Октябрь 2016 г. **Том 186, № 10**

У С П Е Х И   Ф И З И Ч Е С К И Х   Н А У К

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ В.Л. ГИНЗБУРГА

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Динамика уединённых волн в ультрахолодных газах в терминах наблюдаемых величин

Л.П. Питаевский

В последние годы было предсказано существование различных уединённых волн — солитонов, вихревых колец, солитонных вихрей и более сложных образований, которые могут двигаться в сверхтекучих ультрахолодных газах вдоль удерживающих газы удлинённых ловушек. Теоретическое описание этого движения требует знания двух функций — инерционной массы солитона и эффективного числа частиц в нём, — выражающихся через энергию солитона. Их вычисление можно произвести на основе микроскопической теории. Они, однако, могут быть выражены через непосредственно наблюдаемые величины — скачок фазы параметра порядка и дефект числа частиц в солитоне. В предлагаемой заметке излагается простой и физически наглядный вывод соответствующих уравнений. Результаты применены к недавно предсказанному "магнитному солитону" в смесях бозе-газов в различных спиновых состояниях.

Ключевые слова: уединённые волны, солитоны, локальный и канонический импульсы, волновая функция Гинзбурга – Ландау, инерционная масса, скачок фазы, эффективное число частиц, дефект числа частиц, магнитный солитон

PACS numbers: 03.75.Lm, 3.75.Kk, 67.85.De DOI: 10.3367/UFNr.2016.08.037891

Содержание

1. Введение. Макроскопические уравнения движения солитона и наблюдаемые величины

Существование уединённых волн — солитонов, вихревых колец, солитонных вихрей и более сложных образований — является важным свойством квантовых газов. Их детальное исследование стало возможным после развития экспериментальной техники удержания атомарных газов в магнитных и оптических ловушках и их охлаждения до ультранизких температур. При таких температурах газы становятся сверхтекучими и уединённые волны могут наблюдаться как движущиеся незатухающие объекты. (В дальнейшем для краткости я буду называть все такие волны солитонами.) Существенно, что, будучи макроскопическими, эти возбуждения содержат некоторое ядро — область сильного возмущения, структура которого зависит от конкретных свойств системы и для описания которого нужна микроскопическая теория. Типичным экспериментом для исследования таких объектов является наблюдение их движения в удлинённой ловушке. Если ловушка достаточно удлинённая, задачу можно решать в два этапа. Нужно сначала найти решение для однородной цилиндрической ловушки, а потом определить движение солитона в конечной ловушке, используя макроскопические уравнения движения. Оказывается, однако, что динамика солитона в такой одномерной геометрии обладает очень интересными особенностями ввиду существования скачка фазы параметра порядка (см. раздел 2). Например, канонический импульс солитона существенно зависит от этого скачка. Это было обнаружено уже в классической работе Судзуки, в которой построен плоский солитон [1] в разреженном газе в условиях конденсации Бозе – Эйнштейна, описываемый уравнением Гросса – Питаевского (ниже ГП) [1].

Уравнение движения солитона в удлинённой ловушке можно получить из закона сохранения энергии. При этом удобно использовать в качестве переменных скорость

Л.П. Питаевский. Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация; Dipartimento di Fisica, Universitá di Trento and INO-CNR BEC Center, Povo, I-38123 Trento, Italy. E-mail: lev@science.unitn.it

Статья поступила 16 августа 2016 г.

[1] Плоский в том смысле, что все величины предполагаются зависящими только от одной координаты z.

солитона V и химический потенциал газа μ. Тогда энергию солитона следует определить, используя термодинамический потенциал большого канонического ансамбля $E' = E - \mu N$, где E — энергия и N — число частиц в системе. При наличии солитона в однородной ловушке $E' = E_0' + \epsilon(V, \mu)$, где E_0' — потенциал основного состояния и $\epsilon(V, \mu)$ — по определению энергия солитона. В слабонеоднородной, т.е. сильно удлинённой вдоль оси z, ловушке энергию можно приближённо записать как

$$\epsilon(V, \mu, z) = \epsilon\big(V, \mu - V_{\mathrm{ext}}(z)\big)\,, \tag{1}$$

где z — координата центра солитона и $V_{\mathrm{ext}}(z)$ — потенциал ловушки. (Это приближение называют приближением локальной плотности.) Для гармонической ловушки потенциал $V_{\mathrm{ext}}(z) = m\omega_z^2 z^2/2$. Уравнение движения солитона определяется законом сохранения энергии $\epsilon(V, \mu, z) = \mathrm{const}$ [2, 3]. Дифференцируя (1) по времени и учитывая, что $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = V$, получаем уравнение движения

$$m_{\mathrm{I}}\,\frac{\partial V}{\partial t} = -N_{\mathrm{S}}\,\frac{\partial V}{\partial z}\,, \tag{2}$$

где

$$m_{\mathrm{I}} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial V}\right)_{\mu},\;\; N_{\mathrm{S}} = -\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \mu}\right)_{V}. \tag{3}$$

Величина m_{I} имеет смысл инерционной массы солитона, а N_{S} — эффективное число атомов в нём. Таким образом, знание энергии (1) позволяет определить движение солитона в ловушке. Однако вычисление ϵ само по себе является трудной теоретической проблемой. Поэтому значительный интерес представляет возможность выразить m_{I} и N_{S} через непосредственно наблюдаемые величины. Этой задаче посвящена предлагаемая методическая заметка.

Я буду предполагать, что сверхтекучий газ описывается комплексным параметром порядка Ψ, фаза которого ϕ определяет сверхтекучую скорость согласно уравнению

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{M}\,\nabla\phi\,. \tag{4}$$

Для газа, состоящего из бозонов, Ψ является волновой функцией конденсата и $M = m$. Для газа сверхтекучих фермионов Ψ — это волновая функция Гинзбурга–Ландау и $M = 2m$, поскольку эта функция является волновой функцией сверхпроводяших пар. Здесь m — масса атома. На больших расстояниях от солитона, где применима гидродинамика, плотность потока атомов равна $\mathbf{j} = n\mathbf{v}$, где n — плотность газа. Имеется две наблюдаемые величины, через которые я выражу m_{I} и N_{S}. Одна из них — это скачок фазы параметра порядка

$$\Delta\phi = \phi(z = \infty) - \phi(z = -\infty)\,. \tag{5}$$

Можно показать (см. [4]), что $\phi(\pm\infty)$ не зависят от x и y. Скачок фазы $\Delta\phi$ может быть измерен в интерференционном эксперименте, хотя до сих пор никогда не измерялся. Он также естественным образом возникает в численных расчётах структуры солитона. Другой наблюдаемой величиной является "дефект числа частиц" в солитоне

$$N_{\mathrm{D}} = \int_{-\infty}^{\infty} \big[n_1(z) - n_{1\infty}\big]\,\mathrm{d}z\,, \tag{6}$$

где $n_1(z)$ — одномерная (т.е. проинтегрированная по x и y) плотность числа атомов в ядре солитона и $n_{1\infty} = n_1(z = \pm\infty)$ — невозмущённая плотность. Обычно величина N_{D} отрицательна, солитон является "тёмным". Отсюда название "дефект". Величину N_{D} можно вычислить по наблюдаемому распределению плотности в солитоне. Замечу, что $N_{\mathrm{D}} \to 0$ при $V \to c$, где c — скорость звука. Действительно, со скоростью звука могут распространяться только возмущения плотности бесконечно малой амплитуды.

2. Канонический импульс и инерционная масса

Исследование вопроса об эффективной массе удобно начать с обсуждения вопроса об импульсе солитона. По определению, импульс направлен вдоль оси z и равен

$$P = m\int j_z\,\mathrm{d}^3x\,. \tag{7}$$

Можно проверить, что интеграл в этом уравнении сходится при больших z, так что эта величина однозначно определена. Нетрудно выразить P через N_{D}. Для этого рассмотрим солитон в системе координат, где он покоится. Обозначим поток атомов в этой системе $\mathbf{j}^{(0)}$. Поскольку движение в этой системе стационарно, $\mathbf{j}^{(0)}$ не зависит от времени и уравнение непрерывности принимает вид $\nabla\mathbf{j}^{(0)} = 0$. Интегрируя это уравнение по x и y, получаем $\partial_z \int j_z^{(0)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. Таким образом, $\int j_z^{(0)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ не зависит от z и равен своему значению при $z = \pm\infty$, а именно $-n_{1\infty}V$, поскольку в этой системе жидкость вне солитона движется со скоростью $-V$. С другой стороны, поток в лабораторной системе в силу преобразования Галилея есть $j_z = j_z^{(0)} + Vn$. Подставляя эти формулы в (7), находим (см. [6]):

$$P = m\int_{-\infty}^{\infty}\big[n_1(z) - n_{1\infty}\big]\,\mathrm{d}z V = mN_{\mathrm{D}}V\,. \tag{8}$$

Я буду называть величину P (формулы (7), (8)) "локальным импульсом". Локальный импульс, очевидно, равен нулю при $V=0$. Он также обращается в нуль вместе с N_{D}, когда скорость V стремится к скорости звука. Важным свойством рассматриваемой одномерной геометрии является тот факт, что P не совпадает с каноническим импульсом P_{C}, удовлетворяющим соотношению

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial P_{\mathrm{C}}}\right)_{\mu} = V\,, \tag{9}$$

которое можно переписать как

$$m_{\mathrm{I}} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial V}\right)_{\mu} = \left(\frac{\partial P_{\mathrm{C}}}{\partial V}\right)_{\mu}. \tag{10}$$

Физический смысл различия между P и P_{C} в настоящее время хорошо понятен (см., например, [5], гл. 5). Пусть солитон движется в ловушке, свёрнутой в тороидальное кольцо радиуса R. Пусть радиус настолько велик, что кривизна ловушки не влияет на динамику солитона. Фактически подразумевается "термодинамический предел" $R \to \infty$. При рождении солитона в тороидальной ловушке волновая функция должна остаться однозначной. Наличие скачка фазы $\Delta\phi$ само по себе нарушает эту однозначность. Это означает, что рождение солитона сопровождается появлением вне солитона противотока, компенсирующего скачок фазы. Импульс противотока вносит вклад в канонический имульс. Скорость противотока вычисляется из условия

$$\Delta\phi_{\mathrm{cfl}} = \frac{2\pi R v_{\mathrm{cfl}} M}{\hbar} = -\Delta\phi\,, \tag{11}$$

где учтено, что вне солитона, т.е. при условии

$$R \geqslant \xi\,, \tag{12}$$

где ξ — толщина ядра солитона, скорость противотока можно считать постоянной по сечению ловушки. Соответственно, импульс противотока равен $P_{\mathrm{cfl}} = 2\pi R m n_{1\infty} v_{\mathrm{cfl}} = -\hbar m n_{1\infty}\Delta\phi/M$. Канонический импульс есть полный имульс[2], т.е. он равен сумме $P + P_{\mathrm{cfl}}$:

$$P_{\mathrm{C}} = m N_{\mathrm{D}} V - \hbar n_{1\infty}\,\frac{m}{M}\,\Delta\phi\,. \tag{13}$$

Дифференцируя это уравнение по V и учитывая (10), мы находим искомое соотношение между m_{I}, N_{D} и $\Delta\phi$:

$$m_{\mathrm{I}} = m\left(\frac{\partial}{\partial V}\,N_{\mathrm{D}} V\right)_{\mu} - \hbar n_{1\infty}\,\frac{m}{M}\left(\frac{\partial}{\partial V}\,\Delta\phi\right)_{\mu}. \tag{14}$$

Это уравнение было использовано в работе [6] при исследовании динамики солитона в сверхтекучем ферми-газе в условиях унитарности. В работе рассматривались лишь малые колебания солитона в ловушке и разница между N_{S} и N_{D} не была существенна (см. раздел 3).

3. Эффективное число частиц и дефект числа частиц

Теперь моя задача — выразить эффективное число частиц в солитоне N_{S} через N_{D} и $\Delta\phi$. Для покоящегося солитона эта задача очень проста. Состояние системы является стационарным и мы можем применить термодинамическое соотношение для энергии E' большого канонического ансамбля $N = -(\partial E'/\partial\mu)$, где N — число атомов в системе. По определению энергии солитона $E'(\mu) = E_0(\mu) + \epsilon(V=0,\mu)$, где $E_0(\mu)$ — энергия в отсутствие солитона и $N = N_0 + N_{\mathrm{D}}$. Таким образом,

$$N_{\mathrm{D}} = -\frac{\partial\epsilon\,(V=0,\mu)}{\partial\mu} = N_{\mathrm{S}}\,. \tag{15}$$

Эта формула, однако, неприменима в случае движущегося солитона, поскольку задача в лабораторной системе отсчёта является нестационарной и вопрос требует специального исследования, которое было произведено в работах [8, 9]. В этих работах вычисления производились в переменных μ и P_{C}. (На отличие между N_{D} и N_{S} мне указал Д.М. Гангардт.) Я надеюсь, что излагаемый ниже вывод будет способствовать пониманию физического смысла полученных уравнений. Замечу, что исследованию этого интересного вопроса в течение долгого времени препятствовало то, до некоторой степени случайное, обстоятельство, что для плоского солитона Судзуки $N_{\mathrm{D}} = N_{\mathrm{S}}$ и при конечной скорости.

Для того чтобы применить термодинамику к движущемуся солитону, нужно перейти в систему отсчёта, движущуюся относительно лабораторной со скоростью V, где солитон покоится. Согласно общему правилу преобразования механических величин при преобразовании Галилея энергия солитона в этой системе равна

$$\tilde{\epsilon}(V,\mu) = \epsilon(V,\mu) - P_{\mathrm{C}}(V,\mu)\,V\,. \tag{16}$$

Соответственно, изменение числа частиц при рождении солитона, аналогично (15), равно

$$\Delta N = -\frac{\partial\tilde{\epsilon}(V=0,\mu)}{\partial\mu} = -\frac{\partial}{\partial\mu}\,(\epsilon - P_{\mathrm{C}} V)_V\,. \tag{17}$$

Эту величину, однако, ещё нельзя отождествить с N_{D}. Наличие противотока приводит к изменению числа частиц также и вне солитона на конечную величину ΔN_{cfl}. При $R \to \infty$ плотность этих частиц стремится к нулю и не может быть измерена, поэтому ΔN_{cfl} нужно вычесть из ΔN:

$$N_{\mathrm{D}} = \Delta N - \Delta N_{\mathrm{cfl}}\,. \tag{18}$$

Величину ΔN_{cfl} легко вычислить, используя гидродинамическое уравнение Бернулли, которое справедливо в сверхтекучем газе вне солитона:

$$\mu_l(n_{1\infty}) + m\,\frac{v^2}{2} = \mu_0\,, \tag{19}$$

где $\mu_l(n_{1\infty})$ — химический потенциал неподвижного газа, выраженный через плотность, v — его скорость. В основном состоянии $v = -V$. После появления солитона $v = -V + v_{\mathrm{cfl}}$. Таким образом, рождение солитона меняет μ_l на величину $\Delta\mu_l = m[(-V + v_{\mathrm{cfl}})^2 - V^2]/2 \approx mVv_{\mathrm{cfl}}$. Соответствующее изменение плотности равно $\Delta n_{1\infty} = (\mathrm{d}n_{1\infty}/\mathrm{d}\mu)\,mVv_{\mathrm{cfl}}$ и изменение числа частиц

$$\Delta N_{\mathrm{cfl}} = \frac{\mathrm{d}n_{1\infty}}{\mathrm{d}\mu}\,mV 2\pi R v_{\mathrm{cfl}} = -\frac{\mathrm{d}n_{1\infty}}{\mathrm{d}\mu}\,V\,\frac{m}{M}\,\Delta\phi\,, \tag{20}$$

где я использовал уравнение (11) для $2\pi R v_{\mathrm{cfl}}$. Подставляя (17) и (20) в (18), находим окончательно для дефекта числа частиц в солитоне

$$N_{\mathrm{D}} = -\frac{\partial}{\partial\mu}\,(\epsilon - P_{\mathrm{C}} V)_V + \frac{\mathrm{d}n_{1\infty}}{\mathrm{d}\mu}\,V\,\frac{m}{M}\,\Delta\phi\,. \tag{21}$$

Используя определение (3) эффективного числа атомов и выражение (13) для импульса P_{C}, мы получаем искомое выражение N_{S} через N_{D} и $\Delta\phi$:

$$N_{\mathrm{S}} = N_{\mathrm{D}} - mV^2\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\,N_{\mathrm{D}}\right)_V - V\hbar n_{1\infty}\,\frac{m}{M}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\,\Delta\phi\right)_V. \tag{22}$$

Для солитона Судзуки можно, решая уравнение Гросса–Питаевского, получить явные аналитические выражения для всех рассматриваемых величин. Уравнения (14), (21) дают тогда

$$N_{\mathrm{S}} = N_{\mathrm{D}} = \frac{m_{\mathrm{I}}}{2m} \tag{23}$$

[2] Я не обсуждаю в этой заметке вопрос фактического вычисления импульса. Для уединённых волн, содержащих квантованные вихри, целесообразно использовать другое — эквивалентное — уравнение, полученное в [7].

независимо от скорости V. Тот же результат даёт и прямое интегрирование (6).

Вернёмся к уравнению (21). Мы можем исключить $\Delta\phi$ из уравнения, воспользовавшись (13). Далее можно воспользоваться соотношением между производными, которое справедливо, если выполняется каноническое уравнение (9):

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\epsilon - P_{\mathrm{C}}V\right)_V = \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\mu}\right)_{P_{\mathrm{C}}}. \tag{24}$$

В результате получаем уравнение для N_{D}

$$\left(1 - \frac{mV^2}{n_{1\infty}}\frac{\mathrm{d}n_{1\infty}}{\mathrm{d}\mu}\right)N_{\mathrm{D}} = -\left[\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\mu}\right)_{P_{\mathrm{C}}} + \frac{V}{n_{1\infty}}\frac{\mathrm{d}n_{1\infty}}{\mathrm{d}\mu}\,P_{\mathrm{C}}\right], \tag{25}$$

или, принимая во внимание уравнение для скорости звука $c^2 = (n_{1\infty}/m)(\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}n_{1\infty})$,

$$N_{\mathrm{D}} = -\frac{(\partial\epsilon/\partial\mu)_{P_{\mathrm{C}}} + VP_{\mathrm{C}}/mc^2}{1 - V^2/c^2}. \tag{26}$$

В такой форме уравнение представлено в работе [9] (см. уравнение (3.16)). Это уравнение удобно, если энергия солитона задана как функция P_{C}, а не V, как это обычно бывает в микроскопических теориях, основанных на точно решаемых моделях. Вычисления же с помощью уравнений, аналогичных уравнению ГП теории среднего поля, производятся в переменных μ, V. Уравнение (25) было использовано в [10] для вычисления N_{D} в одномерном ферми-газе. Замечу, что если подставить N_{D} из (26) в уравнение (13) и воспользоваться определением канонического импульса (9), то получится уравнение, определяющее скачок фазы $\Delta\phi$ через производные $\epsilon(P_{\mathrm{C}}, \mu)$.

4. Нетривиальный пример. Магнитный солитон

Как я уже отметил, применение полученных соотношений к плоскому солитону в слабонеидеальном бозе-газе приводит к тривиальному результату (23). В настоящее время известно лишь небольшое число аналитических решений, описывающих солитоны. В этом разделе я применю полученные соотношения к недавно предсказанному "магнитному солитону" в смеси двух конденсатов Бозе – Эйнштейна, находящихся в разных состояниях сверхтонкого триплета [11]. Такая смесь описывается системой двух связанных уравнений типа уравнения Гросса – Питаевского. Задача, однако, существенно упрощается при выполнении неравенства

$$\delta \equiv a - a_{12} \ll a, \tag{27}$$

где $a = \sqrt{a_{11}a_{22}}$ и $a_{11} \approx a_{22}$ — длины рассеяния атомов на атомах в том же состоянии, а a_{12} — длина рассеяния между атомами в разных состояниях. При таком условии уравнения, описывающие динамику полной плотности газа $n = n_1 + n_2$, и разности плотностей компонент $n_1 - n_2$, разделяются. Я буду рассматривать симметричный случай, когда $a_{11} = a_{22}$ и невозмущённые плотности равны, $n_1 = n_2$. Существенно, что малые возмущения плотности n распространяются со скоростью звука $c = \sqrt{gn/m}$, где g — постоянная взаимодействия, равная для случая чисто одномерного движения $4\pi\hbar^2 a/m$. Химический потенциал равен обычному для конденсата значению $\mu = gn$. Возмущения же разности $n_1 - n_2$, имеющей смысл спиновой поляризации газа, распространяются со скоростью "спинового звука"

$$c_{\mathrm{s}} = \sqrt{\alpha\frac{gn}{m}} = \sqrt{\alpha\frac{\mu}{m}}, \tag{28}$$

где $\alpha = \delta a/2a \ll 1$ является малым параметром задачи, так что $c_{\mathrm{s}} \ll c$. При этом полная плотность n возмущена слабо. Аналогично можно построить аналитическое решение, описывающее плоский "магнитный солитон", т.е. локализованную область, где $n_1 - n_2 \neq 0$, причём полная плотность n в первом приближении постоянна. Переменными здесь являются $n_1 - n_2$ и фазы ϕ_1 и ϕ_2 двух параметров порядка, вместо которых удобно ввести разность фаз $\phi_{\mathrm{A}} = \phi_1 - \phi_2$ и суммарную фазу $\phi_{\mathrm{B}} = \phi_1 + \phi_2$. В дальнейшем нам понадобятся только энергия магнитного солитона

$$\epsilon_{\mathrm{M}} = n\hbar\sqrt{c_{\mathrm{s}}^2 - V^2} \tag{29}$$

и скачок суммарной фазы ϕ_{B}:

$$\Delta\phi_{\mathrm{B}} = -2\arccos\left(\frac{V}{c_{\mathrm{s}}}\right). \tag{30}$$

Нетрудно обобщить уравнение (13) для канонического импульса на случай наличия двух конденсатов:

$$P_{\mathrm{MC}} = mN_{\mathrm{MD}}V - \hbar\,\frac{n}{2}\,\Delta\phi_{\mathrm{B}}. \tag{31}$$

Теперь нужно учесть, что полная плотность n остаётся слабовозмущённой и внутри солитона. Это значит, что первый член в этом уравнении мал и им можно пренебречь. (Можно показать, что $|N_{\mathrm{MD}}|V \sim \alpha\hbar n\Delta\phi_{\mathrm{B}}/m$.) Таким образом,

$$P_{\mathrm{MC}} \approx -\hbar\,\frac{n}{2}\,\Delta\phi_{\mathrm{B}} = \hbar n\arccos\left(\frac{V}{c_{\mathrm{s}}}\right). \tag{32}$$

Канонический импульс магнитного солитона почти полностью определяется противотоком. Из (32) следует простое выражение энергии солитона через импульс:

$$\epsilon_{\mathrm{M}} = n\hbar c_{\mathrm{s}}\left|\sin\left(\frac{P_{\mathrm{MC}}}{\hbar n}\right)\right|, \quad -\frac{\pi\hbar n}{2} \leqslant P_{\mathrm{MC}} \leqslant \frac{\pi\hbar n}{2}. \tag{33}$$

Дифференцирование выражения (29) позволяет вычислить инерциальную массу и эффективное число частиц:

$$m_{\mathrm{MI}} = -\frac{n\hbar}{\sqrt{c_{\mathrm{s}}^2 - V^2}}, \qquad N_{\mathrm{MS}} = -\frac{\hbar}{g}\left[\sqrt{c_{\mathrm{s}}^2 - V^2} + \frac{c_{\mathrm{s}}^2}{2\sqrt{c_{\mathrm{s}}^2 - V^2}}\right]. \tag{34}$$

Обе эти величины расходятся при приближении к скорости магнитного звука, однако их отношение, входящее в уравнение движения (2), остаётся конечным:

$$\frac{N_{\mathrm{MS}}}{m_{\mathrm{MI}}} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{3}{2}\,c_{\mathrm{s}}^2 - V^2\right]. \tag{35}$$

Вычислим теперь дефект числа частиц в магнитном солитоне N_{MD}. Уравнение (21) для случая двух конденсатов принимает вид

$$N_{\mathrm{MD}} = -\frac{\partial}{\partial\mu}\,(\epsilon - P_{\mathrm{C}}V)_V + \frac{\mathrm{d}n_{1\infty}}{\mathrm{d}\mu}\,V\,\frac{1}{2}\,\Delta\phi\,, \tag{36}$$

или, выразив P_{C} через $\Delta\phi$ согласно (32), получим

$$N_{\mathrm{MD}} = -\frac{\partial\epsilon}{\partial\mu} - nV\,\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\,\Delta\phi\,. \tag{37}$$

Простое вычисление даёт

$$N_{\mathrm{MD}} = -\frac{3\hbar}{2g}\,\sqrt{c_{\mathrm{s}}^2 - V^2}\,. \tag{38}$$

Мы видим, что, в отличие от солитона Судзуки, поведение N_{MS} и N_{MD} при $V \to c_{\mathrm{s}}$ совершенно различно. При $V = 0$ эти величины, как и должно быть, совпадают.

5. Вывод соотношения между N_{S} и N_{D} непосредственно из уравнений

В этом разделе мы получим уравнение (21) непосредственно из уравнения, обобщающего уравнение Гросса–Питаевского. Такие уравнения широко применяются в теории солитонов, если система может описываться теорией среднего поля. К такому кругу задач, в частности, относятся и исследование уединённых волн в цилиндрической ловушке на основе уравнения ГП. Дело в том, что простое соотношение (23) справедливо лишь для плоского солитона Судзуки. При наличии же радиального удерживающего потенциала уже для обычного солитона нужно использовать полученные выше уравнения, не говоря о более сложных уединённых волнах, существующих в такой геометрии [4, 12].

Я буду предполагать, что система описывается параметром порядка, или волновой функцией, $\Psi(t,\mathbf{r}) = \sqrt{n}\exp(\mathrm{i}\phi)$, так что $\mathbf{j} = n(\hbar/m)\,\nabla\phi$, и функционалом энергии большого канонического распределения

$$H'[\Psi,\Psi^*,\mu] = H[\Psi,\Psi^*] - E_0' - \mu\int|\Psi|^2\,\mathrm{d}^3x\,. \tag{39}$$

Я положил $M = m$, ограничившись здесь случаем бозонов. Уравнение для Ψ получается варьированием $H'[\Psi,\Psi^*]$ по Ψ^*:

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi = \left(\frac{\delta H'}{\delta\Psi^*}\right)_\mu. \tag{40}$$

Для бегущего солитона решение имеет вид $\Psi = \Psi_{\mathrm{S}}(z - Vt)$, так что уравнение можно переписать как

$$-\mathrm{i}\hbar V\partial_z\Psi_{\mathrm{S}} = \left(\frac{\delta H'}{\delta\Psi^*}\right)_\mu. \tag{41}$$

Определим теперь N_{S} и N_{D} через H'. Энергия газа в присутствии солитона $\varepsilon = H'[\Psi_{\mathrm{S}},\Psi_{\mathrm{S}}^*,\mu]$ и

$$N_{\mathrm{S}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\,H'[\Psi_{\mathrm{S}},\Psi_{\mathrm{S}}^*,\mu]\,.$$

С другой стороны, дифференцирование (39) при постоянной Ψ очевидным образом даёт

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\,(H')_\Psi = -\int\left(|\Psi|^2 - n_\infty\right)\mathrm{d}^3x\,,$$

поскольку $\mathrm{d}E_0'/\mathrm{d}\mu = -N$. Таким образом,

$$N_{\mathrm{D}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\,(H')_{\Psi=\Psi_{\mathrm{S}}}\,.$$

Производя дифференцирование функционала $H'[\Psi_{\mathrm{S}},\Psi_{\mathrm{S}}^*,\mu]$, находим

$$N_{\mathrm{S}} = N_{\mathrm{D}} - \int\left(\frac{\delta H'}{\delta\Psi^*}\,\frac{\mathrm{d}\Psi^*}{\mathrm{d}\mu} + \text{c.c.}\right)\mathrm{d}^3x\,, \tag{42}$$

где после дифференцирования нужно заменить $\Psi \to \Psi_{\mathrm{S}}$. Исключая вариационные производные с помощью (41), находим:

$$N_{\mathrm{S}} = N_{\mathrm{D}} - 2\hbar V\,\mathrm{Im}\int\left(\partial_z\Psi_{\mathrm{S}}\,\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{S}}^*}{\mathrm{d}\mu}\right)\mathrm{d}^3x\,. \tag{43}$$

Замечу, что из этого уравнения без дополнительных вычислений следует, что для плоского солитона Судзуки $N_{\mathrm{S}} = N_{\mathrm{D}}$. Действительно (см. [5], уравнение (5.56)), решение в этом случае можно представить в форме, где $\mathrm{Im}\,\Psi_{\mathrm{S}}$ не зависит от z и μ, так что второй член в (43) равен нулю. Подставив в (42) $\Psi_{\mathrm{S}} = \sqrt{n}\exp(\mathrm{i}\phi)$, после простых пребразований находим

$$N_{\mathrm{S}} - N_{\mathrm{D}} = -\hbar V\int\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\,(n\partial_z\phi) - \partial_z\left(n\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mu}\right)\right]\mathrm{d}^3x\,. \tag{44}$$

Во втором члене этого уравнения можно произвести интегрирование по z:

$$\int\partial_z\left(n\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mu}\right)\mathrm{d}^3x = n_{1\infty}\,\frac{\mathrm{d}\Delta\phi}{\mathrm{d}\mu}\,,$$

где я учёл, что что $\phi(z \to \pm\infty)$ не зависит от x и y. Используя определение (7) локального импульса, получаем уравнение

$$N_{\mathrm{S}} - N_{\mathrm{D}} = -V\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\mu} + n_{1\infty}V\hbar\,\frac{\mathrm{d}\Delta\phi}{\mathrm{d}\mu}\,, \tag{45}$$

совпадающее, с учётом (13), с (21).

6. Заключение

Теоретическое описание уединённых волн является трудной проблемой, требующей привлечения микроскопической теории, поскольку характерная толщина ядра оказывается порядка корреляционной длины частиц в системе. Соответственно, сравнение теоретических предсказаний с экспериментом даёт важную информацию о правильности теоретических представлений. Исследование движения солитона в удлинённой ловушке является важнейшим из доступных экспериментов. Сравнение теории с экспериментом с помощью наблюдаемых величин N_{D} и $\Delta\phi$ открывает новые возможности. Это особенно относится к численному эксперименту, где указанные величины легко определяются, а сравнение с найденным законом движения позволяет проверить самосогласованность вычислений и теории, на которой они основаны, и оценить точность вычислений.

Послесловие. Предлагаемая заметка публикуется в октябрьском номере журнала "Успехи физических наук" (*УФН*, 2016 г.), посвящённом 100-летию со дня рождения В.Л. Гинзбурга. Он был замечательным физиком, получившим классические результаты в самых разных областях теоретической физики. Общение с ним было очень важно для моего научного развития, и я всегда восхищался его человеческими качествами. Началом нашего общения, которое не прерывалось до конца его жизни, послужила совместная работа по теории сверхтекучести ^{4}He вблизи λ-точки [13, 14], и я сразу был поражён ясностью его мысли, да и полным отсутствием важности. Второе существенное пересечение нашей активности относится к теории сил Ван-дер-Ваальса. Когда И.Е. Дзялошинский, Е.М. Лифшиц и я [15, 16] развили теории этих сил в поглощающих энергию электромагнитного поля диэлектриках, теория была сформулирована на языке диаграмной техники квантовой теории поля. В.Л. спросил меня, нельзя ли обойтись без этого. Я был уверен, что нельзя. Однако вскоре В.Л. придумал очень остроумный метод избежать трудности с поглощением и вместе с Ю.С. Барашом построил законченную теорию [17]. При этом их формулировка позволила упростить некоторые громоздкие вычисления. В.Л., как мне кажется, никогда не занимался теорией солитонов, которой посвящена моя заметка. Но в теории солитонов в сверхтекучих ферми-системах мы постоянно пользуемся бозонным параметром порядка, т.е. волновой функцией Гинзбурга – Ландау. Кстати, роль теории Гинзбурга – Ландау с течением времени только возрастает. Конечно, ничто не может заменить живого общения с В.Л. Гинзбургом, но его работы остались и будут служить следующим поколениям физиков.

Неоценима роль В.Л. Гинзбурга как главного редактора журнала *УФН* [18]. Он неустанно работал на этом посту буквально до последнего дня своей жизни и всегда старался проводить беспристрастную и принципиальную политику.

Я благодарен Д.М. Гангардту, F. Dalfovo и S. Giorgini за обсуждение рассматриваемых в статье вопросов. Работа поддержана Европейским Исследовательским Советом (ERC) через QGBE грант, грантом QUIC программы FET Horizon2020 и Автономной провинцией Тренто.

Список литературы

1. Tsuzuki T *J. Low Temp. Phys.* **4** 441 (1971)
2. Busch Th, Anglin J R *Phys. Rev. Lett.* **84** 2298 (2000)
3. Konotop V V, Pitaevskii L *Phys. Rev. Lett.* **93** 240403 (2004)
4. Komineas S, Papanicolaou N *Phys. Rev. A* **68** 043617 (2003)
5. Pitaevskii L, Stringari S *Bose – Einstein Condensation and Superfluidity* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2016)
6. Scott R G, Dalfovo F, Pitaevskii L P, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **106** 185301 (2011)
7. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **146** 1252 (2014); Pitaevskii L P *JETP* **119** 1097 (2014); arXiv:1311.4693
8. Schecter M, Gangardt D M, Kamenev A *Ann. Physics* **327** 639 (2012)
9. Campbell A S "Mobile impurities in one-dimensional quantum liquids", PhD Thesis (Birmingham: Univ. of Birmingham, 2013)
10. Shamailov S S, Brand J *New J. Phys.* **18** 075004 (2016)
11. Qu C, Pitaevskii L P, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **116** 160402 (2016)
12. Brand J, Reinhardt W P *Phys. Rev. A* **65** 043612 (2002)
13. Гинзбург В Л, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **34** 1240 (1958); Ginzburg V L, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **7** 858 (1958)
14. Гинзбург В Л *УФН* **174** 1240 (2004); Ginzburg V L *Phys. Usp.* **47** 1155 (2004)
15. Дзялошинский И Е, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **36** 4797 (1959); Dzyaloshinskii I E, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **9** 1282 (1959)
16. Дзялошинский И Е, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *УФН* **73** 381 (1961); Dzyaloshinskii I E, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Sov. Phys. Usp.* **4** 153 (1961)
17. Бараш Ю С, Гинзбург В Л *УФН* **143** 345 (1984); Barash Yu S, Ginzburg V L *Sov. Phys. Usp.* **27** 467 (1984)
18. Гинзбург В Л *УФН* **179** 562 (2009); Ginzburg V L *Phys. Usp.* **52** 530 (2009)

Dynamics of solitary waves in ultracold gases in terms of observable variables

L.P. Pitaevskii
P.L. Kapitza Institute for Physical Problems, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation;
Dipartimento di Fisica, Universitá di Trento and INO-CNR BEC Center, Povo, I-38123 Trento, Italy
E-mail: *lev@science.unitn.it*

A variety of solitary waves, such as solitons, vortex rings, solitonic vortices and more complex entities, have recently been predicted to exist. They can move in superfluid ultracold gases along elongated traps. The theoretical description of this motion requires knowledge of the inertial soliton mass and the effective number of particles in it as functions of the soliton velocity. While these functions can be calculated by a microscopic theory, it is also possible to express them directly in terms of observable variables, such as the order parameter phase jump and the particle number deficiency in the soliton. In this note, the corresponding equations are derived in a simple and clear way and applied to the recently predicted 'magnetic soliton' in mixtures of Bose gases in various spin states.

Keywords: solitary waves, solitons, local and canonical momenta, Ginzburg–Landau wave function, inertial mass, phase jump, effective number of particles, particle number deficiency, magnetic soliton

PACS numbers: 03.75.Lm, 3.75.Kk, 67.85.De

Bibliography — 18 references *Received 16 August 2016*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **186** (10) 1127 – 1132 (2016)
DOI: 10.3367/UFNr.2016.08.037891

Physics – Uspekhi **59** (10) (2016)
DOI: 10.3367/UFNe.2016.08.037891