

НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ ПРИЛИВНАЯ ДИНАМИКА РЕГИОНА С ПОДВОДНОЙ ГОРОЙ

© 2016 г. Н. Е. Вольцингер¹, А. А. Андросов^{1,2}

¹Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Россия

²Институт полярных и морских исследований им. Альфреда Вегенера, Бремерхафен, Германия

e-mail: lenna30@mail.ru

Поступила в редакцию 05.03.2014 г.

После доработки 03.02.2015 г.

Рассматривается негидростатическая краевая задача в произвольной трехмерной области с подводной горой. Задача интегрируется в криволинейных гранично-согласованных координатах на неравномерной сетке. Для выявления негидростатических эффектов сетка сгущается на склонах подводной горы при более грубом ее разрешении в остальной части области, где решается задача в гидростатическом приближении. Приводятся результаты расчетов негидростатической приливной динамики и гидрологии Мессинского пролива в области подводной горы.

DOI: 10.7868/S0030157416030242

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория длинноволновых возмущений основывается на том, что давление в жидкости – гидростатическое. Допустимость закона гидростатики связана с величиной параметра $\varepsilon^2 = H^2/L^2$, где H – характерная глубина, L – характерная длина. При разложении трехмерных уравнений Эйлера по степеням малого ε , первое приближение приводит к гидростатическим уравнениям – уравнениям мелкой воды, а второе приближение дает динамическую поправку к гидростатическому давлению.

Эти хорошо известные положения справедливы в той мере, в какой характерные масштабы имеют присущий им смысл. При выраженном изменении рельефа дна, как в случае подводной горы, характерные масштабы утрачивают глобальный характер: глубина в области горы быстро изменяется, а длина набегающей длинной волны уменьшается. В таких условиях гидростатическое приближение утрачивает свою высокую точность и моделирование в области подводной горы может потребовать использования более полных, негидростатических уравнений.

Из рассмотрения уравнения движения по вертикали с масштабом горизонтальной скорости U и частотой плавучести $N^2 = -g\rho_z/\rho_0$, где g – гравитационное ускорение, ρ – плотность, ρ_0 – ее отсчетное значение, следует, что вертикальным

ускорением частиц жидкости можно пренебречь и давление будет гидростатическим, если

$$\frac{U^2}{L^2 N^2} \ll 1 \text{ или } \Gamma = \varepsilon/\text{Ri} \ll 1, \quad (1)$$

где $\text{Ri} = N^2 H^2 / U^2$ – число Ричардсона [12]. При $H = O(10^2 \text{ м})$, $N^2 \approx 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $U \approx 0.5 \text{ м/с}$ условие гидростатичности давления нарушается на длинах волн порядка нескольких километров, что вполне отвечает ситуации на горном рельефе.

Моделирование процессов и явлений на негидростатическом масштабе выполняется на основе численного решения краевых задач для уравнений вязкой несжимаемой жидкости – осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса. Круг явлений геофизической гидродинамики с горизонтальным масштабом от десятков метров до нескольких километров включает конвективные движения, короткие поверхностные волны, внутренние волны, бароклинную неустойчивость и др. [7, 10–13, 15]; в работах [4, 5] негидростатическое моделирование применяется для расчета термохалинной динамики регионов Финского залива и Баренцева моря. Сюда относится и рассмотрение гравитационных течений над наклонным дном [9, 14, 16]. Эти работы используют аналитические и численные решения для выявления особенностей процессов стекания относительно более тяжелой жидкости, перемещения на идеализированном шельфовом склоне, негидростатического баротропно-бароклинного взаимодействия на горном рельефе [3].

Выполненная работа относится к этому направлению с акцентом на вычислительный аспект моделирования негидростатической динамики, трансформирующей длинную волну в области подводной горы.

В следующем разделе рассматривается постановка негидростатической краевой задачи в произвольной трехмерной области. Уравнения движения, неразрывности, температуры и солености приводятся в декартовых координатах, а затем краевая задача формулируется в криволинейных гранично-согласованных координатах, отображающих заданную область на параллелепипед. В разделе 3 рассматривается численный метод интегрирования преобразованной задачи, использующий разбиение градиента давления на гидростатическую и динамическую компоненты; метод имеет своим базисным элементом решение гидростатической задачи, подробно представленное в [1]. Структуру метода составляет нахождение на каждом временном шаге градиента динамического давления из решения уравнения Пуассона для оператора Лапласа–Бельтрами, после чего по градиентам динамического давления определяется негидростатический контравариантный вектор бездивергентного поля скорости. В разделе 4 моделируется негидростатическая динамика и гидрология Мессинского пролива, важнейшим морфометрическим элементом которого выступает подводная гора в узкости пролива. Решение реализуется на неравномерной криволинейной сетке при взаимодействии гидростатической задачи во всей области и негидростатической – в телескопизируемой подобласти горы. Переход к интегрированию негидростатической задачи совершается сквозным счетом, не требующим процедуры сращивания решений двух задач. Результаты содержат локальные и интегральные оценки негидростатических эффектов, выявляют их характер и влияние на формирование поля плотности промежуточных вод пролива. В разделе 5 обсуждаются положения и результаты работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Уравнения в декартовых координатах.

Пусть невозмущенная поверхность воды совпадает с горизонтальной плоскостью XOY правой декартовой системы координат, ось OZ направлена вертикально вверх. В области $Q_T = Q \times [0, T]$, где Q – трехмерная область, ограниченная свободной поверхностью воды $\zeta(x, y, t)$, дном $h(x, y)$ и боковой поверхностью ∂Q , $Q = \{x, y, z; x, y \in \Omega, -h \leq z \leq \zeta\}$, $0 \leq t \leq T$, рас-

смотрим уравнения движения, неразрывности, температуры, солености и состояния морской воды:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{g} + \nabla_2 (K \nabla_2 \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \mathbf{u}_z)_z, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d\Theta_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} v_{\Theta_i} \frac{\partial \Theta_i}{\partial z} + \nabla_2 (K_{\Theta_i} \nabla_2 \Theta_i), \quad (4)$$

$$\rho(x, y, z; t) = \rho(\Theta_i), \quad (5)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости, $\nabla = (\nabla_2, \partial/\partial z)$, $\nabla_2 = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ – горизонтальный оператор градиента, ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ – вектор гравитационного ускорения; для составляющих ускорения Кориолиса примем: $2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} = (f_T w - f v, f u, -f_T u)$, $f_T = 2\tilde{\Omega} \cos \varphi$ – ее горизонтальная компонента, $f = 2\tilde{\Omega} \sin \varphi$ – вертикальная компонента, $\tilde{\Omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли, φ – широта места; K, v – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости, $K_{\Theta_i}, v_{\Theta_i}$ – коэффициенты турбулентной диффузии, $i = 1, 2$; Θ_1 – температура, Θ_2 – соленость.

К системе уравнений (2)–(5) относительно неизвестных $\mathbf{u}, p, \rho, \Theta_i$ следует присоединить турбулентное замыкание для нахождения коэффициентов $v, v_{\Theta_i}, K, K_{\Theta_i}$ и уравнения для определения уровня ζ . Эта компонента решения определяется из вертикально-осредненных уравнений горизонтального движения и уравнения неразрывности.

Редукция уравнения движения по вертикали в (2) к виду:

$$\partial p / \partial z = -g\rho \quad (6)$$

определяет гидростатическое давление p_Γ . Полагая $\rho = \rho_0 + \rho'$ ($\rho' \ll \rho_0$) и интегрируя (6) по вертикали, имеем:

$$p|_{z=\zeta} - p_\Gamma = -g\rho_0(\zeta - z) - g \int_z^\zeta \rho' dz. \quad (7)$$

Примем давление на уровне моря $p|_\zeta = \text{const}$. Из (7) следует, что градиент гидростатического давления является суммой своих баротропного и бароклинного градиентов:

$$\nabla_2 p_\Gamma = g\rho_0 \nabla_2 \zeta + g \nabla_2 \int_z^\zeta \rho' dz. \quad (8)$$

В уравнении движения по вертикали системы (2) примем: $p = p_\Gamma + p_D$, p_D – динамическое давление. С учетом (6) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} p_z + g &\approx \frac{1}{\rho_0} (1 - \rho'/\rho_0) p_z + g \approx \frac{1}{\rho_0} p_z + g \rho/\rho_0 = \\ &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (p_\Gamma + p_D) + g \rho/\rho_0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} p_D. \end{aligned}$$

Запишем уравнение движения (2) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \Pi = \Phi, \quad \Pi = (p/\rho, p/\rho, p_D/\rho_0), \quad (9) \\ \Phi = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} + \nabla_2 (K \nabla_2 \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \mathbf{u}_z)_z. \end{aligned}$$

2.2. Краевая задача в криволинейных координатах. Преобразуем уравнения к криволинейным координатам

$$\begin{aligned} \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \\ \sigma = H^{-1}(z - \zeta), \quad t' = t, \end{aligned} \quad (10)$$

где $H = h + \zeta$, с якобианом преобразования $J^{-1} = \partial(\xi, \eta, \sigma)/\partial(x, y, z)$, $0 \neq J^{-1} < \infty$, $J = J_* H$, $J_* = \partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)$ – плоский якобиан. При соответствующем выборе четырех попарно противоположных участков боковой поверхности область Q отобразится на параллелепипед Q^* . Пусть физическая область Q представляет пролив с береговыми непроницаемыми границами ∂Q_1 , отображаемыми на непроницаемые грани параллелепипеда ∂Q_1^* и с открытыми границами ∂Q_2 отображаемыми на его открытые грани ∂Q_2^* ; нижней и верхней горизонтальными гранями параллелепипеда Q^* будут прямоугольники Ω^* в плоскостях соответственно $\sigma = -1$ и $\sigma = 0$.

Метод решения негидростатической задачи, представленный ниже, существенно опирается на решение гидростатической задачи, когда градиент давления (8) в криволинейных координатах:

$$\begin{aligned} \nabla_2 p_\Gamma = g \rho_0 \nabla_2 \zeta + g \nabla_2 I, \\ I = H \int_\sigma \rho' d\sigma, \quad \nabla_2 = \nabla \xi^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ниже приводится форма уравнений и дополнительных условий в координатах (10); подробный вывод преобразования содержится в [1].

Уравнение (9) в гранично-согласованных координатах (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \Pi = \Phi, \quad \Phi = (\Phi_u, \Phi_v, \Phi_w) = \\ = -U^i \partial \mathbf{u} / \partial \xi^i - W \partial \mathbf{u} / \partial \sigma - 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} + \\ + H^{-2} (\mathbf{v} \mathbf{u}_\sigma)_\sigma + J_*^{-1} (K J_* g^{ik} \mathbf{u}_{\xi^k})_{\xi^i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $U^i = \mathbf{v} \nabla \xi^i$ – контравариантные горизонтальные скорости, $\nabla \xi^i = \mathbf{e}^i = (\xi_x^i, \xi_y^i)$ – контравариантный базисный вектор; $i, k = 1, 2$ при суммировании по повторяющемуся индексу; $U^1 = U$, $U^2 = V$, $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \eta$; $W = \sigma_t + \mathbf{v} \nabla_2 \sigma + w \sigma_z$ – контравариантная вертикальная скорость; $g^{ik} = \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k$ – компоненты метрического тензора.

Уравнение неразрывности запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} J U^i + \frac{\partial}{\partial \sigma} J W = 0, \quad (13)$$

где $\hat{W} = W - \sigma_t$. Гидростатические уравнения горизонтального движения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla_2 p_\Gamma = \Phi_v, \quad \Phi_v = (\Phi_u, \Phi_v). \quad (14)$$

Уравнение для конститuentов плотности Θ :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \Theta + W \frac{\partial}{\partial \sigma} \Theta = \hat{D}(\Theta). \quad (15)$$

Для оператора диффузии примем упрощенное представление:

$$\begin{aligned} \hat{D} = K_\Theta J_*^{-1} \times \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(J_* g^{11} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J_* g^{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\nu_\Theta g^{33} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right). \end{aligned}$$

К динамической задаче (12), (13) присоединяются вертикально-осредненные уравнения для определения уровня. Замыкание для нахождения ν, ν_Θ использует уравнение кинетической энергии турбулентности, соотношения подобия и выражение для масштаба турбулентности [1].

2.3. Граничные и начальные условия. Пусть непроницаемые боковые грани ∂Q_1^* параллелепипеда Q^* лежат в плоскостях $\xi = \text{const}$, а его открытые грани ∂Q_2^* – в плоскостях $\eta = \text{const}$. Тогда:

$$U|_{\partial Q_1^*} = 0. \quad (16)$$

На открытых границах ∂Q_2^* на вытоке используется линейная экстраполяция производной по нормали к плоскости $\eta = \text{const}$: контравариантной компоненты V , имеющей вид:

$$\partial V / \partial \eta|_{\partial Q_2^*} = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} g^{2j} V_{\xi^j}, \quad (17)$$

$j = 1, 2, 3$. На втоке задаются обе компоненты скорости

$$U|_{\partial Q_2^*} = \Psi_1(\xi, \sigma; t), \quad V|_{\partial Q_2^*} = \Psi_2(\xi, \sigma; t) \quad (18)$$

и – при удержании горизонтальной вязкости – ее производная по нормали: $K \partial V / \partial n$. Граничными условиями по вертикали являются: условие прилипания у дна на высоте параметра шероховатости ϵ^* и динамическое условие на касательное напряжение τ / ρ_0 :

$$U^i \Big|_{\sigma=-1+\epsilon^*} = 0, \quad v U^i \Big|_{\sigma=0} = H \nabla \xi^i \tau / \rho_0. \quad (19)$$

Вертикальная компонента W удовлетворяет условиям: $W \Big|_{-1} = W \Big|_0 = 0$.

Для уравнений (15) на твердой границе принимается:

$$g^{1j} \Theta_{\xi^j} \Big|_{\partial Q_1^*} = 0. \quad (20)$$

Условием на открытой границе при вытоке является нулевая производная по нормали:

$$g^{2j} \Theta_{\xi^j} \Big|_{\partial Q_2^*} = 0, \quad (21)$$

а на втоке – характеристика входящей водной массы:

$$\Theta \Big|_{\partial Q_3^*} = \Psi_3(\xi, \sigma; t). \quad (22)$$

Граничным условием на дне, согласованным с оператором Лапласа–Бельтрами, будет условие по конормали:

$$\partial \Theta / \partial n \Big|_{\sigma=-1} = K \Theta g^{3i} \Theta_{\xi^i} + v \Theta g^{33} \Theta_{\sigma}. \quad (23)$$

На свободной поверхности имеем условия:

$$v_{\Theta_1} \frac{\partial \Theta_1}{\partial n} \Big|_{\sigma=0} = \hat{Q} / \rho_0 c_p \quad \text{и} \quad v_{\Theta_2} \frac{\partial \Theta_2}{\partial n} \Big|_{\sigma=0} = W_s S,$$

где Q – радиационный поток тепла, c_p – удельная теплоемкость морской воды, W_s – соотношение между осадками и испарением.

Начальными условиями являются: бездивергентный вектор скорости $\mathbf{u} \Big|_{t=0} = \mathbf{u}^0$ и значения конституентов $\Theta_i \Big|_{t=0} = \Theta_i^0$.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Присоединим к гидростатическим уравнениям (14) уравнение

$$\tilde{w}_i = \varphi_w. \quad (24)$$

Пусть на временном шаге $(k+1)\tau$, $k = 0, 1, \dots$, $\bar{k} = [\tilde{T} / \tau]$ известно решение задачи (14), (24) для $\mathbf{u}_\Gamma = (u, v, \tilde{w})$, которое будем рассматривать как предиктор разностного уравнения (12):

$$\mathbf{u}_\Gamma^{k+1} = \mathbf{u}^*, \quad (25)$$

определяемый из уравнений

$$\frac{(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^k)}{\tau} + \frac{1}{\rho} \nabla_2 p_\Gamma^* = \varphi_v^*, \quad \frac{(\tilde{w}^* - w^k)}{\tau} = \varphi_w^*. \quad (26)$$

Для реализации гидростатической краевой задачи – первого из уравнений (26), уравнения неразрывности (13) и уравнений (4), (5) с граничными условиями (16)–(23) используется расщепление операторов по координатным направлениям со вторым порядком точности и величиной шага по времени, определяемым только адвективной модой, с присоединенной процедурой TVD, контролирующей поведение решения в области его резких градиентов и многосеточной процедурой ускорения сходимости [1]. Алгоритм решения негидростатической задачи является одной из модификаций проекционного метода решения уравнений Навье–Стокса.

Вычитая уравнения (26) из (12), имеем:

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*)}{\tau} + \frac{1}{\rho} \nabla p_D^{k+1} = 0 \quad (27)$$

или в проекциях при временном обозначении $p_D / \rho_0 = p$:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*)}{\tau} + p_{\xi^i}^{k+1} \xi_x^i + p_{\sigma}^{k+1} \sigma_x &= 0, \\ \frac{(\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^*)}{\tau} + p_{\xi^i}^{k+1} \xi_y^i + p_{\sigma}^{k+1} \sigma_y &= 0, \\ \frac{(\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^*)}{\tau} + p_{\sigma}^{k+1} \sigma_z &= 0. \end{aligned}$$

Умножим первое из этих уравнений на ξ_x , второе – на ξ_y и сложим их; затем сложим первое уравнение, умноженное на η_x со вторым, умноженным на η_y ; наконец, сложим первое уравнение, умноженное на σ_x , второе, умноженное на σ_y , и третье – на σ_z . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{(U^{k+1} - U^*)}{\tau} + g^{1j} p_{\xi^j}^{k+1} + g^{13} p_{\sigma}^{k+1} &= 0, \\ \frac{(V^{k+1} - V^*)}{\tau} + g^{2j} p_{\xi^j}^{k+1} + g^{23} p_{\sigma}^{k+1} &= 0, \\ \frac{(\hat{W}^{k+1} - \hat{W}^*)}{\tau} + g^{3j} p_{\xi^j}^{k+1} + g^{33} p_{\sigma}^{k+1} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Умножая каждое из этих уравнений на J и дифференцируя первое по ξ , второе – по η , третье – по σ и складывая их, получим:

$$(J g^{ij} p_{\xi^i}^{k+1})_{\xi^j} = [(JU^*)_{\xi} + (JV^*)_{\eta} + (J\hat{W}^*)_{\sigma}] / \tau, \quad (29)$$

где учтено, что в криволинейных координатах, согласно (13), $\operatorname{div} \mathbf{U}^{k+1} = 0$.

Эллиптическое уравнение (29) в декартовых координатах является уравнением Пуассона для оператора Лапласа. В криволинейных координатах такой оператор называют оператором Лапласа–Бельтрами. Уравнение решается итерационно, сочетая на каждом цикле итераций прогонку по вертикали с верхней релаксацией в плоскости (ξ, η) , при обычных граничных условиях по вертикали:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\sigma=-1} = 0, \quad p|_{\sigma=0} = 0; \quad (30)$$

на боковых непроницаемых гранях ∂Q_1^* параллелепипеда Q^* задается условие

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial Q_1^*} = 0, \quad (31)$$

вытекающее из первого уравнения системы (28) при $U|_{\partial Q_1^*} = 0$.

На открытой границе ∂Q_2^* при входе ($\eta = 0$) имеем граничное условие:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\eta=0} = \psi(\xi, \sigma, t), \quad (32)$$

где, согласно второму уравнению системы (28), $\psi^{k+1} = -(V^{k+1} - V^*) / \tau \sqrt{g^{22}}$ назначается в итерационном процессе на каждом цикле с предыдущей итерации:

$$\psi^{k+1,s} = -(V^{k+1,s} - V^*) / \tau \sqrt{g^{22}}, \quad s = 1, 2, 3 \dots$$

Решением задачи (29)–(32) определяется динамическое давление, по градиенту которого из (28) находится негидростатический вектор скорости $\mathbf{U}^{k+1} = (U, V, \hat{W})^{k+1}$, а затем и декартова скорость \mathbf{u}^{k+1} из соотношений: $u = J_* (U \eta_y - V \xi_y)$, $v = J_* (V \xi_x - U \eta_x)$, $w = H (\hat{W} - u \sigma_x - v \sigma_y)$; уровень ζ находится решением гидростатической краевой задачи для вертикально-осредненных уравнений [1].

4. НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МЕССИНСКОГО ПРОЛИВА

4.1. Общие сведения. Мессинский пролив отделяет Калабрию (Италия) от острова Сицилия и соединяет Ионическое море с Тирренским (рис. 1а). При протяженности пролива ~ 20 км его морфометрия характеризуется изменчивостью береговой линии и резким перепадом глубин. В своей наиболее узкой части с площадью сечения ~ 0.3 км² ширина и глубина пролива мини-

мальны: ширина в этом месте уменьшается до 3 км при наименьшей глубине ~ 70 м. По обе стороны вершины подводной горы глубина быстро растет, достигая в южной части 1000 м. Здесь у Ионического моря крутой Мессинский каньон вливается в структуру абиссальной равнины юго-восточнее Сицилии. К северу от вершины подводной горы береговые склоны резко расходятся, глубина увеличивается и строение пролива разветвляется в направлении Тирренского моря в виде гигантского подводного конуса.

Геометрия пролива и его локализация определяют существование здесь сложной картины интенсивного баротропно-бароклинного взаимодействия. Описание результатов, составивших полувековой итог изучения динамики и гидрологии Мессинского пролива, содержится в обзорной статье [8]. Результаты моделирования процессов, связанных с приливной динамикой пролива на основе численного интегрирования двумерной и трехмерной краевых задач в гидростатическом приближении, представлено в [2], [6].

Сравнение численных решений с данными наблюдений для эпюр поля скорости в узкости пролива и показаниями береговых станций для приливных колебаний уровня свидетельствуют о допустимости в целом гидростатического описания динамики пролива. Существенных отличий можно ожидать лишь в отдельные, особые моменты приливного цикла. Детальное описание негидростатических отличий гидрофизических характеристик Мессинского пролива является содержанием этого раздела.

4.2. Вычислительные параметры и оценка точности решения негидростатической задачи. Для проверки сходимости численного решения краевая задача интегрировалась при различном сеточном разрешении на сетках: $33 \times 83 \times 40$ (с 40 узлами по вертикали), $33 \times 165 \times 40$ (вдвое измельченной в продольном направлении) и $33 \times 165 \times 60$. Отличие решений на второй и третьей сетках незначительно, что свидетельствует о достаточности вертикального разрешения. Приводимые результаты получены при решении задачи на сетке $33 \times 165 \times 40$ с шагами $\Delta_{\min} \approx 30$ м, $\Delta_{\max} \approx 340$ м (рис. 1б) и шагом по времени $\tau = 60$ с. На открытых границах задавались приливные колебания уровня с амплитудой и фазой волны M_2 ; начальное поле плотности принимается зависящим только от солёности с выраженным пикноклином толщиной около 80 м и солёностью, меняющейся по вертикали от 37.5 до 38.5‰.

Наибольшие вычислительные затраты при решении негидростатической задачи связаны с нахождением динамического давления согласно (29)–(32), по градиентам которого определяется бездивергентный вектор скорости. Разность поля скорости при интегрировании эллиптической за-

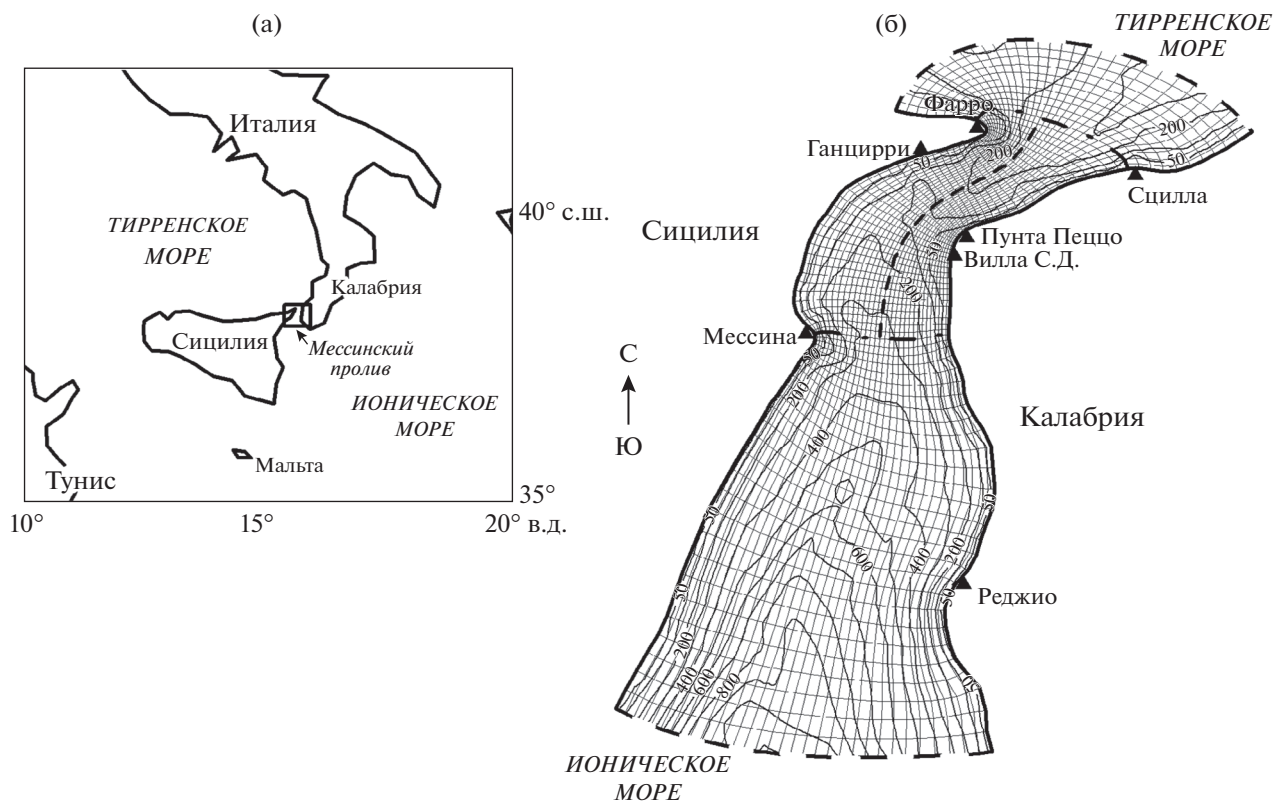


Рис. 1. Географическое положение области Мессинского пролива (а), батиметрическая карта и сеточная область (б). Сетка в горизонтальном разрешении — 33×83 . Зона расчета негидростатического блока выделена пунктирной линией с точкой. Продольная пунктирная линия указывает положение осевого разреза.

дачи с точностью $O(10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}^2)$ и $O(10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}^2)$ достаточно мала, чтобы ограничиться более низким уровнем точности; заметим, что увеличение точности до $(10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}^2)$ требует дополнительно около 200 итераций на каждом временном шаге.

4.3. Результаты. Оценим нарушение критерия гидростатики (1) в условиях горного рельефа Мессинского пролива, когда ε выражает уже не отношение характерных масштабов, а уклон: $\varepsilon = H/L = \text{tg}\alpha$; при этом значения Γ возрастают на несколько порядков. Другим фактором роста Γ является то, что само глобальное понятие характерной глубины на горном рельефе теряет смысл и должно быть заменено на локальную склоновую глубину $h_*(x, y)$. Пусть h_0 — глубина над вершиной горы, h — глубина у ее подошвы, тогда $h_0 \leq h_* \leq h$. Таким образом, на горных склонах критерий (1) трансформируется к виду:

$$\gamma = \frac{U^2}{N^2 h_*^2} \text{tg}^2 \alpha.$$

Взросшие значения γ уже не могут служить оправданием пренебрежения вертикальным ускорением, лежащим в основе вывода (1).

Ниже оцениваются и обсуждаются некоторые наиболее существенные отличительные особенности гидрофизических характеристик пролива, обязанных использованию негидростатической модели.

Расчет максимальных различий полей скорости, полученных решением гидростатической и негидростатической задач

Рассмотрим разность потоков в сечениях пролива, примыкающих к склонам подводной горы. Максимальная разность потоков, являющихся решением двух таких задач:

$$\delta q = q_{\Gamma} - q_{\text{НГ}}, \quad q = JHV = H(vx_{\xi} - uy_{\xi})$$

в приливном цикле волны M_2 на северном склоне горы выявляется в момент времени, близкий к середине цикла. На рис. 2а приведено сечение пролива с указанием двух вертикалей (I, II), на которых различия максимальны; поперек пролива формируются зоны различного направления потоков, обязанные прибрежным противотечениям с симметричным относительно оси сечения расположением зон превалирования негидростатики. На рис. 2б представлены эпюры декартовых составляющих скорости на выделенных верти-

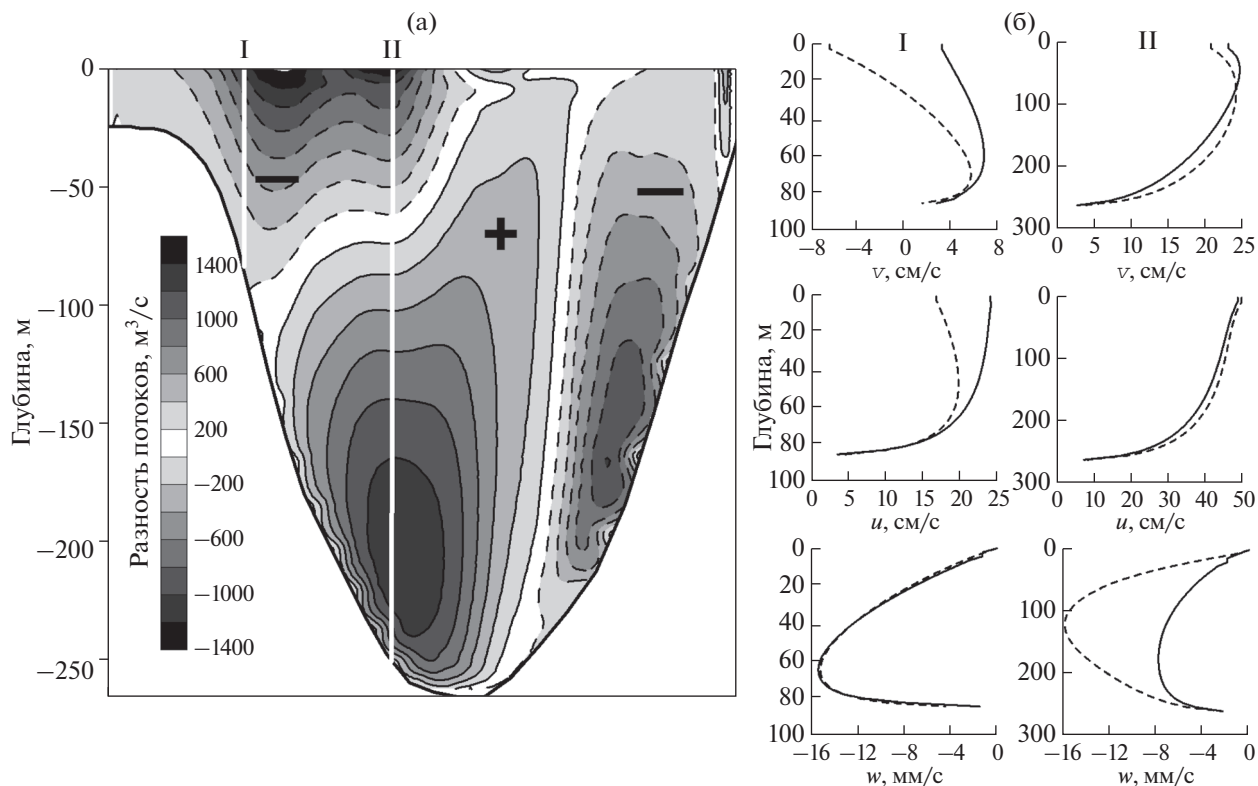


Рис. 2. (а) – Сечение северного склона горы. Плюс – зона преобладания гидростатического потока; минус – зона преобладания негидростатического потока; (I, II) – вертикали максимальных различий решения двух задач. (б) – эпюры составляющих вектора $\mathbf{u} = (u, v, w)$ на выделенных вертикалях. Сплошная линия – негидростатика; пунктирная – гидростатика.

кальных линиях. Наибольшее отклонение от гидростатики возникает в поверхностном слое для горизонтальных составляющих скорости на линии I, а для вертикальной скорости – на линии II, достигая в средней части 5 мм/с на глубине около 100 м. Эти различия определяют локальные зоны максимальной неоднородности и пестроты полей скорости, когда вклад динамической компоненты давления наиболее существен. На южном склоне горы формируется иная картина отличий (рис. 3) с симметричным относительно оси сечения расположением зон превалирования гидростатики. Максимальная разность потоков приходится на конец приливного цикла волны M_2 , причем основное отличие сказывается только на продольной v -компоненте скорости на линии II, достигая там 10 см/с; вместе с тем эпюры вертикальной скорости на каждой из линий различны с наибольшим отклонением в придонном слое.

Приведем также расчетные значения характеристики $\mu(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}_Г - \mathbf{u}_{НГ})/\mathbf{u}_Г$, позволяющей оценить относительный вклад динамической компоненты давления. Выделяющейся чертой эпюр этой характеристики является ее увеличение с глубиной на вертикалях наиболее выраженных

значений динамического давления I, II. Так, на северном склоне $\mu(u)$ изменяется в диапазоне $(-0.4; 0.2)$ на вертикали I, в диапазоне $(0.02; 0.1)$ на вертикали II, что указывает на естественное для прилива относительное увеличение с глубиной вклада гидростатики. Вместе с тем поведение $\mu(w)$ на вертикали I северного склона и на вертикали II южного склона обнаруживает не типичную картину. В обоих случаях вертикальная скорость и тем самым динамическая компонента давления с глубиной возрастают. Такое же аномальное поведение присуще и характеристике на разрезе I южного склона на глубине ~ 20 м, где эта характеристика меняется в диапазоне $(20; -30)$, демонстрируя резкое преобладание негидростатической компоненты поперечной скорости в прибрежном противотечении.

Оценка отклонений гидрофизических характеристик от их гидростатических значений в максимальной и среднеквадратичной нормах

Пусть $\delta(\chi) = \chi_{НГ} - \chi_Г$ означает разность компоненты решения двух задач во всем интервале приливного цикла волны M_2 в нормах:

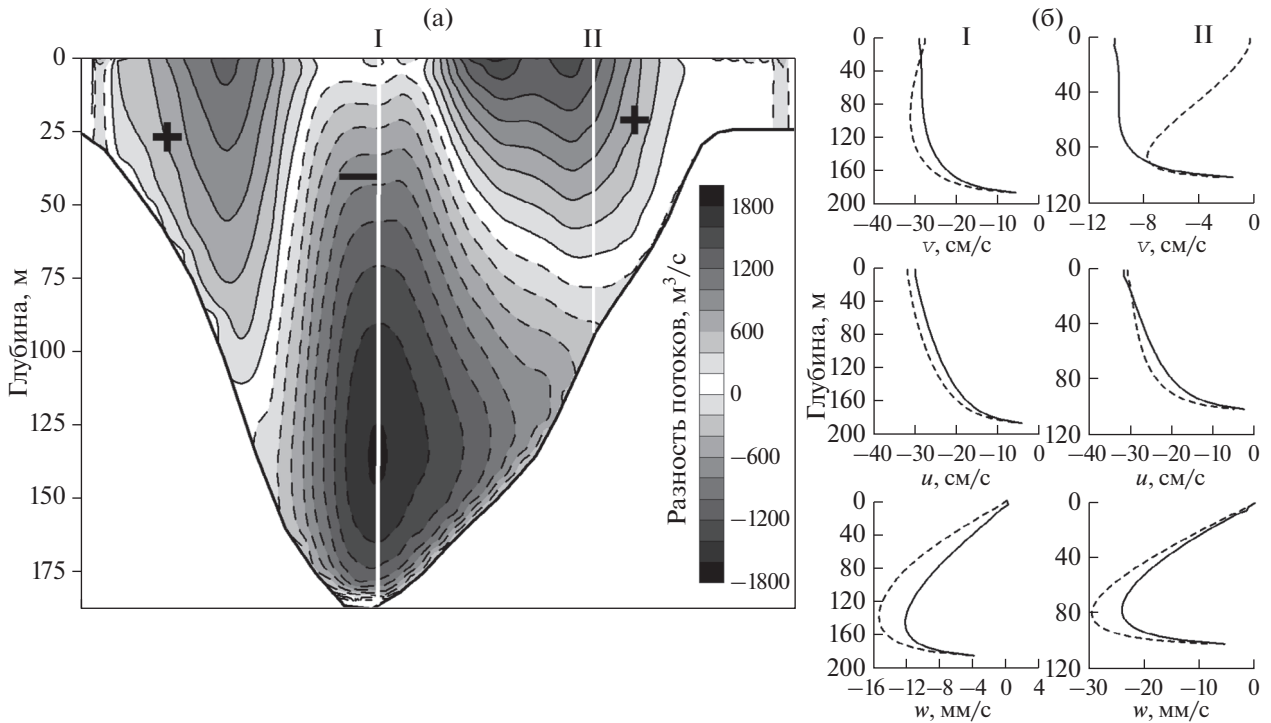


Рис. 3. (а) – Сечение южного склона горы.

Плюс – зона преобладания гидростатического потока; минус – зона преобладания негидростатического потока; (I, II) – вертикали максимальных различий решения двух задач.

(б) – эпюры составляющих вектора $\mathbf{u} = (u, v, w)$ на выделенных вертикалях. Сплошная линия – негидростатика; пунктирная – гидростатика.

$$\|\delta(\chi)\|_C = \max_{N^*} |\delta(\chi)|,$$

$$\|\delta(\chi)\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{N^*} \sum_{N^*} [\delta(\chi)]^2 \right\}^{1/2}$$

по всему числу значений N^* разности $\delta(\chi)$ в узлах сеточной области. Сравнение в максимальной норме C для $\chi = \{u, v, w, \rho\}$ представлено на рис. 4. Заметим, что экстремумы нормы должны находиться в окрестности особых моментов приливного цикла, не обязательно совпадая с ними.

Ход отклонений для скорости имеет два выраженных максимума, приходящихся на интервал максимальных течений, составляя 5–10% их максимальной величины. Отклонение поля плотности имеет три максимума, приходящихся на момент смены течений, в силу негидростатического нарушения их реверсивности, и на интервал максимальных течений. Такой же ход отклонений имеют и максимальные нормы значений уровня, достигая наибольшей величины на момент первого энергетического максимума, когда $\|\delta(\zeta)\|_C \approx 1.2$ см.

Качественный характер поведения разностей характеристик двух задач сохраняется и в среднеквадратичной норме при сглаженном ходе ее значе-

ний в приливном цикле. В интервале энергетического максимума имеем: $\|\delta(u)\|_{L_2} \approx 6 \times 10^{-3}$ см/с, $\|\delta(v)\|_{L_2} \approx 4 \times 10^{-3}$ см/с, $\|\delta(w)\|_{L_2} \approx 8 \times 10^{-4}$ см/с, $\|\delta(\rho')\|_{L_2} \approx 10^{-4}$ кг/м³, $\|\delta(\zeta)\|_{L_2} \approx 5 \times 10^{-3}$ см.

Другие эффекты негидростатики

Влияние негидростатики на поле плотности выражается характеристикой $\delta\rho'$; заметное различие сравниваемых полей возникает на южном склоне в момент максимальных течений южного направления, когда негидростатическое поле плотности более тяжелой ионической воды имеет сглаженную конфигурацию изоповерхности сравнительно с гидростатическим полем изоповерхности большей крутизны. В поверхностных слоях происходит концентрация изоповерхности поверхностной за счет негидростатического распределения вертикальной скорости. Структура изоповерхности в негидростатическом случае позволяет заключить, что в поверхностном слое более легкая вода продвигается дальше на север, а над подводной горой вода оказывается более стратифицированной.

В наименьшей степени негидростатика сказывается на поле уровня. Одним из показателей ре-

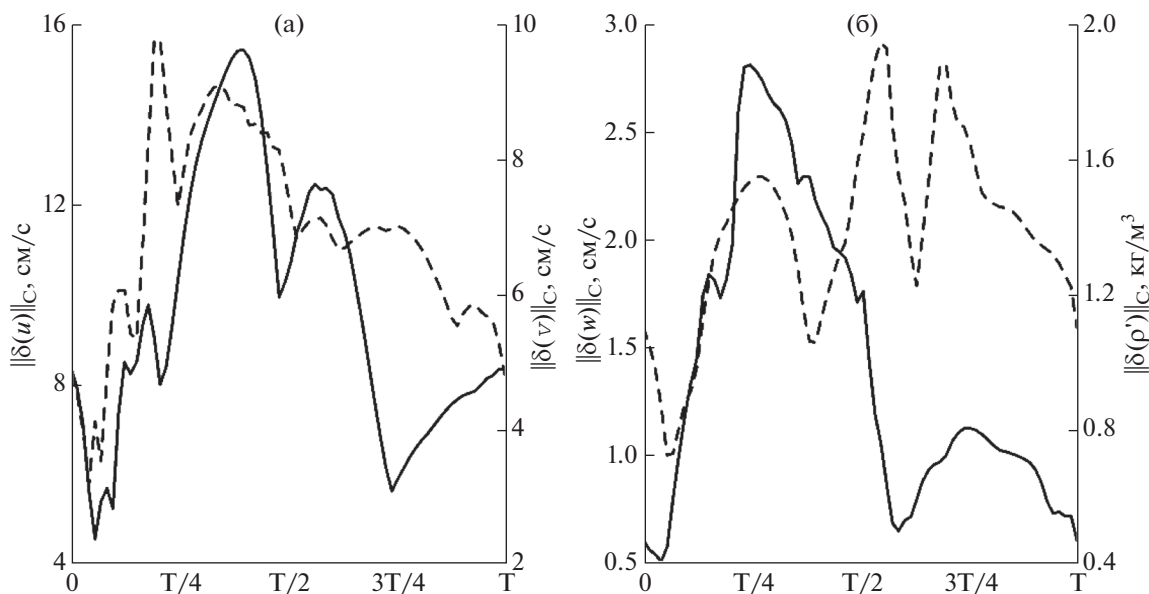


Рис. 4. Ход нормы максимальных отклонений в приливном цикле волны M_2 . (а) – горизонтальные компоненты вектора скорости. Сплошная линия – u компонента; пунктирная линия – v компонента, (б) – вертикальная компонента вектора скорости (сплошная линия) и отклонение плотности (пунктирная линия).

презентативности модели Мессинского пролива является расчет амфидромии в его узкости и оценка расчетного уровня по данным прибрежных станций. Для гидростатической модели средняя векторная ошибка сравнения по всем станциям составила 1.52 см [6]. В негидростатическом случае такая оценка изменилась незначительно в силу и самой малости приливных колебаний уровня в амфидромической зоне.

Приведем оценку влияния горизонтальной компоненты силы Кориолиса, $f_{\Gamma} = 2\tilde{\Omega} \cos \varphi$, в уравнении вертикального движения системы (12). Разность решений негидростатической задачи при удержании f_{Γ} и при $f_{\Gamma} = 0$ оказывается весьма значительной, особенно на северном склоне, достигая для продольной скорости значений около 10 см/с, а для вертикальной – около 3 см/с.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассматривается постановка и численный метод решения краевой задачи для трехмерных, осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. Задача формулируется в гранично-согласованных координатах, отображающих произвольную физическую область на вычислительный параллелепипед.

Основная трудность решения нестационарных уравнений Навье–Стокса связана с тем, что поле скорости с высокой точностью должно удовлетворять уравнению неразрывности, не содержащему производной по времени. В проекционном методе это достигается двухшаговой процедурой,

на первом этапе которой определяется главная часть давления, после чего решением краевой задачи для трехмерного уравнения Пуассона на каждом временном шаге находится поправка к давлению, так чтобы решение удовлетворяло уравнению неразрывности. В геофизической гидродинамике такой главной частью естественно выступает гидростатическое давление, а поправкой является динамическое давление, обязанное неравномерности поля скорости.

Таким образом, решение краевой задачи для гидростатических (примитивных) уравнений представляет как самостоятельную задачу, так и базовую основу последующего решения полной негидростатической задачи, требующей наибольших вычислительных затрат. Поскольку решение гидростатической задачи является более простой и хорошо разработанной частью общего алгоритма, содержание работы акцентируется на реализации ее негидростатического модуля, то есть определению динамического давления решением уравнения Пуассона для оператора Лапласа–Бельтрами.

Существенной чертой численного метода является решение негидростатической задачи не во всей исходной области, а лишь там, где из физических соображений следует ожидать значимого проявления динамической компоненты давления; при этом решение в подобластях реализуется на неравномерной криволинейной сетке сквозным счетом, не требующим процедуры сращивания решения двух задач.

Предложенный подход особенно полезен и эффективен для решения краевых задач в областях с горным рельефом, когда вертикальные движения более выражены. Такая ситуация возникает при моделировании длинноволновых процессов, для которых гидростатика выполняется с высокой точностью, однако на горном рельефе характерные геометрические масштабы становятся неопределенными и критерий приемлемости гидростатики теряет смысл.

В качестве приложения приводятся результаты расчета негидростатических эффектов приливной динамики Мессинского пролива. Предложен модифицированный критерий нарушения гидростатики на склонах подводной горы; локализируются зоны отклонений гидрофизических характеристик от их гидростатических значений, достигающие 10% их максимальной величины; приводятся статистические оценки таких отклонений в ходе приливного цикла волны M_2 , в максимальной и среднеквадратичной нормах; обсуждается воздействие динамического давления на структуру изолиний поля плотности; получена оценка влияния горизонтальной компоненты силы Кориолиса, свидетельствующая о необходимости ее учета при расчете вертикальной структуры потока.

Выполненная работа показывает, что при расчете даже длинноволновых движений в области с горным рельефом целесообразно воздержаться от гидростатического моделирования, как это обычно принято, в пользу уточненного описания с определением решения в подобластях выраженной негидростатики; удобную возможность для этого предоставляет процедура сквозного счета во всей области интегрирования краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андросов А.А., Вольцингер Н.Е. Пролиты Мирового океана — общий подход к моделированию. СПб.: Наука, 2005. 188 с.
2. Андросов А.А., Вольцингер Н.Е., Романенков Д.А. Моделирование трехмерной бароклинной приливной динамики Мессинского пролива // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2002. Т. 38. № 1. С. 119–134.
3. Вольцингер Н.Е., Андросов А.А. Негидростатическое баротропно-бароклинное взаимодействие в проливе с горным рельефом // Фунд. и прикл. гидрофизика. 2013. Т. 6. № 3. С. 63–77.
4. Залесный В.Б., Тамсалу Р., Куллас Т. Негидростатическая модель морской циркуляции // Океанология. 2004. Т. 44. № 4. С. 495–506.
5. Сафрай А.С., Ткаченко И.В., Гордеева С.М., Белевич М.Ю. Моделирование сезонной изменчивости внутренних приливных волн в Баренцевом море // Навигация и гидрография. 2006. № 22. С. 118–125.
6. Androssov A.A., Kagan B.A., Romanenkov D.A., Voltzinger N.E. Numerical modelling of barotropic tidal dynamics in the strait of Messina // Advances in Water Resources. 2002. V. 25. P. 401–415.
7. Androssov A., Rubino A., Romeiser R., Sein D.V. Open-ocean convection in the Greenland Sea: preconditioning through a mesoscale chimney and detectability in SAR imagery studied with a hierarchy of nested numerical models // Meteorologische Zeitschrift. 2005. V. 14. № 14. P. 693–702.
8. Bignami F., Salusti E. Tidal currents and transient phenomena in the Strait of Messina: A review // The Physical Oceanography of Sea Straits / Ed. Pratt L.J. Kluwer Ac. Pub., Netherl. 1990. P. 95–124.
9. Britter R.E., Linden P.F. The motion of the front of a gravity current travelling down an incline // J. Fluid Mech. 1980. V. 99. № 3. P. 531–543.
10. Davis A.M., Xing J., Berntsen J. Non-hydrostatic and non-linear contributions to the internal wave energy flux in sill regions // Ocean Dynamics. 2009. V. 59. № 6. P. 881–897.
11. Mahadevan A., Olinger J., Street R. A nonhydrostatic mesoscale ocean model part 1, 2 // J. Phys. Oceanogr. 1996. V. 26. № 9. P. 1868–1900.
12. Marshall J., Hill C., Perelman L., Adcroft A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling // J. Geophys. Res. 1997. V. 102. № C3. P. 5733–5752.
13. Marshall J., Jones H., Hill C. Efficient ocean modeling using non-hydrostatic algorithms // Marine Systems. 1998. V. 18. P. 115–134.
14. Shapiro G.I., Hill A.E. Dynamics of dense water cascades at the shelf edge // J. Phys. Oceanogr. 1997. V. 27. № 1. P. 2381–2394.
15. Zhang Z., Fringer O.B., Ramp S.R. Three-dimensional, nonhydrostatic numerical simulation of nonlinear internal wave generation and propagation in the South China Sea // J. Geophys. Res. 2011. V. 116. № C05022. P. 1–26.
16. Zhu D.Z., Lawrence G.A. Non-hydrostatic effects in layered shallow water flows // J. Fluid Mech. 1998. V. 355. № 25. P. 1–16.

Non-Hydrostatic Dynamics of a Region with an Underwater Mountain

N. E. Voltzinger, A. A. Androssov

Non-hydrostatic boundary-value problem is considered in the 3-D domain representing a strait with an underwater sill. The equations are integrated in the boundary-fitted coordinates on irregular grid. For detection of non-hydrostatic effects the grid has increased resolution at sill slopes. The method is applied for simulation non-hydrostatic dynamics in the Strait of Messina.