ОКЕАНОЛОГИЯ, 2019, том 59, № 2, с. 201–207

ФИЗИКА МОРЯ

УДК 551.465

ВОЛНОВЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ В УСТОЙЧИВО-НЕЙТРАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОКЕАНЕ

© 2019 г. Г. М. Резник

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия
e-mail: greznikmd@yahoo.com

Поступила в редакцию 19.06.2017 г.
Принята к публикации 08.02.2018 г.

Развитая в [7] теория волновых пограничных слоев обобщается на случай устойчиво-стратифицированного океана, состоящего из верхнего однородного и нижнего стратифицированного слоев. В такой конфигурации вдобавок к погранслоям у дна и поверхности возникает волновой пограничный слой в окрестности поверхности раздела в нижней стратифицированной части бассейна. Каждый такой слой представляет собой узкую область, характеризующуюся резкими растущими со временем вертикальными градиентами плавучести и горизонтальной скорости. Как и в [7], погранслой у поверхности раздела возникает как результат свободной линейной волновой эволюции начальных полей достаточно общего вида. Построены точное решение и приближенное асимптотическое решение, описывающее долговременную эволюцию системы, и показано, что асимптотическое решение неплохо приближает точное уже на сравнительно небольших временах.

Ключевые слова: волновые пограничные слои, внутренние волны, устойчиво-нейтральная стратификация

DOI: 10.31857/S0030-1574592201–207

ВВЕДЕНИЕ

До работ [7, 11] волновые пограничные слои в геофизических задачах рассматривались при описании эволюции волн Россби в бассейнах, ограниченных боковыми границами [1–3, 8–10]. В этих задачах пограничный слой возникает около западной границы и представляет собой узкую область, ширина которой стремится с ростом времени к нулю, а поперечные градиенты некоторых характеристик — к бесконечности. В работе [7] мы показали, что похожие пограничные слои существуют в невращающемся слое стратифицированной жидкости, связаны они с внутренними волнами и сосредоточены у дна и/или поверхности слоя. Здесь мы продолжаем исследование волновых пограничных слоев применительно к т.н. устойчиво-стратифицированному океану, состоящему из верхней однородной и нижней стратифицированной жидкостей; плотность и остальные поля остаются непрерывными на поверхности раздела между жидкостями. Оказывается, в этом случае (кроме уже рассмотренных погранслоев у дна и поверхности) волновой пограничный слой возникает в окрестности поверхности раздела в нижней стратифицированной части бассейна. В разделе 2 дается постановка задачи, в разделе 3 получается ее точное решение в виде разложений по вертикальным волновым модам. В разделе 4 находится асимптотическое решение задачи на больших временах (в «духе» [2, 3, 7]), а в разделе 5 это решение сравнивается с точным решением, полученным в разделе 3. Раздел 6 содержит обсуждение результатов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем двухслойный океан постоянной глубины H, ограниченный твердыми дном и поверхностью (рис. 1). Плотность воды ρ, будучи непрерывной, постоянна, $\rho=\rho_0$, в верхнем слое толщиной $h-\eta$ и равна $\rho=\rho_0+\rho_s(z)+$ $+\rho'(x, y, z, t)$ в нижнем слое толщиной $H-h+\eta$, где h — постоянная средняя толщина однород-

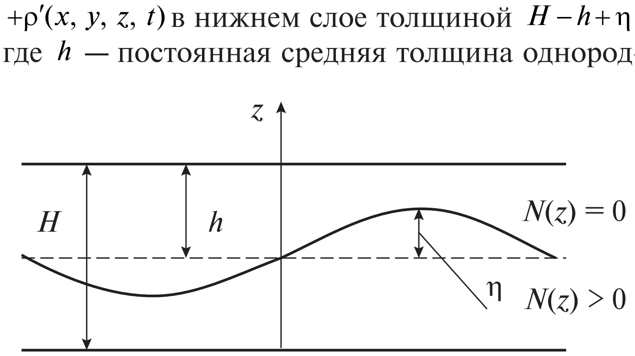


Рис. 1. Схематическое изображение устойчиво-нейтрально стратифицированного океана.

ного слоя и $\eta = \eta(x, y, t)$ — отклонение границы раздела между слоями. Сумма $\rho_0 + \rho_s(z)$ определяет равновесный профиль плотности в нижнем слое, отклонение ρ' предполагается малым, $\rho' << \rho_0$. В линейном приближении уравнения, определяющие эволюцию такой системы, записываются в виде:

$$\mathbf{u}_t = -\nabla p / \rho_0\,,\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\,;\ 0 \ge z \ge -h\,, \qquad (1а, б)$$

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{e}_z b = -\nabla p / \rho_0,\ b_t - N^2 w = 0,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0;\ -h \ge z \ge -H. \qquad (2а, б, в)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u,\ v,\ w)$ — вектор скорости; u, v, w — компоненты скорости вдоль осей x, y, z, направленных вдоль параллели, меридиана и вертикально вверх соответственно; ρ' и p — отклонения плотности и давления от их гидростатических распределений; $b = g\rho' / \rho_0$ — плавучесть, $N = \sqrt{-g\rho_{sz} / \rho_0}$ — частота плавучести; $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — орты соответствующих координатных осей; g — ускорение свободного падения.

Решения системы (1), (2) должны удовлетворять условиям непротекания на дне и поверхности:

$$w\big|_{z=0,-H} = 0\,, \qquad (3а)$$

и непрерывности на границе раздела:

$$[u,\ v,\ w,\ p]_{z=-h} = 0\,, \qquad (3б)$$

где $[a]_{z=-h} = a\big|_{z=-h+0} - a\big|_{z=-h-0}$. Кроме того, должны выполняться начальные условия

$$(u,\ v,\ b)_{t=0} = (u_I,\ v_I,\ b_I)(x,\ y,\ z),$$
$$w_I = -\int_{-H}^{z} (\partial_x u_I + \partial_y v_I)dz. \qquad (3в, г)$$

Здесь и ниже нижний индекс «I» обозначает начальные поля, верхним индексом «+» («–») будет обозначаться верхний (нижний) слой.

Сведем задачу (1)–(3) к задаче для вертикальной скорости. Применяя операцию дивергенции к (1а) и используя (1б), находим:

$$\Delta p^+ = \ \Delta u_t^+ = \Delta v_t^+ = \Delta w_t^+ = 0, \qquad (4)$$

откуда

$$\Delta u^+ = \Delta u_I^+,\ \ \Delta v^+ = \Delta v_I^+,\ \ \ \Delta w^+ = \Delta w_I^+. \ (5а, б, в)$$

Здесь $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$. Представим все величины в форме Фурье-интегралов вида:

$$w = \int \tilde{w}(\kappa,\ z,\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}d\kappa, \quad \kappa = (k,\ l)\,; \qquad (6)$$

здесь и ниже «тильда» обозначает соответствующую Фурье-амплитуду.

Из (5в), (3а) получаем для $\tilde{w}^+$:

$$\tilde{w}^+ - \tilde{w}_I^+ = A\mathrm{sh}\kappa z,\ \ (\tilde{w}^+ - \tilde{w}_I^+)_z = \kappa A\mathrm{ch}\kappa z, \qquad (7)$$

где A — некоторая постоянная амплитуда. Из (7) находим следующее соотношение на поверхности раздела:

$$(\tilde{w}^+ + \delta_0 \tilde{w}_z^+)_{z=-h} = (\tilde{w}_I^+ + \delta_0 \tilde{w}_{Iz}^+)_{z=-h},$$
$$\delta_0 = \mathrm{th}\kappa h / \kappa. \qquad (8а, б)$$

Уравнение для вертикальной скорости в нижнем стратифицированном слое получаем из (2) (см., например, [5]):

$$\Delta w_{tt}^- + N^2 \Delta_2 w^- = 0, \qquad (9)$$

где $\Delta_2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Далее в силу (3а, б) имеем:

$$w^-\big|_{z=-H} = 0,\ \ [w]_{z=-h} = [w_z]_{z=-h} = 0. \qquad (10а, б)$$

В терминах Фурье-амплитуд уравнение (9) и граничные условия для $\tilde{w}^-$ записываются с учетом (8), (10б) как:

$$(\tilde{w}_{zz}^- - \kappa^2 \tilde{w}^-)_{tt} - \kappa^2 N^2 \tilde{w}^- = 0, \qquad (11)$$

$$\tilde{w}^-\big|_{z=-H} = 0,$$
$$(\tilde{w}^- + \delta_0 \tilde{w}_z^-)_{z=-h} = (\tilde{w}_I + \delta_0 \tilde{w}_{Iz})_{z=-h}. \qquad (12а, б)$$

Должны также удовлетворяться начальные условия:

$$(\tilde{w}^-, \tilde{w}_t^-)\big|_{t=0} = (\tilde{w}_I^-, \tilde{w}_I^-). \qquad (13)$$

Начальное поле w_I известно из (3г), а поле $\dot{w}_I$ вычисляется по известной начальной плавучести b_I (см., например, [7]). В дальнейшем для простоты будем считать, что

$$\dot{\tilde{w}}_I = 0; \qquad (14)$$

это получается при $\rho_I = 0$.

Из (11) легко следует, что среднее по времени поле

$$\bar{\tilde{w}}^- = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{w}^- dt \qquad (15)$$

(ср. с [7]) тождественно равно нулю, $\bar{\tilde{w}}^- = 0$, что, очевидно, противоречит граничному условию (12б) при

$$(\tilde{w}_I + \delta_0 \tilde{w}_{Iz})_{z=-h} \ne 0\,. \qquad (16)$$

Специальный случай $(\tilde{w}_I + \delta_0 \tilde{w}_{Iz})_{z=-h} = 0$ мы рассматривать не будем и в дальнейшем полагаем условие (16) выполненным. Аналогично [7], указанная несогласованность приводит к возникновению у границы раздела волнового пограничного слоя, в котором происходит переход от нестационарного поля $\tilde{w}^- + \delta_0 \tilde{w}_z^-$ внутри области с нулевым средним по времени к не зависящему от времени граничному значению $(\tilde{w}_I + \delta_0 \tilde{w} /_{Iz})_{z=-h}$. Цель настоящей работы состоит в исследовании этого пограничного слоя.

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ВЕРТИКАЛЬНЫМ ВОЛНОВЫМ МОДАМ

В дальнейшем мы для простоты положим $N = N_0 = \mathrm{const}$ и перейдем к безразмерным переменным, используя масштабы времени $T = 1/N_0$, скорости U, давления $P = \rho_0 U N_0 L$, плавучести $B = UN_0$, горизонтальный и вертикальный масштабы L и H, $L = H$. В безразмерной форме уравнения (1)–(3) остаются прежними, только ρ_0, N, H заменяются на 1.

Представим $\tilde{w}^-$ в виде:

$$\tilde{w}^- = \tilde{w} + \tilde{w}_I^-; \tag{17}$$

для $\tilde{w}$ с учетом (14) получаем:

$$(\tilde{w}_{zz} - \kappa^2 \tilde{w})_{tt} - \kappa^2 \tilde{w} = \kappa^2 \tilde{w}_I^-, \tag{18}$$

$$\begin{gathered}(\tilde{w} + \delta_0 \tilde{w}_z)_{z=-h} = 0, \quad \tilde{w}\big|_{z=-1} = 0,\\ \tilde{w}\big|_{t=0} = \tilde{w}_t\big|_{t=0} = 0.\end{gathered} \tag{19а, б, в}$$

Решение ищем в форме разложения по собственным колебаниям однородной системы (18), (19) вида:

$$W = \tilde{W}(k,\ l,\ z)\exp(-i\sigma t). \tag{20}$$

Для амплитуды $\tilde{W}$ и частоты σ получаем следующую задачу Штурма-Лиувилля на собственные значения:

$$\begin{gathered}\tilde{W}_{zz} + \kappa^2(1/\sigma^2 - 1)\tilde{W} = 0,\\ (\tilde{W} + \delta_0 \tilde{W}_z)_{z=-h} = 0, \quad \tilde{W}\big|_{z=-1} = 0.\end{gathered} \tag{21а, б, в}$$

Решение этой задачи без труда находится:

$$\begin{gathered}\tilde{W} = \tilde{W}_n = \sin[q_n(z+1)],\\ q_n = \kappa\sqrt{1/\sigma_n^2 - 1}, \quad n = 1,\ 2,\ldots\end{gathered} \tag{22}$$

Параметр q_n определяется из условия (21б):

$$\operatorname{tg}[q_n(1-h)] = -\delta_0 q_n, \quad n = 1, 2,\ldots \tag{23}$$

Зная q_n, можно найти частоту σ_n:

$$\sigma_n = \kappa\Big/\sqrt{\kappa^2 + q_n^2}\ . \tag{24}$$

Функции $\tilde{W}_n$ образуют полную ортогональную систему [6]; решение ищется в виде рядов:

$$\begin{gathered}\tilde{w} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n(k,\ l,\ t)\sin[q_n(z+1)],\\ \tilde{w}_I^- = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{In}^-(k,\ l,\ t)\sin[q_n(z+1)].\end{gathered} \tag{25а, б}$$

Здесь

$$(\tilde{w}_n, \tilde{w}_{In}^-) = a_n^{-1}\int_{-1}^{-h}(\tilde{w}, \tilde{w}_I^-)\sin[q_n(z+1)]dz\,, \tag{26а}$$

$$\begin{gathered}a_n = \int_{-1}^{-h}\sin^2[q_n(z+1)]dz =\\ = 0.5\{1 - h + \delta_0\cos^2[q_n(1-h)]\}.\end{gathered} \tag{26б}$$

Подставляя (25) в (18), получаем с учетом (24) и начальных условий (19в):

$$\tilde{w}_n = -\tilde{w}_{In}^-(1 - \cos\sigma_n t), \tag{27}$$

т.е. решение задачи (18), (19) для $\tilde{w}^-$ записывается в виде:

$$\tilde{w}^- = \tilde{w}_I^- - \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_{In}^-(1-\cos\sigma_n t)\sin[q_n(z+1)]. \tag{28}$$

В силу (2б), записанного в безразмерной форме, имеем для плавучести $\tilde{b}$:

$$\tilde{b} = \tilde{b}_I + \int_0^t \tilde{w}^- dt. \tag{29}$$

Из (28), (29) находим решение для плавучести в виде следующего ряда:

$$\tilde{b} = \tilde{b}_I + \tilde{w}_I^- t - \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_{In}^-\left(t - \frac{\sin\sigma_n t}{\sigma_n}\right)\sin[q_n(z+1)]. \tag{30}$$

Далее, используя (8) и непрерывность $\tilde{w}$, $\tilde{w}_z$ на поверхности раздела $z = -h$, выразим вертикальную скорость и ее производную в верхнем слое через значение функции $\tilde{w}$ на границе раздела:

$$\tilde{w}^+ = \tilde{w}_I^+ - \frac{\operatorname{sh}\kappa z}{\operatorname{sh}\kappa h}\tilde{w}\big|_{z=-h},\ \tilde{w}_z^+ = \tilde{w}_{Iz}^+ - \frac{\kappa\operatorname{ch}\kappa z}{\operatorname{sh}\kappa h}\tilde{w}\big|_{z=-h}. \tag{31а, б}$$

Здесь $\tilde{w}$ дается разложением:

$$\tilde{w} = -\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_{In}^-(1-\cos\sigma_n t)\sin[q_n(z+1)]. \tag{32}$$

Разложения (28), (30) и (31), (32) определяют решения для плавучести и вертикальной скорости. Поведение всех полей на больших временах сильно зависит от поведения коэффициентов разложения $\tilde{w}_{In}^-$ при $n \to \infty$. Используя (23), нетрудно показать, что при условии (16) $\tilde{w}_{In}^- = O(n^{-1})$, $n \to \infty$. Можно поэтому ожидать, что «вес» высоких мод в указанных разложениях увеличивается с ростом времени, что приводит к усилению вертикальной изменчивости всех полей и возникновению нестационарных пограничных слоев у поверхности раздела и/или дна.

На рис. 2 на плоскости $(z,\ t)$ изображены изолинии Фурье-компонент $\underset{\sim}{w}^-(z,\ t,\ k,\ l)$, $\tilde{w}_z^-(z,\ t,\ k,\ l)$, $\tilde{b}(z,\ t,\ k,\ l)$ при фиксированных $k,\ l$ в нижнем стратифицированном слое для начальных условий:

$$\begin{gathered}\tilde{w}_I = \begin{cases}\tilde{w}_I^+ = (1 - 2/h)z - z^2/h^2, & 0 \ge z \ge -h\\ \tilde{w}_I^- = z + 1, & -h \ge z \ge -H\end{cases},\\ \tilde{b}_I = \tilde{w}_I = 0.\end{gathered} \tag{33}$$

Соответствующий коэффициент $\tilde{w}_{In}^-$ дается выражением:

$$\tilde{w}_{In}^- = -\frac{2(1-h+\delta_0)}{q_n}\frac{\cos[q_n(1-h)]}{1-h+\delta_0\cos^2[q_n(1-h)]}. \tag{34}$$

В этом случае $w_I = 0$ и плавучесть обращается в нуль на дне $z = -1$, поэтому погранслой развивается только у поверхности раздела $z = -h$.

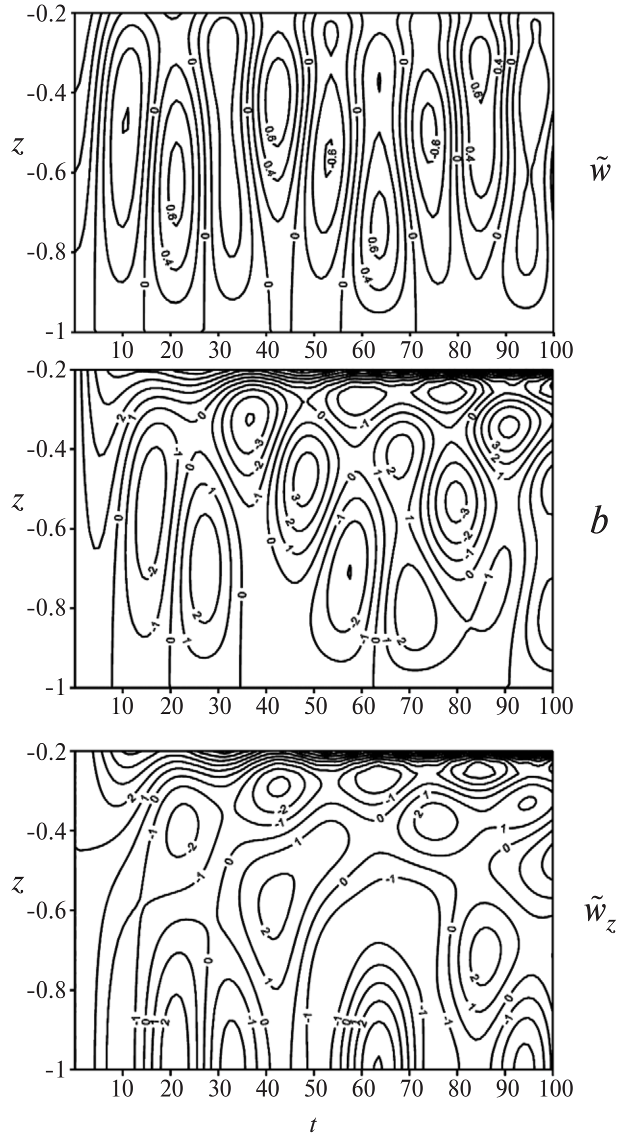


Рис. 2. Изолинии Фурье-амплитуд полей скорости и плавучести при фиксированных k, l. Интервалы между контурами полей $\tilde w^-$, $\tilde b$, $\tilde w_z^-$ равны 0,2, 1, 1 соответственно; $\kappa = 1$. Пунктирные изолинии соответствуют отрицательным значениям.

Погранслой отсутствует в поле вертикальной скорости $\tilde w^-$, осциллирующем почти периодически при любом $z = \text{const}$. В поле плавучести $\tilde b$ погранслой представляет собой узкую область в окрестности $z = -h$, характеризующуюся резкими вертикальными градиентами $\tilde b$; при этом с ростом времени толщина области уменьшается, а градиенты растут. Очень похожий пограничный слой развивается в поле производной $\tilde w_z^-$, пропорциональной Фурье-амплитуде горизонтальной скорости. Под погранслоями поля $\tilde b$, $\tilde w_z^-$ колеблются во времени. В следующем разделе дается асимптотическое описание полей в пограничных слоях.

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Для изучения пограничного слоя мы (следуя [2, 3, 7]) вводим вместо w осредненную по времени вертикальную скорость $\bar w$:

$$\bar w = t^{-1}\int_0^t w\,dt, \quad w = (t\bar w)_t. \qquad (35а, б)$$

Важное свойство новой переменной $\bar w$ состоит в том, что на больших временах вклад быстро осциллирующей части поля w в $\bar w$ стремится к нулю, и в $\bar w$ остается только медленно осциллирующий погранслой.

В терминах $\bar w$ приведенная к безразмерному виду задача (5в), (9), (10) записается как:

$$\Delta \bar w^+ = \Delta w_I^+, \ \left(t\Delta \bar w^-\right)_{tt} + t\bar\Delta \bar w^- = \Delta \dot w_I^-, \qquad (36а, б)$$

$$\bar w^+\big|_{z=0} = 0, \qquad \bar w^-\big|_{z=-1} = 0, \qquad (37а, б)$$

$$\bar w^+\big|_{z=-h} = \bar w^-\big|_{z=-h}, \quad \bar w_z^+\big|_{z=-h} = \bar w_z^-\big|_{z=-h}. \qquad (37в, г)$$

В пограничном слое в окрестности $z = -h$ при $z \le -h$ функция $\bar w^-$ должна стремиться к нулю при $t \to \infty$, поскольку среднее по времени поле (15) тождественно равно нулю, но производная $\bar w_z^- = O(1)$, чтобы обеспечить непрерывность касательной скорости на поверхности раздела. Решение нулевого порядка в пограничном слое ищем в виде (ср. [7]):

$$\bar w^- = D(x, y, \xi)/t, \quad \xi = -(z+h)t, \qquad (38)$$

где ξ — растянутая координата погранслоя. Подставляя (38) в (36б) и пренебрегая малыми членами, получаем при $t \gg 1$:

$$\xi^2 D_{\xi\xi\xi\xi} + 4\xi D_{\xi\xi\xi} + 2D_{\xi\xi} + \bar\Delta D = \Delta \dot w_I^-(x, y, -h). \qquad (39)$$

Представляя D в виде интеграла Фурье (6), находим с учетом (14) уравнение для Фурье-амплитуды $\tilde D$:

$$\xi^2 \tilde D_{\xi\xi\xi\xi} + 4\xi \tilde D_{\xi\xi\xi} + 2\tilde D_{\xi\xi} - \kappa^2 \tilde D = 0. \qquad (40)$$

Граничное условие для $\tilde D$ на границе раздела при $\xi = 0$ следует из условия (12б) и (38):

$$\tilde D_\xi\big|_{\xi=0} = -\frac{1}{\delta_0}(\tilde w_I + \delta_0 \tilde w_{Iz})_{z=-h}. \qquad (41)$$

Гладкое решение уравнения (40), удовлетворяющее условию (41) и затухающее при $\xi \to \infty$, дается формулой $\tilde D = CJ_0(2\sqrt{\kappa\xi})$ [4], откуда находим:

$$\tilde{\bar w}^- = CJ_0(2\sqrt{\kappa\xi})/t,$$
$$C = (\kappa\delta_0)^{-1}\left(\tilde w_I + \delta_0 \tilde w_{Iz}\right)_{z=-h}. \qquad (42а, б)$$

Здесь и ниже J_n — функция Бесселя n-го порядка. Для производной $\tilde{\bar{w}}_z^-$, определяющей горизонтальные скорости в погранслое, получаем:

$$\tilde{\bar{w}}_z^- = \kappa C J_1(2\sqrt{\kappa\xi})/\sqrt{\kappa\xi}\,. \qquad (43)$$

Для определения осредненной по времени плавучести

$$\bar{b} = t^{-1}\int_0^t b dt \qquad (44)$$

используем уравнение (2б), предполагая для простоты $b_I = 0$. После несложных преобразований находим из (2б), что $b = t\bar{w}^-$, откуда

$$\tilde{\bar{b}} = Ct^{-1}\int_0^t J_0(2\sqrt{\kappa\xi})dt = CJ_1(2\sqrt{\kappa\xi})/\sqrt{\kappa\xi}\,. \qquad (45)$$

Из (42) видно, что погранслойная вертикальная скорость мала, и именно поэтому погранслойная структура не видна в поле $\tilde{w}^-$ на рис. 2. Вместе с тем в силу (43), (45) соответствующие горизонтальные скорости и плавучесть порядка единицы быстро осциллируют по *z*, при этом их вертикальные градиенты растут пропорционально *t*. Толщина пограничного слоя уменьшается с ростом *t* пропорционально 1/ *t*. Отметим также, что асимптотические выражения для $\tilde{\bar{w}}_z^-$ и $\tilde{\bar{b}}$ различаются только коэффициентом κ и совпадают при $\kappa = 1$. Это объясняет сильное подобие пограничных слоев в полях плавучести и горизонтальной скорости ($\tilde{w}_z^-$) на рис. 2.

СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ И ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Для подтверждения справедливости асимптотик (42), (43), (45) и оценки скорости выхода решения на асимптотический режим были проведены численные эксперименты с начальными условиями (33).

Осредненные поля $\tilde{\bar{w}}^-$, $\tilde{\bar{w}}_z^-$, $\tilde{\bar{b}}$ в силу (28), (30) даются разложениями:

$$\tilde{\bar{w}}^- = t^{-1}\int_0^t \tilde{w}^- dt = \tilde{w}_I^- - \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_{In}^-\left(1 - \frac{\sin\sigma_n t}{\sigma_n t}\right)\sin[q_n(z+1)], \qquad (46а)$$

$$\tilde{\bar{w}}_z^- = t^{-1}\int_0^t \tilde{w}_z^- dt = \tilde{w}_{Iz}^- - \sum_{n=1}^{\infty}q_n\tilde{w}_{In}^-\left(1 - \frac{\sin\sigma_n t}{\sigma_n t}\right)\cos[q_n(z+1)], \qquad (46б)$$

$$\tilde{\bar{b}} = t^{-1}\int_0^t \tilde{b} dt = \tilde{b}_I + t\left[\frac{\tilde{w}_I^-}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_{In}^-\left(\frac{1}{2} - \frac{1-\cos\sigma_n t}{\sigma_n^2 t^2}\right)\sin[q_n(z+1)]\right]. \qquad (46в)$$

Соответственно, средние поля в однородном слое записываются в виде (см. выше (31), (32)):

$$\tilde{\bar{w}}^+ = \tilde{w}_I^+ - \frac{\mathrm{sh}\kappa z}{\mathrm{sh}\kappa h}\tilde{\bar{w}}\Big|_{z=-h},\quad \tilde{\bar{w}}_z^+ = \tilde{w}_{Iz}^+ - \frac{\kappa\,\mathrm{ch}\kappa z}{\mathrm{sh}\kappa h}\tilde{\bar{w}}\Big|_{z=-h}, \qquad (47а, б)$$

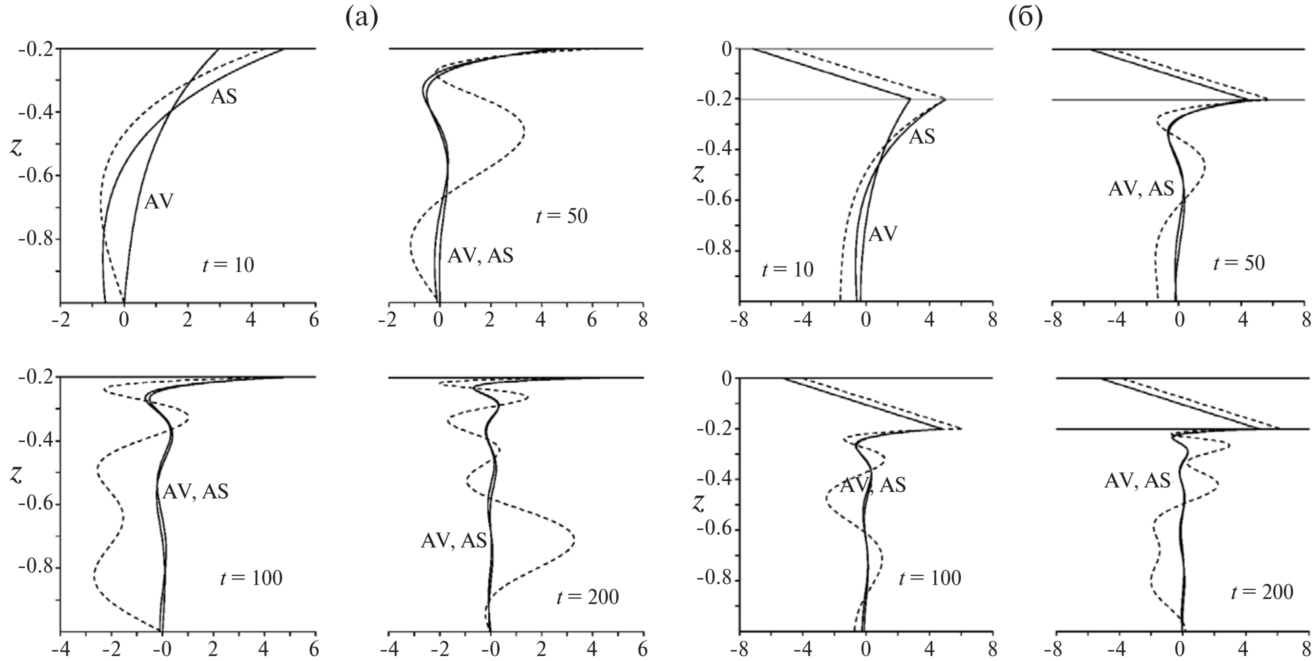
где $\tilde{\bar{w}}\Big|_{z=-h}$ дается разложением:

$$\tilde{\bar{w}}\Big|_{z=-h} = -\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_{In}^-\left(1 - \frac{\sin\sigma_n t}{\sigma_n t}\right)\sin[q_n(1-h)]\,. \qquad (48)$$

Цель численных экспериментов — сравнить точные осредненные поля (46) с их асимптотическими представлениями (42), (43), (45) и поведением мгновенных полей (28), (30) и $\tilde{w}_z^-$. Результаты расчетов для $\kappa = 1$ в различные моменты времени представлены на рис. 3. Пунктиром изображены профили мгновенных полей $\tilde{b}$, $\tilde{w}_z^-$, сплошными линиями — асимптотические (AS) и точные (AV) профили осредненных полей $\tilde{\bar{b}}$, $\tilde{\bar{w}}_z^-$. Асимптотические профили представлены в нижнем стратифицированном слое. Рисунки демонстрируют, что асимптотики (43), (45) неплохо согласуются с точными полями при $t = 10$, мало отличаются от них при $t = 50$ и практически неотличимы от точных осредненных полей при $t = 100$ и далее. Видно, что осредненные поля действительно имеют погранслойную структуру, все сильнее поджимаясь к границе раздела между слоями с течением времени и стремясь к нулю внутри области в соответствии с рассмотренным выше асимптотическим решением. Этот процесс сопровождается сильным ростом вертикальных градиентов плавучести и горизонтальной скорости ($\tilde{u}$, $\tilde{v} \sim \tilde{w}_z$) вблизи границы раздела. Мгновенные профили со временем не затухают и становятся все более и более изрезанными, причем максимальные вертикальные градиенты (еще более резкие, чем в осредненных полях) развиваются в окрестности границы раздела. Для сравнения на рис. 3в приведены мгновенные, осредненные и асимптотические профили вертикальной скорости (28), (31), (42а), в которых элементы погранслойной структуры выражены очень слабо.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В [7] мы получили, что при линейном свободном развитии достаточно общих начальных полей в стратифицированном невращающемся слое жидкости на больших временах у поверхности и/или дна возникают узкие нестационарные (т.н. волновые) пограничные слои. При $t \to \infty$ толщина такого погранслоя стремится



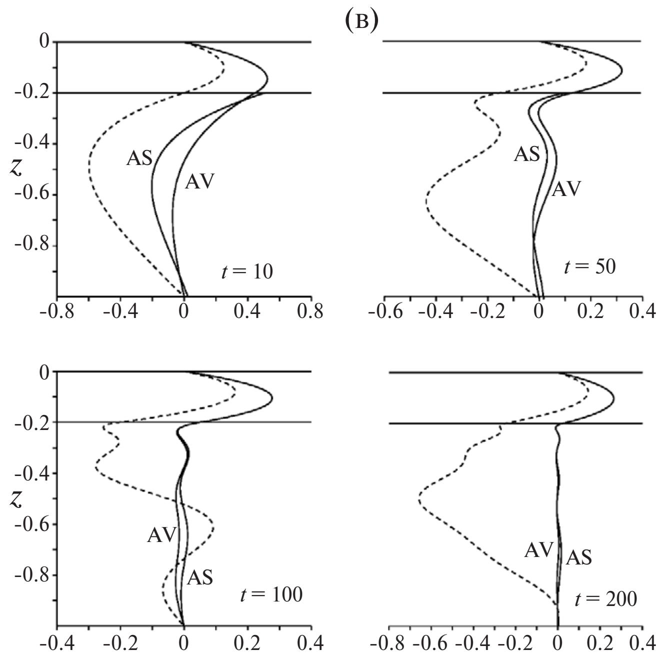


Рис. 3. Вертикальные профили Фурье-амплитуд физических полей в различные моменты времени. Мгновенные профили изображены пунктиром, сплошными линиями — асимптотические (AS) и точные (AV) профили осредненных полей; $N = \text{const}$, $\kappa = 1$. (а) — плавучесть b; (б) — производная вертикальной скорости $\tilde{w}_z$; (в) — вертикальная скорость $\tilde{w}$.

к нулю, а вертикальные градиенты плавучести и горизонтальной скорости — к бесконечности. В настоящей работе мы обобщили эту теорию на случай устойчиво-стратифицированного океана, состоящего из верхнего однородного и нижнего стратифицированного слоев. Оказывается, что в такой конфигурации вдобавок к погранслоям у дна и поверхности возникает волновой пограничный слой в окрестности поверхности раздела в нижней стратифицированной части бассейна. Важный эффект волновых погранслоев заключается в том, что большие вертикальные градиенты горизонтальных скоростей приводят к сильному перемешиванию и неустойчивости у поверхности, дна и границы раздела.

Развитие погранслоя у поверхности раздела мы продемонстрировали на примере решения для простых начальных полей, не содержащих каких-либо резких градиентов. Кроме того, мы нашли асимптотическое представление решений в погранслоях. Для описания погранслойных структур мы применили специальные переменные, впервые введенные в [2, 3] для описания вынужденных волн Россби — поля, осредненные по промежутку времени $[0,\ t]$ для каждого момента t. Сопоставляя асимптотические решения на больших временах с точными разложениями по волновым модам, мы показали, что каждый такой пограничный слой состоит из бесконечного числа мод внутренних волн с большими вертикальными номерами $n \gg 1$. Именно поэтому мы назвали эти пограничные слои волновыми пограничными слоями.

Волновые пограничные слои в этой и других работах [2, 3, 7, 9, 11] возникают благодаря существованию предельной точки в частотном спектре, когда частота волны стремится к конечному пределу при стремлении волнового числа к бесконечности. В нашем случае предельная частота равна нулю, а под волновым числом подразумевается вертикальное волновое число (горизонтальное волновое число фиксировано). Ключевой факт состоит в том, что фазовая и групповая скорости волн с большими волновыми числами здесь имеют разные знаки (похоже, это типичная ситуация в присутствии предельной точки). Можно сказать, что граница, колеблющаяся с предельной частотой, порождает очень короткие волны с фазовой скоростью, направленной от границы, и групповой скоростью, направленной к границе. Такие волновые пакеты не могут убежать далеко от границы и с течением времени формируют пограничный слой.

Источник финансирования. Работа выполнялась в рамках Госзадания (№ 0149-2018-0001). Анализ точного решения (разделы 1–3) выполнен при поддержке РНФ (проект № 14-50-00095), асимптотический анализ (разделы 4, 5) — при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 14.W03.31.0006), численные эксперименты (в разделах 3, 5) — при поддержке РФФИ (проект № 17-05-00094-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т. 2. М.: Мир, 1986. 415 с.
2. *Ильин А.М.* Об асимптотике решения одной краевой задачи // Матем. заметки. 1970. Т. 8. № 3. С. 273–284.
3. *Ильин А.М.* О поведении решения одной краевой задачи при $t \to \infty$ // Матем. сборник. 1972. Т. 87(129). № 4. С. 529–553.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
5. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
6. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. литературы, 1958. 931 с.
7. *Резник Г.М.* Волновые пограничные слои в стратифицированной жидкости у поверхности и дна // Океанология. 2017. Т. 57. № 3. С. 381–388.
8. *Anderson D.L.T., Gill A.E.* Spin-up of a stratified ocean, with application to upwelling // Deep-Sea Res. 1975. V. 22. P. 583–596.
9. *Kamenkovich V.M., Kamenkovich I.V.* On the evolution of Rossby waves, generated by wind stress in a closed basin, incorporating total mass conservation // Dyn. Atm. Oceans. 1993. V. 18. P. 67–103.
10. *Lighthill M.J.* Dynamic response of the Indian ocean to onset of the southwest monsoon // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 265. P. 45–92.
11. *Reznik G.M.* Linear dynamics of a stably-neutrally stratified ocean // J. Mar. Res. 2013. V. 71. № 4. P. 253–288.

WAVE BOUNDARY LAYERS IN A STABLY-NEUTRALLY STRATIFIED OCEAN

© 2019 G. M. Reznik

Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
e-mail: greznikmd@yahoo.com

Received June 19, 2017
After revision February 08, 2018

The theory of wave boundary layers developed in [7], is generalized to the case of stably-neutrally stratified ocean consisting of upper homogeneous and lower stratified layers. In this configuration, in addition to the boundary layers near the ocean bottom and/or surface, a wave boundary layer develops near the interface between the layers in the lower stratified part of basin. Each the boundary layer is a narrow domain characterized by sharp, growing in time, vertical gradients of buoyancy and horizontal velocity. As in [7], the near interface boundary layer arises as a result of free linear evolution of rather general initial fields. An asymptotic solution describing the long-term evolution is presented and compared to exact solution; the asymptotic solution approximates the exact one fairly well even on not very large times.

Keywords: wave boundary layers, internal waves, stable-neutral stratification