

УДК 551.465

АСИММЕТРИЯ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ, ФОРМИРУЮЩИХСЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОСТРОФИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ

© 2019 г. М. В. Калашник

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва, Россия
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта, Москва, Россия
e-mail: kalashnik-obn@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.06.2017 г.
Принята к публикации 08.02.2018 г.

Рассматривается процесс геострофической адаптации во вращающемся слое мелкой воды. Для начальных распределений глубины жидкости в форме ступеньки и локализованного прямоугольника этот процесс приводит к формированию соответственно изолированного струйного течения и системы из двух встречных струйных течений. В работе исследованы особенности структуры этих течений, связанные с нелинейностью процесса адаптации. Основная особенность для изолированного струйного течения состоит в горизонтальной асимметрии его профиля скорости. Для системы из двух встречных течений характерна зеркальная асимметрия, обусловленная зависимостью от знака амплитуды начального возмущения глубины. Скорость течений при отрицательном знаке (углубление) всегда превышает скорость при положительном знаке (возвышение).

Ключевые слова: геострофическая адаптация, теория мелкой воды, потенциальный вихрь, струйные течения, горизонтальная асимметрия

DOI: 10.31857/S0030-1574592208–215

1. ВВЕДЕНИЕ

Крупномасштабные струйные течения океана и атмосферы (Гольфстрим, верхнетропосферные струйные течения) расположены в областях с резкими пространственными градиентами поля плотности (фронтальных зонах). В ситуациях с начальными распределениями поля плотности фронтального типа к формированию струйных течений может приводить процесс геострофической адаптации — волновой процесс установления стационарных геострофических состояний [1, 8, 9, 13]. Наиболее полно этот процесс изучен в рамках линейной теории мелкой воды, где прототипами фронтальных распределений служат кусочно-постоянные распределения полной глубины жидкости. Согласно линейной теории [1], при начальном распределении глубины в форме ступеньки в процессе адаптации формируется изолированное струйное течение с горизонтальным масштабом порядка радиуса деформации Россби. Начальное возмущение глубины в форме локализованного прямоугольника приводит к формированию системы из двух встречных струйных течений. В настоящей работе исследованы особенности

структуры струйных течений, связанные с нелинейностью процесса адаптации. Основная особенность для изолированного струйного течения состоит в отсутствии горизонтальной симметрии его профиля скорости (симметрии относительно оси). Структура системы из двух встречных течений в нелинейной теории зависит от знака амплитуды начального возмущения глубины (возвышение, углубление). Подобная зеркальная асимметрия характерна и для осесимметричных течений. Указанные особенности проявляются как в данных прямых натурных измерений [3], так и в результатах численных расчетов [12].

Следует подчеркнуть, что состояния геострофического (или циклострофического) равновесия описываются точными решениями уравнений мелкой воды в классе движений, обладающих трансляционной или осевой симметрией. Для определения этих состояний в нелинейном случае, как правило, используют восходящий к Россби [14] подход, основанный на решении уравнений динамики в лагранжевых переменных. Наряду с этим подходом в настоящей работе рассмотрен также эйлеров подход, пригодный для начальных кусочно-

постоянных распределений. Он основан на использовании закона сохранения потенциального вихря (ПВ) в сочетании с интегральным законом сохранения полной массы.

2. ИЗОЛИРОВАННОЕ СТРУЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Одномерные (не зависящие от координаты x) движения мелкой воды описываются системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} du/dt - fv &= 0, \\ dv/dt + fu + gh_y &= 0, \quad dh/dt + hv_y = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь h — полная глубина жидкости, u, v — компоненты вектора скорости вдоль осей x, y , f — параметр Кориолиса, $d/dt = \partial/\partial t + v\partial/\partial y$. Система (1) рассматривается в области $-\infty < y < \infty$. Точное решение системы (1) $u = -(g/f)h_y$, $v = 0$ описывает состояние геострофического равновесия.

Определим геострофическое состояние, формирующееся в задаче Коши с нулевым начальным полем скорости и начальным распределением глубины $h = h_i(y)$, где $h_i(y) = h_1$, $y > 0$, $h_i(y) = h_2$, $y < 0$. Для этого используем вытекающий из (1) лагранжев закон сохранения ПВ: $dq/dt = 0$, $q = (f - u_y)/h$. Поскольку начальное распределение q кусочно-постоянно, из условия сохранения q для определения h в геострофическом состоянии имеем уравнения

$$h_{yy} - L_1^{-2}h = -L_1^{-2}h_1, \quad y > b, \quad h_{yy} - L_2^{-2}h = -L_2^{-2}h_2, \quad y < b \quad (2)$$

с краевыми условиями $h(\pm\infty) = h_{1,2}$. Здесь $L_{1,2} = \sqrt{gh_{1,2}/f}$ — радиусы деформации Россби для значений $h_{1,2}$, параметр b (заранее неизвестный) определяет смещение скачка ПВ в процессе адаптации. Решение (2), непрерывное вместе с производной при $y = b$, имеет вид

$$h = \begin{cases} h_1 + kL_1 \exp((b-y)/L_1), & y > b, \\ h_2 - kL_2 \exp((y-b)/L_2), & y < b, \end{cases} \quad k = \frac{h_2 - h_1}{L_2 + L_1}. \quad (3)$$

Соответственно, распределение геострофической скорости

$$u = (c_2 - c_1) \begin{cases} \exp((b-y)/L_1), & y > b, \\ \exp((y-b)/L_2), & y < b, \end{cases} \quad c_{1,2} = \sqrt{gh_{1,2}}. \quad (4)$$

Для нахождения параметра b используем условие сохранения полной массы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (h - h_i) dy = 0. \quad (5)$$

Разбивая промежуток интегрирования в (5) на три промежутка — $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, b)$, $I_3 = (b, +\infty)$, после вычисления интегралов получим

$$b = L_2 - L_1.$$

С учетом последнего выражения решение определено однозначно.

Далее конкретизируем значения $h_{1,2} = H(1 \mp \varepsilon)$, где параметр ε определяет амплитуду отклонения полной глубины от среднего значения H . Задача с такими значениями хорошо изучена в рамках линейной теории адаптации [1]. Переходя к безразмерной координате $y' = y/L_R$, $L_R = \sqrt{gH}/f$, для распределений $\eta = (h - H)/H$ (относительное отклонение полной глубины) и скорости из (3), (4) получим:

$$\eta = \varepsilon \begin{cases} -1 + \delta(\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} \exp((d-y')/\sqrt{1-\varepsilon}), & y' > d, \\ 1 - \delta(\varepsilon)\sqrt{1+\varepsilon} \exp((y'-d)/\sqrt{1+\varepsilon}), & y' < d. \end{cases} \quad (6)$$

$$u = c\varepsilon\delta(\varepsilon) \begin{cases} \exp((d-y')/\sqrt{1-\varepsilon}), & y' > d, \\ \exp((y'-d)/\sqrt{1+\varepsilon}), & y' < d. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\delta(\varepsilon) = 2/(\sqrt{1-\varepsilon} + \sqrt{1+\varepsilon})$, $d = b/L_R = \varepsilon\delta(\varepsilon)$, $c = \sqrt{gH}$ — скорость длинных волн.

Решения линейной теории адаптации следуют из (6), (7) для значений $\varepsilon \ll 1$. Соответствующее распределение скорости $u = c\varepsilon \exp(-|y'|)$ описывает симметричную геострофическую струю, сформировавшуюся на месте скачка начального распределения глубины [1]. Горизонтальный масштаб струи равен радиусу деформации Россби L_R , масштаб скорости $U = \sqrt{gH\varepsilon}$ не зависит от фонового вращения (параметра Кориолиса). Отметим, что условие применимости линейного приближения можно сформулировать в терминах числа Маха $M \equiv U/c = \varepsilon \ll 1$.

Графики распределений (6), (7) для двух значений параметра $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 0.6$ приведены на рис. 1. Как видно, нелинейность приводит к смещению оси струи на расстояние $d = \varepsilon\delta(\varepsilon)$ и потере симметрии струи относительно оси. Степень асимметрии течения удобно характеризовать коэффициентом $As = l_2/l_1$, где $l_{1,2}$ — расстояния от оси струи b до точек, где скорость принимает некоторое характерное значение U_* (рис. 1). Обозначая $U_0 = c\varepsilon\delta(\varepsilon)$, из (7) найдем $l_{1,2} = L_R\sqrt{1 \mp \varepsilon} \ln(U_0/U_*)$ (в размерных переменных) и коэффициент асимметрии $As = \sqrt{1+\varepsilon}/\sqrt{1-\varepsilon}$. Если считать, что оси x, y направлены соответственно на запад и север, то для направленного на запад струйного течения $As > 1$. Таким образом, значение горизонтального сдвига скорости в северной (циклонической) области струи всег-

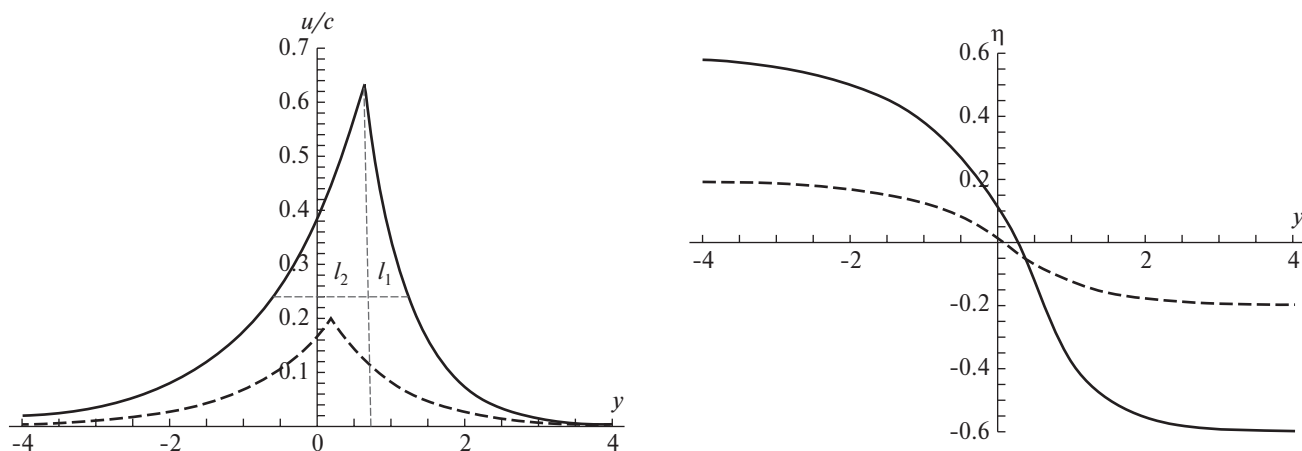


Рис. 1. Графики распределений нормированной скорости u/c и отклонения уровня η в струйном течении для значений параметра $\varepsilon = 0.2$ (штриховая линия) и $\varepsilon = 0.6$ (сплошная линия). Горизонтальная координата нормирована на L_R . Вертикальная линия (короткий штрих на верхнем графике) отмечает положение оси струи, $l_{1,2}$ — расстояния от оси до точек с заданным значением скорости.

да превосходит значение сдвига в южной (антициклонической) области. С ростом ε или, что эквивалентно, ростом скорости течения U_0 , коэффициент асимметрии неограниченно растет, достигая бесконечности (опрокидывание профиля) при $\varepsilon = 1$ ($U_0 = c\sqrt{2}$). При $\varepsilon = 0.5$ значение $As = 1.72$.

Отметим, что горизонтальная асимметрия профиля скорости атмосферных струйных течений обнаруживается данными прямых натурных измерений [3], и механизм нелинейного геострофического приспособления дает естественное объяснение этой особенности. Для океанических струйных течений также следует ожидать проявлений этой особенности.

Наряду с асимметрией еще один интересный нелинейный эффект связан с зависимостью осевой скорости струи $U_0 = c\varepsilon\delta(\varepsilon) = c(\sqrt{1+\varepsilon} - \sqrt{1-\varepsilon})$ от ее горизонтального масштаба L . В качестве L естественно принять $L = 0.5(l_1 + l_2)$, где значения $l_{1,2}$ отвечают размерам, на которых скорость падает в e раз ($U/U_* = e$). Отсюда $L = L_R/\delta(\varepsilon)$ и, с учетом асимптотики $\delta^{-1}(\varepsilon) \sim 1 - \varepsilon^2/8$, $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $U_0 \sim c\varepsilon$, $L \sim L_R(1 - \varepsilon^2/8)$. Исключение ε из последних соотношений приводит к зависимости $L/L_R = 1 - 0.5(U_0/2c)^2$. Эта зависимость показывает, что чем больше осевая скорость струйного течения, тем меньше его горизонтальный масштаб.

Подчеркнем, что полученное решение описывает только геострофическое состояние. Полное решение задачи Коши включает также

нестационарный волновой компонент, описывающий излучение гравитационных волн в процессе адаптации. В рамках линейной теории этот компонент представляется аналитически в терминах функций Бесселя [1].

3. СИСТЕМА ИЗ ДВУХ ВСТРЕЧНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрим теперь задачу Коши с нулевым начальным полем скорости и распределением глубины в форме прямоугольника: $h_i(y) = h_2$, $|y| < b_0$, $h_i(y) = h_1$, $|y| > b_0$. Поскольку начальное распределение q в этой задаче также кусочно-постоянно, для нахождения h в геострофическом состоянии имеем уравнения (2), которые рассматриваются соответственно в областях $|y| > b$ и $|y| < b$, где неизвестный параметр b определяет смещение границ начального прямоугольника. К уравнениям (2) присоединяются краевые условия $h(\pm\infty) = h_1$. Решение, непрерывное вместе с производной при $y = \pm b$, представляется в виде

$$h = \begin{cases} h_2 + C_2 \operatorname{ch}(y/L_2), & |y| < b, \\ h_1 + C_1 \exp((b - |y|)/L_1), & |y| > b, \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{\Delta h}{(L_2/L_1) \operatorname{cth}(b/L_2) + 1}, \quad (8)$$

$$C_2 = -\frac{\Delta h \operatorname{sh}^{-1}(b/L_2)}{\operatorname{cth}(b/L_2) + (L_1/L_2)}, \quad \Delta h = h_2 - h_1.$$

Распределение скорости — $u = -(g/f)h_y$. Для нахождения параметра b используется интеграль-

ное условие сохранения полной массы (5). С учетом четности подынтегральных функций интеграл (5) можно свести к интегрированию по промежутку $(0, +\infty)$. Разбиение этого промежутка на три части с последующим вычислением элементарных интегралов приводит к соотношению

$$b - b_0 = \frac{L_2^2 - L_1^2}{L_2 \operatorname{cth}(b/L_2) + L_1}. \quad (9)$$

При фиксированном значении b_0 соотношение (9) есть нелинейное уравнение для нахождения параметра b .

Далее рассматриваем значения $h_1 = H$, $h_2 = H(1 + \varepsilon)$, где амплитудный параметр $-1 < \varepsilon < 1$. Переходя к безразмерной координате $y' = y/L_R$, $L_R = L_1 = \sqrt{gH}/f$, и обозначая $\delta = L_1/L_2 = 1/\sqrt{1+\varepsilon}$, для распределений $\eta = (h - H)/H$ и скорости получим:

$$\eta = \varepsilon \begin{cases} 1 - F \frac{\operatorname{ch}(\delta y')}{\delta \operatorname{sh}(\delta d)}, & |y'| < d, \\ F \exp(d - |y'|), & |y'| > d, \end{cases} \quad (10)$$

$$u = c\varepsilon F \begin{cases} \operatorname{sh}(\delta y') / \operatorname{sh}(\delta d), & |y'| < d, \\ \operatorname{sign}(y') \exp(d - |y'|), & |y'| > d, \end{cases}$$

$F = \delta / (\operatorname{cth}(\delta d) + \delta)$. Входящий сюда параметр $d = b/L_R$ находится из безразмерной формы уравнения (9):

$$d - d_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon} \operatorname{cth}(d/\sqrt{1 + \varepsilon}) + 1}, \quad (11)$$

где $d_0 = b_0/L_R$. Для корня (11) справедливы равномерные по параметру ε асимптотики $d \sim d_0 + \varepsilon(\sqrt{1 + \varepsilon} + 1)^{-1} \sim d_0$ при $d_0 \gg 1$, $d \sim (1 + \varepsilon)d_0$ при $d_0 \ll 1$. При $\varepsilon \ll 1$ и произвольных значениях d_0 имеем асимптотику $d \sim d_0 + (\varepsilon / (\operatorname{cth}(d_0) + 1))$.

Решения линейной теории адаптации ($\varepsilon \ll 1$) получаются из (10), если положить $\delta = 1$, $d = d_0$. Соответствующие решения описывают систему из двух встречных струйных течений, поддерживаемую локализованным возмущением полной глубины (рис. 2). Физика образования этой системы совершенно прозрачна: радиальные течения при растекании центрального столба жидкости трансформируются в зональные геострофические течения за счет отклоняющего действия силы Кориолиса. Осевая скорость течений $U_0 = c\varepsilon / (\operatorname{cth}(d_0) + 1)$ пропорциональна ε и зависит от отношения двух геометрических масштабов $d_0 = b_0/L_R$. С ростом d_0 эта скорость монотонно

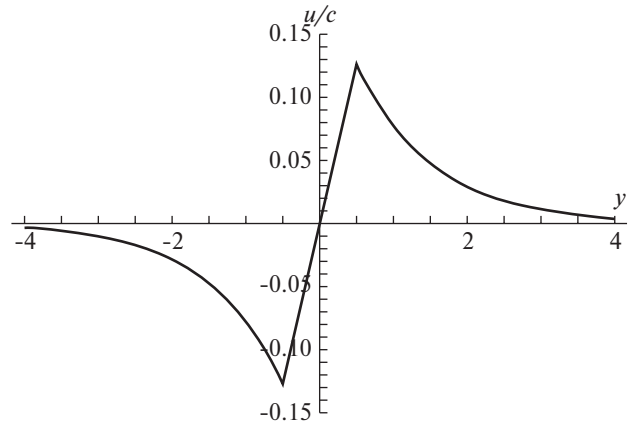


Рис. 2. Профиль нормированной скорости u/c в системе двух встречных струйных течений для значений параметров $\varepsilon = 0.4$ и $d_0 = 0.5$ (линейная теория). Горизонтальная координата нормирована на L_R .

возрастает от нуля до постоянного значения $U_0 = 0.5c\varepsilon$ при $d_0 \rightarrow \infty$. Обратим внимание, что в рамках линейной теории смена знака ε приводит лишь к смене знака решения без изменения его структуры. Графики решений, отвечающих противоположным знакам ε , зеркально симметричны.

На рис. 3 приведены графики распределений (10) для значений параметров $\varepsilon = \pm 0.4$ (пунктир) и $\varepsilon = \pm 0.9$ (сплошная линия) при $d_0 = 0.5$. Как видно из рисунка, распределения, отвечающие разным знакам ε , уже не обладают зеркальной симметрией (симметрией относительно горизонтальной оси), причем эта тенденция растет с увеличением ε . Так, при $\varepsilon = -0.9$ осевая скорость течений (по модулю) практически в два раза превосходит значение скорости при $\varepsilon = +0.9$. Таким образом, учет нелинейности приводит к отличиям структуры решений для случаев начального распределения h в форме возвышения (горба) и понижения (впадины). Отметим, что для осесимметричных течений на мелкой воде данная особенность численно исследовалась в работе [12] и была названа циклон-антициклонной асимметрией. Проявление этой особенности связывалось с влиянием центробежной силы. Из представленных аналитических решений следует, что данная особенность проявляется и для плоских (одномерных) течений.

С учетом приведенных асимптотик корня (11), для осевой скорости течений (10) (скорости при $y' = d$) справедливы асимптотики $U_0 \sim c\varepsilon / (1 + \sqrt{1 + \varepsilon})$, $d_0 \gg 1$, $U_0 \sim c\varepsilon d_0$, $d_0 \ll 1$. (12)

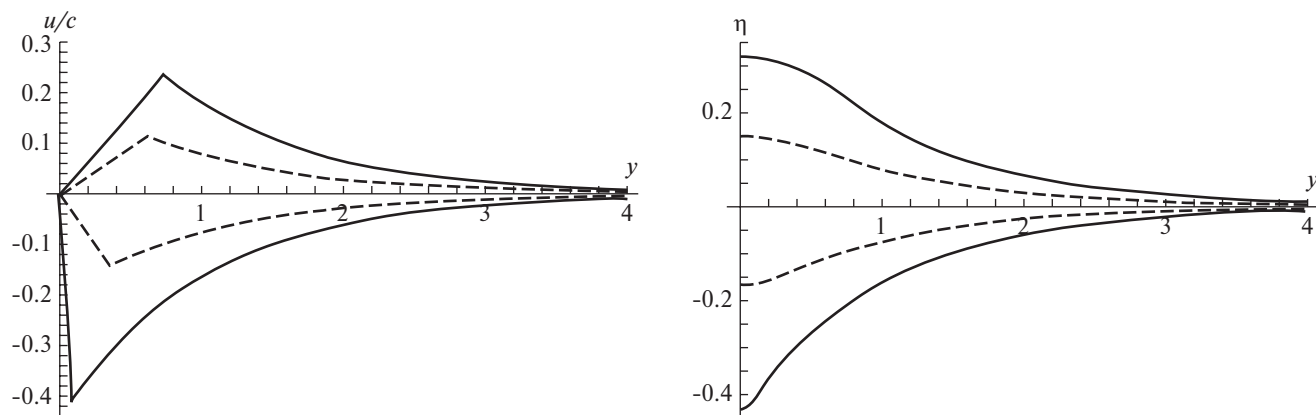


Рис. 3. Графики распределений нормированной скорости u/c и отклонения уровня η в системе двух встречных струйных течений для значений параметров $\varepsilon = \pm 0.4$ (штриховая линия) и $\varepsilon = \pm 0.9$ (сплошная линия) при $y > 0$. Значение $d_0 = 0.5$. Графики η, u при $y < 0$ получаются соответственно симметричным отражением относительно вертикальной оси и начала координат (четная, нечетная функции).

Из (12) следует, что асимметрия, связанная с различием в знаке ε , наиболее сильно выражена при больших горизонтальных масштабах начального возмущения. Удобной мерой асимметрии является параметр $P = U_- / U_+$, где U_+, U_- — абсолютные значения осевой скорости $U_0 = c\varepsilon F$ соответственно для значений $\pm \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. При $d_0 \gg 1$ этот параметр

$$P = \frac{U_-}{U_+} = \frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}} \quad (13)$$

растет от 1 ($\varepsilon = 0$) до $1 + \sqrt{2} \sim 2.4142$ ($\varepsilon = 1$). Таким образом, скорость течений в случае начального локального понижения глубины может более чем в два раза превосходить скорость течений в случае локального повышения глубины с той же амплитудой.

Отметим, что в рамках линейной теории можно также получить полное аналитическое решение, описывающее процесс установления системы двух струйных течений.

4. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Состояние циклострофического равновесия для осесимметричных движений описывается уравнением

$$v^2 / r + fv = gdh / dr, \quad (14)$$

где v — тангенциальная компонента скорости. Найдем это состояние в задаче с начальным распределением глубины $h_i = h_2, 0 < r < b_0, h_i = h_1, r > b_0$. Как и ранее, будем считать $h_1 = H, h_2 = H(1 + \varepsilon)$.

Для определения равновесного состояния используем приближенный подход, основанный на аппроксимации (14) уравнением геострофического равновесия $fv = gdh / dr$. Оценку точности этой аппроксимации можно получить из масштабного анализа. Если в качестве масштабов r, h принять соответственно $b_0, \Delta h = \varepsilon H$, то из геострофического уравнения получим масштаб скорости $c\varepsilon / d_0$, где $d_0 = b_0 / L_R, L_R = \sqrt{gH} / f, c = \sqrt{gH}$. При таком масштабе отношение первого слагаемого (14) ко второму есть величина порядка ε / d_0^2 . Таким образом, в уравнении (14) можно пренебречь центробежной силой, если $\varepsilon \ll 1$ или $d_0 \gg 1$.

С учетом уравнения геострофического равновесия и точного выражения для ПВ

$q = (f + r^{-1}d(rv) / dr) / h$, распределение полной глубины в равновесном состоянии находится из уравнений

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh}{dr} \right) - \frac{1}{L_{1,2}^2} h = -\frac{1}{L_{1,2}^2} h_{1,2}, \quad L_{1,2} = \sqrt{gh_{1,2}} / f, \quad (15)$$

которые, соответственно, рассматриваются H в областях $r > b$ и $0 < r < b$. Решение (15), удовлетворяющее условию $h(\infty) = h_1 = H$, ищется в виде $h = h_2 + C_2 I_0(r / L_2), 0 < r < b, h = h_1 + C_1 K_0(r / L_2), r > b$, где $I_0(z), K_0(z)$ — модифицированные цилиндрические функции. Константы $C_{1,2}$ находятся из условий непрерывности h вместе с производной при $r = b$, а неизвестный параметр b — из условия сохранения полной массы $\int_0^\infty (h - h_i) r dr = 0$. Переходя к безразмерным пере-

менным $r' = r / L_R$, $d_0 = b_0 / L_R$, $d = b / L_R$ и обозначая $\delta = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon}$, для распределений отклонения глубины и скорости получим:

$$\eta = \varepsilon \begin{cases} 1 - F \frac{I_0(\delta r')}{\delta I_1(\delta d)}, & r' < d, \\ FK_0(r') / K_1(d), & r' > d, \end{cases} \quad (16)$$

$$F = \delta \left(\frac{I_0(\delta d)}{I_1(\delta d)} + \delta \frac{K_0(d)}{K_1(d)} \right)^{-1},$$

$$v = -c\varepsilon F \begin{cases} I_1(\delta r') / I_1(\delta d), & r' < d, \\ K_1(r') / K_1(d), & r' > d. \end{cases} \quad (17)$$

При $\varepsilon < 0$ течение представляет собой циклон, при $\varepsilon > 0$ — антициклон. Безразмерный параметр d находится из уравнения ε :

$$\frac{1}{2}(d^2 - d_0^2) = \varepsilon d \delta \left(\frac{I_0(\delta d)}{I_1(\delta d)} + \delta \frac{K_0(d)}{K_1(d)} \right)^{-1}, \quad (18)$$

аналогичного уравнению (11) для одномерных течений. С учетом асимптотик для цилиндрических функций при $d_0 \gg 1$ для корня (18) справедлива асимптотика $d \sim d_0$, равномерная по параметру ε . При этом в формулах (16), (17) с большой точностью $F \sim 1 / (1 + \sqrt{1 + \varepsilon})$.

Графики распределений (16), (17) качественно подобны графикам на рис. 3. Как и для плоских течений, зеркальная асимметрия графиков, отвечающих различным знакам ε , характеризуется параметром $P = U_- / U_+$, где теперь U_+ , U_- — максимальные по модулю значения тангенциальной скорости $V_0 = c\varepsilon F$ соответственно для значений $\pm\varepsilon$. При $d_0 \gg 1$ для этого параметра справедлива асимптотика (13), т.е. скорость циклона всегда превосходит скорость антициклона.

Отметим, что для определения равновесных состояний в упомянутой работе [12] был использован лагранжев подход. Он основан на использовании лагранжевых законов сохранения абсолютного углового момента $M = rv + fr^2 / 2$ и массы

$$M = M_i(r_0), \quad h = h_i(r_0) \frac{r_0}{r} \frac{dr_0}{dr}. \quad (19)$$

Здесь r_0, r — соответственно начальная (лагранжева) и конечная (эйлерова) координаты жидких частиц. Выражая в уравнении циклострофического равновесия (14) скорость v через M , с учетом (19) получим замкнутое уравнение

$$g \frac{d}{dr} \left(h_i(r_0) \frac{r_0}{r} \frac{dr_0}{dr} \right) = \frac{M_i^2(r_0)}{r^3} - \frac{f^2 r}{4} \quad (20)$$

для нахождения зависимости $r_0 = r_0(r)$ по заданным начальным распределениям $h_i(r_0)$, $M_i(r_0)$. Для приведенных выше начальных условий нелинейное уравнение (20) (записанное в крайне громоздком виде) интегрировалось в [12] численно. Как показывает анализ, уже при умеренных значениях параметра $d_0 = b_0 / L_R$ численные решения [12] хорошо согласуются с аналитическим решением (16), (17).

Отметим также, что для плоских (одномерных) течений из системы (1) следуют лагранжевы законы сохранения геострофического момента $m = fy - u$ и полной массы

$$m = m_i(y_0), \quad h = h_i(y_0) \frac{dy_0}{dy}. \quad (21)$$

С учетом (21), из уравнения геострофического равновесия следует замкнутое нелинейное уравнение

$$g \frac{d}{dy} \left(h_i(y_0) \frac{dy_0}{dy} \right) = fm_i(y_0) - f^2 y \quad (22)$$

для нахождения зависимости $y_0 = y_0(y)$ по начальным распределениям. Как показано выше, для начальных кусочно-постоянных распределений очень удобен эйлеров подход, сводящийся к решению простых линейных уравнений. Другие варианты эйлерова подхода, основанные на использовании сохраняющихся функциональных связей между лагранжевыми инвариантами, рассматривались в работах [4, 5].

5. СМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ И СКРЫТАЯ ГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ АДАПТАЦИЯ

Процесс геострофической адаптации реализуется только в присутствии фонового вращения и приводит к формированию наблюдаемых вихревых движений. Рассмотрим предельно упрощенную ситуацию, когда фоновое вращение отсутствует и в начальный момент времени создано локальное (осесимметричное) возмущение фоновой глубины H (камень брошен в воду). В рамках традиционного эйлерова описания, от камня побегут волны (круги), которые с течением времени рассеются в пространстве, и установится состояние покоя с прежней глубиной H . На первый взгляд, начальное и конечное состояния (с нулевыми полями скорости) эквивалентны. В действительности, в процессе рассеивания волн произошло регулярное смещение частиц жидкости, так что в конечном состоянии частицы занимают уже другие положения.

Смещения частиц можно найти из лагранжевой формы уравнения неразрывности (баланса массы) (19). Полагая в этом уравнении $h=H$ и представляя начальное распределение глубины в виде $h_i(r_0)=H(1+\eta(r_0))$, где η — отклонение, получим уравнение $rdr/dr_0=r_0(1+\eta(r_0))$ для нахождения зависимости $r=r(r_0)$. С учетом условия $r(0)=0$ решение представляется в виде

$$r^2=r_0^2+2\int_0^{r_0}(r_0)r_0dr_0. \quad (23)$$

С использованием (23) находится лагранжево смещение $\xi(r_0)=r-r_0$ частицы от ее начального положения r_0 . Так, в случае ступенчатого отклонения $\eta(r_0)=\varepsilon$, $r_0 < b$, $\eta(r_0)=0$, $r_0 > b$, из (23) получим

$$\xi(r_0)=\varepsilon \begin{cases} r_0/(1+\sqrt{1+\varepsilon}), & r_0 < b, \\ b^2/(r_0+\sqrt{r_0^2+\varepsilon b^2}), & r_0 > b. \end{cases} \quad (24)$$

Согласно (24), максимальное смещение $\xi_m=\varepsilon b/(1+\sqrt{1+\varepsilon})$ испытывают частицы с начальной координатой $r_0=b$. Графики распределений (24) для значений $\varepsilon=\pm 0.4$, $\varepsilon=\pm 0.9$ представлены на рис. 4. Здесь опять наблюдается зеркальная асимметрия, связанная с зависимостью от знака ε . Если обозначить через ξ_+ , ξ_- абсолютные значения ξ_m для значений $\pm\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то для параметра $P=\xi_-/\xi_+$, очевидно, получим выражение (13). Таким образом, более сильные смещения происходят в случае начального локального падения глубины.

Аналогично находятся лагранжевы смещения в одномерном случае. Полагая в уравнении неразрывности (20) $h=H$ и $h_i(y_0)=H(1+\eta(y_0))$, по-

лучим простейшее уравнение $dy/dy_0=1+\eta(y_0)$, откуда $y=y_0+\int_0^{y_0}\eta(y_0)dy_0$. В случае ступенчатого распределения $\eta(y_0)=\varepsilon$, $|y| < b$, $\eta(y_0)=0$, $|y| > b$, лагранжево смещение $\xi(y_0)=y-y_0$ дается выражениями $\xi(y_0)=\varepsilon y_0$, $|y| < b$, $\xi(y_0)=\varepsilon b$, $|y| > b$. Обратим внимание, что, в отличие от осесимметричного случая, смещение $\xi(y_0)$ не затухает на бесконечности.

Описанные выше смещения, видимо, можно наблюдать, например, по дрейфу поплавков на поверхности воды (автор пытался это делать во время рыбалки). Представляют интерес задачи, связанные с определением смещений в более полных моделях, например модели глубокой воды. При этом нужно использовать полную лагранжеву запись уравнения неразрывности в форме якобиана. Насколько известно автору, такие задачи не рассматривались.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные задачи восходят к ранним исследованиям процесса адаптации [8, 14]. Новую актуальность они приобретают с осознанием важной роли струйных течений в динамике океана и атмосферы. Так, погодные катаклизмы прошедшего десятилетия связывают с изменением динамического режима атмосферных струйных течений [7]. В этой связи представляется важным исследование механизмов их формирования и устойчивости. Как показано в настоящей работе (разделы 3, 4), а также работах [2, 11], естественным механизмом формирования струйных течений является процесс геострофической адаптации. В рамках квазигеострофического приближения (уравнение Чарни–Обухова) исследование устойчивости струйных течений выполнено в недавней работе [6]. Было показано, что изолированное струйное течение устойчиво, а система из двух встречных струйных течений неустойчива. Излучательная неустойчивость изолированного струйного (в рамках полной системы уравнений мелкой воды) описана в [10]. Представляет интерес дальнейшее изучение этих вопросов.

Благодарности. Автор благодарит Л.Х. Ингеля за помощь в работе.

Источник финансирования. Результаты второго раздела и разделов 3–5 получены соответственно при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-05-00831) и РНФ (проект № 14-17-00806).

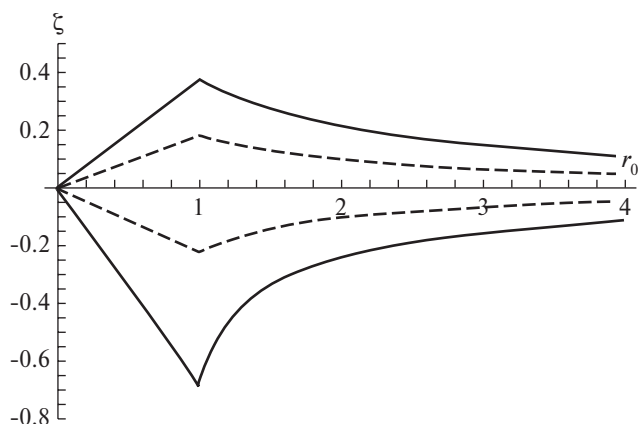


Рис. 4. Зависимость лагранжева смещения жидкой частицы от ее начального положения для значений параметров $\varepsilon = \pm 0.4$ (пунктир) и $\varepsilon = \pm 0.9$ (сплошная линия). Значения ξ , r_0 нормированы на b .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 1. 396 с.
2. Калашник М.В. Формирование фронтов и струйных течений при геострофическом приспособлении в стратифицированной вращающейся жидкости // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 2. С. 247–251.
3. Калашник М.В., Нерушев А.Ф., Ивангородский Р.В. Характерные масштабы и горизонтальная асимметрия струйных течений в атмосфере Земли // Изв. РАН. Физ. атмосфер. и океана. 2017. Т. 53. № 2. С. 179–187.
4. Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О состояниях цикло-строфического и геострофического баланса // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 2. С. 233–236.
5. Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О состояниях цикло-строфического и геострофического баланса в модели мелкой воды // Изв. РАН. Физ. атмосфер. и океана. 1996. Т. 32. № 3. С. 402–409.
6. Калашник М.В., Чхетиани О.Г. Об устойчивости струйных течений во вращающемся слое мелкой воды // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 29–42.
7. Мастерс Дж. Струйное течение становится фатальным // В мире науки. 2015. № 2. С. 62–68.
8. Обухов А.М. К вопросу о геострофическом ветре // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. 13. № 4. С. 281–306.
9. Blumen W. Geostrophic adjustment // Rev. Geophys. Space Phys. 1972. V. 10. № 2. P. 485–528.
10. Dritshel D.G., Vanneste J. Instability of a shallow water potential — vorticity front // J. Fluid Mech. 2006. V. 561. P. 237–254.
11. Kalashnik M.V. Geostrophic adjustment and frontogenesis in the continuously stratified fluid // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 2004. V. 38. № 1. P. 1–37.
12. Kuo A.C., Polvani L.M. Nonlinear geostrophic adjustment, cyclone/anticyclone asymmetry, and potential vorticity rearrangement // Physics of Fluids. 2000. V. 12. № 5. P. 1087–1100.
13. Reznik G.M., Zeitlin V., Ben Jelloul M. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part I: Rotating shallow water model // J. Fluid Mech. 2001. V. 445. P. 93–120.
14. Rossby C.G. On the mutual adjustment of pressure and velocity distribution in simple current systems // J. Mar. Res. 1937. V. 1. P. 239–263.

ASYMMETRY OF JET STREAMS FORMED UNDER NONLINEAR GEOSTROPHIC ADJUSTMENT IN SHALLOW WATER

© 2019 M. V. Kalashnik

Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Research and Production Association Typhoon, Obninsk, Russia
Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Received June 28, 2017

After revision February 08, 2018

The process of geostrophic adjustment in a rotating layer of shallow water is considered. For initial distributions of the fluid depth in the form of a step and a localized rectangle, this process results in the formation of an isolated jet stream and a system of two counter jet streams, respectively. In this paper, the features of these flows structure, related to the nonlinearity of the adjustment process, are studied. The main feature for an isolated jet stream is the horizontal asymmetry of its velocity profile. For a system of two opposing flows, a mirror asymmetry is characteristic, which is caused by the dependence on the sign of the amplitude of the initial disturbance of depth. The velocity of flows with a negative sign (depression) always exceeds the velocity with a positive sign (elevation).

Keywords: geostrophic adjustment, shallow water model, potential vortex, jet streams, horizontal asymmetry