

## ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

## Стохастическое структурообразование в случайных средах

В.И. Кляцкин

Рассматривается стохастическое структурообразование в случайных средах на примерах простейших динамических систем, связанных со стохастической двумерной геофизической гидродинамикой (гауссовы случайные поля), и динамических систем со стохастическим параметрическим возбуждением, описываемых уравнениями в частных производных (логнормальные случайные поля). В последнем случае могут образовываться пространственные структуры (кластеры) с вероятностью единица почти при каждой их реализации благодаря редким событиям, происходящим с вероятностью, стремящейся к нулю. Такие задачи со стохастическим параметрическим возбуждением имеют место в гидродинамике, магнитной гидродинамике, физике плазмы, астрофизике и радиофизике. Рассматривается также постановка более сложной стохастической задачи об аномальных структурах на морской поверхности (rogue waves), в которой случайная гауссова генерация поверхностного волнения сопровождается параметрическим возбуждением.

**Ключевые слова:** стохастические уравнения, перемежаемость, ляпуновский характеристический параметр, кривая типичной реализации, динамическая локализация, статистическая топография, кластеризация

PACS numbers: 05.40. – a, 05.45. – a, 46.65. + g, 47.27. – i

DOI: 10.3367/UFNr.0186.201601e.0075

## Содержание

## 1. Введение (75).

1.1. Двумерная геофизическая гидродинамика. 1.2. Параметрически возбуждаемые динамические системы. 1.3. О статистических характеристиках случайного поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

## 2. Логнормальные процессы, перемежаемость и динамическая локализация (84).

2.1. Кривая типичной реализации случайного процесса. 2.2. Динамическая локализация.

## 3. Логнормальные поля, статистическая топография и кластеризация (86).

3.1. Случайные логнормальные поля. 3.2. Статистическая топография случайных полей.

## 4. Стохастические явления переноса в случайном поле скоростей (92).

4.1. Кластеризация поля плотности в случайном поле скоростей. 4.2. Вероятностное описание магнитного поля и его энергии в случайном поле скоростей.

## 5. Модель стохастического поля скоростей, позволяющая получить аналитическое решение задач переноса (96).

5.1. Модель диффузии пассивной примеси. 5.2. Модель турбулентного динамо.

## 6. Параметрически возбуждаемые динамические системы с гауссовой накачкой (96).

6.1. Статистический анализ простейшей задачи турбулентного динамо с гауссовой накачкой. 6.2. Аномальные структуры на морской поверхности.

## 7. Заключение (103).

## Список литературы (103).

*Книга природы написана на языке математики.*  
Галилео Галилей

## 1. Введение

Человечество живёт в конкретной реализации стохастического пространственно-временного хаоса. При этом физики верят, что исходные динамические уравнения механики, гидродинамики, магнитной гидродинамики, электродинамики, акустики, оптики, радиофизики и т.п. описывают реальную пространственно-временную эволюцию мира.

В 2014 г. научный мир отмечал юбилей — 450 лет со дня рождения великого учёного Галилея [1], утверждавшего, что природа пишет законы на языке математики. А уравнения динамики в пространстве и во времени как раз и представляют собой одно из главных отражений математики в физике! И если Галилей прав, то возникает вопрос: как можно "вытащить" из этих уравнений законы природы, не анализируя возможные физические механизмы конкретных явлений? Ответ на этот вопрос может дать только правильный статистический анализ. В настоящей статье демонстрируется именно такой подход.

Прежде всего сформулируем *основную задачу* статистического анализа стохастических динамических систем так, как мы её понимаем: *выявить на основе соответствующего статистического анализа такие общие особенности стохастических динамических систем, которые проявляются с вероятностью единица, т.е. почти для всех реализаций рассматриваемых систем.* Это связано с тем, что обычно мы не имеем ансамбля усреднения, и

**В.И. Кляцкин.** Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, 109017 Москва, Российская Федерация  
Тел. (499) 269-12-83. E-mail: klyatskin@yandex.ru

Статья поступила 1 июля 2015 г.,  
осле доработки 19 ноября 2015 г.

специалисты по численному моделированию, так же как и экспериментаторы, имеют дело с отдельными реализациями случайных процессов и полей. Традиционное статистическое усреднение, как правило, даёт "среднее по больнице". Бывают, конечно, и исключения (см. раздел 1.1).

В стохастических динамических системах, описываемых уравнениями в частных производных, в ряде случаев может осуществляться с вероятностью единица пространственно-временное стохастическое структурообразование при отдельных реализациях этого поля. Такие процессы и явления, происходящие с вероятностью единица, будем называть *когерентными*. Подобную "статистическую когерентность" можно рассматривать как некую организацию сложной динамической системы, и выделение её *статистически устойчивых характеристик* аналогично введению понятия *когерентности* как *самоорганизации* многокомпонентных систем, возникающих из хаотических взаимодействий их элементов (см., например, [2]).

В настоящей статье рассматриваются три типа простейших динамических систем: системы, связанные с гауссовыми случайными полями, со стохастическим параметрическим возбуждением и со стохастическим параметрическим возбуждением, порождённым гауссовой накачкой (комбинированный случай). Все эти системы описываются уравнениями в частных производных.

*Заметим, что даже в гауссовых случайных полях могут осуществляться нетривиальные ситуации — не типичные для обычного гауссова шума.* Такие явления имеют место, например, в двумерных задачах геофизической гидродинамики во вращающейся жидкости со случайной топографией дна (см., например, [3, 4]) и в задаче об аномальных структурах на морской поверхности (см. раздел 6.2).

### 1.1. Двумерная геофизическая гидродинамика

Простейший случай когерентного явления соответствует двумерному несжимаемому потоку идеальной жидкости на плоскости  $\mathbf{R} = (x, y)$ , описываемому функцией тока  $\psi(\mathbf{R}, t)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi(\mathbf{R}, t) = J(\Delta \psi(\mathbf{R}, t); \psi(\mathbf{R}, t)), \quad \psi(\mathbf{R}, 0) = \psi_0(\mathbf{R}), \quad (1)$$

где  $\Delta$  — лапласиан,  $J(\psi(\mathbf{R}, t); \varphi(\mathbf{R}, t))$  — якобиан двух функций [5],

$$J(\psi(\mathbf{R}, t); \varphi(\mathbf{R}, t)) = \frac{\partial \psi(\mathbf{R}, t)}{\partial x} \frac{\partial \varphi(\mathbf{R}, t)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi(\mathbf{R}, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(\mathbf{R}, t)}{\partial y}.$$

Нелинейное взаимодействие должно привести гидродинамическую систему (1) к статистическому равновесию. Учитывая, что процесс установления такого равновесия состоит из большого числа взаимодействий возмущений различных масштабов, можно предположить, что в простейшем случае статистически однородного и изотропного случайного начального поля  $\psi_0(\mathbf{R})$  такое равновесное распределение будет гауссовым и задача сводится к определению его параметров. Случайная функция тока  $\psi(\mathbf{R}, t)$  в процессе эволюции остаётся пространственно однородной и изотропной. Поскольку  $\psi(\mathbf{R}, t)$  определена с точностью до аддитивной постоянной, её статистические характеристики могут быть описаны

одновременной структурной функцией

$$D_\psi(\mathbf{R} - \mathbf{R}', t) = \langle [\psi(\mathbf{R}, t) - \psi(\mathbf{R}', t)]^2 \rangle = 2(B_\psi(0, t) - B_\psi(\mathbf{R} - \mathbf{R}', t)),$$

где  $B_\psi(\mathbf{R} - \mathbf{R}', t) = \langle \psi(\mathbf{R}, t) \psi(\mathbf{R}', t) \rangle$  — пространственная корреляционная функция поля  $\psi(\mathbf{R}, t)$ .

Если предположить, что распределение поля  $\psi(\mathbf{R}, t)$  имеет вид гауссова распределения статистически однородного и изотропного поля, которое описывается стационарной структурной функцией

$$D_\psi(R) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_\psi(\mathbf{R}, t),$$

то для последней можно получить уравнение [2]

$$(\Delta_q + \lambda) \Delta_q D_\psi(q) = 0, \quad (2)$$

где постоянная разделения  $\lambda$  имеет размерность квадрата обратной длины,  $q = |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|$ ,  $\Delta_q$  — радиальная часть оператора Лапласа.

Имеются два возможных решения уравнения (2), соответствующие положительному и отрицательному значениям постоянной  $\lambda$ :  $\lambda = k_0^2 > 0$  и  $\lambda = -k_0^2 < 0$ .

В случае  $\lambda = k_0^2 > 0$  уравнение (2) сводится к следующему:

$$\Delta_q D_\psi(q) = C J_0(k_0 q),$$

где  $C$  — размерная постоянная,  $J_0(z)$  — функция Бесселя первого рода. В этом случае функция  $D_\psi(q)$  определяется из решения уравнения Пуассона, и в результате получаем для спектральной плотности функции тока выражение

$$E(k) = E \delta(k - k_0),$$

что соответствует случайным структурам с *определённым фиксированным пространственным масштабом*. Такими структурами для данной задачи являются *вихри*, т.е. имеет место структурообразование в виде *вихрегенезиса*.

В случае  $\lambda = -k_0^2 < 0$  уравнение (2) сводится к подобному уравнению,

$$\Delta_q D_\psi(q) = C K_0(k_0 q),$$

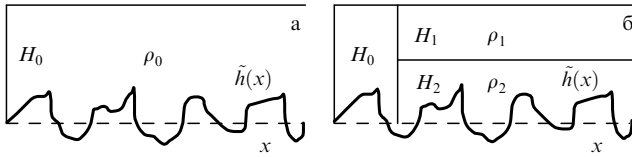
но содержащему в правой части функцию Макдональда  $K_0(z)$  с размерными параметрами  $k_0$  и  $C$ . Соответствующая спектральная плотность функции тока теперь примет вид

$$E(k) = \frac{E_0}{k^2 + k_0^2},$$

что соответствует распределению Гиббса с двумя интегралами движения: интегралы энергии и квадрат вихря поля скорости (см., например, [6, 7]).

Аналогичным образом можно рассмотреть и равновесные состояния для квазигеострофических потоков (с учётом вращения) со случайной топографией подстилающей поверхности для однослойного и двухслойного потоков жидкости (рис. 1), для которых мы имеем аналогичную ситуацию.

В случае однослойной модели поток жидкости в двумерной плоскости  $\mathbf{R} = (x, y)$  описывается *функцией тока*,



**Рис. 1.** Схемы однослойной (а) и двухслойной (б) моделей гидродинамических потоков.  $H_0$ ,  $H_1$  и  $H_2$  — толщины слоёв жидкости с плотностями  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно,  $\tilde{h}(x)$  — функция, описывающая топографию дна.

удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi(\mathbf{R}, t) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{R}, t) = J(\Delta \psi(\mathbf{R}, t) + h(\mathbf{R}); \psi(\mathbf{R}, t)),$$

где параметр  $\beta_0$  — производная по широте от локального параметра Кориолиса  $f_0$ ,  $h(\mathbf{R}) = f_0 \tilde{h}(\mathbf{R})/H_0$ . Здесь  $\tilde{h}(x)$  — функция, описывающая топографию дна  $\tilde{h}(\mathbf{R})$ ,  $H_0$  — средняя толщина слоя жидкости. Это уравнение описывает *баротропное* движение жидкости. В более общем случае для исследования *бароклинных* движений исполь-

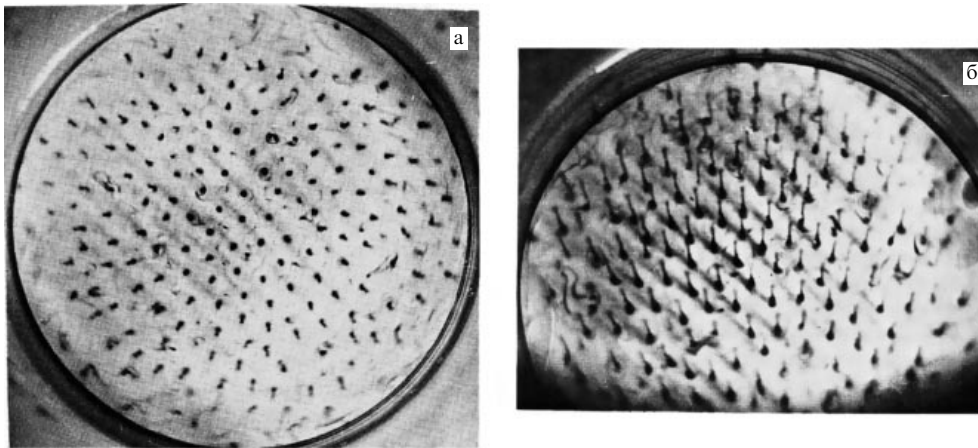
зуется двухслойная модель гидродинамических потоков, описываемая системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\Delta \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2)] + \beta_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} &= \\ &= J(\Delta \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2); \psi_1), \\ \frac{\partial}{\partial t} [\Delta \psi_2 - \alpha_2 F(\psi_2 - \psi_1)] + \beta_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} &= \\ &= J(\Delta \psi_2 - \alpha_2 F(\psi_2 - \psi_1) + f_0 \alpha_2 h; \psi_2), \end{aligned}$$

где введены дополнительные параметры  $\alpha_1 = 1/H_1$ ,  $\alpha_2 = 1/H_2$  — обратные толщины слоёв — и  $F = f_0^2 \rho / g(\Delta \rho)$ ,  $\Delta \rho / \rho = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_0 > 0$ .

Таким образом, в двухслойной жидкости появляются уже *два фиксированных размера*.

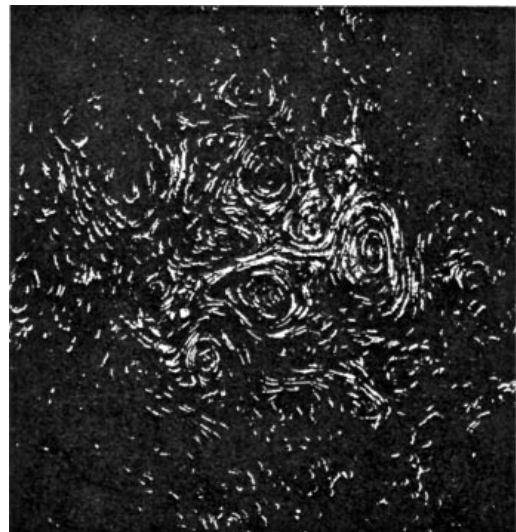
По-видимому, подобные структуры наблюдались в экспериментальных исследованиях во вращающейся жидкости (см., например, работы [8–10], обзор [11] и монографии [12, 13]), а также при численном моделировании (см., например, [14]). В качестве иллюстрации приведены рис. 2–5, которые, на наш взгляд, соответ-



**Рис. 2.** Система регулярных конвективных вихрей на вращающейся платформе: (а) вид сверху, (б) вид сбоку. (Из монографии [12].)



**Рис. 3.** Система нерегулярных конвективных вихрей на вращающейся платформе при большей, чем на рис. 2, скорости вращения. (Из монографии [12].)



**Рис. 4.** Поле скоростей бароклинной неустойчивости в двухслойной стратифицированной жидкости на вращающейся платформе. (Из работы [11].)

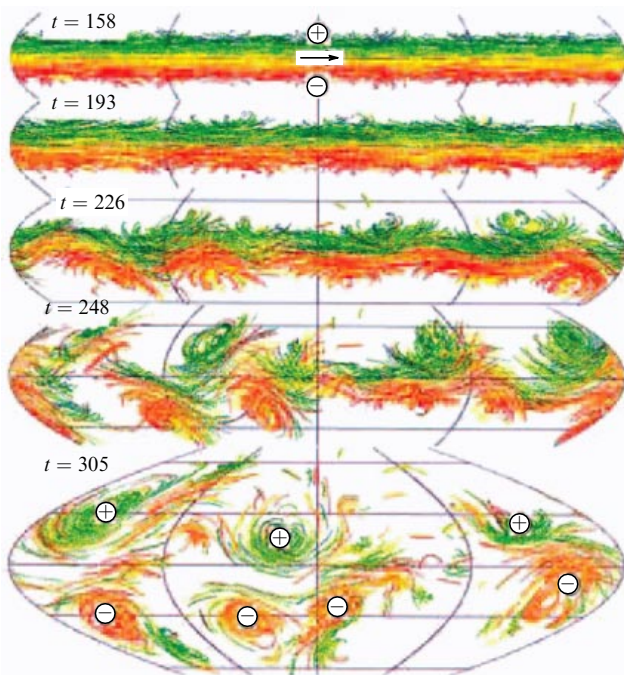


Рис. 5. (В цвете онлайн.) Вихрегенезис на сфере, порождённый сдвиговой неустойчивостью. (Из работы [14].)



Рис. 6. Область субмасштабной завихренности поля поверхностных течений в Балтийском море.

ствуют описанной ситуации. На рисунке 6 приведён пример структурообразования в поле поверхностных течений в Балтийском море [15, 16].

## 1.2. Параметрически возбуждаемые динамические системы

Рассмотрим теперь статистический анализ стохастических динамических систем, связанных со случайным параметрическим возбуждением в пространстве и во времени. Такие системы, возникающие во многих областях физики, могут описываться как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. Стохастическое структурообразование для таких систем в случайных средах в форме *кластеризации* связано с параметрическим возбуждением различных физических полей в этих средах. *Кла-*

*стеризация* какого-либо поля — это возникновение компактных областей с большими величинами данного поля на фоне окружающих областей с относительно низкими его значениями. При статистическом усреднении вся информация о кластеризации, естественно, утрачивается. Такие задачи имеют место в гидродинамике (*пассивная скалярная примесь в турбулентном потоке*), в магнитной гидродинамике (*пассивная векторная примесь — магнитное поле в турбулентном потоке*) и при распространении волн различной природы (акустические волны, радиоволны, свет и лазерное излучение) в случайных средах. Все эти задачи обычно рассматриваются в *кинематическом приближении* и характеризуются двумя следующими важнейшими свойствами.

1. В фиксированных точках пространства реализации поля во времени являются случайными процессами, которые обладают своеобразным характером: они имеют вид пиков, появляющихся в случайные моменты времени. Промежутки между ними характеризуются малой интенсивностью и большой протяжённостью. Такая реализация случайного процесса во времени для любой точки пространства обусловлена логнормальным одновременным распределением вероятностей, имеющим пологий "хвост". И большие, но редкие выбросы (флуктуации) обусловлены этими хвостами. Основными статистическими характеристиками рассматриваемых процессов являются: одновременная плотность вероятностей, одновременные моментные функции, кривая типичной реализации, характеризующая основные особенности поведения реализаций случайных процессов, и ляпуновская экспонента. В одномерных задачах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с начальными или краевыми условиями, в ряде случаев может наблюдаться только такое физическое явление, как *динамическая локализация* (см. раздел 2).

2. Само структурообразование стохастического поля происходит в физическом пространстве, и оно описывается посредством соответствующего статистического анализа на основе идей статистической топографии стохастического поля. В простейшей постановке задачи, при пространственной статистической однородности, все одноточечные статистические характеристики случайного поля не зависят от пространственной точки. Следовательно, уравнение для одноточечной плотности вероятностей случайного поля совпадает по виду с уравнением для плотности вероятностей случайного процесса в каждой фиксированной точке, хотя смысл этих уравнений совершенно различен. Соответственно, статистический анализ этих уравнений также должен быть совершенно различным.

Подробное обсуждение этих вопросов содержится в монографиях [17–20] и работах [21–24].

Прежде всего возникает вопрос: осуществляются ли такие физические явления, как локализация и кластеризация, в отдельных реализациях рассматриваемых процессов и полей или нет, а если осуществляются, то за какое характерное время (или на каких характерных масштабах)?

Само явление структурообразования в стохастических, параметрически возбуждаемых динамических системах хорошо известно в физике. Так, например, решения одномерных задач с параметрическим возбуждением, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, являются случайными процессами.

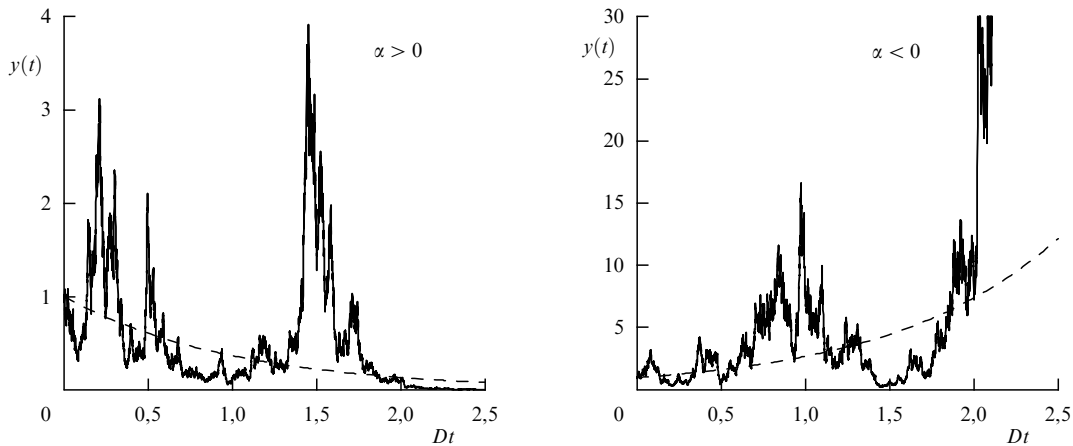


Рис. 7. Реализации логнормального процесса  $y(t)$  при  $\alpha > 0$ ,  $\alpha < 0$  и  $|\alpha|/D = 1$ .

Простейшая такая динамическая система определяет логнормальный случайный процесс  $y(t; \alpha)$ , описываемый обыкновенным стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{d}{dt} y(t; \alpha) = \{-\alpha + z(t)\} y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1, \quad (3)$$

где  $z(t)$  — гауссов случайный процесс *белого шума* с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad B_z(t - t') = \langle z(t)z(t') \rangle = 2D\delta(t - t').$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$y(t; \alpha) = \exp\left(-\alpha t + \int_0^t d\tau z(\tau)\right). \quad (4)$$

Отметим, что изменение знака параметра  $\alpha$  в (4) статистически эквивалентно переходу к процессу  $1/y(t)$  [25].

На рисунке 7 приведены реализации логнормального случайного процесса  $y(t; \alpha)$ , заданного формулой (4), для положительного и отрицательного значений параметра  $\alpha$  и  $|\alpha|/D = 1$  (штриховые линии соответствуют функциям  $\exp(-Dt)$  при  $\alpha > 0$  и  $\exp(Dt)$  при  $\alpha < 0$ ). Из рисунка 7 видно наличие редких, но больших выбросов (флуктуаций) относительно штриховых кривых в сторону как больших, так и меньших значений. Такое свойство случайных процессов называется *перемежаемостью*; оно интенсивно изучалось в 1980-х годах (см., например, работы [26, 27]). Подробное обсуждение этого вопроса дано, например, в монографии [19] и работе [28]. Кривую, относительно которой осуществляются выбросы (флуктуации), будем называть *кривой типичной реализации*.

Авторы практически каждой из многочисленных работ по исследованию свойств перемежаемости при обращении к понятию "перемежаемость" ссылаются на работу [27]. Сам термин *перемежаемость* появился при изучении поля скорости и температурных пятен в турбулентной среде [29, 30] (так отмечено, например, в работе [27]). Однако в те далёкие времена уже хорошо было известно, что одноточечные распределения полей скорости и флуктуаций температуры близки к гауссовым (см., например, [31]). Термин *перемежаемость*, конечно, является красивым, и он характеризует изменчивость случайного поля во времени в фиксированной точке простран-

ства, т.е. изменчивость случайного процесса относительно среднего значения.

В те времена, разумеется, было также известно о возможности возникновения стохастической неустойчивости (параметрического возбуждения) в динамических системах вследствие флуктуаций параметров самой системы. Но в течение долгого времени, вплоть до 1980-х годов, никто этими вопросами практически не интересовался. Заслуга авторов работы [27] состоит в том, что они, по-видимому, первыми обратили внимание на возможность стохастического структурообразования вследствие такого параметрического возбуждения, которое было известно в то время из наблюдений различного рода.

В аннотации работы [27] говорится: "Для процессов неустойчивости в случайных средах характерно возникновение специфических структур, в которых растущая величина достигает *рекордных* значений. Несмотря на редкость этих концентраций, именно в них сосредоточена основная часть интегральных характеристик растущей величины (среднего значения, среднего квадрата и т.д.). Возникновение таких структур называется явлением *перемежаемости*". Таким образом, в работе [27] большие редкие выбросы (флуктуации) именуется *специфическими структурами*, а сам процесс образования таких структур (выбросов или флуктуаций) называется явлением *перемежаемости*.

В нашем понимании *перемежаемость* представляет собой общее свойство всех случайных процессов, не зависящее от величин возможных выбросов, а *структурообразование* — это *определённая эволюция стохастических динамических систем в пространстве и во времени*.

В работе [27] эти понятия были отождествлены. В настоящее время, например, некоторые учёные большие редкие выбросы (флуктуации), характерные для стохастических как линейного, так и нелинейного уравнений Леонтовича (см. ниже), называют *волнами-убийцами* (см., например, лекции В.Е. Захарова [32]). Волна-убийца, безусловно, является пространственно-временной кластеризацией водных масс, и её следует рассматривать на основе соответствующего статистического анализа эволюции случайных полей.

Отметим, что статистическая теория стационарных экстремальных статистических процессов является самостоятельной ветвью теории вероятностей (см., например,



обзор [33]). Однако, по нашему мнению, такое направление не имеет никакого отношения к стохастическому структурообразованию в пространстве и во времени.

Принципиальная особенность стохастических динамических систем, описываемых уравнениями в частных производных, состоит в том, что их решения являются случайными полями в пространстве и во времени. Сложность объяснения этих процессов структурообразования обусловлена двумя факторами. Во-первых, в каждой фиксированной точке пространства случайное поле является случайным процессом во времени. Во-вторых, для каждого фиксированного момента времени случайное поле представляет собой случайный процесс по пространственной переменной. Именно для случайных процессов (по времени или по пространственной координате) и осуществляется перемежаемость (т.е. изменчивость), которая является общим свойством всех случайных процессов безотносительно к природе их происхождения.

Под понятием перемежаемости случайного процесса в настоящей статье подразумевается более или менее равномерное чередование выбросов (флуктуаций) этого процесса в сторону как больших, так и меньших его значений относительно детерминированной кривой — *кривой типичной реализации*, которая является медианой интегральной функции распределения вероятностей (см. раздел 2.1). При этом логнормальный параметрически возбуждаемый случайный процесс может экспоненциально убывать во времени в конкретных реализациях (разумеется, с какими-то флуктуациями), что соответствует явлению *динамической локализации*. Возможно также экспоненциальное возрастание случайного процесса во времени, что соответствует отсутствию динамической локализации. При этом особенностью логнормального случайного процесса является наличие редких больших выбросов (флуктуаций) процесса (см. рис. 7), обусловленное длинным пологом "хвостом" плотности вероятностей (см. раздел 2). Все традиционные статистические характеристики, такие как моментные и корреляционные функции любого порядка, обусловлены именно этими выбросами.

Вводя понятие кривой типичной реализации случайного процесса, мы возвращаемся к историческому смыслу понятия перемежаемости, которое является общим для всех случайных процессов, и это понятие имеет четкое вероятностное определение и прозрачный физический смысл.

**Примеры стохастических динамических систем.** Простейшей физической задачей с параметрическим возбуждением является задача о диффузии частицы или системы частиц в случайном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с заданными статистическими свойствами в кинематическом приближении (см., например, монографии [17–20], где дана подробная библиография рассматриваемых проблем), описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (5)$$

Численное моделирование этой задачи показывает, что динамика системы частиц существенно различается в зависимости от того, является ли случайное поле скоростей бездивергентным или дивергентным. Так, для конкретной реализации бездивергентного стационарного

поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  частицы (двумерный случай), равномерно расположенные в круге, только перемешиваются в области, ограниченной деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура. В случае потенциального поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. Подчеркнем, что образование кластеров в этой задаче — чисто кинематический эффект. Очевидно, что при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей такая особенность динамики частиц исчезает.

Имеет место также *динамическая локализация Андерсона* собственных функций одномерного стационарного уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом [34, 35], и, соответственно, происходит *динамическая локализация* интенсивности волны в краевой задаче о волнах в случайных слоистых средах в части пространства  $[L_0, L]$  [36]. Эта задача описывается стохастическим уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2(1 + \varepsilon(x))u(x) = 0 \quad (6)$$

с краевыми условиями непрерывности поля и его производной на границах слоя:

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0.$$

Что касается случайных полей, то можно ввести обобщение логнормального случайного процесса (4), распространив его на логнормальное случайное поле согласно формуле

$$f(\mathbf{r}, t; \alpha) = f_0(\mathbf{r}) \exp \left( -\alpha t + \int_0^t d\tau z(\mathbf{r}, \tau) \right), \quad (7)$$

где  $z(\mathbf{r}, t)$  — гауссово случайное поле, дельта-коррелированное во времени с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$B_z(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle z(\mathbf{r}, t) z(\mathbf{r}', t') \rangle = 2D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (8)$$

Это поле удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка:

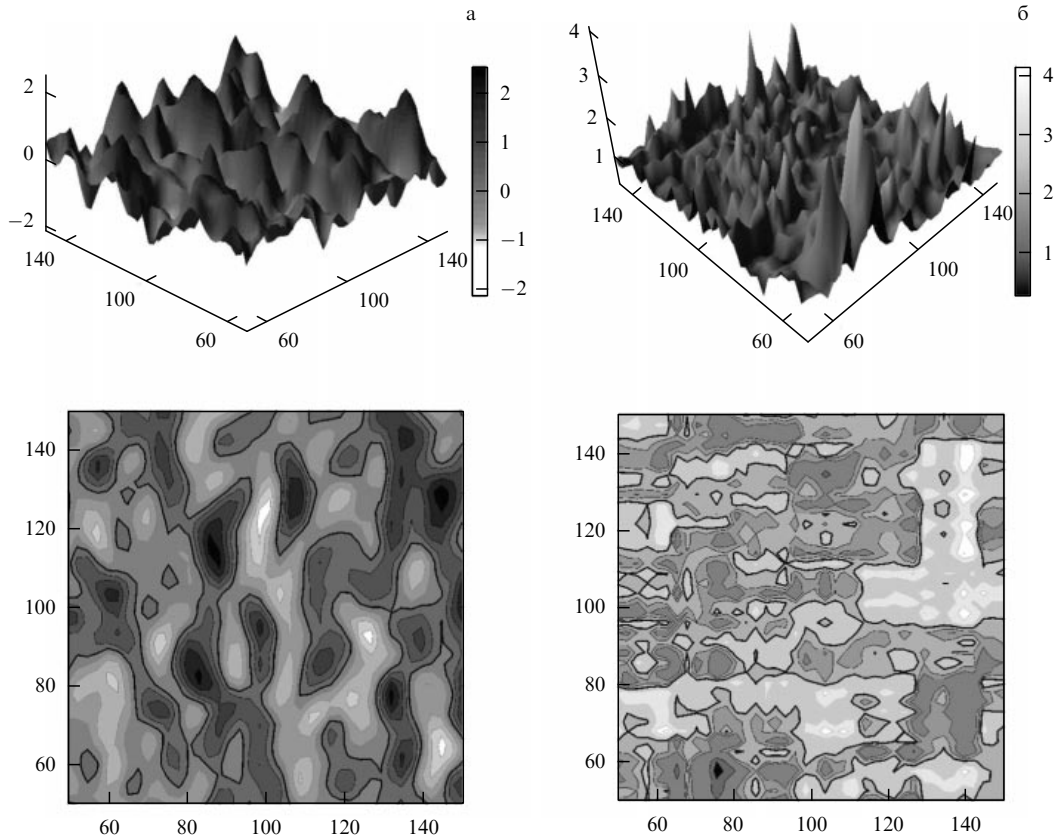
$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t; \alpha) = (-\alpha + z(\mathbf{r}, t)) f(\mathbf{r}, t; \alpha), \quad f(\mathbf{r}, 0; \alpha) = f_0(\mathbf{r}), \quad (9)$$

параметрически зависящему от пространственной точки  $\mathbf{r}$ .

Отметим, что в упомянутых ранее работах по перемежаемости [26, 27] в качестве модельной задачи рассматривалось уравнение

$$\frac{df(\mathbf{r}, t)}{dt} = z(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t) + \mu_f \Delta f(\mathbf{r}, t), \quad (10)$$

где  $\mu_f$  — динамический коэффициент диффузии для поля  $f(\mathbf{r}, t)$ . Это уравнение со случайным размножением и диффузией характерно для задач как биологии, так и кинетики химических и ядерных реакций (см., например, [37]).



**Рис. 8.** Реализации (а) гауссова поля  $\ln f(\mathbf{r}, t)$  и (б) логнормального поля  $f(\mathbf{r}, t)$  (11) и их топографические линии уровня. Жирными кривыми обозначены линии уровня, соответствующие значениям полей 0 на рис. а и 1 на рис. б.

Причём, если  $f_0(\mathbf{r}) = 1$ , то все одноточечные статистические характеристики этого поля не зависят от  $\mathbf{r}$ .

На начальном этапе диффузии решением задачи (10) является функция (7) при  $\alpha = 0$  и  $f_0(\mathbf{r}) = 1$ :

$$f(\mathbf{r}, t) = \exp\left(\int_0^t d\tau z(\mathbf{r}, \tau)\right), \quad (11)$$

которая для одноточечных статистических характеристик статистически эквивалентна случайному процессу  $y(t; 0)$  (4). Как будет показано далее, в этом случае структурообразования не происходит. Имеется лишь общее свойство перемежаемости.

Отметим, что включение эффекта "гибели" в уравнение (10) с помощью члена  $-\alpha f(\mathbf{r}, t; \alpha)$  при  $\alpha > 0$  приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t; \alpha) = (-\alpha + z(\mathbf{r}, t)) f(\mathbf{r}, t; \alpha) + \mu_f \Delta f(\mathbf{r}, t; \alpha), \quad (12)$$

решение которого на начальном этапе описывается уже формулой (7). В этом случае, как будет показано далее, возможно стохастическое структурообразование в виде кластеризации.

Введение случайности в параметры среды порождает стохастичность в самих физических полях. Индивидуальные реализации, например, логнормального скалярного двумерного поля  $f(\mathbf{R}, t)$  (11), где  $\mathbf{R} = \{x, y\}$ , напоминают сложный горный ландшафт со случайно распределёнными пиками, провалами, хребтами и перевалами. На рисунке 8 приведены примеры реализаций посредством численного моделирования двух случайных полей с разной статистической структурой.

Кластеризация случайных физических полей, в первую очередь, возникает в задачах *турбулентного переноса* в случайном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . В частности, может происходить *кластеризация примеси* как *пассивной скалярной* (поля плотности) [17–20, 38], так и *векторной* (энергии магнитного поля), в рамках *кинематического приближения* [17–20, 39]. Исходными стохастическими уравнениями для таких задач являются уравнение непрерывности для поля плотности примеси  $\rho(\mathbf{r}, t)$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu_\rho \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (13)$$

и уравнение индукции для бездивергентного магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  [40]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mu_H \Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\mu_\rho$  и  $\mu_H$  — динамические коэффициенты диффузии для поля плотности и магнитного поля. Здесь  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — поле турбулентных скоростей с заданными статистическими свойствами, которое мы считаем однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени.

Подчёркнём, что при анализе этих и подобных им уравнений математической физики, рассматриваемых далее в настоящей статье, нас не интересуют собственно их решение, а также физические механизмы, порождающие те или иные физические явления. Наша цель — выяснить, содержится ли в самих исходных уравнениях информация о возможности (или невозможности) стоха-

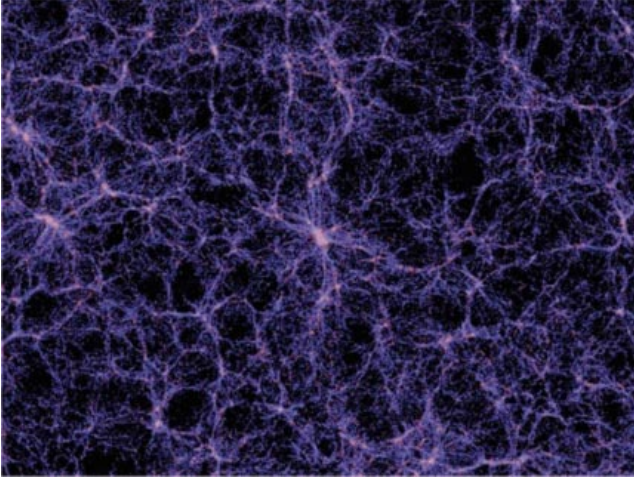


Рис. 9. Кластерная структура Вселенной.

стического структурообразования в случайных средах с вероятностью единица, т.е. почти для всех реализаций их решения.

Отметим, что скалярное поле плотности всегда кластеризуется для сжимаемого потока жидкости. На рисунке 9 приведена взятая из Интернета картина кластерной структуры Вселенной, которая, по-видимому, непосредственно связана с кластеризацией космического вещества в случайных полях скоростей. Этот вопрос обсуждается в разделе 4.1.

Стохастическое структурообразование может осуществляться и в виде *каустической структуры* интенсивности волнового поля в задачах о волнах в случайно-неоднородных средах в рамках комплексного стохастического параболического уравнения Леонтовича (см., например, [17, 18, 41]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) &= \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \\ u(0, \mathbf{R}) &= u_0(\mathbf{R}), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $x$  — координата в направлении распространения волны,  $\mathbf{R}$  — координаты в поперечной плоскости,  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  — отклонение диэлектрической проницаемости от единицы.

Отметим, что это же уравнение является нестационарным уравнением Шрёдингера со случайным потенциалом  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  при замене  $x$  временем  $t$ .

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp(iS(x, \mathbf{R})),$$

то уравнение для интенсивности волнового поля  $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$  примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \mathbf{V}_{\mathbf{R}} \{ \mathbf{V}_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (16)$$

Уравнение (16) по форме совпадает с уравнением непрерывности для поля плотности примеси (13) в случайном потенциальном потоке при отсутствии динамического коэффициента диффузии, и, следовательно, интенсивность волнового поля должна кластеризоваться. Более подробно эта задача обсуждается в разделе 3.2.1.

Отметим также нелинейное обобщение уравнения (15), соответствующее монохроматической нелинейной задаче о самодействии волны в случайно-неоднородных средах, описываемой комплексным нелинейным параболическим уравнением Леонтовича (*нелинейным уравнением Шрёдингера*):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) &= \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}; I(x, \mathbf{R})) u(x, \mathbf{R}), \\ u(0, \mathbf{R}) &= u_0(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (17)$$

Для уравнения (17) интенсивность волнового поля  $I(x, \mathbf{R})$  также описывается уравнением (16) (но, разумеется, с другой фазовой функцией  $S(x, \mathbf{R})$ ), следовательно, интенсивность тоже должна кластеризоваться.

В частности, так как уравнение (16) не зависит от вида функции  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ , то даже в случае  $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$  при начальном условии  $u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R})$  имеет место, как хорошо известно, каустическое структурообразование, регулярно наблюдаемое как в водных бассейнах, так и на мелководье. В этом случае уравнения (15) и (17) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}).$$

Решением последнего уравнения является функция

$$\begin{aligned} u(x, \mathbf{R}) &= \exp\left(\frac{ix}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}\right) u_0(\mathbf{R}) = \\ &= \frac{k}{2\pi ix} \int d\mathbf{R}' \exp\left[\frac{ik}{2x} (\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2\right] u_0(\mathbf{R}'), \end{aligned} \quad (18)$$

и плоской падающей волне соответствует начальное условие  $|u_0(\mathbf{R})| = 1$ , т.е. условие  $u_0(\mathbf{R}) = \exp(iS_0(\mathbf{R}))$ , где  $S_0(\mathbf{R})$  — поле случайной начальной фазы. При этом пространственные флуктуации в начальном распределении фазы волны трансформируются в каустическую структуру интенсивности волнового поля. Данный случай называется *случайным фазовым экраном*. Примеры такой кластеризации приведены на рис. 10.

Динамические системы (13)–(17) консервативны, и в них сохраняются такие интегральные характеристики, как общая масса примеси  $M = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t)$ , поток магнитного поля  $\int d\mathbf{r} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  и мощность волнового поля  $I = \int d\mathbf{R} I(x, \mathbf{R})$ .

Для однородных начальных условий  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0$ ,  $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0$ ,  $u_0(\mathbf{R}) = u_0$  и статистически однородных в пространстве случайных параметров следствием консервативности динамических систем (13)–(17) являются равенства

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{H}_0, \quad \langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = I_0 = |u_0|^2.$$

Особенностью уравнений (13) и (14) является параметрическое возбуждение со временем в каждой реализации как поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  (для сжимаемого потока жидкости), так и энергии магнитного поля  $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$  (для турбулентного потока жидкости), что называется *стохастическим динамо* (см., например, [40]).

Такое параметрическое возбуждение сопровождается на начальных стадиях эволюции динамических систем возрастанием со временем всех традиционных статистических характеристик решения задачи, таких как моментная функция поля плотности  $\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle$  и энергия магнитного поля  $\langle E^n(\mathbf{r}, t) \rangle$ , а также их корреляционных функций





Рис. 10. Каустики в бассейне (а) и на мелководье (б).

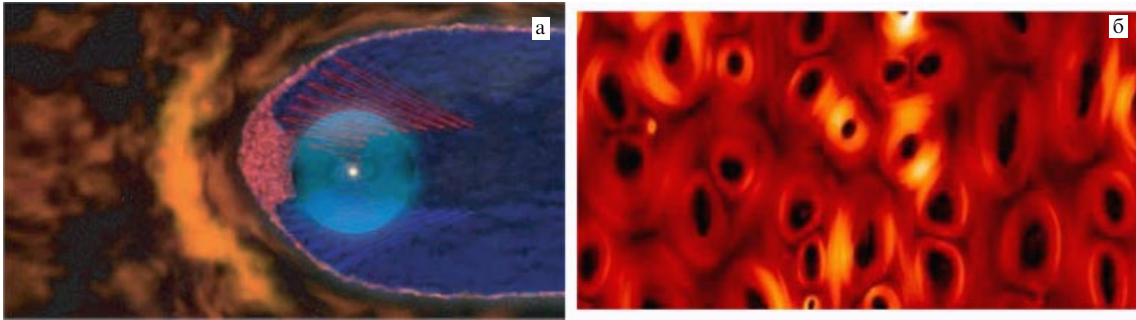


Рис. 11. (В цвете онлайн.) Магнитная обстановка на границе гелиосферы, как она, скорее всего, выглядит в действительности. Условная интерпретация (а) и реконструкция системы магнитных пузырей (б).

любого порядка. С увеличением расстояния возрастают и моменты мощности излучения в случайных средах  $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ .

Эффекты динамической диффузии для плотности и магнитного поля на начальных этапах своего развития являются несущественными, и, пренебрегая ими, мы приходим к уравнениям в частных производных первого порядка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (19)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left( \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (20)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}).$$

Однако именно на малых временах в отдельных реализациях соответствующих полей и могут зародиться пространственные структурные образования!

Как иллюстрацию структурообразования в магнитном поле приведём рис. 11 и выписку из Интернета [42]:

"Что же так сильно озадачило астрофизиков?"

Вопреки сформировавшимся за пятьдесят лет гипотезам наблюдатели столкнулись на границе Солнечной системы не с линейным и постепенно убывающим магнитным полем, или магнитным ламинаром, а с кипящей пеной из локально намагниченных областей, протяжённостью несколько сотен миллионов километров каждая, — подвижной ячеистой структурой, внутри которой линии магнитного поля постоянно разрываются, рекомбинируют и образуют новые области — магнитные пузыри".

Вопросы стохастического структурообразования энергии магнитного поля рассмотрены в разделе 4.2.2.

### 1.3. О статистических характеристиках случайного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$

Случайное поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  будем считать гауссовым, статистически однородным и изотропным в пространстве и статистически стационарным во времени, с корреляционной и спектральными функциями

$$B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t - t') \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')], \quad (21)$$

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

В общем случае произвольного случайного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  спектральная функция  $E_{ij}(\mathbf{k}, t)$  имеет структуру

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \frac{k_i k_j}{k^2} E^p(k, t), \quad (22)$$

где  $E^s(k, t)$  и  $E^p(k, t)$  — соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной функции поля скоростей.

Дисперсия поля скоростей при этом имеет вид

$$\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}(\mathbf{0}, 0) = \int d\mathbf{k} E_{ii}(\mathbf{k}, 0) = \int d\mathbf{k} [(d - 1)E^s(k, 0) + E^p(k, 0)], \quad (23)$$

где  $d$  — размерность пространства, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Введём важную для дальнейшего статистического анализа функцию

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\mathbf{r}, \tau), \quad (24)$$

которая и определяет все статистические характеристики решения задачи в диффузионном приближении (см., например, монографии [17–20]). При этом

$$\begin{aligned} B_{ii}(\mathbf{0}) &= \int_0^\infty d\tau B_{ii}(\mathbf{0}, \tau) = \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} E_{ii}(\mathbf{k}, \tau) = \\ &= \sigma_u^2 \tau_0 = \sigma_s^2 \tau_s + \sigma_p^2 \tau_p, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\sigma_u^2$  и  $\tau_0$  — дисперсия и временной радиус корреляции случайного поля скоростей,  $\sigma_s^2$  и  $\sigma_p^2$  соответственно — дисперсии соленоидальной и потенциальной компонент поля скоростей,  $\tau_s$  и  $\tau_p$  — их временные радиусы корреляции.

Далее при статистическом анализе задачи нам понадобятся вторые пространственные производные корреляционной функции случайного поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в нуле. Для этих производных в силу предполагаемых свойств случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет место тензорное равенство (см., например, монографии [17–20]):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 B_{ij}(0)}{\partial r_k \partial r_l} &= \frac{D^s}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] + \\ &+ \frac{D^p}{d(d+2)} (\delta_{ki}\delta_{ij} + \delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{kj}\delta_{li}), \end{aligned} \quad (26)$$

где в трёхмерном случае параметры  $D^s$  и  $D^p$  имеют вид

$$\begin{aligned} D^s &= \int d\mathbf{k} k^2 E^s(k) = 4\pi \int_0^\infty dk k^4 E^s(k) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t + \tau) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \rangle, \\ D^p &= \int d\mathbf{k} k^2 E^p(k) = 4\pi \int_0^\infty dk k^4 E^p(k) = \\ &= \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle, \end{aligned} \quad (27)$$

$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — вихрь,  $\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$  — дивергенция поля скоростей,

$$E^s(k) = \int_0^\infty d\tau E^s(k, \tau), \quad E^p(k) = \int_0^\infty d\tau E^p(k, \tau).$$

Коэффициенты  $D^s$  и  $D^p$ , определённые соотношениями (27), выражаются через статистические параметры производных поля скоростей,

$$D^s = \frac{1}{2} \sigma_\omega^2 \tau_\omega, \quad D^p = \sigma_{\text{div } \mathbf{u}}^2 \tau_{\text{div } \mathbf{u}}. \quad (28)$$

Нас интересуют два примера случайного поля скоростей:

- 1) несжимаемая гидродинамическая турбулентность;
- 2) потенциальные гидродинамические поля.

Частным случаем потенциального случайного поля является случай волновой турбулентности. Тогда корреляционная функция поля скорости задаётся как

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} E^p(k) \exp(-\lambda k^2 t) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t), \quad (29)$$

где  $\omega = \omega(\mathbf{k}) > 0$  определяет дисперсионную кривую для волновых движений, а параметр  $\lambda$  описывает затухание волн.

Дисперсия поля скорости в этом случае

$$\sigma_u^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{k} E^p(k), \quad (30)$$

а величина, аналогичная (24), определяется как

$$\begin{aligned} B_{ij}(\mathbf{r}) &= \int_0^\infty dt B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} [E_1^p(k) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}) + E_2^p(k) \sin(\mathbf{k}\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$E_1^p(k) = E^p(k) \frac{\lambda k^2}{\lambda^2 k^4 + \omega^2(k)}, \quad (32)$$

$$E_2^p(k) = E^p(k) \frac{\omega(k)}{\lambda^2 k^4 + \omega^2(k)}.$$

Обнаружить и описать явление пространственного структурообразования (кластеризацию) в отдельных реализациях случайных полей удаётся только с помощью анализа одновременных и одноточечных плотностей вероятностей решений уравнений, приведённых выше, на основе идей статистической топографии. Рассмотрим сначала статистическое описание логнормальных случайных процессов.

## 2. Логнормальные процессы, перемежаемость и динамическая локализация

Одновременная плотность вероятностей  $P(y, t; \alpha) = \langle \delta(y(t; \alpha) - y) \rangle$  логнормального процесса (4) описывается уравнением Фоккера – Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t; \alpha) = \left( \alpha \frac{\partial}{\partial y} y + D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y \right) P(y, t; \alpha), \quad (33)$$

$$P(y, 0; \alpha) = \delta(y - 1),$$

решение которого, естественно, зависит от параметра  $\alpha$ :

$$P(y, t; \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [y \exp(\alpha t)]}{4Dt} \right\}. \quad (34)$$

Распределение вероятностей (34) имеет совершенно разный вид при  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$ . Общей особенностью для этих случаев является лишь появление длинных пологих "хвостов" при больших  $t$ , означающих усиление роли больших выбросов процессов  $y(t; \alpha)$  в формировании одновременной статистики. Графики логарифмически нормальных плотностей вероятностей (34) при  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$  для значения параметра  $|\alpha|/D = 1$  и безразмерного времени  $\tau = Dt = 0, 1$  и  $1$  приведены на рис. 12.

Соответственно, интегральная функция распределения вероятностей определяется выражением

$$\begin{aligned} F(y, t; \alpha) &= \int_{-\infty}^y dy' P(t; y') = \mathcal{P}(y(t; \alpha) < y) = \\ &= \text{Pr} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln [y \exp(\alpha t)] \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

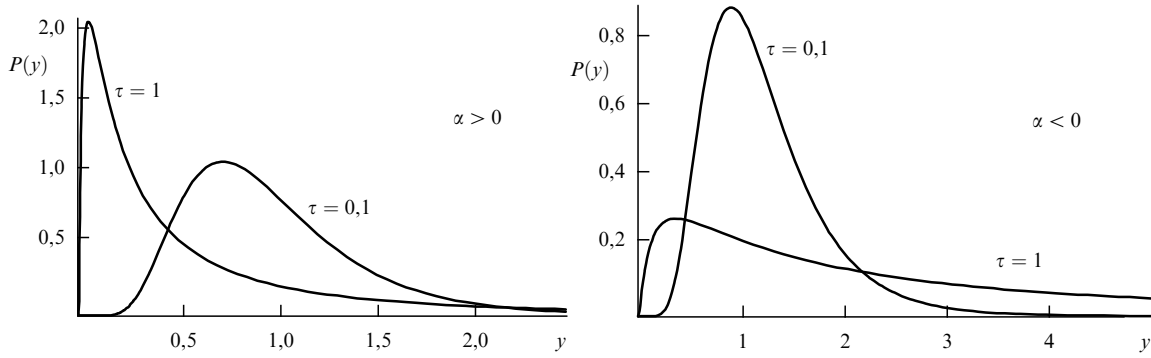


Рис. 12. Логнормальные распределения вероятностей (34) для значения параметра  $|\alpha|/D = 1$  и безразмерного времени  $\tau = Dt = 0,1$  и  $1$ .

где функция  $\Pr(z)$  — интеграл вероятностей,

$$\Pr(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{36}$$

Очевидно, что  $\Pr(\infty) = 1$  и  $\Pr(0) = 1/2$ . Из выражения (36) легко найти асимптотику интеграла вероятностей при  $z \rightarrow \pm\infty$ , а именно

$$\Pr(z)_{z \rightarrow \infty} \approx 1 - \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \tag{37}$$

$$\Pr(z)_{z \rightarrow -\infty} \approx \frac{1}{|z|\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

Из уравнения (33) также легко получить равенство

$$\alpha = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \langle \ln y(t; \alpha) \rangle}{\partial t}. \tag{38}$$

Следовательно, параметр  $\alpha$  в уравнении (33) совпадает с ляпуновским характеристическим показателем (38) для логнормального случайного процесса  $y(t; \alpha)$  (4) (см., например, [43, 44]).

**2.1. Кривая типичной реализации случайного процесса**

Статистические характеристики процесса  $z(t)$  в фиксированный момент времени  $t$  описываются плотностью вероятностей  $P(z, t)$  и интегральной функцией распределения вероятностей  $F(Z, t) = \int_{-\infty}^Z dz' P(z', t)$ .

Кривой типичной реализации случайного процесса  $z(t)$  называется детерминированная кривая  $z^*(t)$ , которая является медианой интегральной функции распределения вероятностей и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(z^*(t), t) = \frac{1}{2}. \tag{39}$$

Это означает, с одной стороны, что для любого момента времени  $t$  вероятность  $\mathcal{P}\{z(t) > z^*(t)\} = \mathcal{P}\{z(t) < z^*(t)\} = 1/2$ .

С другой стороны, медиана имеет специфическое свойство, заключающееся в том, что для любого интервала  $(t_1, t_2)$  случайный процесс  $z(t)$  "обвивает" кривую  $z^*(t)$  таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство  $z(t) > z^*(t)$ , совпадает со средним временем, в течение которого справедливо обратное неравенство  $z(t) < z^*(t)$  (рис. 13), т.е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2}(t_2 - t_1).$$

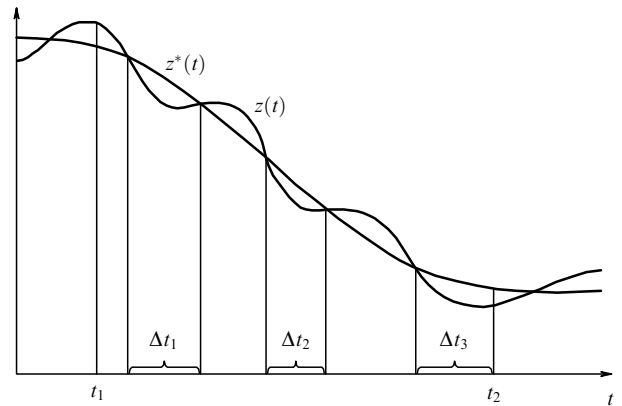


Рис. 13. К определению кривой типичной реализации случайного процесса.

Кривая  $z^*(t)$ , естественно, может существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса  $z(t)$ , и она не описывает величину возможных выбросов. Таким образом, кривая типичной реализации  $z^*(t)$  случайного процесса  $z(t)$ , полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена, тем не менее, на всём интервале времени  $t \in (0, \infty)$ , и она является той детерминированной кривой, относительно которой осуществляется перемежаемость.

Кривая типичной реализации (39) для гауссова случайного процесса  $z(t)$  совпадает со средним значением процесса  $z(t)$ , т.е.  $z^*(t) = \langle z(t) \rangle$ , а кривая типичной реализации для логнормального случайного процесса  $f(t) = \exp(z(t))$  определяется равенством

$$f^*(t) = \exp(\langle z(t) \rangle) = \exp(\langle \ln f(t) \rangle).$$

Следовательно, кривая типичной реализации логнормального процесса (4) описывается формулой

$$f^*(t) = \exp(\langle \ln f(t) \rangle) = \exp(-\alpha t),$$

что совпадает с ляпуновской экспонентой.

При  $\alpha > 0$  кривая типичной реализации экспоненциально убывает во времени, а в противоположном случае,  $\alpha < 0$ , — экспоненциально возрастает, именно эти функции изображены на рис. 7 штриховыми кривыми. При  $\alpha = 0$  перемежаемость осуществляется относительно прямой  $f^*(t) = 1$ .

## 2.2. Динамическая локализация

Отметим, что для одномерных задач положительность ляпуновского характеристического индекса  $\alpha$  как раз соответствует физическому явлению динамической локализации (кластеризации).

Так, для задачи диффузии системы частиц (5) в гауссовом случайном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  кривая типичной реализации для расстояния между двумя частицами представляет собой экспоненциальную функцию времени:

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{d(d+2)} [D^s d(d-1) - D^p(4-d)]t \right\}, \quad (40)$$

где  $d$  — размерность пространства, коэффициенты  $D^s$  и  $D^p$  описываются формулами (27) (см., например, [17–20]).

Отсюда следует, что в двумерном случае ( $d = 2$ ) выражение

$$l^*(t) = l_0 \exp \left[ \frac{1}{4} (D^s - D^p)t \right]$$

существенно зависит от знака разности  $D^s - D^p$ . В частности, для бездивергентного поля скоростей ( $D^p = 0$ ) имеем экспоненциально возрастающую кривую типичной реализации, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц при малых расстояниях между ними. В другом предельном случае — потенциальном поле скоростей ( $D^s = 0$ ) — кривая типичной реализации будет экспоненциально убывающей кривой, т.е. очевидно стремление частиц "слиться". Таким образом, условием кластеризации частиц в двумерном случае является выполнение неравенства  $D^s < D^p$ .

В трёхмерном случае ( $d = 3$ ) из (40) следует:

$$l^*(t) = l_0 \exp \left[ \frac{1}{15} (6D^s - D^p)t \right],$$

и кривая типичной реализации будет убывать со временем при выполнении более жёсткого, чем в двумерном случае, условия:  $D^p > 6D^s$ .

В одномерном случае  $l^*(t) = l_0 \exp(-D^p t)$  и кривая типичной реализации всегда убывает со временем, так как поле скоростей в этом случае всегда потенциально.

Для краевой задачи (6) о падении плоской волны на полупространство случайной слоистой среды интенсивность волнового поля  $I(x) = |u(x)|^2$  — логнормальный случайный процесс, кривая типичной реализации для которого  $I^*(x) = 2 \exp[-D(L-x)]$ , где для модели гауссова случайного процесса  $\varepsilon(x)$  с корреляционной функцией  $\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x') \rangle = 2D\delta(x-x')$  параметр  $D = k^2\sigma_\varepsilon^2 l_0/2$  ( $\sigma_\varepsilon^2$  — дисперсия процесса  $\varepsilon(x)$ , а  $l_0$  — его корреляционный радиус). Коэффициент прохождения волны через достаточно толстый слой случайной среды для рассматриваемой задачи экспоненциально убывает, и полупространство случайно неоднородной среды ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) полностью отражает падающую на него волну. В этом случае интенсивность волнового поля  $I(x)$  статистически эквивалентна случайному процессу  $2y(t; \alpha)$  при  $\alpha = D$ , и её реализация похожа на зеркальное отображение рис. 7 ( $\alpha > 0$ ). При этом, разумеется, имеется экспоненциальное возрастание моментов интенсивности волнового поля в глубь среды от источника. Отметим, что в монографии [35] указанный эффект был установлен на основе анализа для рассматриваемой задачи ляпунов-

ской экспоненты, которая для логнормального процесса совпадает с кривой типичной реализации.

Отметим также, что обратная к коэффициенту диффузии для этой задачи  $D$  величина, определяющая естественный масштаб длины, связанный со случайными неоднородностями среды, обычно называется *длиной локализации*,  $l_{\text{loc}} = 1/D$ .

## 3. Логнормальные поля, статистическая топография и кластеризация

### 3.1. Случайные логнормальные поля

Рассмотрим теперь положительное логнормальное случайное поле  $f(\mathbf{r}, t)$ , одноточечная плотность вероятностей

$$P(\mathbf{r}, t; f) = \langle \delta(f(\mathbf{r}, t) - f) \rangle$$

которого описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; f) = \left( D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial f} f + D_f \frac{\partial}{\partial f} f \frac{\partial}{\partial f} f \right) P(\mathbf{r}, t; f) \quad (41)$$

с начальным условием  $P(\mathbf{r}, 0; f) = \delta(f - f_0(\mathbf{r}))$ , где  $D_0$  — коэффициент диффузии в  $\mathbf{r}$ -пространстве, а коэффициенты  $\alpha$  и  $D_f$  характеризуют диффузию в  $f$ -пространстве. Параметр  $\alpha$  может быть как отличным от нуля, так и равным нулю (критический случай). Изменение знака  $\alpha$  для одноточечных характеристик означает переход от поля  $f(\mathbf{r}, t)$  к полю  $\hat{f}(\mathbf{r}, t) = 1/f(\mathbf{r}, t)$ .

Решение уравнения (41) имеет вид

$$P(\mathbf{r}, t; f) = \frac{1}{2f\sqrt{\pi D_f t}} \exp \left( D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) \times \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [f \exp(\alpha t)/f_0(\mathbf{r})]}{4D_f t} \right\}. \quad (42)$$

Отметим, что для положительного консервативного случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$ , для которого  $\int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} f_0(\mathbf{r})$ , параметр  $\alpha = D_f$  и уравнение (41) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; f) = \left( D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial f^2} f^2 \right) P(\mathbf{r}, t; f). \quad (43)$$

Разумеется, для любого случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$  всегда имеется также свойство перемежаемости. Для любой фиксированной пространственной точки  $\mathbf{r}$  эволюция во времени  $f(\mathbf{r}, t)$  — случайный процесс, для которого справедливо всё сказанное выше.

Для статистически пространственно однородной задачи, соответствующей начальному распределению поля  $f_0(\mathbf{r}) = f_0$ , все одноточечные статистические характеристики поля  $f(\mathbf{r}, t)$  не зависят от точки  $\mathbf{r}$  и положительность индекса

$$\alpha = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \langle \ln f(\mathbf{r}, t) \rangle}{\partial t}$$

для логнормального поля  $f(\mathbf{r}, t)$  означает, что в любой точке пространства реализации этого поля убывают во времени, несмотря на то что для логнормального процесса имеются большие редкие выбросы. При этом

характерное время убывания поля  $t \sim 1/\alpha$ . Но если поле почти везде убывает, то где-то оно должно концентрироваться, т.е. должна иметь место кластеризация. При отрицательном значении параметра  $\alpha$  происходит возрастание поля в каждой фиксированной точке пространства.

В последнем случае плотность вероятностей (42) не зависит от  $\mathbf{r}$  и описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; f) = \left( \alpha \frac{\partial}{\partial f} f + D_f \frac{\partial}{\partial f} f \frac{\partial}{\partial f} f \right) P(t; f), \quad (44)$$

$$P(0; f) = \delta(f - f_0),$$

решение которого имеет вид

$$P(t; f) = \frac{1}{2f\sqrt{\pi D_f t}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [f \exp(\alpha t)/f_0]}{4D_f t} \right\}. \quad (45)$$

Таким образом, для пространственно однородной задачи одноточечные статистические характеристики случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$  статистически эквивалентны статистическим характеристикам логнормального процесса  $f(t; \alpha)$  с плотностью вероятностей (45). Характерной особенностью этого распределения является появление длинного пологого "хвоста" при  $D_f t \gg 1$ , означающего усиление роли больших выбросов процесса  $f(t; \alpha)$  в формировании одновременной статистики (см. рис. 12). Для этого распределения все моментные функции экспоненциально возрастают во времени и, в частности, при  $n = 1$  и  $D_f > \alpha$  среднее значение

$$\langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = f_0 \exp[(D_f - \alpha)t],$$

а величина  $\alpha$  является ляпуновским характеристическим индексом.

На рисунке 14 схематически изображены случайные реализации поля  $f(\mathbf{r}, t)$  для параметра  $\alpha$  с разными знаками.

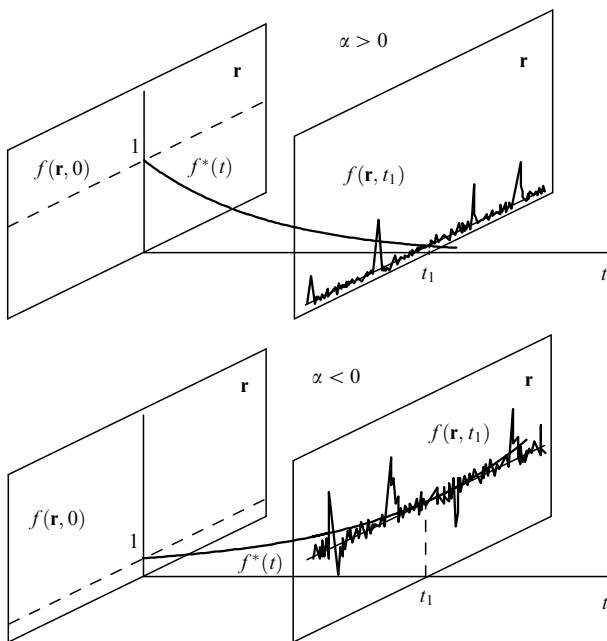


Рис. 14. Схематическое представление поведения случайных реализаций поля  $f(\mathbf{r}, t)$  при  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$ .

Описать пространственную кластеризацию случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$  в почти каждой реализации этого поля можно на основе идей статистической топографии.

### 3.2. Статистическая топография случайных полей

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трёхмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством  $f(\mathbf{r}, t) = f = \text{const}$ .

Для анализа системы контуров (для простоты в данном разделе ограничимся двумерным случаем  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ ) удобно ввести сосредоточенную на этих контурах дельта-функцию Дирака

$$\varphi(\mathbf{R}, t; f) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f), \quad (46)$$

называемую *индикаторной функцией*.

Через функцию (46) выражаются, например, такие величины, как общая площадь, ограниченная линиями уровня областей, в которых случайное поле  $f(\mathbf{R}, t)$  превышает заданный уровень  $f$ , т.е.  $f(\mathbf{R}, t) > f$ :

$$S(t; f) = \int d\mathbf{R} \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \int d\mathbf{R} \int_f^\infty df' \varphi(\mathbf{R}, t; f'),$$

и общая "масса" поля, заключённая в этих областях,

$$M(t; f) = \int d\mathbf{R} f(\mathbf{R}, t) \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \int d\mathbf{R} \int_f^\infty df' f' \varphi(\mathbf{R}, t; f'),$$

где  $\theta(f(\mathbf{R}, t) - f)$  — тета-функция Хевисайда.

Среднее значение индикаторной функции (46) по ансамблю реализаций случайного поля  $f(\mathbf{R}, t)$  определяет одновременную и одноточечную в пространстве плотность вероятностей [17–20]

$$P(\mathbf{R}, t; f) = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \rangle,$$

следовательно, средние по ансамблю реализации значения величин  $S(t; f)$  и  $M(t; f)$  определяются непосредственно этой плотностью вероятностей:

$$\langle S(t; f) \rangle = \int d\mathbf{R} \int_f^\infty df' P(\mathbf{R}, t; f'),$$

$$\langle M(t; f) \rangle = \int d\mathbf{R} \int_f^\infty df' f' P(\mathbf{R}, t; f').$$

Информацию о детальной структуре поля  $f(\mathbf{R}, t)$  можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{V}f(\mathbf{R}, t)$ . Так, например, величина

$$l(t; f) = \oint dl = \int d\mathbf{R} |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \quad (47)$$

описывает общую длину контуров. Подынтегральное выражение в (47) описывается расширенной индикаторной функцией

$$\varphi(\mathbf{R}, t; f, \mathbf{p}) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}), \quad (48)$$

и среднее значение  $l(t; f)$  (см. формулу (47)) связано с совместной одновременной плотностью вероятностей поля  $f(\mathbf{R}, t)$  и его градиента  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$ , определяемой



усреднением индикаторной функции (48) по ансамблю реализаций, т.е. функцией

$$P(\mathbf{R}, t; f; \mathbf{p}) = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}) \rangle.$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров  $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$  с помощью приближённой (с точностью до незамкнутых линий) формулы:

$$N(t; f) = N_{\text{in}}(t; f) - N_{\text{out}}(t; f) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \kappa(t; \mathbf{R}; f) |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f), \quad (49)$$

где  $N_{\text{in}}(t; f)$  ( $N_{\text{out}}(t; f)$ ) — число контуров, для которых вектор  $\mathbf{p}$  направлен по внутренней (внешней) нормали,  $\kappa(t; \mathbf{R}; f)$  — кривизна линии уровня.

**3.2.1. Условия возникновения кластерных структур.** Обсудим теперь условия возникновения стохастического структурообразования для параметрически возбуждаемых случайных полей. Ясно, что для *положительного поля*  $f(\mathbf{R}, t)$  в общем случае условием кластеризации с вероятностью единица, т.е. почти для всех реализаций, является одновременная тенденция выполнения асимптотических равенств при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\langle S(t; f) \rangle \rightarrow 0, \quad \langle M(t; f) \rangle \rightarrow \int d\mathbf{R} \langle f(\mathbf{R}, t) \rangle.$$

Отсутствию структурообразования соответствует одновременная тенденция выполнения асимптотических равенств при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\langle S(t; f) \rangle \rightarrow \infty, \quad \langle M(t; f) \rangle \rightarrow \int d\mathbf{R} \langle f(\mathbf{R}, t) \rangle.$$

Для пространственно однородного поля  $f(\mathbf{R}, t)$  одноточечная плотность вероятностей  $P(\mathbf{R}, t; f)$  не зависит от  $\mathbf{R}$ , и тогда статистические средние всех выражений (без интегрирования по  $\mathbf{R}$ ) будут описывать удельные (приходящиеся на единицу площади) значения соответствующих величин.

Так, удельная средняя площадь  $\langle s_{\text{hom}}(t; f) \rangle$ , на которой случайное поле  $f(\mathbf{R}, t)$  превышает заданный уровень  $f$ , совпадает с вероятностью события в любой точке пространства  $f(\mathbf{R}, t) > f$ :

$$\langle s_{\text{hom}}(t; f) \rangle = \langle \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) \rangle = \mathcal{P}\{f(\mathbf{R}, t) > f\},$$

и средняя удельная площадь является геометрической интерпретацией вероятности события  $f(\mathbf{R}, t) > f$ , не зависящей, естественно, от точки  $\mathbf{R}$ . Следовательно, условия кластеризации для *однородного* случая сводятся к тенденции выполнения асимптотических равенств при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\langle s_{\text{hom}}(t; f) \rangle = \mathcal{P}\{f(\mathbf{r}, t) > f\} \rightarrow 0, \quad \langle m_{\text{hom}}(t; f) \rangle \rightarrow \langle f(t) \rangle,$$

тогда как отсутствию кластеризации соответствует тенденция выполнения асимптотических равенств при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\langle s_{\text{hom}}(t; f) \rangle = \mathcal{P}\{f(\mathbf{r}, t) > f\} \rightarrow 1, \quad \langle m_{\text{hom}}(t; f) \rangle \rightarrow \langle f(t) \rangle.$$

Таким образом, кластеризация в пространственно однородной задаче представляет собой явление (происходящее с вероятностью единица, т.е. почти для всех ре-

ализаций случайного положительного поля), порождённое редким событием, вероятность которого стремится к нулю.

В данном случае само наличие редких событий служит *спусковым механизмом*, который инициирует процесс структурообразования, а *структурообразование является свойством случайной среды*, т.е., по сути, является *законом природы* [21–24].

При этом характерное время образования кластерной структуры в пространстве определяется характером приведённых асимптотических выражений при больших временах. Это время теперь определяется не только статистическим ляпуновским характеристическим индексом  $\alpha$ , но и коэффициентом диффузии  $D_f$  в фазовом пространстве положительного поля  $f(\mathbf{r}, t)$ . Конечно, это время больше, чем характерное время убывания реализаций в каждой фиксированной точке пространства.

Для конкретных физических динамических систем задача о кластеризации физических полей сводится, таким образом, к вычислению стохастического ляпуновского индекса  $\alpha$  и коэффициента диффузии  $D_f$ , что, вообще говоря, является довольно громоздкой задачей для конкретных уравнений в частных производных.

При наличии кластеризации поле в большей части пространства просто отсутствует! Разумеется, приведённые условия наличия и отсутствия кластеризации поля  $f(\mathbf{R}, t)$  не имеют никакого отношения к параметрическому возрастанию во времени статистических характеристик типа моментных и корреляционных функций любого порядка.

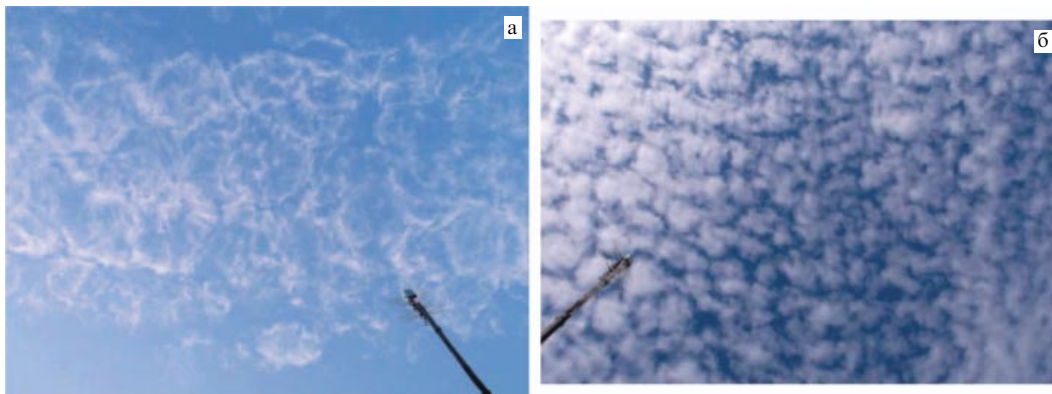
Приведённый критерий идеальной кластеризации (по аналогии с идеальной гидродинамикой) соответствует динамике образования кластеров для динамических систем, описываемых, вообще говоря, уравнениями в частных производных первого порядка (эйлерово представление). Эта идеальная структура образуется в виде очень тонкой ленты (в двумерном случае) или очень тонких трубок (в трёхмерном случае).

Отметим, что уравнения в частных производных первого порядка могут быть решены в общем случае методом характеристик. Это соответствует лагранжеву описанию динамических систем. При этом характеристические кривые, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, могут, разумеется, иметь различные особенности и даже сингулярности. И условия возникновения таких особенностей в лагранжевом описании не имеют прямой связи с явлением кластеризации в пространстве и во времени, т.е. в эйлеровом представлении.

Однако для реальных физических систем в дальнейшем начинает проявляться действие различных дополнительных факторов, связанных с генерацией пространственных производных случайного поля, которые *деформируют*, но *не ликвидируют* эту картину кластеризации. В частности, возможна ситуация, в которой соответствующая плотность вероятностей выходит на стационарный режим  $P(\mathbf{R}; f)$  при  $t \rightarrow \infty$ . В этом случае функционалы вида

$$\langle S(f) \rangle = \int d\mathbf{R} \int_f^\infty df' P(\mathbf{R}; f'),$$

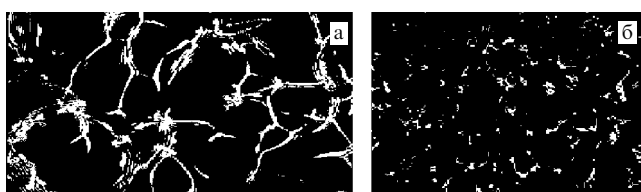
$$\langle M(f) \rangle = \int d\mathbf{R} \int_f^\infty df' f' P(\mathbf{R}; f')$$



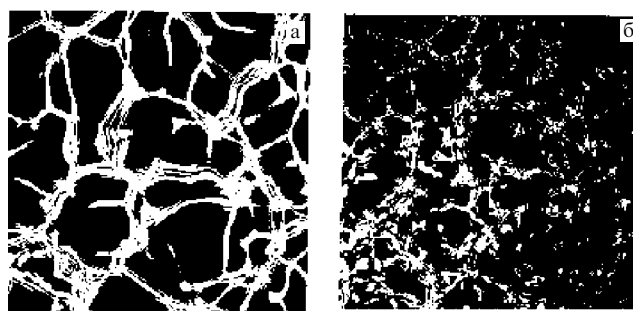
**Рис. 15.** Фотографии кластерной структуры облачного неба: (а) кластеризация, близкая к "идеальной", (б) "деформированная" кластеризация. Чёрные полосы в нижних частях фотографий являются элементами антенны на земной поверхности. Фотографии сделаны В.А. Довженко 15 июня и 2 августа 2013 г. в 21.00 на берегу Азовского моря.



**Рис. 16.** (а) Озеро кипящей лавы в кратере вулкана Ньярагонго в районе Великих Африканских озёр. (б) Кратер вулкана Килауэа в Гавайском вулканическом национальном парке. (Приведённые изображения можно найти на сайтах <http://bigpicture.ru/?p=128340>, <http://pacificislandparks.com/2010/01/20/more-amazing-lava-lake-photos/>.)



**Рис. 17.** Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (в лабораторных условиях) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б).



**Рис. 18.** Результаты численного моделирования с помощью системы фазовых экранов (18): поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б).

уже не описывают дальнейшую деформацию кластерной картины. И необходимо изучение временной эволюции функционалов, связанных с пространственными производными поля  $f(\mathbf{R}, t)$ , типа общей длины контуров и числом контуров.

В качестве примера "идеальной" и "деформируемой" кластеризаций в природе приведём фотографии кластерной структуры облачного неба<sup>1</sup> (рис. 15) и озера лавы в кратерах вулканов (рис. 16). При этом отметим, что статистической теории описания динамики вулканиче-

ской лавы, насколько нам известно, в настоящее время вообще не существует. Подобный вид имеют структуры (рис. 17, 18), связанные с параболическим уравнением Леонтовича (Шрёдингера) (15) (см., например, монографии [17–20]).

Прежде всего отметим, что при распространении плоской волны в случайной среде в приближении дельта-коррелированности в продольном направлении слу-

<sup>1</sup> При этом кластеризация частиц в лагранжевом описании не осуществляется!

чайного поля  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ , корреляционная функция которого  $B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle$  имеет вид

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \delta(x), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}),$$

из уравнения (15) для среднего поля  $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$  и функции когерентности второго порядка

$$\Gamma_2(x, \boldsymbol{\rho}) = \left\langle u \left( x, \mathbf{R} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho} \right) u^* \left( x, \mathbf{R} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho} \right) \right\rangle$$

следуют выражения вида

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0 \exp \left( -\frac{\gamma x}{2} \right),$$

$$\Gamma_2(x, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2 \exp \left( -\frac{k^2 x D(\boldsymbol{\rho})}{4} \right),$$

не зависящие от дифракции волнового поля, где  $\gamma = (k^2/4)A(0)$  — коэффициент экстинкции, а функция  $D(\boldsymbol{\rho}) = A(0) - A(\boldsymbol{\rho})$  связана со структурной функцией случайного поля  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ . При этом в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, появляется называемый *радиусом когерентности поля*  $u(x, \mathbf{R})$  статистический масштаб  $\rho_{\text{cog}}$ , определяемый из условия  $(1/4)k^2 x D(\rho_{\text{cog}}) = 1$ . Радиус когерентности зависит от длины волны, расстояния, пройденного ею, и статистических параметров среды.

Отметим, что полное решение задачи вычисления статистических характеристик решения уравнения (15) при  $x \rightarrow \infty$  было найдено ещё в 1977 г. в работе [45] (см. также [17–20, 46]) с помощью представления решения уравнения (15) в виде континуального интеграла.

Очевидно, что для малых расстояний, проходимых плоской падающей волной, распределение вероятностей интенсивности волнового поля имеет логнормальный характер и в этом случае наступает стохастическое структурообразование (кластеризация).

При увеличении расстояния необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При ещё больших расстояниях, проходимых волной, статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта пространственная область называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

В области сильных флуктуаций интенсивности статистические характеристики интенсивности волнового поля перестают зависеть от расстояния и принимают вид ( $u_0 = 1$ )

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n!, \quad P(x, I) = \exp(-I).$$

В работе [45] была вычислена пространственная корреляционная функция интенсивности волнового поля  $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$  при  $x \rightarrow \infty$  ( $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ ):

$$B_I(x, \boldsymbol{\rho}) = \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle - 1 = |\Gamma_2(x, \boldsymbol{\rho})|^2 = \exp \left( -\frac{k^2 x}{2} D(\boldsymbol{\rho}) \right), \quad (50)$$

также не зависящая от дифракции волнового поля. Теперь в этой задаче, помимо пространственного масшта-

ба  $\rho_{\text{cog}}$ , появляется второй характерный пространственный масштаб:  $r_0 = x/(k\rho_{\text{cog}})$ . Однако многочисленные попытки экспериментаторов, продолжающиеся вплоть до настоящего времени, увязать эти масштабы с приведёнными на рис. 17, 18 изображениями, не увенчались успехом. И понятно почему! Кластеризация интенсивности волнового поля, конечно, обусловлена дифракцией, что, однако, совершенно не отражается на виде её корреляционной функции (50).

С точки зрения статистической топографии, средняя удельная площадь областей, внутри которых  $I(x, \mathbf{R}) > I$ , и средняя удельная мощность, сосредоточенная в них, являются постоянными и при  $x \rightarrow \infty$  не описывают поведения интенсивности волнового поля в отдельных реализациях. Кроме того, в этом случае не информативен и переход к статистически эквивалентному случайному процессу. Объяснить структуру волнового поля в отдельных реализациях в этом случае удалось только двадцать лет спустя, в 1997 г., в работе [47] (см. также [17–20]), исходя из анализа таких, описываемых функционалами типа (47) и (49) величин, как удельная средняя длина контуров и удельное среднее число контуров интенсивности волнового поля, связанных с пространственными производными интенсивности волнового поля. Эти функции продолжают возрастать с увеличением расстояния и в области сильных флуктуаций интенсивности, следовательно, происходит дробление контуров, что и наблюдалось как в лабораторных экспериментах, так и при численном моделировании.

**3.2.2. Статистическая топография логнормальных случайных полей.** При анализе одноточечных статистических характеристик пространственно однородной задачи в общем случае целесообразно принимать во внимание, что случайное поле  $f(\mathbf{R}, t)$  статистически эквивалентно некоему случайному процессу  $f(t)$  с теми же статистическими характеристиками.

Если известна одноточечная плотность вероятностей случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$  (42), то можно получить и общую информацию о пространственной структуре случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$ . В частности, такие функционалы случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$ , как общая средняя величина объёма (в трёхмерном случае) или площади (в двумерном случае) области, в которой  $f(\mathbf{r}, t) > f$ , и общая средняя "масса" поля, заключённая в этой области, описываются как

$$\langle V(t, f) \rangle = \int d\mathbf{r} \int_f^\infty df' P(\mathbf{r}, t; f'),$$

$$\langle M(t, f) \rangle = \int d\mathbf{r} \int_f^\infty df' f' P(\mathbf{r}, t; f').$$

Значения этих функционалов не зависят от диффузии в  $\mathbf{r}$ -пространстве (коэффициента  $D_0$ ), и для распределения вероятностей (42) получаем выражения

$$\langle V(t, f) \rangle = \int d\mathbf{r} \Pr \left\{ \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left[ \frac{f_0(\mathbf{r})}{f} \exp(-\alpha t) \right] \right\}, \quad (51)$$

$$\langle M(t, f) \rangle = \exp[(D - \alpha)t] \times \int d\mathbf{r} f_0(\mathbf{r}) \Pr \left\{ \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left( \frac{f_0(\mathbf{r})}{f} \exp[(2D - \alpha)t] \right) \right\},$$

где интеграл вероятностей  $\Pr(z)$  определяется равенством (36).

Учитывая теперь асимптотики функции  $\text{Pr}(z)$  (37), можно изучить эволюцию со временем функционалов (51). А именно, асимптотика среднего объёма при  $t \rightarrow \infty$  убывает во времени при  $\alpha > 0$  по закону

$$\langle V(t, f) \rangle \approx \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi f^{\alpha/D} t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{4D}\right) \int d\mathbf{r} \sqrt{f_0^{\alpha/D}(\mathbf{r})}.$$

При  $\alpha < 0$  средний объём при  $t \rightarrow \infty$  занимает всё пространство.

Для полной средней "массы" получаем асимптотику при  $t \rightarrow \infty$  (в наиболее интересном случае — при  $\alpha < 2D$ )

$$\langle M(t, f) \rangle \approx \exp[(D - \alpha)t] \int d\mathbf{r} f_0(\mathbf{r}) \times \left\{ 1 - \frac{1}{2D - \alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{f}{f_0(\mathbf{r})}\right)^{(2D - \alpha)/D} \exp\left[-\frac{(2D - \alpha)^2 t}{4}\right] \right\}.$$

Следовательно, при  $\alpha > 0$  в кластерах в пределе  $t \rightarrow \infty$  содержится вся средняя "масса".

Для однородных начальных условий соответствующие выражения без интегрирования по  $\mathbf{r}$  описывают удельные значения объёма больших выбросов и их общей "массы", приходящиеся на единицу объёма, т.е.

$$\begin{aligned} \langle v_{\text{hom}}(t, f) \rangle &= \langle \theta(f(\mathbf{r}, t) - f) \rangle = \mathcal{P}\{f(\mathbf{r}, t) > f\} = \\ &= \text{Pr} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left[ \frac{f_0}{f} \exp(-\alpha t) \right] \right\}, \\ \langle m_{\text{hom}}(t, f) \rangle &= f_0 \exp[(D - \alpha)t] \times \\ &\times \text{Pr} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left( \frac{f_0}{f} \exp[(2D - \alpha)t] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Если выбрать уровень сечения  $f > f_0$ , то в начальный момент времени  $\langle v_{\text{hom}}(0, f) \rangle = 0$  и  $\langle m_{\text{hom}}(0, f) \rangle = 0$ . Далее возникают пространственные возмущения случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$ , и при  $t \rightarrow \infty$  получаем асимптотические выражения ( $2D > \alpha$ ):

$$\langle v_{\text{hom}}(t, f) \rangle = \mathcal{P}\{f(\mathbf{r}, t) > f\} \approx \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{f_0}{f}\right)^{\alpha/D} \exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{4D}\right), & \alpha > 0, \\ 1 - \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{|\alpha|/D} \exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{4D}\right), & \alpha < 0, \end{cases} \quad (53)$$

$$\langle m_{\text{hom}}(t, f) \rangle \approx f_0 \exp[(D - \alpha)t] \times \left\{ 1 - \frac{1}{2D - \alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{(2D - \alpha)/D} \exp\left[-\frac{(2D - \alpha)^2 t}{4D}\right] \right\}. \quad (54)$$

Таким образом, при  $\alpha > 0$  удельный общий объём стремится к нулю, а удельная общая "масса", заключённая в этом объёме, стремится к средней "массе" всего пространства. Это соответствует критерию структурообразования с вероятностью единица для "идеальной кластеризации" рассматриваемого поля  $f(\mathbf{r}, t)$ . В этом случае случайное поле  $f(\mathbf{r}, t)$  практически отсутствует в большей части пространства. Причём характерное время убывания поля в каждой фиксированной точке

пространства  $\alpha t \sim 1$ , а характерное время образования кластерной структуры поля  $\alpha t \sim \max\{4\xi, 4\xi/(2\xi - 1)^2\}$ , где  $\xi = D/\alpha$ .

В случае  $\alpha < 0$  кластеризация отсутствует, и происходит лишь общее усиление случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$  во всём пространстве. Таким образом, *хаос тогда остаётся хаосом!* Происходит лишь кластеризация нулей поля  $f(\mathbf{r}, t)$ .

Отметим, что имеет место следующая теорема.

*Консервативное положительное параметрически возбуждаемое случайное логнормальное поле в статистически однородной задаче всегда кластеризуется с вероятностью единица, т.е. почти для всех реализаций этого поля.*

В самом деле, для этого случая  $f(\mathbf{r}, t) = \exp(\ln f(\mathbf{r}, t))$ , следовательно,

$$\langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \exp(\ln f(\mathbf{r}, t)) \rangle = \exp\left(\langle \ln f(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{1}{2} \sigma_{\ln f(\mathbf{r}, t)}^2\right),$$

где  $\sigma_{\ln f(\mathbf{r}, t)}^2$  — дисперсия случайного поля  $\ln f(\mathbf{r}, t)$ . Учитывая теперь, что в силу консервативности

$$\langle \ln f(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{1}{2} \sigma_{\ln f(\mathbf{r}, t)}^2 = \ln f_0,$$

получаем для кривой типичной реализации

$$f^*(\mathbf{r}, t) = \exp(\langle \ln f(\mathbf{r}, t) \rangle) = f_0 \exp(-\alpha t),$$

где ляпуновский характеристический параметр

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \sigma_{\ln f(\mathbf{r}, t)}^2 > 0,$$

и задача состоит в его вычислении исходя из соответствующего динамического уравнения. При этом, как указывалось ранее, для консервативного поля  $f(\mathbf{r}, t)$  параметр  $\alpha = D$  (см. уравнение (43)), следовательно, характерное время образования кластерной структуры  $\alpha t \sim 4$ , что в четыре раза превышает характерное время убывания поля почти в каждой точке пространства.

Так, для кластеризации поля плотности мы имеем динамическое уравнение (19).

В случае комплексного параболического уравнения (15) мы имеем уравнение для интенсивности волнового поля — уравнение непрерывности (16) и, следовательно, вводя уровень амплитуды по формуле  $\chi(\mathbf{R}, x) = \ln A(\mathbf{R}, x)$ , получим для плоской волны ляпуновскую экспоненту в виде

$$I^*(\mathbf{R}, x) = I_0 \exp(-2\alpha x),$$

где параметр

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sigma_{\chi(\mathbf{R}, x)}^2,$$

$\sigma_{\chi(\mathbf{R}, x)}^2$  — дисперсия уровня амплитуды, вычисленная в рамках первого приближения метода плавных возмущений С.М. Рытова (см., например, [17–20]).

В качестве приложения развитой теории рассмотрим конкретные физические стохастические явления переноса в случайных средах, порождённые параметрическим воздействием среды на соответствующую динамическую систему.

## 4. Стохастические явления переноса в случайном поле скоростей

### 4.1. Кластеризация поля плотности в случайном поле скоростей

Стохастическое структурообразование в пространственно однородной статистической задаче о диффузии поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  в случайном поле скоростей описывается уравнением (19). В этом случае одноточечная плотность вероятностей поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , не зависящая от пространственной координаты  $\mathbf{r}$ , описывается уравнением (см., например, [17–20])

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho), \quad P(0; \rho) = \delta(\rho - \rho_0), \quad (55)$$

где коэффициент диффузии в  $\rho$ -пространстве,  $D_\rho = D^P$ , определяется равенством (27). Уравнение (55) совпадает с уравнением (44) при

$$\alpha = D = D_\rho = D^P,$$

где величина  $D^P$  определяется потенциальной составляющей спектральной компоненты поля скоростей. Следовательно, одноточечная плотность вероятностей поля плотности логнормальна с плотностью вероятностей и соответствующей интегральной функцией распределения:

$$P(t; \rho) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\ln^2[\rho \exp(\tau)/\rho_0]}{4\tau}\right\}, \quad (56)$$

$$F(t; \rho) = \Pr\left\{\frac{\ln[\rho \exp(\tau)/\rho_0]}{2\sqrt{\tau}}\right\},$$

где параметр  $\tau = D_\rho t$ .

Задача для одноточечных характеристик поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , как указывалось ранее, статистически эквивалентна анализу случайного процесса, при этом все моментные функции как при  $n > 0$ , так и  $n < 0$  экспоненциально возрастают во времени:

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0^n \exp[n(n-1)\tau], \quad (57)$$

а кривая типичной реализации поля плотности, совпадающая с ляпуновской экспонентой, в любой фиксированной точке пространства экспоненциально убывает во времени:

$$\rho^*(t) = \exp(\langle \ln \rho(\mathbf{r}, t) \rangle) = \rho_0 \exp(-\tau),$$

что свидетельствует об убывании поля плотности с вероятностью единица (т.е. почти во всех реализациях поля плотности) в каждой фиксированной точке пространства в произвольных дивергентных потоках. Причём характерное время убывания поля плотности  $\tau \sim 1$ . Отметим, что уравнение для плотности вероятностей (55) соответствует эйлеровому описанию поля плотности. Напомним, что в лагранжевом описании поля плотности система характеристических кривых (частицы) (5) не обязательно кластеризуется (см. раздел 2.2).

Формирование статистики поля плотности в любой фиксированной точке пространства (моментных и корреляционных функций) происходит за счёт флуктуаций

поля плотности вокруг кривой типичной реализации. Таким образом, в случае сжимаемого потока (в дивергентном поле скоростей) поле плотности всегда кластеризуется с вероятностью единица. При этом средняя удельная площадь (объём) области, внутри которой  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ , выражается в виде

$$\langle s_{\text{hom}}(t, \rho) \rangle = \int_\rho^\infty d\rho' P(t; \rho') = \mathcal{P}\{\rho(\mathbf{r}, t) > \rho\} = \Pr\left\{\frac{\ln[\rho_0 \exp(-\tau)/\rho]}{\sqrt{2\tau}}\right\}, \quad (58)$$

а удельная средняя "масса" примеси, сосредоточенная в данной области, описывается как

$$\frac{\langle m_{\text{hom}}(t, \rho) \rangle_{\text{hom}}}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \int_\rho^\infty \rho' d\rho' P(t; \rho') = \Pr\left\{\frac{\ln[\rho_0 \exp(\tau)/\rho]}{\sqrt{2\tau}}\right\}. \quad (59)$$

Из (58), (59) следует, что при  $\tau \gg 1$  средняя удельная площадь (объём) убывает по закону

$$\langle s_{\text{hom}}(t, \rho) \rangle = \mathcal{P}\{\rho(\mathbf{r}, t) > \rho\} \approx \sqrt{\frac{\rho_0}{\pi\rho\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right), \quad (60)$$

тогда как внутри этой области собирается практически вся "масса" примеси,

$$\frac{\langle m_{\text{hom}}(t, \rho) \rangle}{\rho_0} \approx 1 - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\rho_0\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right), \quad (61)$$

что и соответствует физическому явлению кластеризации поля плотности в случайном поле скоростей. Как видно из формул (60) и (61), характерное время образования кластерной структуры поля примеси в четыре раза больше характерного времени убывания поля плотности в каждой фиксированной точке пространства ( $\tau \sim 4$ ).

Отметим, что даже для несжимаемой жидкости в гидродинамических потоках поле плотности будет кластеризоваться для "плавающей" примеси, при учёте конечной инерционности поля примеси и для многофазных потоков жидкости, т.е. всегда, когда в поле скоростей примеси, отличном от поля скоростей самой жидкости, возникает потенциальная составляющая спектра. Такой случай соответствует, например, облачному небу (см. рис. 15). Причём природа стохастического характера воздушных масс совершенно не существенна — это может быть как развитая конвекция, так и атмосферная турбулентность. Исходя из времени фотосъёмки, представленной на рис. 15, мы имеем второй случай. При этом кластеризация частиц в лагранжевом описании не осуществляется!

Таким образом, для уравнения неразрывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (62)$$

описывающего поле плотности пассивной скалярной примеси  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , движущейся в случайном гидродинамическом потоке со скоростью  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и имеющей потенциальную составляющую, всегда осуществляется кластеризация поля примеси с вероятностью единица, вне



зависимости от того, каким именно динамическим уравнением описывается поле скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .

Так, например, в случае малоинерционной примеси  $\rho(\mathbf{r}, t)$  поле скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  можно описать феноменологическим уравнением (см. работу [48])

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda[\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)], \quad (63)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — поле скорости самого гидродинамического потока, а параметр  $\tau = 1/\lambda$  — известное стоксово время, зависящее от размера частиц примеси и молекулярной вязкости. Уравнение (63) является уравнением *простой волны* с линейным трением со случайной силой, связанной с гидродинамическим потоком. Особенность этого уравнения заключается в том, что оно справедливо только в асимптотическом пределе  $\lambda \rightarrow \infty$ . Это означает, что параметр  $\lambda\tau_0 \gg 1$ , где  $\tau_0$  — временной радиус корреляции для гидродинамического поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , следовательно, для статистического описания задачи неприменимо приближение дельта-коррелированности поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  во времени и необходимо учитывать конечность временного радиуса корреляции  $\tau_0$  для поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

В предположении, что дисперсия случайного поля скоростей  $\sigma_u^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  достаточно мала при большом значении параметра  $\lambda$  (малая инерционность частиц), можно линеаризовать уравнение (63) относительно функции  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и тем самым перейти к более простому векторному уравнению:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \\ = -\left(\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \lambda[\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned}$$

В этом приближении плотность вероятности поля плотности описывается уравнением типа (43):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; \rho) = \left(D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2\right) P(\mathbf{r}, t; \rho), \quad (64) \\ P(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho), \end{aligned}$$

где  $D_0$  и  $D_\rho$  — коэффициенты диффузии,

$$D_0 = \frac{1}{d} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{d} \tau_v \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (65)$$

$$D_\rho = \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = \tau_{\text{div } \mathbf{v}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle,$$

$\tau_v$  и  $\tau_{\text{div } \mathbf{v}}$  — временные радиусы корреляции для случайных полей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и  $\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r}$ .

Для несжимаемого потока жидкости в диффузионном приближении коэффициенты диффузии (65) описываются выражениями [48]

$$\begin{aligned} D_0 = \frac{1}{d} \tau_v \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{d} \tau_0 B_{ii}(0, 0) = \frac{d-1}{d} \tau_0 \int d\mathbf{k} E(k, 0), \quad (66) \\ D_\rho = \tau_{\text{div } \mathbf{v}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{4}{\lambda} \frac{d^2 - 1}{d(d+2)} D_1 D_2(\lambda), \end{aligned}$$

где коэффициент

$$D_1 = -\frac{\tau_0}{d-1} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

не зависит от параметра  $\lambda$ . Коэффициент  $D_2(\lambda)$  при  $\lambda\tau_0 \gg 1$  определяется выражением

$$D_2(\lambda) = -\frac{1}{\lambda(d-1)} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Таким образом, мы видим, что в уравнении (64) коэффициент  $D_\rho \sim \sigma_u^4$ . И вихревая компонента поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  сначала генерирует вихревую компоненту поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  прямым линейным механизмом без участия адвекции, а уже затем вихревая компонента поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  генерирует дивергентную компоненту поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  через механизм адвекции.

Отметим, что поле скоростей примеси  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в гидродинамическом потоке  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  для малоинерционных частиц в присутствии сил плавучести и тяжести описывается уравнением (см, например, [49])

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda[\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] + \mathbf{g} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_p}\right), \quad (67)$$

где  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести,  $\rho_p$  и  $\rho_0$  — плотности частиц примеси и среды соответственно.

Скорость оседания или всплывания примеси  $\mathbf{v}$ , направленная, как правило, по вертикали, определяется балансом сил плавучести и сил вязкого трения движущейся примеси и описывается формулой

$$\frac{\mathbf{g}}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_p}\right) = \mathbf{v}.$$

Полагая теперь  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — флуктуации поля скоростей примеси относительно  $\mathbf{v}$ , для системы уравнений (62) и (67) одноточечная плотность вероятностей  $P(\mathbf{r}, t; \rho)$  описывается уравнением (64), где теперь коэффициент диффузии  $D_\rho(\mathbf{v})$ , зависящий от скорости оседания  $\mathbf{v}$ , определяется выражением [50]

$$D_\rho(\mathbf{v}) = \frac{4(d+1)}{d(d+2)(d-1)\lambda^2} \frac{\partial^2 B_{\alpha\alpha}^{(u)}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \mathbf{r}^2} \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta\beta}^{(u)}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial \mathbf{r}^2}. \quad (68)$$

Следовательно, наличие оседания примеси приводит к уменьшению коэффициента диффузии  $D_\rho(\mathbf{v})$ , т.е. к увеличению времени кластеризации. Однако кластеризация таких оседающих малоинерционных частиц объясняет многие природные явления, например пятнистую структуру радиоактивных выпадений после Чернобыльской катастрофы (см., например, работу [51]). Также хорошо известно о пятнистой структуре выпадения песка в Индийском океане после песчаных бурь в пустынях Африки.

Отметим, что в обзоре [52], посвящённом крупномасштабной структуре Вселенной, на уравнение неразрывности (62) "навешивается" векторное уравнение простой волны (63) без правой части, но в предположении потенциальности поля скорости  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ . Случайность в этой задаче предполагается обусловленной наличием флуктуаций начальных условий. Разумеется, в этом случае осуществляется кластеризация поля примеси с вероятностью единица почти в каждой её реализации. Однако сопоставление этого факта с наблюдаемым распределением галактик никак нельзя отнести к подтверждению истинности использованной модели поля скорости на основе уравнения простой волны.

Подчеркнём, что факт кластеризации поля примеси с вероятностью единица осуществляется для любой модели поля скорости (линейной или нелинейной) при наличии у поля скоростей примеси потенциальной составляющей.

## 4.2. Вероятностное описание магнитного поля и его энергии в случайном поле скоростей

**4.2.1. Вероятностное описание магнитного поля.** Рассмотрим теперь вероятностное описание магнитного поля на основе динамического уравнения (20) в статистически однородном случае. Как и для поля плотности, случайную составляющую поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  будем полагать дивергентным ( $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ) случайным гауссовым полем, однородным и изотропным в пространстве и стационарным дельта-коррелированным во времени.

В этом случае одноточечная плотность вероятностей векторного магнитного поля  $P(t; \mathbf{H})$ , не зависящая от пространственной переменной  $\mathbf{r}$ , описывается уравнением [17–20, 25, 39]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{H}) = \left\{ D_1 \frac{\partial^2}{\partial H_k \partial H_l} H_l H_k + D_2 \frac{\partial^2}{\partial H_l \partial H_l} H_k^2 \right\} P(t; \mathbf{H}), \quad (69)$$

где  $D_1, D_2$  — коэффициенты диффузии в  $\{\mathbf{H}\}$ -пространстве,

$$D_1 = \frac{(d^2 - 2)D^p - 2D^s}{d(d+2)}, \quad D_2 = \frac{(d+1)D^s + D^p}{d(d+2)}.$$

Из уравнения (69) следует динамика средней энергии  $\langle E(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  во времени и выражение для корреляции компонент магнитного поля  $\langle W_{ij}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle H_i(\mathbf{r}, t) H_j(\mathbf{r}, t) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle E(\mathbf{r}, t) \rangle &= E_0 \exp \left[ 2 \frac{d-1}{d} (D^s + D^p) t \right], \\ \frac{\langle W_{ij}(\mathbf{r}, t) \rangle}{\langle E(\mathbf{r}, t) \rangle} &= \frac{1}{d} \delta_{ij} + \left( \frac{W_{ij}(0)}{E_0} - \frac{1}{d} \delta_{ij} \right) \times \\ &\times \exp \left[ -2 \frac{(d+1)D^s + D^p}{d+2} t \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, средняя энергия магнитного поля экспоненциально возрастает во времени, при этом изотропизация магнитного поля также происходит экспоненциальным образом. Отметим, что в соответствующие экспоненты спектральные составляющие поля скоростей входят аддитивным образом. Очевидно, что это обстоятельство сохраняется и для любых других корреляций магнитного поля и его энергии.

**4.2.2. Вероятностное описание энергии магнитного поля.** Плотность вероятностей энергии магнитного поля для пространственно однородной задачи  $P(t; E)$  определяется согласно равенству

$$P(t; E) = \left\langle \delta(E(\mathbf{r}, t) - E) \right\rangle_{\mathbf{u}} = \left\langle \delta(\mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) - E) \right\rangle_{\mathbf{H}}.$$

В результате получаем уравнение, совпадающее с уравнением (44) [17–20, 25, 39] с параметрами

$$\alpha = 2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s), \quad D = 4(d-1) \frac{(d+1)D^p + D^s}{d(d+2)}.$$

Параметр  $\alpha$  может быть как отличным от нуля (положительным или отрицательным), так и равным нулю (критический случай).

Для пространственно однородного начального распределения энергии плотность вероятностей описывается формулой (34).

Таким образом, в этом случае одноточечные статистические характеристики энергии  $E(\mathbf{r}, t)/E_0$  статистически эквивалентны характеристикам случайного процесса  $E(t)$  с плотностью вероятностей (34).

Характерной особенностью распределения (34) является появление длинного пологого хвоста при  $Dt \gg 1$ , означающего усиление роли больших выбросов процесса  $E(t)$  в формировании одновременной статистики. Для этого распределения все моменты энергии магнитного поля

$$\begin{aligned} \langle E^n(t) \rangle &= E_0^n \exp \left[ -2n \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t + \right. \\ &\left. + 4n^2(d-1) \frac{(d+1)D^p + D^s}{d(d+2)} t \right] \end{aligned}$$

экспоненциально возрастают со временем как при  $n > 0$ , так и при  $n < 0$ , в частности, при  $n = 1$  средняя удельная энергия

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp \left[ \frac{2(d-1)}{d} (D^p + D^s) t \right], \quad (70)$$

а величина

$$\left\langle \ln \frac{E(t)}{E_0} \right\rangle = -\alpha t = -2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t.$$

Следовательно, параметр  $\alpha$  является *ляпуновским характеристическим показателем*. При этом кривая типичной реализации для случайного процесса  $E(t)$ , определяющая поведение энергии магнитного поля в конкретных реализациях, в любой фиксированной точке пространства является экспоненциальной,

$$E^*(t) = E_0 \exp(-\alpha t) = E_0 \exp \left[ -2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t \right],$$

возрастающей или убывающей во времени. Так, при  $\alpha > 0$  ( $D^p > D^s$ ) кривая типичной реализации экспоненциально убывает в каждой точке пространства, что свидетельствует о кластерной структуре магнитного поля в её конкретных реализациях, а возрастание моментов энергии магнитного поля в этом случае определяется редкими, но большими выбросами энергии относительно кривой типичной реализации.

При  $\alpha < 0$  ( $D^p < D^s$ ) кривая типичной реализации экспоненциально возрастает во времени, что свидетельствует об общем увеличении магнитной энергии в каждой точке пространства. Кластеризация энергии магнитного поля тогда не осуществляется. Отметим, что для несжимаемого магнитогидродинамического потока ( $D^p = 0$ ) реализуется именно этот случай, следовательно, для несжимаемого случая структурообразования не происходит.

Соответствующие асимптотические выражения при однородном начальном условии для удельных значений объёма больших выбросов и их общей энергии, приходящиеся на единицу объёма, имеют вид выражений (53) и (54) с заменой  $f \rightarrow E$ .

Это означает, что при  $\alpha > 0$  ( $D^p > D^s$ ) удельный общий объём стремится к нулю, а удельная общая энергия, заключённая в этом объёме, совпадает со средней энергией во всём пространстве. Последнее свидетельствует о кластеризации энергии магнитного поля с вероятностью единица, т.е. почти во всех реализациях магнитного поля. Следовательно, в большей части пространства магнитное поле просто отсутствует.

В случае, когда  $\alpha < 0$  ( $D^p < D^s$ ), явление кластеризации не осуществляется, происходит лишь общее возрастание энергии магнитного поля во всём пространстве. Отметим, что в этом случае происходит кластеризация обратной величины  $1/E$ , т.е. появляются кластеры компактных областей с вытесненным магнитным полем (магнитных нулей).

Ранее мы отмечали, что параметры  $D^p$  и  $D^s$ , характеризующие статистику случайного поля скоростей, входят аддитивным образом во все статистические моментные и корреляционные функции энергии магнитного поля. Это, конечно, является следствием линейности уравнений (14) и (20). Однако данный факт означает, что все основные (функциональные) закономерности в таком статистическом описании *не различают влияния соленоидальной и потенциальной компонент* случайного поля скоростей. То есть все получаемые закономерности для упомянутых статистических величин имеют одинаковую структуру как для несжимаемого ( $D^p = 0$ ), так и для чисто потенциального ( $D^s = 0$ ) потоков. Тем не менее, поскольку для несжимаемого потока кластеризация отсутствует, а для потенциального потока, наоборот, осуществляется, абсолютно ясно, что упомянутые статистические характеристики *не содержат никакой информации о стохастическом структурообразовании в отдельных реализациях энергии магнитного поля, а именно о кластеризации*.

Кроме того, исходное уравнение индукции (14) справедливо в рамках применимости кинематического приближения. При наличии кластеризации, когда в большей части пространства магнитное поле отсутствует, естественно, что его последствие на поле скоростей не существенно. Напротив, в отсутствие кластеризации, когда генерация магнитного поля происходит во всём пространстве, кинематическое приближение может быть справедливым лишь на достаточно малом временном интервале, на котором обсуждать роль динамического коэффициента диффузии в формировании статистики энергии магнитного поля, на наш взгляд, просто несерьёзно.

**4.2.3. Критический случай  $\alpha = 0$  ( $D^p = D^s$ ).** Этот случай можно рассматривать как *псевдоравновесный*, по аналогии со случаем равновесного теплового шума [53, 54]. При  $\alpha = 0$  одноточечная плотность вероятностей принимает вид

$$P(t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \left[ -\frac{\ln^2(E/E_0)}{4Dt} \right].$$

Случайные процессы  $E(t)$  и  $1/E(t)$  статистически эквивалентны. Удельный средний объём при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к половине общего объёма, а удельная средняя энергия — к полной средней энергии.

Таким образом, в случае  $\alpha = 0$  ( $D^p = D^s$ ) кластеризация не осуществляется в рамках уравнения (44). Следует отметить, что этот результат не представляется удовле-

творительным, так как само уравнение (44) является приближённым, полученным при предположении дельта-коррелированности во времени случайного поля скоростей.

Учёт конечности временного радиуса корреляции позволяет дать однозначный ответ о наличии или отсутствии физического явления *кластеризации*. Результаты соответствующего расчёта показали, что с учётом конечности временного радиуса корреляции поля скорости кластеризация осуществляется с вероятностью единица [54].

Аналогичная ситуация имеет место и для случайных акустических волн в отсутствие их затухания.

Так, случайное акустическое гауссово поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , статистически однородное и изотропное в пространстве и стационарное во времени, описывается корреляционным и спектральным тензорами ( $\tau = t - t'$ ):

$$\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \sigma_u^2 B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) = \sigma_u^2 \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \tau),$$

где  $\sigma_u^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  — дисперсия поля скоростей, а функция

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \tau) = \exp(-\lambda(k)\tau) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(k)\tau),$$

где  $\omega(k) = ck$  — дисперсионная кривая для акустических волн,  $c$  — скорость звука.

Экспоненциально затухающий член связан с диссипативными факторами уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики и  $\lambda(k) = \lambda_p k^2$ .

В этом случае спектральный тензор поля скорости содержит только потенциальную компоненту  $E_{ij}(\mathbf{k}) = E(k)k_i k_j / k^2$ . И так как временной интеграл при  $\lambda_p \ll cl_0$  (где  $l_0$  — пространственный радиус корреляции поля скоростей) имеет асимптотику

$$\int_0^\infty dt f(k, t) = \frac{\lambda_p}{c^2},$$

при наличии малого поглощения кластеризация энергии магнитного поля осуществляется с вероятностью единица (т.е. почти во всех реализациях этой энергии).

При отсутствии затухания диффузионный коэффициент в уравнении (44) обращается в нуль и мы не имеем никакой информации о наличии или отсутствии *кластеризации*. В общем случае, однако, при отсутствии затухания имеет место равенство

$$\int_0^\infty dt \cos(\omega(k)t) = \pi \delta(\omega(k)),$$

благодаря которому возникают резонансы между различными гармониками акустического волнового поля в высших приближениях. Это позволяет установить во втором приближении функционального метода последовательных приближений (после громоздких вычислений), что кластеризация энергии магнитного поля осуществляется с вероятностью единица (т.е. почти во всех реализациях энергии) и вычислить характерное время установления кластеризации  $t \sim 1/\alpha_2$ , где ляпуновский характеристический параметр [54]

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_u^2}{c^2} \int d\mathbf{k} k^2 E(k) \left( \frac{4}{5} \lambda_p + 76\pi^2 \frac{\sigma_u^2}{c} k^2 E(k) \right).$$

Отметим, что в равновесном тепловом поле скоростей кластеризация энергии магнитного поля не осуществляется.

Также отметим, что аналогичный расчёт для поля плотности пассивной примеси в случайных волновых полях показал наличие её кластеризации с вероятностью единица [55].

## 5. Модель стохастического поля скоростей, позволяющая получить аналитическое решение задач переноса

Рассмотрим простейшее модельное поле скоростей вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t) f(\mathbf{kr}),$$

где  $\mathbf{v}(t)$  — гауссов векторный случайный процесс *белого шума*,  $f(\mathbf{kr})$  — периодическая функция. Выбирая ось  $x$  в направлении вектора  $\mathbf{k}$ , видим, что в рамках этой модели поле скорости зависит от одной пространственной переменной, т.е.  $f(\mathbf{kr}) = f(kx)$ . Отметим, что модель поля скорости вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t) \sin(2k\mathbf{r}), \quad (71)$$

впервые предложенная в работе [56], позволила получить аналитическое решение как уравнения непрерывности (19) для скалярного поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , так и решение уравнения (20) для векторного магнитного поля, а следовательно, дала возможность проследить возникновение и эволюцию кластеризации этих полей в отдельных реализациях случайного поля скорости. Отметим, что такой вид функции  $f(\mathbf{kr})$ , соответствующий первому члену ряда разложения функции  $f(\mathbf{kr})$  по гармоническим составляющим, обычно используется при численном моделировании задачи.

При численном моделировании различных задач использовалась модель гауссова векторного случайного процесса  $\mathbf{v}(t)$ , дельта-коррелированного во времени, с параметрами

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = 0, \quad \langle v_i(t) v_j(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta_{ij} \tau_0 \delta(t - t'), \quad (72)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия каждой компоненты скорости,  $\tau_0$  — её временной радиус корреляции. При этом мы будем пользоваться безразмерными переменными:

$$t \rightarrow k^2 \sigma^2 \tau_0 t, \quad x \rightarrow kx, \quad \langle v_i(t) v_j(t') \rangle \rightarrow 2\delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (73)$$

### 5.1. Модель диффузии пассивной примеси

В рассматриваемом случае решение уравнения (19) для поля плотности имеет вид [56]

$$\frac{\rho(x, t)}{\rho_0} = \frac{1}{\exp(T(t)) \cos^2(kx) + \exp(-T(t)) \sin^2(kx)}, \quad (74)$$

где  $T(t) = 2k \int_0^t d\tau v_x(\tau)$  — винеровский случайный процесс.

Из выражения (74) видно, что поле плотности незначительно всюду, кроме окрестностей точек  $kx = n\pi/2$ , где  $\rho(x, t)/\rho_0 = \exp(\pm T(t))$ , т.е. в окрестности этих точек поле плотности достаточно велико при соответствующем знаке случайного фактора  $T(t)$ .

Таким образом, для рассматриваемой задачи кластерная структура поля плотности в эйлеровом описа-

нии формируется в окрестностях точек

$$kx = n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Результаты расчёта пространственно-временной эволюции реализации эйлерова поля плотности  $1 + \rho(x, t)/\rho_0$  в безразмерных переменных (73) (единица добавлена, чтобы не иметь проблем с близкими к нулю значениями плотности в логарифмическом масштабе) представлены на рис. 19. Из рисунка ясно видно последовательное перетекание поля плотности к окрестностям точек  $x \approx 0$  и  $x \approx \pi/2$ , т.е. образование кластеров там, где относительное значение плотности достигает больших значений, а во всём остальном пространстве плотность практически равна нулю. Отметим, что в моменты времени  $t$ , в которые  $T(t) = 0$ , реализация поля плотности проходит через начальное однородное состояние.

### 5.2. Модель турбулентного динамо

Для уравнения индукции (20) для рассматриваемой модели (71)  $x$ -компонента магнитного поля сохраняется, т.е.  $H_x(\mathbf{r}, t) = H_{x0}$ , а поперечная составляющая магнитного поля  $\mathbf{H}_\perp(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_x(t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{H}_\perp(x, t) = \mathbf{v}_\perp(t) \frac{\partial f(x)}{\partial x} H_{x0} \quad (75)$$

с начальным условием  $\mathbf{H}_\perp(x, 0) = \mathbf{H}_{\perp 0}$ , решение которого можно записать в статистически эквивалентном виде (при  $\mathbf{H}_{\perp 0} = 0$ ):

$$\mathbf{H}_\perp(x, t) = 2kH_{x0} \times \int_0^t d\tau \frac{\exp(T(\tau)) \cos^2(kx) - \exp(-T(\tau)) \sin^2(kx)}{[\exp(T(\tau)) \cos^2(kx) + \exp(-T(\tau)) \sin^2(kx)]^2} v_x(\tau) \mathbf{v}_\perp(\tau). \quad (76)$$

Выражение в правой части (76) описывает генерацию магнитного поля  $H_\perp(x, t)$  в поперечной ( $y, z$ ) плоскости из-за наличия начального поля  $H_{x0}$ . И при  $\mathbf{H}_{\perp 0} = 0$  поле  $H_\perp(x, t)$ , пропорциональное квадрату случайного поля скорости, определяет ситуацию. Структура поля  $H_\perp(x, t)$ , подобно структуре поля плотности, также кластеризуется, что подтверждается результатами численного моделирования (см. работы [39, 57] и монографии [17–20]), представленными в безразмерных переменных (73) на рис. 20а, где приведена доля энергии генерируемого магнитного поля, содержащаяся в кластере, по отношению ко всей энергии в слое, на рассматриваемый момент времени, и на рис. 20б, где видна динамика перетекания возмущений магнитной энергии от одной границы области к другой.

Отметим особенность уравнения (75). В этом случае параметрическое возбуждение магнитного поля сопровождается *гауссовой генерацией* самого магнитного поля. Рассмотрим теперь статистический анализ данной простейшей задачи.

## 6. Параметрически возбуждаемые динамические системы с гауссовой накачкой

### 6.1. Статистический анализ простейшей задачи турбулентного динамо с гауссовой накачкой

Линейному уравнению (75) соответствует уравнение для одноточечной в пространстве и одновременной плотно-

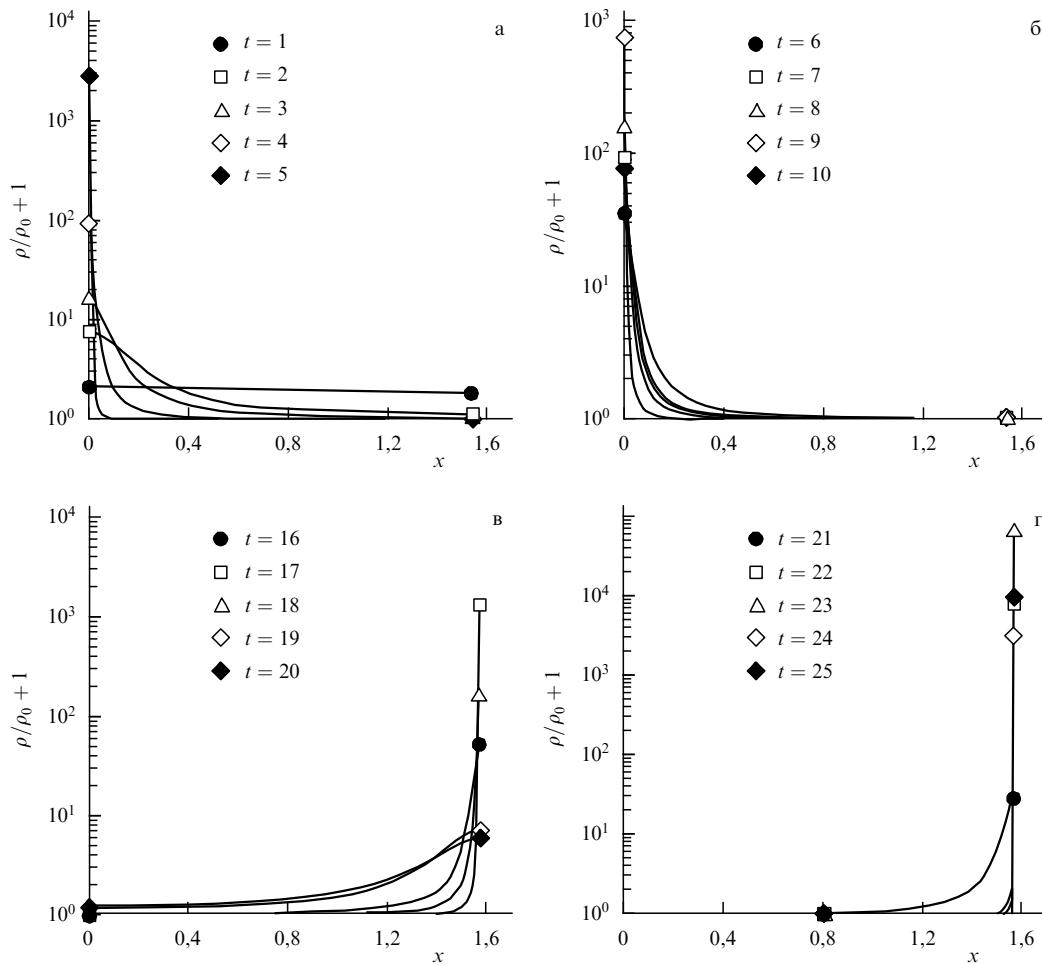


Рис. 19. Пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности, описываемая формулой (74).

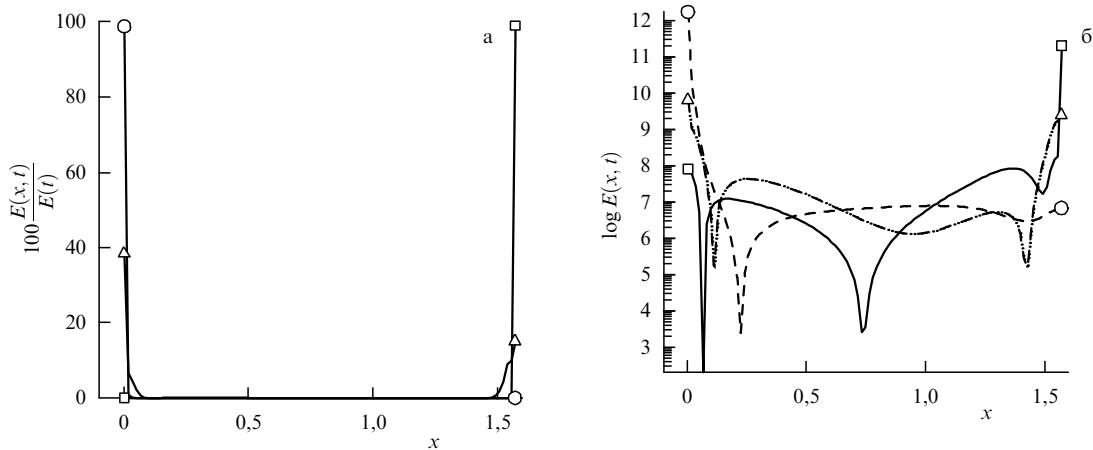


Рис. 20. Динамика исчезновения кластера в точке 0 и возникновения кластера в точке  $\pi/2$ . Кругом обозначен момент времени  $t = 10,4$ , треугольником —  $t = 10,8$ , квадратом —  $t = 11,8$ .

сти вероятностей энергии магнитного поля в безразмерном времени (см. работы [39, 57] и монографии [17–20])

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; E) = \left( \frac{\partial}{\partial E} E + 2 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E + 2 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} \right) P(\tau; E) \quad (77)$$

с начальным условием  $P(0; E) = \delta(E - \beta)$ .

Для уравнения (77) была получена асимптотика при больших временах для моментов энергии магнитного

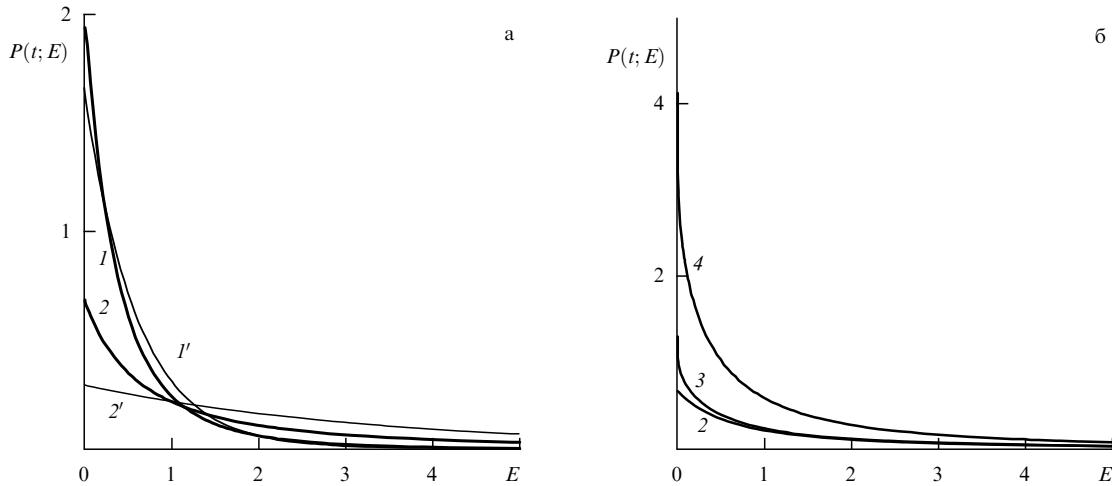
поля вида

$$\langle E^n(\tau) \rangle \sim A_n \exp [n(2n - 1)\tau],$$

что соответствует логнормальному закону для плотности вероятностей с поправкой, учитывающей гауссову генерацию. Также было получено выражение для ляпуновской экспоненты:

$$\exp (\langle \ln E(\tau) \rangle) = \beta \exp (-\tau),$$





**Рис. 21.** Плотность вероятности (77) для времён: (а)  $\tau = 0,3$  (кривая 1),  $\tau = 1,7$  (кривая 2). Тонкие линии соответствуют гауссову распределению (78) для  $\tau = 0,3$  (кривая 1'),  $\tau = 1,7$  (кривая 2'). (б) То же, что и на рис. а, но для времён  $\tau = 1,7$  (кривая 2),  $\tau = 5,0$  (кривая 3),  $\tau = 8,3$  (кривая 4).

свидетельствующее об убывании энергии магнитного поля почти в каждой точке пространства, т.е. о существовании кластеризации.

Последний член в уравнении (77) отвечает за генерацию гауссова поля, которое на малых временах и определяет генерацию энергии магнитного поля. Приведём соответствующее уравнение и решения для этих времён, ограничиваясь двумерным случаем, который нас интересует [58].

Уравнение для плотности вероятности гауссова двумерного векторного поля  $\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R}, t)$  для пространственно однородной задачи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; \mathbf{H}_\perp) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{H}_\perp^2} P(\tau; \mathbf{H}_\perp),$$

его решение

$$P(\tau; \mathbf{H}_\perp) = \frac{1}{2\pi\tau} \exp\left(-\frac{\mathbf{H}_\perp^2}{2\tau}\right).$$

Соответственно, на этом малом временном интервале плотность вероятностей поперечной энергии  $E = \mathbf{H}_\perp^2(\mathbf{R}, t)$

$$P(\tau; E) = \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{E}{2\tau}\right) \quad (78)$$

описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; E) = 2 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} P(\tau; E).$$

Следовательно, интегральная функция распределения вероятностей описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau; E) = 2E \frac{\partial^2}{\partial E^2} \Phi(\tau; E),$$

решение которого

$$\Phi(\tau; E) = 1 - \exp\left(-\frac{E}{2\tau}\right). \quad (79)$$

Из последнего соотношения сразу же следует выражение для кривой типичной реализации:

$$E^*(\tau) = (2 \ln 2)\tau.$$

Понятно, что, для того чтобы имела место кластеризация, кривая типичной реализации соответствующего процесса должна убывать, в отличие от линейного возрастания для гауссова процесса. Из рисунка 21, на котором приведены результаты численного решения уравнения (77), видно, что на начальном этапе плотность вероятности для энергии магнитного поля убывает примерно так же, как гауссово распределение, и скорость убывания уменьшается со временем, т.е. процесс генерации гауссова поля превалирует. На временах порядка  $\tau = 1,7$  ситуация меняется: при больших временах начинает играть важную роль кластеризация, т.е. скорость убывания плотности вероятности с возрастанием энергии начинает увеличиваться со временем, так же как и её значение в нуле.

Рассмотрим теперь интегральную функцию вероятности для энергии магнитного поля. Из уравнения (77) обычным образом получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau; E) = \left[ E + 2E \frac{\partial}{\partial E} (E + 1) \right] \frac{\partial}{\partial E} \Phi(\tau; E). \quad (80)$$

Численное решение уравнения (80) приведено на рис. 22а, из которого видно, что при относительно малых временах, примерно до  $\tau = 1,7$ , скорость возрастания интегральной функции со временем убывает, что характерно для гауссова распределения. При больших временах скорость возрастания начинает увеличиваться, что характерно для логарифмически нормального распределения.

Более наглядно этот вывод иллюстрирует кривая типичной реализации. На рисунке 22б видим, что при  $\tau \geq 3,0$  кривая типичной реализации для процесса, описываемого уравнением (77), убывает, что свидетельствует о кластеризации. Собственно, процесс кластеризации начал проявляться раньше, но его преобладание над генерацией наступает примерно с этого момента времени.

На рисунке 23а представлена зависимость от времени удельной площади тех областей, в которых энергия магнитного поля превышает уровень максимума кривой типичной реализации, т.е.  $E > 2$ . В случае гауссова распределения эта площадь стремится к единице, что сви-

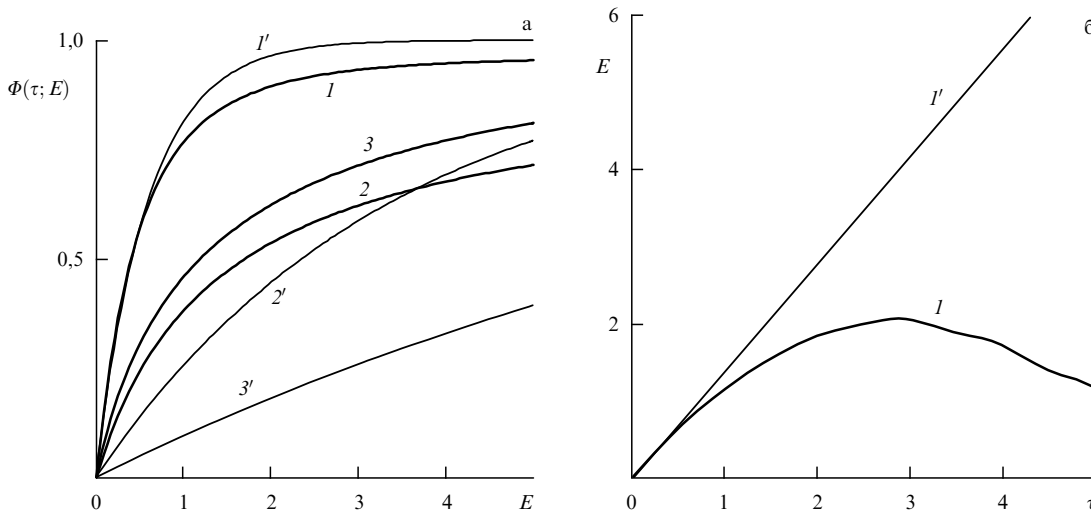


Рис. 22. (а) Интегральная функция вероятности (80) для трёх моментов безразмерного времени:  $\tau = 0,3$  (кривая 1),  $\tau = 1,7$  (кривая 2),  $\tau = 5,0$  (кривая 3). Тонкие кривые 1'–3' соответствуют гауссову распределению для тех же времён. (б) Кривые типичной реализации для энергии магнитного поля (1) и гауссова процесса (1').

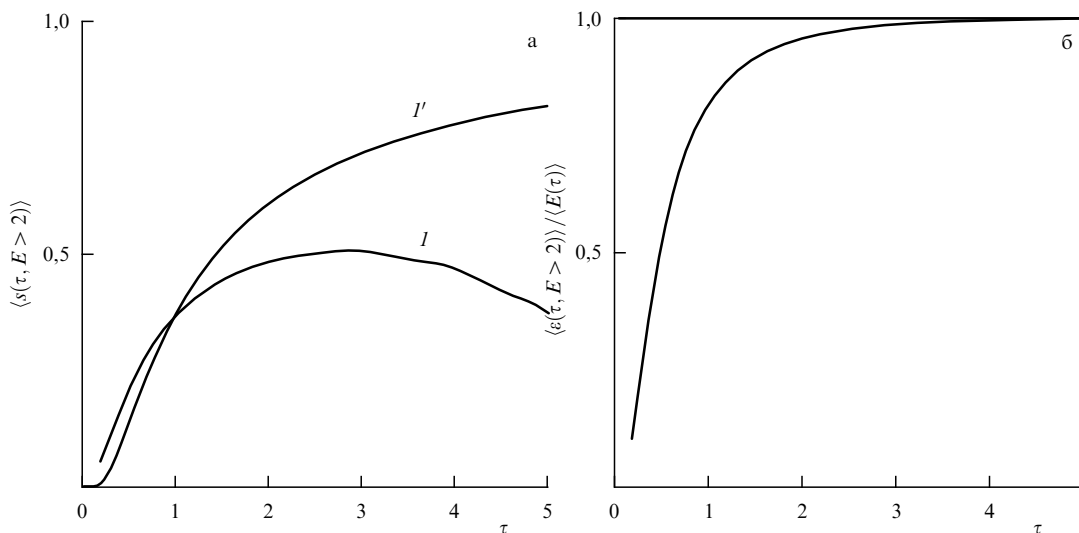


Рис. 23. (а) Удельная площадь областей для распределения (77), в которых уровень энергии магнитного поля  $E > 2$ . (б) Удельная энергия, сосредоточенная в областях, эволюция общей площади которых приведена на рис. а.

детельствует об отсутствии кластеризации, однако в случае наличия магнитного поля площадь начинает убывать, что свидетельствует о начале кластеризации на временах  $\tau \approx 1,7$ . На рисунке 23б показана динамика во времени удельной энергии (нормированной на полную энергию в соответствующий момент времени), сосредоточенной в этих областях, подтверждающая явление кластеризации.

**6.2. Аномальные структуры на морской поверхности**

За последние десятилетия значительно усилился интерес к такому явлению, как аномально большие волны, именуемые волнами-убийцами (см., например, [59, 60]). Существует много предположений о механизмах и методах описания этого явления [59–62]. Мы предполагаем, что, возможно, есть разные механизмы и не всё следует называть аномально высокими волнами. Например, возникновение таких волн на фоне достаточно большого волнения, вероятно, связано с нелинейными

эффектами (см., например, работы [63–66] и приведённые там ссылки). Изучаются различные динамические модели на основе как численного моделирования, так и аналитических результатов, связанных с нелинейным уравнением Шрёдингера. Интенсивно также обсуждаются статистические свойства наблюдаемых аномальных волн (см., например, обзор [61]).

Мы предлагаем один из возможных механизмов возникновения аномальных структур на поверхности жидкости, возможно, соответствующий возникновению таких структур на фоне очень слабого волнения. Так, на рис. 24 приведены три фотографии необычной узкой и протяжённой структуры высотой 4–5 м, которая наблюдалась 11 июня 2006 г. у Тихоокеанского побережья Камчатки в 1–1,5 км от берега [20, 67]. Автор фотографий М.М. Соколовский так описал запечатлённое им явление: "Это была, конечно, странная волна, так как она несколько раз повторялась, а потом исчезла. Вокруг никаких волн не наблюдалось — тишь да гладь".



Рис. 24. Вид водной структуры сбоку (а). Вид водной структуры с фронта: начало (б) и середина (в) структуры.



Рис. 25. Пример структуры водной массы на морской поверхности.

На рисунке 25 показана также структура морской поверхности, наблюдавшаяся у побережья острова Иль-де-Ре (Франция) [68]<sup>2</sup>.

Из этих примеров ясно, что если построить для них топографическую карту модуля градиента морской поверхности, то мы получим типичную кластерную структуру, для которой *положительное поле* сконцентрировано на небольшой площади, а вне её оно просто отсутствует.

Ещё раз подчеркнём, что приведённые структуры заметно отличаются от обычно рассматриваемых аномальных волн. Во-первых, такие структуры могут быть как неподвижными, так и подвижными, а во-вторых, они существенно превышают фон, речь здесь не идёт о выбросах, как минимум в два раза превышающих максимальный фоновый уровень [61]. В случае приведённых примеров скорее можно говорить о значительных структурах на практически нулевом фоне. Из этих примеров также видно, что кластеризация положительного поля в данном случае аналогична такому физическому явлению, как фокусировка волнового поля при прохождении случайной среды [61, 69] или интенсивности лазерного излучения в случайной среде (см. раздел 3.2.1).

**6.2.1 Постановка задачи.** Постановка статистической задачи о возникновении аномальных структур на морской поверхности в кинематическом приближении приведена в работе [69] и монографии [20].

<sup>2</sup> Впечатляющие фотографии других структур на морской поверхности можно найти на сайте <http://imgur.com/a/4Y20o>.

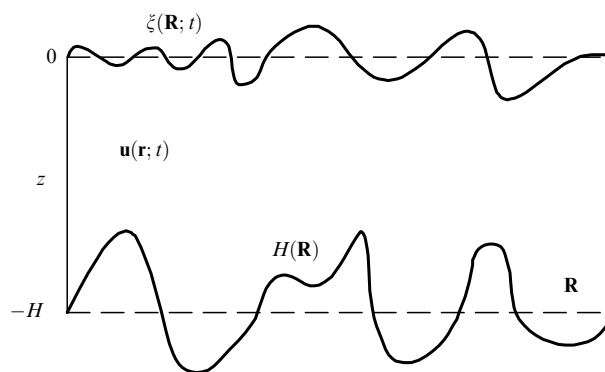


Рис. 26. Возмущение морской поверхности.

Обозначим трёхмерную пространственную координату как  $\mathbf{r} = \{r_i\}$ , где  $i = 1, 2, 3$ , вертикальную координату — как  $z = r_3$ , а через  $R_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — координаты в горизонтальной плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Тогда  $\mathbf{r} = \{\mathbf{R}, z\}$ . Соответственно, трёхмерное гидродинамическое поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}; t)$  представим в виде горизонтальной и вертикальной составляющих поля скорости, т.е. в виде  $u_i(\mathbf{r}; t) = \{u_\alpha(\mathbf{R}, z; t), w(\mathbf{R}, z; t)\}$ , где  $i = 1, 2, 3$ , а индекс  $\alpha = 1, 2$ .

Смещение морской поверхности  $z = \zeta(\mathbf{R}, t)$  описывается в виде кинематического краевого условия (рис. 26), которое выражается как

$$\frac{d}{dt} \zeta(\mathbf{R}, t) = w_z(\mathbf{R}, z; t) \Big|_{z=\zeta(\mathbf{R}, t)}. \quad (81)$$

Здесь  $d\zeta(\mathbf{R}, t)/dt$  — полная производная смещения поверхности.

Краевое условие (81) можно рассматривать как замкнутое стохастическое квазилинейное уравнение в рамках кинематического приближения, т.е. при заданных статистических характеристиках полей скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{R}, z; t)$  и  $w(\mathbf{R}, z; t)$ :

$$\frac{\partial \zeta(\mathbf{R}, t)}{\partial t} + u_x(\mathbf{R}, \zeta(\mathbf{R}, t), t) \frac{\partial \zeta(\mathbf{R}, t)}{\partial R_x} = w_z(\mathbf{R}, \zeta(\mathbf{R}, t); t) \quad (82)$$

с начальным условием  $\zeta(\mathbf{R}, 0) = \zeta_0(\mathbf{R})$ . Уравнение (82) описывает генерацию волн на морской поверхности, вызванных гауссовой вертикальной составляющей гидродинамического поля скоростей.

Дифференцируя уравнение (82) по  $\mathbf{R}$ , для градиента смещения поверхности  $p_\beta(\mathbf{R}, t) = \partial \zeta(\mathbf{R}, t) / \partial R_\beta$ , характеризующего наклон морской поверхности, получаем

уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_\beta(\mathbf{R}, t)}{\partial t} + \left( \frac{\partial u_x(\mathbf{R}, z; t)}{\partial R_\beta} + \frac{\partial u_x(\mathbf{R}, z; t)}{\partial z} p_\beta(\mathbf{R}, t) \right)_{z=\xi(\mathbf{R}, t)} p_\alpha(\mathbf{R}, t) + \\ + u_x(\mathbf{R}, \xi(\mathbf{R}, t), t) \frac{\partial p_\alpha(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\beta} = \\ = \left( \frac{\partial w(\mathbf{R}, z; t)}{\partial R_\beta} + \frac{\partial w(\mathbf{R}, z; t)}{\partial z} p_\beta(\mathbf{R}, t) \right)_{z=\xi(\mathbf{R}, t)} p_\alpha(\mathbf{R}, t) \quad (83) \end{aligned}$$

с начальным условием  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, 0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{R}) = \partial \xi_0(\mathbf{R}) / \partial \mathbf{R}$ .

Отметим, что для рассматриваемой задачи имеется и второе краевое условие, связанное с неоднородностями топографии морского дна (см. рис. 26). В рамках кинематического приближения это краевое условие проявляется в функциональном виде, а именно для вариационных производных решения задачи  $\xi(\mathbf{R}, t)$  и  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$  имеет место

$$\begin{aligned} \frac{\delta \xi(\mathbf{R}, t)}{\delta \mathbf{u}(\mathbf{R}', z', t')} \sim \theta(z' + H_0 - H(\mathbf{R})) \theta(t - t'), \\ \frac{\delta \mathbf{p}(\mathbf{R}, t)}{\delta \mathbf{u}(\mathbf{R}', z', t')} \sim \theta(z' + H_0 - H(\mathbf{R})) \theta(t - t'), \quad (84) \end{aligned}$$

где  $\theta(z)$  — тета-функция Хевисайда. Условие (84) соответствует отсутствию протекания воды через твёрдое дно.

Таким образом, уравнения (82), (83) в совокупности с краевым условием (84) представляют собой замкнутую задачу в кинематическом приближении. Решение этой задачи должно дать ответ на вопрос: содержится ли в её уравнениях информация о наличии аномальных структур на морской поверхности с вероятностью единица, т.е. почти в каждой реализации случайного поля скоростей. При этом мы не затрагиваем вопроса о физических механизмах такого структурообразования.

**6.2.2. Статистический анализ задачи.** Статистический анализ задачи (82)–(84) проведён в работах [58, 70]. Было получено уравнение для совместной плотности вероятностей смещения морской поверхности  $\xi(\mathbf{R}, t)$  и его пространственного градиента  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$ . Результат оказался крайне неожиданным: для бесконечно глубокого моря и пространственно статистически однородной задачи, соответствующей начальным условиям  $\xi_0(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, 0) = 0$ , было показано следующее.

1. Смещение свободной поверхности  $\xi(\mathbf{R}, t)$  не коррелирует с её градиентом и описывается гауссовым распределением,

$$P(t; \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi B_{ww}(\mathbf{0}, 0)t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4B_{ww}(\mathbf{0}, 0)t}\right), \quad (85)$$

не зависящим от нелинейности исходного уравнения (82). При этом дисперсия смещения свободной поверхности

$$\sigma_\xi^2(t) = \langle \xi^2(\mathbf{R}, t) \rangle_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 P(t; \xi) d\xi = 2B_{ww}(\mathbf{0}, 0)t.$$

Здесь индексом  $\xi$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций поля  $\xi(\mathbf{R}, t)$ . Коэффициент диффузии  $B_{ww}(\mathbf{0}, 0)$  в выражении (85) связан с корреляционной функцией вертикальной составляющей поля скорости  $w(\mathbf{R}, z; t)$  соотношением

$$B_{ww}(\mathbf{0}, 0) = \int_0^\infty d\tau B_{ww}(\mathbf{0}, 0; \tau),$$

где  $B_{ww}(\mathbf{R}, z; t)$  — корреляционная функция поля  $w(\mathbf{R}, z; t)$ . Коэффициент  $B_{ww}(\mathbf{0}, 0)$  в свою очередь связан с дисперсией случайного трёхмерного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (23):

$$B_{ww}(\mathbf{0}, 0) = \frac{1}{3} \int d\mathbf{k} [2E^s(k) + E^p(k)] = \frac{1}{3} \sigma_u^2 \tau_0, \quad (86)$$

где  $\tau_0$  — характерный временной радиус корреляции случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (см. равенство (25)).

Следовательно, сложная структура поля скоростей в нижнем полупространстве не может быть *прямой причиной* стохастического структурообразования смещения свободной поверхности.

Отметим, что из (85) следуют выражения для условных средних:

$$\langle \xi(\mathbf{R}, t) | \xi > 0 \rangle_\xi = \int_0^\infty d\xi \xi P(t; \xi) = \sqrt{\frac{1}{\pi} B_{ww}(\mathbf{0}, 0)t}, \quad (87)$$

$$\langle \xi(\mathbf{R}, t) | \xi < 0 \rangle_\xi = \int_{-\infty}^0 d\xi \xi P(t; \xi) = -\sqrt{\frac{1}{\pi} B_{ww}(\mathbf{0}, 0)t}. \quad (88)$$

При этом, разумеется,  $\langle \xi(\mathbf{R}, t) \rangle_\xi = 0$ .

2. Плотность вероятности квадрата модуля градиента смещения свободной поверхности  $I(\mathbf{R}, t) = \mathbf{p}^2(\mathbf{R}, t)$ ,  $P(t; I)$ , описывается уравнением универсального вида:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; I) = \frac{\partial}{\partial I} I(1+I)P(\tau; I) + 2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} (1+I)^2 P(\tau; I), \quad (89)$$

где введено безразмерное время

$$\tau = \frac{2}{15} (4D^s + D^p)t, \quad (90)$$

а величины  $D^s$  и  $D^p$  описываются равенствами (27) при  $d = 3$ .

Прежде всего отметим, что для любой фиксированной точки пространства  $\mathbf{R}$  функция  $I(\tau; \mathbf{R})$  является случайным процессом во времени, одновременная плотность вероятностей которого, не зависящая от  $\mathbf{R}$ , описывается полученным уравнением.

Наряду с этим в физическом пространстве  $\{\mathbf{R}\}$  может происходить процесс структурообразования самого поля  $I(\tau; \mathbf{R}) = |\mathbf{p}(\tau; \mathbf{R})|^2$  как физического объекта в виде замкнутых областей повышенной концентрации градиента — кластеризации, которая также описывается уравнением (89).

Качественный анализ и оценки, приведённые в работах [58, 70], показали следующее. Уравнение (89) является достаточно сложным и содержит два эффекта. С одной стороны, поле  $I(\tau; \mathbf{R})$  генерируется случайным гауссовым полем скоростей, а с другой стороны, в силу динамики исходных стохастических уравнений происходит параметрическое возбуждение этого поля. При этом случайное поле  $I(\tau; \mathbf{R})$  с вероятностью единица (т.е. почти во всех его реализациях) убывает на достаточно больших временах в любой точке пространства и, следовательно, оно должно кластеризоваться в малых областях пространства.

Интегральная функция распределения вероятностей для плотности вероятностей  $P(\tau; I)$ , определяемая равенством

$$\Phi(\tau, I) = \int_0^I dI' P(\tau; I') = \langle \theta(I - I(\tau; \mathbf{R})) \rangle_{\mathbf{u}},$$

является вероятностью события  $\mathcal{P}(I(\tau; \mathbf{R}) < I)$ . Функция  $\Phi(\tau, I)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau, I) = I(1 + I) \frac{\partial}{\partial I} \Phi(\tau, I) + 2I \frac{\partial}{\partial I} (1 + I)^2 \frac{\partial}{\partial I} \Phi(\tau, I), \quad (91)$$

вытекающему из уравнения (89). Соответственно, функция

$$\tilde{\Phi}(\tau, I) = \int_I^\infty dI' P(\tau; I') = \langle \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - I) \rangle_{\mathbf{u}} = 1 - \Phi(\tau, I)$$

является вероятностью события  $\mathcal{P}(I(\tau; \mathbf{R}) > I)$ . В силу параметрического возбуждения функция  $\Phi(\tau, I)$  с возрастанием времени быстро стремится к единице, а функция  $\tilde{\Phi}(\tau, I)$  стремится к нулю [58, 70].

В общем случае площадь, на которой случайное поле  $I(\tau; \mathbf{R})$  больше фиксированной величины  $\bar{I}$ , описывается интегралом

$$S(\tau, \bar{I}) = \int d\mathbf{R} \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I}), \quad (92)$$

а общая "масса" поля  $I(\tau; \mathbf{R}) > \bar{I}$ , сосредоточенная на этой площади,

$$I(\tau; I > \bar{I}) = \int d\mathbf{R} I(\tau; \mathbf{R}) \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I}). \quad (93)$$

Усредняя выражения (92) и (93) по ансамблю реализаций случайного поля  $I(\tau; \mathbf{R})$ , для средних величин получаем:

$$\langle S(\tau, \bar{I}) \rangle_I = \int d\mathbf{R} \langle \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I}) \rangle_I, \quad (94)$$

$$\langle I(\tau; I > \bar{I}) \rangle_I = \int d\mathbf{R} \langle I(\tau; \mathbf{R}) \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I}) \rangle_I.$$

Для пространственно однородной и изотропной задачи все одноточечные статистические средние не зависят от пространственной координаты  $\mathbf{R}$ , и тогда первое равенство в (94) должно быть записано для удельной величины

$$s_{\text{hom}}(\tau, \bar{I}) = \langle \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I}) \rangle_I, \quad (95)$$

которая является вероятностью события  $\mathcal{P}(I(\tau; \mathbf{R}) > \bar{I})$ . Согласно положениям статистической топографии случайных полей функция  $s_{\text{hom}}(\tau, \bar{I})$  для статистически однородного поля имеет геометрический смысл удельной величины (т.е. приходящейся на единицу площади), на которой поле  $I(\tau; \mathbf{R})$  больше любой заданной величины  $\bar{I}$  (см., например, монографии [17–20]). Однако при убывании поля почти во всех точках пространства эта вероятность стремится к нулю, что соответствует концентрации на этой малой площади основных статистических характеристик типа моментных функций. При этом удельный квадрат модуля градиента  $i$ , сосредоточенный в этой области, описывается равенством

$$\begin{aligned} \langle i(\tau; I > \bar{I}) \rangle_I &= \int_I^\infty dI IP(\tau; I) = \\ &= \langle I(t) \rangle_I \left( 1 - \frac{1}{\langle I(t) \rangle_I} \int_0^{\bar{I}} dI IP(\tau; I) \right). \end{aligned} \quad (96)$$

Откуда следует, что с возрастанием времени выражение, стоящее в (96) после второго знака равенства, стремится к  $\langle I(t) \rangle_I$ . Значит, в этой малой части пространства мощный градиент при уменьшении площади, на кото-

рой он сосредоточен, должен, по-видимому, просто "выдавливаться" свободную поверхность как вверх (т.е. создавать *высокие узкие структуры*), так и вниз (т.е. создавать *глубокие узкие провалы* — *мальстремы* свободной поверхности). И это должно соответствовать редким большим флуктуациям гауссова поля смещения свободной поверхности  $\xi(\mathbf{R}, t)$ .

**6.2.3. Статистическая топография поля смещения морской поверхности.** Рассмотрим теперь, каким образом может быть описан процесс стохастического структурообразования самой морской поверхности  $\xi(\mathbf{R}, t)$ . Итак, случайное поле квадрата модуля градиента  $I(\tau; \mathbf{R})$ , превышающего некоторую фиксированную величину  $\bar{I}$ ,  $I(\tau; \mathbf{R}) > \bar{I}$ , в отдельных реализациях сосредоточено в малой области пространства (92). Именно в этой малой области пространства и должно происходить аномальное структурообразование смещения морской поверхности  $\xi(\mathbf{R}, t)$ . Следовательно, мы должны изучать для поля  $\xi(\mathbf{R}, t)$  плотность вероятностей в области пространства (92), т.е. условную плотность вероятностей при  $\xi > 0$ ,  $I(\tau; \mathbf{R}) > \bar{I}$ . При этом поля  $\xi(\mathbf{R}, t)$  и  $I(\mathbf{R}, t)$  статистически независимы.

Таким образом, интересующая нас интегральная величина

$$\int d\mathbf{R} \xi(\mathbf{R}, t) \theta(\xi(\mathbf{R}, t)) \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I})$$

после усреднения по ансамблям реализаций полей  $\xi(\mathbf{R}, t)$  и  $I(\tau; \mathbf{R})$  будет определять условное среднее, которое для пространственно однородной и изотропной задачи, согласно формулам (87) и (95), принимает вид

$$\langle \xi(t) | \xi > 0 \rangle_{s_{\text{hom}}(\tau, \bar{I})} = \sqrt{\frac{1}{\pi} B_{\text{wv}}(\mathbf{0}, 0) t} s_{\text{hom}}(\tau, \bar{I}). \quad (97)$$

Учитывая формулу (90), мы можем выразить время  $t$  через безразмерное время  $\tau$  и, принимая во внимание равенства (25), представить условное среднее (97) в виде

$$\begin{aligned} \langle \xi(\mathbf{R}, t) \theta(\xi(\mathbf{R}, t)) \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I}) \rangle_{\xi, I} &= \\ &= \sqrt{\frac{5\sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0}{2\pi(4D^s + D^p)}} F(\tau, \bar{I}), \end{aligned} \quad (98)$$

где безразмерная функция

$$F(\tau; \bar{I}) = \sqrt{\tau} s_{\text{hom}}(\tau, \bar{I}), \quad (99)$$

а коэффициенты  $D^s$  и  $D^p$  в соотношениях (27) выражаются через статистические параметры поля скоростей по формулам (28).

Отметим, что для несжимаемой гидродинамической турбулентности ( $D^p = 0$ ) формула (98) существенно упрощается и с учётом равенств (28) принимает универсальный вид:

$$\langle \xi(\mathbf{R}, t) \theta(\xi(\mathbf{R}, t)) \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I}) \rangle_{\xi, I} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} l_{\omega} F(\tau, \bar{I}), \quad (100)$$

где  $l_{\omega} = \sigma_{\mathbf{u}}/\sigma_{\omega}$  — пространственный корреляционный радиус поля вихря скорости.

Для малых времён это условное среднее возрастает во времени, а затем вследствие быстрого убывания функции  $s_{\text{hom}}(\tau, \bar{I})$  будет уменьшаться, проходя через максималь-

ное значение, которое и характеризует среднюю максимальную амплитуду аномального структурообразования на морской поверхности.

Аналогичным образом можно вычислить и другие условные моментные функции типа

$$\langle \xi^n(\mathbf{R}, t) | \xi > 0; I(\tau; \mathbf{R}) > \bar{I} \rangle.$$

Можно также рассмотреть интегральную величину

$$\int d\mathbf{R} \xi(\mathbf{R}, t) \theta(-\xi(\mathbf{R}, t)) \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I}),$$

которая после усреднения по ансамблям реализаций полей  $\xi(\mathbf{R}, t)$  и  $I(\tau; \mathbf{R})$  для пространственно однородной и изотропной задачи определяет условное среднее:

$$\langle \xi(t) | \xi < 0 \rangle_{\text{shom}}(\tau, \bar{I}) = -\sqrt{\frac{1}{\pi} B_{\text{шм}}(\mathbf{0}, 0) t} s_{\text{шм}}(\tau, \bar{I}). \quad (101)$$

Для малых времён условное среднее (101) убывает во времени, а далее, вследствие быстрого убывания положительной функции  $s_{\text{шм}}(\tau, \bar{I})$  будет возрастать, проходя через минимальное значение, которое и характеризует среднюю максимальную амплитуду аномального отрицательного структурообразования на морской поверхности (т.е. глубокого провала).

Таким образом, на основе уравнений, полученных в [58, 70], показано, что в процессе структурообразования модуля градиента в малых областях, где сосредоточен весь градиент, поле возвышения поверхности возрастает, достигая максимума, а затем начинает убывать. То есть изучаемые структуры на поверхности жидкости имеют значительную величину, но являются ограниченными как по величине, так и по времени существования.

Сделаем замечание по поводу интерпретации статистических средних с точки зрения статистической топографии. Формулы (97) и (101) показывают, что отличные от нуля возвышения поверхности сосредоточены в областях кластеризации модуля градиента, т.е. в таких областях, где модуль градиента больше любой сколь угодно малой величины  $\bar{I}$ . Отметим, что при  $\bar{I} = 0$  формулы (97), (101) не имеют смысла, поскольку перестают описывать распределение возвышения в пространстве и, таким образом, становятся выражениями для обычных средних, интерпретация которых, с точки зрения поведения в конкретных реализациях, не даёт полезной информации (см., например, [17–20]).

Отметим также, что полученные в работах [58, 70] оценки и общие особенности для амплитуды возвышения поверхности указывают только на наличие самого эффекта. Более детальные характеристики и дополнительную верификацию может дать численное решение уравнений (89) и (91), а также численное моделирование исходного уравнения (82).

## 7. Заключение

Мы рассмотрели процессы как стохастического структурообразования в двумерной геофизической гидродинамике на основе статистического анализа гауссовых случайных полей, так и стохастического структурообразования в динамических системах с параметрическим возбуждением положительных случайных полей  $f(\mathbf{r}, t)$ , которые описываются уравнениями в частных производных. Рассмотрены также два примера стохастического структурообразования в динамических системах с пара-

метрическим возбуждением при наличии гауссовой накачки. Такие структурообразования в динамических системах с параметрическим возбуждением в пространстве и во времени либо возникают, либо не возникают! Но если они осуществляются в пространстве, то это происходит в конкретных реализациях почти всегда, т.е. с вероятностью единица (экспоненциально быстро), и для пространственно однородной статистической задачи состоит в следующем:

1) с течением времени поле почти во всех точках пространства убывает (разумеется, с какими-то флуктуациями);

2) в самом пространстве при этом возникают области малого объёма, в которых это поле концентрируется (кластеризуется), и стохастическое структурообразование обусловлено диффузией случайного поля  $f(\mathbf{r}, t)$  в своём фазовом пространстве  $\{f\}$ .

В рассматриваемом случае кластеризация поля любой природы  $f(\mathbf{r}, t)$  является общим свойством динамических полей, и можно сказать, что структурообразование для любых таких случайных полей — закон природы.

В настоящей статье выяснены условия, при которых такое структурообразование осуществляется. Примечательно, что эти условия имеют прозрачный физико-математический смысл и описываются на достаточно элементарном математическом уровне на основе идей статистической топографии.

Автор благодарен К.В. Кошелю за многолетнюю помощь в области численного моделирования динамических систем и численных решений различных уравнений, а также за совместную аналитическую работу по статистическому анализу задачи о стохастических структурах на морской поверхности. Автор также признателен рецензенту за критические замечания, способствующие улучшению изложения материала.

Работа выполнена при поддержке Российским научным фондом (грант 14-27-00134).

## Список литературы

1. Щербakov P H *УФН* **184** 153 (2014); Shcherbakov R N *Phys. Usp.* **57** 143 (2014)
2. Nicolis G, Prigogin I *Exploring Complexity, an Introduction* (New York: W.H. Freeman and Co., 1989); Николис Г, Пригожин И *Познание сложного. Введение* (М.: URSS, 2008)
3. Кляцкин В И *Прикл. матем. мех.* **33** 889 (1969); Klyatskin V I *J. Appl. Math. Mech.* **33** 864 (1969)
4. Кляцкин В И *Изв. РАН. Физ. атм. и океана* **31** 749 (1995); Klyatskin V I *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **31** 717 (1995); Klyatskin V, Gurarie D *Physica D* **98** 466 (1996)
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986); Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* 2nd ed. (Oxford: Pergamon Press, 1987)
6. Hopf E, Titt E W J. *Rational Mech. Anal.* **2** 587 (1953)
7. Kraichnan R H, Montgomery D Rep. *Prog. Phys.* **43** 547 (1980)
8. Hopfinger E J, Browand F K *Nature* **295** 393 (1982)
9. Griffiths R W, Hopfinger E J *Deep Sea Res. A* **31** 245 (1984)
10. Boubnov B M, Golitsyn G S J. *Fluid Mech.* **167** 503 (1986)
11. Hopfinger E J, in *Theoretical and Applied Mechanics* (Eds P Germain, M Piau, D Caillerie) (Amsterdam: Elsevier, 1989) p. 117
12. Boubnov B M, Golitsyn G S *Convection in Rotating Fluids* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995)
13. Голицын Г С *Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты* (М.: КРАСАНД, 2013)
14. Pavlov V, Buisine D, Goncharov V *Nonlin. Proc. Geophys.* **89** (2001)
15. Каримова С С, Лаврова О Ю, Соловьев Д М *Исследование Земли из космоса* (5) 15 (2011); Karimova S S, Lavrova O Yu, Solov'ev D M *Atmos. Ocean. Phys.* **49** 1006 (2012)
16. Karimova S *Adv. Space Res.* **50** 1107 (2012)
17. Klyatskin V I *Lectures on Dynamics of Stochastic Systems* (Boston, MA: Elsevier, 2010)
18. Кляцкин В И *Очерки по динамике стохастических систем* (М.: КРАСАНД, 2012)



19. Кляцкин В И *Статистический анализ когерентных явлений в стохастических динамических системах* (М.: КРАСАНД, 2015)
20. Klyatskin V I *Stochastic Equations: Theory and Applications in Acoustics, Hydrodynamics, Magnetohydrodynamics, and Radiophysics* Vols 1, 2 (Helderberg: Springer, 2015)
21. Кляцкин В И *УФН* **182** 1235 (2012); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **55** 1152 (2012)
22. Klyatskin V I, in *Chaos and Complex Systems. Proc. of the 4th Intern. Interdisciplinary Chaos Symp.* (Eds S G Stavrinos et al.) (Heidelberg: Springer-Verlag, 2013) p. 69
23. Кляцкин В И *ТМФ* **176** 495 (2013); Klyatskin V I *Teor. Math. Phys.* **176** 1252 (2013)
24. Klyatskin V I *Russ. J. Math. Phys.* **20** 295 (2013)
25. Кляцкин В И *УФН* **181** 457 (2011); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **54** 441 (2011)
26. Зельдович Я Б и др. *ЖЭТФ* **89** 2061 (1985); Zel'dovich Ya B et al. *Sov. Phys. JETP* **62** 1188 (1985)
27. Зельдович Я Б и др. *УФН* **152** 3 (1987); Zel'dovich Ya B et al. *Sov. Phys. Usp.* **30** 353 (1987)
28. Кляцкин В И *Динамические системы* **4** 193 (2014)
29. Batchelor G K, Townsend A A *Proc. R. Soc. Lond. A* **199** 238 (1949)
30. Batchelor G K, Howells I D, Townsend A A *J. Fluid Mech.* **5** 113 (1959)
31. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидродинамика* Т. 2 (М.: Наука, 1967); Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics* Vol. 2 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1975)
32. Захаров В "Безумные волны", <http://www.youtube.com/watch?v=Bt3ZOswGd-4>; "Волны-убийцы", <http://www.zoomby.ru/watch/114832-academia>
33. Рuzмайкин А А *УФН* **184** 297 (2014); Ruzmaikin A A *Phys. Usp.* **57** 289 (2014)
34. Anderson P W *Phys. Rev.* **109** 1492 (1958)
35. Лифшиц И М, Гредескул С А, Пастур Л А *Введение в теорию неупорядоченных систем* (М.: Наука, 1982); Lifshits I M, Gredeskul S A, Pastur L A *Introduction to the Theory of Disordered Solids* (New York: John Wiley, 1988)
36. Кляцкин В И, Саичев А И *УФН* **162** (3) 161 (1992); Klyatskin V I, Saichev A I *Phys. Usp.* **35** 231 (1992)
37. Михайлов А С, Упоров И В *УФН* **144** 79 (1984); Mikhailov A S, Urovov I V *Sov. Phys. Usp.* **27** 695 (1984)
38. Кляцкин В И, Саичев А И *ЖЭТФ* **111** 1297 (1997); Klyatskin V I, Saichev A I *JETP* **84** 716 (1997)
39. Кляцкин В И, Чхетиани О Г *ЖЭТФ* **136** 400 (2009); Klyatskin V I, Chkhetiani O G *JETP* **109** 345 (2009)
40. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982); Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
41. Кляцкин В И *УФН* **174** 177 (2004); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **47** 169 (2004)
42. Малянов Д, газета.ru, 17.06.2011, [http://www.gazeta.ru/science/2011/06/17\\_a\\_3664677.shtml](http://www.gazeta.ru/science/2011/06/17_a_3664677.shtml); Atkinson N, Universe Today, Space and Astronomy News, 10 June, 2011, <http://www.universetoday.com/86446/voyagers-find-giant-jacuzzi-like-bubbles-at-edge-of-solar-system/>
43. Кляцкин В И *УФН* **178** 419 (2008); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **51** 395 (2008)
44. Кляцкин В И *УФН* **179** 547 (2009); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **52** 514 (2009)
45. Заворотный В У, Кляцкин В И, Татарский В И *ЖЭТФ* **73** 481 (1977); Zavorotnyi V U, Klyatskin V I, Tatarskii V I *Sov. Phys. JETP* **46** 252 (1977)
46. Кляцкин В И *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах* (М.: Физматлит, 1980); Klyatskin V I *Ondes et Equations Stochastiques dans les milieux Aléatoirement non Homogènes* (Besançon-Cedex: Les éditions de Physique, 1985)
47. Кляцкин В И, Якушкин И Г *ЖЭТФ* **111** 2044 (1997); Klyatskin V I, Yakushkin I G *JETP* **84** 1114 (1997)
48. Кляцкин В И, Эльперин Т *ЖЭТФ* **122** 327 (2002); Klyatskin V I, Elperin T *JETP* **95** 328 (2002)
49. Махей М R J. *Fluid Mech.* **174** 441 (1987)
50. Кляцкин В И *ЖЭТФ* **126** 1153 (2004); Klyatskin V I *JETP* **99** 1005 (2004)
51. Израэль Ю А *Радиоактивное загрязнение природных сред в результате аварии на Чернобыльской атомной станции (к 20-летию аварии)* (М.: Комтехпринт, 2006); <http://www.ibrae.ac.ru/images/stories/ibrae/chernobyl/israel.pdf>
52. Гурбатов С Н, Саичев А И, Шандарин С Ф *УФН* **182** 233 (2012); Gurbatov S N, Saichev A I, Shandarin S F *Phys. Usp.* **55** 223 (2012)
53. Рыгов С М, Кравцов Ю А, Татарский В И *Введение в статистическую радиофизику* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1977, 1978); Rytov S M, Kravtsov Yu A, Tatarskii V I *Principles of Statistical Radiophysics* Vols 1–4 (Berlin: Springer-Verlag, 1987–1989)
54. Кляцкин В И *ТМФ* **172** 415 (2012); Klyatskin V I *Teor. Math. Phys.* **172** 1243 (2012)
55. Кляцкин В И, Якушкин И Г *ЖЭТФ* **118** 849 (2000); Klyatskin V I, Yakushkin I G *JETP* **91** 736 (2000)
56. Кляцкин В И, Кошель К В *УФН* **170** 771 (2000); Klyatskin V I, Koshel' K V *Phys. Usp.* **43** 717 (2000)
57. Кляцкин В И *УФН* **181** 457 (2011); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **54** 441 (2011)
58. Кляцкин В И, Кошель К В *Phys. Rev. E* **91** 063003 (2015)
59. Куркин А А, Пелиновский Е Н *Волны-убийцы: факты, теория и моделирование* (Н. Новгород: НГТУ, 2004)
60. Kharif C, Pelinovsky E, Slunyaev A *Rogue Waves in the Ocean* (Berlin: Springer, 2009)
61. Dysthe K, Krogstad H E, Muller P *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40** 287 (2008)
62. Christou M, Ewans K J. *Phys. Oceanogr.* **44** 2317 (2014)
63. Ruban V P *Письма в ЖЭТФ* **94** 194 (2011); *JETP Lett.* **94** 177 (2011)
64. Рубан В П *Письма в ЖЭТФ* **95** 550 (2012); Ruban V P *JETP Lett.* **95** 486 (2012)
65. Рубан В П *Письма в ЖЭТФ* **97** 215 (2013); Ruban V P *JETP Lett.* **97** 188 (2013)
66. Рубан В П *Письма в ЖЭТФ* **97** 788 (2013); Ruban V P *JETP Lett.* **97** 686 (2013)
67. Кляцкин В И *ТМФ* **180** 127 (2014); Klyatskin V I *Teor. Math. Phys.* **180** 850 (2014)
68. <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ile.de.ré.JPG>
69. Metzger J J, Fleischmann R, Geisel T *Phys. Rev. Lett.* **112** 203903 (2014)
70. Кляцкин В И, Кошель К В *ТМФ* **186** (3) (2016) в печати; Klyatskin V I, Koshtl' K V *Teor. Math. Phys.* **186** (3) (2016) in press

### Stochastic structure formation in random media

V.I. Klyatskin. A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per. 3, 109017 Moscow, Russian Federation. Tel. +7 (499) 269 12 83. E-mail: klyatskin@yandex.ru

Stochastic structure formation in random media is considered using examples of elementary dynamical systems related to the two-dimensional geophysical fluid dynamics (Gaussian random fields) and to stochastically excited dynamical systems described by partial differential equations (lognormal random fields). In the latter case spatial structures (clusters) may form with probability one in almost every system realization due to rare events happening with vanishing probability. The problems involving stochastic parametric excitation occur in fluid dynamics, magnetohydrodynamics, physics of plasma, astrophysics and radiophysics. A more complicated stochastic problem dealing with anomalous structures on the sea surface (the rogue waves) is also considered, where random Gaussian generation of sea surface roughness is accompanied by the parametric excitation.

**Keywords:** stochastic equations, intermittency, Lyapunov characteristic parameter, typical realization curve, dynamical localization, statistical topography, clustering

PACS numbers: **05.40.** – a, **05.45.** – a, **46.65.** + g, **47.27.** – i  
Bibliography — 70 references  
*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **186** (1) 75–104 (2016)

DOI: 10.3367/UFNr.0186.201601e.0075  
Received 1 July 2015, revised 19 November 2015  
*Physics – Uspekhi* **59** (1) (2016)