = - \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x2}(p) p^4 N_x e_x^2 c^2 / (m_x^3 \gamma_x) dp}{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x3}(p) p^4 N_x e_x^3 / (m_x^4 \gamma_x) dp} \times \sqrt{- \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{8p^4 e_x^2}{3m_x^3 c^4} dp}, \quad j_{z \max} = \frac{4\pi}{3c^5} \frac{\left(\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x2}(p) p^4 N_x e_x^2 c^2 / (m_x^3 \gamma_x) dp \right)^2}{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x3}(p) p^4 N_x e_x^3 / (m_x^4 \gamma_x) dp}.$$

Заметим, что выше предполагалось выполненным условие

$$\sum_x \frac{N_x e_x^2}{m_x^3} \int_0^\infty \hat{F}_{x2}(p) \frac{p^4}{\gamma_x} dp < 0, \quad (105)$$

обеспечивающее наличие локального максимума (а не минимума) у потенциала Грэда–Шафранова в точке $A_z = 0$. При нарушении этого условия решение типа экранированного токового слоя всё равно существует, поскольку профиль потенциала кубический, и если в нём при $A_z = 0$ имеется локальный минимум, то в другом месте есть локальный максимум; однако это решение не будет удовлетворять условию $A_z \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и будет описываться другими формулами.

Из выражений (101)–(103) можно определить характерную толщину токового слоя

$$D = \left(- \sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{8p^4 e_x^2}{3m_x^3 c^4} dp \right)^{-1/2}, \quad (106)$$

с которой имеет смысл сравнить гирорадиус частиц с некоторым импульсом p_0 в максимуме поля,

$$R_{H \min} \equiv \frac{p_0 c}{e_x B_{y \max}} = \frac{9p_0 c}{4\sqrt{3} e_x} \frac{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x3}(p) p^4 N_x e_x^3 / (m_x^4 \gamma_x) dp}{\sum_x \int_0^\infty \hat{F}_{x2}(p) p^4 N_x e_x^2 c^2 / (m_x^3 \gamma_x) dp} \times \left(\sum_x \int_0^\infty \frac{\hat{F}_{x2}(p) \pi^2 N_x}{\gamma_x} \frac{8p^4 e_x^2}{3m_x^3 c^4} dp \right)^{-1/2}. \quad (107)$$

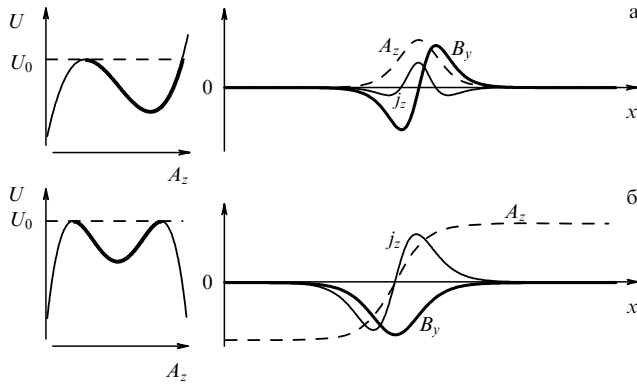


Рис. 12. Профиль потенциала Грэда – Шафранова $U(A_z)$ и зависимости A_z , B_y и j_z от координаты, характерные для (а) экранированного токового слоя, потенциал U в виде кубической параболы (99), и (б) двойного токового слоя, потенциал U вида (110).

Отношение гирорадиуса к характерной толщине слоя получается равным

$$\frac{R_{H\min}}{D} = -\frac{9p_0}{4\sqrt{3}e_x c} \frac{\sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \hat{F}_{z3}(p) p^4 N_{\alpha} e_x^3 / (m_{\alpha}^4 \gamma_{\alpha}) dp}{\sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \hat{F}_{z2}(p) p^4 N_{\alpha} e_x^2 / (m_{\alpha}^3 \gamma_{\alpha}) dp}. \quad (108)$$

Для частиц, образующих рассматриваемый токовый слой, это отношение может быть как значительно меньше единицы ("замагниченные" частицы), так и значительно больше единицы (большинство частиц пролетает токовый слой насквозь, мало отклоняясь в его магнитном поле). Формы профилей векторного потенциала, тока и магнитного поля во всех случаях одинаковы и изображены на рис. 12а. Профиль концентрации может иметь либо единственный максимум в центре, либо три максимума — центральный и два боковых, в зависимости от величины отношения (108). Центральный токовый слой полностью экранирован двумя боковыми токовыми слоями, так что магнитное поле с ростом координаты x экспоненциально убывает до нуля.

3.1.4. Двойной токовый слой. Оставим теперь в разложении (88) слагаемые вплоть до четвёртой степени:

$$f_x\left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z\right) = \hat{F}_{z0}(p) + \hat{F}_{z1}(p) \frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c} + \hat{F}_{z2}(p) \left(\frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c}\right)^2 + \hat{F}_{z3}(p) \left(\frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c}\right)^3 + \hat{F}_{z4}(p) \left(\frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c}\right)^4. \quad (109)$$

Будем искать решение, в котором при изменении x от $-\infty$ до ∞ векторный потенциал A_z изменяется от $-A_{\max}$ до A_{\max} . Это означает, что потенциал (89) имеет два максимума одинаковой высоты, симметрично расположенные относительно нуля, а значит, слагаемые нечётного порядка обращаются в нуль. С учётом этого обстоятельства и после исключения не зависящих от A_z слагаемых потенциал Грэда – Шафранова (89) принимает биквадратный вид:

$$U(A_z) = A_z^4 \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \hat{F}_{z4}(p) \frac{16\pi^2 N_{\alpha} p^4 e_x^4}{3m_{\alpha}^5 \gamma_{\alpha} c^8} dp +$$

$$+ A_z^2 \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \left(\hat{F}_{z2}(p) \frac{16\pi^2 N_{\alpha} p^4 e_x^2}{3m_{\alpha}^3 \gamma_{\alpha} c^4} + \hat{F}_{z4}(p) \frac{32\pi^2 N_{\alpha} p^6 e_x^2}{5m_{\alpha}^5 \gamma_{\alpha} c^6} \right) dp. \quad (110)$$

Потребуем выполнения неравенств

$$\sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \hat{F}_{z4}(p) \frac{16\pi^2 N_{\alpha} p^4 e_x^4}{3m_{\alpha}^5 \gamma_{\alpha} c^8} dp < 0, \quad (111)$$

$$\sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \left(\hat{F}_{z2}(p) \frac{16\pi^2 N_{\alpha} p^4 e_x^2}{3m_{\alpha}^3 \gamma_{\alpha} c^4} + \hat{F}_{z4}(p) \frac{32\pi^2 N_{\alpha} p^6 e_x^2}{5m_{\alpha}^5 \gamma_{\alpha} c^6} \right) dp > 0$$

для того, чтобы потенциал имел минимум в центре и два максимума по бокам от него. В результате из уравнения Грэда – Шафранова легко находится ограниченное непериодическое решение (рис. 12б):

$$A_z = A_{\max} \tanh\left(\frac{x}{D}\right), \quad (112)$$

$$B_y = \frac{A_{\max}}{D} \cosh^{-2}\left(\frac{x}{D}\right), \quad (113)$$

$$j_z = \frac{c A_{\max}}{2\pi D^2} \cosh^{-2}\left(\frac{x}{D}\right) \tanh\left(\frac{x}{D}\right), \quad (114)$$

где

$$D = \left[\sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \left(\hat{F}_{z2}(p) \frac{16\pi^2 N_{\alpha} p^4 e_x^2}{3m_{\alpha}^3 \gamma_{\alpha} c^4} + \hat{F}_{z4}(p) \frac{32\pi^2 N_{\alpha} p^6 e_x^2}{5m_{\alpha}^5 \gamma_{\alpha} c^6} \right) dp \right]^{-1/2}, \quad (115)$$

$$A_{\max} = \left[-2D^2 \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \hat{F}_{z4}(p) \frac{16\pi^2 N_{\alpha} p^4 e_x^4}{3m_{\alpha}^5 \gamma_{\alpha} c^8} dp \right]^{-1/2}. \quad (116)$$

Максимальные значения магнитного поля и плотности тока равны $B_{y\max} = A_{\max}/D$, $j_{z\max} = c A_{\max}/(3\sqrt{3}\pi D^2)$.

Выражение для профиля концентрации оказывается более сложным:

$$N_x = 4\pi \int_0^{\infty} \left[\hat{F}_{z0}(p) + \hat{F}_{z2}(p) \frac{p^2}{3m_x^2 c^2} + \hat{F}_{z4}(p) \frac{p^4}{5m_x^4 c^4} + \left(\hat{F}_{z1}(p) \frac{e_x}{m_x c^2} + \hat{F}_{z3}(p) \frac{p^2 e_x}{m_x^3 c^4} \right) A_{\max} \tanh \frac{x}{D} + \left(\hat{F}_{z2}(p) \frac{e_x^2}{m_x^2 c^4} + \hat{F}_{z4}(p) \frac{2p^2 e_x^2}{m_x^4 c^6} \right) A_{\max}^2 \tanh^2 \frac{x}{D} + \hat{F}_{z3}(p) \frac{e_x^3}{m_x^3 c^6} A_{\max}^3 \tanh^3 \frac{x}{D} + \hat{F}_{z4}(p) \frac{e_x^4}{m_x^4 c^8} A_{\max}^4 \tanh^4 \frac{x}{D} \right] p^2 dp. \quad (117)$$

Заметим, что в получившемся двойном слое магнитное поле и плотность тока при $x \rightarrow \pm\infty$ стремятся к нулю, однако ФРЧ остаётся анизотропной. Подставляя $A = A_{\max}$ из (116) в (109) для рассматриваемого биквадратного потенциала Грэда – Шафранова, можно убедиться, что функция распределения на периферии слоя центрально-симметрична и симметрична по отношению к плоскостям $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = 0$, что позволяет применить к ней анализ устойчивости из раздела 1.3 для волновых векторов, направленных вдоль оси z и перпендикулярных этой оси.

Для малых возмущений с $\mathbf{k} \perp \mathbf{z}_0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{z}_0$, используя критерий (27), получаем, что неустойчивость веibelевского типа отсутствует при выполнении условия

$$\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \left(5 \int \hat{F}_{\alpha 2}(p) \frac{p^4}{\gamma_{\alpha} m_{\alpha}^2 c^2} dp + 6 \int \hat{F}_{\alpha 4}(p) \frac{p^6}{\gamma_{\alpha} m_{\alpha}^4 c^4} dp \right) > 0, \quad (118)$$

которое в точности совпадает с одним из условий существования данного решения (111). Критерий устойчивости по отношению к возмущениям с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{z}_0$ выполняется при условии

$$\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \left(5 \int \hat{F}_{\alpha 2}(p) \frac{p^4}{\gamma_{\alpha} m_{\alpha}^2 c^2} dp + 8 \int \hat{F}_{\alpha 4}(p) \frac{p^6}{\gamma_{\alpha} m_{\alpha}^4 c^4} dp \right) < 0. \quad (119)$$

По отношению к возмущениям с $\mathbf{k} \perp \mathbf{z}_0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{z}_0$ неустойчивости нет в силу цилиндрической симметрии распределения, что формально выражается в том, что в этом случае интегрирование в выражении критерия неустойчивости (27) даёт нулевое значение. Сравнивая условия (118) и (119) с учётом первого неравенства из (111), можно заключить, что оба эти условия могут быть выполнены одновременно. При нарушении условий (118), (119) анизотропия распределения частиц оказывается слишком сильной и не может не сопровождаться веibelевской неустойчивостью. Без сомнения, и для других типов локализованных токовых слоёв с различными максимальными степенями d (см. (88)) можно подобрать такие функции $\hat{F}_{ji}(p)$, которые обеспечат сильную анизотропию ФРЧ и, следовательно, веibelевскую неустойчивость на периферии слоя. Вместе с тем в определённой области параметров, отвечающих слабой анизотропии, веibelевская неустойчивость этих решений может и отсутствовать, что, впрочем, требует дополнительного исследования в каждом конкретном случае.

3.2. Экспоненциальные распределения частиц

3.2.1. Обобщения токового слоя Харриса на произвольное распределение частиц по энергиям. Обратимся теперь к рассмотрению функций распределения, в разложении которых присутствуют экспоненциальные составляющие.

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда имеется лишь один экспоненциальный член простейшего вида и предэкспоненциальный фактор с произвольным энергетическим распределением частиц:

$$f_{\alpha} = \bar{F}_{\alpha 0}(p) \exp\left(\frac{\zeta_{\alpha} P_z}{m_{\alpha} c}\right). \quad (120)$$

Кроме того, предположим, что входящие в выражения для функций распределения параметры ζ_{α} таковы, что комбинации $\zeta_{\alpha} e_{\alpha}/m_{\alpha}$ имеют одинаковое значение для всех сортов частиц. Обозначим это значение c^2/A_0 . Тогда потенциал Грэда – Шафранова $U(A_z)$ пропорционален $\exp(A_z/A_0)$ с коэффициентом пропорциональности

$$W_0 = \sum_{\alpha} \left\{ \int_0^{\infty} \bar{F}_{\alpha 0}(p) \frac{8\pi^2 N_{\alpha} m_{\alpha}^2 c^3 p}{\gamma_{\alpha}^3 \zeta_{\alpha}^3} \left[\left(\frac{\zeta_{\alpha} p}{m_{\alpha} c} - 1 \right) \exp\left(\frac{\zeta_{\alpha} p}{m_{\alpha} c}\right) + \left(\frac{\zeta_{\alpha} p}{m_{\alpha} c} + 1 \right) \exp\left(\frac{-\zeta_{\alpha} p}{m_{\alpha} c}\right) \right] dp \right\}. \quad (121)$$

Все одномерные решения получающегося уравнения Грэда – Шафранова

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{W_0}{A_0} \exp\left(\frac{A_z}{A_0}\right) \quad (122)$$

описываются аналитической формулой

$$A_z = -2A_0 \ln \cosh(\kappa(x - x_0)) + 2A_0 \ln \left(\kappa \sqrt{\frac{2A_0^2}{W_0}} \right) \quad (123)$$

при различных значениях свободных параметров κ и x_0 , определяющих масштаб токового слоя и положение его центра соответственно (в двумерном случае набор известных аналитических решений гораздо шире; см., например, работы [37, 49, 206, 207, 209]). Выбрав начало отсчёта координат в центре слоя, т.е. считая, что $x_0 = 0$, найдём профили магнитного поля и плотности тока в виде

$$B_y = 2\kappa A_0 \tanh(\kappa x), \quad j_z = \frac{c\kappa^2 A_0}{2\pi} \cosh^{-2}(\kappa x). \quad (124)$$

Как видно, при фиксированном значении A_0 , определяемом параметрами и профилем функции распределения, величина максимального магнитного поля обратно пропорциональна пространственному масштабу токового слоя.

Путём интегрирования функции распределения (120) по импульсам убеждаемся, что профиль концентрации имеет тот же вид $\cosh^{-2}(\kappa x)$, что и профиль плотности тока:

$$n_{\alpha}(x) = \cosh^{-2}(\kappa x) \kappa^2 A_0^2 \sqrt{\frac{2}{W_0}} \times \\ \times 4\pi N_{\alpha} \int_0^{\infty} \bar{F}_{\alpha 0}(p) \frac{m_{\alpha} c}{\zeta_{\alpha} p} \sinh\left(\frac{\zeta_{\alpha} p}{m_{\alpha} c}\right) p^2 dp. \quad (125)$$

Оба профиля локализованы вблизи плоскости $x = 0$ и экспоненциально уменьшаются при удалении от неё, магнитное поле при этом стремится к величине $2\kappa A_0$, а его направления противоположны по разные стороны от токового слоя. Соответствующие графики приведены на рис. 13а.

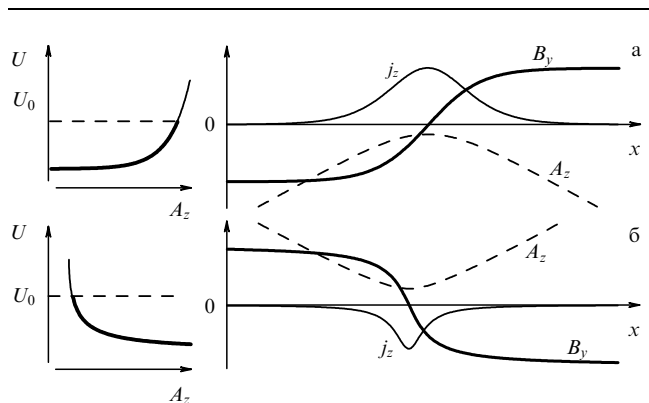


Рис. 13. Типичные потенциал Грэда – Шафранова $U(A_z)$ и зависимости A_z , B_y и j_z от координаты для (а) слоя Харриса, описываемого уравнением (122), и (б) решения (131), (132), аналогичного слою Харриса и описываемого уравнением (130).

Концентрация будет конечной, только если функция $\bar{F}_{x0}(p)$ уменьшается с возрастанием p быстрее, чем $\exp(-\zeta_x p/m_x c)$. Выберем для иллюстрации эту функцию в виде

$$\bar{F}_{x0}(p) = (m_x c)^{-3} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_x k_B T_x}\right), \quad (126)$$

где k_B и T_x — константы, произведение которых имеет размерность энергии. (Если k_B — постоянная Больцмана, то такой выбор при $\zeta_x = 0$ и нерелятивистских величинах импульса превращает распределение (120) в термодинамически равновесное распределение Максвелла — Больцмана с температурой T_x .) Функция распределения f_x тогда принимает вид

$$f_x \propto (m_x c)^{-3} \exp\left(\frac{\zeta_x e_x A_z}{m_x c^2} + \frac{k_B T_x \zeta_x^2}{2m_x c^2}\right) \times \exp\left[-\frac{(p_z - (k_B T_x \zeta_x/c))^2 + p_\perp^2}{2m_x k_B T_x}\right], \quad (127)$$

где $p_\perp^2 = p_x^2 + p_y^2$. Распределение по форме остаётся максвелловским, лишь его центр в импульсном пространстве сдвигается в направлении p_z на величину $m_x V_x = k_B T_x \zeta_x/c$, обеспечивая ток, плотность которого пропорциональна концентрации частиц. Условие равенства для всех сортов частиц комбинаций $\zeta_x e_x/m_x$ означает равенство комбинаций $e_x V_x/T_x$, т.е. частицы с разным знаком заряда движутся в противоположные стороны, давая вклад одного знака в плотность тока.

Заметим, что если (отдельно для каждого сорта частиц) перейти в систему отсчёта, движущуюся вдоль оси z со скоростью $k_B T_x \zeta_x/(m_x c)$, то в такой системе отсчёта распределение будет термодинамически равновесным максвелловским распределением, неоднородный профиль которого поддерживается тем, что плазма в этой системе отсчёта находится в удерживающем электростатическом потенциале. Обозначив импульс в этой системе отсчёта как p'_x , из выражения (127) получаем равновесное распределение в электростатическом потенциале φ' :

$$f_x \propto (m_x c)^{-3} \exp\left(\frac{k_B T_x \zeta_x^2}{2m_x c^2}\right) \exp\left(\frac{-p_x'^2/2m_x + e_x \varphi'}{k_B T_x}\right), \quad (128)$$

где $\varphi' = A_z V_x/c$, в полном соответствии с преобразованием Лоренца для нерелятивистских относительных скоростей систем отсчёта. Токковый слой (124) с функцией распределения (127) известен как слой Харриса [2]. С помощью представленного здесь метода, использующего интегралы движения, мы получили обобщение слоя Харриса на произвольные, в том числе релятивистские, величины импульсов и произвольные распределения по энергиям, определяемые функциями $\bar{F}_{x0}(p)$, на которые не накладывается ограничений, кроме неотрицательности и достаточно быстрого уменьшения с ростом величины импульса.

Токковый слой, аналогичный слою Харриса, можно получить и для ФРЧ степенного вида (88) при $i = -1$ (гиперболический профиль). Для разнообразия рассмотрим частный случай плоскостойкого распределения с $p_y \equiv 0$, т.е. с импульсами, лежащими в плоскости xz ,

когда уравнение Грэда — Шафранова имеет вид

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{\partial}{\partial A_z} \left[\frac{8\pi^2}{c} \sum_x \int_0^\infty \frac{N_x R_{x,-1}(p)}{p} \times \left(e_x A_z - \text{sign}(e_x A_z - pc) \sqrt{e_x^2 A_z^2 - c^2 p^2} \right) dp \right]. \quad (129)$$

Введённая здесь функция $R_{x,-1}(p)$ допускает различные энергетические распределения частиц, которые влияют на параметры токового слоя.

Локализованное решение получается уже в простейшем моноэнергетическом случае $R_{x,-1}(p) = C_{x,-1} c p_0 \times \delta(p - p_0)$, когда

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{\partial}{\partial A_z} \left[8\pi^2 \sum_x N_x C_{x,-1} e_x A_z \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2 p_0^2}{e_x^2 A_z^2}} \right) \right], \quad (130)$$

где $C_{x,-1}$ — некоторая безразмерная константа.

Будем для простоты считать, что у частиц всех токнесущих компонент плазмы одинаковый модуль заряда и одинаковый импульс; тогда функциональная зависимость всех слагаемых в (130) одинакова, отличаются лишь множители. Потенциал Грэда — Шафранова монотонно убывает и стремится к нулю при увеличении величины A_z от $c p_0/|e_x|$ до бесконечности. В качестве "точки поворота", т.е. значения A_z в центре токового слоя, где $B_y = -dA_y/dx = 0$, можно выбрать любое значение $A_z = A_{z \min}$, удовлетворяющее условию $A_{z \min} > c p_0/|e_x|$. Решение уравнения (130) легко записать в неявном виде:

$$x(A_z) = \pm \int_{A_{z \min}}^{A_z} \left[B_0^2 - 16\pi^2 \sum_x N_x C_{x,-1} e_x A_z \times \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2 p_0^2}{e_x^2 A_z^2}} \right) \right]^{-1/2} dA_z, \quad (131)$$

$$B_y(A_z) = \left[B_0^2 - 16\pi^2 \sum_x N_x C_{x,-1} e_x A_z \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2 p_0^2}{e_x^2 A_z^2}} \right) \right]^{1/2}. \quad (132)$$

Здесь координата x отсчитывается от середины токового слоя, а B_0 — магнитное поле вдали от слоя:

$$B_0 = 4\pi \left[\sum_x N_x C_{x,-1} e_x A_{z \min} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2 p_0^2}{e_x^2 A_{z \min}^2}} \right) \right]^{1/2}. \quad (133)$$

Вид решения показан на рис. 136. Из последней формулы следует оценка для максимальной величины магнитного поля:

$$B_0 < 4\pi \sqrt{\sum_x N_x |C_{x,-1}| c p_0}. \quad (134)$$

Для более сложных, чем δ -функции, энергетических зависимостей качественный вид решения сохраняется и его легко построить численно, однако аналитическое решение, даже в неявном виде типа (131), (132) будет содержать уже больше одного интеграла.

Отличие построенного изолированного токового слоя от известных изолированных слоёв типа Харриса

состоит, в частности, в том, что на периферии слоя распределение частиц становится фактически изотропным, а плотность тока уменьшается по степенному, а не экспоненциальному закону.

3.2.2. Двухмасштабные токовые слои. Дальнейшее обобщение токового слоя Харриса можно получить, рассматривая ФРЧ с двумя экспоненциальными компонентами с различными коэффициентами перед A_z в показателе степени. Аналитическое решение удаётся найти в случае, когда указанные коэффициенты отличаются в два раза, т.е. функции распределения имеют вид

$$f_x\left(p_z, p_z + \frac{e_x}{c} A_z\right) = \bar{F}_{x0}(p) \exp\left(\zeta_x \frac{p_z + e_x A_z/c}{m_x c}\right) + \bar{F}_{x0}^{(2)}(p) \exp\left(\zeta_x \frac{p_z + e_x A_z/c}{2m_x c}\right), \quad (135)$$

где функциональные множители $\bar{F}_{x0}(p)$ и $\bar{F}_{x0}^{(2)}(p)$ — произвольные функции, обеспечивающие неотрицательность функции распределения (для нерелятивистского распределения вида (126) это означает наличие двух максвелловских компонент, смещённых по импульсу в направлении p_z на разные величины). В уравнении Грэда–Шафранова в данном случае по сравнению со случаем (122) появляется ещё одно слагаемое:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = -\frac{W_0}{A_0} \exp\left(\frac{A_z}{A_0}\right) - \frac{W_2}{A_0} \exp\left(\frac{A_z}{2A_0}\right), \quad (136)$$

а потенциал Грэда–Шафранова оказывается равен

$$U(A_z) = W_0 \exp\left(\frac{A_z}{A_0}\right) + 2W_2 \exp\left(\frac{A_z}{2A_0}\right). \quad (137)$$

Коэффициент W_2 выражается через интеграл с некоторым весом от функции $\bar{F}_{x0}^{(2)}(p)$ по формуле, аналогичной (121), и является малым, если добавка $\bar{F}_{x0}^{(2)}(p)$ мала. Уравнение (136) имеет следующее семейство неперриодических решений:

$$A_z = -2A_0 \ln \left[\cosh(\kappa(x-x_0)) + \frac{W_2}{\sqrt{W_2^2 + 2\kappa^2 A_0^2 W_0}} \right] - 2A_0 \ln \frac{\sqrt{W_2^2 + 2\kappa^2 A_0^2 W_0}}{2\kappa^2 A_0^2}, \quad (138)$$

где пространственный масштаб κ^{-1} является свободным параметром. Профили магнитного поля и плотности тока при этом выражаются следующими формулами:

$$B_y = 2\kappa A_0 \frac{\sinh(\kappa(x-x_0))}{\cosh(\kappa(x-x_0)) + W_2/\sqrt{W_2^2 + 2\kappa^2 A_0^2 W_0}}, \quad (139)$$

$$j_z = \frac{\kappa^2 A_0}{2\pi} \frac{1 + \left(W_2/\sqrt{W_2^2 + 2\kappa^2 A_0^2 W_0}\right) \cosh(\kappa(x-x_0))}{\left[\cosh(\kappa(x-x_0)) + W_2/\sqrt{W_2^2 + 2\kappa^2 A_0^2 W_0}\right]^2}. \quad (140)$$

При $W_2 = 0$, $x_0 = 0$ формулы (138)–(140) переходят в (123), (124). При $W_2 < 0$, $W_0 > 0$ неограниченное решение представляет собой частично или полностью экраниро-

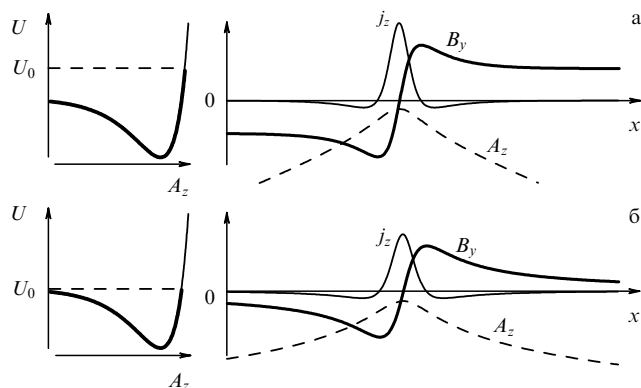


Рис. 14. Профиль потенциала Грэда–Шафранова (137) при $W_0 > 0$, $W_2 < 0$ и зависимости A_z , B_y и j_z от координаты, характерные для (а) частично экранированного токового слоя, $U_0 > 0$, и (б) полностью экранированного токового слоя, $U_0 = 0$.

ванный токовый слой — в зависимости от величины первого интеграла $U_0 = U(A_z) + B_y^2/2 = 2\kappa^2 A_0^2$. В общем случае токовый слой экранирован частично, магнитное поле вдали от него конечно (рис. 14а) и равно $2\kappa A_0$, как и в решении (124), а векторный потенциал (138) при больших x имеет асимптотику $A_z \approx -2A_0|kx|$. В предельном случае $\kappa \rightarrow 0$ экранирование является полным (рис. 14б):

$$A_z = -2A_0 \ln \frac{2W_0 A_0^2 + W_2^2(x-x_0)^2}{-4W_2 A_0^2}, \quad (141)$$

$$B_y = \frac{4A_0 W_2^2(x-x_0)}{2W_0 A_0^2 + W_2^2(x-x_0)^2}, \quad (142)$$

$$j_z = \frac{cA_0 W_2^2(2W_0 A_0^2 - W_2^2(x-x_0)^2)}{\pi(2W_0 A_0^2 + W_2^2(x-x_0)^2)^2}. \quad (143)$$

Магнитное поле достигает максимальной величины при $|x-x_0| = |\sqrt{2W_0 A_0}/W_2|$ (фактически это полуширина токового слоя, обозначим её D) и равно при этом $B_{y\max} = (2W_2^2/W_0)^{1/2}$. Максимальная плотность тока достигается при $x = x_0$ и равна

$$j_{z\max} = \frac{cW_2^2}{2\pi W_0 A_0} \equiv \frac{cB_{y\max}^2}{4\pi A_0} = \frac{c}{4\pi} \frac{B_{y\max}}{D}. \quad (144)$$

Из последнего соотношения видно, что в той области пространства, в которой $j_z/A_0 > 0$, средняя плотность тока вдвое меньше максимальной (поскольку $(c/4\pi)B_{y\max} = 2D\langle j_z \rangle$).

Кроме того, в отличие от случая с одной экспонентой (122), уравнение (136) при $W_2 < 0$, $W_0 > 0$ имеет периодические негармонические решения:

$$A_z = -2A_0 \ln \left(-\cos(k(x-x_0)) - \frac{W_2}{\sqrt{W_2^2 - 2\kappa^2 A_0^2 W_0}} \right) - 2A_0 \ln \frac{\sqrt{W_2^2 - 2\kappa^2 A_0^2 W_0}}{2\kappa^2 A_0^2}, \quad (145)$$

где пространственный масштаб k^{-1} является свободным параметром. Из-за ограниченного объёма обзора мы не имеем возможности рассмотреть их детальнее и сравнить с периодическими решениями из раздела 3.1.2.

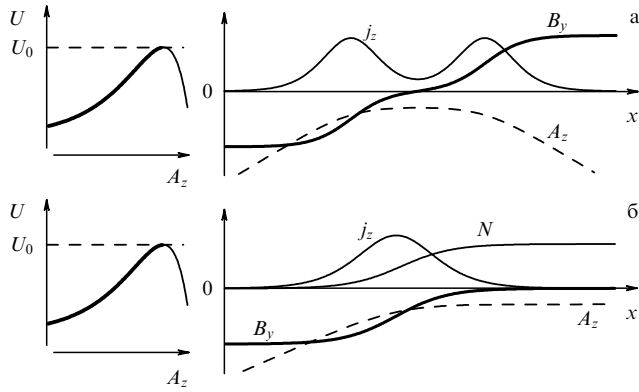


Рис. 15. Профиль потенциала Грэда–Шафранова (137) при $W_0 < 0$, $W_2 > 0$ и зависимости A_z , B_y и j_z от координаты, характерные для (а) расщеплённого токового слоя, где U_0 близко к $-W_2^2/W_0$, и (б) симметричного переходного слоя (от однородной плазмы к вакууму с однородным магнитным полем; N — концентрация частиц), реализующегося при $U_0 = -W_2^2/W_0$.

Если же $W_0 < 0$, то периодических решений нет. Общее решение описывается теми же формулами (138)–(140), однако на этот раз существует ограничение сверху на параметр κ (иначе подкоренное выражение оказывалось бы отрицательным):

$$\kappa^2 < \frac{W_2^2}{-2W_0A_0^2}. \tag{146}$$

Решение при κ , достаточно близком к этому порогу, т.е. для минимальных пространственных масштабов слоёв, показано на рис. 15а. В этом случае токовый слой расщепляется на два сонаправленных слоя. Расстояние между ними тем больше, чем ближе κ к порогу (146), т.е. чем ближе U_0 к вершине потенциала Грэда–Шафранова.

В предельном случае $\kappa^2 \rightarrow W_2^2/(-2W_0A_0^2)$ имеем один токовый слой (при выполнении этого предельного перехода нужно соответствующим образом устремить к бесконечности величину x_0). Он представляет собой границу между замагниченной плазмой и плазмой без магнитного поля (другие решения подобного вида рассмотрены в разделе 3.4.3). Выполнив предельный переход, получаем решение, показанное на рис. 15б:

$$B_y = \sqrt{\frac{W_2^2}{-2W_0}} \left[1 + \tanh \left(\sqrt{\frac{W_2^2}{-8W_0A_0^2}} (x - x'_0) \right) \right], \tag{147}$$

$$j_z = \frac{W_2^2}{-4W_0A_0} \cosh^{-2} \left(\sqrt{\frac{W_2^2}{-8W_0A_0^2}} (x - x'_0) \right), \tag{148}$$

где x'_0 — произвольная постоянная, определяющая положение центра токового слоя.

Аналогично можно рассмотреть случай, в котором коэффициенты при A_z в показателях экспонент в функции распределения (135) отличаются не в два раза, а больше, в w раз. Такой случай может реализовываться и в распределении частиц одного сорта, и для многокомпонентной плазмы, в которой распределения частиц разных сортов описываются простыми функциями (120) с сильно различающимися величинами комбинации $\zeta_\alpha e_\alpha/m_\alpha$ и, вообще говоря, с различными функциями $\bar{F}_{\alpha 0}(p)$. Для определённости можно иметь в виду случай многоком-

понентной плазмы, в которой есть две фракции ионов, переносящих ток, с функциями распределения f_{i1} и f_{i2} соответственно:

$$f_{i1} \left(p, p_z + \frac{e_{i1}}{c} A_z \right) = \bar{F}_{i1}(p) \exp \left(\zeta_{i1} \frac{p_z + e_{i1}A_z/c}{m_{i1}c} \right), \tag{149}$$

$$f_{i2} \left(p, p_z + \frac{e_{i2}}{c} A_z \right) = \bar{F}_{i2}(p) \exp \left(\zeta_{i2} \frac{p_z + e_{i2}A_z/c}{m_{i2}c} \right).$$

Здесь e_{i1} , e_{i2} — заряды ионов двух сортов (пусть положительные), m_{i1} , m_{i2} — их массы, ζ_{i1} , ζ_{i2} — безразмерные постоянные, $\bar{F}_{i1}(p)$, $\bar{F}_{i2}(p)$ — неотрицательные функции, достаточно быстро убывающие при $p \rightarrow \infty$ (быстрее, чем $p^{-4} \exp(-\zeta_i p/m_i c)$, что обеспечивает сходимость интегралов, определяющих концентрацию и плотность тока).

Электронейтральность плазмы может обеспечиваться покоящимися частицами с отрицательным зарядом и тем же пространственным распределением, что у ионов. Однако более интересен случай, в котором нейтральность обеспечивается движущимися электронами с распределениями из того же класса:

$$f_{e1} \left(p, p_z + \frac{e_e}{c} A_z \right) = \bar{F}_{e1}(p) \exp \left(\zeta_{e1} \frac{p_z + e_e A_z/c}{m_e c} \right), \tag{150}$$

$$f_{e2} \left(p, p_z + \frac{e_e}{c} A_z \right) = \bar{F}_{e2}(p) \exp \left(\zeta_{e2} \frac{p_z + e_e A_z/c}{m_e c} \right).$$

Здесь ζ_{e1} , ζ_{e2} — безразмерные постоянные, значение которых будет вычислено ниже, $\bar{F}_{e1}(p)$, $\bar{F}_{e2}(p)$ — достаточно быстро убывающие неотрицательные функции.

В предположении, что остальные компоненты плазмы (если они есть) не создают пространственного заряда, условие электронейтральности, которое должно выполняться в каждой точке пространства, имеет вид

$$e_{i1}n_{i1}(x) + e_{i2}n_{i2}(x) + e_e n_e(x) = 0, \tag{151}$$

где n_{i1} , n_{i2} , n_e — локальные концентрации двух ионных компонент и полной электронной компоненты. Они вычисляются умножением выражений (149), (150) на N_{i1} , N_{i2} , N_{e1} , N_{e2} соответственно и простым интегрированием по импульсам, которое приводит к следующему соотношению:

$$n_\alpha = \exp \left(\frac{\zeta_\alpha e_\alpha A_z}{m_\alpha c^2} \right) 4\pi N_\alpha \int_0^\infty \bar{F}_{\alpha 0}(p) \frac{m_\alpha c}{\zeta_\alpha p} \sinh \left(\frac{\zeta_\alpha p}{m_\alpha c} \right) dp, \tag{152}$$

где $\alpha = i1, i2, e1, e2$. Напомним, что N_{i1} , N_{i2} , N_{e1} , N_{e2} — константы, имеющие размерность концентрации, необходимость введения которых связана с тем, что функции f_{i1} , f_{i2} , f_{e1} , f_{e2} выбраны безразмерными. В выражения для реальных физических величин факторы N и f всегда входят в виде произведения, поэтому мы не будем оговаривать значения величин N и нормировку функций f .

Таким образом, для соблюдения условия нейтральности во всех точках (при всех значениях A_z) достаточно выполнения равенств

$$\frac{\zeta_{i1} e_{i1}}{m_{i1}} = \frac{\zeta_{e1} e_e}{m_e}, \quad \frac{\zeta_{i2} e_{i2}}{m_{i2}} = \frac{\zeta_{e2} e_e}{m_e}, \tag{153}$$

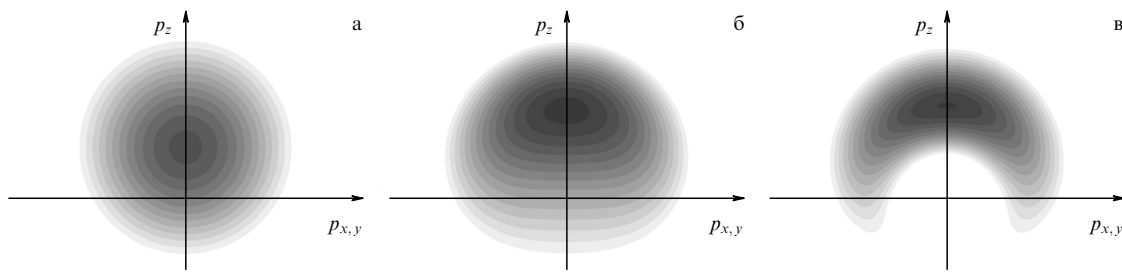


Рис. 16. Примеры функций распределения вида (150). (а) $\bar{F}_{e1}(p) \propto \exp(-\eta p^2)$, (б) $\bar{F}_{e1}(p) \propto \exp(-\eta^2 p^4)$, (в) $\bar{F}_{e1}(p) \propto p^2 \exp(-\eta p^2)$.

$$N_{e1} \int_0^\infty \frac{\bar{F}_{e1}(p)}{p} \sinh\left(\frac{\zeta_{i1} e_{i1} p}{m_{i1} c e_e}\right) dp = N_{i1} \frac{e_{i1}}{e_e} \int_0^\infty \frac{\bar{F}_{i1}(p)}{p} \sinh\left(\frac{\zeta_{i1} p}{m_{i1} c}\right) dp, \quad (154)$$

$$N_{e2} \int_0^\infty \frac{\bar{F}_{e2}(p)}{p} \sinh\left(\frac{\zeta_{i2} e_{i2} p}{m_{i2} c e_e}\right) dp = N_{i2} \frac{e_{i2}}{e_e} \int_0^\infty \frac{\bar{F}_{i2}(p)}{p} \sinh\left(\frac{\zeta_{i2} p}{m_{i2} c}\right) dp, \quad (155)$$

которые единственным образом определяют параметры ζ_{e1} , ζ_{e2} распределения электронов, но оставляют произвол в выборе функций $\bar{F}_{e1}(p)$, $\bar{F}_{e2}(p)$, задающих их распределение по энергиям. Это могут быть любые достаточно быстро убывающие неотрицательные функции, на каждую из них есть лишь одно интегральное ограничение, определяющее нормировку. Если плотность заряда электронной компоненты равна плотности заряда соответствующей ионной компоненты в какой-то точке, это равенство автоматически выполняется и во всех остальных точках пространства. Всё вышесказанное в равной мере относится как к нерелятивистскому, так и к релятивистскому случаю.

Также можно отметить, что функции распределения (149), (150), рассматриваемые как распределения по импульсам в заданной точке пространства, во всём пространстве одинаковы с точностью до общего множителя. Приведём несколько примеров, какими могут быть эти распределения. Как было сказано выше (см. (126), (127)), если $\bar{F}_{e1}(p) \propto \exp(-\alpha p^2)$, то в нерелятивистском случае распределение частиц представляет собой распределение Максвелла со смещённым в пространстве импульсов центром, т.е. в системе отсчёта, в которой эти частицы не создают тока, их распределение будет изотропным и максвелловским. Для других видов функции $\bar{F}_{e1}(p)$ в нерелятивистском случае распределение не изотропно ни в какой системе отсчёта. На рисунке 16 показаны распределения для $\bar{F}_{e1}(p) \propto \exp(-\eta p^2)$, $\bar{F}_{e1}(p) \propto \exp(-\eta^2 p^4)$ и $\bar{F}_{e1}(p) \propto p^2 \exp(-\eta p^2)$, где η — некоторая постоянная. Подобного вида "серповидные" функции распределения наблюдаются в измерениях распределения частиц в токовых слоях в хвосте земной магнитосферы [210].

Потенциал Грэда–Шафранова, как обычно, вычисляется взятием определённого интеграла по импульсам и неопределённого интеграла по A_z и в рассматриваемом случае оказывается равен

$$U(A_z) = W_1 \exp\left(\frac{A_z}{A_0}\right) + W_2 \exp\left(\frac{A_z}{w A_0}\right), \quad (156)$$

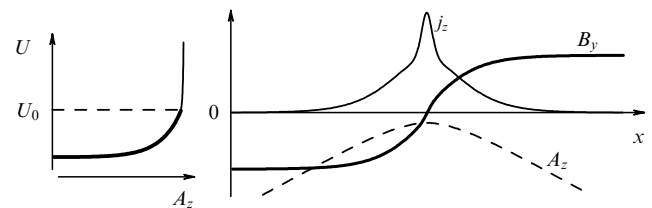


Рис. 17. Профиль потенциала Грэда–Шафранова (137) при $W_0 > 0$, $W_2 > 0$, $w = 30$ и зависимости A_z , B_y и j_z от координаты, характерные для вложенного токового слоя.

где

$$A_0 = \frac{c^2 m_{i1}}{\zeta_{i1} e_{i1}}, \quad w = \frac{m_{i2} \zeta_{i1} e_{i1}}{m_{i1} \zeta_{i2} e_{i2}}, \quad (157)$$

а W_1 и W_2 вычисляются по формулам, аналогичным (121):

$$W_1 = \sum_{\alpha=e_1, i_1} \left\{ \int_0^\infty \bar{F}_\alpha(p) \frac{8\pi^2 N_\alpha m_\alpha^2 c^3 p}{\gamma_\alpha \zeta_\alpha^3} \left[\left(\frac{\zeta_\alpha p}{m_\alpha c} - 1 \right) \exp\left(\frac{\zeta_\alpha p}{m_\alpha c}\right) + \left(\frac{\zeta_\alpha p}{m_\alpha c} + 1 \right) \exp\left(\frac{-\zeta_\alpha p}{m_\alpha c}\right) \right] dp \right\}, \quad (158)$$

$$W_2 = \sum_{\alpha=e_2, i_2} \left\{ \int_0^\infty \bar{F}_\alpha(p) \frac{8\pi^2 N_\alpha m_\alpha^2 c^3 p}{\gamma_\alpha \zeta_\alpha^3} \left[\left(\frac{\zeta_\alpha p}{m_\alpha c} - 1 \right) \exp\left(\frac{\zeta_\alpha p}{m_\alpha c}\right) + \left(\frac{\zeta_\alpha p}{m_\alpha c} + 1 \right) \exp\left(\frac{-\zeta_\alpha p}{m_\alpha c}\right) \right] dp \right\}.$$

Не имея возможности приводить здесь детальный анализ получающихся решений, отметим, что если $w \gg 1$ или $w \ll 1$, а обе величины W_1 и W_2 положительны, то профиль плотности тока может быть двухмасштабным, т.е. иметь вид вложенных друг в друга токовых слоёв сильно различной толщины, в которых ионы разного сорта образуют токовые слои различного масштаба. Пример таких вложенных слоёв дан на рис. 17.

3.2.3. Точные решения, содержащие особенность, и симметричные периодические точные решения. Одним из вариантов потенциала Грэда–Шафранова (156), для которого уравнение (68) удаётся проинтегрировать до конца, является комбинация параметров $W_1 = W_2$, $w = -1$, когда $U(A_z) \propto \cosh(A_z/A_0)$. При $W_1 = W_2 > 0$ решения $A_z(x)$ записываются через эллиптические интегралы, а при $W_1 = W_2 < 0$ некоторые частные решения удаётся записать через элементарные функции.

Одно такое решение при $W_1 = W_2 < 0$ соответствует случаю, когда значение первого интеграла уравнения (68) равно максимуму потенциала $U(A_z)$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dA_z}{dx} \right)^2 + U = 2W_1. \quad (159)$$

Тогда

$$A_z = -2A_0 \ln \tanh \left(\sqrt{\frac{-W_1}{2A_0^2}} |x - x_0| \right), \quad (160)$$

где значение x_0 определяет лишь сдвиг решения как целого. Выбирая $x_0 = 0$, имеем следующие выражения для напряжённости магнитного поля и плотности тока:

$$B_y = \frac{\sqrt{-8W_1}}{\sinh \left(\sqrt{-2W_1/A_0^2} x \right)}, \quad (161)$$

$$j_z = \frac{-cW_1}{\pi A_0 \sinh \left(\sqrt{-2W_1/A_0^2} x \right) \tanh \left(\sqrt{-2W_1/A_0^2} x \right)}. \quad (162)$$

Заметим, что из равенства указанных значений B_y при $x \rightarrow \pm\infty$ следует, что полный ток во всём пространстве равен нулю, однако согласно формуле (162) плотность тока везде одного знака. О причинах этого противоречия будет написано ниже.

Также можно аналитически записать периодическое решение, поменяв знак правой части соотношения (159) и по-прежнему считая, что $W_1 < 0$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dA_z}{dx} \right)^2 + U = -2W_1. \quad (163)$$

Проводя соответствующее интегрирование, получаем решение в виде

$$A_z = -2A_0 \ln \tan \left(\sqrt{\frac{-2W_1}{A_0^2}} |x - x_0| \right). \quad (164)$$

Как и выше, для краткости примем $x_0 = 0$. Выражения для напряжённости магнитного поля и для плотности тока оказываются похожи на (161), (162), отличие состоит лишь в замене гиперболических функций на тригонометрические:

$$B_y = \frac{\sqrt{-8W_1}}{\sin \left(\sqrt{-2W_1/A_0^2} x \right)}, \quad (165)$$

$$j_z = \frac{-cW_1}{\pi A_0 \sin \left(\sqrt{-2W_1/A_0^2} x \right) \tan \left(\sqrt{-2W_1/A_0^2} x \right)}. \quad (166)$$

Приведённые здесь решения (160)–(162) и (164)–(166) отличаются от всех ранее рассмотренных нами решений тем, что имеют особенность (в окрестности нуля в первом случае и в окрестности точек $(-2W_1/A_0^2)^{1/2} x = \pi n$ при всех целых n во втором случае) — магнитное поле, плотность тока и концентрация частиц оказываются неограниченными. Заметим, что поведение этих двух решений в окрестности нуля похожее, но с некоторыми отличиями: $A_z(x)$, как и $B_y(x)$, в двух решениях стремятся друг к другу при $x \rightarrow 0$, а разность между $j_z(x)$ (так же как между концентрациями частиц) в двух решениях стре-

мится к ненулевой константе, в чём можно легко убедиться, разлагая (160)–(162) и (164)–(166) в ряды в окрестности точки $x = 0$.

Поскольку все использованные нами уравнения справедливы лишь при конечных значениях всех входящих в них величин, имеет смысл записать ещё граничное условие в точке разрыва:

$$B_y(+0) - B_y(-0) = \frac{4\pi}{c} \int_{-0}^{+0} j_z dx. \quad (167)$$

В силу чётности функции $j_z(x)$ формальное значение интеграла $\int j_z(x) dx$ при любых заданных пределах интегрирования не зависит от способа обхода особенности при $x = 0$ в комплексной плоскости, и любой обход этой особенности даст необходимый скачок левой части равенства. Однако можно заметить, что из-за бесконечного разрыва магнитного поля для выполнения граничного условия при $x = 0$ требуется плоский противоток с бесконечной погонной плотностью. Таким образом, указанные решения будут нефизическими, если рассматривать их в области пространства, включающей особенность.

Точное аналитическое решение удаётся получить также для уравнения

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = -\frac{W_0}{A_0} \sinh \left(\frac{A_z}{A_0} \right) + \frac{W_2}{A_0} \sinh \left(\frac{A_z}{2A_0} \right), \quad (168)$$

которое соответствует, в частности, случаю, когда к частицам, составляющим структуры, описываемые уравнением (136), добавлены частицы "обратного потока" — с такой же зависимостью функции распределения от компоненты векторного потенциала A_z , но с противоположными значениями проекции импульса p_z и противоположным знаком заряда. Мы выбрали здесь знак слагаемого с произвольным множителем W_2 иным образом, чем это было сделано в формуле (136), для удобства записи решений, в которых будет предполагаться, что W_0 и W_2 положительны.

Соответствующий потенциал Грэда–Шафранова имеет вид

$$U(A) = W_0 \cosh \left(\frac{A_z}{A_0} \right) - 2W_2 \cosh \left(\frac{A_z}{2A_0} \right) \quad (169)$$

и стремится к $+\infty$ при $A_z \rightarrow \pm\infty$, откуда следует наличие нелинейных периодических решений. Одно из таких решений удаётся записать в элементарных функциях:

$$A_z(x) = 4A_0 \operatorname{artanh} \left(\frac{\cos \left(\sqrt{(W_2 + 2W_0)/A_0} x \right)}{\sqrt{1 + 2W_0/W_2}} \right), \quad (170)$$

$$B_y(x) = \frac{4\sqrt{A_0 W_2} \sin \left(\sqrt{(W_2 + 2W_0)/A_0} x \right)}{1 - (W_2/(W_2 + 2W_0)) \cos^2 \left(\sqrt{(W_2 + 2W_0)/A_0} x \right)}. \quad (171)$$

При $W_2 \ll W_0$ решение (170), (171) близко к гармоническому, при $W_2 \gg W_0$ решение является сильно негармоническим, поскольку аргумент гиперболического арктангенса бывает близок к ± 1 . Последний случай аналогичен негармоническим слоям, рассмотренным в конце раздела 3.1.2.

Потенциал Грэда–Шафранова (169) имеет вид потенциальной ямы с одним минимумом в центре при

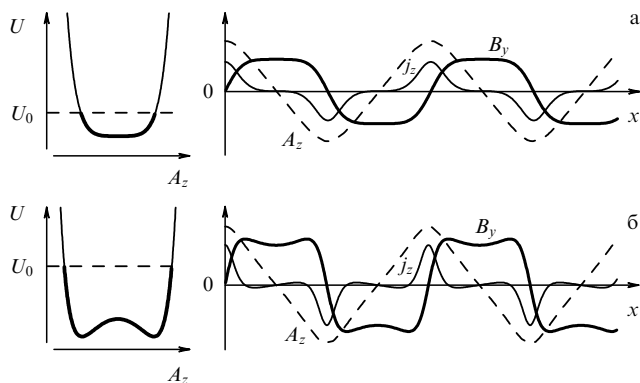


Рис. 18. Профиль потенциала Грэда–Шафранова (169) и зависимости A_z , B_y и j_z от координаты для ангармонического периодического решения (170), (171) при $W_2 = 2W_0$ (а) и $W_2 = 6W_0$ (б).

$W_2 < 2W_0$. При $W_2 > 2W_0$ в центре имеется максимум, а по обе стороны от него в точках

$$A_z = \pm 2A_0 \ln \frac{W_2 + \sqrt{W_2^2 - 4W_0^2}}{2W_0} \quad (172)$$

располагаются два минимума. Вид профилей векторного потенциала, магнитного поля и плотности тока для двух различных соотношений W_2/W_0 приведён на рис. 18.

3.3. Полиномиально-экспоненциальные распределения частиц

Обратимся к более общему случаю ФРЧ в виде произведения экспоненты на многочлен:

$$f_x \left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z \right) = \exp \left(\zeta_x \frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c} \right) \times \sum_{i=0}^d \bar{F}_{xi}(p) \left(\frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c} \right)^i. \quad (173)$$

Для него потенциал Грэда–Шафранова в уравнении (68) также имеет экспоненциально-полиномиальный вид:

$$U(A_z) = \sum_x \exp \left(\frac{\zeta_x e_x A_z}{m_x c^2} \right) \sum_{l=0}^d \left(\frac{e_x A_z}{m_x c^2} \right)^l C_{xl}, \quad (174)$$

где коэффициенты определяются интегралами

$$C_{xl} = 4\pi^2 N_x m_x^2 c^3 \sum_{i=l}^d \int \bar{F}_{xi}(p) \left[Y_{xli} \left(\frac{-\zeta_x p}{m_x c} \right) - Y_{xli} \left(\frac{\zeta_x p}{m_x c} \right) \right] p \frac{dp}{\gamma_x} \quad (175)$$

от произвольных функций $\bar{F}_{xi}(p)$ с весом, заданным безразмерными выражениями

$$Y_{xli}(b) = \frac{i! \exp(-b) (-\zeta_x)^{l-i-3}}{(i-l)! l!} \left\{ \exp(b) \Gamma(i-l+1, b) \times \right. \\ \left. \times [(i-l+2)(i-l+1) - b^2] + b^{i-l+2} + (i-l+2)b^{i-l+1} \right\}. \quad (176)$$

Здесь $\Gamma(\dots, \dots)$ — так называемая неполная гамма-функция, определяемая формулой

$$\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} \exp(-t) dt. \quad (177)$$

С обычной гамма-функцией она связана соотношением $\Gamma(s, 0) = \Gamma(s)$. В интересующем нас случае целых неотрицательных i и l ($i \geq l$) множитель $\exp(b) \Gamma(i-l+1, b)$ представляет собой многочлен степени $i-l$ от b . В явном виде выражения для неполной гамма-функции для первых пяти натуральных значений первого аргумента записываются как

$$\begin{aligned} \Gamma(1, x) &= \exp(-x), & \Gamma(2, x) &= \exp(-x)(1+x), \\ \Gamma(3, x) &= 2 \exp(-x) \left(1+x+\frac{x^2}{2} \right), & & \\ \Gamma(4, x) &= 6 \exp(-x) \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} \right), & & \\ \Gamma(5, x) &= 24 \exp(-x) \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24} \right). & & \end{aligned} \quad (178)$$

Таким образом, и в этом случае мы имеем универсальный функциональный вид потенциала Грэда–Шафранова, а функции распределения определяют лишь набор коэффициентов в нём, хотя и влияют на параметры получающихся токовых слоёв.

Другой довольно общий случай представляют функции распределения, в которых показатель экспоненты квадратично зависит от проекции обобщённого импульса (подобный случай с несколько других позиций был рассмотрен в работе [7]). Общий анализ уместно представить описанием простейшего варианта

$$f_x \left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z \right) = \tilde{F}_{x0}(p) \exp \left(-\zeta_x^2 \frac{(p_z + e_x A_z / c)^2}{m_x^2 c^2} \right), \quad (179)$$

где ζ_x — безразмерные константы, а $\tilde{F}_{x0}(p)$ — некоторые пока произвольные функции. Тогда уравнение для векторного потенциала (68) принимает вид

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{8\pi^2}{c} \sum_x N_x e_x \int_0^\infty p \tilde{F}_{x0}(p) \times \\ \times \left[\int_{-p}^p \exp \left(-\zeta_x^2 \frac{(p_z + e_x A_z / c)^2}{m_x^2 c^2} \right) p_z dp_z \right] \frac{dp}{m_x \gamma_x}. \quad (180)$$

Интеграл по p_z в квадратных скобках равен

$$\frac{m_x^2 c^2}{2\zeta_x^2} \left[\exp \left(-\zeta_x^2 \frac{(e_x A_z / c - p)^2}{m_x^2 c^2} \right) - \exp \left(-\zeta_x^2 \frac{(e_x A_z / c + p)^2}{m_x^2 c^2} \right) \right] + \\ + \frac{\sqrt{\pi} e_x A_z m_x}{2\zeta_x} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\zeta_x (e_x A_z / c - p)}{m_x c} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta_x (e_x A_z / c + p)}{m_x c} \right) \right], \quad (181)$$

где использована функция ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt. \quad (182)$$

Поскольку подынтегральное выражение содержит специальные функции, дальнейшее интегрирование по p в правой части уравнения (180) не удаётся аналитически провести в общем случае, хотя анализ возможен в ряде специальных случаев, например, когда весовой множитель $\tilde{F}_{x0}(p)$ является суммой δ -функций.

Важным специальным случаем, для которого в уравнении Грэда–Шафранова можно избавиться от интегра-

лов, является максвелловская зависимость функций распределения от энергии частиц, когда $\tilde{F}_{\alpha 0}(p) = C_\alpha \gamma_\alpha p_\alpha^{-3} \times \exp(-p^2/p_\alpha^2)$, где C_α и p_α — константы. В результате интегрирования получаем потенциал Грэда – Шафранова в виде суммы экспонент с квадратично зависящими от A_z показателями:

$$U(A_z) = \sum_\alpha \frac{2\pi^{5/2} N_\alpha C_\alpha c p_\alpha^2}{\sqrt{m_\alpha^2 c^2 + p_\alpha^2 \zeta_\alpha^2}} \exp\left(\frac{-e_\alpha^2 A_z^2 / c^2}{m_\alpha^2 c^2 \zeta_\alpha^{-2} + p_\alpha^2}\right). \quad (183)$$

Аналогичный результат можно получить и для более общего вида распределения

$$f_\alpha\left(p, p_z + \frac{e_\alpha}{c} A_z\right) = C_\alpha \gamma_\alpha p_\alpha^{-3} \exp\left(-\frac{p^2}{p_\alpha^2}\right) \times \exp\left(-\zeta_\alpha^2 \frac{(p_z + e_\alpha(A_z - A_\alpha)/c)^2}{m_\alpha^2 c^2}\right) \quad (184)$$

с различными константами A_α для разных сортов частиц:

$$U(A_z) = \sum_\alpha \frac{2\pi^{5/2} N_\alpha C_\alpha c p_\alpha^2}{\sqrt{m_\alpha^2 c^2 + p_\alpha^2 \zeta_\alpha^2}} \exp\left(\frac{-e_\alpha^2 (A_z - A_\alpha)^2 / c^2}{m_\alpha^2 c^2 \zeta_\alpha^{-2} + p_\alpha^2}\right). \quad (185)$$

Вернёмся к общему случаю, когда кроме экспоненциального множителя с квадратичной формой от векторного потенциала в показателе имеется ещё полиномиальный множитель:

$$f_\alpha\left(p, p_z + \frac{e_\alpha}{c} A_z\right) = \exp\left(-\zeta_\alpha^2 \frac{(p_z + e_\alpha A_z / c)^2}{m_\alpha^2 c^2}\right) \times \sum_{i=0}^d \tilde{F}_{\alpha i}(p) \left(\frac{p_z + e_\alpha A_z / c}{m_\alpha c}\right)^i. \quad (186)$$

Провести интегрирование в элементарных функциях удаётся опять для случая $\tilde{F}_{\alpha i}(p) = C_{\alpha i} \gamma_\alpha p_{\alpha i}^{-3} \exp(-p^2/p_{\alpha i}^2)$, где $C_{\alpha i}$ и $p_{\alpha i}$ — константы (лоренц-фактор γ_α зависит от p). Также вместо A_z можно для общности писать $A_z - A_\alpha$ с разными константами A_α для разных сортов частиц, но для краткости мы не будем этого делать. Тогда получаем

$$U(A_z) = \sum_\alpha \sum_{j=0}^d \sum_{i=j}^d \left(\frac{e_\alpha A_z m_\alpha}{\zeta_\alpha^2 p_{\alpha i}^2 + m_\alpha^2 c^2}\right)^j \exp\left(\frac{-e_\alpha^2 A_z^2 / c^2}{m_\alpha^2 c^2 \zeta_\alpha^{-2} + p_{\alpha i}^2}\right) \times (1 + (-1)^{i-j}) \frac{\Gamma(i+1)\Gamma((i-j+1)/2)}{\Gamma(j+1)\Gamma(i-j+1)} \times \frac{\pi^2 C_{\alpha i} N_\alpha p_{\alpha i}}{m_\alpha^{i-j+1} c^{i-j}} \left(\frac{\zeta_\alpha^2}{m_\alpha^2 c^2} + p_{\alpha i}^{-2}\right)^{-(i-j+1)/2}. \quad (187)$$

Легко убедиться, что подстановка $d = 0$ в (187) приводит к уравнению (183).

Использование найденного общего выражения для потенциала Грэда – Шафранова предоставляет широкие возможности по аналитическому конструированию разнообразных самосогласованных токовых слоёв, которое ещё предстоит осуществить.

3.4. Негладкие распределения частиц

3.4.1. О потенциале Грэда – Шафранова для локализованных токовых слоёв с внешним магнитным полем. Имея в виду описание токовых слоёв, контактирующих с областью, занятой внешним однородным магнитным

полем, рассмотрим некоторые негладкие ФРЧ, которые могут обеспечивать подходящий вид потенциала Грэда – Шафранова, указанный в конце раздела 2.5 при общей классификации возможных плоскостойких решений.

В качестве позволяющего это сделать простейшего примера ФРЧ, для которого интегралы, входящие в уравнение Грэда – Шафранова (68), можно вычислить аналитически, рассмотрим распределение частиц с зависимостью от проекции обобщённого импульса, имеющей вид суммы δ -функций вида $\delta((p_z + e_\alpha A_z / c - P_i(p)) / m_\alpha c)$ с некоторыми весами. В качестве зависимости от проекции импульса p_y рассмотрим два простейших варианта: когда явной зависимости нет (цилиндрически-симметричный случай с осью p_z) и когда она имеет вид δ -функции $\delta(p_y)$ (случай плоскостойкого движения частиц).

Начнём с первого варианта:

$$f_\alpha\left(p, p_z + \frac{e_\alpha}{c} A_z\right) = \sum_i \bar{F}_{\alpha i}(p) \delta\left(\frac{p_z + e_\alpha A_z / c - P_i(p)}{m_\alpha c}\right), \quad (188)$$

где $P_i(p)$ — некоторые функции, которые могут быть выбраны, по существу, произвольно, $\bar{F}_{\alpha i}$ — произвольные функции, предполагаемые неотрицательными для того, чтобы гарантировать неотрицательность ФРЧ f_α . Плотность тока, создаваемого частицами сорта α , вычисляется с помощью перехода в сферическую систему координат в пространстве импульсов и приводится к следующему потенциалу Грэда – Шафранова:

$$U_{\alpha \delta} = \sum_i \int_0^\infty \frac{4\pi^2 N_\alpha e_\alpha^2 p \bar{F}_{\alpha i}(p)}{c \gamma_\alpha} H\left(\frac{p - |e_\alpha A_z / c - P_i(p)|}{m_\alpha c}\right) \times \left(\frac{c^2 p^2}{e_\alpha^2} - \left(A_z - \frac{c P_i(p)}{e_\alpha}\right)^2\right) dp, \quad (189)$$

где $H(\dots)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

Для плоскостойкого варианта рассматриваем функцию распределения вида

$$f_\alpha\left(p, p_z + \frac{e_\alpha}{c} A_z, p_y\right) = \sum_i \bar{F}_{\alpha i}(p) \delta\left(\frac{p_z + e_\alpha A_z / c - P_i(p)}{m_\alpha c}\right) \delta\left(\frac{p_y}{m_\alpha c}\right). \quad (190)$$

Плотность тока легко вычисляется с помощью перехода в цилиндрическую систему координат и приводит к потенциалу Грэда – Шафранова

$$U = \sum_{\alpha, i} 8\pi N_\alpha m_\alpha c^2 \int_0^\infty \frac{p \bar{F}_{\alpha i}(p)}{\gamma_\alpha} \sqrt{p^2 - \left(\frac{e_\alpha A_z}{c} - P_i(p)\right)^2} \times H\left(\frac{p - |e_\alpha A_z / c - P_i(p)|}{m_\alpha c}\right) dp. \quad (191)$$

Токовые конфигурации, отвечающие потенциалу такого вида, по-видимому, ещё не изучались.

Ещё один полезный пример ФРЧ с негладкой зависимостью от проекции обобщённого импульса даёт использование функции модуля:

$$f_\alpha\left(p, p_z + \frac{e_\alpha}{c} A_z\right) = \bar{F}_{\alpha 1}(p) \left|\frac{p_z + e_\alpha A_z / c}{m_\alpha c}\right|. \quad (192)$$

Плотность тока, создаваемого частицами сорта α , легко вычисляется:

$$j_\alpha = N_\alpha e_\alpha \int \bar{F}_{\alpha 1}(p) \left| \frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right| \frac{p_z}{m_\alpha \gamma_\alpha} d^3 p = \frac{\pi N_\alpha e_\alpha}{3m_\alpha^2 c^4} \int \frac{p \bar{F}_{\alpha 1}(p)}{\gamma_\alpha} [(pc + e_\alpha A_z)|pc + e_\alpha A_z|(2pc - e_\alpha A_z) - (pc - e_\alpha A_z)|pc - e_\alpha A_z|(2pc + e_\alpha A_z)] dp. \quad (193)$$

Так, для моноэнергетического распределения $\bar{F}_{\alpha 1}(p) = p_0^{-2} \delta(p - p_0)$, где p_0 — модуль импульса частиц, одинаковый для всех частиц сорта α , получим

$$j_\alpha = \begin{cases} -\frac{4\pi N_\alpha e_\alpha}{3m_\alpha^2 c \gamma_\alpha}, & A_z < -\frac{p_0 c}{e_\alpha}, \\ \frac{\pi N_\alpha e_\alpha}{3m_\alpha^2 c \gamma_\alpha} \left[6 \frac{e_\alpha A_z}{p_0 c} - 2 \left(\frac{e_\alpha A_z}{p_0 c} \right)^3 \right], & -\frac{p_0 c}{e_\alpha} < A_z < \frac{p_0 c}{e_\alpha}, \\ \frac{4\pi N_\alpha e_\alpha}{3m_\alpha^2 c \gamma_\alpha}, & A_z > \frac{p_0 c}{e_\alpha}. \end{cases} \quad (194)$$

Легко видеть, что правая часть (194) является гладкой функцией от A_z . Следовательно, зависимость j_α от A_z и соответствующий профиль потенциала Грэда–Шафранова $U(A_z)$ будут гладкими и при общем виде функционального множителя $\bar{F}_{\alpha 1}(p)$, поскольку общий вид плотности тока j_α можно получить интегрированием (194) по p_0 с весом $p_0^2 \bar{F}_{\alpha 1}(p_0)$.

Можно рассмотреть и негладкую функцию распределения более общего вида

$$f_\alpha \left(p, p_z + \frac{e_\alpha}{c} A_z \right) = \bar{F}_{\alpha i}(p) \left| \frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right| \left(\frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right)^{i-1}. \quad (195)$$

Для неё потенциал Грэда–Шафранова тоже вычисляется и записывается как

$$U(A_z) = \sum_\alpha \int_0^\infty \frac{8\pi^2 N_\alpha m_\alpha^2 c^3 p \bar{F}_{\alpha i}(p)}{\gamma_\alpha (i+1)(i+2)(i+3)} \left[\left(\frac{e_\alpha A_z/c + p}{m_\alpha c} \right)^{i+1} \times \left| \frac{e_\alpha A_z/c + p}{m_\alpha c} \right| \frac{(i+2)p - e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} + \left(\frac{e_\alpha A_z/c - p}{m_\alpha c} \right)^{i+1} \left| \frac{e_\alpha A_z/c - p}{m_\alpha c} \right| \frac{(i+2)p + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right] dp. \quad (196)$$

При $e_\alpha A_z > pc$ последнее выражение полностью согласуется с формулой (89). Естественно, можно взять функцию распределения в виде нескольких слагаемых вида (195) с различными значениями степени i и заменить в каждом из них $e_\alpha A_z/c$ на $e_\alpha A_z/c - P_i(p)$, где $P_i(p)$ — произвольные функции. В силу линейности соответствующая формула для потенциала Грэда–Шафранова, обобщающая (196), выписывается тривиально.

Наконец, рассмотрим ФРЧ, зависимость которой от обобщённого импульса определяется ступенчатой функцией Хевисайда (присутствие последней довольно естественно при описании границы плазмы с областью, занятой внешним магнитным полем и свободной от

плазмы):

$$f_\alpha \left(p, p_z + \frac{e_\alpha}{c} A_z \right) = \sum_i \bar{F}_{\alpha i}(p) H \left(\frac{p_z + e_\alpha A_z/c - P_i(p)}{m_\alpha c} \right). \quad (197)$$

Здесь $P_i(p)$ — некоторые функции, которые могут быть выбраны, по существу, произвольно, и по-прежнему предполагается неотрицательность функций $\bar{F}_{\alpha i}(p)$, гарантирующая неотрицательность ФРЧ f_α .

Соответствующий потенциал Грэда–Шафранова удастся привести к виду

$$U(A_z) = \sum_{\alpha, i} \int_0^\infty \frac{2\pi^2 N_\alpha p \bar{F}_{\alpha i}(p)}{3m_\alpha \gamma_\alpha} \left[\left(p + \frac{e_\alpha A_z}{c} - P_i(p) \right) \times \left| p + \frac{e_\alpha A_z}{c} - P_i(p) \right| \left(2p - \frac{e_\alpha A_z}{c} + P_i(p) \right) + \left(-p + \frac{e_\alpha A_z}{c} - P_i(p) \right) \left| -p + \frac{e_\alpha A_z}{c} - P_i(p) \right| \times \left(2p + \frac{e_\alpha A_z}{c} - P_i(p) \right) \right] dp. \quad (198)$$

Подынтегральное выражение в последней формуле (как функция A_z) равно константе при $e_\alpha A_z/c < P_i(p) - p$ и другой константе при $e_\alpha A_z/c > P_i(p) + p$, а между этими двумя константами — кубической функцией от A_z .

Для более общего вида ФРЧ (не пишем здесь для краткости функции $P_i(p)$),

$$f_\alpha \left(p, p_z + \frac{e_\alpha}{c} A_z \right) = \sum_i \bar{F}_{\alpha i}(p) H \left(\frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right) \left(\frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right)^i, \quad (199)$$

выражение для потенциала Грэда–Шафранова можно записать, воспользовавшись линейностью и очевидным соотношением

$$H \left(\frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right) \left(\frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right)^i = \frac{1}{2} \left| \frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right| \left(\frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right)^{i-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_z + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right)^i. \quad (200)$$

Тогда из формул (89) и (196) получаем

$$U(A_z) = \sum_{\alpha, i} \int_0^\infty \frac{8\pi^2 N_\alpha m_\alpha^2 c^3 p \bar{F}_{\alpha i}(p)}{\gamma_\alpha (i+1)(i+2)(i+3)} \times \left[\left(\frac{e_\alpha A_z/c + p}{m_\alpha c} \right)^{i+2} H \left(\frac{e_\alpha A_z/c + p}{m_\alpha c} \right) \left(\frac{(i+2)p - e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right) + \left(\frac{e_\alpha A_z/c - p}{m_\alpha c} \right)^{i+2} H \left(\frac{e_\alpha A_z/c - p}{m_\alpha c} \right) \left(\frac{(i+2)p + e_\alpha A_z/c}{m_\alpha c} \right) \right] dp. \quad (201)$$

Можно убедиться, что потенциал (201), вычисленный при $i = 0$, отличается от (198) при $P_i(p) = 0$ лишь на константу, так что формулой (201) можно пользоваться не только для положительных степеней i , но и для нулевой степени.

3.4.2. Токовые конфигурации с функциями распределения в виде δ -функций во внешнем магнитном поле. Рассмотрим

теперь разложение цилиндрически-симметричных функций распределения по δ -функциям от проекции обобщённого импульса (188) и соответствующий потенциал Грэда–Шафранова (189) в моноэнергетическом случае⁵, когда зависимости $\bar{F}_{zi}(p)$ также имеют вид δ -функций, $\bar{F}_{zi}(p) \propto \delta(p - p_0)$:

$$f_x \left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z \right) \propto \sum_i \delta(p - p_0) \delta \left(\frac{p_z + e_x A_z / c - P_i(p)}{m_x c} \right). \quad (202)$$

Тогда плотность тока (точнее, её составляющая для каждого отдельного i -го слагаемого) линейно зависит от векторного потенциала в интервале от $c(P_i(p_0) - p_0)/e_x$ до $c(P_i(p_0) + p_0)/e_x$ (причём производная dj_x/dA_z отрицательна) и равна нулю вне этого интервала. Потенциал Грэда–Шафранова (189) на том же интервале имеет вид параболы, выпуклой вверх, с вершиной при $A_z = P_i(p)$. Из-за того что парабола выпукла вверх, решение с локализованным магнитным полем, в котором ток определяется лишь одним сортом моноэнергетических частиц с одним слагаемым в сумме (188), построить невозможно (если таких парабол хотя бы две, между их вершинами может быть "потенциальная яма" и возможно локализованное решение), и все решения имеют вид либо симметричного токового слоя с антисимметричным магнитным полем — аналогично слою Харриса (когда значение первого интеграла U_0 лежит ниже вершины указанной параболы), либо антисимметричного токового слоя, помещённого во внешнее однородное магнитное поле (когда значение U_0 лежит выше вершины параболы), либо токового слоя на границе между однородной немагнитной плазмой и магнитным полем (когда значение U_0 совпадает по высоте с вершиной параболы).

Проанализируем последний случай, положив для краткости записи $P_i = 0$. Тогда при $A_z \rightarrow 0$, т.е. в глубине плазмы, магнитное поле тоже стремится к нулю и разложение потенциала (189) в окрестности $A_z = 0$ имеет вид

$$U_{z\delta} = \text{const} - A_z^2 \sum_i \int_0^\infty \frac{4\pi^2 N_x e_x^2 p \bar{F}_{zi}(p)}{c \gamma_x} dp + O(A_z^4), \quad (203)$$

что в линейном приближении приводит к однородному уравнению

$$\frac{dA_z}{dx} = \pm A_z \sqrt{\sum_i \int_0^\infty \frac{8\pi^2 N_x e_x^2 p \bar{F}_{zi}(p)}{c \gamma_x} dp}, \quad (204)$$

решения которого дают экспоненциально затухающий профиль векторного потенциала и, следовательно, магнитного поля $B_y(x)$.

Если лоренц-фактор γ_x у всех токонесящих частиц одинаков, то интеграл в последнем выражении можно записать через локальную концентрацию частиц n_x в той области, где A_z и магнитное поле близки к нулю:

$$\frac{dA_z}{dx} = \pm A_z \sqrt{\frac{4\pi n_x e_x^2}{m_x c^2 \gamma_x}}. \quad (205)$$

⁵ Поиск простейших решений для самосогласованных токовых слоёв с подобным использованием δ -функций восходит к работам [155, 158].

Отсюда видно, что масштаб затухания магнитного поля при углублении в плазму составляет c/ω_{px} . Заметим, что в построенном решении даже в однородной области плазма является сильно анизотропной.

Аналогичные симметричные, антисимметричные и переходные токовые слои можно построить и в моноэнергетическом случае для плоских функций распределения (190), положив $\bar{F}_{zi}(p) \propto \delta(p - p_0)$. Тогда в потенциале Грэда–Шафранова (191) слагаемое для каждого определённого i на отрезке от $c(P_i(p_0) - p_0)/e_x$ до $c(P_i(p_0) + p_0)/e_x$ имеет вид полуэллипса (выпуклого вверх), а вне этого отрезка равно нулю. Для заданного i в каждой точке пространства у частиц фиксированы полный импульс $p = p_0$, проекция $p_y = 0$ и проекция $p_z = P_i(p_0) - e_x A_z / c$. Это с точностью до знака единственным образом определяет и оставшуюся проекцию $p_x = \pm [p^2 - (P_i^2(p_0) - e_x A_z / c)^2]^{1/2}$. Отсюда ясно, что для заданного i через каждую точку пространства, в которой значение A_z попадает в интервал от $c(P_i(p_0) - p_0)/e_x$ до $c(P_i(p_0) + p_0)/e_x$, проходят две симметричные траектории частиц. На границах этого интервала находятся "точки поворота", в которых $p_x = 0$, а плотность тока обращается в бесконечность (простейшие токовые слои с подобной дельта-образной ФРЧ для граничной задачи, по-видимому, впервые рассматривались в работе [155]).

С помощью метода инвариантов для такой ФРЧ можно описать структуру границы между однородной двухпучковой плазмой (аналогичной рассмотренной в разделе 3.4.3) и вакуумом с постоянным магнитным полем. Для этого возьмём

$$\bar{F}_{zi} = \frac{1}{2m_x^2 c^2} \delta(p - p_0) \quad (206)$$

для одного слагаемого в сумме (190) и $\bar{F}_{zi} \equiv 0$ для остальных, а все $P_i(p_0)$ для простоты записи положим равными нулю. Функция распределения f_x при этом имеет вид

$$f_x \left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z, p_y \right) = \frac{1}{2m_x^2 c^3} \delta \left(\frac{p - p_0}{m_x c} \right) \delta \left(\frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c} \right) \delta \left(\frac{p_y}{m_x c} \right). \quad (207)$$

Потенциал Грэда–Шафранова (191) записывается как

$$U = \frac{4\pi N_x p_0}{m_x \gamma_x} \sqrt{p_0^2 - \frac{e_x^2 A_z^2}{c^2}} \quad (208)$$

и равен нулю при $A_z^2 > p_0^2 c^2 / e_x^2$, при этом подкоренное выражение в (208) отрицательно. Поскольку здесь мы хотим описать случай, в котором часть пространства занимает однородная плазма без магнитного поля, нужно выбирать такое решение уравнения Грэда–Шафранова, при котором в точке максимума потенциала, т.е. при $A_z = 0$, производная dA_z/dx равна нулю. Для этого значение первого интеграла уравнения Грэда–Шафранова нужно выбрать равным $U_{\max} = U(0)$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dA_z}{dx} \right)^2 + U(A_z) \equiv U(0) = \frac{4\pi N_x p_0^2}{m_x \gamma_x}. \quad (209)$$

Графики магнитного поля, концентрации, плотности тока и траектории электронов для этого решения изображены на рис. 19.

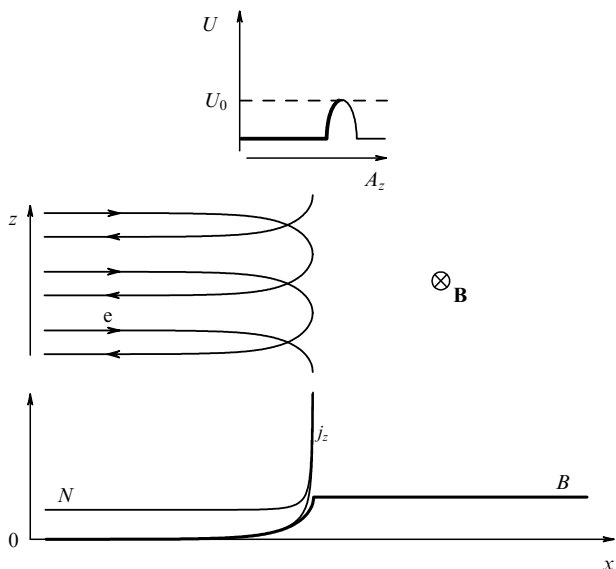


Рис. 19. Потенциал Грэда – Шафранова (208), траектории электронов и профили магнитного поля, плотности тока и концентрации частиц на границе между однородным магнитным полем и двухлучковой плазмой (при $U_0 = U_{\max}$).

В тех областях, где магнитное поле слабое, т.е. в окрестности $A_z = 0$, потенциал можно разложить в ряд:

$$U \approx \frac{4\pi N_x p_0^2}{m_x \gamma_x} \left(1 - \frac{e_x^2 A_z^2}{2c^2 p_0^2} \right), \quad (210)$$

откуда с использованием соотношения (209) получаем

$$\frac{dA_z}{dx} \approx \pm A_z \sqrt{\frac{4\pi N_x e_x^2}{m_x c^2 \gamma_x}}, \quad (211)$$

т.е. экспоненциальное затухание магнитного поля при смещении в глубь плазмы.

Заметим, что в построенном решении значения магнитного поля вдали от токового слоя при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ различаются не только знаком, а это означает, что в нём присутствует доля "внешнего" поля, создаваемого какими-то токами, текущими "на бесконечности" и не входящими в описываемую нами систему.

Вычислим локальное соотношение между плотностью энергии магнитного поля и плотностью энергии частиц. Из выражений (207) – (209) находим

$$\begin{aligned} \epsilon_B &= \frac{B^2/8\pi}{n_x m_x c^2 \gamma_x} = \\ &= \frac{p_0^2}{m_x^2 c^2 \gamma_x^2} \left(\frac{U_0 m_x \gamma_x}{4\pi N_x p_0^2} - \sqrt{1 - \frac{e_x^2 A_z^2}{c^2 p_0^2}} \right) \sqrt{1 - \frac{e_x^2 A_z^2}{c^2 p_0^2}}, \quad (212) \end{aligned}$$

где U_0 — значение первого интеграла уравнения Грэда – Шафранова, $U_0 = U(A_z) + B_y^2/2$. За исключением случая, когда рассматриваемая токовая структура находится во внешнем однородном магнитном поле, выполняется неравенство $U_0 \leq 4\pi N_x p_0^2 / m_x \gamma_x$, с учётом которого из формулы (212) находим, что $\epsilon_B < 1/4$.

Получим аналогичную оценку в общем случае, когда в рассматриваемой токовой структуре есть частицы с различными энергиями, а потенциал Грэда – Шафранова имеет общий вид (191). Соотношение между локальной плотностью энергии магнитного поля и локальной

плотностью энергии частиц тогда записывается как

$$\begin{aligned} \epsilon_B &= \left[\frac{U_0}{4\pi} - \sum_{x,i} 2N_x m_x c^2 \times \right. \\ &\times \left. \int_0^\infty \frac{p \bar{F}_{zi}(p)}{\gamma_x} \sqrt{p^2 - \left(\frac{e_x A_z}{c} - P_i(p) \right)^2} dp \right] \times \\ &\times \left(\sum_{x,i} \int_0^\infty \frac{2m_x^3 c^4 N_x p \bar{F}_{zi}(p) \gamma_x}{\sqrt{p^2 - \left(\frac{e_x A_z}{c} - P_i(p) \right)^2}} dp \right)^{-1}, \quad (213) \end{aligned}$$

где интегрирование чисто вещественное и интегралы вычисляются только по тем областям, в которых подкоренное выражение положительно. Пользуясь тем, что взвешенное среднее гармоническое положительных величин не превышает их среднего арифметического, можно записать оценку

$$\begin{aligned} \epsilon_B &\leq \left(\frac{U_0}{8\pi N_x m_x c^2} - \right. \\ &- \sum_{x,i} \int_0^\infty \frac{p \bar{F}_{zi}(p)}{\gamma_x} \sqrt{p^2 - \left(\frac{e_x A_z}{c} - P_i(p) \right)^2} dp \left. \right) \times \\ &\times \left(\sum_{x,i} \int_0^\infty \frac{p \bar{F}_{zi}(p)}{\gamma_x} \sqrt{p^2 - \left(\frac{e_x A_z}{c} - P_i(p) \right)^2} dp \right) \times \\ &\times \left(\sum_i \int_{p \in S_{xi}} m_x c p \bar{F}_{zi}(p) dp \right)^{-2}, \quad (214) \end{aligned}$$

где S_{xi} — множество таких $p > 0$, для которых $(e_x A_z / c - P_i(p))^2 \leq p^2$. Отсюда получаем

$$\epsilon_B \leq \frac{1}{4} \left(\frac{U_0}{8\pi N_x m_x c^2} \right)^2 \left(\sum_{x,i} \int_{p \in S_{xi}} m_x c p \bar{F}_{zi}(p) dp \right)^{-2}. \quad (215)$$

Далее, если рассматриваемая токовая структура не находится во внешнем однородном магнитном поле, то существует точка, в которой магнитное поле (а с ним и ϵ_B в этой точке) обращается в нуль. С учётом этого из формулы (213) имеем оценку сверху для величины U_0 , которая приводит к неравенству

$$\epsilon_B \leq \frac{1}{4} \left[\sum_{x,i} \int_0^\infty \frac{p}{m_x c \gamma_x} p \bar{F}_{zi}(p) dp \right]^2 \left(\sum_{x,i} \int_{p \in S_{xi}} p \bar{F}_{zi}(p) dp \right)^{-2} < \frac{1}{4}. \quad (216)$$

Заметим, что проведённые оценки являются точными в том смысле, что значения ϵ_B , близкие к 1/4, возможны. Последнее неравенство из (216) справедливо при условии, что функции распределения $F_{zi}(p)$ отличны от нуля только внутри множеств S_{xi} — иное означало бы, что магнитное поле в данной точке определяется в том числе частицами, траектории которых не проходят через плоскость с тем же x , и сравнивать локальные значения плотности тока и магнитного поля было бы бессмысленно (в частности, в ситуации, изображённой на рис. 19, магнитное поле существует и в той области, где вообще нет частиц).

Рисунок 19 соответствует ситуации, в которой величина U_0 в точности равна высоте максимума потенциала Грэда – Шафранова, $U_0 = U_{\max} \equiv 4\pi N_x p_0^2 / m_x \gamma_x$. Кратко рассмотрим, что изменится, если U_0 будет больше или меньше указанного значения. Если $U_0 < U_{\max}$, то изб-

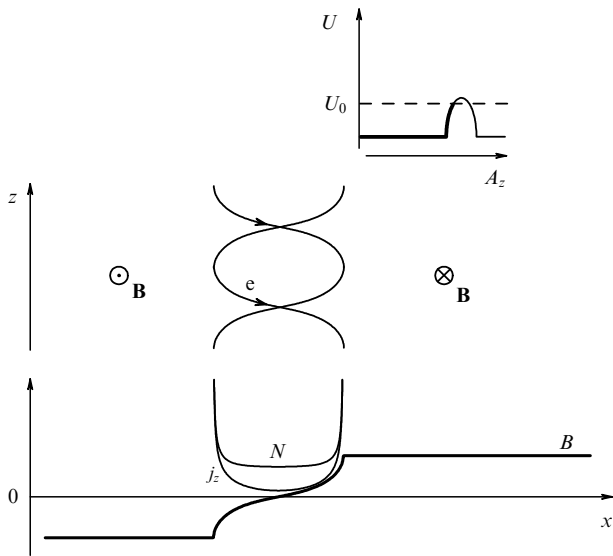


Рис. 20. Потенциал Грэда – Шафранова (208), траектории электронов и профили магнитного поля, плотности тока и концентрации частиц для слоя с антисимметричным магнитным полем (при $U_0 < U_{\max}$).

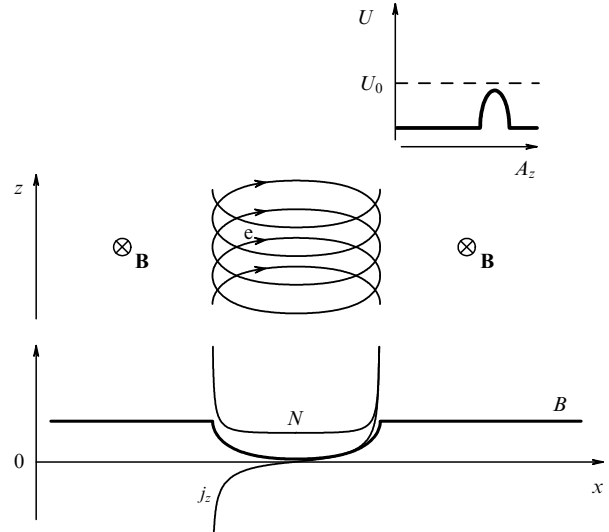


Рис. 21. Потенциал Грэда – Шафранова (208), траектории электронов и профили магнитного поля, плотности тока и концентрации частиц для слоя с симметричным магнитным полем (при $U_0 > U_{\max}$).

ражающая точка отразится от склона профиля потенциала Грэда – Шафранова, и мы будем иметь локализованную в пространстве токовую структуру и антисимметричное создаваемое ею самосогласованное магнитное поле, как показано на рис. 20. Профиль плотности тока симметричный, магнитного поля — антисимметричный. Ширина токовой структуры может быть как много больше гирорадиуса частиц в создаваемом ими на бесконечности магнитном поле (при U_0 , близком к U_{\max}), так и порядка гирорадиуса, и даже много меньше его при $U_0 \ll U_{\max}$. В последнем случае частицы движутся преимущественно вдоль оси z и в процессе движения отклоняются от неё лишь на малые углы.

Если $U_0 > U_{\max}$, то изображающая точка пройдёт через максимум потенциала Грэда – Шафранова, не останавливаясь, что соответствует локализованной токовой структуре, помещённой в однородное внешнее магнитное поле, как показано на рис. 21. Профиль плотности тока антисимметричный, магнитного поля — симметричный, частицы движутся по замкнутым траекториям. Токовая структура имеет ширину порядка гирорадиуса частиц во внешнем поле, если превышение U_0 над U_{\max} велико, и может иметь ширину много больше гирорадиуса частиц во внешнем поле, если U_0 близко к U_{\max} . В последнем случае магнитное поле в центре структуры становится много меньше внешнего магнитного поля.

Совмещая два решения, изображённых на рис. 19, можно получить решение, описывающее двухпотокую плазму, разделённую на две части областью с магнитным полем. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 22.

3.4.3. Граница между изотропной плазмой и однородным магнитным полем. В приведённых выше примерах решений, описывающих границу между однородной немагнитной плазмой и однородной областью с магнитным полем, плазма во всех точках пространства была существенно анизотропна. Построим теперь решение, в котором на периферии слоя плазма изотропна. Для этого возьмём ФРЧ плазмы в виде (197) с единственным

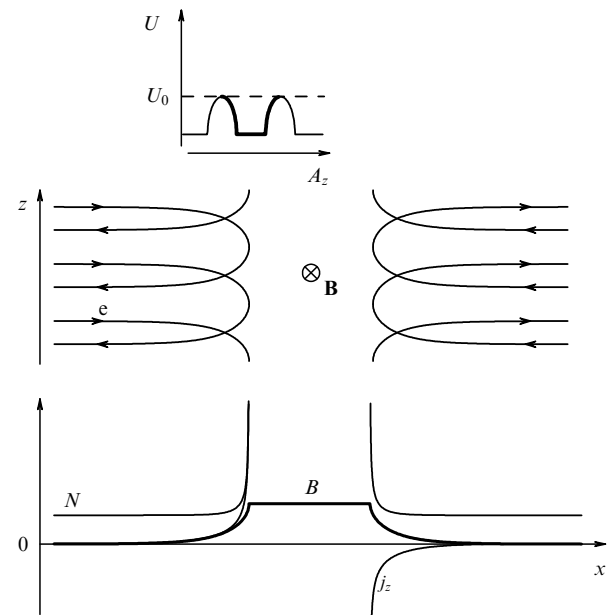


Рис. 22. Пример потенциала Грэда – Шафранова, траекторий электронов и профилей магнитного поля, плотности тока и концентрации частиц для двух пространственно разделённых фракций частиц (при $U_0 = U_{\max}$).

значением индекса i :

$$f_x \left(p, p_z + \frac{e_x A_z}{c} \right) = \bar{F}_{x0}(p) H \left(\frac{p_z + e_x A_z / c}{m_x c} \right). \quad (217)$$

При изменении $e_x A_z / c$ от отрицательных до положительных значений, много больших, чем средняя величина импульса $\langle p \rangle$, значение потенциала Грэда – Шафранова (198) $U(A_z)$ уменьшается на величину

$$\sum_x \frac{16\pi^2 N_x}{3m_x} \int_0^\infty \frac{\bar{F}_{x0}(p) p^4 dp}{\gamma_x}, \quad (218)$$

так что плотности энергии магнитного поля в вакууме и в плазме различаются на

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{4\pi N_{\alpha}}{3m_{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}_{z0}(p) p^4 dp}{\gamma_{\alpha}} &= \\ &= \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{2}{3} N_{\alpha} \frac{p^2}{2m_{\alpha}} \frac{1}{\gamma_{\alpha}} \bar{F}_{z0}(p) 4\pi p^2 dp, \end{aligned} \quad (219)$$

т.е., как и следовало ожидать, ровно на величину газокINETического давления изотропной плазмы. Примем ещё дополнительно предположение о том, что плазма в однородной области является не только анизотропной, но и максвелловской — это упрощает аналитические вычисления и соответствует интересному с практической точки зрения случаю равновесного распределения

$$\bar{F}_{z0}(p) = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi m_{\alpha} k_B T_{\alpha}}\right)^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_{\alpha} k_B T_{\alpha}}\right). \quad (220)$$

Здесь k_B и T_{α} — уже использованные константы, произведение которых имеет размерность энергии, а нормировочный множитель перед экспонентой выбран таким образом, чтобы концентрация частиц n_{α} в той области, где плазма однородна, при вычислении по формуле $n_{\alpha} = \int N_{\alpha} \bar{F}_{z0}(p) d^3p$ давала величину N_{α} .

Потенциал Грэда–Шафранова (198) в этом случае выражается через функцию ошибок (182):

$$U(A_z) = \sum_{\alpha} 2\pi N_{\alpha} k_B T \operatorname{erf}\left(\frac{e_{\alpha} A_z / c}{\sqrt{2m_{\alpha} k_B T}}\right). \quad (221)$$

Соответственно, профиль магнитного поля параметрически описывается формулами

$$x(A_z) = \int_0^{A_z} \left[2U_0 - \sum_{\alpha} 4\pi N_{\alpha} k_B T \operatorname{erf}\left(\frac{e_{\alpha} A' / c}{\sqrt{2m_{\alpha} k_B T}}\right) \right]^{-1/2} dA', \quad (222)$$

$$B(A_z) = \left[2U_0 - \sum_{\alpha} 4\pi N_{\alpha} k_B T \operatorname{erf}\left(\frac{e_{\alpha} A_z / c}{\sqrt{2m_{\alpha} k_B T}}\right) \right]^{1/2}, \quad (223)$$

а профиль концентрации частиц можно найти, непосредственно проинтегрировав выражение (217) с подставленной в него функцией (220):

$$n_{\alpha}(A_z) = \frac{N_{\alpha}}{2} + \frac{N_{\alpha}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{e_{\alpha} A_z / c}{\sqrt{2m_{\alpha} k_B T}}\right). \quad (224)$$

Из формул (223) и (224) легко увидеть, что выполняется соотношение

$$\frac{B^2}{8\pi} + \sum_{\alpha} n_{\alpha} k_B T = \text{const}, \quad (225)$$

которое формально совпадает с уравнением постоянства суммы магнитного и газокINETического давления в магнитогазостатике изотропной плазмы. Поясним происхождение результата (225), полученного для конкретного выбора функции распределения вида (220) и для конкретного способа "обрезания" этой функции распределения по закону (217). В общем случае плоского слоя можно написать

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} j_z = -\frac{dU}{dA_z}. \quad (226)$$

Домножив на $B_y/4\pi = -(dA_z/dx)/4\pi$ и проинтегрировав по x , получаем

$$-\frac{B_y^2}{8\pi} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{c} (-j_z B_y) dx = \frac{U}{4\pi} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2}. \quad (227)$$

Подынтегральное выражение $(-j_z B_y)/c$ — это плотность x -компоненты силы, действующей на плазму со стороны магнитного поля и равной разности значений величины $U/4\pi$ на краях слоя плазмы, заключённого между плоскостями $x = x_1$ и $x = x_2$ (по определению эта плотность является силой, действующей на единицу площади плазмы в слое). В интересующем нас статическом случае указанная сила должна быть равна разности плотности потоков x -компоненты импульса частиц через единичные площадки на плоскостях $x = x_2$ и $x = x_1$. В изотропном случае плотность потока компоненты импульса через единичную площадку, перпендикулярную направлению этой компоненты, можно отождествить с давлением. Распределение (220) устроено так, что при любом $p_z = \text{const}$ распределение частиц по p_x и p_y одинаково с точностью до зависящего от p_z общего множителя. Поэтому при "обрезании" распределения плоскостью $p_z = \text{const}$ по закону (217) соотношение между концентрацией и плотностью потока x -компоненты импульса частиц остаётся таким же, как в изотропном случае, и в формулу (225) входит величина $n_{\alpha} k_B T$, как было бы для изотропной плазмы.

Заметим, что, хотя входящая в выражения (223) и (224) функция erf антисимметрична по переменной A_z , скорости изменения магнитного поля и концентрации не одинаковы по разные стороны от границы раздела между плазмой и вакуумом. Это ясно из того, что в плазме магнитное поле меньше, чем в вакууме (или даже вообще уменьшается до нуля), т.е. в плазме величина dA_z/dx меньше. А значит, масштаб изменения, например, плотности тока (а с ней и других величин) больше при удалении от её максимума в сторону плазмы, чем в сторону вакуума. Пример профилей концентрации, магнитного поля и плотности тока для случая границы вакуума с немагнитной плазмой представлен на рис. 23.

Форма перехода между изотропной максвелловской плазмой и вакуумом с однородным магнитным полем, описываемая формулами (222) и (223) и изображённая на рис. 23, не является единственно возможной. Это понятно хотя бы из того, что в аргументе ступенчатой функции ФРЧ (197) можно взять $P_i(p)$ иначе, чем это сделано в законе (217). В частности, при линейной добавке $-\mu p$, где μ — константа, по модулю меньшая

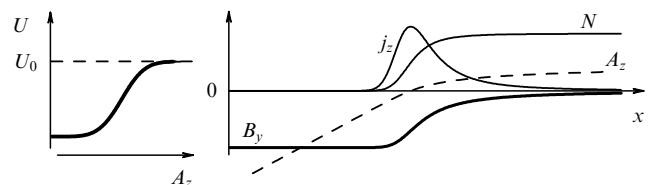


Рис. 23. Профиль потенциала Грэда–Шафранова (221) и зависимости A_z , B_y , j_z и N от координаты для решения (222)–(224), отвечающего несимметричному токовому слою на границе плазмы и вакуума с однородным магнитным полем.

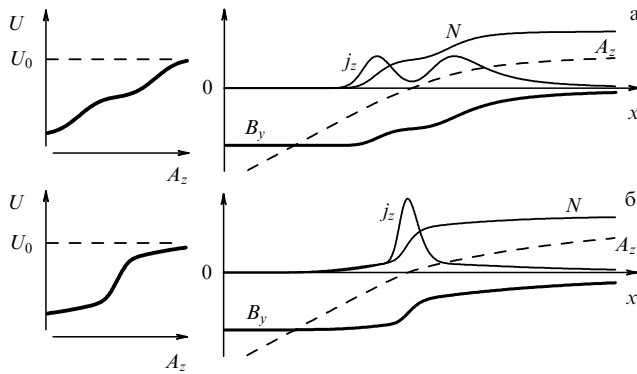


Рис. 24. Типичные профиль потенциала Грэда–Шафранова и зависимости A_z , B_y , j_z и N от координаты (а) для несимметрично расщеплённого токового слоя, отвечающего функции распределения (197) с двумя максвелловскими слагаемыми с равными температурами, но разными положениями "срезы" P_1 и P_2 , и (б) для двухмасштабного токового слоя, отвечающего функции распределения (197) с двумя максвелловскими слагаемыми с существенно различными температурами.

единицы, распределение принимает вид

$$f_x\left(p, p_z + \frac{e_x}{c} A_z\right) = \bar{F}_{x0}(p) H\left(\frac{p_z + e_x A_z/c + \mu p}{m_x c}\right) \quad (228)$$

и мы по-прежнему имеем изотропную плазму при $e_x A_z \rightarrow \infty$ и экспоненциально мало частиц при больших отрицательных значениях $e_x A_z$. Интеграл в (198) для максвелловского распределения (220) $\bar{F}_{x0}(p)$ в этом случае тоже берётся, т.е. форму потенциала Грэда–Шафранова $U(A_z)$ можно записать аналитически, но результат получается весьма громоздким, и поэтому здесь мы его не приводим.

Более простой способ получить отличную от (222), (223) форму перехода между максвелловской плазмой и вакуумом состоит в том, чтобы использовать в функции распределения вида (197) не одно слагаемое, а два одно-типных слагаемых с одинаковыми максвелловскими зависимостями $\bar{F}_{x1}(p) = \bar{F}_{x2}(p)$, но с разными не зависящими от p значениями величин "срезов" P_1 и P_2 . Тогда потенциал Грэда–Шафранова $U(A_z)$ будет представлять собой сумму двух сдвинутых по оси A_z функций erf , профили магнитного поля и концентрации по-прежнему будут монотонны, но будут иметь более сложный вид, чем описываемый формулами (222)–(224), а профиль плотности тока при достаточно большом различии P_1 и P_2 будет иметь два максимума разной ширины, как это качественно показано на рис. 24а.

Если же положить $P_1 = P_2$, но в качестве $\bar{F}_{x1}(p)$ и $\bar{F}_{x2}(p)$ использовать максвелловские функции с сильно различными температурами, то потенциал Грэда–Шафранова будет представлять собой сумму двух функций erf различной ширины, а профиль плотности тока будет состоять из центральной узкой компоненты и двух широких хвостов по обе стороны от неё (см. пример на рис. 24б). Естественно, "широкая" и "узкая" компоненты плотности тока могут быть образованы частицами плазмы как одного сорта, так и двух разных сортов.

Заметим, что хотя выше мы говорили о границе между изотропной немагнитной плазмой и вакуумом, точно такие же решения соответствуют границе между двумя областями изотропной плазмы с различ-

ными величинами магнитного поля — для этого к построенным решениям достаточно добавить однородную во всём пространстве изотропную компоненту плазмы (с максвелловским либо немасвелловским энергетическим распределением).

Использование негладких функций распределения для описания подобных границ с учётом самосогласованного поля переходных токовых слоёв представляется вполне естественным, во всяком случае эту возможность подтверждают их профили, приведённые на рисунках. Отметим, что именно с простейших решений подобного типа начиналось развитие кинетической теории самосогласованных токовых слоёв [155, 158, 211]. Аналитические решения для переходных слоёв на границе плазмы с гладкими функциями распределения также возможны, но пока мало исследованы.

4. Возможные приложения точных решений к интерпретации наблюдений токовых структур и результатов их численного моделирования

Достигнутый уровень аналитического понимания самосогласованных токовых структур может позволить качественно продвинуться в интерпретации их наблюдений и диагностике, скажем, в околоземной и солнечной плазме или в экспериментах с лазерной плазмой, а также в надлежащей трактовке результатов численного моделирования плазменных процессов, связанных с самосогласованными магнитными полями. Речь идёт, например, о пересоединении силовых линий магнитного поля, о строении токовых слоёв в присутствии нескольких фракций пролётных и захваченных частиц, об удержании плазмы на границе с областью сильного магнитного поля.

В последнее время особый интерес вызывает моделирование формирования бесстолкновительных ударных волн, в которых генерация самосогласованного магнитного поля играет принципиальную роль [54, 56, 60, 85, 96, 212]. Ряд подобных численных расчётов свидетельствует о существовании долгоживущих филаментов тока, которые в области фронта и за ним медленно сливаются и постепенно увеличивают свой размер (см., например, [44, 104, 212–214]).

На основе численных расчётов недавно было также показано [55, 67, 98, 215], что в современных экспериментах с лазерной плазмой достижимы условия, обеспечивающие формирование бесстолкновительных ударных волн. Подобные эксперименты уже начались и дали первые обнадеживающие результаты, свидетельствующие о возможности изучения процессов генерации магнитного поля и динамики филаментов тока в этих условиях [215]. Ниже мы не будем касаться задач об ударных волнах ввиду сложного поведения ансамбля филаментов в них, а рассмотрим задачи для токовых структур, условия реализации которых допускают их индивидуальное проявление.

4.1. Особенности токовых конфигураций, ведущих к пересоединению силовых линий магнитного поля

Начнём с проблемы описания токовых слоёв и филаментов, которые порождают пересоединение силовых линий магнитного поля. Это явление, по-видимому, имеет бесстолкновительный характер, так что в лаборатории реализовать и наблюдать его трудно.

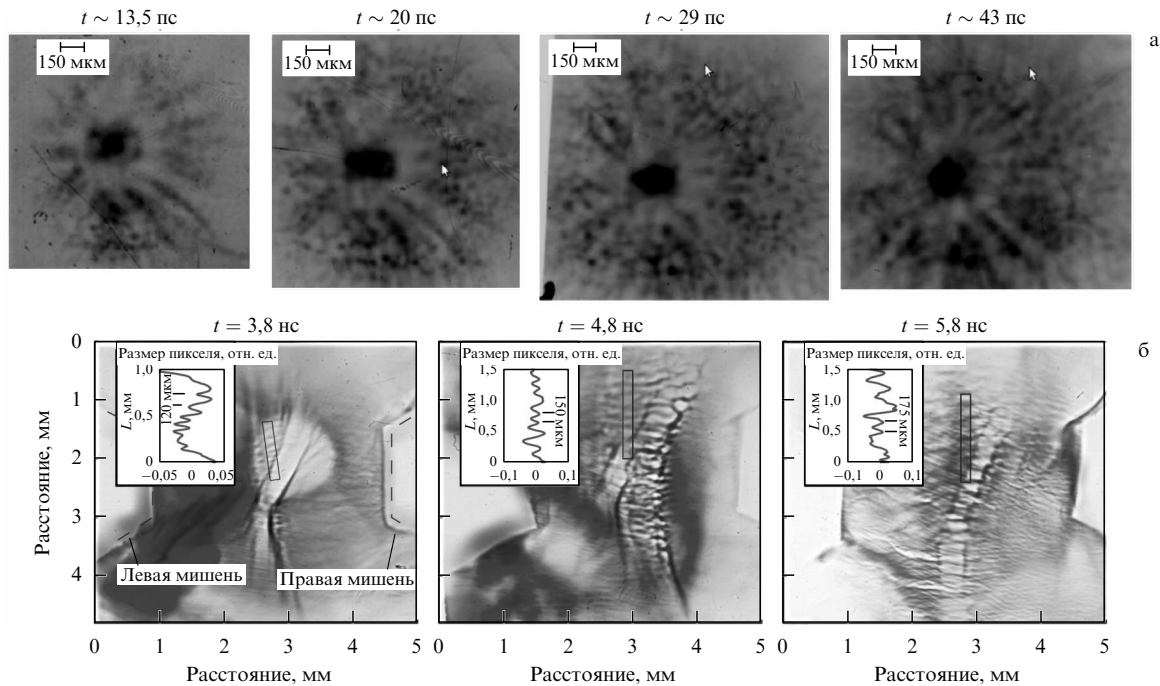


Рис. 25. Эволюция структуры магнитного поля, отвечающая развитию вейбелевской неустойчивости в потоках лазерной плазмы и наблюдаемая методом протонно-эмиссионной томографии (а) в эксперименте [217, 218, 235] на пикосекундных временах на периферии потока и (б) в эксперименте [68] на наносекундных временах в области пересечения двух потоков.

В лазерной плазме его экспериментальное изучение стало возможным только недавно [46, 68, 216–218]. Пример эволюции структуры магнитного поля, обусловленной формированием филаментов тока в потоке лазерной плазмы, приведён на рис. 25. Что касается лабораторной (не лазерной) плазмы достаточно низкого давления, создаваемой в больших ловушках (например, MRX, RSX, TC-3D, KI-1), то разрешение пространственно-временной динамики магнитного поля на бесстолкновительных масштабах в ней является пока ещё недостаточным для детального изучения особенности формирования и эволюции самосогласованных токовых структур (см., например, [61, 64, 65, 70, 219, 220]). Тем не менее экспериментальные исследования в этом направлении продолжают развиваться (один из результатов приведён на рис. 26). В любом случае получаемая плазма может быть существенно неравновесной и исходные токовые слои могут иметь далеко не максвелловские ФРЧ.

Проводимые в последние годы наблюдения различных токовых слоёв в магнитосферной плазме также показывают, что ФРЧ в них могут быть немаксвелловскими и различными для разных сортов частиц, а пространственная структура плотности тока — несимметричной, изрезанной и мультимасштабной, в частности, включающей расщеплённые и вложенные токовые слои (см. о них раздел 4.2). Примером подобных наблюдений служат спутниковые наблюдения токового слоя в хвостах магнитосфер Земли и Юпитера [17, 34, 193–195, 221–225]. Разнообразие ФРЧ и пространственных конфигураций магнитного поля, связанных с самосогласованными токовыми структурами, представляется естественным также в астрофизической плазме: в активных областях хромосфер и корон магнитных звёзд, в токовых слоях, формируемых звёздным ветром, при контакте между областями замагниченной плазмы с различными направ-

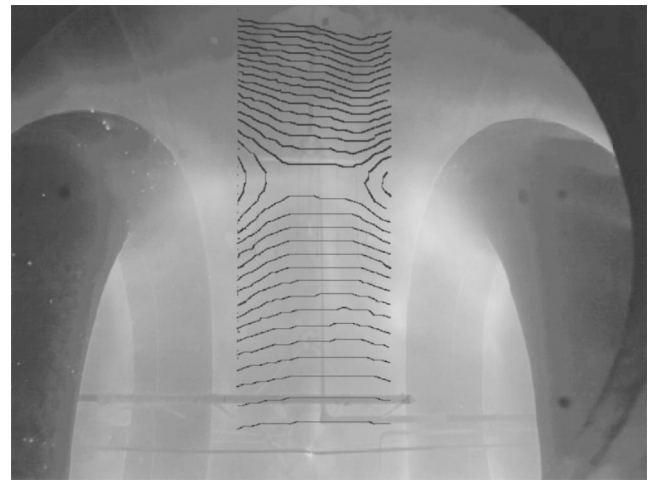


Рис. 26. Типичное распределение плазмы (показано фоном) и картина силовых линий магнитного поля (показаны в разрезе) в окрестности токового слоя, который образован в области пересоединения силовых линий магнитного поля на установке MRX (Принстон, www.pppl.gov) [46, 236, 237].

лениями магнитного поля в двойных системах с аккрецией, в том числе в аккреционных дисках и джетах, отвечающих нейтронным звёздам и чёрным дырам, и пр. (см., например, [47, 57, 226–230]).

Во всех перечисленных системах явление пересоединения силовых линий магнитного поля — одно из наиболее интересных и обсуждаемых (см., например, [61, 231–234]). Ход процесса пересоединения, интерпретация соответствующих данных и осмысление результатов посвящённых ему численных расчётов во многом зависят от начальной конфигурации токовых слоёв или филаментов и от согласованных с ними ФРЧ. До сих пор,

однако, начальные токовые структуры зачастую берутся в форме слоёв Харриса и пинчей Беннетта (или их простейших обобщений), а ФРЧ — в виде одно- или двухтемпературных максвелловских распределений, в том числе сдвинутых на гидродинамическую скорость потока соответствующей фракции частиц. Вместе с тем, согласно разделам 2 и 3, аналитическое задание самосогласованных начальных условий возможно для гораздо более широкого класса конфигураций магнитного поля, тока и ФРЧ. Даже для структур типа Харриса или Беннетта согласованное энергетическое распределение частиц может быть выбрано в значительной мере произвольным, немаксвелловским, что, вероятно, позволит более адекватно учесть те или иные физические условия, предшествующие пересоединению.

Таким образом, реальной становится задача исследовать, зависит ли и как зависит процесс пересоединения от начального профиля токовых слоёв и филаментов и от начальной ФРЧ, согласованной с ними. Интерес представляют скорость пересоединения, эффективность генерации ускоренных частиц и волн в плазме, параметры токовой конфигурации и ФРЧ после окончания процесса. Всё это может помочь понять физическую ситуацию и эффекты, наблюдаемые или ожидаемые при пересоединении силовых линий магнитного поля токовых слоёв или филаментов как в лаборатории, так и в космосе.

4.2. Двухмасштабные и расщеплённые токовые слои в магнитосферной плазме

Другой актуальный класс задач, требующий вариативности ФРЧ и согласованных с ними профилей тока, состоит в выяснении (и объяснении) сложной структуры токовых слоёв в ряде областей магнитосфер Земли (рис. 27), Юпитера и Солнца.

Для Солнца это, прежде всего, места накопления энергии плазмы в областях с сильно неоднородным направлением магнитного поля, в которых время от времени происходят корональные вспышки [47, 72, 76, 238, 239], и области искривлённого гелиосферного (экваториального) токового слоя, которые, по данным миссий Voyager-1 и Voyager-2, также демонстрируют активность, скорее всего, благодаря тому же явлению пересоединения силовых линий магнитного поля [240–242]. В обоих случаях есть основания предполагать наличие долгоживущих двух- или многогорбых (изрезанных) токовых слоёв с изменяющимися знаками тока и магнитного поля (при этом структура и характер их ФРЧ остаются неясными).

Несколько больше известно о так называемых двухмасштабных и расщеплённых токовых слоях, наблюдаемых при помощи околоземных космических аппаратов (Geotail, Cluster, Interball, THEMIS, MMS) в хвосте земной магнитосферы [17, 34, 45, 73, 74, 77, 222, 225]. Установлено, что в этих токовых слоях ФРЧ для разных фракций ионов и электронов сильно различаются, являются анизотропными и, вообще говоря, немаксвелловскими, например двухтемпературными. Слои демонстрируют хорошую устойчивость, несмотря на наличие (или благодаря наличию?) внешних возмущений в виде медленно меняющихся магнитных полей и внешних потоков частиц, в конечном счёте обусловленных солнечным ветром. Структура токовых слоёв существенно зависит от фракции захваченных частиц и от характера и соотношений различных ионных фракций пролётных

частиц. Траектории различных частиц могут кардинально различаться, а накопление или истощение тех или иных фракций частиц может приводить к дополнительной эволюции токовых слоёв.

Мы не будем останавливаться на этих вопросах подробнее, отсылая читателя к имеющимся многочисленным обзорам (например, см. [34, 35, 77] и ссылки там). Отметим также, что, согласно данным космических аппаратов Voyager-2 и Galileo, расщеплённый токовый слой иногда возникает и в магнитосфере Юпитера, причём толщина раздвоенного токового слоя может быть меньше, чем толщина одинарного [194, 195].

До сих пор происхождение расщеплённых токовых слоёв остаётся загадочным, а их аналитическое описание базируется на немногочисленных модификациях максвелловского распределения, различных для различных фракций ионов и обеспечивающих анизотропию их давления в плоскости, ортогональной магнитному полю, или на различных численных (МГД и PIC) моделях, так или иначе апеллирующих к простейшим обобщениям слоя Харриса и максвелловской ФРЧ. Расширение класса аналитических моделей сложно устроенных токовых слоёв, продемонстрированное в разделах 3.1–3.3, может позволить существенно продвинуться в решении указанных задач.

4.3. Токовые структуры с внешним магнитным полем на границе двух областей плазмы с различными параметрами

Ещё одной важной и давно поставленной задачей является описание границы между бесстолкновительной плазмой и областью, занятой внешним (заданным) магнитным полем и практически свободной от плазмы [8, 155, 158, 186, 211]. В более общей постановке задачи это вопрос о структуре границы между двумя полупространствами, занятыми однородной плазмой с различными параметрами и содержащими внешнее магнитное поле, пусть однородное для простоты. В плоскостной геометрии переходный токовый слой, создавая собственное однородное магнитное поле вне себя, ослабляет внешнее магнитное поле в одном полупространстве и усиливает в другом. Вообще говоря, через слой может проходить заданный поток частиц, однако аналитическое описание согласованных токовых слоёв при этом отягощающем условии ещё не проводилось и поэтому здесь не обсуждается. Как было показано в разделе 3.4 на примере модельных ФРЧ, профили переходного слоя во внешнем магнитном поле могут быть весьма разнообразными, но в любом случае подчиняются уравнению баланса (58) и должны обеспечивать перепад газокINETического давления плазмы, равный разности магнитных давлений по сторонам слоя. При этом, согласно разделам 2.2 и 2.6, вполне возможны и даже более естественные конфигурации переходного слоя с широким силовыми линиями магнитного поля.

Данные о наблюдениях такого рода структур в магнитосфере Земли содержатся в ряде обзоров, например, [45, 75]. В экспериментах с лазерной плазмой исследование токовых слоёв на указанной границе "плазма – магнитное поле" пока возможно только для начальной нестационарной стадии их формирования. Как уже отмечалось в двух предыдущих разделах, теоретический анализ подобных задач проводится в основном либо с

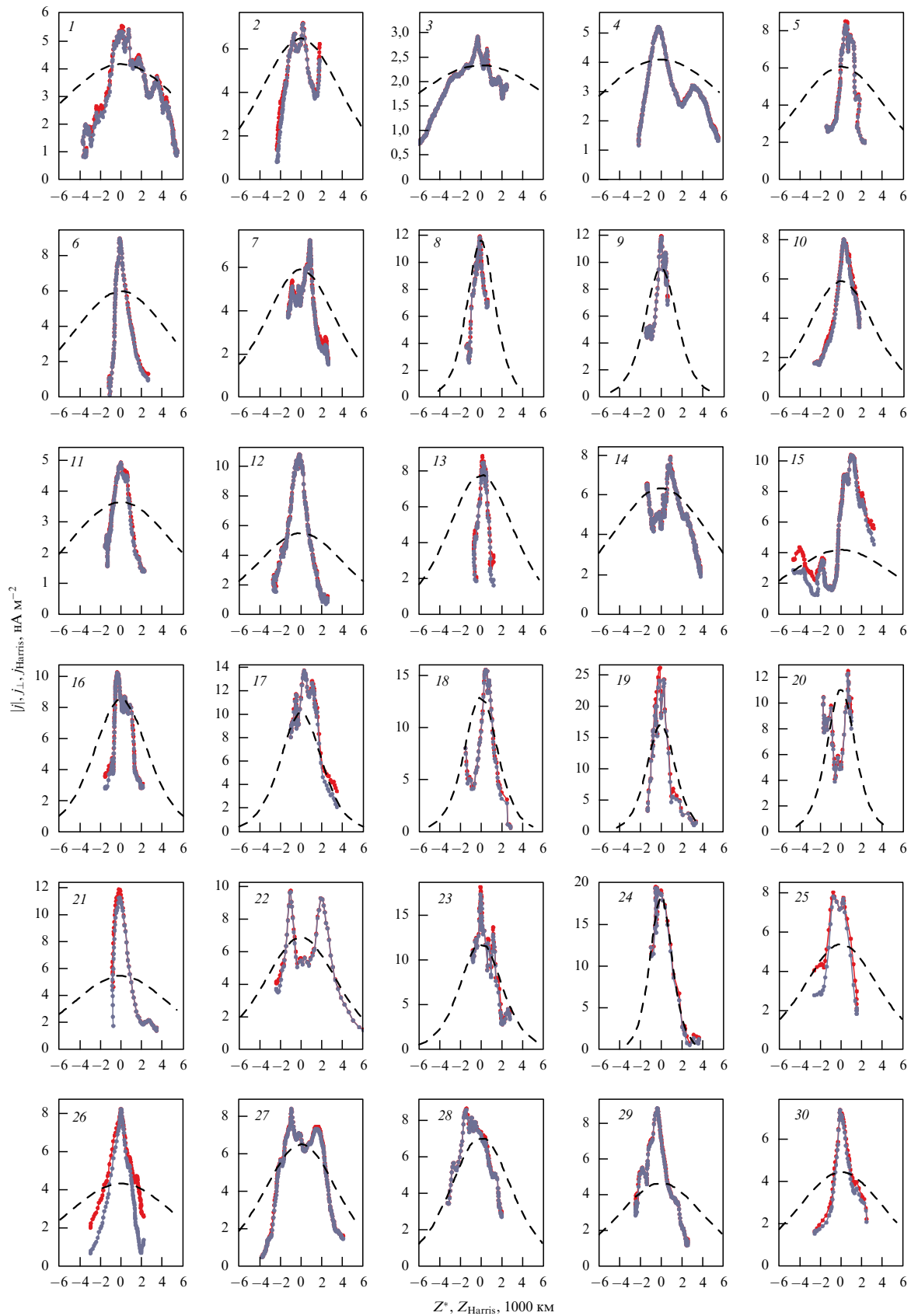


Рис. 27. (В цвете онлайн.) Примеры профилей токовых слоёв — зависимостей плотности тока j (синие кривые) и её поперечной компоненты j_{\perp} (красные кривые) от эффективной высоты, — наблюдаемых системой спутников Cluster [221]. Штриховая линия соответствует модельному слою Харриса.

использованием крайне ограниченных кинетических моделей переходных слоёв, либо в МГД-приближении, либо путем PIC-моделирования [8, 68, 186, 243–245].

Поэтому расширение класса аналитических кинетических моделей переходных токовых слоёв крайне желательно.

К сожалению, нам известны лишь негладкие ФРЧ, допускающие произвол в энергетическом распределении частиц при аналитическом описании указанных переходных токовых слоёв. Тем не менее, хотя общее представление о возможных профилях и типичных ФРЧ для переходных слоёв пока трудно составить, уже на основе решений из раздела 3.4 можно утверждать, что такие слои могут быть весьма разнообразными — несимметричными, многомасштабными, со сменой направления плотности тока и др. При этом возможен довольно резкий, с масштабом порядка гирорадиуса типичных частиц слоя, переход от области сильного магнитного поля с разрежённой плазмой в область более слабого поля с фактически изотропной ФРЧ. Подобные слои, иногда называемые тонкими, вызывают особый интерес [34, 35], и есть все основания надеяться на прогресс аналитической теории в данном направлении.

4.4. Спектрально-угловые свойства синхротронного излучения токовых слоёв со степенными энергетическими распределениями частиц

Аналитические выражения для анизотропной ФРЧ с достаточно произвольной зависимостью от энергии позволяют находить качественные закономерности в тех свойствах самосогласованных токовых конфигураций, которые связаны с особенностями углового распределения различных энергичных фракций частиц. В данном, заключительном, разделе мы остановимся на одном из таких важных свойств релятивистских самосогласованных токовых слоёв — их синхротронном излучении в собственном магнитном поле, которое создано самими излучающими частицами (электронами). В этом случае, в отличие от обычного для теории синхротронного излучения случая однородного внешнего магнитного поля, распределение частиц обязано быть анизотропным, чтобы создавать ток, поддерживающий собственное магнитное поле. В результате излучению токового слоя навязывается определённая (дополнительная) анизотропия. Это обстоятельство существенно, в частности, тогда, когда по информации об анизотропии спектра наблюдаемого синхротронного излучения требуется судить об анизотропном распределении излучающих частиц. Последнее важно, например, в задачах диагностики релятивистской плазмы и магнитных полей различных астрофизических объектов, таких как релятивистские джеты, бесстолкновительные ударные волны, экваториальные токовые слои, образованные пульсарным ветром в магнитосфере нейтронной звезды, и др. [57, 58, 68, 95, 97, 98, 218, 235, 244, 246–253].

Для определённости ограничимся случаем полистепенного энергетического распределения частиц, которое характерно для широкого круга ситуаций в неравновесной релятивистской плазме и, как обычно считается, однозначно соответствует полистепенному спектру синхротронного излучения [254, 255]. Нашей непосредственной целью будет демонстрация различий в излучении ансамбля частиц, формирующих самосогласованное магнитное поле, и аналогичного изотропного ансамбля частиц с тем же энергетическим распределением, помещённого во внешнее магнитное поле напряжённостью порядка максимальной напряжённости поля рассматриваемой магнитостатической структуры. А именно, воспользуемся проведённым в разделе 3.1 анализом токовых слоёв с полиномиальным потенциалом Грэда–Шафранова и сравним излучение ансамблей частиц с двумя функциями распределения: в виде суперпозиции трёх согласованных компонент, имеющих степенную зависи-

мость от обобщённого импульса с индексами 0, 2 и 4, в собственном магнитном поле и в виде суперпозиции соответствующих степенных компонент, усреднённых по углу и, следовательно, зависящих только от энергии, во внешнем магнитном поле [256]. Покажем, что спектрально-угловые различия в излучении этих двух ансамблей значительны для широкой области соотношений между коэффициентами указанных степенных разложений; в частности, различным может быть число изломов в спектре. Обобщая этот пример, приходим к заключению о том, что при наблюдении под различными углами спектр собственного синхротронного излучения, выходящего из самосогласованных токовых слоёв релятивистской плазмы, может содержать различное число доминирующих степенных компонент, часть из которых может отсутствовать среди доминирующих степенных компонент излучения изотропного ансамбля частиц с таким же распределением по энергии.

В качестве модельного возьмём нейтральный антисимметричный токовый слой с неоднородностью вдоль оси x , в котором магнитное поле направлено вдоль оси y , а векторный потенциал и ток — вдоль оси z . Пусть распределение электронов является полиномиальной функцией проекции обобщённого импульса на ось z и лоренц-фактора γ в интервале $(\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$:

$$F = \gamma^{-\alpha-2} \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^{d-i} H_{ij} \gamma^j \left(\frac{p_z + eA_z/c}{mc} \right)^i. \quad (229)$$

Здесь показатель степени α и коэффициенты разложения H_{ij} — постоянные.

Ограничимся для простоты случаем $d = 4$, положив также $H_{ij} = 0$ для нечётных индексов i или j . Таким образом, рассматриваемая токовая структура характеризуется шестью коэффициентами $H_{00}, H_{02}, H_{04}, H_{20}, H_{22}, H_{40}$ и одним степенным индексом α (далее для определённых вычислений потребуется условие $\alpha > 13/3$). Некоторые из коэффициентов H_{ij} могут быть отрицательными, однако их выбор ограничен условием неотрицательности функции распределения (229) для всех лоренц-факторов в интервале $(\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$ и всех направлений скорости электронов. Вводя явно полярный угол θ между направлением скорости электрона и осью z (направлением тока), запишем указанное распределение как сумму слагаемых с различными степенями лоренц-фактора:

$$F = \gamma^{-\alpha-2} \left[H_{00} + H_{02}\gamma^2 + H_{04}\gamma^4 + (H_{20} + H_{22}\gamma^2) \left(\gamma \cos \theta + \frac{eA_z}{mc^2} \right)^2 + H_{40} \left(\gamma \cos \theta + \frac{eA_z}{mc^2} \right)^4 \right]. \quad (230)$$

Предположим, что оптическая толщина токового слоя много меньше единицы, а коэффициент преломления образующей его разрежённой плазмы близок к единице. Тогда излучение слоя в интервале частот $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ с границами $\omega_{\min, \max} = (1/2)\omega_B \gamma_{\min, \max}^2$ определяется суммой синхротронных излучательных способностей, отвечающих отдельным степенным компонентам распределения со спектральным индексом ν : $F_\nu^{(i)} = f_\nu^{(i)}(A_z) \gamma^{-\nu-2} \cos^i \theta$, где $i = 0, 2, 4$. Учтём, что релятивистская частица ($\gamma \gg 1$) излучает в основном в узкий конус углов вокруг собственной скорости: для интервала частот, в котором сосредоточена основная мощность излучения, спектральная интенсивность излучения в единственный телесный угол экспоненциально уменьшается как

функция угла между скоростью и направлением наблюдения, если величина этого угла превышает γ^{-1} [162]. Как известно (см., например, [257, 258]), это означает, что анизотропия синхротронного излучения наследуется от анизотропии распределения частиц по импульсам и излучательная способность плазмы токового слоя (в расчёте на единицу объёма) на частоте ω имеет вид [254, 255]:

$$a_{\omega}^{(v)} = cm^2 |e|^3 M(v) f_v^{(i)}(A_z) \cos^i \theta |B \sin \chi| \left(\frac{\omega}{3\omega_B} \right)^{-(v-1)/2}. \quad (231)$$

Здесь χ — угол между магнитным полем и направлением на наблюдателя, $\omega_B = |eB \sin \chi / mc|$ — эффективная гиро-частота, M — зависящий от индекса v множитель:

$$M(v) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi(v+1)} \Gamma\left(\frac{3v-1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3v+19}{12}\right), \quad (232)$$

где Γ обозначает гамма-функцию и всюду предполагается, что выполнено неравенство $v > 1/3$ (именно с ним связано упомянутое выше ограничение на индекс α).

Таким образом, характеризующая токовый слой излучательная способность с точностью до не зависящего от частоты множителя имеет вид

$$a_{\omega} \propto (a_2 \omega^2 + a_1 3\omega_B \omega + a_0 (3\omega_B)^2) \left(\frac{\omega}{3\omega_B} \right)^{(1-\alpha)/2}, \quad (233)$$

т.е. разбивается на три степенные компоненты с амплитудами

$$\begin{aligned} a_0 &= \left(H_{00} + H_{20} \frac{e^2 A_z^2}{m^2 c^4} + H_{40} \frac{e^4 A_z^4}{m^4 c^8} \right) M(\alpha), \\ a_1 &= \left(H_{02} + H_{20} \cos^2 \theta + (H_{22} + 6H_{40} \cos^2 \theta) \frac{e^2 A_z^2}{m^2 c^4} \right) M(\alpha - 2), \\ a_2 &= (H_{04} + H_{22} \cos^2 \theta + H_{40} \cos^4 \theta) M(\alpha - 4). \end{aligned} \quad (234)$$

Предполагаемая антисимметричная пространственная зависимость плотности тока и связанной с ним компоненты векторного потенциала A_z находится из уравнения Грэда–Шафранова (см. раздел 3.1) с биквадратным потенциалом, причём ввиду антисимметрии имеем $H_{ij} = 0$ для нечётных i и удобна такая калибровка векторного потенциала, при которой его нулевое значение отвечает максимальному значению магнитного поля. С учётом этого выше и были опущены все слагаемые с нечётными степенями A_z , вклад которых в излучение всё равно исчезнет после интегрирования по слою. Кроме того, для простоты мы не рассматриваем излучение из тех областей, в которых магнитное поле существенно слабее максимального и которые дают незначительный вклад в полное излучение, а следовательно, не могут изменить качественно его спектрально-угловые свойства.

Каждое из трёх слагаемых в излучательной способности (233), (234) обладает собственной угловой зависимостью. При этом от направления наблюдения зависят величины характерных частот

$$\omega_1 = 3\omega_B \left| \frac{a_0}{a_1} \right|, \quad \omega_2 = 3\omega_B \left| \frac{a_1}{a_2} \right|, \quad (235)$$

на которых сравниваются соответственно вклады первого и второго либо второго и третьего слагаемых, т.е. происходят изломы в наблюдаемом спектре. При наблю-

дении в определённом направлении некоторые степенные компоненты излучательной способности могут вообще не проявляться. Например, амплитуда промежуточного слагаемого a_1 мала, если мала величина компоненты векторного потенциала A_z и выполняется условие $\cos^2 \theta \simeq -H_{02}/H_{20} \leq 1$. Однако роль такой компоненты при формировании излучения в других направлениях может быть хорошо заметна.

Наличие "скрытых" компонент в излучении соответствуют ситуации, в которых одно из слагаемых a_i в синхротронной излучательной способности a_{ω} оказывается достаточно малым при усреднении по телесному углу: $\langle a_i \rangle_{\theta} \equiv (1/2) \int_0^{\pi} a_i(\theta) \sin \theta d\theta \simeq 0$. При этом и распределение частиц по энергиям (или, что то же самое, по величинам лоренц-фактора γ), получаемое из усреднённого по телесному углу распределения (230), не содержит компоненту, пропорциональную $\gamma^{-\alpha+2i}$ и соответствующую указанной a_i . В то же время такая "скрытая" компонента, не выявляемая из анализа распределения частиц по энергиям, для определённых углов наблюдения может быть доминирующей в логарифмически широком интервале частот.

Поясним данное утверждение на примере пространственно-периодического либо локализованного токового слоя, для частиц которого мала (скрыта) средняя компонента в распределении по энергиям, что имеет место при выполнении условий $H_{20} \simeq -3H_{02}$ и $H_{22} \simeq -2H_{40}$. При этом промежуточная компонента излучательной способности

$$a_1 \approx \left(H_{02} + 6H_{40} \frac{e^2 A_z^2}{m^2 c^4} \right) \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) M(\alpha - 2) \quad (236)$$

исчезает при усреднении по телесному углу, но тем не менее может быть заметной для тех направлений наблюдения, задаваемых углом θ , для которых величина $\cos^2 \theta$ достаточно далека от $1/3$. Диапазон таких углов определён неравенством $a_1^2(\theta)/a_2(\theta)a_0 \geq w \geq 10$, где $w = \omega_2/\omega_1$ — отношение введённых выше частот (235) ω_2 и ω_1 , являющихся верхней и нижней границами для спектральной области, где промежуточная компонента вносит определяющий вклад в излучение.

Для плоского пространственно-периодического токового слоя, где коэффициенты H_{00} , H_{20} , H_{40} и H_{04} положительны, указанное условие преобладания слагаемого с a_2 принимает вид

$$w \frac{1 + (H_{40}/H_{04})(\cos^4 \theta - 2\cos^2 \theta)}{(\cos^2 \theta - 1/3)^2} < \frac{\mu}{\kappa_0}. \quad (237)$$

(Поскольку основной вклад в излучение дают области с близким к нулевому векторным потенциалом, приведённое неравенство не зависит от конкретного вида профиля периодического токового слоя.) Здесь $\mu = M^2(\alpha - 2)/M(\alpha)M(\alpha - 4)$, $\kappa_0 = H_{00}H_{04}/H_{20}^2$.

Неотрицательность ФРЧ для всех величин и направлений импульсов гарантирована, если выполнены неравенства $\kappa_0 \geq 1/36$ и $H_{04}/H_{40} \geq 1$. Если значения этих соотношений для параметров распределения примерно вдвое отстоят от указанных границ, то для типичных значений индекса $\alpha = 5-10$ (которым соответствует $\mu \simeq 0,25-0,75$) промежуточная, скрытая угловым усреднением компонента является доминирующей в интервале углов $\theta \lesssim 30^\circ$ и $180^\circ - \theta \lesssim 30^\circ$ для логарифмически широкого интервала частот (при $w \geq 10$). Для близких к поперечным углов наблюдения θ , точнее, при $\cos^2 \theta \lesssim 1/3$, в зависимости излучательной способности от частоты на интервале $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ присутствует только один излом.

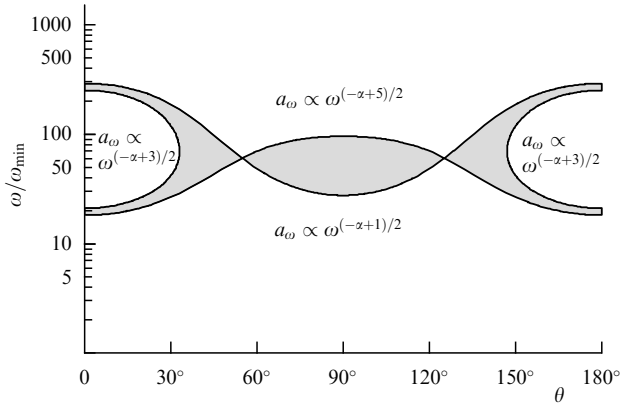


Рис. 28. Области частот, в которых преобладают отдельные степенные компоненты синхротронной излучательной способности (233) a_ω , в зависимости от направления наблюдения, характеризующегося полярным углом θ относительно направления тока. Графики построены для случая пространственно-периодической токовой структуры с ФРЧ вида (229), при которой угловое усреднение скрывает промежуточную компоненту излучения a_1 . Критерий преобладания — компонента обеспечивает больше половины вклада во всю величину a_ω . Закрашены переходные области, в которых выделить одну доминирующую компоненту невозможно. Частоты по вертикальной оси отложены в логарифмическом масштабе. Значения параметров: $\alpha = 7,5$, $\kappa_0 = 1/25$, $H_{04}/H_{40} = 2$.

В то же время для малых углов θ , т.е. для направлений наблюдения, близких к направлению тока, эта зависимость имеет два широко разнесённых излома: ω_1 и ω_2 . В интервале между ними преобладает слагаемое с a_1 и степенной спектр излучения характеризуется индексом $(3 - \alpha)/2$, который соответствует отсутствующей в распределении частиц по энергиям степенной компоненте с индексом $2 - \alpha$. Области частот с преобладанием той или иной компоненты излучательной способности в зависимости от угла представлены на рис. 28.

Для локализованного токового слоя условие преобладания "скрытого" слагаемого a_1 подробно рассмотрено в работе [256]. Такой слой возможен для распределения частиц (230), если в нём два коэффициента H_{20} и H_{40} отрицательны, а остальные — положительны, и тогда профиль самосогласованного векторного потенциала является монотонным: $A_z = A_{\max} \tanh(x/x_0)$, где максимальное значение задаётся равенством $(eA_{\max}/mc)^2 = 2(\alpha - 2)\gamma_{\min}^2/5(\alpha - 4) - H_{20}/2H_{40} > 0$. Промежуточное слагаемое a_1 может вносить определяющий вклад в излучательную способность (231) для логарифмически широкого интервала частот (ω_1, ω_2) в направлениях наблюдения, близких к перпендикулярному относительно тока (т.е. $\theta \sim 90^\circ$). В этих направлениях спектр опять обладает двумя изломами (а не одним, как в остальных направлениях), хотя энергетическое распределение частиц имеет только две степенные компоненты с индексами $-\alpha$ и $4 - \alpha$.

Возможна также ситуация, когда в энергетическом распределении частиц отсутствует степенная компонента с индексом $4 - \alpha$ и "скрытой" оказывается соответствующая ей старшая степенная компонента a_2 излучательной способности, $\langle a_2 \rangle_\theta \simeq 0$. Данный сценарий реализуется, если выполняется условие $H_{22} \simeq -3(H_{04} + H_{40}/5)$. Аналогично рассмотренным выше случаям нетрудно показать [256], что, благодаря анизотропии распределения частиц, "скрытая" компонента излучения a_2 может оказаться доминирующей, $a_2(\theta) > |(3\omega_B/\omega)a_1(\theta) + (3\omega_B/\omega)^2 a_0|$, в широком диапазоне частот для достаточно широкого

конуса углов вдоль тока с раскрытием, зависящим от параметров слоя и достигающим значений порядка 30° .

Таким образом, частотно-угловой спектр синхротронного излучения, выходящего из самосогласованных токовых структур (без внешнего магнитного поля) в релятивистской бесстолкновительной плазме с полистепенным распределением частиц, может содержать изломы, экстремумы и другие особенности, отсутствующие в излучении ансамбля тех же частиц, у которых распределение импульсов усреднено по углу, и которые помещены во внешнее однородное магнитное поле. Излучение самосогласованной структуры в зависимости от угла наблюдения может иметь различное число степенных частотных компонент, доминирующих в определённых интервалах спектра. Указанное число может быть больше числа степенных компонент в энергетическом распределении частиц (усреднённом по углам). Последнее, в частности, может свидетельствовать о формировании синхротронного излучения частицами, образующими самосогласованную токовую структуру, а не пришедшими в неё из внешних областей и обладающими несогласованным с ней энергетическим распределением.

5. Заключение

Построение теории согласованных конфигураций магнитного поля и токов в бесстолкновительной плазме является одной из важнейших задач фундаментальной физики плазмы, затрагивающей, в частности, реализацию многообещающих экспериментов с так называемой лазерной плазмой высоких плотностей энергии, порождённых созданием сверхмощных лазеров, и объяснение интригующих астрофизических явлений (квazarов и микроквazarов, звёздного и пульсарного ветра, космических гамма-всплесков и др.) и явлений ближнего космоса (включая ударные волны и токовые слои в магнитосферах планет и Солнца), наблюдения которых становятся всё более доступны благодаря уникальным космическим аппаратам и телескопам.

Как ясно из обзора, использование инвариантов движения частиц в бесстолкновительной многокомпонентной плазме (релятивистской и нерелятивистской) позволяет построить и аналитически исследовать широкий класс нелинейных нейтральных токовых структур (локализованных и нет) — плоскостойких, цилиндрически-симметричных и двумерных. Это было продемонстрировано на примере аксиально-симметричных анизотропных ФРЧ в пространстве импульсов, причём найденные статические решения допускают практически произвольное распределение частиц по энергиям. Последнее означает возможность описания самосогласованных слоёв и филаментов, не сводящихся к обычно используемым моделям нейтрального слоя Харриса и пинча Беннетта или их известным обобщениям, по существу эксплуатирующим максвелловское распределение, отнюдь не всегда свойственное неравновесной бесстолкновительной плазме.

Развитые нами специальные разложения распределений частиц как функций проекции их обобщённого импульса на направление тока в самосогласованных магнитостатических конфигурациях включают экспоненциально-полиномиальные, дельта-, ступенчатые и другие функции инвариантов движения частиц и позволяют детально изучить решения получающегося нелинейного уравнения типа Грэда – Шафанова. В результате удаётся дать классификацию и аналитическое описание разнообразных пространственных профилей стационарных

токов и магнитных полей и увидеть, что эти профили в значительной мере тоже являются произвольными. Разработанный подход позволяет получать аналитические решения для таких токовых структур, как двухмасштабные и расщеплённые, обладающие нулевым и конечным полным током, помещённые во внешнее магнитное поле и ограниченные исключительно собственным магнитным полем. Ряд известных решений, которые были получены для узкого набора простейших ФРЧ, в том числе слой Харриса, обобщены для произвольного релятивистского энергетического распределения частиц и для конфигураций с широким магнитного поля.

В целом, исследование различных классов решений уравнения Грэда – Шафранова только начинается и представляется весьма многообещающим, прежде всего, для интерпретации тех или иных самосогласованных токовых структур в лабораторной и космической плазме. Изложенный в обзоре метод построения самосогласованных стационарных токовых конфигураций с произвольными энергетическими распределениями частиц позволяет существенно расширить представления о магнитостатических структурах в бесстолкновительной плазме и может служить основой для анализа их динамических свойств, включая крупномасштабные неустойчивости и квазистатическое взаимодействие друг с другом, а также магнитостатическую турбулентность (по аналогии с турбулентностью ленгмюровских волн и турбулентностью самофокусирующихся каналов электромагнитных волн [259–266]).

В заключение перечислим открытые вопросы, не претендуя на полноту их списка.

1. Насколько представительны функции распределения, зависящие только от инвариантов движения частиц, среди различных функций распределения, описывающих все стационарные самосогласованные токовые структуры? В какой мере первые распределения представляют качественно (физически) похожие токовые структуры, которые могут описываться и более общими распределениями частиц?

2. Какие самосогласованные токовые структуры являются наиболее (или наименее) устойчивыми и какова иерархия их неустойчивостей? Для какого распределения частиц структура с заданным профилем плотности тока будет наиболее устойчивой?

3. В какой степени классы стационарных токовых структур расширяются (или сужаются) при наложении внешнего магнитного поля, например, поперёк токового слоя, и/или граничных условий, например, при задании входящих и выходящих потоков частиц на каких-либо границах токовой структуры?

4. Возможна ли и при каких условиях квазиadiaбатическая (медленная) деформация токовых структур без их существенного разрушения? Возможно ли макроскопическое описание какой-либо деформации токовых структур или их взаимодействия друг с другом, не использующее детальный анализ эволюции ФРЧ?

5. Каково влияние межчастичных столкновений, квазистатических электрических полей и более высокочастотных электромагнитных полей на самосогласованные структуры? Когда это влияние приводит к разрушению последних, а когда — к эволюции их макроскопических параметров без разрушения, пусть с потерей энергосохранения?

Приведённый список открытых вопросов демонстрирует сложность проблемы самосогласованных токовых структур и свидетельствует о необходимости разработки новых подходов к исследованию её различных сторон.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда РФН 16-12-10528 (разделы 3 и 4) и проведена в рамках программы фундаментальных исследований Отделения физических наук РАН № 15 "Плазменные процессы в космосе и в лаборатории" и государственного задания ИПФ РАН (проект 16.29) (разделы 1 и 4).

Список литературы

- Bennett W H *Phys. Rev.* **45** 890 (1934)
- Harris E *Nuovo Cimento* **23** 115 (1962)
- Alpers W *Astrophys. Space Sci.* **5** 425 (1969)
- Abraham-Shrauner B *Phys. Fluids* **11** 1162 (1968)
- Abraham-Shrauner B *Plasma Phys. Control. Fusion* **52** 025003 (2010)
- Kan J R *J. Geophys. Res.* **78** 3773 (1973)
- Channell P J *Phys. Fluids* **19** 1541 (1976)
- Roth M, de Keyser J, Kuznetsova M M *Space Sci. Rev.* **76** 251 (1996)
- Mahajan S M, Hazeltine R D *Phys. Plasmas* **7** 1287 (2000)
- Мананкова А В, Пудовкин М И, Рунов А В *Геомагнетизм и аэронавтика* **40**(4) 26 (2000); Manankova A V, Pudovkin M I, Runov A V *Geomagn. Aeron.* **40** 430 (2000)
- Schindler K, Birn J J *Geophys. Res. Lett.* **107** 1193 (2002)
- Sitnov M I, Guzdar P N, Swisdak M *Geophys. Res. Lett.* **30** 1712 (2003)
- Attico N, Pegoraro F *Phys. Plasmas* **6** 767 (1999)
- Mottez F *Phys. Plasmas* **10** 2501 (2003); *Phys. Plasmas* **11** 336 (2004) Erratum
- Fu W-Z, Hau L-N *Phys. Plasmas* **12** 070701 (2005)
- Génot V *J. Geophys. Res.* **110** A09214 (2005)
- Génot V et al. *Planet. Space Sci.* **53** 229 (2005)
- Yoon P H, Lui A T Y, Sheldon R B *Phys. Plasmas* **13** 102108 (2006)
- Yoon P H, Janaki M S, Dasgupta B *J. Geophys. Res.* **119** 260 (2014)
- Janaki M S, Dasgupta B *Phys. Plasmas* **19** 032113 (2012)
- Janaki M S, Dasgupta B, Yoon P H *J. Geophys. Res.* **117** A12201 (2012)
- Ghosh A et al. *Chaos* **24** 013117 (2014)
- Harrison M G, Neukirch T *Phys. Rev. Lett.* **102** 135003 (2009)
- Harrison M G, Neukirch T *Phys. Plasmas* **16** 022106 (2009)
- Wilson F, Neukirch T *Phys. Plasmas* **18** 082108 (2011)
- Gedalin M et al. *J. Plasma Phys.* **77** 193 (2011)
- Balikhin M, Gedalin M *J. Plasma Phys.* **74** 749 (2008)
- Lyahov V V, Neshchadim V M, arXiv:1101.5988
- Suzuki A, Shigeyama T *Phys. Plasmas* **15** 042107 (2008)
- Suzuki A *Phys. Plasmas* **15** 072107 (2008)
- Montagna C, Pegoraro F *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulation* **13** 147 (2008)
- Семенов В С, Аинов М А, Кубышкина Д И *Вопросы геофизики* (46) 137 (2013)
- Istomin Ya N *Plasma Phys. Control. Fusion* **53** 015006 (2011)
- Зелёный Л М и др. *Физика плазмы* **37** 137 (2011); Zelenyi L M et al. *Plasma Phys. Rep.* **37** 118 (2011)
- Зелёный Л М и др. *УФН* **183** 365 (2013); Zelenyi L M et al. *Phys. Usp.* **56** 347 (2013)
- Cremaşchini C, Miller J C, Tessarotto M *Phys. Plasmas* **18** 062901 (2011)
- Tur A et al. *J. Plasma Phys.* **66** 97 (2001)
- Kocharovsky V V, Kocharovsky V I, Martyanov V Ju *Phys. Rev. Lett.* **104** 215002 (2010)
- Haines M G *Can. J. Phys.* **64** 912 (1986)
- Yang T-Y B, Arons J, Langdon A B *Phys. Plasmas* **1** 3059 (1994)
- Medvedev M V, Loeb A *Astrophys. J.* **526** 697 (1999)
- Krainov V P *J. Phys. B* **36** 3187 (2003)
- Brandenburg A, Subramanian K *Phys. Rep.* **417** 1 (2005)
- Быков А М, Топтыгин И Н *УФН* **177** 149 (2007); Bykov A M, Toptygin I N *Phys. Usp.* **50** 141 (2007)
- Малова Х В, Зелёный Л М, в сб. *Плазменная геофизика* (Под ред. Л М Зеленого, И С Веселого) Т. 1 (М.: Физматлит, 2008) § 4.4
- Yoo J et al. *Phys. Rev. Lett.* **113** 095002 (2014)
- Somov B V *Plasma Astrophysics Pt. II Reconnection and Flares* (Astrophysics and Space Science Library, Vol. 340) (New York: Springer, 2010)
- Califano F, Del Sarto D, Pegoraro F *Phys. Rev. Lett.* **96** 105008 (2006)
- Yoon P H, Lui A T Y *J. Geophys. Res.* **110** A01202 (2005)
- Lyubarsky Y, Eichler D *Astrophys. J.* **647** 1250 (2006)
- Kato T N *Phys. Plasmas* **12** 080705 (2005)
- Califano F et al. *Phys. Rev. E* **57** 7048 (1998)
- Lazar M, Schlickeiser R, Shukla P K *Phys. Plasmas* **13** 102107 (2006)
- Spitkovsky A *Astrophys. J. Lett.* **673** L39 (2008)
- Park H-S et al. *High Energy Density Phys.* **8** 38 (2012)
- Nishikawa K-I et al. *Astrophys. J.* **642** 1267 (2006)
- Arons J *Space Sci. Rev.* **173** 341 (2012)
- Reynolds S P, Gaensler B M, Bocchino F *Space Sci. Rev.* **166** 231 (2012)
- Зелёный Л М, Милованов А В *УФН* **174** 809 (2004); Zelenyi L M, Milovanov A V *Phys. Usp.* **47** 749 (2004)
- Silva L O et al. *Astrophys. J. Lett.* **596** L121 (2003)

61. Yamada M, Kulsrud R, Ji H *Rev. Mod. Phys.* **82** 603 (2010)
62. Ji H et al. *Geophys. Res. Lett.* **35** L13106 (2008)
63. Zhong J et al. *Nature Phys.* **6** 984 (2010)
64. Франк А Г УФН **180** 982 (2010); Frank A G *Phys. Usp.* **53** 941 (2010)
65. Франк А Г, в сб. *Плазменная геологофизика* (Под ред. Л М Зеленого, И С Веселовского). Т. 1 (М.: Физматлит, 2008) § 9.1
66. Mondal S et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **109** 8011 (2012)
67. Grosskopf M J et al. *High Energy Density Phys.* **9** 192 (2013)
68. Fox W et al. *Phys. Rev. Lett.* **111** 225002 (2013)
69. Dorfman S et al. *Geophys. Res. Lett.* **40** 233 (2013)
70. Jain N et al. *Phys. Plasmas* **20** 112101 (2013)
71. Frank A et al., in *Protostars and Planets VI* (Eds H Beuther et al.) (Tucson, AZ: Univ. of Arizona Press, 2014) p. 451; arXiv:1402.3553
72. Büchner J *Space Sci. Rev.* **122** 149 (2006)
73. Zimbardo G et al. *Astrophys. Space Sci. Trans.* **4** 35 (2008)
74. Kropotkin A P, Domrin V I *Ann. Geophys.* **27** 1353 (2009)
75. Baumjohann W et al. *Space Sci. Rev.* **152** 99 (2010)
76. Shibata K et al. *Science* **318** 1591 (2007)
77. Artemyev A, Zelenyi L *Space Sci. Rev.* **178** 419 (2013)
78. Graham D B et al. *Phys. Rev. Lett.* **112** 215004 (2014)
79. Coppi B *Phys. Plasmas* **12** 057302 (2005)
80. Medvedev M V, Silva L O, Kamionkowski M *Astrophys. J. Lett.* **642** L1 (2006)
81. Schuster C et al. *Astron. Astrophys.* **452** 743 (2006)
82. Быков А М, Осипов С М, Топтыгин И Н *Письма в Астрон. журн.* **35** 615 (2009); Bykov A M, Osipov S M, Torptygin I N *Astron. Lett.* **35** 555 (2009)
83. Kharb P et al. *Astrophys. J.* **694** 1485 (2009)
84. Morse R L, Nielson C W *Phys. Fluids* **14** 830 (1971)
85. Fonseca R A et al. *Phys. Plasmas* **10** 1979 (2003)
86. Romanov D V et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 215004 (2004)
87. Stockem A, Dieckmann M E, Schlickeiser R *Plasma Phys. Control. Fusion* **51** 075014 (2009)
88. Dieckmann M E, Shukla P K, Drury L O C *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **367** 1072 (2006)
89. Dieckmann M E, Shukla P K, Stenflo L *Plasma Phys. Control. Fusion* **51** 065015 (2009)
90. Nishikawa K-I et al. *Astrophys. J. Lett.* **698** L10 (2009)
91. Suzuki A, Shigezumi T *Astrophys. J.* **695** 1550 (2009)
92. Sakai J-i et al. *J. Phys. Soc. Jpn.* **69** 2503 (2000)
93. Frederiksen J T et al. *Astrophys. J. Lett.* **608** L13 (2004)
94. Kato T N *Astrophys. J.* **668** 974 (2007)
95. Chang P, Spitkovsky A, Arons J *Astrophys. J.* **674** 378 (2008)
96. Keshet U et al. *Astrophys. J. Lett.* **693** L127 (2009)
97. Haugbølle T *Astrophys. J. Lett.* **739** L42 (2011)
98. Stockem A et al. *Sci. Rep.* **4** 3934 (2014)
99. Gruzinov A *Astrophys. J. Lett.* **563** L15 (2001)
100. Reynolds S P *Space Sci. Rev.* **99** 177 (2001)
101. Piran T *AIP Conf. Proc.* **784** 164 (2005)
102. Nishikawa K-I et al. *Astrophys. Space Sci.* **307** 319 (2007)
103. Medvedev M V, Spitkovsky A *Astrophys. J.* **700** 956 (2009)
104. Sironi L, Spitkovsky A, Arons J *Astrophys. J.* **771** 54 (2013)
105. Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмодобных сред* (М.: Гос. изд-во лит-ры в области атомной науки и техники, 1961)
106. Jeans J H *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **76** 70 (1915)
107. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Физическая кинетика* (М.: Физматлит, 2001); Пер. на англ. яз.: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
108. Гинзбург В Л, Рухадзе А А *Волны в магнитоактивной плазме* (М.: Наука, 1975)
109. Chen F *Introduction to Plasma Physics* (New York: Springer, 1995); Пер. на русск. яз.: Чен Ф *Введение в физику плазмы* (М.: Мир, 1987)
110. Davidson R C, in *Basic Plasma Physics* (Handbook of Plasma Physics, Vol. 1, Eds A A Galeev, R N Sudan) (Amsterdam: North-Holland, 1983) p. 521; Пер. на русск. яз.: Дэвидсон Р, в сб. *Основы физики плазмы* Т. 1 (Под ред. А А Галеева, Р Судана) (М.: Энергоатомиздат, 1983) с. 479
111. Hao B, Sheng Z-M, Zhang J *Phys. Plasmas* **15** 082112 (2008)
112. Tzoufras M et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 105002 (2006)
113. Fried B D *Phys. Fluids* **2** 337 (1959)
114. Yoon P H, Davidson R C *Phys. Rev. A* **35** 2718 (1987)
115. Вагин К Ю, Урюпин С А *Физ. плазмы* **40** 468 (2014); Vagin K Yu, Uryupin S A *Plasma Phys. Rep.* **40** 393 (2014)
116. Yoon P H *Phys. Fluids B* **1** 1336 (1989)
117. Михайловский А Б *Теория плазменных неустойчивостей* Т. 1 (М.: Атомиздат, 1975) § 15.4, § 18.2; Пер. на англ. яз.: Mikhailovskii A B *Theory of Plasma Instabilities* (New York: Consultants Bureau, 1974)
118. Kahn F D J *Fluid Mech.* **14** 321 (1962)
119. Taggart K A et al. *Phys. Rev. Lett.* **29** 1729 (1972)
120. Yang T-Y B et al. *Phys. Fluids B* **5** 3369 (1993)
121. Bret A, Gremillet L, Bellido J C *Phys. Plasmas* **14** 032103 (2007)
122. Bret A *Astrophys. J.* **699** 990 (2009); arXiv:0903.2658
123. Yoon P H *Phys. Plasmas* **14** 024504 (2007)
124. Schlickeiser R, Shukla P K *Astrophys. J. Lett.* **599** L57 (2003)
125. Schlickeiser R *Phys. Plasmas* **11** 5532 (2004)
126. Schlickeiser R *Plasma Phys. Control. Fusion* **47** A205 (2005)
127. Schaefer-Rolffs U, Schlickeiser R *Phys. Plasmas* **12** 022104 (2005)
128. Schaefer-Rolffs U, Lerche I, Schlickeiser R *Phys. Plasmas* **13** 012107 (2006)
129. Schaefer-Rolffs U, Tautz R C *Phys. Plasmas* **15** 062105 (2008)
130. Tautz R C, Schlickeiser R *Phys. Plasmas* **14** 102102 (2007)
131. Stockem A, Lerche I, Schlickeiser R *Astrophys. J.* **659** 419 (2007)
132. Lazar M et al. *Astrophys. J.* **693** 1133 (2009)
133. Stockem A et al. *J. Plasma Phys.* **75** 529 (2008)
134. Lazar M et al. *J. Plasma Phys.* **75** 19 (2009)
135. Zaheer S, Murtaza G *Phys. Plasmas* **14** 022108 (2007)
136. Wiersma J, Achterberg A *Astron. Astrophys.* **475** 1 (2007)
137. Fujita Y, Kato T N *Astron. Nachr.* **327** 443 (2006)
138. Yalinewich A, Gedalin M *Phys. Plasmas* **17** 062101 (2010)
139. Tautz R C, Lerche I *J. Phys. A* **40** F677 (2007)
140. Pétri J, Kirk J *Plasma Phys. Control. Fusion* **49** 1885 (2007)
141. Pétri J, Kirk J G *Plasma Phys. Control. Fusion* **49** 297 (2007)
142. Gary S P, Karimabadi H *J. Geophys. Res.* **111** A11224 (2006)
143. Tzoufras M et al. *Phys. Plasmas* **14** 062108 (2007)
144. Borodachev L V, Kolomiets D O *J. Plasma Phys.* **77** 277 (2011)
145. Емельянов В И, Климонтович Ю Л *Квантовая электроника* **3** 848 (1976); Emel'yanov V I, Klimontovich Yu L *Sov. J. Quantum Electron.* **6** 462 (1976)
146. Lines M E, Glass A M *Principles and Applications of Ferroelectrics and Related Materials* (Oxford: Clarendon Press, 1977); Пер. на русск. яз.: Лайнс М, Гласс А *Сегнетоэлектрики и родственные им материалы* (М.: Мир, 1981)
147. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 1 (М.: Физматлит, 2001) с. 144; Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980)
148. Кочаровский В В, Кочаровский В В, Кукушкин В А *Изв. вузов. Радиофизика* **44** 174 (2001); Kocharovskiy V V, Kocharovskiy V V, Kukushkin V A *Radiophys. Quantum Electron.* **44** 161 (2001)
149. Bret A *Phys. Lett. A* **359** 52 (2006)
150. Davidson R C et al. *Phys. Fluids* **15** 317 (1972)
151. Palodhi L, Califano F, Pegoraro F *Plasma Phys. Control. Fusion* **51** 125006 (2009)
152. Ruyer C et al. *Phys. Plasmas* **22** 032102 (2015)
153. Wiersma J, Achterberg A *Astron. Astrophys.* **428** 365 (2004)
154. Lichtenberg A J *Phase-Space Dynamics of Particles* (New York: Wiley, 1969)
155. Морозов А И, Соловьев Л С *ЖЭТФ* **40** 1316 (1961); Morozov A I, Solov'ev L S *Sov. Phys. JETP* **13** 927 (1961)
156. Longmire C L *Elementary Plasma Physics* (New York: Interscience Publ., 1963)
157. Vasko I Y et al. *Phys. Plasmas* **20** 022110 (2013)
158. Grad H *Phys. Fluids* **4** 1366 (1961)
159. Mynick H E, Sharp W M, Kaufman A N *Phys. Fluids* **22** 1478 (1979)
160. Neukirch T *J. Geophys. Res.* **98** 3753 (1993)
161. Bernstein I B, Greene J M, Kruskal M D *Phys. Rev.* **108** 546 (1957)
162. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1962); Пер. на русск. яз.: Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)
163. Sitnov M I et al. *J. Geophys. Res.* **105** 13029 (2000)
164. Zelenyi L et al. *Nonlin. Processes Geophys.* **11** 579 (2004)
165. Artemyev A V *Phys. Plasmas* **18** 022104 (2011)
166. Davidson R C *Theory of Nonneutral Plasmas* (Reading, Mass.: W.A. Benjamin, 1974); Пер. на русск. яз.: Дэвидсон Р *Теория заряженной плазмы* (М.: Мир, 1978)
167. Бескин В С *Осесимметричные стационарные течения в астрофизике* (М.: Физматлит, 2006); Пер. на англ. яз.: Beskin V S *MHD Flows in Compact Astrophysical Objects* (Heidelberg: Springer, 2010)
168. Ng C S, Bhattacharjee A *Phys. Rev. Lett.* **95** 245004 (2005)
169. Krasovsky V L, Matsumoto H, Omura Y *J. Geophys. Res.* **108** (A3) 1117 (2003)
170. Kamp L P et al. *Phys. Fluids B* **4** 521 (1992)
171. Tautz R C, Lerche I *J. Phys. A* **44** 045501 (2011)
172. De Hoffmann F, Teller E *Phys. Rev.* **80** 692 (1950)
173. Kan J R *J. Plasma Phys.* **7** 445 (1972)
174. Gurnett D A, Bhattacharjee A *Introduction to Plasma Physics: with Space and Laboratory Applications* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005)
175. Hoh F C *Phys. Fluids* **9** 277 (1966)
176. Stark C R, Neukirch T *Phys. Plasmas* **19** 012115 (2012)
177. Веселовский И С *ЖТФ* **40** 2507 (1970)
178. Веселовский И С *ЖТФ* **65** 797 (1975)
179. Davidson R C, in *Basic Plasma Physics* (Handbook of Plasma Physics, Vol. 2, Eds A A Galeev, R N Sudan) (Amsterdam: North-Holland, 1984); Пер. на русск. яз.: Дэвидсон Р, в сб. *Основы физики плазмы* Т. 2 (Под ред. А А Галеева, Р Судана) (М.: Энергоатомиздат, 1984) с. 147, Дополнение к второму тому
180. Mottef F *Ann. Geophys.* **22** 3033 (2004)
181. Neukirch T, Wilson F, Harrison M G *Phys. Plasmas* **16** 122102 (2009)
182. Lee L C, Kan J R *J. Geophys. Res.* **84** 6417 (1979)
183. Nicholson R B *Phys. Fluids* **6** 1581 (1963)
184. Sestero A *Phys. Fluids* **9** 2006 (1966)

185. Lemaire J, Burlaga L F *Astrophys. Space Sci.* **45** 303 (1976)
186. De Keyser J, Roth M J *Geophys. Res.* **102** 9513 (1997)
187. Sestero A *Phys. Fluids* **10** 193 (1967)
188. Боброва Н А, Сыроватский С И *Письма в ЖЭТФ* **30** 567 (1979);
Bobrova N A, Syrovatskii S I *JETP Lett.* **30** 535 (1979)
189. Bobrova N A et al. *Phys. Plasmas* **8** 759 (2001)
190. Abraham-Shrauner B *Phys. Plasmas* **20** 102117 (2013)
191. Боброва Н А, Сыроватский С "Особые линии бессилового магнитного поля", в сб. *Взаимодействие космических лучей со средой. XI Ленинградский семинар по космофизике, Ленинград, 30 ноября – 2 декабря 1979 г. Материалы семинара* (Л.: ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 1979) с. 101; <http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/Public/12/579/12579244.pdf>
192. Шафранов В Д, в сб. *Вопросы теории плазмы* (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 92; Пер. на англ. яз.: Shafranov V D, in *Reviews of Plasma Physics* (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1966) p. 103
193. Israelevich P L et al. *Ann. Geophys.* **24** 1479 (2006)
194. Israelevich P L, Ershkovich A I, Oran R *Planet. Space Sci.* **55** 2261 (2007)
195. Israelevich P L, Ershkovich A I *Ann. Geophys.* **26** 1759 (2008)
196. Kolotkov D Y, Vasko I Y, Nakariakov V M *Phys. Plasmas* **22** 112902 (2015)
197. Furth H P *Nucl. Fusion Suppl.* **1** 169 (1962)
198. Pfirsch D Z *Naturforsch. A* **17** 861 (1962)
199. Laval G, Pellat R C. R. *Acad. Sci.* **259** 1706 (1964)
200. Pritchett P L et al. *J. Geophys. Res.* **96** 11523 (1991)
201. Daughton W *Phys. Plasmas* **6** 1329 (1999)
202. Drake J F et al. *Geophys. Res. Lett.* **33** 203 (2006)
203. Daughton W, Scudder J, Karimabadi H *Phys. Plasmas* **13** 072101 (2006)
204. Loureiro N F, Schekochihin A A, Cowley S C *Phys. Plasmas* **14** 100703 (2007)
205. Wilson F, Ph.D. Thesis (St Andrews, Scotland: Univ. of St Andrews, 2013)
206. Brittnacher M, Whipple E C *J. Geophys. Res.* **107** 1022 (2002)
207. Yoop P H, Lui A T Y *Phys. Plasmas* **14** 104504 (2007)
208. Мартъянов В Ю, Кочаровский В В, Кочаровский В В *Письма в Астрон. журн.* **36** 419 (2010); Martyanov V Yu, Kocharovskiy V V, Kocharovskiy V I *Astron. Lett.* **36** 396 (2010)
209. Фадеев В М, Кварцхава И Ф, Комаров Н Н *Ядерный синтез* **5** 202 (1965)
210. Зеленый Л М и др. *УФН* **180** 973 (2010); Zelenyi L M et al. *Phys. Usp.* **53** 933 (2010)
211. Сигов Ю С *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* **4** 1065 (1964); Sigov Yu S *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **4** (6) 117 (1964)
212. Spitkovsky A *Astrophys. J. Lett.* **682** L5 (2008)
213. Medvedev M V et al. *Astrophys. J. Lett.* **618** L75 (2005)
214. Martins S F et al. *Astrophys. J. Lett.* **695** L189 (2009)
215. Park H-S et al. *J. Phys. Conf. Ser.* **688** 012084 (2016)
216. Smets R et al. *Phys. Plasmas* **21** 062111 (2014)
217. Albertazzi B et al. *EPJ Web Conf.* **59** 17014 (2013)
218. Albertazzi B et al. *Science* **346** 325 (2014)
219. Шайхисламов И Ф *Приклад. мех. и тех. физ.* **41** (2) 11 (2000); Shaikhislamov I F *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **41** 212 (2000)
220. Тищенко В Н, Шайхисламов И Ф *Квантовая электроника* **40** 464 (2010); Tishchenko V N, Shaikhislamov I F *Quantum Electron.* **40** 464 (2010)
221. Runov A et al. *Ann. Geophys.* **24** 247 (2006)
222. Быков А А, Зеленый Л М, Малова Х В *Физика плазмы* **34** 148 (2008); Bykov A A, Zelenyi L M, Malova Kh V *Plasma Phys. Rep.* **34** 128 (2008)
223. Asano Y et al. *J. Geophys. Res.* **109** A02212 (2004)
224. Asano Y et al. *Geophys. Res. Lett.* **32** L03108 (2005)
225. Zhou X-Z et al. *J. Geophys. Res.* **114** A03223 (2009)
226. Lyutikov M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **346** 450 (2003)
227. Lyutikov M, Uzdensky D *Astrophys. J.* **589** 893 (2003)
228. Smith E J *J. Geophys. Res.* **106** 15819 (2001)
229. Phan T D, Gosling J T, Davis M S *Geophys. Res. Lett.* **36** L09108 (2009)
230. Khabarova O, Obridko V *Astrophys. J.* **761** 82 (2012)
231. Gonzalez W, Parker E *Magnetic Reconnection: Concepts and Applications* (New York: Springer, 2016)
232. Yordanova E et al. *Geophys. Res. Lett.* **43** 5969 (2016)
233. Øieroset M et al. *Geophys. Res. Lett.* **43** 5536 (2016)
234. Nakamura R et al. *J. Geophys. Res.* **111** A11206 (2006)
235. Albertazzi B, Ph.D. Thesis (Québec, Canada: Institut National de la Recherche Scientifique, Univ. du Québec, 2014)
236. Yamada M *J. Geophys. Res.* **104** 14529 (1999)
237. Ji H et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 115001 (2004)
238. Bárta M et al. *Astrophys. J.* **737** 24 (2011)
239. Mozer F S, Pritchett P L *Space Sci. Rev.* **158** 119 (2011)
240. Burgess D, Gingell P W, Matteini L *Astrophys. J.* **822** 38 (2016)
241. Drake J F et al. *Astrophys. J.* **709** 963 (2010)
242. Swisdak M, Drake J F, Opher M *Astrophys. J. Lett.* **774** L8 (2013)
243. Archontis V et al. *Astrophys. J.* **635** 1299 (2005)
244. Ciardi A et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 025002 (2013)
245. Korneev Ph, d'Humières E, Tikhonchuk V *Phys. Plasmas* **21** 022117 (2014)
246. Fiuza F et al. *Phys. Rev. Lett.* **108** 235004 (2012)
247. Niemiec J et al. *Astrophys. J.* **759** 73 (2012)
248. Foster J M et al. *Astrophys. J. Lett.* **634** L77 (2005)
249. Sironi L, Spitkovsky A *Astrophys. J. Lett.* **707** L92 (2009)
250. Kirk J G *Phys. Rev. Lett.* **92** 181101 (2004)
251. Larrabee D A, Lovelace R V E, Romanova M M *Astrophys. J.* **586** 72 (2003)
252. Zenitani S, Hoshino M *Astrophys. J.* **670** 702 (2007)
253. Lyubarsky Y E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **358** 113 (2005)
254. Rybicki G B, Lightman A P *Radiative Processes in Astrophysics* (New York: John Wiley, 2008)
255. Железняков В В *Излучение в астрофизической плазме* (М.: Янус-К, 1997); Пер. на англ. яз.: Zheleznyakov V V *Radiation in Astrophysical Plasmas* (Dordrecht: Kluwer, 1996)
256. Kocharovskiy V V, Kocharovskiy V I, Martyanov V Ju, Tarasov S V *Phys. Plasmas* **22** 083303 (2015)
257. Fleishman G D, Melnikov V F *Astrophys. J.* **587** 823 (2003)
258. Ramaty R *Astrophys. J.* **158** 753 (1969)
259. Kono M, Škorić M *Nonlinear Physics of Plasmas* (Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, Vol. 62) (Berlin: Springer, 2010) p. 323
260. Rudakov L I, Tsytoich V N *Phys. Rep.* **40** 1 (1978)
261. Shapiro V D, Shevchenko V I, in *Basic Plasma Physics* (Handbook of Plasma Physics, Vol. 2, Eds A A Galeev, R N Sudan) (Amsterdam: North-Holland, 1984); Пер. на русск. яз.: Шапиро В Д, Шевченко В И, в сб. *Основы физики плазмы* Т. 2 (Под ред. А А Галеева, Р Судана) (М.: Энергоатомиздат, 1984) с. 119
262. Zakharov V E, in *Basic Plasma Physics* (Handbook of Plasma Physics, Vol. 2, Eds A A Galeev, R N Sudan) (Amsterdam: North-Holland, 1984); Пер. на русск. яз.: Захаров В Е, в сб. *Основы физики плазмы* Т. 2 (Под ред. А А Галеева, Р Судана) (М.: Энергоатомиздат, 1984) с. 79
263. Аскарьян Г А *УФН* **111** 249 (1973); Askar'yan G A *Sov. Phys. Usp.* **16** 680 (1974)
264. Власов С Н, Таланов В И *Самософокусировка волн* (Н. Новгород: Ин-т приклад. физики, 1997)
265. Чекалин С В, Кандидов В П *УФН* **183** 133 (2013); Chekalin S V, Kandidov V P *Phys. Usp.* **56** 123 (2013)
266. Couairon A, Mysyrowicz A *Phys. Rep.* **441** 47 (2007)

The analytical theory of self-consistent current structures in a collisionless plasma

V.V. Kocharovskiy^(1,2), V.I.V. Kocharovskiy⁽¹⁾, V.Yu. Martyanov⁽¹⁾, S.V. Tarasov⁽¹⁾

⁽¹⁾ Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation

⁽²⁾ Department of Physics and Astronomy, Texas A&M University, College Station, TX 77843-4242, USA

E-mail: ^(1,2)kochar@appl.sci-nnov.ru

The most-studied classes of exact solutions of Vlasov–Maxwell equations for stationary neutral current structures in a collisionless relativistic plasma are reviewed which allow the particle distribution functions (PDFs) to be chosen at will. A general classification is presented of the current sheets and filaments described by the method of invariants of motion of particles whose PDF is symmetric in a certain way in coordinate and momentum spaces. The possibility is discussed of using these explicit solutions to model the observed and/or expected features of the current structures in cosmic and laboratory plasmas. Also addressed are how the magnetic field forms and the analytical description of the so-called Weibel instability in a plasma with an arbitrary PDF.

Keywords: neutral current structures, collisionless relativistic plasma, integrals of motion, kinetic theory, magnetosphere

PACS numbers: **52.30** – q, **52.35** – g, **94.30** – d

Bibliography — 266 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **186** (12) 1267–1314 (2016)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.08.037893>

Received 15 June 2016, revised 16 August 2016

Physics – Uspekhi **59** (12) (2016)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2016.08.037893>