

# Квантовые измерения в детекторах гравитационных волн

Ф.Я. Халили

*Чувствительность современных детекторов гравитационных волн столь высока, что она в значительной степени ограничивается квантовыми флуктуациями света в них. В настоящее время активно разрабатываются методы подавления или обхода этих флуктуаций; простейший из них, а именно использование сжатого света, уже применяется в детекторе GEO 600. Целью обзора является ознакомление читателя с ограничениями, налагаемыми квантовой механикой на чувствительность оптомеханических устройств, в частности лазерных детекторов гравитационных волн, а также с теми из методов преодоления этих ограничений, которые считаются наиболее перспективными для реализации в современных и планируемых детекторах.*

**Ключевые слова:** детекторы гравитационных волн, квантовый шум, сжатый свет, стандартный квантовый предел, квантовые невозмущающие измерения, фильтрующие резонаторы, квантовый измеритель скорости, оптическая жёсткость

PACS numbers: 03.65.Ta, 04.80.Na, 42.50.-p

DOI: 10.3367/UFNr.2016.07.037866

## Содержание

1. Введение (1059).
  2. Основные принципы (1061).
    - 2.1. Линейная квантовая пробная система.
    - 2.2. Суммарный квантовый шум.
    - 2.3. Стандартный квантовый предел.
    - 2.4. Условие квантовости пробного объекта.
    - 2.5. Предел чувствительности для координатных измерений.
  3. Квантовые шумы в лазерных интерферометрах (1068).
    - 3.1. Интерферометр Майкельсона.
    - 3.2. Интерферометр Майкельсона/Фабри–Перо с рециркулирующей мощностью и сигнала.
    - 3.3. Спектральные плотности квантовых шумов.
  4. Методы подавления квантовых шумов в лазерных интерферометрах (1073).
    - 4.1. Сжатый свет.
    - 4.2. Частотно-зависимое сжатие и вариационное измерение.
    - 4.3. Квантовый измеритель скорости.
    - 4.4. Модификация динамики пробных масс.
  5. Заключение (1086).
  6. Приложения (1087).
    - А. Спектры и спектральные плотности.
    - Б. Двухфотонный формализм.
- Список литературы (1088).

## 1. Введение

12 января 2016 г. завершился первый цикл научных наблюдений (observing run 1, O1) двух детекторов гравитационных волн Advanced LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), который формально

начался 18 сентября 2015 г., а фактически — примерно на две недели раньше. Во время этого цикла впервые были зарегистрированы гравитационно-волновые сигналы от слияния пар чёрных дыр. Было принято два сигнала — 14 сентября 2015 г. [1] и 26 декабря 2015 г. [2].

Этот результат стал огромным успехом общей теории относительности (ОТО), в рамках которой существование гравитационных волн было предсказано почти 100 лет тому назад [3]. Подчеркнём, что во всех предыдущих знаменитых тестах (смещение перигелия Меркурия, отклонение световых лучей при их прохождении вблизи Солнца, гравитационное замедление времени) ОТО проверялась для почти плоского пространства-времени, со значениями гравитационного потенциала  $\varphi \ll c^2$ . Существует ряд альтернативных теорий гравитации, дающих для относительно слабых гравитационных полей те же результаты, что и ОТО, и поэтому также корректно предсказывающих упомянутые эффекты. Косвенное подтверждение самого факта существования гравитационных волн по изменению периода обращения компактных двойных систем (за что была присуждена Нобелевская премия 1993 года [4, 5]) не изменило этой ситуации, так как орбитальное движение таких систем вполне укладывается в рамки первого постньютоновского приближения (детальное обсуждение этой проблемы и большое число ссылок читатель может найти в обзорах [6, 7]).

Первое прямое наблюдение гравитационных волн уже дало новую пищу для размышлений также и астрофизикам [8, 9]. Последующие наблюдения гравитационных волн, очевидно, существенно изменят наши взгляды на Вселенную, подобно тому как это произошло после появления радиоастрономии.

И наконец, детектирование гравитационных волн стало колоссальным триумфом экспериментальной физики. Измеренная величина безразмерной вариации мет-

Ф.Я. Халили. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация  
E-mail: khalili@phys.msu.ru

Статья поступила 8 июня 2016 г.

рики пространства-времени  $h$ , т.е. для почти свободных масс лазерных детекторов гравитационных волн вариации относительных расстояний между ними, составила порядка  $10^{-21}$ . В единицах абсолютных смещений, с учётом длин плеч интерферометров LIGO  $L = 4$  км, эта величина соответствует

$$x = \frac{hL}{2} \sim 10^{-18} \text{ м} \quad (1.1)$$

(что на три порядка меньше размера протона). Уровень шума в наиболее чувствительном диапазоне частот 100–300 Гц при этом был ниже  $10^{-23}$  Гц $^{-1/2}$  (в единицах относительных смещений).

Путь к такой невероятно высокой чувствительности занял почти полвека напряжённой работы экспериментаторов всего мира (см., например, обзоры [10–13]). Отсчитывать этот путь принято начиная с опытов Дж. Вебера, который, по-видимому, первым осознал, что наблюдение гравитационных волн от астрофизических источников — это не абсолютно безнадежная задача [14]. В качестве детекторов Вебер использовал алюминиевые цилиндры длиной 1,5 м с собственной частотой основной моды около 1,7 кГц. В 1969 г. он сообщил о регистрации, как позднее выяснилось, ошибочной, с их помощью гравитационных волн на уровне сигнала  $h \sim 10^{-16}$  [15] — на пять порядков больше, чем у сигналов, зарегистрированных Advanced LIGO (ALIGO).

В начале 1970-х годов опыты Вебера были повторены группой В.Б. Брагинского в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова (МГУ). Два твердотельных детектора этой группы имели параметры, близкие к параметрам детекторов Вебера, и примерно такую же чувствительность. Однако гравитационных волн ими обнаружено не было [16].

Впоследствии в мире был построен целый ряд твердотельных детекторов. Их чувствительность, в первую очередь за счёт охлаждения до криогенных температур и использования более совершенных систем считывания механических колебаний, в 1980-е годы была доведена примерно до  $h \sim 10^{-18}$  [17], а после 2000 г., в эпоху уже лазерных детекторов, достигла, правда в узкой полосе частот вблизи механического резонанса, значений, близких к  $10^{-21}$  Гц $^{-1/2}$  [18, 19]. Но ни на одном из них гравитационных волн также обнаружено не было.

Эти значения чувствительности являлись уже не столь далёкими от уровня квантовых флуктуаций твердотельных детекторов, в частности от Стандартного квантового предела (СКП) (в англоязычной литературе Standard Quantum Limit, SQL) — характерного ограничения точности измерения, который соответствует балансу между ошибкой измерения и случайным обратным воздействием измерителя на объект, возникающим в силу принципа неопределённости Гейзенберга.

Это обстоятельство, а также понимание того, что реальное детектирование гравитационных волн требует повышения чувствительности по крайней мере на несколько порядков, стимулировали появление первых работ, посвящённых теории и методам квантовых измерений с макроскопическими механическими объектами. В частности, в конце 1960-х годов В.Б. Брагинским было сформулировано понятие СКП [20, 21], а в 1970-е годы появились первые работы, в которых были предложены схемы измерений, позволяющие преодолевать этот предел [22–26]. С сожалением, эти работы не получили тогда

прямого экспериментального продолжения — во многом из-за ограниченности технологий того времени, но главное, вследствие того что развитие детекторов гравитационных волн пошло радикально другим путём — путём использования лазерных интерферометрических детекторов, идея которых была предложена ещё в 1962 г. М.Е. Герценштейном и В.И. Пустовойтом [27] (см. также ранний обзор [10], где было указано на перспективность использования оптических методов измерений в гравитационно-волновых экспериментах).

Интересно отметить, что почти через 40 лет эти ранние работы оказались востребованными в другой области физики. В настоящее время наблюдается бум интереса к квантовым оптомеханическим системам [28, 29]. Несмотря на то что по своим параметрам механические осцилляторы, используемые в этих экспериментах, радикально отличаются от колебательных мод твердотельных детекторов гравитационных волн, методы квантовых измерений, разработанные в своё время для последних, могут с успехом применяться и в оптомеханических системах. Такие возможности активно обсуждаются в литературе, и на этом пути достигнуты уже первые успехи [30].

Первый работающий интерферометрический детектор был построен в Исследовательских лабораториях Хьюза (Hughes Research Laboratories) в конце 1960-х годов, почти одновременно с экспериментами Дж. Вебера [31]. Как размер, так и чувствительность этого детектора были весьма скромными и уступали даже таковому детектору Вебера. Позднее, в 1980-е годы, в мире было построено несколько так называемых прототипных интерферометров с длинами плеч, измеряемыми несколькими десятками метров [32–34]. Основной их задачей было не детектирование гравитационных волн, а отработка технологий для будущих, гораздо более крупных, устройств. Тем не менее по чувствительности они уже вполне могли соперничать с лучшими твердотельными детекторами того времени; и именно они впервые достигли уровня чувствительности, ограниченного квантовыми флуктуациями света.

Наконец, в 1990-е годы началось строительство больших лазерных интерферометров: LIGO [35, 36], Virgo [37], GEO 600 [38] и TAMA 300 [39]. Огромная длина плеч этих интерферометров, несколько сотен метров или несколько километров, исходно обеспечила им радикальное преимущество по чувствительности к гравитационному сигналу над твердотельными детекторами даже при той же чувствительности к абсолютным смещениям (см. формулу (1.1)). К середине 2000-х годов после нескольких лет отладки детекторы LIGO достигли своей проектной (рекордно высокой на то время) чувствительности, в наилучшей точке (около 150 Гц) превосходящей величину  $\sim 3 \times 10^{-23}$  Гц $^{-1/2}$  [40]. Впоследствии эта чувствительность была ещё несколько улучшена, в частности, благодаря использованию сжатых квантовых состояний света [41, 42].

Более подробно с историей лазерных детекторов гравитационных волн можно ознакомиться в обзоре [19].

В 2011 г. детекторы LIGO были выключены и началось их радикальное обновление. Фактически от старых интерферометров осталась только оболочка — вакуумная система, все остальные ключевые элементы были заменены новыми. Проектная чувствительность новых интерферометров ALIGO на порядок выше чув-

**Таблица.** Основные обозначения, используемые в настоящем обзоре

$c$	Скорость света
$h$	Безразмерный гравитационно-волновой сигнал (вариация метрики)
$\hbar$	Постоянная Планка
$I_0$	Мощность лазера накачки
$I_c$	Суммарная оптическая мощность в двух плечах интерферометра
$\mathcal{K}(\Omega)$	Коэффициент оптомеханической связи для интерферометра Майкельсона/Фабри – Перо (см. формулу (3.37))
$\mathcal{K}_{SM}(\Omega)$	Коэффициент оптомеханической связи для интерферометра Саньяка/Фабри – Перо (см. формулу (4.61))
$L$	Длина плеч интерферометра
$m$	Масса пробного объекта; приведённая масса зеркал интерферометра
$M$	Физическая масса пробных зеркал интерферометра
$Q_m$	Добротность механического осциллятора
$e^r$	Амплитуда сжатия света, $r$ — безразмерная величина, характеризующая степень сжатия в логарифмическом масштабе
$\gamma$	Полуширина полосы пропускания оптического резонатора
$\delta$	Отстройка частоты оптической накачки от собственной частоты оптического резонатора
$\epsilon^2$	Приведённые оптические потери в интерферометре (см. формулу (4.7))
$\zeta$	Гомодинный угол
$\eta$	Унифицированная квантовая эффективность интерферометра
$\Theta$	Нормированная оптическая мощность (см. формулу (3.38))
$\theta$	Фаза сжатия света
$\Omega$	Любая низкая (механическая) частота
$\Omega_m$	Собственная частота механического осциллятора
$\omega$	Любая высокая (оптическая) частота
$\omega_0$	Собственная частота оптического резонатора

ствительности интерферометров LIGO первого поколения [43]. В итоге уже первый цикл научных наблюдений новых детекторов, пока ещё с чувствительностью, несколько уступающей проектной, принёс наконец успех — детектирование гравитационных волн.

Большие лазерные детекторы гравитационных волн с самого момента их появления можно было рассматривать как квантовые устройства. Уже в детекторах первого поколения существенная часть их рабочего диапазона, примерно от 200 Гц и выше, ограничивалась квантовыми флуктуациями фазы света (дробовым шумом). На более низких частотах в этих детекторах доминировали различные технические шумы, в частности сейсмический шум и тепловой шум подвесов зеркал (детальный состав шумов детекторов LIGO приведён на рис. 7 в статье [40]). В детекторах второго поколения эти шумы будут значительно снижены и на первый план на низких частотах выйдет шум радиационного давления, т.е. возмущение движения пробных зеркал детекторов флуктуациями силы лебедевского давления света на них, создаваемыми квантовыми флуктуациями мощности света в плечах интерферометра. В точке наилучшей чувствительности (для ALIGO — около 100 Гц) вклады дробового шума и шума радиационного давления будут примерно равными, давая в сумме СКП. Для параметров ALIGO (см. формулы (3.42a–г)) он соответствует чувствительности, примерно равной  $2 \times 10^{-24}$  Гц $^{-1/2}$  (см. формулу (2.28)), — почти на уровне проектной чувствительности этих детекторов и не столь далеко от результата, уже показанного ими.

В соответствии с разумно оптимистическими астрофизическими прогнозами детекторы с такой чувствительностью должны регистрировать несколько гравитационно-волновых сигналов в год [44]. Однако, для того чтобы превратить детекторы гравитационных волн в регулярный источник астрофизических данных, необходимо повысить их чувствительность ещё по крайней мере примерно на порядок. В итоге на новом уровне повторяется ситуация 1970-х годов: планируемые сейчас детек-

торы так называемого третьего поколения, скорее всего, потребуют использования в них схем квантовых измерений, способных преодолевать СКП.

В настоящем обзоре мы рассматриваем квантовые ограничения чувствительности, возникающие в лазерных детекторах гравитационных волн, и те методы преодоления этих ограничений, которые в настоящее время представляются наиболее перспективными.

В разделе 2 излагаются основные принципы теории линейных квантовых пробных систем, лежащей в основе методов анализа квантовых шумов детекторов гравитационных волн. Раздел 3 посвящён собственно квантовым шумам в лазерных интерферометрах, раздел 4 — некоторым методам подавления этих шумов, как уже опробованным, так и планируемым для применения в будущих детекторах.

Основные обозначения, принятые в данном обзоре, приведены в таблице.

Мы будем стараться избегать громоздких математических выкладок, используя, по возможности, упрощённые модели и качественные физические соображения. Тех из читателей, кто хотел бы ознакомиться с приложениями квантовой теории измерений к лазерным детекторам гравитационных волн более детально, мы отсылаем к существенно более объёмному и подробному обзору [45].

## 2. Основные принципы

### 2.1. Линейная квантовая пробная система

При анализе квантовых ограничений в детекторах гравитационных волн ключевыми являются два обстоятельства. Во-первых, поток энергии в гравитационных волнах от астрофизических источников не является малым и соответствует огромному числу гравитонов [46]. Например, для сигнала, зарегистрированного 14 сентября 2015 г., он составил примерно  $0,3$  мДж м $^{-2}$ ; регистрация электромагнитного импульса с такой энергией не вы-

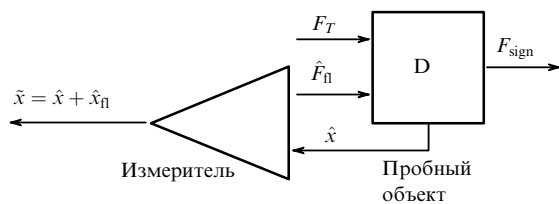


Рис. 1. Эквивалентная схема линейной квантовой пробной системы.

звала бы никаких затруднений. Все проблемы возникают из-за ничтожно слабого взаимодействия гравитационной волны с веществом. Но это же обстоятельство позволяет полностью пренебречь обратным воздействием детектора на гравитационную волну, считая, что она действует на пробное тело как классическая (т.е. заданная) сила.

Во-вторых, малость как этой силы, так и основных источников шумов в детекторах гравитационных волн позволяет с высокой точностью линеаризовать уравнения движения последних в окрестности некоторой заданной рабочей точки.

Таким образом, гравитационно-волновой детектор можно рассматривать как *линейную квантовую пробную систему* [47–49], эквивалентная схема которой изображена на рис. 1. Классическая сила  $F_{\text{sign}}(t)$ , которую требуется обнаружить, действует на квантовый пробный объект, например на колебательную моду "болванки" твердотельного детектора или некоторую совместную моду движения зеркал интерферометра. Координата пробного объекта  $\hat{x}$  считается *линейным квантовым измерителем*, который на выходе возвращает сумму

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) + \hat{x}_n(t), \quad (2.1)$$

где  $\hat{x}_n$  — *измерительный шум* (здесь и всюду ниже мы используем стандартную для рассмотрения таких систем картину эволюции Гейзенберга). В силу принципа неопределённости Гейзенберга измерение координаты обязательно сопровождается возмущением соответствующего канонически сопряжённого импульса. Физическим источником этого возмущения является случайная сила, действующая на пробный объект со стороны измерителя, — так называемый *шум обратного флуктуационного влияния*  $\hat{F}_n$ .

Помимо того, на пробный объект могут действовать разнообразные другие шумовые силы "технического" происхождения, обозначенные на рис. 1 как  $F_T$ . В разделе 2 мы рассмотрим наиболее фундаментальную из них, а именно тепловой шум, связанный с трением в пробном объекте.

Наличие шумов  $\hat{x}_n$  и  $\hat{F}_n$  следует из основных принципов квантовой теории. Оно связано с тем, что значения оператора координаты пробного объекта в разные моменты времени, вообще говоря, не коммутируют между собой:

$$[\hat{x}(t), \hat{x}(t')] \neq 0, \quad (2.2)$$

поэтому они не могут быть совместно точно измерены, в то время как выходной сигнал измерителя, являясь классической наблюдаемой, допускает непрерывное точное измерение, и для него, соответственно,

$$[\tilde{x}(t), \tilde{x}(t')] \equiv 0. \quad (2.3)$$

Как показано в работе [49], модификация эволюции пробного объекта шумом обратного флуктуационного влияния и добавление к выходному сигналу измерительного шума разрешают это противоречие.

Общие соотношения, которым должны удовлетворять эти шумы, имеют довольно сложный вид [47, 48]. Здесь мы приведём их для частного случая стационарных (т.е. инвариантных по отношению к сдвигу времени) шумов, поскольку именно этот случай имеет место в современных детекторах гравитационных волн, параметры которых можно считать неизменными во времени (с точностью до нежелательного медленного дрейфа под действием различных внешних причин).

Стационарные шумы можно характеризовать их спектральными плотностями, зависящими, вообще говоря, от частоты наблюдения  $\Omega$ . Спектральные плотности измерительного шума  $S_x$ , шума обратного флуктуационного влияния  $S_F$ , а также перекрёстная (кросскорреляционная) спектральная плотность этих шумов  $S_{xF}$  удовлетворяют следующему неравенству, имеющему вид (и физический смысл) стандартного соотношения неопределённостей Шрёдингера – Робертсона:

$$S_x(\Omega)S_F(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (2.4)$$

(здесь и далее, за исключением специально оговорённых случаев, мы используем так называемое двустороннее определение спектральной плотности (см. приложение А)).

В лазерных интерферометрах физическим источником шумов  $\hat{x}_n$  и  $\hat{F}_n$  являются флуктуации фазы и амплитуды света в них. С учётом того, что энергии оптических квантов соответствуют температурам в несколько десятков тысяч градусов, тепловыми шумами света (которые следует отличать от механических тепловых шумов пробных масс!) можно с высокой точностью пренебречь. Избыточные технические шумы лазера накачки в детекторах гравитационных волн подавляются за счёт геометрии интерферометра и наличия системы обратных связей (см. подробнее в разделе 3.1). Поэтому оптические шумы в лазерных детекторах гравитационных волн можно считать чисто квантовыми, что даёт строгое равенство в соотношении (2.4). Явные выражения для этих шумов для различных вариантов интерферометров приводятся в разделах 3, 4.

## 2.2. Суммарный квантовый шум

**2.2.1. Общий случай.** Вернёмся к схеме, изображённой на рис. 1. Её общее поведение определяется соотношением вход/выход для квантового измерителя (2.1) и уравнением движения для пробного объекта

$$D[\hat{x}(t)] = F_{\text{sign}}(t) + \hat{F}_n(t) + F_T(t), \quad (2.5)$$

где  $D$  — дифференциальный оператор, описывающий динамику пробного объекта,  $D = -m d^2/dt^2$  для свободной массы и  $D = m(-d^2/dt^2 + \Omega_0^2)$  для гармонического осциллятора.

Подстановка решения уравнения (2.5) в формулу (2.1) даёт

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}_0(t) + D^{-1}[F_{\text{sign}}(t) + \hat{F}_n(t) + F_T(t)] + \hat{x}_n(t), \quad (2.6)$$

где  $x_0(t)$  — собственное движение пробного объекта,  $D^{-1}$  — интегральный оператор, обратный дифференциальному оператору  $D$ . В частности, для свободной массы  $m$

$$\hat{x}_0(t) = \hat{x} + \frac{\hat{p}t}{m}, \quad (2.7)$$

$$D^{-1}[F(t)] = \frac{1}{m} \int_0^\infty (t-t') F(t') dt', \quad (2.8)$$

где  $\hat{x}, \hat{p}$  — операторы координаты и импульса в картине Шрёдингера ("начальные условия").

Формулу (2.6) можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}_0(t) + D^{-1}[F_{\text{sign}}(t) + \hat{F}_{\text{sum}}(t) + F_T(t)], \quad (2.9)$$

где  $\hat{F}_{\text{sum}}$  — суммарный квантовый шум измерителя,

$$\hat{F}_{\text{sum}}(t) = D[\hat{x}_\Pi(t)] + \hat{F}_\Pi(t). \quad (2.10)$$

**2.2.2. О квантовании пробного объекта.** Из полученных соотношений следует, что в квантовые неопределённости выходного сигнала измерителя вносят вклад: во-первых, начальное квантовое состояние пробного объекта (слагаемое  $\hat{x}_0$ ), во-вторых, собственные шумы измерителя  $\hat{x}_\Pi$  и  $\hat{F}_\Pi$ . Поэтому может показаться, что оба эти фактора ограничивают чувствительность линейной квантовой пробной системы. Этот вывод ошибочен; вклад начального состояния пробного объекта удаляется тривиальным линейным преобразованием выходного сигнала измерителя [49]. Действительно, для любой линейной системы

$$D[\hat{x}_0(t)] \equiv 0. \quad (2.11)$$

Поэтому действие оператора  $D$  на  $\tilde{x}$  выражается как

$$\tilde{F}_{\text{sign}}(t) = D[\tilde{x}(t)] = F_{\text{sign}}(t) + \hat{F}_{\text{sum}}(t) + F_T(t), \quad (2.12)$$

где  $\tilde{F}_{\text{sign}}$  — оценка сигнальной силы.

Таким образом, мы пришли к важному выводу: в линейных квантовых пробных системах начальное квантовое состояние собственно пробного объекта не играет никакой роли. Единственным источником квантовых ограничений на чувствительность является измеритель, т.е. в случае лазерных детекторов гравитационных волн — квантовые флуктуации света в них.

**2.2.3. Спектральная плотность суммарного квантового шума.** Рассмотрим подробнее частный случай стационарной квантовой пробной системы, т.е. такой, у которой: а) квантовые шумы стационарны, б) динамика также стационарна (т.е. параметры пробного объекта не зависят явно от времени); важность этого случая уже была отмечена выше. Тогда естественно использовать спектральное представление, в котором суммарный квантовый шум (2.10) принимает следующий вид:

$$\hat{F}_{\text{sum}}(\Omega) = \chi^{-1}(\Omega)\hat{x}_\Pi(\Omega) + \hat{F}_\Pi(\Omega), \quad (2.13)$$

где  $\chi(\Omega)$  — функция обобщённой восприимчивости пробного объекта, т.е. фурье-образ оператора  $D^{-1}$  (см. также соглашения об обозначениях в приложении А).

Спектральная плотность этого шума, соответственно, имеет вид

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_x(\Omega) + 2 \text{Re} [\chi^{-1}(\Omega) S_{xF}(\Omega)] + S_F(\Omega). \quad (2.14)$$

Как правило, при анализе чувствительности детекторов гравитационных волн спектральные плотности нормируются не на сигнальную силу, как в формуле (2.14) ( $F$ -нормировка), а на безразмерный гравитационно-волновой сигнал  $h$  ( $h$ -нормировка). Мы будем помечать такие спектральные плотности верхним индексом  $h$ . Взаимосвязь между  $F_{\text{sign}}$  и  $h$  задаётся известным соотношением (3.25) (см. раздел 3.1.4). Кроме того, для  $S^h$  традиционно используется так называемое одностороннее определение спектральной плотности, дающее вдвое большие её значения (см. приложение А); мы будем следовать этой традиции. В итоге выражение для спектральной плотности суммарного квантового шума в  $h$ -нормировке принимает вид (см. формулу (А.4)):

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{8}{m^2 L^2 \Omega^4} \left\{ |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_x(\Omega) + 2 \text{Re} [\chi^{-1}(\Omega) S_{xF}(\Omega)] + S_F(\Omega) \right\}. \quad (2.15)$$

## 2.3. Стандартный квантовый предел

**2.3.1. Общий случай.** Структура формулы для суммарного квантового шума (2.10), в которую входят два слагаемых, связанных друг с другом соотношением неопределённости (2.4), позволяет предположить наличие некоторого оптимума, при котором вклады измерительного шума и шума обратного флуктуационного влияния равны между собой и который соответствует принципиальному пределу чувствительности для данной пробной системы — собственно упомянутому выше Стандартному квантовому пределу. Как мы увидим ниже, в общем случае этот вывод ошибочен. Однако существует важный подкласс квантовых пробных систем, для которых СКП действительно имеет место; этот подкласс важен хотя бы потому, что ему принадлежат все функционирующие сейчас детекторы гравитационных волн.

Будем считать, что: а) пробная система является стационарной; б) измерительный шум и шум обратного влияния в ней не коррелируют между собой:

$$S_{xF} = 0. \quad (2.16)$$

Второе предположение соответствует так называемой *классической оптимизации* измерительного шума  $x_\Pi$ . В лазерных интерферометрах классическая оптимизация обеспечивает минимальное значение измерительного шума при заданной оптической мощности, что даёт наилучший результат в случае, когда точность измерения не столь велика и измерительный шум доминирует над шумом обратного флуктуационного влияния (см. подробнее в разделе 3.3).

В этом случае спектральная плотность суммарного квантового шума принимает следующий вид:

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_x(\Omega) + S_F(\Omega), \quad (2.17)$$

причём входящие в формулу (2.17) спектральные плотности  $S_x$  и  $S_F$  оказываются связанными между собой

"упрощённым" соотношением неопределённостей вида

$$S_x(\Omega)S_F(\Omega) \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (2.18)$$

Легко увидеть, что если квантовые шумы малы настолько, что в соотношении (2.18) реализуется точное равенство, то при выполнении условия

$$\frac{S_F(\Omega)}{S_x(\Omega)} = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 \quad (2.19)$$

спектральная плотность достигает минимума:

$$S_{\text{SQL}}(\Omega) = \hbar |\chi^{-1}(\Omega)|. \quad (2.20)$$

Последняя формула представляет собой общий случай спектральной формы СКП.

Приведём также соотношения (2.17), (2.20) в  $\hbar$ -нормировке:

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{8\hbar}{m^2 L^2 \Omega^4} [|\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_x(\Omega) + S_F(\Omega)], \quad (2.21)$$

$$S_{\text{SQL}}^h(\Omega) = \frac{8\hbar}{m^2 L^2 \Omega^4} |\chi^{-1}(\Omega)|. \quad (2.22)$$

Важно отметить, что, для того чтобы чувствительность (2.20) была достижимой в некотором диапазоне частот, соотношение (2.19) должно выполняться во всём этом диапазоне. Однако частотные зависимости спектральных плотностей  $S_x(\Omega)$  и  $S_F(\Omega)$  в "обычных" интерферометрах (см. формулы (3.39а–в)) не соответствуют частотной зависимости обобщённой восприимчивости  $\chi(\Omega)$  для реальных пробных объектов (свободной массы и осциллятора). В таких случаях соотношение (2.20) будет выполняться только на одной или нескольких заданных частотах; на остальных частотах спектральная плотность  $S_{\text{SQL}}$  будет строго больше СКП.

Рассмотрим важные с практической точки зрения случаи свободной пробной массы и пробного осциллятора более подробно. Для простоты предположим, что спектральные плотности  $S_x$  и  $S_F$  частотно-независимы. Это предположение является вполне реалистичным и соответствует случаю, когда интересующий нас диапазон частот укладывается в полосу пропускания интерферометра.

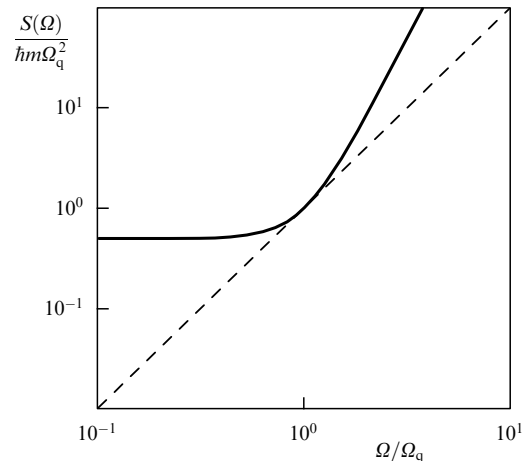
**2.3.2. Свободная масса.** Обобщённая восприимчивость свободной массы имеет вид<sup>1</sup>

$$\chi(\Omega) = -\frac{1}{m\Omega^2}. \quad (2.23)$$

Соответственно,

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = m^2 \Omega^4 S_x + S_F = \frac{\hbar m \Omega^2}{2} \left( \frac{\Omega^2}{\Omega_q^2} + \frac{\Omega_q^2}{\Omega^2} \right), \quad (2.24)$$

<sup>1</sup> Мы пренебрегаем влиянием трения на динамику свободной массы, поскольку оно реально сказывается только на очень низких частотах, где доминируют различные шумы неквантовой природы.



**Рис. 2.** Суммарный квантовый шум (сплошная кривая) и Стандартный квантовый предел (штриховая линия) для свободной массы. Нормировка на сигнальную силу  $F_{\text{sign}}$ .

где  $\Omega_q$  — параметр измерителя, характеризующий интенсивность его взаимодействия с пробным объектом,

$$\Omega_q = \left( \frac{S_F}{m^2 S_x} \right)^{1/4}, \quad (2.25)$$

для лазерных интерферометров величина  $\Omega_q^2$  пропорциональна оптической мощности (см. формулу (3.41)). В случае свободной пробной массы  $\Omega_q$  задаёт также пороговую частоту, на которой вклады измерительного шума и шума обратного флуктуационного влияния становятся равны между собой и  $S_{\text{sum}}$  достигает уровня СКП:

$$S_{\text{SQL}}(\Omega) = \hbar m \Omega^2. \quad (2.26)$$

На более низких частотах доминирует шум обратного флуктуационного влияния, на более высоких — измерительный шум, причём в обоих случаях  $S_{\text{sum}} > S_{\text{SQL}}$ . Графики  $S_{\text{sum}}$  и  $S_{\text{SQL}}$ , иллюстрирующие эти формулы, приведены на рис. 2.

В  $\hbar$ -нормировке формулы (2.24), (2.26) принимают следующий вид:

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \left( \frac{\Omega^2}{\Omega_q^2} + \frac{\Omega_q^2}{\Omega^2} \right), \quad (2.27)$$

$$S_{\text{SQL}}^h(\Omega) = \frac{8\hbar}{m L^2 \Omega^2}. \quad (2.28)$$

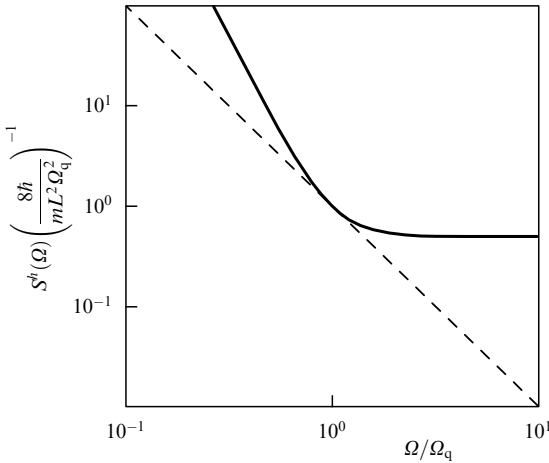
Графики этих спектральных плотностей приведены на рис. 3.

**2.3.3. Гармонический осциллятор.** Обобщённая восприимчивость гармонического осциллятора имеет вид

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{m(-\Omega^2 - i\Omega\Omega_m/Q_m + \Omega_m^2)}, \quad (2.29)$$

что даёт следующие выражения для суммарного квантового шума:

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = m^2 \left[ (\Omega_m^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2 \Omega_m^2}{Q_m^2} \right] S_x + S_F, \quad (2.30)$$



**Рис. 3.** Суммарный квантовый шум (сплошная кривая) и Стандартный квантовый предел (штриховая линия) для свободной массы. Нормировка на гравитационно-волновой сигнал  $h$ .

и для СКП

$$S_{SQL}(\Omega) = \hbar m \left[ (\Omega_m^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2 \Omega_m^2}{Q_m^2} \right]^{1/2}. \quad (2.31)$$

Из этих формул хорошо видно, что наличие резонансного максимума в обобщённой восприимчивости гармонического осциллятора приводит к подавлению вклада измерительного шума и, соответственно, к снижению уровня СКП в окрестности резонансной частоты  $\Omega_m$ .

С учётом этого рассмотрим область частот вблизи  $\Omega_m$ , предполагая, что

$$|\Omega - \Omega_m| \ll \Omega_m. \quad (2.32)$$

Предположение (2.32) позволяет упростить формулы (2.30), (2.31):

$$S_{sum}(\Omega) = \frac{\hbar m}{2} \left[ \frac{4\Omega_m^2(v^2 + \Gamma_m^2)}{\Omega_q^2} + \Omega_q^2 \right], \quad (2.33)$$

$$S_{SQL}(\Omega) = 2\hbar m \Omega_m \sqrt{v^2 + \Gamma_m^2}, \quad (2.34)$$

где  $v = \Omega - \Omega_m$  — отстройка от резонансной частоты,  $\Gamma_m = \Omega_m / (2Q_m)$  — декремент затухания осциллятора.

Из формулы (2.33) следует, что чем меньше  $\Omega_q$ , т.е. чем *менее точным* является измерение, тем *лучше чувствительность* гармонического осциллятора вблизи его резонансной частоты. Объясняется этот парадокс просто: вблизи резонансной частоты в суммарном квантовом шуме (2.33) доминирует шум обратного флуктуационного влияния, который снижается с уменьшением точности измерения. Этот выигрыш может быть достигнут, однако, только за счёт сужения полосы частот  $\Delta\Omega$ , где он имеет место. В предельном случае, когда

$$\Omega_q = \sqrt{2\Omega_m \Gamma_m} = \frac{\Omega_m}{\sqrt{Q_m}}, \quad (2.35)$$

спектральная плотность суммарного квантового шума для гармонического осциллятора

$$S_{sum}(\Omega) = \hbar m \Omega_m \left( \frac{v^2}{\Gamma_m} + 2\Gamma_m \right) \quad (2.36)$$

примерно в  $Q_m$  раз меньше, чем для свободной массы, но лишь в очень узком диапазоне частот  $\sim \Gamma_m$ .

Этот случай является, однако, крайне гипотетическим. Известно, что из-за собственных броуновских флуктуаций пробного объекта уровень квантовых шумов в реальных экспериментальных условиях может быть достигнут, только если время измерения мало по сравнению со временем его релаксации [50], другими словами, если полоса частот  $\Delta\Omega \gg \Gamma_m$  (см. также раздел 2.4). В этом случае формулы (2.33), (2.34) упрощаются следующим образом:

$$S_{sum}(\Omega) = \frac{\hbar m}{2} \left( \frac{4\Omega_m^2 v^2}{\Omega_q^2} + \Omega_q^2 \right) = \frac{\hbar m \Omega_m}{2} \left( \frac{4v^2}{\Delta\Omega} + \Delta\Omega \right), \quad (2.37)$$

$$S_{SQL}(\Omega) = 2\hbar m \Omega_m |v|, \quad (2.38)$$

где  $\Delta\Omega$  — полоса пропускания,

$$\Delta\Omega = \sqrt{\Omega_m \Omega_q}, \quad (2.39)$$

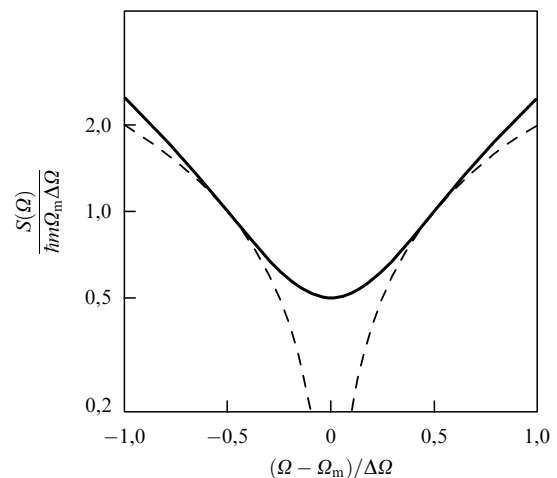
определённая стандартным образом "по уровню  $\sqrt{2}$ ", т.е. так, что

$$S_{sum} \left( \Omega_m \pm \frac{\Delta\Omega}{2} \right) = 2S_{sum}(\Omega_m), \quad (2.40)$$

Графики спектральных плотностей (2.37), (2.38) приведены на рис. 4.

Из сравнения формул (2.26) и (2.38) видно, что пробный осциллятор обеспечивает выигрыш по спектральной плотности квантового шума по сравнению с таковой в случае свободной массы в  $\Omega_m / \Delta\Omega$  раз.

В заключение данного раздела напомним, что все ограничения на чувствительность, полученные в нём, справедливы только для класса квантовых измерителей, удовлетворяющих сформулированным выше предположениям. Как показано в разделе 2.5, при "правильной" оптимизации квантовых шумов чувствительность может быть радикально выше; однако вплоть до настоящего времени эта возможность остаётся гипотетической и полученные здесь формулы сохраняют свою актуальность.



**Рис. 4.** Суммарный квантовый шум (сплошная кривая) и Стандартный квантовый предел (штриховая кривая) для осциллятора. Нормировка на сигнальную силу  $F_{sign}$ . (По оси ординат — логарифмическая шкала.)

#### 2.4. Условие квантовости пробного объекта

Очевидно, что, для того чтобы достичь квантового уровня чувствительности, все источники шумов неквантового происхождения должны быть подавлены до уровня, меньшего уровня квантового шума. В реальных экспериментах необходимо учитывать множество различных источников шумов (обзор основных источников шумов в детекторах ALIGO можно найти в статье [43]). Во многих случаях, в частности в твердотельных детекторах гравитационных волн и в современных "настоенных" квантовых оптомеханических экспериментах, основной вклад вносят тепловые (броуновские) флуктуации центра масс пробного объекта. В лазерных детекторах гравитационных волн благодаря многолетним усилиям экспериментаторов этот шум удалось достаточно сильно подавить, тем не менее он всё равно заметно ограничивает чувствительность на самых низких частотах. В любом случае требования, предъявляемые к этому шуму, представляют собой важное *необходимое* условие достижимости квантовой чувствительности.

Вернёмся к формуле для выходного сигнала квантовой пробной системы (2.12). С учётом сказанного будем считать, что входящий в неё "технический" шум  $F_T$  является тепловым шумом со спектральной плотностью

$$S_T = 2\kappa_B TH, \quad (2.41)$$

где  $\kappa_B$  — постоянная Больцмана,  $H$  — коэффициент трения в пробном объекте,  $T$  — его температура<sup>2</sup>.

Очевидно, что необходимым условием достижения СКП является выполнение неравенства

$$S_T < S_{\text{SQL}}, \quad (2.42)$$

а использование каких-либо методов преодоления СКП (которые будут рассмотрены в разделе 4) должно сопровождаться пропорциональным подавлением теплового шума. С этой точки зрения условие (2.42), которое впервые было сформулировано в работе [50], представляет собой "точку входа" в квантовый мир.

Подставляя в неравенство (2.42) формулы (2.26), (2.38), с учётом (2.41) его можно представить в виде следующего требования к температуре пробного тела:

$$T < T_q, \quad (2.43)$$

где  $T_q$  — "квантовая температура",

$$T_q = \frac{\hbar m \Omega^2}{2\kappa_B H} \quad (2.44)$$

для свободной массы и

$$T_q = \frac{\hbar m \Omega_m \Delta \Omega}{2\kappa_B H} \quad (2.45)$$

<sup>2</sup> Мы предполагаем, что  $\kappa_B T \gg \hbar \Omega$ . Это предположение выполняется с очень высокой точностью почти для всех практически используемых в современных экспериментах механических объектов, включая пробные массы детекторов гравитационных волн, за исключением лишь экзотических криогенных механических осцилляторов гигагерцевого диапазона [51]. Для последних  $T$  следует заменить величиной  $\hbar \Omega / (2\kappa_B) \coth(\hbar \Omega / (2\kappa_B T))$ .

для гармонического осциллятора, где  $\Delta \Omega$  — диапазон частот сигнала с центром в  $\Omega_m$ .

Вообще говоря, коэффициент трения  $H$  зависит от частоты наблюдения  $\Omega$ . Эта зависимость практически не играет никакой роли для пробных осцилляторов, так как в них рабочие частоты, как правило, близки к резонансной частоте  $\Omega_m$  и коэффициент трения может быть аппроксимирован как

$$H(\Omega) \approx H(\Omega_m) = \frac{m \Omega_m}{Q_m}. \quad (2.46)$$

В то же время так называемые свободные массы, используемые в лазерных детекторах гравитационных волн, на самом деле являются очень низкочастотными маятниками с собственными частотами порядка 1 Гц, тогда как рабочий диапазон таких детекторов начинается примерно от 10 Гц и выше. Потери в высококачественных кварцевых подвесах этих маятников можно аппроксимировать с помощью так называемой структурной модели трения [52], согласно которой коэффициент трения обратно пропорционален частоте:

$$H(\Omega) = \frac{\Omega_m}{\Omega} H(\Omega_m) = \frac{m \Omega_m^2}{\Omega Q_m}. \quad (2.47)$$

С учётом сказанного уравнения (2.44) и (2.45) можно представить как

$$T_q = \frac{\hbar Q_m \Omega^3}{2\kappa_B \Omega_m^2}, \quad (2.48)$$

где  $\Omega$  — частота наблюдения, для "почти свободных пробных масс" лазерных детекторов гравитационных волн и как

$$T_q = \frac{\hbar Q_m \Delta \Omega}{2\kappa_B} \quad (2.49)$$

для пробных осцилляторов.

Интересно отметить, что условие квантовости для осциллятора (2.49) было получено также в работах [53, 54] исходя из совершенно других предпосылок, а именно из требования, что время декогерентизации квантового состояния не должно быть меньше некоторой заданной величины  $\tau_{\text{decoh}} \sim 1/\Delta \Omega$ .

Оценим выполнение условия (2.43) для детекторов гравитационных волн. В качестве примера рассмотрим лучший по величине отношения  $Q_m/T$  ультракриогенный резонансно-стержневой детектор гравитационных волн AURIGA (от итал. Antenna Ultracriogenica Risonante per l'Indagine Gravitationale Astronomica) [19]. Его резонансная частота близка к типичному для таких детекторов значению 1 кГц, а  $Q_m = 3 \times 10^6$ , что даёт величину

$$T_q \approx 0,07 \frac{\Delta \Omega}{\Omega_m} [\text{K}], \quad (2.50)$$

заметно (хотя и не безнадёжно) меньшую реальную рабочую температуры  $T = 0,25$  К.

Для оценки шума этого вида в лазерных детекторах мы используем результаты работы [55], в которой для низкочастотного маятника с собственной частотой  $f_m \approx 0,3$  Гц (прототипа пробных масс лазерных детекторов



гравитационных волн) получена рекордно высокая добротность  $Q_m \approx 1,7 \times 10^8$  с (при комнатной температуре). Из формулы (2.48) следует, что квантовая температура для такого пробного объекта может быть оценена как

$$T_q \approx 5 \times 10^4 \left( \frac{\Omega}{2\pi \times 100 \text{ Гц}} \right)^3 [\text{К}]. \quad (2.51)$$

Таким образом, для характерных времён порядка периода гравитационной волны поступательные степени свободы центров масс зеркал лазерных детекторов гравитационных волн можно считать квантовыми объектами даже при комнатной температуре.

К сожалению, в интерферометрах свет взаимодействует не с центрами масс зеркал, а с их поверхностями, движение которых (по отношению к центру масс) загрязнено целым рядом шумов [56]. В современных детекторах гравитационных волн наиболее серьёзной проблемой являются броуновские флуктуации толщины отражающих диэлектрических покрытий зеркал [43]. Снижение уровня этих шумов представляет собой одну из основных проблем для будущих детекторов [57, 58].

### 2.5. Предел чувствительности для координатных измерений

Методы преодоления СКП, которые сейчас рассматриваются в качестве кандидатов для реализации в будущих лазерных детекторах гравитационных волн, основаны на использовании: а) кросскорреляции измерительного шума и шума обратного флуктуационного влияния; б) специально подобранных частотных зависимостей спектральных плотностей этих шумов — при сохранении стационарности интерферометра. Этот подход впервые был предложен в работе [59]; предел чувствительности для него сформулирован в работах [60, 61] (для общего случая линейной квантовой пробной системы) и в [62] (для частного случая оптического интерферометра).

Здесь мы приведём упрощённый вариант рассуждений [60], предполагая, что

$$\text{Im } S_{xF} = 0. \quad (2.52)$$

Предположение (2.52) существенно упрощает выкладки и при этом даёт правильный окончательный результат. Для лазерных интерферометров оно выполняется, если частота накачки равна резонансной частоте интерферометра  $\omega_0$ . Известно, что отстроенный режим обеспечивает некоторые интересные возможности, которые мы обсудим в разделе 4.4, однако их использование в разрабатываемых сейчас детекторах не планируется.

С учётом предположения (2.52) спектральная плотность суммарного квантового шума (2.13) принимает вид

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_x(\Omega) + 2 \text{Re } \chi^{-1}(\Omega) S_{xF}(\Omega) + S_F(\Omega). \quad (2.53)$$

Как и при выводе СКП, предположим, что в соотношении (2.4) имеет место точное равенство. Тогда, комбинируя (2.4) и (2.53), получаем

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 \frac{\hbar^2/4 + S_{xF}^2(\Omega)}{S_F(\Omega)} + 2 \text{Re } \chi^{-1}(\Omega) S_{xF}(\Omega) + S_F(\Omega). \quad (2.54)$$

Спектральная плотность (2.54) при

$$S_{xF}(\Omega) = -\frac{\text{Re } \chi^{-1}(\Omega)}{|\chi^{-1}(\Omega)|^2} S_F(\Omega) \quad (2.55)$$

достигает минимума по  $S_{xF}(\Omega)$ :

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = \frac{\hbar^2 |\chi^{-1}(\Omega)|^2}{4S_F(\Omega)} + \frac{[\text{Im } \chi^{-1}(\Omega)]^2}{|\chi^{-1}(\Omega)|^2} S_F(\Omega). \quad (2.56)$$

В свою очередь последнее выражение достигает минимума по  $S_F(\Omega)$  при

$$S_F(\Omega) = \frac{\hbar}{2} \frac{|\chi^{-1}(\Omega)|^2}{|\text{Im } \chi^{-1}(\Omega)|}, \quad (2.57a)$$

что даёт следующие выражения для  $S_x$ ,  $S_{xF}$  и оптимизированной спектральной плотности суммарного квантового шума:

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{2|\text{Im } \chi^{-1}(\Omega)|}, \quad (2.57б)$$

$$S_{xF}(\Omega) = -\frac{\hbar}{2} \frac{\text{Re } \chi^{-1}(\Omega)}{|\text{Im } \chi^{-1}(\Omega)|}, \quad (2.57в)$$

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = \hbar |\text{Im } \chi^{-1}(\Omega)|. \quad (2.58)$$

Полученный предел (2.58) интересен тем, что он, как и СКП, зависит только от параметров пробного объекта и, более того, точно совпадает с выражением для теплового шума последнего при нулевой температуре, несмотря на то что физическим источником шумов, составляющих (2.58), является другой объект — измеритель. Отметим также, что для гармонического осциллятора на резонансной частоте,  $\Omega = \Omega_m$ , формула (2.58) совпадает со стандартным квантовым пределом (2.31), что очевидным образом связано с тем, что для осциллятора на резонансной частоте  $\text{Re } \chi^{-1} = 0$ .

Достичь предела (2.58) невозможно в принципе, так как даже при нулевой температуре тепловой шум пробного объекта будет вносить точно такой же вклад. Чтобы просто приблизиться к нему, температура пробного объекта должна быть снижена до уровня  $T \lesssim \hbar\Omega/\kappa_B$ . Для характерных частот гравитационно-волнового сигнала (порядка и менее 1 кГц) это соответствует долям микрокельвина. Поэтому для современного технологического уровня предел (2.58), в отличие от СКП, может считаться гипотетическим.

Из формулы (2.56) можно получить и другой, более реалистичский и весьма актуальный для лазерных детекторов гравитационных волн, предел чувствительности. В высокочувствительных измерительных системах трение в пробном объекте, т.е. величина  $\text{Im } \chi^{-1}$ , сводится к минимуму для уменьшения тепловых шумов (см. раздел 2.4). Поэтому в любых практических сценариях первое слагаемое в формуле (2.56) на много порядков превышает второе, что позволяет отбросить последнее:

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = \frac{\hbar^2 |\chi^{-1}(\Omega)|^2}{4S_F(\Omega)}. \quad (2.59)$$

Соотношение (2.59) связывает чувствительность квантовой пробной системы с запасённой в ней энергией, требуемой для создания необходимого обратного флук-

туационного воздействия на пробный объект, поэтому оно получило название *энергетического квантового предела* [63–66].

В частности, в лазерных интерферометрах величина  $S_F$  пропорциональна циркулирующей в них оптической мощности, и в силу предела (2.59) колоссальная точность измерения, требуемая от детекторов гравитационных волн, приводит к очень высоким значениям этой мощности. В детекторах первого поколения она доходила до нескольких десятков киловатт [40], а в детекторах второго поколения должна приблизиться к 1 МВт [43]. В результате в интерферометрах может возникать целый ряд нежелательных эффектов, в частности искажение формы зеркал из-за их нагрева (термолинзирование) и эффект оптомеханической параметрической неустойчивости, предсказанный В.Б. Брагинским с соавторами [67, 68] в 2001 г. (недавно этот эффект экспериментально наблюдался в ALIGO [69]).

### 3. Квантовые шумы в лазерных интерферометрах

#### 3.1. Интерферометр Майкельсона

**3.1.1. Принцип работы лазерных детекторов гравитационных волн.** Рассмотрим принцип работы лазерных детекторов гравитационных волн на простом примере интерферометра Майкельсона, изображённого на рис. 5.

Структура силовых линий поля приливных ускорений, создаваемых гравитационной волной, показана на рис. 6. В таком поле при оптимальной ориентации плеч детектора на пробные массы будут действовать силы [3]

$$F_{\text{sign } 1,2}(t) = \pm \frac{ML\ddot{h}(t)}{2}, \tag{3.1}$$

направленные вдоль осей, соединяющих соответствующую массу с началом координат, в данном случае со светоделителем. Поэтому для обнаружения действия гравитационной волны требуется измерять малые вариации разностной координаты двух пробных масс

$$x = \frac{x_1 - x_2}{2}. \tag{3.2}$$

Для этого излучение лазера, поступающее в интерферометр через "светлый" порт (левый на рис. 5), делится пополам на светоделителе и подаётся на два пробных зеркала. При отражении эти волны приобретают сдвиги фаз, пропорциональные координатам зеркал. После рекомбинации на светоделителе в случае  $x_1 = x_2$  (гипотетическом) весь свет отражается обратно к лазеру. В другом, так называемом тёмном, порте (нижнем на рис. 5) в этом случае имеет место деструктивная интерференция. Если же  $x_1 \neq x_2$ , то часть света отщепляется в тёмный порт и регистрируется фотодетектором.

Здесь мы рассмотрим квантовые флуктуации света в таких интерферометрах, покажем, что они полностью соответствуют общей модели линейной пробной системы, обсуждавшейся в разделе 2, и получим явные выражения для квантовых шумов  $\hat{x}_n$  и  $\hat{F}_n$ .

Для упрощения выкладок мы сначала подробно рассмотрим простейший интерферометр Майкельсона (см. рис. 5), а затем, используя качественные соображения, обобщим полученные результаты для более слож-

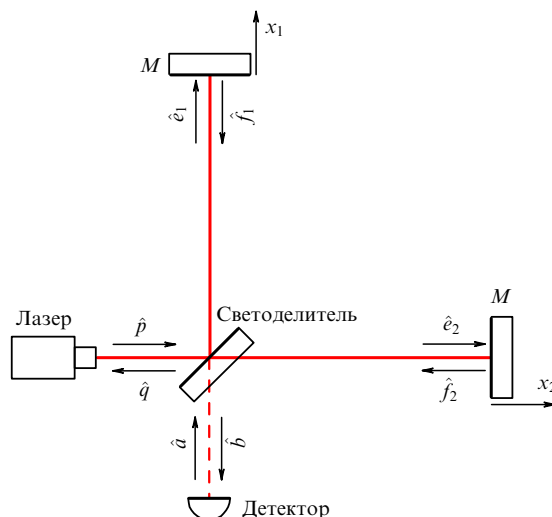


Рис. 5. Упрощённая схема лазерного детектора гравитационных волн.  $M$  — массы подвижных зеркал.

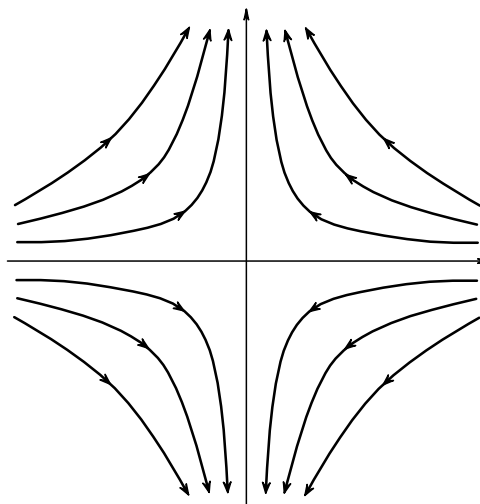


Рис. 6. Структура силовых линий поля приливных ускорений гравитационной волны с направлением распространения, перпендикулярным плоскости рисунка (ориентация рисунка соответствует так называемой +-поляризации; вторую поляризацию, так называемую x-поляризацию, можно получить просто поворотом рисунка на угол  $45^\circ$ ).

ной схемы интерферометра Майкельсона/Фабри–Перо с рециркуляцией мощности и сигнала (рис. 7), реально используемой в современных детекторах гравитационных волн.

**3.1.2. Оптические поля в интерферометре.** Подход, обычно применяемый для анализа квантовых шумов в лазерных детекторах гравитационных волн, так называемый *двухфотонный формализм*<sup>3</sup>, был предложен в работах [70, 71]. Его упрощённый, но достаточный для наших целей вариант приведён в приложении Б.

В соответствии с этим формализмом излучение лазера, поступающее в интерферометр через светлый порт,

<sup>3</sup> Этимология этого названия восходит к термину "двухфотонные устройства", использовавшемуся тогда в нелинейной оптике.

описывается формулой

$$\hat{p}(t) = (P + \hat{p}^c(t)) \cos(\omega_0 t) + \hat{p}^s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (3.3)$$

где  $\hat{p}^{c,s}(t)$  — операторы квадратурных амплитуд, а классическая амплитуда  $P$  определяется мощностью лазера накачки  $I_0$ , которая в данном случае совпадает с циркулирующей в интерферометре мощностью  $I_c$ :

$$I_0 = I_c = \frac{\hbar \omega_0 P^2}{2}. \quad (3.4)$$

Корректный анализ квантовых шумов требует также учёта излучения, поступающего через тёмный порт:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}^c(t) \cos(\omega_0 t) + \hat{a}^s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (3.5)$$

Это могут быть просто нулевые флуктуации, создаваемые планковским излучением фотодетектора<sup>4</sup>, либо специально приготовленный "сжатый" свет (этот случай подробно рассмотрен в разделе 4.1).

Входные поля комбинируются на центральном светоделителе, давая следующие выражения для волн, падающих на пробные массы  $M$ :

$$\hat{e}_{1,2}(t) = \frac{\hat{p}(t - L_{LM}/c) \pm \hat{a}(t - L_{DM}/c)}{\sqrt{2}}, \quad (3.6)$$

где  $L_{LM}$  — оптическое расстояние от лазера до зеркал, а  $L_{DM}$  — расстояние от детектора до зеркал. Мы будем предполагать, что оба эти расстояния пропорциональны целому числу длин волн накачки; это предположение никак не ограничивает общность рассмотрения, но упрощает формулы. Кроме того, учтём, что в реальных наземных лазерных детекторах гравитационных волн интервалы времени  $L_{LM}/c$  и  $L_{DM}/c$  значительно меньше характерного времени изменения гравитационно-волнового сигнала. С учётом этого формула (3.6) может быть переписана как

$$\hat{e}_{1,2}(t) = \hat{e}_{1,2}^c(t) \cos(\omega_0 t) + \hat{e}_{1,2}^s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (3.7)$$

где

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{1,2}^c(t) \\ \hat{e}_{1,2}^s(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} P + \hat{p}^c(t) \\ \hat{p}^s(t) \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \hat{a}^c(t) \\ \hat{a}^s(t) \end{pmatrix} \right]. \quad (3.8)$$

Волны, отражённые от зеркал, с учётом малости смещений  $\hat{x}_{1,2}$  последних от начальных положений могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1,2}(t) &= \hat{e}_{1,2}^c(t) \cos \left\{ \omega_0 \left[ t - \frac{2\hat{x}_{1,2}(t)}{c} \right] \right\} + \\ &+ \hat{e}_{1,2}^s(t) \sin \left\{ \omega_0 \left[ t - \frac{2\hat{x}_{1,2}(t)}{c} \right] \right\} = \\ &= \hat{f}_{1,2}^c(t) \cos(\omega_0 t) + \hat{f}_{1,2}^s(t) \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если пренебречь слагаемыми второго порядка малости, пропорциональными  $\hat{p}^{c,s}\hat{x}_{1,2}$ ,  $\hat{a}^{c,s}\hat{x}_{1,2}$ , то, как нетрудно

показать,

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{1,2}^c(t) \\ \hat{f}_{1,2}^s(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} P + \hat{p}^c(t) \\ \hat{p}^s(t) \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \hat{a}^c(t) \\ \hat{a}^s(t) \end{pmatrix} + \frac{2\omega_0 P \hat{x}_{1,2}(t)}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.10)$$

Наконец, волны, образующиеся в результате рекомбинации  $\hat{f}_{1,2}$  на светоделителе и уходящие обратно к лазеру и в тёмный порт, с учётом сделанных предположений имеют вид

$$\hat{q}(t) = \frac{\hat{f}_1(t) + \hat{f}_2(t)}{\sqrt{2}} = \hat{q}^c(t) \cos(\omega_0 t) + \hat{q}^s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (3.11)$$

$$\hat{b}(t) = \frac{\hat{f}_1(t) - \hat{f}_2(t)}{\sqrt{2}} = \hat{b}^c(t) \cos(\omega_0 t) + \hat{b}^s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (3.12)$$

где

$$\begin{pmatrix} \hat{q}^c(t) \\ \hat{q}^s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P + \hat{p}^c(t) \\ \hat{p}^s(t) \end{pmatrix} + \frac{2\omega_0 P \hat{y}(t)}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{b}^c(t) \\ \hat{b}^s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}^c(t) \\ \hat{a}^s(t) \end{pmatrix} + \frac{2\omega_0 P \hat{x}(t)}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\hat{y}(t) = \frac{\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)}{2}. \quad (3.15)$$

Из формул (3.7)–(3.15) следует, что практически вся входящая в интерферометр оптическая мощность уходит обратно в светлый порт к лазеру; малая доля входной мощности, несущая информацию о  $\hat{x}$ , отщепляется в тёмный порт.

**3.1.3. Измерительный шум.** В современных лазерных детекторах излучение, уходящее в тёмный порт, регистрируется так называемым гомодинным детектором, позволяющим измерять любую линейную комбинацию квадратурных амплитуд  $\hat{b}^c$  и  $\hat{b}^s$ . Выходной сигнал гомодинного детектора (см. детали, например, в [45]) пропорционален

$$i_-(t) \propto \hat{b}^c \cos \zeta + \hat{b}^s \sin \zeta, \quad (3.16)$$

где  $\zeta$  — так называемый гомодинный угол (отметим, что выходной сигнал детектора является уже классической наблюдаемой, поэтому точный вид входящего в него масштабированного множителя не имеет значения).

Подстановка в (3.16) соотношений (3.14) даёт

$$i_-(t) \propto \hat{a}^c \cos \zeta + \left[ \hat{a}^s(t) + \frac{2\omega_0 P \hat{x}(t)}{c} \right] \sin \zeta. \quad (3.17)$$

Формулу (3.17), перенормировав её к величине входного сигнала  $\hat{x}$ , можно представить в виде, аналогичном (2.1):

$$i_-(t) \propto \hat{x}(t) + \hat{x}_\Pi(t), \quad (3.18)$$

где  $\hat{x}_\Pi$  — дробовой шум,

$$\hat{x}_\Pi(t) = \frac{c}{2\omega_0 P} (\hat{a}^c(t) \cot \zeta + \hat{a}^s(t)), \quad (3.19)$$

<sup>4</sup> Напомним, что, поскольку энергия одного оптического кванта соответствует температуре в несколько десятков тысяч кельвинов, для света комнатная температура является практически нулевой.

в лазерных интерферометрах играющий роль измерительного квантового шума.

**3.1.4. Уравнения движения для пробных масс.** Рассмотрим теперь эволюцию координат  $\hat{x}_{1,2}$  пробных зеркал интерферометра. Помимо сил (3.1), создаваемых гравитационной волной, на них действуют также силы радиационного давления со стороны оптического поля в интерферометре (поскольку здесь нас интересуют именно квантовые шумы, мы пренебрегаем тепловыми и другими "техническими" шумами  $F_T$ ):

$$\hat{F}_{\text{rad } 1,2}(t) = \frac{2\hat{I}_{1,2}(t)}{c}, \quad (3.20)$$

где  $\hat{I}_{1,2}$  — значения циркулирующей оптической мощности в каждом из плеч интерферометра. Используя формулы (3.8), (Б.8), (Б.9) (см. приложение Б), нетрудно показать, что эти силы включают в себя одинаковые постоянные компоненты, равные  $I_c/c$ , и флуктуационные слагаемые

$$\hat{F}_{\text{fl } 1,2}(t) = \frac{\hbar\omega_0 P}{c} (\hat{p}^c(t) \pm \hat{a}^c(t)). \quad (3.21)$$

Постоянные силы не представляют для нас интереса (в реальных детекторах гравитационных волн они приводят лишь к некоторому отклонению подвешенных зеркал от их положений равновесия), поэтому мы не будем их рассматривать.

В итоге уравнения движения пробных масс принимают следующий вид:

$$M \frac{d^2 \hat{x}_1(t)}{dt^2} = F_{\text{sign } 1}(t) + \hat{F}_{\text{fl } 1}(t), \quad (3.22a)$$

$$M \frac{d^2 \hat{x}_2(t)}{dt^2} = F_{\text{sign } 2}(t) + \hat{F}_{\text{fl } 2}(t). \quad (3.22b)$$

Соответственно, для разностной координаты (3.2) мы получаем уравнения:

$$m \frac{d^2 \hat{x}(t)}{dt^2} = F_{\text{sign}}(t) + \hat{F}_{\text{fl}}(t) \quad (3.23)$$

(ср. с общим уравнением (2.5)), где  $m$  — приведённая масса зеркал интерферометра,

$$m = 2M, \quad (3.24)$$

$F_{\text{sign}}(t)$  — дифференциальная сигнальная сила,

$$F_{\text{sign}}(t) = F_{\text{sign } 1}(t) - F_{\text{sign } 2}(t) = \frac{mL\ddot{h}(t)}{2}, \quad (3.25)$$

$\hat{F}_{\text{fl}}(t)$  — шум радиационного давления,

$$\hat{F}_{\text{fl}}(t) = \hat{F}_{\text{fl } 1}(t) - \hat{F}_{\text{fl } 2}(t) = \frac{2\hbar\omega_0 P \hat{a}^c(t)}{c}, \quad (3.26)$$

играющий в лазерных интерферометрах роль шума обратного флуктуационного влияния.

Отметим, что флуктуации излучения лазера накачки, как амплитудные, так и фазовые, не оказывают влияния ни на выходной сигнал, ни на флуктуации силы светового давления. Безусловно, этот вывод справедлив только для идеально симметричного интерферометра, который мы здесь рассмотрели. В реальных гравитационных детекторах к "чистоте" излучения лазера накачки предъявляются

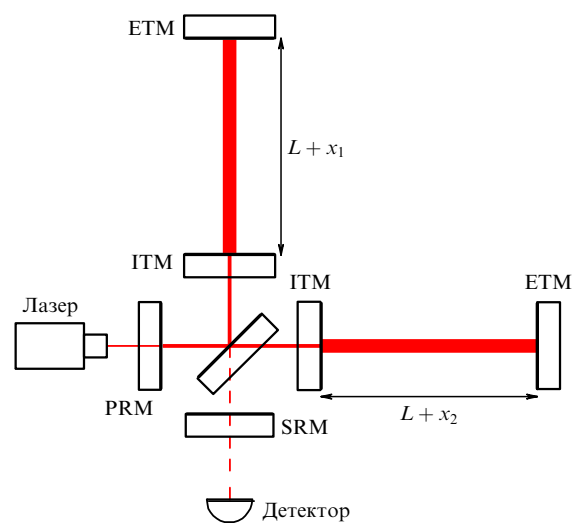
очень высокие требования, которые, в частности, реализуются посредством внесения в схему интерферометра большого числа обратных связей [72]. Тем не менее без использования симметричной топологии интерферометра Майкельсона любые технические ухищрения вряд ли смогли бы обеспечить тот квантовый уровень оптических шумов, которым характеризуются лазерные детекторы гравитационных волн.

## 3.2. Интерферометр Майкельсона/Фабри–Перо с рециркуляцией мощности и сигнала

**3.2.1. Интерферометр Майкельсона/Фабри–Перо.** Ключевым недостатком рассмотренной схемы детектора гравитационных волн на основе интерферометра Майкельсона является слишком слабое оптомеханическое взаимодействие, даваемое единственным отражением света от подвижного зеркала. Как показывают простые оценки, для достижения чувствительности, необходимой для детектирования гравитационных волн, в этом случае требуется нереально большая оптическая мощность, порядка нескольких сотен мегаватт.

Схема интерферометра Майкельсона/Фабри–Перо, используемая на практике в современных детекторах, приведена на рис. 7. В дополнение к уже рассмотренным оконечным зеркалам интерферометра Майкельсона (ETM) она может включать в себя до четырёх дополнительных зеркал: два входных зеркала в плечах интерферометра (ITM), зеркало рециркуляции мощности (PRM) и зеркало рециркуляции сигнала (SRM).

Зеркала ITM, которые появились уже в ранних прототипных интерферометрах, используются почти во всех лазерных детекторах гравитационных волн [19]. Вместе с оконечными зеркалами (ETM) они преобразуют плечи интерферометра Майкельсона в резонаторы Фабри–Перо, в которых свет циркулирует многократно, набирая пропорционально увеличенный сигнальный сдвиг фаз. В той же пропорции вследствие многократных отражений света от зеркал возрастает и сила обратного флуктуа-



**Рис. 7.** Схема интерферометра Майкельсона/Фабри–Перо с рециркуляцией мощности и сигнала, используемая в современных лазерных детекторах гравитационных волн. ETM — оконечные пробные массы (End Test Masses), ITM — входные пробные массы (Input Test Masses), PRM — зеркало рециркуляции мощности (Power Recycling Mirror), SRM — зеркало рециркуляции сигнала (Signal Recycling Mirror).

ционного влияния на них (в самых ранних прототипах вместо резонаторов Фабри–Перо использовались линии задержки, дающие тот же эффект, но менее технологичные при больших длинах плеч).

Расчёт квантовых шумов интерферометра Майкельсона/Фабри–Перо приведён, например в [45]. В этой статье и других аналогичных статьях используется спектральное представление, как более удобное для анализа стационарных частотно-избирательных устройств; далее мы также будем его придерживаться.

Наличие резонаторов Фабри–Перо модифицирует формулы (3.19), (3.26) следующим образом<sup>5</sup>:

$$\hat{x}_\Pi(\Omega) = \frac{c}{2\omega_0 E \mathcal{L}^*(\Omega)} [\hat{a}^c(\Omega) \cot \zeta + \hat{a}^s(\Omega)], \quad (3.27)$$

$$\hat{F}_\Pi(\Omega) = \frac{2\hbar\omega_0 E \mathcal{L}(\Omega)}{c} \hat{a}^c(\Omega). \quad (3.28)$$

Здесь  $\mathcal{L}(\Omega)$  — безразмерный множитель,

$$\mathcal{L}(\Omega) = \frac{\sqrt{c\gamma/L}}{\gamma - i\Omega}, \quad (3.29)$$

описывающий резонансное усиление света в резонаторах Фабри–Перо,  $\gamma$  — полуширина полосы пропускания резонаторов Фабри–Перо,

$$\gamma = \frac{c}{L} \frac{1 - \sqrt{R_{\text{ITM}}}}{1 + \sqrt{R_{\text{ITM}}}} \approx \frac{c T_{\text{ITM}}}{4L}, \quad (3.30)$$

$R_{\text{ITM}}$  и  $T_{\text{ITM}}$  — коэффициенты отражения и пропускания зеркал ИТМ,  $E$  — эффективная классическая амплитуда света в интерферометре, определяемая соотношением

$$I_c = \frac{\hbar\omega_0 E^2}{2} = I_0 |\mathcal{L}(0)|^2, \quad (3.31)$$

$I_c$  — суммарная оптическая мощность, циркулирующая в двух плечах интерферометра.

Наличие двух дополнительных зеркал модифицирует также механические уравнения движения (3.22а, б), (3.23) (см. [45]). В первых двух уравнениях масса  $M$  заменяется приведённой массой зеркал ИТМ + ЕТМ, т.е. при одинаковых их массах  $M$  заменяется величиной  $M/2$ . Соответственно, в уравнении (3.23) приведённая масса для всего интерферометра

$$m = 2 \times \frac{M}{2} = M. \quad (3.32)$$

**3.2.2. Рециркуляция мощности.** Из формулы (3.31) следует, что чем меньше  $\gamma$ , тем больше циркулирующая мощность  $I_c$  при заданной мощности лазера накачки  $I_0$ . С другой стороны, как видно из формулы (3.27), время жизни света в резонаторах Фабри–Перо  $1/\gamma$  нельзя увеличивать чрезмерно, так как резонаторы сглаживают спектральные компоненты гравитационного сигнала с частотой  $\Omega$ , превышающей  $\gamma$ , что приводит к возрастанию (приведённого ко входу) измерительного шума на этих частотах. Также сглаживаются высокочастотные спектральные компоненты флуктуаций мощности света,

что даёт уменьшение шума флуктуационного влияния при  $\Omega > \gamma$  (см. формулу (3.28)).

Идея использования зеркала рециркуляции мощности PRM была предложена Р. Дривером как средство разрешения указанного противоречия [73]. В соответствии со своим названием это зеркало возвращает основную часть мощности, выходящей из светлого порта, обратно в интерферометр. Другим словами, это зеркало вместе с двумя входными зеркалами ИТМ формируют эффективное составное зеркало с очень малым коэффициентом пропускания:

$$\frac{T_{\text{PRM}} T_{\text{ITM}}}{(1 + \sqrt{R_{\text{PRM}} R_{\text{ITM}}})^2} \approx \frac{T_{\text{PRM}} T_{\text{ITM}}}{4}, \quad (3.33)$$

где  $R_{\text{PRM}}$  и  $T_{\text{PRM}}$  — коэффициенты отражения и пропускания зеркала PRM, что приводит к многократному увеличению циркулирующей оптической мощности в интерферометре. Ширина полосы пропускания для сигнала света при этом никак не затрагивается, поскольку он не проходит через светлый порт.

Можно также отметить, что это составное зеркало совместно с оконечными зеркалами образуют очень узкополосный, с шириной полосы в несколько герц, эффективный резонатор Фабри–Перо для излучения накачки. В лазерных детекторах гравитационных волн к частоте этого резонатора посредством обратной связи привязывается частота генерации лазера накачки, обеспечивая рекордно высокий уровень стабильности последней.

Конфигурация с резонаторами Фабри–Перо в плечах и дополнительным зеркалом рециркуляции мощности использовалась в большинстве лазерных детекторов гравитационных волн первого поколения, а именно TAMA 300, Virgo и LIGO.

**3.2.3. Рециркуляция сигнала.** Подобно зеркалу рециркуляции мощности, зеркало рециркуляции сигнала SRM вместе с зеркалами ИТМ формируют эффективное составное зеркало, которое в свою очередь вместе с зеркалами ЕТМ образует эффективный резонатор Фабри–Перо — но теперь уже для излучения, проходящего через тёмный порт. Впервые эта идея была предложена Б. Меерсом [74] как средство гибкой оптимизации формы спектральной передаточной функции лазерных детекторов гравитационных волн для различных типов гравитационно-волновых сигналов. Действительно, в зависимости от оптического расстояния между зеркалом рециркуляции и зеркалами ИТМ коэффициент пропускания составного зеркала может изменяться от минимального значения, аналогичного (3.33), до максимального

$$\frac{T_{\text{SRM}} T_{\text{ITM}}}{(1 - \sqrt{R_{\text{SRM}} R_{\text{ITM}}})^2} \approx \frac{4 T_{\text{SRM}} T_{\text{ITM}}}{(T_{\text{SRM}} + T_{\text{ITM}})^2}. \quad (3.34)$$

В промежуточных случаях в отражённую волну вносится также некоторый сдвиг фаз, что делает поведение этой схемы ещё более сложным (то же справедливо в принципе и для зеркала PRM, но для него, по очевидным соображениям, всегда используется настройка, дающая минимальное пропускание).

Зеркало рециркуляции сигнала используется в детекторах ALIGO и, предположительно, будет применяться в других детекторах второго поколения, но, скорее всего,

<sup>5</sup> Формулы (3.27), (3.28) получены в так называемом одномодовом приближении:  $\Omega \ll c/L$ ,  $\gamma \ll c/L$ ; для предельного перехода к случаю отсутствия резонаторов Фабри–Перо в них следует положить  $\Omega \ll \gamma = c/L$ .

лишь для одного варианта настройки, а именно такого, который обеспечивает максимальное пропускание составного зеркала ITM + SRM и, соответственно, максимально широкую полосу пропускания интерферометра. Выбор этого режима диктуется сочетанием двух технических причин, связанных с особенностями, свойственными детекторам второго поколения.

С одной стороны, оптимизация квантового шума в детекторах второго поколения требует максимально "плоской" формы его спектральной плотности, которая реализуется при широкой полосе пропускания интерферометра,  $\gamma \gtrsim 2\pi \times 500$  Гц [75], и тем самым (если не использовать зеркало SRM) при весьма значительных величинах  $T_{ITM} \gtrsim 0,15$  (см. формулу (3.30)). Это связано с тем, что спектральная плотность броуновских флуктуаций толщины отражающих диэлектрических покрытий зеркал, являющаяся основным техническим шумом в этих детекторах, довольно слабо зависит от частоты (см. рис. 2 в статье [43]), что диктует аналогичную "плоскую" форму спектральной плотности и квантового шума.

С другой стороны, планируемые для детекторов второго поколения значения оптической мощности в их плечах составляют несколько сотен киловатт, что при столь больших значениях  $T_{ITM}$  соответствует нескольким десяткам киловатт мощности, проходящей сквозь входные зеркала и через светоделитель. Проблемы с тепловыделением и различные нежелательные нелинейные эффекты, которые неизбежны при такой мощности, делают данный вариант нереалистичным. Поэтому в интерферометрах ALIGO используются входные зеркала с пропусканием, на порядок меньшим ( $T_{ITM} = 0,014$ ), что соответствует умеренной, около 5 кВт, мощности на светоделителе (при проектной мощности в плечах  $\approx 800$  кВт). Это приводит к очень узкой полосе пропускания резонаторов Фабри – Перо:

$$\gamma_{\text{arm}} = \frac{cT_{ITM}}{4L} = 2\pi \times 40 \text{ Гц}. \quad (3.35)$$

Использование зеркала рециркуляции (точнее, в таком режиме, по терминологии работы [76], экстракции) сигнала с коэффициентом пропускания  $T_{SRM} \approx 0,2-0,3$  позволяет разрешить это противоречие. В соответствии с формулой (3.34) полоса пропускания интерферометра при этом расширяется более чем на порядок.

В заключение для полноты картины отметим, что возможна также конфигурация без входных зеркал в плечах, но с зеркалами рециркуляции мощности и сигнала, обеспечивающими все требуемые параметры интерферометра. По такой схеме выполнен гравитационно-волновой детектор GEO 600 [38]. Недостатком этой схемы является то, что в ней вся мощность, циркулирующая в плечах интерферометра, проходит через светоделитель. С этим можно мириться в случае относительно небольшого детектора первого поколения GEO 600, в котором эта мощность составляет всего несколько киловатт, но не в детекторах второго поколения.

### 3.3. Спектральные плотности квантовых шумов

Из соотношений (3.27), (3.28), учитывая, что теперь  $\gamma$  в них — это полуширина полосы пропускания интерферометра в целом, зависящая от  $T_{ITM}$  и  $T_{SRC}$ , нетрудно получить явные выражения для спектральных плотностей квантовых шумов в лазерных интерферометрах. В простейшем частном случае, когда в тёмный порт

поступают просто нулевые колебания (т.е. рассмотренная в разделе 4.1 технология сжатия света не используется) (см. формулу (Б.14)), они имеют вид

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{2m\Omega^2\mathcal{K}(\Omega)\sin^2\zeta}, \quad (3.36a)$$

$$S_F(\Omega) = \frac{\hbar m\Omega^2\mathcal{K}(\Omega)}{2}, \quad (3.36b)$$

$$S_{xF}(\Omega) = \frac{\hbar}{2} \cot \zeta, \quad (3.36в)$$

где  $\mathcal{K}$  — введённый в [77] удобный безразмерный фактор,

$$\mathcal{K}(\Omega) = \frac{2\Theta\gamma}{m\Omega^2(\gamma^2 + \Omega^2)}, \quad (3.37)$$

описывающий силу оптомеханической связи в интерферометрах (фактор Кимбла),  $\Theta$  — нормированная оптическая мощность, циркулирующая в интерферометре,

$$\Theta = \frac{4\omega_0 I_c}{cL}. \quad (3.38)$$

Нетрудно показать простым вычислением, что эти спектральные плотности удовлетворяют соотношению неопределённостей (2.4), причём реализуя в нём точное равенство.

В лазерных детекторах первого поколения с их относительно невысокой циркулирующей оптической мощностью, не превышающей нескольких десятков киловатт, величина  $\mathcal{K}(\Omega)$  была мала во всём их рабочем диапазоне частот. Поэтому шум радиационного давления в этих детекторах не оказывал заметного влияния на чувствительность и понятие "подавление квантового шума" для них было эквивалентно понятию "подавление дробового шума".

В такой ситуации очевидной стратегией является измерение фазовой квадратуры выходящего из тёмного порта света (поскольку именно она несёт информацию о гравитационном сигнале (см. формулу (3.14))), т.е. выбор гомодинного угла  $\zeta = \pi/2$ . В результате этой классической оптимизации измерительный шум и шум обратного флуктуационного влияния оказываются некоррелированными, а чувствительность детектора становится ограниченной СКП.

В детекторах первого поколения последнее не играло особой роли, однако в детекторах второго поколения после достижения ими проектной чувствительности шум радиационного давления и, соответственно, СКП станут заметными ограничивающими чувствительность факторами. Тем не менее в ближайшем будущем эти детекторы будут по-прежнему функционировать в режиме классической оптимизации.

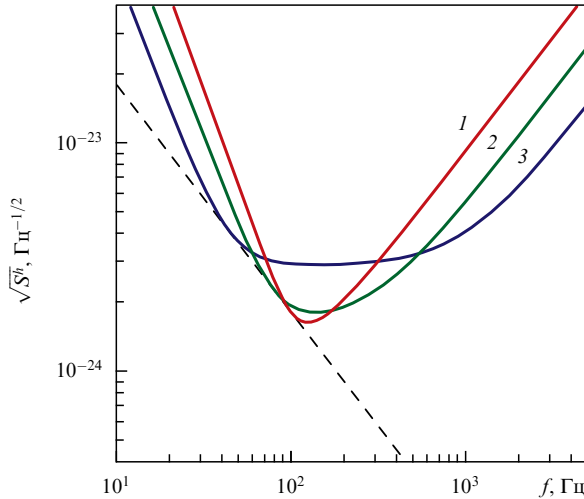
Формулы (3.36) для этого случая упрощаются следующим образом:

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{2m\Omega^2\mathcal{K}(\Omega)}, \quad (3.39a)$$

$$S_F(\Omega) = \frac{\hbar m\Omega^2\mathcal{K}(\Omega)}{2}, \quad (3.39b)$$

$$S_{xF}(\Omega) = 0. \quad (3.39в)$$

Подставляя эти спектральные плотности в формулу (2.21) и учитывая, что в лазерных детекторах гравитационных волн пробные зеркала можно считать свобод-



**Рис. 8.** Спектральные плотности суммарного квантового шума для параметров ALIGO (3.42) при  $\gamma = 2\pi \times 100 \text{ с}^{-1}$  (кривая 1),  $\gamma = 2\pi \times 300 \text{ с}^{-1}$  (кривая 2) и  $\gamma = 2\pi \times 1000 \text{ с}^{-1}$  (кривая 3). Штриховой линией показан Стандартный квантовый предел.

ными массами, нетрудно получить следующую формулу для спектральной плотности суммарного квантового шума в  $\hbar$ -нормировке:

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \left( \frac{1}{\mathcal{K}(\Omega)} + \mathcal{K}(\Omega) \right). \quad (3.40)$$

Формула (3.40) отличается от полученной нами ранее формулы для абстрактной линейной пробной системы (2.27) более сложной частотной зависимостью, возникающей из-за конечности полосы пропускания интерферометра. Для частот, укладывающихся в эту полосу, формулы (2.27) и (3.40) совпадают с точностью до замены

$$\Omega_q^2 = \frac{2\Theta}{m\gamma}. \quad (3.41)$$

Графики спектральной плотности (3.40) для параметров ALIGO<sup>6</sup>:

$$L = 4 \text{ км}, \quad (3.42a)$$

$$m = 40 \text{ кг}, \quad (3.42б)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{1064 \text{ нм}} = 1,77 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}, \quad (3.42в)$$

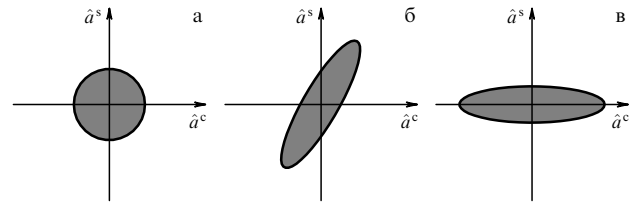
$$\frac{\Theta}{m} = (2\pi \times 100)^3 \text{ с}^{-3} \Rightarrow I_c = 2 \times 840 \text{ кВт}, \quad (3.42г)$$

и нескольких типичных значений  $\gamma$  приведены на рис. 8.

## 4. Методы подавления квантовых шумов в лазерных интерферометрах

### 4.1. Сжатый свет

#### 4.1.1. Идея использования сжатого света в интерферометрах. Очевидным методом снижения спектральной плот-



**Рис. 9.** Области неопределённости для квадратурных амплитуд в нулевом (а), сжатом с некоторым произвольным значением  $\theta$  (б) и сжатом с  $\theta = 0$  (в) квантовых состояниях.

ности измерительного шума (3.39а) является увеличение параметра  $\Theta$ , т.е. оптической мощности  $I_c$ , циркулирующей в плечах интерферометра. Однако, как отмечалось в разделе 2.5, пределы применения этого метода "грубой силы" ограничены.

Альтернативный подход был предложен К. Кейвсом [41], а именно уменьшение квантовой неопределённости фазовой квадратуры  $\hat{a}^s$  излучения, входящего в интерферометр через тёмный порт, что (при  $\zeta = \pi/2$ ) даёт пропорциональное уменьшение дробового шума (см. формулы (3.19), (3.27)). Вследствие соотношения коммутации (см. формулу (Б.26) в приложении Б) при этом пропорционально возрастают неопределённости второй (амплитудной) квадратуры  $\hat{a}^c$  и, соответственно, шум радиационного давления влияния (3.28), так что соотношение неопределённостей (2.18) остаётся в силе.

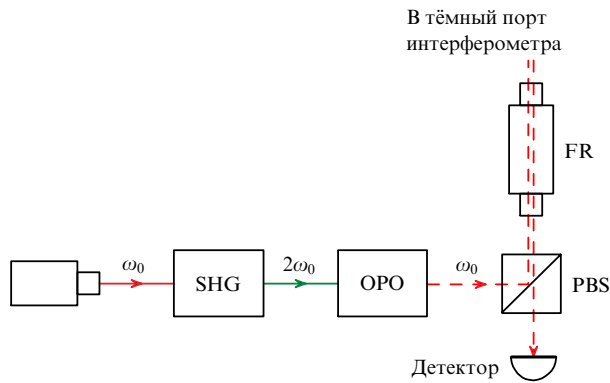
**4.1.2. Технология сжатия света в интерферометрах.** Метод приготовления таких *сжатых* (squeezed) квантовых состояний основан на процессе вырожденного параметрического усиления: у осциллятора, характеристическое сопротивление которого модулируется на его двойной собственной частоте, одна из квадратурных амплитуд усиливается, а другая подавляется [78]. Этот процесс иллюстрируется на рис. 9, где показаны области неопределённости квадратурных амплитуд (т.е. сечения функции Вигнера на уровне  $1/\sqrt{e}$  от максимального значения [79]) для нулевого (исходного) состояния, некоторого произвольного сжатого состояния и сжатого состояния с уменьшенной неопределённостью квадратуры  $\hat{a}^s$ .

Первые эксперименты по генерации сжатого света относятся к середине 1980-х годов [80]. Однако технологии приготовления таких сжатых состояний света, у которых спектральная плотность флуктуаций одной из квадратур была бы подавлена до уровня, меньшего, чем уровень нулевых колебаний, на очень низких для "обычной" квантовой оптики рабочих частотах детекторов гравитационных волн (вплоть до нескольких герц), были разработаны только в XXI в. [81 – 83].

Первое практическое использование сжатого света в детекторах гравитационных волн относится к 2011 г., когда схема сжатия была добавлена к детектору GEO 600 [84, 85]. Инжекция сжатого света позволила снизить дробовой шум и, соответственно, повысить чувствительность этого детектора на высоких частотах примерно на 3 дБ (при той же оптической мощности). С этого момента детектор GEO 600 продолжает рутинно работать в режиме со сжатием.

В конце 2011 г., в самом конце жизненного цикла детекторов Initial LIGO, использование сжатого света было также опробовано и на одном из них [42]. В де-

<sup>6</sup> Указано проектное значение оптической мощности; в первом цикле научных наблюдений она составляла  $\approx 2 \times 100 \text{ кВт}$ .



**Рис. 10.** Схема генерации сжатого света и его инъекции в интерферометр. SHG — генератор второй гармоники (Second Harmonic Generator), OPO — оптический параметрический усилитель (Optical Parametric Oscillator), PBS — поляризационный светоделитель (Polarization Beam Splitter), FR — фарадеевский вращатель (Faraday Rotator). Последние два элемента образуют оптический циркулятор, отделяющий входной луч интерферометра от выходного.

текторах ALIGO сжатый свет пока не используется; однако почти нет сомнений, что это временная ситуация.

Упрощённая схема генерации сжатого света и его инъекции в интерферометр изображена на рис. 10 (см. также рис. 1 в статье [84], где она показана более детально). Здесь свет с частотой  $\omega_0$ , либо отщеплённый от основного излучения лазера накачки, либо генерируемый синхронизированным с ним отдельным лазером (подчеркнём, что последний определяет фазу сжатия  $\theta$ , которая должна быть очень точно привязана к фазе лазера накачки), подаётся на генератор второй гармоники. Выходное излучение последнего, имеющее частоту  $2\omega_0$ , накачивает вырожденный оптический параметрический усилитель, который, по описанному выше принципу, генерирует "сжатый вакуум" (рис. 9в) вновь на частоте  $\omega_0$ .

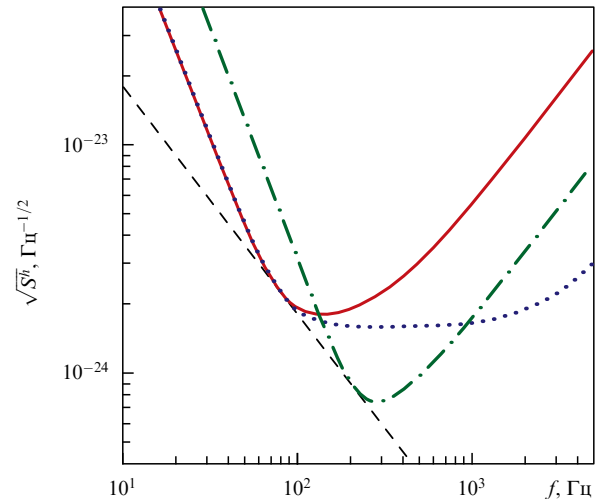
Далее этот свет "подсовывается" в тёмный порт интерферометра вместо нулевых колебаний, идущих от фотодетектора. Для этого используется оптический циркулятор, состоящий из поляризационного светоделителя и фарадеевского вращателя поляризации. Циркулятор направляет сжатый свет в интерферометр, выходной сигнал последнего поступает на детектор, а нулевые колебания фотодетектора (не показаны на рис. 10) отражаются от поляризационного светоделителя и не попадают в интерферометр.

**4.1.3. Спектральные плотности квантовых шумов.** Соотношения для спектральных плотностей квантовых шумов для случая использования сжатия можно получить, комбинируя формулы (3.27), (3.28) и (Б.17):

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{2m\Omega^2\mathcal{K}(\Omega)} \frac{\cosh(2r) + \sinh(2r) \cos[2(\theta - \zeta)]}{\sin^2 \zeta}, \quad (4.1a)$$

$$S_F(\Omega) = \frac{\hbar m \Omega^2 \mathcal{K}(\Omega)}{2} [\cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(2\theta)], \quad (4.1б)$$

$$S_{xF}(\Omega) = \frac{\hbar}{2} \frac{\cosh(2r) \cos \zeta + \sinh(2r) \cos(2\theta - \zeta)}{\sin \zeta}. \quad (4.1в)$$



**Рис. 11.** Влияние сжатия на спектральные плотности суммарного квантового шума. Сплошная кривая:  $\gamma = 2\pi \times 300 \text{ с}^{-1}$ , без сжатия. Штрихпунктирная кривая:  $\gamma = 2\pi \times 300 \text{ с}^{-1}$  и  $\exp(2r) = 10$ . Пунктирная кривая:  $\gamma = 2\pi \times 3000 \text{ с}^{-1}$  и  $\exp(2r) = 10$ . Штриховая линия: Стандартный квантовый предел. Все параметры, не указанные явно, соответствуют ALIGO (см. (3.42)).

Рассмотрим более подробно случай отсутствия кросскорреляции дробового шума и шума радиационного давления, соответствующий, как было отмечено, детекторам гравитационных волн первого и второго поколений и реализующийся при  $\zeta = \pi/2$ ,  $\theta = 0$ . В этом случае формулы (4.1), а также выражение для суммарного квантового шума принимают следующий вид:

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{2m\Omega^2\mathcal{K}(\Omega)} \exp(-2r), \quad (4.2a)$$

$$S_F(\Omega) = \frac{\hbar m \Omega^2 \mathcal{K}(\Omega)}{2} \exp(2r), \quad (4.2б)$$

$$S_{xF}(\Omega) = 0, \quad (4.2в)$$

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \left[ \frac{\exp(-2r)}{\mathcal{K}(\Omega)} + \mathcal{K}(\Omega) \exp(2r) \right]. \quad (4.3)$$

Легко увидеть, что формулы (4.2), (4.3) отличаются от соответствующих формул в случае отсутствия сжатия (3.39), (3.40) только множителем  $\exp(2r)$ , т.е. действительно инъекция сжатого света влияет на квантовый шум так же, как и пропорциональное изменение оптической мощности.

На рисунке 11 приведены спектральные плотности суммарного квантового шума в случаях отсутствия сжатия и со сжатием 10 дБ для параметров ALIGO (3.42) при  $\gamma = 2\pi \times 300 \text{ с}^{-1}$ . Эти графики наглядно демонстрируют выигрыш в чувствительности на высоких и средних частотах, где доминирует дробовой шум, и проигрыш на низких, где доминирует шум радиационного давления.

К настоящему времени предложен ряд методов, дающих выигрыш в чувствительности на всех частотах; они будут рассмотрены в разделе 4.2. Все эти методы требуют внесения более существенных изменений в топологию интерферометра, чем одно лишь добавление сжатия. Однако существует простой приём, позволяющий увеличить чувствительность на высоких и средних



частотах без ухудшения низкочастотной чувствительности и без внесения этих изменений.

**4.1.4. Оптимизация квантового шума при использовании сжатого света.** Рассмотрим более подробно структуру формулы (4.3). Видно, что если

$$\Omega_q = \sqrt{\frac{2\Theta \exp(2r)}{m\gamma}} < \gamma \quad (4.4)$$

(случай, реализующийся во всех реальных лазерных детекторах гравитационных волн), то формула (4.3) может быть аппроксимирована следующим образом:

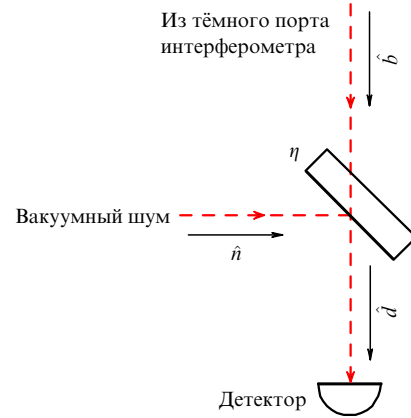
$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) \approx \frac{4\hbar}{mL^2} \begin{cases} \frac{2\Theta \exp(2r)}{m\Omega^4\gamma} \propto \frac{\exp(2r)}{\gamma}, & \Omega < \Omega_q, \\ \frac{m\gamma \exp(-2r)}{2\Theta} \propto \gamma \exp(-2r), & \Omega_q < \Omega < \gamma, \\ \frac{m\Omega^2 \exp(-2r)}{2\Theta\gamma} \propto \frac{\exp(-2r)}{\gamma}, & \Omega > \gamma. \end{cases} \quad (4.5)$$

Следовательно, если одновременно с внесением сжатия расширить полосу пропускания интерферометра пропорционально фактору сжатия  $\exp(2r)$ , то, по сравнению с исходным вариантом без сжатия, на низких и средних частотах квантовый шум не изменится, а на высоких частотах спектральная плотность этого шума уменьшится в  $\exp(4r)$  раз (см. соответствующую кривую на рис. 11). По сравнению же с вариантом со сжатием, но без модификации полосы пропускания, спектральная плотность квантового шума уменьшится в  $\exp(2r)$  на низких и высоких частотах, но пропорционально увеличится на средних. Однако ввиду упомянутого выше характера технических шумов в детекторах гравитационных волн второго поколения глубокое подавление квантового шума в диапазоне средних частот не имеет смысла.

Из сказанного следует, что в детекторах, по крайней мере второго поколения, для получения максимального выигрыша в чувствительности необходимо одновременно с внесением сжатия пропорционально расширять полосу пропускания интерферометра.

**4.1.5. Влияние оптических потерь.** Реальный выигрыш в чувствительности на высоких частотах, продемонстрированный на детекторах GEO 600 и LIGO [42, 84], составил около 3 дБ, в то время как значение коэффициента сжатия на входе интерферометра в обоих случаях было около 10 дБ. Причиной этого несоответствия являются оптические потери в интерферометрах, существенно снижающие эффективность сжатия.

В детекторах первого и второго поколений основной вклад в эти потери вносится элементами выходного оптического тракта интерферометра (включая сюда неединичную квантовую эффективность фотодетектора). Для расчёта влияния этих потерь удобно использовать эквивалентную оптическую схему, показанную на рис. 12. Здесь потери моделируются частично прозрачным зеркалом, которое пропускает на фотодетектор (теперь уже идеальный) лишь долю  $\eta < 1$  выходящего из тёмного порта света. Фактор  $\eta$ , который учитывает все оптические потери в выходном тракте, носит название "унифицированной квантовой эффективности" интерферометра.



**Рис. 12.** Модель оптических потерь в выходном тракте интерферометра:  $\eta < 1$  — унифицированная квантовая эффективность,  $\hat{n}$  — дополнительный вакуумный шум, вносимый оптическими потерями.

ра. Это же зеркало подмешивает к выходному сигналу эффективный вакуумный шум  $\hat{n}$  (напомним, что в силу флуктуационно-диссипационной теоремы любые потери сопровождаются внесением соответствующего шума).

В итоге для света, попадающего на фотодетектор, будет справедливо следующее выражение:

$$\hat{d} = \sqrt{\eta} \hat{b} + \sqrt{1-\eta} \hat{n} = \sqrt{\eta} (\hat{b} + \epsilon \hat{n}), \quad (4.6)$$

где  $\epsilon$  — нормированные оптические потери,

$$\epsilon^2 = \frac{1-\eta}{\eta}. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что спектральную плотность дробового шума для интерферометра с потерями можно получить по следующему правилу:

$$S_x = S_x^{\text{without loss}} + \epsilon^2 S_x^{\text{without loss and squeezing}}, \quad (4.8)$$

где второе слагаемое создаётся дополнительным шумом  $\hat{n}$ . В частности, формула (3.39а) для случая без сжатия модифицируется следующим образом:

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{2m\Omega^2 \mathcal{K}(\Omega) \eta}, \quad (4.9)$$

а формула для случая со сжатием (4.2а) принимает вид

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{2m\Omega^2 \mathcal{K}(\Omega)} [\exp(-2r) + \epsilon^2]. \quad (4.10)$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что если унифицированная квантовая эффективность относительно близка к единице,  $\eta \gtrsim 0,5$ , как в современных лазерных детекторах гравитационных волн, то в случае без сжатия вызванная потерями деградация чувствительности относительно невелика. В то же время эти потери легко разрушают возможный выигрыш в чувствительности за счёт использования сжатого света.

Рассмотрим в качестве примера оценки для детектора GEO 600, приведённые в [84]: исходное сжатие 10 дБ ( $\exp(-2r) \approx 0,1$ ) и унифицированная квантовая эффективность  $\eta \approx 0,62$ . В этом случае эффективное сжатие

составляет

$$\exp(-2r) + \epsilon^2 \approx 0,71, \quad (4.11)$$

т.е. всего лишь примерно 1,5 дБ, а выигрыш в чувствительности по отношению к таковой в случае без сжатия и с такими же потерями составит

$$\eta \exp(-2r) + 1 - \eta \approx 0,44, \quad (4.12)$$

т.е. те же 3,5 дБ, о которых сообщалось в работе [84].

## 4.2. Частотно-зависимое сжатие и вариационное измерение

**4.2.1. Частотно-зависимое сжатие.** Естественным развитием идеи использования сжатых состояний света является внесение частотной зависимости в угол сжатия  $\theta$ , предложенное В. Унру в работе [59]. Унру показал, что для каждой заданной частоты наблюдения  $\Omega$  существует некоторый оптимальный угол сжатия, дающий минимум суммарного квантового шума на этой частоте (рассмотренный в разделе 4.1 случай  $\theta = 0$  соответствует оптимуму при  $\Omega \rightarrow \infty$ ). Соответственно, оптимальная частотная зависимость  $\theta$  может обеспечить подавление квантового шума на всех частотах.

Выражение для спектральной плотности суммарного квантового шума в случае произвольного угла сжатия можно получить, подставив формулы (4.1) в (2.15). Для упрощения выкладок мы снова ограничимся частным случаем  $\zeta = \pi/2$ . Тогда

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \left\{ \frac{\cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(2\theta)}{\mathcal{K}(\Omega)} - 2 \sinh(2r) \sin(2\theta) + \mathcal{K}(\Omega) [\cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(2\theta)] \right\}. \quad (4.13)$$

Нетрудно показать, что для каждой заданной частоты  $\Omega$  при

$$\tan \theta(\Omega) = \mathcal{K}(\Omega) \quad (4.14)$$

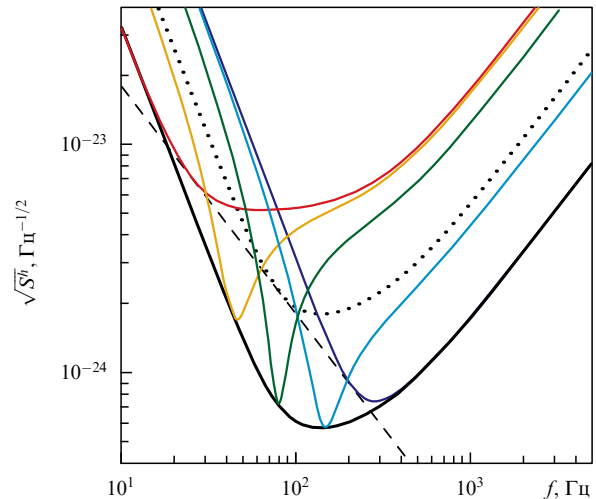
спектральная плотность достигает минимума:

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \left( \frac{1}{\mathcal{K}(\Omega)} + \mathcal{K}(\Omega) \right) \exp(-2r). \quad (4.15)$$

Из сравнения (4.15) с (3.40) следует, что если подать на вход интерферометра сжатый свет с оптимизированным по правилу (4.14) углом сжатия, то можно подавить спектральную плотность квантового шума в  $\exp(2r)$  раз на всех частотах. В частности, при этом в широкой полосе частот спектральная плотность квантового шума опускается ниже СКП, что объясняется наличием при  $\theta \neq 0$  и  $\theta \neq \pi/2$  ненулевой кросскорреляции дробового шума и шума радиационного давления (см. второй член в фигурных скобках в формуле (4.13)).

Графики спектральной плотности (4.13) для нескольких фиксированных значений  $\theta$  и оптимизированной спектральной плотности (4.15) приведены на рис. 13.

**4.2.2. Вариационное измерение.** Более радикальный подход, который в принципе позволяет полностью устранить влияние шума радиационного давления на выход-



**Рис. 13.** Влияние угла сжатия  $\theta$  на спектральные плотности суммарного квантового шума. Пунктирная кривая: без сжатия. Тонкие сплошные кривые:  $\exp(2r) = 10$ ,  $\theta$  варьируется (в порядке возрастания частот минимумов) от  $\pi/2$  до 0. Жирная сплошная кривая:  $\exp(2r) = 10$  и оптимальный частотно-зависимый угол сжатия (4.14). Во всех случаях  $\gamma = 2\pi \times 300 \text{ с}^{-1}$ . Штриховая линия: СКП. Все параметры, не указанные явно, соответствуют ALIGO (см. (3.42)).

ной сигнал интерферометра, — это оптимизация кросс-корреляционной спектральной плотности  $S_{XF}$ , рассмотренная в разделе 2.5 (см. формулу (2.55)). В лазерных интерферометрах указанная оптимизация может быть проведена посредством внесения частотной (эффективной) зависимости в гомодинный угол  $\zeta$  [86, 87]. Этот подход получил название вариационного измерения [77, 88].

Из формулы (2.59) следует, что спектральная плотность суммарного квантового шума, получаемая в результате такой оптимизации, оказывается обратно пропорциональной  $S_F$ . Следовательно, при использовании сжатого света угол сжатия выгодно выбрать таким, чтобы он обеспечивал максимум  $S_F$ , т.е. положить  $\theta = 0$ . Комбинируя для этого случая формулы (2.15) и (4.1), получим

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \left[ \frac{\exp(-2r) + \exp(2r) \cot^2 \zeta}{\mathcal{K}(\Omega)} - 2 \exp(2r) \cot \zeta + \mathcal{K}(\Omega) \exp(2r) \right]. \quad (4.16)$$

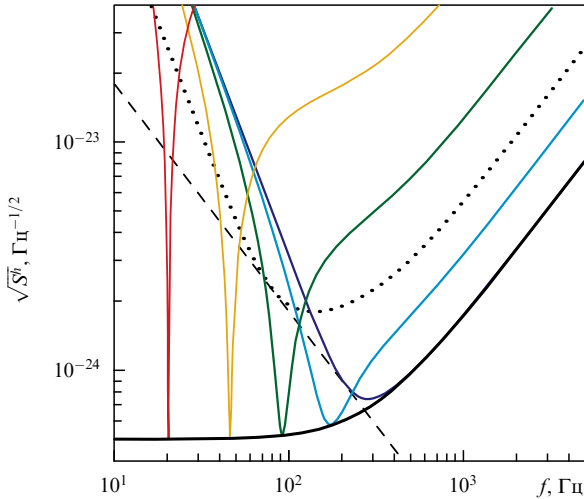
Спектральная плотность (4.16) для каждой заданной частоты  $\Omega$  достигает минимума при

$$\cot \zeta(\Omega) = \mathcal{K}(\Omega) \quad (4.17)$$

(тот же результат можно получить, используя общую формулу (2.55)). Соответствующая оптимизированная спектральная плотность суммарного квантового шума имеет вид

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \frac{\exp(-2r)}{\mathcal{K}(\Omega)}. \quad (4.18)$$

Легко увидеть, что выражение (4.18) с точностью до пересчёта между координатной спектральной плотностью и  $S^h$  соответствует дробовому шуму (4.2а), т.е.,



**Рис. 14.** Влияние гомодинного угла  $\zeta$  на спектральные плотности суммарного квантового шума. Пунктирная кривая: без сжатия,  $\zeta = \pi/2$ . Тонкие сплошные кривые:  $\exp(2r) = 10, \theta = 0$ ,  $\zeta$  варьируется (в порядке возрастания частот минимумов) от  $0,02\pi$  до  $\pi/2$ . Жирная сплошная кривая:  $\exp(2r) = 10, \theta = 0$  и оптимальный частотно-зависимый гомодинный угол (4.17). Во всех случаях  $\gamma = 2\pi \times 300 \text{ с}^{-1}$ . Штриховая линия: СКП. Все параметры, не указанные явно, соответствуют ALIGO (см. (3.42)).

действительно, используя частотно-зависимый гомодинный угол, можно полностью подавить шум радиационного давления.

Графики спектральной плотности (4.16) для нескольких фиксированных значений  $\zeta$ , а также оптимизированной спектральной плотности (4.18) приведены на рис. 14.

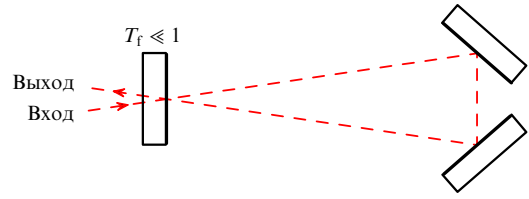
**4.2.3. Фильтрующие резонаторы.** Очевидной проблемой при реализации частотных зависимостей (4.14), (4.17) является то, что характерные частоты  $\Omega/(2\pi)$  в детекторах гравитационных волн находятся в диапазоне от нескольких герц до нескольких килогерц, т.е. ничтожно малы по сравнению с оптическими частотами, что требует каких-то устройств с очень сильной дисперсией. В работе [77] предложено использовать в качестве таких устройств высокочастотные оптические резонаторы Фабри–Перо.

В работе [77] было также показано, что при отражении сжатого света от такого *фильтрующего* резонатора (рис. 15) угол сжатия сдвигается на величину

$$\theta_f(\Omega) = \arctan \frac{2\gamma_f \delta_f}{\gamma_f^2 - \delta_f^2 + \Omega^2}, \quad (4.19)$$

где  $\gamma_f$  и  $\delta_f$  — соответственно полуширина полосы пропускания фильтрующего резонатора и его отстройка от частоты  $\omega_0$ . Для реализации частотной зависимости четвертого порядка по  $\Omega$ , требуемой формулами (3.37), (4.14), было предложено использовать два последовательно соединённых резонатора. На вход первого должен подаваться "обычный" сжатый свет (с частотно-независимым углом  $\theta$ ), а выход второго должен инжектироваться в тёмный порт интерферометра. Для схемы с такой топологией авторами [77] было предложено название "схема с префильтрацией".

В той же работе показано, что эту связку из двух резонаторов можно использовать и для создания эффек-



**Рис. 15.** Схема фильтрующего резонатора [77]. Зеркало в левой части рисунка имеет малый коэффициент пропускания  $T_f$ , два других зеркала — полностью отражающие. Для наглядности изображён треугольный резонатор, поскольку в нём выходной луч отделён от входного самой топологией резонатора. Использование обычного линейного резонатора также возможно при условии добавления к нему оптического циркулятора, аналогичного показанному на рис. 10.

тивного частотно-зависимого гомодинного угла (4.17). Для этого на её вход должен подаваться свет, выходящий из тёмного порта интерферометра, а выходящий из неё свет должен регистрироваться гомодинным детектором. Эта схема была названа авторами схемой с *постфильтрацией*.

Строго говоря, в такой схеме фильтрующие резонаторы не изменяют гомодинной фазы, а компенсируют частотную зависимость фазы пондеромоторного сжатия света, создаваемого частотно-зависимым оптомеханическим взаимодействием в интерферометре [86]. Это позволяет оптимальным образом измерять выходящий свет "обычным" гомодинным детектором (с частотно-независимым гомодинным углом). Однако результат полностью соответствует тому, который мог бы дать частотно-зависимый гомодинный угол.

**4.2.4. Влияние оптических потерь в интерферометре.** Из сравнения полученных результатов можно сделать вывод, что схема с постфильтрацией, позволяющая полностью устранить шум радиационного давления, лучше схемы с префильтрацией, которая может подавить его "только" в  $\exp(2r)$  раз. Однако этот вывод справедлив лишь для идеального интерферометра, без оптических потерь. Учёт последних радикально меняет картину.

Как и в случае частотно-независимого сжатия, мы ограничимся анализом только выходных потерь. Используя правило (4.8), нетрудно получить выражения для спектральной плотности суммарного квантового шума для варианта префильтрации:

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \left\{ \frac{\cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(2\theta) + \epsilon^2}{\mathcal{K}(\Omega)} - 2 \sinh(2r) \sin(2\theta) + \mathcal{K}(\Omega) [\cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(2\theta)] \right\}. \quad (4.20)$$

Эта спектральная плотность достигает минимума по  $\theta$  при том же значении (4.14), что и в случае без потерь:

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \left[ \frac{\exp(-2r) + \epsilon^2}{\mathcal{K}(\Omega)} + \mathcal{K}(\Omega) \exp(-2r) \right] \quad (4.21)$$

(ср. с формулой (4.15)).

Для варианта с постфильтрацией, соответственно,

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \times \left\{ \frac{1}{\mathcal{K}(\Omega)} \left[ \exp(-2r) + \exp(2r) \cot^2 \zeta + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 \zeta} \right] - 2 \exp(2r) \cot \zeta + \mathcal{K}(\Omega) \exp(2r) \right\}. \quad (4.22)$$

Здесь наличие потерь влияет на оптимальное значение  $\zeta$ :

$$\cot \zeta(\Omega) = \frac{\mathcal{K}(\Omega)}{1 + \epsilon^2 \exp(-2r)}, \quad (4.23)$$

давая следующую оптимизированную спектральную плотность:

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \left[ \frac{\exp(-2r) + \epsilon^2}{\mathcal{K}(\Omega)} + \frac{\epsilon^2 \mathcal{K}(\Omega)}{1 + \epsilon^2 \exp(-2r)} \right]. \quad (4.24)$$

Таким образом, в варианте с постфильтрацией при наличии оптических потерь шум радиационного давления не компенсируется полностью.

Из сравнения формул (4.21) и (4.24) следует, что префильтрация становится предпочтительнее при достаточном сильном сжатии, точнее, если

$$2\epsilon^2 \sinh(2r) > 1. \quad (4.25)$$

Отметим, что сжатие в 10 дБ ( $2 \sinh(2r) > 10$ ) было продемонстрировано уже достаточно давно [82], в то время как уменьшение потерь до уровня  $\epsilon^2 < 0,1$ , по крайней мере в детекторах второго поколения, представляется проблематичным, что говорит в пользу варианта с префильтрацией.

**4.2.5. Практические соображения.** Весьма существенной проблемой при реализации схем с фильтрующими резонаторами являются также оптические потери в самих резонаторах. Вклад этих потерь в ширину полосы фильтрующего резонатора должен быть значительно меньше ширины самой полосы, т.е. должно выполняться неравенство

$$\frac{cA_f}{4L_f} \ll \gamma_f, \quad (4.26)$$

где  $L_f$  — длина фильтрующего резонатора,  $A_f$  — коэффициент поглощения в расчёте на один круговой проход света. Следовательно, для типичных значений  $\gamma_f \sim 10^3 \text{ с}^{-1}$  (см. формулу (4.29)) и  $A_f \sim 10^{-4}$  длина фильтрующих резонаторов должна составлять по крайней мере несколько десятков, а лучше несколько сотен метров, т.е. должна быть сравнимой с длиной плеч самого детектора гравитационных волн, что существенно увеличивает его стоимость.

С другой стороны, в работах [89, 90] показано, что с учётом реальных параметров современных детекторов связка из двух фильтрующих резонаторов избыточна — вполне достаточно одного. Действительно, формула (4.14) (в случае префильтрации, те же рассуждения справедливы и для постфильтрации) может быть записана в виде

$$\tan \theta(\Omega) = \frac{\Omega_q^2 \gamma^2}{\Omega^2 (\gamma^2 + \Omega^2)}. \quad (4.27)$$

Слагаемое  $\Omega^2$  в скобках в знаменателе в правой части (4.27) становится существенным только при  $\Omega > \gamma$ . С другой стороны, у современных детекторов  $\gamma^2 \gg \Omega_q^2$ , следовательно, при  $\Omega > \gamma$  условие (4.27) даёт значения  $\theta$ , близкие к нулю. Физическая причина этого состоит в том, что при  $\Omega > \gamma$  вкладом шума радиационного давления в суммарный квантовый шум можно пренебречь и оптимальным является угол сжатия  $\theta \rightarrow 0$ , минимизирующий дробовой шум (см. соответствующий график на рис. 13).

Поэтому формулу (4.27) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\tan \theta(\Omega) = \frac{\Omega_q^2}{\Omega^2}. \quad (4.28)$$

Отсюда с учётом (4.19) нетрудно получить параметры единственного фильтрующего резонатора, который обеспечивает такую зависимость:

$$\gamma_f = \delta_f = \Omega_q. \quad (4.29)$$

В настоящее время добавление одного короткого фильтрующего резонатора (в случае префильтрации) рассматривается как весьма вероятный вариант модернизации детекторов ALIGO [91, 92]. Длина этого резонатора, 16 м, выбрана так, чтобы его можно было разместить в существующей инфраструктуре ALIGO).

### 4.3. Квантовый измеритель скорости

**4.3.1. Квантовые невозмущающие измерения.** Принцип квантовых невозмущающих измерений (КНИ) (в англоязычной литературе — quantum non-demolition measurement, QND) был предложен в 1970-е годы [22, 26] (см. также более поздние обзоры [93, 94]). Суть этого метода может быть сведена к следующим требованиям к измерительному прибору [95]:

1) должна измеряться такая наблюдаемая  $Q$  пробного объекта, значения оператора  $\hat{Q}(t)$  которой в различные моменты времени (в картине эволюции Гейзенберга) коммутируют между собой:  $[\hat{Q}(t), \hat{Q}(t')] \equiv 0$ . Такие наблюдаемые получили название КНИ-наблюдаемых;

2) измеритель в принципе не должен давать информацию о наблюдаемых, операторы которых не коммутируют с  $\hat{Q}$ .

При выполнении этих условий значения наблюдаемых, не коммутирующих с  $\hat{Q}$ , будут, естественно, возмущаться, но это никак не отразится на самой  $Q$ . Поэтому такие схемы измерения свободны от СКП.

В частности, сформулированным условиям удовлетворяет измерение интеграла движения пробного объекта при условии, что гамильтониан взаимодействия пробного объекта с измерителем коммутирует с этой наблюдаемой<sup>7</sup>.

В конце 1970-х годов были предложены также первые "практические" схемы КНИ [22–25]. В основном они были ориентированы на осцилляторы, т.е. на колебательные моды твердотельных детекторов того времени, с использованием в качестве КНИ-наблюдаемых либо энергии, либо (в более реалистических схемах [23, 24]) квадратурной амплитуды осциллятора.

<sup>7</sup> Понятно, что измеряемая наблюдаемая должна реагировать на внешнее воздействие, которое требуется обнаружить, т.е. являться интегралом движения только в отсутствие внешнего воздействия.

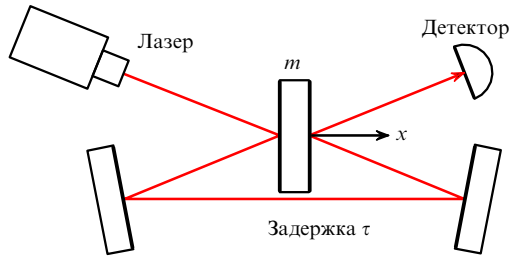


Рис. 16. Схема квантового измерителя скорости.

В работе [25] была предложена также схема КНИ для свободной массы, использующая её очевидный интеграл движения — импульс. К сожалению, в этой схеме взаимодействие осуществляется через магнитное поле; достижение квантового уровня чувствительности в такой схеме вряд ли возможно ввиду технологических причин.

**4.3.2. Идея квантового измерителя скорости.** В работе [96] было предложено измерять вместо импульса скорость пробного тела посредством двух последовательных измерений его координаты с сохранением когерентности квантового состояния измерителя между ними и с инверсией знака взаимодействия при втором измерении. В отличие от канонического импульса  $p$ , скорость  $v$  и кинематический импульс  $mv$  не являются интегралами движения (напомним, что при наличии гамильтониана взаимодействия пробного объекта с прибором, зависящего от  $p$ , канонический импульс отличается от кинематического). Тем не менее, как мы увидим, при выполнении некоторых дополнительных условий такая схема позволяет преодолевать СКП.

Простейшая схема квантового измерителя скорости приведена на рис. 16. Световой импульс от лазера отражается сначала от одной стороны пробной массы, затем с задержкой  $\tau$  — от другой, после чего регистрируется гомодинным детектором. Легко увидеть, что конечное значение фазы этого импульса выражается как

$$\phi_{\text{fin}} = \phi + \frac{2\omega_0\tau}{c} \bar{v}, \quad (4.30)$$

где  $\phi$  — начальное значение фазы,  $\bar{v}$  — средняя скорость пробной массы между отражениями,

$$\bar{v} = \frac{x_\tau - x}{\tau}, \quad (4.31)$$

а  $x$  и  $x_\tau$  — значения координаты осциллятора в моменты первого и второго отражений соответственно. С учётом того, что световой импульс при отражении передаёт пробной массе импульс  $2\mathcal{E}/c$ , где  $\mathcal{E}$  — его энергия, средняя скорость между отражениями будет отличаться от её начального значения  $v$ :

$$\bar{v} = v + \frac{2}{mc} \mathcal{E}, \quad (4.32)$$

отсюда следует

$$\phi_{\text{fin}} = \phi + \frac{2\omega_0\tau}{c} v + \frac{4\omega_0\tau}{mc^2} \mathcal{E}. \quad (4.33)$$

Поэтому при измерении фазы  $\phi_{\text{fin}}$  точность измерения начальной скорости будет ограничена величиной

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{c\Delta\phi}{2\omega_0\tau}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\mathcal{E}}{mc}\right)^2}, \quad (4.34)$$

где  $\Delta\phi$  и  $\Delta\mathcal{E}$  — начальные неопределённости фазы и энергии светового импульса. С учётом соотношения неопределённостей

$$\Delta\mathcal{E}\Delta\phi \geq \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (4.35)$$

ошибка измерения (4.34) оказывается ограниченной величиной СКП для скорости [96]:

$$\Delta v \geq \Delta v_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\tau}}. \quad (4.36)$$

Очевидно, однако, что пропорциональное  $\mathcal{E}$  слагаемое в (4.33) можно компенсировать, если измерять не фазу светового импульса, а линейную комбинацию

$$\phi_{\text{fin}} - \frac{4\omega_0\tau}{mc^2} \mathcal{E}, \quad (4.37)$$

т.е. некоторую оптимальную квадратурную амплитуду света на выходе. При этом ошибка измерения начальной скорости выражается как

$$\Delta v = \frac{c}{2\omega_0\tau} \Delta\phi, \quad (4.38)$$

где  $\Delta\phi$  — начальная неопределённость фазы. Последняя в принципе может быть сколь угодно мала, что соответствует точному измерению  $v$ .

Несмотря на то что скорость пробного объекта возмущается в процессе измерения, это возмущение компенсируется при втором отражении светового импульса от него:

$$v_{\text{fin}} = \bar{v} - \frac{2}{mc} \mathcal{E} = v. \quad (4.39)$$

В то же время наличие неопределённости скорости *во время измерения* приводит к случайному смещению объекта, т.е. к возмущению его координаты

$$\Delta x = \frac{2\tau}{mc} \Delta\mathcal{E}. \quad (4.40)$$

Легко увидеть, что ошибка измерения (4.38) и возмущение (4.40) удовлетворяют соотношению неопределённостей

$$\Delta v \Delta x = \frac{\Delta\phi \Delta\mathcal{E}}{\omega_0} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (4.41)$$

Этот простой пример наглядно демонстрирует основные свойства квантового измерителя скорости: а) это измерение действительно является невозмущающим; б) но для получения точности, лучшей чем СКП, оно, как и рассмотренные в разделе 4.2 координатные измерения, требует внесения кросскорреляции между измерительным шумом и шумом обратного флуктуационного влияния.

**4.3.3. Интерферометр Саньяка.** В серии работ [97–103], последовавших за исходной статьёй [96], было предложено несколько основанных на идее квантового измерителя скорости практических схем лазерных детекторов

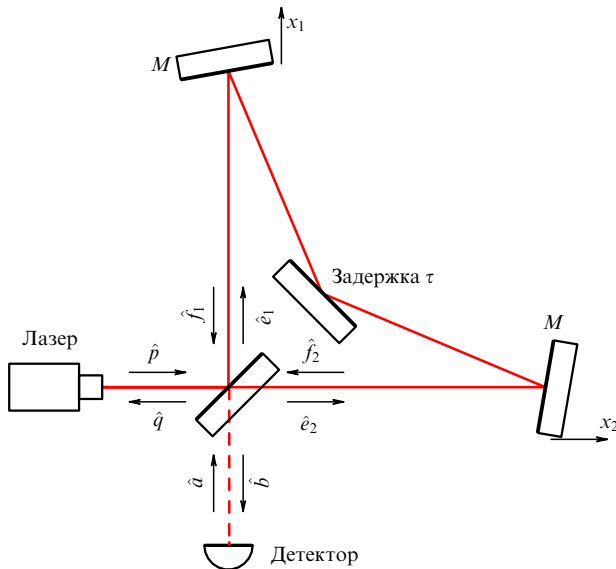


Рис. 17. Упрощённая схема лазерного детектора гравитационных волн на основе квантового измерителя скорости (интерферометр Саньяка).  $M$  — массы подвижных зеркал.

гравитационных волн с чувствительностью, не ограниченной СКП. Здесь мы рассмотрим предложенный в работах [101, 102] вариант, использующий топологию интерферометра Саньяка. Этот вариант, с одной стороны, наиболее точно следует исходной идее двукратного координатного измерения, а с другой — он рассматривается как один из наиболее вероятных кандидатов для реализации в гравитационных детекторах третьего поколения.

Упрощённая схема квантового измерителя скорости на основе интерферометра Саньяка приведена на рис. 17. Она отличается от схемы интерферометра Майкельсона (см. рис. 5) тем, что свет в каждом из плеч после отражения от подвижного зеркала не возвращается сразу на светоделитель, а сначала перенаправляется в другое плечо и только потом уже рекомбинирует на светоделителе.

Рассмотрим работу этой схемы, следуя логике изложения раздела 3.1. Квадратурные амплитуды для света, входящего в каждое из двух плеч, как и в случае интерферометра Майкельсона, имеют вид (3.8). Свет, ушедший в "северное" плечо, сначала отражается от "северного" зеркала, а затем с задержкой  $\tau$  — от "восточного"; свет, ушедший в "восточное" плечо, проходит тот же путь в противоположном направлении. В итоге квадратурные амплитуды для волн, возвращающихся на светоделитель, будут иметь вид (ср. с формулой (3.10)):

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_1^c(t) \\ \hat{f}_1^s(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} P + \hat{p}^c(t - \tau) \\ \hat{p}^s(t - \tau) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{a}^c(t - \tau) \\ \hat{a}^s(t - \tau) \end{pmatrix} + \frac{2\omega_0 P}{c} (\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t - \tau)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.42a)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_2^c(t) \\ \hat{f}_2^s(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} P + \hat{p}^c(t - \tau) \\ \hat{p}^s(t - \tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{a}^c(t - \tau) \\ \hat{a}^s(t - \tau) \end{pmatrix} + \frac{2\omega_0 P}{c} (\hat{x}_2(t) + \hat{x}_1(t - \tau)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.42б)$$

Для волны, уходящей после рекомбинации на светоделителе в тёмный порт, а также для выходного сигнала гомодинного детектора соответственно получаем (см. формулы (3.12), (3.16)):

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1^c(t) \\ \hat{b}_1^s(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{a}^c(t - \tau) \\ \hat{a}^s(t - \tau) \end{pmatrix} + \frac{2\omega_0 P}{c} (\hat{x}(t) - \hat{x}(t - \tau)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

$$i_-(t) \propto -\hat{a}^c(t - \tau) \cos \zeta + \left[ -\hat{a}^s(t - \tau) + \frac{2\omega_0 P}{c} (\hat{x}(t) - \hat{x}(t - \tau)) \right] \sin \zeta. \quad (4.44)$$

(ср. с формулой (3.17)). Таким образом, интерферометр Саньяка, подобно рассмотренной выше мысленной схеме, реализует измерение разности значений  $\hat{x}$  в два момента времени, различающихся на время задержки  $\tau$ , т.е. среднюю за время  $\tau$  скорость дифференциальной механической моды (3.2) пробных зеркал интерферометра.

Рассмотрим теперь обратное флуктуационное влияние в этой схеме. В отличие от света в интерферометре Майкельсона, здесь свет, ушедший от светоделителя в каждое из плеч, в ходе своего кругового обхода давит последовательно на оба зеркала:

$$\hat{F}_{\Pi 1}(t) = \sqrt{2} \hbar \omega_0 P (\hat{e}_1^c(t) + \hat{e}_2^c(t - \tau)), \quad (4.45a)$$

$$\hat{F}_{\Pi 2}(t) = \sqrt{2} \hbar \omega_0 P (\hat{e}_2^s(t) + \hat{e}_1^s(t - \tau)), \quad (4.45б)$$

и дифференциальная сила, действующая на координату  $\hat{x}$ , с учётом формул (3.8), (4.42) выражается как

$$\hat{F}_{\Pi}(t) = \hat{F}_{\Pi 1}(t) - \hat{F}_{\Pi 2}(t) = \frac{2\hbar\omega_0 P}{c} (\hat{a}^c(t) - \hat{a}^c(t - \tau)) \quad (4.46)$$

(ср. с формулой (3.26)).

Перепишем формулы (4.44), (4.46) в спектральном представлении:

$$i_-(\Omega) \propto \hat{x}(\Omega) + \hat{x}_{\Pi}(\Omega), \quad (4.47)$$

где

$$\hat{x}_{\Pi}(\Omega) = \frac{c}{2\omega_0 P} \frac{\hat{a}^c(\Omega) \cot \zeta + \hat{a}^s(\Omega)}{1 - \exp(-i\Omega\tau)}, \quad (4.48a)$$

$$\hat{F}_{\Pi}(\Omega) = \frac{2\hbar\omega_0 P}{c} [1 - \exp(i\Omega\tau)] \hat{a}^c(\Omega). \quad (4.48б)$$

Пусть время задержки мало по сравнению характерным временем изменения сигнала  $\Omega^{-1}$ . Тогда формулы (4.48) упрощаются:

$$\hat{x}_{\Pi}(\Omega) = \frac{\hat{v}_{\Pi}(\Omega)}{-i\Omega}, \quad (4.49a)$$

$$\hat{F}_{\Pi}(\Omega) = -i\Omega \hat{p}_{\Pi}(\Omega), \quad (4.49б)$$

где  $\hat{v}_{\Pi}(\Omega)$  и  $\hat{p}_{\Pi}(\Omega)$  — соответственно дробовой шум и шум радиационного давления, нормированные как эквивалентные флуктуационные скорость и импульс,

$$\hat{v}_{\Pi}(\Omega) = -\frac{c}{2\omega_0 P \tau} [\hat{a}^c(\Omega) \cot \zeta + \hat{a}^s(\Omega)], \quad (4.50a)$$

$$\hat{p}_{\Pi}(\Omega) = \frac{2\hbar\omega_0 P \tau}{c} \hat{a}^c(\Omega). \quad (4.50б)$$

Предположим для упрощения, что в тёмный порт интерферометра поступают нулевые колебания (вариант с инжекцией сжатого света будет рассмотрен ниже). В этом случае спектральные плотности шумов (4.49) выражаются как

$$S_x(\Omega) = \frac{S_v}{\Omega^2}, \quad (4.51a)$$

$$S_F(\Omega) = \Omega^2 S_p, \quad (4.51б)$$

$$S_{xF}(\Omega) = -S_{vp}, \quad (4.51в)$$

где  $S_v$ ,  $S_p$  и  $S_{vp}$  — частотно-независимые спектральные плотности шумов  $\hat{v}_\Pi$  и  $\hat{p}_\Pi$ ,

$$S_v = \frac{\hbar c^2}{16\omega_0 I_c \tau^2 \sin^2 \zeta}, \quad (4.52a)$$

$$S_p = \frac{4\hbar\omega_0 I_c \tau^2}{c^2}, \quad (4.52б)$$

$$S_{vp} = -\frac{\hbar}{2} \cot \zeta. \quad (4.52в)$$

Отметим, что спектральные плотности (4.51a)–(4.51в) удовлетворяют соотношению неопределённостей (2.4), реализуя в нём точное равенство:

$$S_x(\Omega)S_F(\Omega) - S_{xF}^2(\Omega) = S_v S_p - S_{vp}^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (4.53)$$

Спектральная плотность суммарного квантового шума (2.15) для рассмотренного интерферометра имеет вид

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{8}{m^2 L^2 \Omega^2} (m^2 S_v + 2m S_{vp} + S_p). \quad (4.54)$$

В простейшем частном случае отсутствия кросскорреляции дробового шума и шума радиационного давления ( $\zeta = \pi/2$ ,  $S_{xF} = 0$ ) формула (4.54) упрощается:

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{8}{mL^2\Omega^2} (m^2 S_v + S_p). \quad (4.55)$$

Очевидная оптимизация выражения (4.55) по величине мощности накачки:

$$\sqrt{\frac{S_p}{S_v}} = \frac{8\omega_0 I_c \tau^2}{c^2} = m, \quad (4.56)$$

даёт

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = S_{\text{SQL}}^h(\Omega), \quad (4.57)$$

т.е. чувствительность в данном случае оказывается ограниченной СКП. Однако даже в этом случае квантовый измеритель скорости демонстрирует преимущество над "обычным" координатным измерителем: у последнего спектральная плотность суммарного квантового шума лишь касается СКП в одной точке  $\Omega = \Omega_q$ , проходя на всех остальных частотах выше СКП (см. формулу (2.27) и рис. 3). В то же время для квантового измерителя скорости вследствие специфической частотной зависимости его квантовых шумов (4.51) выполняется равенство  $S_{\text{sum}}^h = S_{\text{SQL}}^h$  на всех (с учётом сделанных приближений) частотах.

Та же частотная независимость позволяет провести полную оптимизацию квантового шума (см. раздел 2.5) на всех частотах без использования фильтрующих резонаторов. Действительно, с учётом соотношения (4.53) спектральная плотность (4.54) при

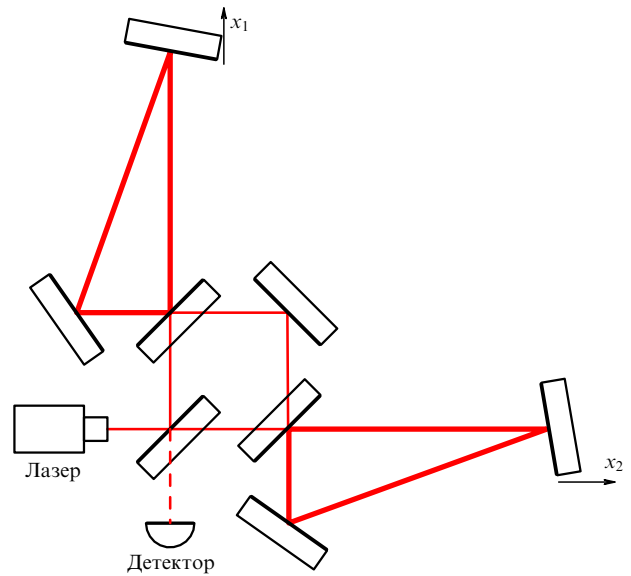
$$S_{vp} = -\frac{S_p}{m} \quad (4.58)$$

(ср. с формулой (2.55)) достигает минимума по  $S_{vp}$ :

$$S_{\text{sum}}^h(\Omega) = \frac{2\hbar^2}{L^2 \Omega^2 S_p} = \frac{S_{\text{SQL}}^h(\Omega)}{2} \frac{mc^2}{8\omega_0 I_c \tau^2}. \quad (4.59)$$

То есть в принципе чувствительность интерферометра Саньяка ограничивается только доступной мощностью накачки и может быть сколь угодно выше СКП.

**4.3.4. Практическая схема квантового измерителя скорости.** Рассмотренный "простой" интерферометр Саньяка обладает тем же основным недостатком, что и "простой" интерферометр Майкельсона, а именно: при любых разумных значениях его оптической мощности обеспечиваемое им оптомеханическое взаимодействие слишком слабо. В работах [101, 102] было предложено, по аналогии с интерферометром Майкельсона, дополнить интерферометр Саньяка резонаторами Фабри–Перо в плечах. При этом, правда, возникает техническая проблема организации "кругового движения", при котором свет заходит сначала в резонатор в одном плече, затем — в другом и только потом поступает на светоделитель. В [101] было предложено использовать для этого две ортогональные поляризации света, а в [102] — два встречных направления распространения света в кольцевых резонаторах Фабри–Перо. С точки зрения квантовых шумов эти схемы эквивалентны. Более простой вариант с кольцевыми резонаторами приведён на рис. 18.



**Рис. 18.** Практическая схема лазерного детектора гравитационных волн на основе квантового измерителя скорости (интерферометр Саньяка с резонаторами Фабри–Перо в плечах). Вариант с треугольными резонаторами в плечах [102]. Возможен также вариант с обычными линейными резонаторами и дополнительной поляризационной оптикой [101].

Квантовые шумы интерферометра Саньяка с резонаторами Фабри – Перо в плечах были рассчитаны в работе [104]. При этом была учтена возможность инъекции в тёмный порт интерферометра "простого" сжатого света ( $\theta = 0$ ) для снижения требуемой циркулирующей мощности в плечах. В принятых здесь обозначениях полученные спектральные плотности имеют вид

$$S_v(\Omega) = \frac{\hbar}{2m\mathcal{K}_{SM}(\Omega)} [\exp(-2r) + \exp(2r) \cot^2 \zeta], \quad (4.60a)$$

$$S_p(\Omega) = \frac{\hbar m \mathcal{K}_{SM}(\Omega)}{2} \exp(2r), \quad (4.60б)$$

$$S_{vp} = -\frac{\hbar}{2} \exp(2r) \cot \zeta, \quad (4.60в)$$

где  $\mathcal{K}_{SM}(\Omega)$  — фактор оптомеханической связи для интерферометра Саньяка/Фабри – Перо,

$$\mathcal{K}_{SM}(\Omega) = \frac{4\Theta\gamma}{m(\gamma^2 + \Omega^2)^2}. \quad (4.61)$$

Подстановка этих выражений в формулу для спектральной плотности суммарного квантового шума (4.54) даёт

$$S^h(\Omega) = \frac{S_{SQL}^h(\Omega)}{2} \left[ \frac{\exp(-2r) + \exp(2r) \cot^2 \zeta}{\mathcal{K}_{SM}(\Omega)} - 2 \exp(2r) \cot \zeta + \mathcal{K}_{SM}(\Omega) \exp(2r) \right]. \quad (4.62)$$

Отметим, что фактор  $\mathcal{K}_{SM}(\Omega)$  радикально отличается от своего аналога для интерферометра Майкельсона/Фабри – Перо (3.37) тем, что в пределах полосы пропускания резонаторов Фабри – Перо,  $\Omega < \gamma$ , т.е. в том диапазоне частот, где влияние шума радиационного давления существенно, его приближённо можно считать частотно-независимым:

$$\mathcal{K}_{SM}(\Omega < \gamma) \approx \mathcal{K}_{SM}(0). \quad (4.63)$$

При  $\zeta = \pi/2$  (классическая оптимизация) формула (4.62) принимает следующий вид:

$$S^h(\Omega) = \frac{S_{SQL}^h(\Omega)}{2} \left[ \frac{\exp(-2r)}{\mathcal{K}_{SM}(\Omega)} + \mathcal{K}_{SM}(\Omega) \exp(2r) \right]. \quad (4.64)$$

С учётом (4.63) её можно оптимизировать во всей полосе  $\Omega < \gamma$ , положив

$$\Theta = \frac{m\gamma^3 \exp(-2r)}{4}, \quad (4.65)$$

что соответствует оптимизации (4.56) для "простого" интерферометра Саньяка. При этом

$$S^h(\Omega) = \frac{S_{SQL}^h(\Omega)}{2} \left[ \frac{\gamma^4}{(\gamma^2 + \Omega^2)^2} + \frac{(\gamma^2 + \Omega^2)^2}{\gamma^4} \right]. \quad (4.66)$$

Легко увидеть, что при  $\Omega < \gamma$  эта спектральная плотность повторяет СКП.

Рассмотрим теперь оптимизацию спектральной плотности (4.62) по гомодинному углу  $\zeta$ . Наличие резонаторов Фабри – Перо делает спектральные плотности (4.60) зависящими от частоты, что препятствует частотно-независимой оптимизации, аналогичной (4.58), для всех

частот. Однако условие (4.63) и здесь делает возможной низкочастотную оптимизацию следующего вида:

$$S_{vp} = -\frac{S_p(0)}{m} \Rightarrow \cot \zeta = \mathcal{K}_{SM}(0) = \frac{4\Theta}{m\gamma^3}. \quad (4.67)$$

Подстановка этого значения гомодинного угла в формулу (4.62) даёт

$$S^h(\Omega) = \frac{S_{SQL}^h(\Omega)}{2} \times \left[ \frac{\exp(-2r)}{\mathcal{K}_{SM}(\Omega)} + \frac{\Omega^4(2\gamma^2 + \Omega^2)^2}{\gamma^8} \mathcal{K}_{SM}(\Omega) \exp(2r) \right]. \quad (4.68)$$

Видно, что при  $\Omega < \gamma$  слагаемое, пропорциональное  $\mathcal{K}_{SM}$ , оказывается подавленным по сравнению с соответствующим слагаемым в случае  $\zeta = \pi/2$ , что позволяет преодолеть СКП в этом диапазоне частот:

$$S^h(\Omega \ll \gamma) = \frac{S_{SQL}^h(\Omega)}{2} \frac{m\gamma^3}{4\Theta} \exp(-2r). \quad (4.69)$$

С другой стороны, гомодинный угол, отличный от  $\pi/2$ , увеличивает вклад дробового шума, что приводит к возрастанию  $S^h$  на высоких частотах.

Способ решения этой проблемы, предложенный в работе [105], заключается в добавлении фильтрующего резонатора (в варианте с префильтрацией), компенсирующего частотную зависимость, вызванную конечностью  $\gamma$ . Как показано в [105], длина и, соответственно, стоимость фильтрующего резонатора в такой конфигурации могут быть значительно уменьшены по сравнению с таковыми в случае интерферометра Майкельсона/Фабри – Перо.

Примеры полученных спектральных плотностей приведены на рис. 19. Из них видно, что даже при  $\zeta = \pi/2$

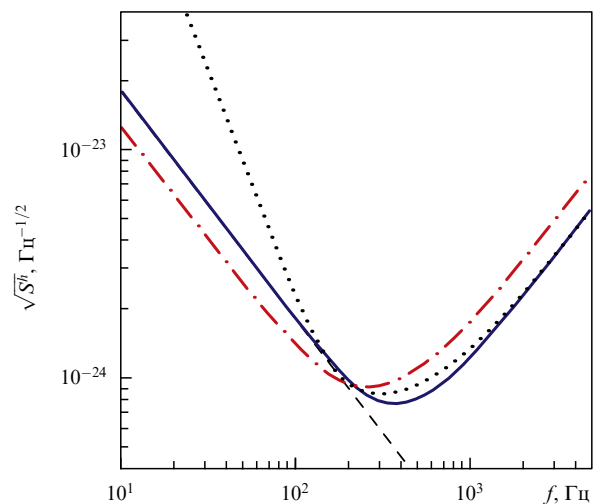


Рис. 19. Спектральные плотности суммарного квантового шума для интерферометра Саньяка/Фабри – Перо при  $\zeta = \pi/2$  (сплошная кривая) и при даваемом формулой (4.67) значении  $\zeta$ , обеспечивающем минимум  $S^h$  при  $\Omega < \gamma$  (штрихпунктирная кривая). В обоих случаях  $\gamma$  задаётся формулой (4.65),  $\gamma \approx 2\pi \times 340 \text{ с}^{-1}$ . Пунктирная кривая: спектральная плотность суммарного квантового шума для интерферометра Майкельсона/Фабри – Перо с  $\zeta = \pi/2$  и  $\gamma = 2\pi \times 680 \text{ с}^{-1}$ . Для всех графиков  $\exp(2r) = 10$ . Штриховая прямая — СКП. Все параметры, не указанные явно, соответствуют ALIGO (см. (3.42)).



схема квантового измерителя скорости, хотя она и не позволяет преодолеть СКП, обеспечивает заметно более высокую чувствительность на низких частотах, чем обычный интерферометр Майкельсона/Фабри–Перо (значение  $\gamma$  для последнего подобрано так, чтобы обеспечить такой же уровень высокочастотного шума). Из рисунка также видно, что имеется небольшой, но заметный (примерно в два раза по спектральной плотности) выигрыш по уровню низкочастотного шума, который может быть получен за счёт использования оптимизированного гомодинного угла (4.67) при параметрах интерферометра, близких к параметрам ALIGO.

**4.3.5. Влияние оптических потерь и сравнение со схемами с фильтрующими резонаторами.** При наличии оптических потерь на выходе интерферометра формула для дробового шума в интерферометре Саньяка/Фабри–Перо (4.60а) модифицируется следующим образом [104]:

$$S_v(\Omega) = \frac{\hbar}{2m} \frac{1}{\mathcal{K}_{SM}(\Omega)} \left[ \exp(-2r) + \exp(2r) \cot^2 \zeta + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 \zeta} \right], \quad (4.70)$$

а спектральные плотности (4.60б), (4.60в) сохраняют свой вид.

При  $\zeta = \pi/2$  (классическая оптимизация) спектральная плотность суммарного квантового шума на низких частотах при

$$\Theta = \frac{m\gamma^3}{4} \sqrt{\exp(-2r) [\exp(-2r) + \epsilon^2]} \quad (4.71)$$

достигает минимума:

$$S^h(\Omega) = \frac{S_{SQL}^h(\Omega) \sqrt{1 + \epsilon^2 \exp(2r)}}{2} \times \left[ \frac{\gamma^4}{(\gamma^2 + \Omega^2)^2} + \frac{(\gamma^2 + \Omega^2)^2}{\gamma^4} \right]. \quad (4.72)$$

(ср. с формулами (4.65), (4.66)).

Низкочастотная оптимизация по гомодинному углу в случае с потерями даёт следующее условие оптимума:

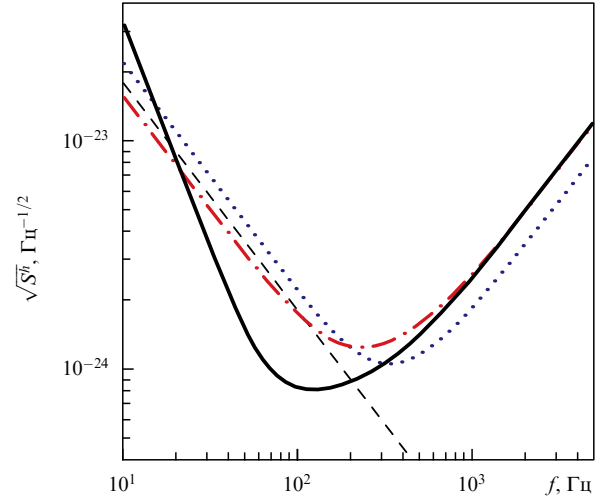
$$\cot \zeta = \frac{\mathcal{K}_{SM}(0)}{1 + \epsilon^2 \exp(-2r)} = \frac{4\Theta}{m\gamma^3 [1 + \epsilon^2 \exp(-2r)]}, \quad (4.73)$$

и соответствующее оптимизированное значение спектральной плотности:

$$S^h(\Omega) = \frac{S_{SQL}^h(\Omega)}{2} \left\{ \frac{\exp(-2r) + \epsilon^2}{\mathcal{K}_{SM}(\Omega)} + \left[ \frac{\Omega^4 (2\gamma^2 + \Omega^2)^2}{\gamma^8} \exp(2r) + \epsilon^2 \right] \frac{\mathcal{K}_{SM}(\Omega)}{1 + \epsilon^2 \exp(-2r)} \right\} \quad (4.74)$$

(ср. с формулами (4.67), (4.68)).

Графики спектральных плотностей (4.72), (4.74) приведены на рис. 20 вместе с соответствующим графиком для интерферометра Майкельсона/Фабри–Перо с префильтрацией (см. формулу (4.21)). Чтобы не загромождать рисунок, мы не приводим график для схемы с постфильтрацией, как заведомо уступающей варианту с префильтрацией. Как видно из рис. 20, даже несмотря на



**Рис. 20.** Влияние оптических потерь на квантовый шум. Сплошная кривая — интерферометр Майкельсона/Фабри–Перо с оптимальным частотно-зависимым углом сжатия (4.14); пунктирная кривая — интерферометр Саньяка/Фабри–Перо с  $\zeta = \pi/2$ ; штрихпунктирная кривая — интерферометр Саньяка/Фабри–Перо с оптимальным  $\zeta$  (4.67). Для всех графиков  $\eta = 0,9$ ,  $\exp(2r) = 10$ , а величина  $\gamma$ , задаваемая формулой (4.71), равна  $\approx 2\pi \times 300 \text{ с}^{-1}$ . Штриховая линия — Стандартный квантовый предел. Все параметры, не указанные явно, соответствуют ALIGO (см. (3.42)).

весьма оптимистичное значение унифицированной квантовой эффективности  $\eta = 0,9$ , потери приводят к заметному увеличению квантового шума, причём вариант интерферометра Майкельсона/Фабри–Перо с префильтрацией демонстрирует наименьшую чувствительность к оптическим потерям. С другой стороны, вследствие специфической частотной зависимости фактора оптомеханической связи для интерферометра Саньяка/Фабри–Перо преимущество последнего в чувствительности на самых низких частотах (при используемых нами для оценок значениях параметров) сохраняется.

Если сравнивать перспективы интерферометров Майкельсона/Фабри–Перо с фильтрующими резонаторами и интерферометров Саньяка/Фабри–Перо, то в настоящее время трудно выделить однозначно лучший вариант. Схемы с пре- или постфильтрацией требуют наличия дополнительного (дорогостоящего) элемента — собственно фильтрующего резонатора. С другой стороны, этот элемент является именно дополнительным и не требует глубокой модификации основного интерферометра. Поэтому он может быть использован для модернизации существующих или строящихся детекторов.

Что касается будущих детекторов так называемого третьего поколения, то выбор лучшей топологии, скорее всего, будет определяться технологическими ограничениями, в первую очередь доступной оптической мощностью, сжатием и оптическими потерями. Но в любом случае схема квантового измерителя скорости с её принципиально другой частотной зависимостью спектральной плотности квантового шума на низких частотах ( $\Omega^{-2}$  в отличие от  $\Omega^{-4}$ ) представляется весьма перспективным кандидатом на реализацию в таких детекторах.

В настоящее время в Университете Глазго ведётся разработка "прототипного" квантового измерителя скорости на основе интерферометра Саньяка/Фабри–Перо [106, 107].

#### 4.4. Модификация динамики пробных масс

**4.4.1. Влияние динамики пробных масс на СКП.** Во всех рассмотренных в разделах 4.1–4.3 схемах повышение чувствительности требует либо увеличения циркулирующей в интерферометре оптической мощности, либо использования сжатых состояний света. О технических проблемах, связанных с высокой циркулирующей мощностью, мы уже упоминали. Возможность использования сжатых состояний наталкивается на другую техническую проблему, а именно, наличие оптических потерь в интерферометре, инжектирующих в него вакуумный шум и тем самым ограничивающих эффективное сжатие. В итоге можно надеяться, что рассмотренные схемы *подавления* квантовых шумов смогут обеспечить выигрыш в чувствительности в несколько раз, возможно на порядок (по сравнению с чувствительностью ALIGO), но дальнейшее её повышение потребует привлечения каких-то других методов.

Одной из предложенных альтернатив является *усиление* сигнального отклика гравитационно-волнового детектора за счёт модификации динамики его пробных масс. Как видно из формул (2.17), (2.20), *приведённые ко входу пробного объекта* квантовые шумы уменьшаются с увеличением восприимчивости пробного объекта, и, как следует из формулы (2.59), уменьшается также и спектральная плотность, соответствующая энергетическому квантовому пределу. Поскольку при этом не используется никаких тонких механизмов взаимной компенсации измерительного шума и шума обратного флуктуационного влияния (в частности, не требуется преодолевать СКП), рассматриваемый метод гораздо более устойчив к оптическим потерям.

Тривиальным вариантом рассматриваемого метода является просто уменьшение массы  $m$  пробного объекта (см. формулы (2.24), (2.26)). Такой подход может быть применён, например, в атомных силовых микроскопах. Однако при детектировании сил гравитационного происхождения, в частности, в детекторах гравитационных волн сигнальная сила также пропорциональна массе пробного объекта, поэтому общая чувствительность, наоборот, снижается с уменьшением массы, что видно, например, из формул для суммарного квантового шума и СКП в  $h$ -нормировке (2.27), (2.28).

Другой возможностью является использование гармонического осциллятора вместо свободной пробной массы. Восприимчивость последнего резко возрастает вблизи его резонансной частоты  $\Omega_m$ , что даёт выигрыш в величине СКП в  $\sim \Omega_0/\Delta\Omega$  раз в полосе частот  $\Delta\Omega$  вокруг  $\Omega_m$  (ср. формулы (2.26) и (2.31)). Этот метод был продемонстрирован в нескольких недавних "настоельных" экспериментах с механическими наноосцилляторами [108–110].

В лазерных детекторах гравитационных волн характерные собственные частоты колебательных (маятниковых) мод пробных зеркал близки к 1 Гц, и в рабочем диапазоне частот эти зеркала можно считать практически свободными массами. Очевидно, что превратить дифференциальную механическую моду пробных зеркал лазерных детекторов в осциллятор с частотой, лежащей в пределах рабочего диапазона, с помощью "обычной" жёсткости невозможно просто из-за расстояния в несколько сотен метров или несколько километров, разделяющего эти зеркала, не говоря уже о недопустимо высоком уровне диссипации и, соответственно, тепловых

шумов, вносимых такой пружиной. Однако вместо этого с той же целью возможно использование эффекта так называемой оптической (в более общем контексте — электромагнитной) жёсткости.

**4.4.2. Электромагнитная жёсткость.** Этот эффект, по-видимому, впервые наблюдался в работе [111], где исследовался низкочастотный крутильный маятник, координата которого измерялась с помощью радиочастотного ёмкостного датчика. Было обнаружено, что собственная частота механического осциллятора меняется с изменением напряжения накачки в ёмкостном датчике, причём знак этой зависимости определяется знаком отстройки частоты накачки от электромагнитного резонанса. Этот эффект был правильно объяснён в [111] зависимостью расстройки и, следовательно, запасённой в ёмкостном датчике энергии от механической координаты  $x$ .

Действительно, если собственная частота электромагнитного резонатора зависит от  $x$  (при малых  $x$  эту зависимость можно считать линейной):

$$\omega(x) = \omega_0 - gx, \quad (4.75)$$

то его отстройка выражается как

$$\delta(x) = \omega_p - \omega(x) = \delta + gx, \quad (4.76)$$

где  $\omega_p$  — частота накачки,  $\delta$  — значение отстройки при  $x = 0$ . При этом электромагнитная энергия, запасённая в резонаторе, также будет зависеть от  $x$ :

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\gamma^2 + \delta^2(x)} \mathcal{E}, \quad (4.77)$$

где  $\mathcal{E}$  — значение энергии при  $x = 0$ . Это в свою очередь приводит к зависимости от  $x$  пондеромоторной силы, действующей на механическую степень свободы (например, электростатического притяжения обкладок конденсатора в случае ёмкостного датчика либо радиационного давления в оптическом резонаторе):

$$F(x) = \frac{g}{\omega_0} \mathcal{E}(x). \quad (4.78)$$

Линейная по  $x$  компонента этой зависимости даёт собственно электромагнитную жёсткость:

$$K = - \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{2g^2 \mathcal{E} \delta}{\gamma^2 + \delta^2}. \quad (4.79)$$

Очевидно, что при изменении  $x$  энергия  $\mathcal{E}$  и, соответственно, сила (4.78) перестраиваются не мгновенно, а с задержкой порядка  $\tau_d \sim 1/\gamma$ . Из-за этого пропорциональная  $x$  компонента (4.78) приобретает следующий вид:

$$-Kx(t - \tau_d) \approx -Kx(t) - H \frac{dx(t)}{dt}, \quad (4.80)$$

где  $H$  — сопутствующее электромагнитной жёсткости электромагнитное трение,

$$H = -K\tau_d. \quad (4.81)$$

Наличие этого трения позволяет предположить, что в силу флуктуационно-диссипационной теоремы электро-

магнитная жёсткость может быть источником некоторой флуктуационной силы, действующей на механический объект. Это действительно так, однако эффективная шумовая температура такой силы является крайне малой и при выполнении некоторых условий может соответствовать нулевым колебаниям [112].

Оптическая жёсткость экспериментально продемонстрирована на небольших "настоенных" интерферометрах [113, 114], а также на 40-метровом "прототипном" интерферометре в Калифорнийском технологическом институте [115].

Очень низкая шумовая температура электромагнитной (в частности, оптической) жёсткости обеспечила ей большую популярность также в квантовых оптомеханических экспериментах, например, по электромагнитному охлаждению механических осцилляторов [116, 117] (см. также обзоры [28, 29]).

**4.4.3. Оптическая жёсткость в лазерных детекторах гравитационных волн.** Впервые возможность применения оптической жёсткости в лазерных детекторах гравитационных волн обсуждалась в работе [118] в контексте топологии с так называемым внутрирезонаторным измерением (intracavity readout).

Перспективы применения эффекта оптической жёсткости в "обычных" лазерных детекторах гравитационных волн исследованы в работах [119–122]. Формулы для квантовых шумов при наличии отстройки  $\delta$ , необходимой для создания оптической жёсткости, имеют весьма громоздкий вид. Поэтому мы не будем приводить их здесь (эти формулы можно найти, например, в обзоре [45]) и ограничимся лишь анализом динамики пробных масс и, соответственно, величины СКП при наличии оптической жёсткости.

Особенность оптической жёсткости состоит в том, что она является частотно-зависимой [120–122]:

$$K(\Omega) = \frac{\Theta \delta}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta^2} \quad (4.82)$$

(ср. с формулой (4.79)), и эта частотная зависимость позволяет до некоторой степени компенсировать основной недостаток "обычных" пробных осцилляторов, а именно узкополосный характер выигрыша в чувствительности. При наличии оптической жёсткости величина СКП

$$S_{\text{SQL}}^h(\Omega) = \hbar |\chi(\Omega)|^{-1} = \hbar |-m\Omega^2 + K(\Omega)|, \quad (4.83)$$

в зависимости от параметров интерферометра, может иметь либо два резонансных минимума, либо один более широкий (так называемый режим полюса второго порядка [120]). Если ширина полосы интерферометра достаточно мала,  $\gamma \ll \delta$ , то частоты этих максимумов выражаются как

$$\Omega_{1,2}^2 \approx \left( \frac{\delta^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^4}{4} - \frac{\Theta \delta}{m}} \right)^{1/2}, \quad (4.84)$$

а режим полюса второго порядка реализуется при

$$\delta = \left( \frac{4\Theta}{m} \right)^{1/3}. \quad (4.85)$$

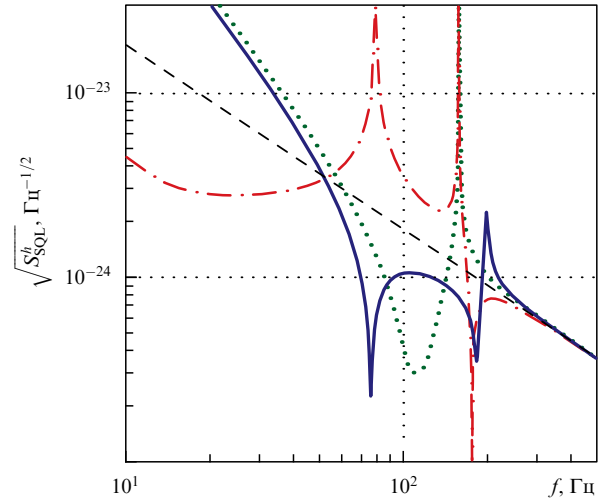


Рис. 21. Стандартный квантовый предел для пробной массы, динамика которой модифицирована оптической жёсткостью. Сплошная кривая —  $\gamma = 2\pi \times 2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\delta = 2\pi \times 300 \text{ с}^{-1}$ ; пунктирная кривая —  $\gamma = 2\pi \times 2 \text{ с}^{-1}$ , величина  $\delta$  задаётся формулой (4.85),  $\approx 2\pi \times 160 \text{ с}^{-1}$ . Штрихпунктирная кривая — режим отрицательной оптической инерции:  $\gamma_{1,2} = 2\pi \times 2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\delta_1 \approx 2\pi \times 80 \text{ с}^{-1}$ ,  $\delta_2 = -2\delta_1$ ,  $I_{c1}/I_{c2} = 0,5$ ,  $I_{c1} + I_{c2} = 4 \times 840 \text{ кВт}$  (см. формулы (4.90)). Штриховая линия — СКП для свободной массы. Все параметры, не указанные явно, соответствуют ALIGO (см. (3.42)).

Графики СКП (4.83) для этих двух режимов приведены на рис. 21. Чтобы подчеркнуть эффект, мы используем здесь очень малые значения  $\gamma = 2\pi \times 2 \text{ с}^{-1}$ . Впрочем, такие значения могут реально применяться в конфигурациях с двумя или более оптическими накачками, одна из которых, с "обычным"  $\gamma \sim 10^3 \text{ с}^{-1}$ , используется для измерения, а другая, с малым  $\gamma \sim 10 \text{ с}^{-1}$ , создаёт оптическую жёсткость. То же относится к рассмотренной в разделе 4.4.4 схеме с оптической инерцией, в которой возможно использование до двух дополнительных накачек.

**4.4.4. Отрицательная оптическая инерция.** В работах [123, 124] предложен метод более глубокой модификации динамики пробных масс, существенно использующий частотную зависимость оптической жёсткости (4.82).

Чтобы продемонстрировать принцип этого метода без громоздких выкладок, положим в (4.82)  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\Omega \ll \delta$ . В этом случае

$$K(\Omega) \approx K(0) - m_{\text{opt}}\Omega^2 + \mathcal{O}(\Omega^4), \quad (4.86)$$

где  $K(0)$  — статическая жёсткость,

$$K(0) = \frac{\Theta}{\delta}, \quad (4.87)$$

$m_{\text{opt}}$  — эффективная оптическая инерция,

$$m_{\text{opt}} = -\frac{\Theta}{\delta^3}. \quad (4.88)$$

Отметим, что в зависимости от знака отстройки  $\delta$  обе эти величины могут быть как положительными, так и отрицательными.

Предположим далее, что интерферометр накачивается двумя лазерами накачки с различными частотами. Каждая из накачек создаёт свою оптическую жёсткость.

Если отстройки  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  этих накачек имеют разные знаки, то можно так скомбинировать их параметры, чтобы создаваемые ими статические жёсткости компенсировали друг друга, а вносимая суммарная оптическая инерция компенсировала обычную механическую инерцию пробной массы:

$$K_1(0) + K_2(0) = 0, \quad (4.89a)$$

$$m + m_{\text{opt}1} + m_{\text{opt}2} = 0. \quad (4.89b)$$

Очевидно, что точная компенсация будет иметь место только на нулевой частоте, однако и на остальных достаточно малых частотах восприимчивость такого пробного объекта будет существенно больше, чем у исходной пробной массы.

Более строгий расчёт, учитывающий конечность  $\gamma$ , показывает, что для выполнения равенств (4.89) параметры накачек должны удовлетворять следующим условиям:

$$\Theta_1 = \frac{m(\gamma_1^2 + \delta_1^2)(\gamma_2^2 + \delta_2^2)}{\delta_1(\delta_2^2 + \gamma_2^2 - \delta_1^2 - \gamma_1^2)}, \quad (4.90a)$$

$$\Theta_2 = \frac{m(\gamma_1^2 + \delta_1^2)(\gamma_2^2 + \delta_2^2)}{\delta_2(\delta_1^2 + \gamma_1^2 - \delta_2^2 - \gamma_2^2)}. \quad (4.90b)$$

Из графика СКП для режима отрицательной оптической инерции, приведённого на рис. 21, видно (и это можно показать строго), что верхняя граница диапазона с уменьшенным СКП соответствует меньшей (по модулю) из двух отстроек  $\delta_1$ . Последняя, как вытекает из формул (4.90), определяется доступной мощностью накачки,  $\delta_1 \sim [(\Theta_1 + \Theta_2)/m]^{1/3}$ . "Остаточное" значение  $\chi^{-1}(\Omega \rightarrow 0) \neq 0$  в этом примере создаётся оптическим трением; как показано в [123, 124], в принципе оно тоже может быть компенсировано подбором значений  $\gamma$  для двух накачек.

**4.4.5. Схемы с внутривибраторным измерением.** Ввиду ограниченности объёма данного обзора мы не рассматриваем здесь подробно ещё один класс основанных на оптической жёсткости схем детекторов гравитационных волн, а именно топологии с так называемым внутривибраторным измерением (intracavity readout) [118, 125–128]. Идея таких схем состоит в том, чтобы вместо непосредственного измерения смещений удалённых на несколько километров пробных зеркал связать с помощью оптической жёсткости их движение с движением локального зеркала (или зеркал) и измерять смещение последнего отдельным небольшим интерферометром.

Рассматриваемый метод позволяет решить одну из основных проблем больших лазерных интерферометров, а именно высокие требования к циркулирующей в них оптической мощности. С другой стороны, он требует радикального изменения оптической топологии детектора и поэтому в настоящее время рассматривается как слишком экзотический.

## 5. Заключение

Совершенно очевидно, что первое прямое детектирование гравитационных волн нельзя рассматривать ни как вершину, ни тем более как финал полувекового развития гравитационно-волновых детекторов. Пока ситуация

такова: два самых совершенных на настоящий момент детектора, воплощающих в себе лучшие современные технологии, сумели "расслышать" сигнал от чудовищно мощной космической катастрофы (в ходе которой три солнечных массы за доли секунды были излучены в виде гравитационных волн), произошедшей относительно недалеко от нас по космологическим масштабам (на расстоянии примерно в 0,5 Гпк).

Поэтому с учётом того факта, что гравитационные волны от космических источников несут в себе огромное количество астрофизической и просто физической информации, которую невозможно получить никакими другими способами (за деталями мы отсылаем читателей к обзорам [46, 129, 130]), нет никаких сомнений в том, что разработка новых всё более чувствительных детекторов гравитационных волн будет активно продолжаться.

Прежде всего будет расти число детекторов второго поколения, т.е. класса ALIGO, что позволит увеличить достоверность обнаружения гравитационно-волновых сигналов, а главное, радикально улучшить их локализацию на небесной сфере. В течение ближайшего года должен вступить в строй франко-итальянский детектор Advanced Virgo [131, 132]. В Японии строится детектор KAGRA (Kamioka Gravitational Wave Detector) [133, 134], отличающийся такими продвинутыми особенностями, как охлаждаемые до температуры 20 К пробные зеркала из сапфира и подземное расположение, существенно снижающее сейсмические шумы. Принято решение о строительстве гравитационно-волнового детектора в Индии с использованием уже готовой "начинки", первоначально предназначавшейся для третьего детектора ALIGO. Обсуждаются планы по строительству наземного гравитационно-волнового детектора в Китае.

Почти нет сомнений в том, что в детекторах второго поколения будет использоваться сжатый свет. С большой вероятностью на какой-то более поздней стадии их жизненного цикла к ним будут добавлены относительно короткие (несколько десятков метров) фильтрующие резонаторы, скорее всего, в схеме с префилтрацией. Обсуждаются также перспективы более глубокой, сравнимой с модификацией при переходе от Initial LIGO к ALIGO, модификации этих детекторов, предполагающей использование новых (в том числе криогенных) зеркал и их подвесов. В итоге чувствительность таких устройств, известных как детекторы поколения 2,5, должна в 2–5 раз (в единицах вариации метрики  $h$ ) превысить чувствительность ALIGO [58]. Отметим, что частота регистрируемых событий при этом возрастёт как куб этого фактора, т.е. на один-два порядка.

Существуют также предварительные проекты детекторов третьего поколения с чувствительностью, на порядок большей, чем у ALIGO [44, 135, 136]. Они смогут регистрировать гравитационно-волновые сигналы из большей части видимой Вселенной, при значениях красного смещения вплоть до  $z \sim 10$ . Какие квантовые технологии будут в них использоваться, пока точно сказать невозможно. С сегодняшней точки зрения наиболее вероятными кандидатами представляются две схемы: либо "обычный" интерферометр Майкельсона/Фабри–Перо с добавочными длинными (километровыми) фильтрующими резонаторами, либо интерферометр Саньяка/Фабри–Перо, возможно, с коротким фильтрующим резонатором. Однако опыт эксплуатации детекторов поколений 2 и 2,5 может изменить эту ситуацию.

В любом случае в ближайшее десятилетие стоит ожидать весьма интересных результатов как в астрофизике, так и в области технологий квантовых измерений.

**Благодарности.** Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 14-02-00399 и 16-52-10069, а также грантом Национального научного фонда США RNY-1305863.

## 6. Приложения

### А. Спектры и спектральные плотности

В настоящем обзоре мы обозначаем функции времени и их спектры одними и теми же буквами, различая их по явно указанному аргументу (время или частота).

При вычислении спектров используется "квантово-оптическое" правило знаков:

$$f(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\Omega t) dt. \quad (\text{A.1})$$

Для всех спектральных плотностей, кроме спектральной плотности шумов в  $h$ -нормировке  $S^h$ , используется "двустороннее" определение:

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \exp(-i\Omega t) \frac{d\Omega}{2\pi}, \quad (\text{A.2})$$

где  $B(t)$  — соответствующая корреляционная функция.

Для  $S^h$ , следуя общепринятой традиции, мы используем "одностороннее" определение:

$$B^h(t) = \int_0^{\infty} S^h(\Omega) \cos(\Omega t) \frac{d\Omega}{2\pi}, \quad (\text{A.3})$$

что даёт следующее правило пересчёта от спектральной плотности квантового шума в  $F$ -нормировке  $S^F$  к  $S^h$ :

$$S^h(\Omega) = \frac{8}{m^2 L^2 \Omega^4} S^F(\Omega). \quad (\text{A.4})$$

### Б. Двухфотонный формализм

**Квадратурные амплитуды.** В рамках двухфотонного формализма [70, 71] оптическое поле в бегущей волне представляется в виде суперпозиции косинусной ( $\hat{a}^c$ ) и синусной ( $\hat{a}^s$ ) квадратурных амплитуд:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}^c(t) \cos(\omega_0 t) + \hat{a}^s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (\text{Б.1})$$

представляющих собой медленно изменяющиеся в масштабе оптической частоты  $\omega_0$  операторнозначные функции времени, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}^c(t), \hat{a}^c(t')] = [\hat{a}^s(t), \hat{a}^s(t')] = 0, \quad (\text{Б.2a})$$

$$[\hat{a}^c(t), \hat{a}^s(t')] = \frac{i}{2} \delta(t - t'). \quad (\text{Б.2б})$$

Из коммутатора (Б.2б) следует, что оператор  $\hat{a}$  нормирован как корень квадратный из потока квантов в оптической волне:

$$\overline{\hat{a}^2(t)} = \frac{[\hat{a}^c(t)]^2 + [\hat{a}^s(t)]^2}{2} = \frac{\hat{I}(t)}{\hbar\omega_0}, \quad (\text{Б.3})$$

где  $I$  — оптическая мощность, черта сверху обозначает усреднение по времени, много большему периода оптических колебаний.

При наличии у поля классической компоненты (среднего значения) она выделяется явно:

$$\hat{a}(t) = (A^c + \hat{a}^c(t)) \cos(\omega_0 t) + (A^s + \hat{a}^s(t)) \sin(\omega_0 t). \quad (\text{Б.4})$$

Очевидно, что начало отсчёта фазы всегда можно выбрать так, чтобы одно из этих средних значений, например у синусной квадратуры, было равно нулю, что даёт

$$\hat{a}(t) = (A + \hat{a}^c(t)) \cos(\omega_0 t) + \hat{a}^s(t) \sin(\omega_0 t). \quad (\text{Б.5})$$

В данной статье операторы квадратурных амплитуд обозначаются строчными буквами, а соответствующие им классические амплитуды — соответствующими прописными буквами.

**Флуктуации мощности и фазы.** В реальных оптомеханических схемах, в том числе в лазерных детекторах гравитационных волн, для того чтобы обеспечить заметное взаимодействие с механическим пробным объектом, требуется большое число квантов оптической накачки. Поэтому можно считать, что

$$\frac{\hat{a}^{c,s}}{A} \ll 1. \quad (\text{Б.6})$$

Тогда, пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, оптическую мощность можно представить как

$$\hat{I}(t) = I + \delta\hat{I}(t), \quad (\text{Б.7})$$

где  $I$  — средняя мощность,

$$I = \frac{\hbar\omega_0 A^2}{2}, \quad (\text{Б.8})$$

$\delta\hat{I}$  — её флуктуации,

$$\delta\hat{I}(t) = \hbar\omega_0 A \hat{a}^c(t). \quad (\text{Б.9})$$

В том же приближении формулу (Б.5) можно предствить в виде

$$\hat{a}(t) = (A + \hat{a}^c(t)) \cos(\omega_0 t + \hat{\phi}(t)), \quad (\text{Б.10})$$

где  $\hat{\phi}(t)$  — фаза оптической волны,

$$\hat{\phi}(t) = -\frac{\hat{a}^s(t)}{A}. \quad (\text{Б.11})$$

**Преобразование сжатия.** В рамках двухфотонного формализма преобразование нулевого квантового состояния света, реализуемое устройством для сжатия света, можно в общем случае записать следующим образом:

$$\hat{a}^c = \hat{z}^c [\cosh r + \sinh r \cos(2\theta)] + \hat{z}^s \sinh r \sin(2\theta), \quad (\text{Б.12a})$$

$$\hat{a}^s = \hat{z}^s [\cosh r - \sinh r \cos(2\theta)] + \hat{z}^c \sinh r \sin(2\theta), \quad (\text{Б.12б})$$

где  $\hat{z}^{c,s}$  — квадратурные амплитуды, соответствующие свету в нулевом состоянии на входе устройства сжатия. Если  $\theta = 0$ , то эти формулы упрощаются:

$$\hat{a}^c = \hat{z}^c \exp r, \quad (\text{Б.13a})$$

$$\hat{a}^s = \hat{z}^s \exp(-r). \quad (\text{Б.13б})$$

*Спектральные плотности.* Статистические свойства операторов квадратурных амплитуд определяются их коммутаторами (Б.2). В частности, в нулевом квантовом состоянии  $\hat{a}^c$  и  $\hat{a}^s$  представляют собой два некоррелированных шума со спектральными плотностями

$$S[\hat{a}^c] = S[\hat{a}^s] = \frac{1}{2}. \quad (\text{Б.14})$$

Отметим, что квантовое состояние излучения идеального лазера, т.е. такого, у которого технические флуктуации полностью подавлены, является когерентным. Оно отличается от нулевого состояния только наличием среднего значения  $A \neq 0$ , поэтому спектральные плотности квадратурных амплитуд тогда также равны (Б.14). Комбинируя (Б.14) с формулами (Б.9) и (Б.11), легко получить также выражения для спектральных плотностей дробовых флуктуаций мощности и фазы:

$$S_I = \hbar\omega_0 I, \quad (\text{Б.15})$$

$$S_\phi = \frac{\hbar\omega_0}{4I}. \quad (\text{Б.16})$$

Для случая сжатого состояния, комбинируя формулы (Б.12) и (Б.14), соответственно, получим

$$S[\hat{a}^c] = \frac{\cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(2\theta)}{2}, \quad (\text{Б.17a})$$

$$S[\hat{a}^s] = \frac{\cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(2\theta)}{2}, \quad (\text{Б.17б})$$

$$S[\hat{a}^c \hat{a}^s] = \frac{\sinh(2r) \sin(2\theta)}{2}, \quad (\text{Б.17в})$$

где последнее выражение задаёт кросскорреляцию квадратурных амплитуд.

## Список литературы

- Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab., Virgo Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **116** 061102 (2016)
- Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab., Virgo Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **116** 241103 (2016)
- Misner Ch W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco, Calif.: W. H. Freeman, 1973); Пер. на русск. яз.: Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* Т. 3 (М.: Мир, 1977)
- Hulse R A *Rev. Mod. Phys.* **66** 699 (1994); Халс Р А *УФН* **164** 743 (1994)
- Taylor J H (Jr.) *Rev. Mod. Phys.* **66** 711 (1994); Тэйлор Дж Х (мл.) *УФН* **164** 757 (1994)
- Blanchet L *Living Rev. Relativity* **17** 2 (2014); <http://www.livingreviews.org/lrr-2014-2>
- Will C M *Living Rev. Relativity* **17** 4 (2014); Уилл К М *УФН* **164** 765 (1994); Will C M *Phys. Usp.* **37** 697 (1994); <http://www.livingreviews.org/lrr-2014-4>
- Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab., Virgo Collab.) *Astrophys. J. Lett.* **818** L22 (2016)
- Lipunov V M et al., arXiv:1605.01604; Липунов В М *УФН* **186** 1011 (2016); Lipunov V M *Phys. Usp.* **59** (9) (2016); Черепашук А М *УФН* **186** 1001 (2016); Cherepashchuk A M *Phys. Usp.* **59** (9) (2016)
- Брагинский В Б *УФН* **86** 433 (1965); Braginskii V B *Sov. Phys. Usp.* **8** 513 (1966)
- Брагинский В Б, Руденко В Н *УФН* **100** 395 (1970); Braginskii V B, Rudenko V N *Sov. Phys. Usp.* **13** 165 (1970)
- Брагинский В Б *УФН* **156** 93 (1988); Braginskii V B *Sov. Phys. Usp.* **31** 836 (1988)
- Брагинский В Б *УФН* **170** 743 (2000); Braginskii V B *Phys. Usp.* **43** 691 (2000)
- Weber J *Phys. Rev.* **117** 306 (1960)
- Weber J *Phys. Rev. Lett.* **22** 1320 (1969)
- Брагинский В Б и др. *Письма в ЖЭТФ* **16** 157 (1972); Braginskii V B et al. *JETP Lett.* **16** 108 (1972)
- Michelson P F, Price J C, Taber R C *Science* **237** 150 (1987)
- Astone P et al. *Phys. Rev. D* **82** 022003 (2010)
- Kuroda K *Int. J. Mod. Phys. D* **24** 1530032 (2015)
- Брагинский В Б *ЖЭТФ* **53** 1434 (1967); Braginskii V B *Sov. Phys. JETP* **26** 831 (1968)
- Брагинский В Б, Воронцов Ю И *УФН* **114** 41 (1974); Braginskii V B, Vorontsov Yu I *Sov. Phys. Usp.* **18** 644 (1975)
- Брагинский В Б, Воронцов Ю И, Халили Ф Я *ЖЭТФ* **73** 1340 (1977); Braginskii V B, Vorontsov Yu I, Khalili F Ya *Sov. Phys. JETP* **46** 705 (1977)
- Брагинский В Б, Воронцов Ю И, Халили Ф Я *Письма в ЖЭТФ* **27** 296 (1978); Braginskii V B, Vorontsov Yu I, Khalili F Ya *JETP Lett.* **27** 276 (1978)
- Thorne K S et al. *Phys. Rev. Lett.* **40** 667 (1978)
- Caves C M et al. *Rev. Mod. Phys.* **52** 341 (1980)
- Braginsky V B, Vorontsov Y I, Thorne K S *Science* **209** 547 (1980)
- Герценштейн М Е, Пустовойт В И *ЖЭТФ* **43** 605 (1962); Gertsenshtein M E, Pustovoyt V I *Sov. Phys. JETP* **16** 433 (1963)
- Aspelmeyer M, Kippenberg T J, Marquardt F *Rev. Mod. Phys.* **86** 1391 (2014)
- Khalili F Ya, Danilishin S L *Prog. Opt.* **61** 113 (2016)
- Wollman E E et al. *Science* **349** 952 (2015)
- Moss G E, Miller L R, Forward R L *Appl. Opt.* **10** 2495 (1971)
- Shoemaker D et al. *Phys. Rev. D* **38** 423 (1988)
- Robertson D I et al. *Rev. Sci. Instrum.* **66** 4447 (1995)
- Abramovici A et al. *Phys. Lett. A* **218** 157 (1996)
- Abramovici A et al. *Science* **256** 325 (1992)
- LIGO: Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, <http://www.ligo.caltech.edu>
- VIRGO interferometer, <http://www.virgo.infn.it/>
- GEO600: Gravitational Wave Detector, <http://www.geo600.org>
- Gravitational Wave Project Office, National Astronomical Observatory of Japan, <http://gwpo.nao.ac.jp/en/>
- Abbott B P et al. *Rep. Prog. Phys.* **72** 076901 (2009)
- Caves C M *Phys. Rev. D* **23** 1693 (1981)
- Aasi J et al. *Nature Photon.* **7** 613 (2013)
- Aasi J et al. *Class. Quantum Grav.* **32** 074001 (2015)
- Sathyaprakash B et al. *Class. Quantum Grav.* **29** 124013 (2012)
- Danilishin S L, Khalili F Ya *Living Rev. Relativity* **15** 5 (2012); <http://www.livingreviews.org/lrr-2012-5>
- Sathyaprakash B S, Schutz B F *Living Rev. Relativity* **12** 2 (2009); <http://www.livingreviews.org/lrr-2009-2>
- Воронцов Ю И, Халили Ф Я *Радиотехника и электроника* **27** 2392 (1982)
- Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992) Ch. VI
- Braginsky V B et al. *Phys. Rev. D* **67** 082001 (2003)
- Брагинский В Б, Назаренко В С *ЖЭТФ* **57** 1421 (1969); Braginskii V B, Nazarenko V S *Sov. Phys. JETP* **30** 770 (1970)
- O'Connell A D et al. *Nature* **464** 697 (2010)
- Saulson P R *Phys. Rev. D* **42** 2437 (1990)
- Zurek W, in *Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics* (Eds G T Moore, M O Scully) (New York: Plenum Press, 1986) p. 145
- Zurek W H *Rev. Mod. Phys.* **75** 715 (2003)
- Брагинский В Б, Митрофанов В П, Токмаков К В *Изв. РАН. Сер. физ.* **64** 1671 (2000); Braginskii V B, Mitrofanov V P, Tokmakov K V *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* **64** 1333 (2000)
- Braginsky V B, Gorodetsky M L, Vyatchanin S P "Compendium of thermal noises in optical mirrors", in *Optical Coatings and Thermal Noise in Precision Measurement* (Eds G Harry, T P Bodiya, R DeSalvo) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012) Ch. 3
- Ballmer S, Mandic V *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **65** 555 (2015)
- McClelland D et al. (LIGO Scientific Collab.) "Instrument science white paper 2015", LIGO Document T1500290; <https://dcc.ligo.org/LIGO-T1500290/public>
- Unruh W G "Quantum noise in the interferometer detector", in *Quantum Optics, Experimental Gravity, and Measurement Theory* (NATO Advanced Science Institutes Series, Ser. B, Vol. 94, Eds P Meystre, M O Scully) (New York: Plenum Press, 1983) p. 647
- Халили Ф Я *ДАН СССР* **294** 602 (1987); Khalili F Ya *Sov. Phys. Dokl.* **32** 409 (1987)

61. Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992) Ch. VIII
62. Jaekel M T, Reynaud S *Europhys. Lett.* **13** 301 (1990)
63. Халили Ф Я *Вестн. Моск. ун-в. Сер. 3 Физ., Астрон.* **24** 17 (1983)
64. Воронцов Ю И, Халили Ф Я *Вестн. Моск. ун-в. Сер. 3 Физ., Астрон.* **26** (3) 3 (1985)
65. Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992) Ch. IX
66. Braginsky V B, Gorodetsky M L, Khalili F Ya, Thorne K S *AIP Conf. Proc.* **523** 180 (2000)
67. Braginsky V B, Strigin S E, Vyatchanin S P *Phys. Lett. A* **287** 331 (2001)
68. Вятчанин С П, Стрыгин С Е *УФН* **182** 1195 (2012); Vyatchanin S P, Strigin S E *Phys. Usp.* **55** 1115 (2012)
69. Evans M et al. *Phys. Rev. Lett.* **114** 161102 (2015)
70. Caves C M, Schumaker B L *Phys. Rev. A* **31** 3068 (1985)
71. Schumaker B L, Caves C M *Phys. Rev. A* **31** 3093 (1985)
72. LIGO: Look Deeper, <https://www.ligo.caltech.edu/page/look-deeper>
73. Drever R W P *Lecture Notes Phys.* **124** 321 (1983)
74. Meers B J *Phys. Rev. D* **38** 2317 (1988)
75. Kondrashov I S, Simakov D A, Khalili F Ya, Danilishin S L *Phys. Rev. D* **78** 062004 (2008)
76. Mizuno J et al. *Phys. Lett. A* **175** 273 (1993)
77. Kimble H J et al. *Phys. Rev. D* **65** 022002 (2001)
78. Takahasi H *Adv. Commun. Syst.* **1** 227 (1965)
79. Schleich W P *Quantum Optics in Phase Space* (Berlin: Wiley-VCH, 2001); Пер. на русск. яз.: Шляйх В П *Квантовая оптика в фазовом пространстве* (М.: Физматлит, 2005)
80. Slusher R E et al. *Phys. Rev. Lett.* **55** 2409 (1985)
81. McKenzie K et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 161105 (2004)
82. Vahlbruch H et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 011101 (2006)
83. Vahlbruch H et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 033602 (2008)
84. Abadie J et al. (The LIGO Scientific Collab.) *Nature Phys.* **7** 962 (2011)
85. Grote H et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 181101 (2013)
86. Вятчанин С П, Мацко А Б *ЖЭТФ* **104** 2668 (1993); Vyatchanin S P, Matsko A B *JETP* **77** 218 (1993)
87. Vyatchanin S P, Zubova E A, Matsko A B *Opt. Commun.* **109** 492 (1994)
88. Vyatchanin S P, Zubova E A *Phys. Lett. A* **201** 269 (1995)
89. Khalili F Ya *Phys. Rev. D* **76** 102002 (2007)
90. Khalili F Ya *Phys. Rev. D* **81** 122002 (2010)
91. Evans M et al. *Phys. Rev. D* **88** 022002 (2013)
92. Kwee P et al. *Phys. Rev. D* **90** 062006 (2014)
93. Воронцов Ю И *УФН* **164** 89 (1994); Vorontsov Yu I *Phys. Usp.* **37** 81 (1994)
94. Braginsky V B, Khalili F Ya *Rev. Mod. Phys.* **68** 1 (1996)
95. Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992) Ch. V
96. Braginsky V B, Khalili F Ja *Phys. Lett. A* **147** 251 (1990)
97. Khalili F Ya, Levin Yu *Phys. Rev. D* **54** 4735 (1996)
98. Braginsky V B, Gorodetsky M L, Khalili F Ya, Thorne K S *Phys. Rev. D* **61** 044002 (2000)
99. Purdue P *Phys. Rev. D* **66** 022001 (2002)
100. Purdue P, Chen Y *Phys. Rev. D* **66** 122004 (2002)
101. Khalili F Ya, gr-qc/0211088
102. Chen Y *Phys. Rev. D* **67** 122004 (2003)
103. Danilishin S L *Phys. Rev. D* **69** 102003 (2004)
104. Chen Y et al. *Gen. Relat. Grav.* **43** 671 (2011)
105. Voronchev N V, Tarabrin S P, Danilishin S L, arXiv:1503.01062
106. Gräf C et al. *Class. Quant. Grav.* **31** 215009 (2014)
107. Danilishin S L et al. *New J. Phys.* **17** 043031 (2015)
108. Teufel J D et al. *Nature Nanotechnol.* **4** 820 (2009)
109. Anetsberger G et al. *Nature Phys.* **5** 909 (2009)
110. Westphal T et al. *Phys. Rev. A* **85** 063806 (2012)
111. Брагинский В Б, Минакова И И *Вестн. МГУ Сер. 3 Физ., астрон.* (1) 83 (1964)
112. Braginsky V B, Khalili F Ya *Phys. Lett. A* **257** 241 (1999)
113. Биленко И А, Самойленко А А *Вестн. МГУ Сер. 3 Физ., астрон.* (4) 39 (2003)
114. Corbitt T et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 150802 (2007)
115. Miyakawa O et al. *Phys. Rev. D* **74** 022001 (2006)
116. Teufel J D et al. *Nature* **475** 359 (2011)
117. Chan J et al. *Nature* **478** 89 (2011)
118. Braginsky V B, Gorodetsky M L, Khalili F Ya *Phys. Lett. A* **232** 340 (1997)
119. Buonanno A, Chen Y *Phys. Rev. D* **64** 042006 (2001)
120. Khalili F Ya *Phys. Lett. A* **288** 251 (2001)
121. Buonanno A, Chen Y *Phys. Rev. D* **65** 042001 (2002)
122. Buonanno A, Chen Y *Phys. Rev. D* **67** 062002 (2003)
123. Khalili F et al. *Phys. Rev. D* **83** 062003 (2011)
124. Ворончев Н В, Данилишин Ш Л, Халили Ф Я *Оптика и спектроскопия* **112** 418 (2012); Voronchev N V, Danilishin S L, Khalili F Ya *Opt. Spectrosc.* **112** 377 (2012)
125. Braginsky V B, Gorodetsky M L, Khalili F Ya *Phys. Lett. A* **246** 485 (1998)
126. Khalili F Ya *Phys. Lett. A* **298** 308 (2002)
127. Danilishin S L, Khalili F Ya *Phys. Rev. D* **73** 022002 (2006)
128. Rehbein H et al. *Phys. Rev. D* **76** 062002 (2007)
129. Грищук Л П и др. *УФН* **171** 3 (2001); Grishchuk L P et al. *Phys. Usp.* **44** 1 (2001)
130. Шил М А, Торн К С *УФН* **184** 367 (2014); Scheel M A, Thorne K S *Phys. Usp.* **57** 342 (2014)
131. Acernese F et al. *Class. Quant. Grav.* **32** 024001 (2015)
132. Advanced Virgo, <http://www.virgo-gw.eu/advirgo/>
133. Aso Y et al. (The KAGRA Collab.) *Phys. Rev. D* **88** 043007 (2013)
134. KAGRA, <http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/>
135. Hild S et al. *Class. Quantum Grav.* **28** 094013 (2011)
136. Dwyer S et al. *Phys. Rev. D* **91** 082001 (2015)

## Quantum measurements in gravitational-wave detectors

F.Ya. Khalili

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,  
Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation  
E-mail: khalili@phys.msu.ru

The sensitivity of current gravitational-wave detectors is so high that to a large extent it is limited by quantum fluctuations of light in them. Methods of suppression or evasion of these fluctuations are actively developed, and the simplest of them, namely, the injection of squeezed light, has already found application in the GEO600 detector. The aim of this review is first to acquaint the reader with the quantum mechanical limitations on the sensitivity of optomechanical devices in general and laser gravitational-wave detectors in particular and, second, to outline those of the methods of overcoming these limitations which are considered as the most promising for implementation in current and planned detectors.

**Keywords:** gravitational-wave detectors, quantum noise, squeezed light, standard quantum limit, quantum nondemolition measurements, filter cavities, quantum speed meter, optical rigidity

PACS numbers: 03.65.Ta, 04.80.Na, **42.50**. – p

Bibliography — 136 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **186** (10) 1059 – 1089 (2016)

DOI: 10.3367/UFNr.2016.07.037866

Received 8 June 2016

*Physics – Uspekhi* **59** (10) (2016)

DOI: 10.3367/UFNe.2016.07.037866