

УДК 551.465

## ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В УСТОЙЧИВО-НЕЙТРАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОКЕАНЕ

© 2015 г. Г. М. Резник

*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва**e-mail: greznikmd@yahoo.com*

Поступила в редакцию 07.05.2015 г., после доработки 28.05.2015 г.

Изучается волновой спектр в модельном вращающемся устойчиво-нейтрально стратифицированном океане, состоящем из устойчиво стратифицированного верхнего слоя и однородного нижнего слоя воды. Плотность и другие поля предполагаются непрерывными на границе раздела между слоями. Исследование не использует традиционное (когда в уравнениях пренебрегают горизонтальной компонентой угловой скорости вращения Земли) и гидростатическое приближения. Спектр имеет довольно сложную структуру и включает в себя супер-инерционные внутренние волны, суб-инерционные гироскопические волны, и суб- и супер-инерционные внутренние инерцио-гравитационные волны. В длинноволновом приближении внутренние и внутренние инерцио-гравитационные волны охватывают оба слоя, а гироскопические волны сосредоточены в нижнем слое и близки к инерционным колебаниям. Глубоководные суб-инерционные волновые движения в западной части Средиземного моря могут быть связаны с гироскопическими волнами.

DOI: 10.7868/S0030157415060167

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Сравнительно недавние измерения солёности и температуры повышенной точности (см., например, [11, 12]) показали, что, по крайней мере, в некоторых районах Мирового океана стратификация исчезающе слаба в придонном слое толщиной несколько сот метров. Долговременные измерения скоростей в таком слое в западной части Средиземного моря [12] продемонстрировали существование здесь интенсивных суб-инерционных колебаний с большими вертикальными скоростями. Авторы предположили, что эти колебания связаны с распространением так называемых суб-инерционных внутренних инерцио-гравитационных волн (ВИГВ), исследованных в ряде работ [1, 7, 8, 9]. Нам, однако, эта интерпретация не кажется убедительной, поскольку она не учитывает присутствие достаточно толстого придонного однородного слоя, который может существенно изменить как структуру мод, так и весь волновой спектр. К тому же ВИГВ, как правило, характеризуются очень малыми вертикальными скоростями, в отличие от наблюдаемых колебаний (подробнее см. ниже).

Для исследования влияния придонного однородного слоя на волновые моды мы рассматриваем устойчиво-нейтрально стратифицированный (УНС) модельный океан, состоящий из двух слоев (рис. 1). Верхний слой непрерывно и устойчиво стратифицирован по плотности, так что частота плавучести здесь положительна,  $N(z) > 0$ , а вода в нижнем слое однородна, т.е.

$N(z) = 0$ . В отличие от часто используемой двухслойной модели плотность и другие поля предполагаются непрерывными на границе раздела между слоями. В свою очередь, частота плавучести  $N(z)$  либо непрерывна, либо испытывает конечный разрыв на поверхности раздела. Очевидно, такая система может быть без особого труда реализована и изучена в лаборатории.

Динамика таких систем изучена плохо, основной интерес привлекало исследование внутренних волн (см., например, [5, 6]). Но, как мы увидим, кроме внутренних волн в УНС океане существуют гироскопические волны (ГВ) и ВИГВ и геострофическая мода, которые должны учитываться при исследовании эволюции начального возмущения. Гироскопические волны появляются благодаря “фоновому” вращению; в “чистом” виде они существуют (см., например, [4]) во вращающемся баротропном жидком слое постоянной глубины, ограниченном двумя твердыми крышками. В динамике ГВ важную роль играет горизонтальная компонента угловой скорости вращения Земли. В традиционном приближении (ТП), когда горизонтальной компонентой угловой скорости пренебрегают, ГВ в баротропном слое суб-инерционны, т.е. их частоты  $\sigma$  не превосходят вертикальную компоненту удвоенной угловой скорости вращения  $f = 2\Omega \sin \varphi$  (см. рис. 1),  $\sigma \leq f$ ; без традиционного приближения возможны как суб-, так и супер-инерционные волны с  $\sigma \geq f$  (см., например, [2, 9]).

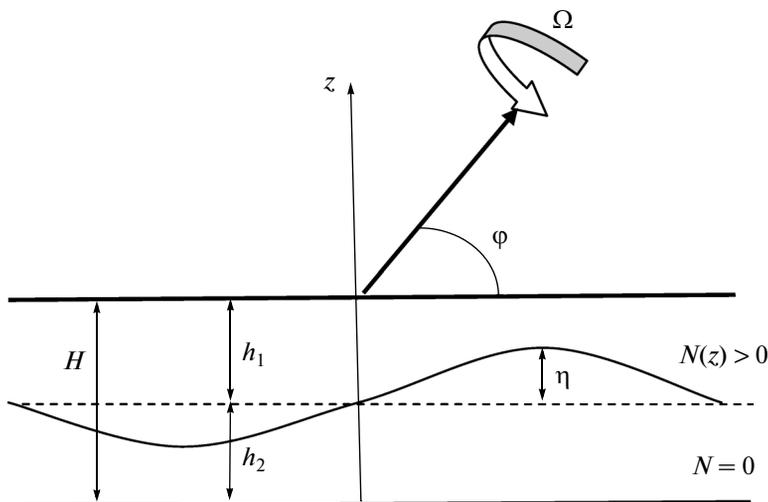


Рис. 1. Схематическое изображение устойчиво-непрерывно стратифицированного океана.

В стратифицированной жидкости в ТП суб-инерционные ГВ сосуществуют с супер-инерционными внутренними волнами только если минимальная частота плавучести меньше инерционной частоты,  $N_{\min} < f$ , (см., например, [3]). В случае сильной стратификации, т.е. при  $N_{\min} > f$ , возможны только супер-инерционные внутренние волны. Однако без ТП даже в сильно стратифицированной жидкости существуют суб-инерционные ВИГВ [1, 7–9]. Подобно ГВ, эти волны не могут существовать без вращения, но эффекты плавучести также играют важную роль в их динамике.

Одна из целей этой работы состоит в изучении линейной динамики системы, в которой внутренние волны сосуществуют с гироскопическими. УНС модель океана представляет собой простейшую систему такого рода. Мы увидим, что без традиционного и гидростатического приближений волновой спектр УНС океана включает все три перечисленных выше типа волн: внутренние, гироскопические, а также суб- и супер-инерционные внутренние инерцио-гравитационные волны. В разделе 2 представлены основные уравнения и граничные условия для УНС модели. Волновые моды изучаются в разделе 3. Раздел 4 содержит выводы и обсуждение результатов.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы рассматриваем слой воды постоянной глубины  $H$ , ограниченный двумя твердыми крышками и вращающийся как целое с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , которая, вообще говоря, не параллельна силе тяжести (направленной вдоль оси  $z$ , см. рис. 1). Плотность воды  $\rho$ , будучи непрерывной, равна  $\rho = \rho_0 + \rho_s(z) + \rho'(x, y, z, t)$  в верхнем слое толщиной  $h_1 - \eta$  и постоянна,  $\rho = \rho_0$ , в нижнем слое

толщиной  $h_2 + \eta$ , где  $h_1, h_2 = H - h_1$  – постоянные средние толщины слоев и  $\eta = \eta(x, y, t)$  – отклонение границы раздела между слоями. Сумма  $\rho_0 + \rho_s(z)$  определяет равновесный профиль плотности в верхнем слое, отклонение  $\rho'$  предполагается малым,  $\rho' \ll \rho_0$ . В линейном приближении уравнения, определяющие эволюцию такой системы, записываются в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \mathbf{e}_z g \rho / \rho_0 &= -\nabla p / \rho_0, \\ \rho_t - \rho_0 N^2 w / g &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \end{aligned} \quad (2.1a, б, в)$$

$$0 \geq z \geq -h_1,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} &= -\nabla p / \rho_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \\ -h_1 \geq z &\geq -H. \end{aligned} \quad (2.2a, б)$$

Здесь  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  – вектор скорости;  $u, v, w$  – компоненты скорости вдоль осей  $x, y, z$ , направленных вдоль параллели, меридиана и вертикально вверх соответственно;  $p$  и  $p'$  – отклонения плотности и давления от их гидростатических распределений;  $N = \sqrt{-g \rho_{sz} / \rho_0}$  – частота плавучести;  $2\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{e}_y f_s + \mathbf{e}_z f$ ,  $f = 2\Omega \sin \varphi$ ,  $f_s = 2\Omega \cos \varphi$ ;  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  – орты соответствующих координатных осей;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\rho_0$  – постоянная плотность в нижнем слое, штрих у  $\rho'$  опущен.

Решения системы (2.1), (2.2) должны удовлетворять условиям непротекания на твердых дне и поверхности

$$w|_{z=0, -H} = 0, \quad (2.3a)$$

и непрерывности на границе раздела

$$[u, v, w, p]_{z=-h_1} = 0, \quad (2.3б)$$

где  $[a]_{z=-h_1} = a|_{z=-h_1+0} - a|_{z=-h_1-0}$ .

Удобно свести (2.1), (2.2) к уравнениям для вертикальной скорости  $w$  (см., например, [5]):

$$(\partial_{tt} + f^2)w_{zz} + \bar{\Delta}w_{tt} + 2ff_s w_{yz} + f_s^2 w_{yy} + N^2 \bar{\Delta}w = 0, \quad (2.4a)$$

$$0 \geq z \geq -h_1,$$

$$(\partial_{tt} + f^2)w_{zz} + \bar{\Delta}w_{tt} + 2ff_s w_{yz} + f_s^2 w_{yy} = 0, \quad (2.4б)$$

$$-h_1 \geq z \geq -H,$$

где  $\bar{\Delta} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ . Граничные и начальные условия для (2.4) просто следуют из (2.3):

$$w|_{z=0,-H} = 0, \quad [w]_{z=-h_1} = [w_z]_{z=-h_1} = 0. \quad (2.5a, б)$$

### 3. ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ

**3.1. Дисперсионные соотношения.** Рассмотрим волновые решения задачи (2.4), (2.5) вида:

$$w = W(z) \exp[i(kx + ly - \sigma t)] + c.c.; \quad (3.1)$$

амплитуда  $W$  удовлетворяет уравнениям:

$$(f^2 - \sigma^2)W_{zz} + 2iff_s l W_z + [\kappa^2(\sigma^2 - N^2) - f_s^2 l^2]W = 0, \quad (3.2a)$$

$$0 \geq z \geq -h_1,$$

$$(f^2 - \sigma^2)W_{zz} + 2iff_s l W_z + (\kappa^2 \sigma^2 - f_s^2 l^2)W = 0, \quad (3.2б)$$

$$-h_1 \geq z \geq -H,$$

и граничным условиям

$$W|_{z=0,-H} = 0, \quad [W]_{z=-h_1} = [W_z]_{z=-h_1} = 0, \quad (3.3a, б)$$

следующим из (2.4), (2.5). Здесь и ниже *c.c.* обозначает комплексно сопряженную величину;  $k, l$  – волновые числа,  $\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$  – модуль волнового вектора.

Нетрудно видеть, что для ненулевых  $\kappa$  нетривиальные решения  $W$  существуют только при  $\sigma \neq f$ . Для простоты предположим частоту плавучести  $N$  постоянной; в этом случае амплитуда  $W$  дается формулой:

$$W = \begin{cases} A^+ [e^{(a+ib^+)z} - e^{(a-ib^+)z}], & 0 \geq z \geq -h_1 \\ A^- [e^{(a+ib^-)(z+H)} - e^{(a-ib^-)(z+H)}], & -h_1 \geq z \geq -H, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $A^\pm$  – постоянные амплитуды и

$$a = -iff_s l / (f^2 - \sigma^2), \quad (3.5a, б, в)$$

$$b^- = \sigma \kappa \sqrt{f^2 - \sigma^2 + \bar{f}_s^2} / |f^2 - \sigma^2|,$$

$$\bar{f}_s = f_s |l| / \kappa,$$

$$b^+ = \kappa \sqrt{(\bar{\sigma}_1^2 - \sigma^2)(\sigma^2 - \bar{\sigma}_2^2)} / |f^2 - \sigma^2|, \quad (3.5г)$$

$$\bar{\sigma}_{1,2}^2 = 0.5(f^2 + \bar{f}_s^2 + N^2) \pm \sqrt{0.25(f^2 + \bar{f}_s^2 + N^2)^2 - f^2 N^2}; \quad (3.5д)$$

в (3.5д) нижний индекс 1 (2) соответствует + (–).

Параметр  $b^\pm$  может быть либо мнимым, либо действительным. Без ограничения общности мы будем считать  $b^\pm$  положительным, если он действителен, и имеющим положительную мнимую часть, если он мнимый. Решение (3.1) удовлетворяет граничным условиям (3.3), если:

$$\frac{A^-}{A^+} = -e^{-aH} \frac{e^{ib^+ h_1} - e^{-ib^+ h_1}}{e^{ib^- h_2} - e^{-ib^- h_2}}, \quad (3.6a, б)$$

$$b^+ \frac{e^{ib^+ h_1} + e^{-ib^+ h_1}}{e^{ib^+ h_1} - e^{-ib^+ h_1}} = -b^- \frac{e^{ib^- h_2} + e^{-ib^- h_2}}{e^{ib^- h_2} - e^{-ib^- h_2}}.$$

Уравнение (3.6б) может быть удовлетворено, если, по крайней мере, один из параметров  $b^\pm$  веществен. Из (3.5б, г) и неравенств

$$\bar{\sigma}_1^2 \geq \max(f^2 + \bar{f}_s^2, N^2), \quad \bar{\sigma}_2^2 \leq f^2 \quad (3.7a, б)$$

следует, что волны с частотами  $\sigma > \bar{\sigma}_1$  существовать не могут. Используя (3.6б), (3.5a, г, д) и (3.7), получаем диапазоны частот различных типов волн, соответствующие дисперсионные соотношения и амплитуды (3.4).

#### 1) Гироскопические волны:

$$0 < \sigma \leq \bar{\sigma}_2 \Rightarrow b^+ - \text{мнимый}, b^- - \text{веществен}, \quad (3.8a)$$

$$|b^+| \operatorname{cth} |b^+| h_1 = -b^- \operatorname{ctg} b^- h_2, \quad (3.8б)$$

$$W = e^{a z} \begin{cases} \operatorname{sh} |b^+| z / \operatorname{sh} |b^+| h_1, & 0 \geq z \geq -h_1 \\ -\sin b^-(z+H) / \sin b^- h_2, & \\ -h_1 \geq z \geq -H \end{cases} \quad (3.8в)$$

#### 2) Внутренние инерцио-гравитационные волны:

$$\bar{\sigma}_2 \leq \sigma \leq \bar{\sigma}_3 \Rightarrow b^\pm - \text{веществен}, \quad (3.9a)$$

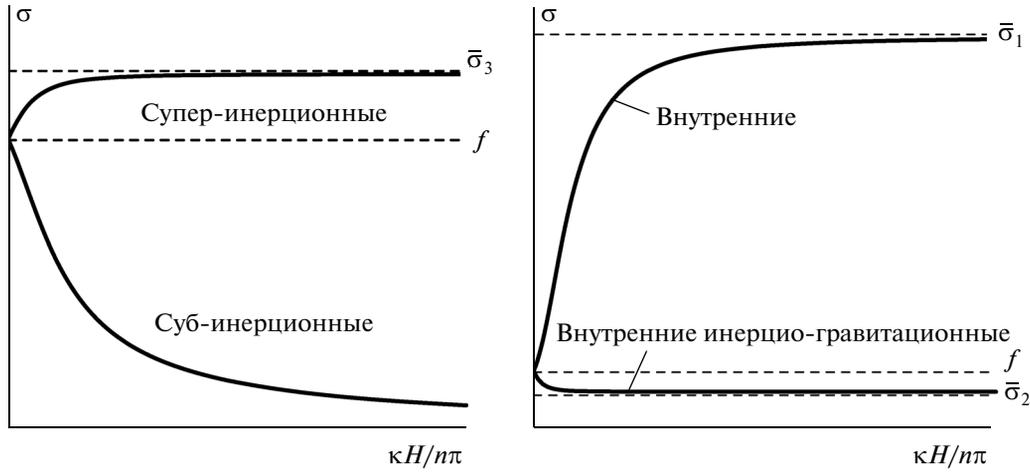
$$b^+ \operatorname{ctg} b^+ h_1 = -b^- \operatorname{ctg} b^- h_2, \quad (3.9б)$$

$$W = e^{a z} \begin{cases} \sin b^+ z / \sin b^+ h_1, & 0 \geq z \geq -h_1 \\ -\sin b^-(z+H) / \sin b^- h_2, & \\ -h_1 \geq z \geq -H \end{cases} \quad (3.9в)$$

#### 3) Внутренние волны:

$$\bar{\sigma}_3 \leq \sigma \leq \bar{\sigma}_1 \Rightarrow b^+ - \text{веществен}, b^- - \text{мнимый}, \quad (3.10a)$$

$$b^+ \operatorname{ctg} b^+ h_1 = -|b^-| \operatorname{cth} |b^-| h_2, \quad (3.10б)$$



**Рис. 2.** Дисперсионные соотношения для вращающейся жидкости. Слева: гироскопические волны в баротропном слое; справа: внутренние и внутренние инерцио-гравитационные волны в устойчиво стратифицированном слое с  $N = \text{const}$ ;  $N/f = 2, \bar{f}_s/f = 1/\sqrt{2}$ .

$$W = e^{az} \begin{cases} \sin b^+ z / \sin b^+ h_1, & 0 \geq z \geq -h_1 \\ -\text{sh} |b^-| (z + H) / \text{sh} |b^-| h_2, & \\ -h_1 \geq z \geq -H \end{cases} \quad (3.10в)$$

Здесь предполагается, что  $f^2 + \bar{f}_s^2 \leq N^2$  и

$$\bar{\sigma}_3 = \sqrt{f^2 + \bar{f}_s^2}. \quad (3.11)$$

**3.2. Дисперсионные кривые в баротропном и устойчиво стратифицированном случаях.** В баротропной жидкости  $N = 0$  и  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2 = 0$ , т.е. ветви (3.8), (3.10) исчезают и остается только ветвь ВИГВ (3.9), соответствующая здесь баротропным гироскопическим волнам. Параметры  $b^-$  и  $b^+$  равны друг другу, т.е.  $b^+ = b^- = b$ , и мы находим из (3.9б), что

$$bH = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

где  $n$  – номер вертикальной моды. Соответствующие дисперсионные соотношения (см., например, [2, 9]) получаются из (3.5б) и (3.12):

$$\sigma_n^2 = 0.5 \left[ 2f^2 \bar{b}_n^2 + f^2 + \bar{f}_s^2 \pm \sqrt{(f^2 + \bar{f}_s^2)^2 + 4f^2 \bar{f}_s^2 \bar{b}_n^2} \right] / (1 + \bar{b}_n^2), \quad (3.13)$$

$$\sigma_n^2 = 0.5 \left[ 2f^2 \bar{b}_n^2 + f^2 + \bar{f}_s^2 + N^2 \pm \sqrt{(f^2 + \bar{f}_s^2 + N^2)^2 - 4f^2 N^2 + 4f^2 \bar{f}_s^2 \bar{b}_n^2} \right] / (1 + \bar{b}_n^2) \quad (3.17)$$

и показано на рис. 2. Видно, что граничные частоты  $\bar{\sigma}_1$  и  $\bar{\sigma}_2$  отвечают коротковолновому пределу  $\kappa H \rightarrow \infty$ . Длинноволновая асимптотика (3.14) остается справедливой в стратифицированном случае при условии  $\kappa H \ll n\pi f / N$ , т.е. когда гори-

здесь  $\bar{b}_n = n\pi / \kappa H$  и знаки + и – соответствуют супер- и суб-инерционной ветвям соответственно. Дисперсионные кривые представлены на рис. 2; видно, что супер-инерционные (суб-инерционные) частоты лежат в диапазоне  $[f, \bar{\sigma}_3]$  ( $[0, f]$ ). В пределе длинных волн находим из (3.13):

$$\sigma_n = f \left( 1 \pm \bar{f}_s \kappa H / (2n\pi f) + O(\kappa^2 H^2) \right), \quad \kappa H \ll 1. \quad (3.14)$$

Устойчиво стратифицированный случай, когда придонный однородный слой отсутствует, т.е.  $h_1 = H$ , рассматривался в ряде работ (см., например, [2, 7, 9]). Решение в этом случае дается “верхней” строчкой в (3.4) и должно удовлетворять только граничным условиям (3.3а), откуда находим, что

$$b^+ = n\pi / H, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Поскольку  $b^+$  веществен, из (3.5г) следует, что

$$\bar{\sigma}_2 \leq \sigma \leq \bar{\sigma}_1, \quad (3.16)$$

т.е. частоты  $\bar{\sigma}_1$  и  $\bar{\sigma}_2$  в (3.5д) представляют собой супер- и суб-инерционные границы диапазона частот соответственно. Дисперсионное соотношение следует из (3.5г) и (3.15):

зонтальный масштаб намного превосходит соответствующий масштаб Россби  $NH / n\pi f$ .

Супер-инерционная ветвь  $f \leq \sigma \leq \bar{\sigma}_1$  соответствует внутренним волнам. Суб-инерционная ветвь  $\bar{\sigma}_2 \leq \sigma \leq f$  существует только если  $N \neq 0$  и

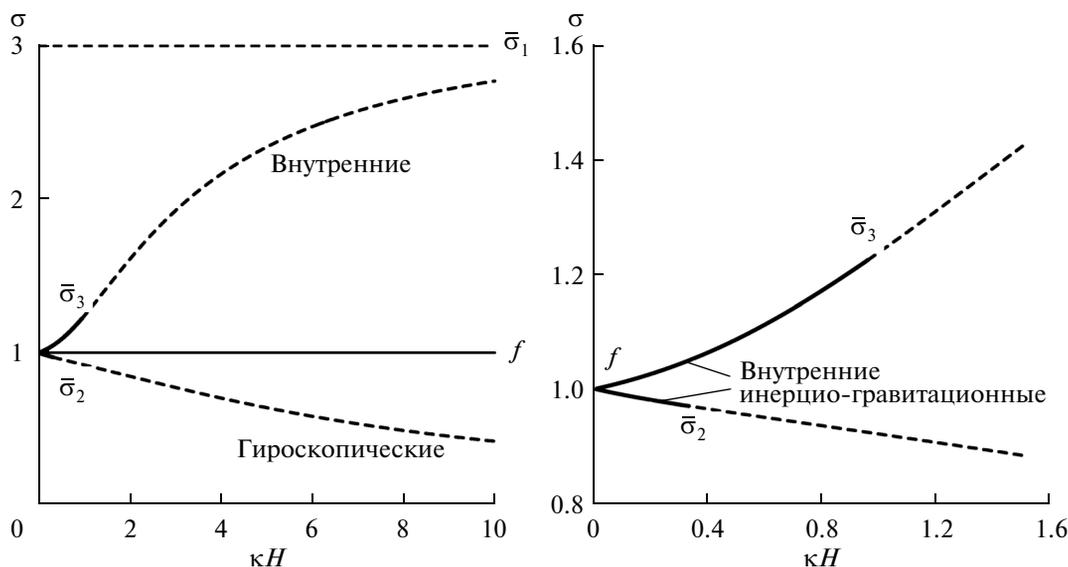


Рис. 3. Дисперсионные кривые для УНС океана. Слева: общий вид; справа: область длинных волн;  $N/f = 3$ ,  $\bar{f}_s/f = 1/\sqrt{2}, h_1 = h_2$ .

учитываются обе компоненты угловой скорости  $\Omega$  (т.е.  $f \neq 0, f_s \neq 0$ ); именно волны на этой ветви называются внутренними инерцио-гравитационными волнами [8]. В случае  $f/N \ll 1$  частоты  $\bar{\sigma}_{1,2}$  могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= N \left( 1 + \bar{f}_s^2 / 2N^2 + O(f^4/N^4) \right), \\ \bar{\sigma}_2 &= f \left( 1 - \bar{f}_s^2 / 2N^2 + O(f^4/N^4) \right), \end{aligned} \quad (3.18a, б)$$

т.е. суб-инерционная ветвь очень близка к инерционной частоте  $f$  для всех волновых чисел. Нетрудно видеть, что на суб-инерционной ветви  $|a|H \sim (N^2/f^2)\kappa H$ , поэтому вертикальные масштабы ВИГВ очень малы при  $\kappa H \gg f^2/N^2$ , т.е. почти везде за исключением узкой окрестности  $\kappa H = 0$  шириной  $O(f^2/N^2)$ . В случае гладких по глубине начальных полей только малая часть энергии передается суб-инерционным волнам, в то время как основная ее часть приходится на супер-инерционные волны из диапазона  $f \leq \sigma \leq \bar{\sigma}_1$ , которые свободны от ограничений на вертикальные масштабы. Заметим, что супер-инерционные волны близки к инерционным колебаниям только при  $\kappa H \ll f/N$ , в случае  $\kappa H \sim f/N$  частота супер-инерционной волны отличается от  $f$  на величину порядка  $f$ .

**3.3. Общий случай.** В общем случае УНС океана дисперсионные кривые представлены на рис. 3. Аналогично предыдущему, для каждой вертикальной моды с фиксированным номером кривая состоит из суб-инерционной и супер-инерционной ветвей. Суб-инерционные частоты лежат в диапазоне  $[0, f]$ , и, как видно из рис. 2, 3, суб-инерционная ветвь подобна суб-инерционной ветви в баротропном случае. В свою очередь, супер-инерционная ветвь подобна аналогичной ветви в устойчиво стратифицированном случае, причем супер-инерционные частоты лежат в диапазоне  $[f, \bar{\sigma}_1]$ . Частоты  $\bar{\sigma}_2$  и  $\bar{\sigma}_3$  здесь являются “разделительными” частотами: частота  $\bar{\sigma}_2$  разделяет суб-инерционные ВИГВ с частотами из диапазона  $[f, \bar{\sigma}_2]$  и гироскопические волны из интервала  $[0, \bar{\sigma}_2]$ . Аналогично, интервалы  $[f, \bar{\sigma}_3]$  и  $[\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_1]$  на супер-инерционной ветви соответствуют супер-инерционным ВИГВ и внутренним волнам соответственно.

Вертикальные структуры различных типов волн отличаются друг от друга (собственно, на этом отличии и основывается приведенная выше классификация). Так, амплитуда гироскопических волн (3.8в) осциллирует в нижнем однородном слое и не имеет нулей в верхнем; амплитуда (3.9в) суб- и супер- суб-инерционных ВИГВ осциллирует в обоих слоях; наконец, амплитуда (3.10в) внутренних волн осциллирует в стратифицированном верхнем слое и не имеет нулей в нижнем.

При  $\sigma \rightarrow 0$  волновое число  $\kappa H \rightarrow \infty$  и параметр  $|b^+| \rightarrow \infty$ , поэтому из (3.8в) следует, что для достаточно коротких гироскопических волн

$$W \cong e^{az} \begin{cases} e^{-b^+(z+h_1)}, & 0 \geq z \geq -h_1 \\ -\sin b^-(z+H)/\sin b^-h_2, & \\ -h_1 \geq z \geq -H, \end{cases} \quad (3.19)$$

т.е. такие волны сосредоточены в придонном однородном слое. Дисперсионное соотношение для коротких гироскопических волн может быть приближенно записано как

$$\sigma = \frac{f^2}{\sqrt{f^2 + \bar{f}_s^2}} \frac{n\pi}{\kappa h_2}, \quad \kappa H \gg 1, \quad (3.20)$$

т.е., как следует из (3.13), совпадает с соответствующей асимптотикой для суб-инерционных гироскопических волн в баротропном слое толщиной  $h_2$ .

При  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}_2$  параметр  $b^+ \rightarrow 0$ , и мы получаем:

$$W = e^{az} \begin{cases} z/h_1, & 0 \geq z \geq -h_1 \\ -\sin b^-(z+H)/\sin b^-h_2, & \\ -h_1 \geq z \geq -H, \end{cases} \quad (3.21)$$

т.е. амплитуда  $W$  (если не брать в расчет осциллирующий множитель  $e^{az}$ ) линейно зависит от  $z$  в верхнем слое и осциллирует в нижнем.

Аналогично, при  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}_3$  параметр  $b^- \rightarrow 0$ , поэтому с учетом (3.9в), (3.10в)

$$W = e^{az} \begin{cases} \sin b^+z/\sin b^+h_1, & 0 \geq z \geq -h_1 \\ -(z+H)/h_2, & -h_1 \geq z \geq -H \end{cases}, \quad (3.22)$$

т.е. собственная функция линейна по  $z$  в нижнем слое и осциллирует в верхнем.

В интервале коротких внутренних волн частота  $\sigma$  близка к  $\bar{\sigma}_1$ ; при этом  $\kappa H \gg 1$  и  $|b^-|h_2 \gg 1$ , откуда

$$W = e^{az} \begin{cases} \sin b^+z/\sin b^+h_1, & 0 \geq z \geq -h_1; \\ -e^{b^-(z+h_1)}, & -h_1 \geq z \geq -H \end{cases}; \quad (3.23)$$

и мы видим, что короткие внутренние волны сосредоточены в верхнем стратифицированном слое.

Наконец, при  $\sigma \rightarrow f$  мы имеем  $\kappa H \rightarrow 0$ ,  $b^- \cong b^+ \cong n\pi/H$  и, в силу (3.9в),

$$W = e^{az} \frac{\sin n\pi z/H}{\sin n\pi h_1/H}, \quad (3.24)$$

т.е. достаточно длинные волны в узкой окрестности инерционной частоты не “чувствуют” стратификации. Заметим, однако, что это имеет место только при  $\bar{f}_s \neq 0$ .

**3.4. Случай  $f/N \ll 1$  и длинноволновое приближение.** В важном для приложений случае сильной стратификации  $f/N \ll 1$  частоты  $\bar{\sigma}_{1,2}$  принимают вид (3.18), т.е. интервал  $\bar{\sigma}_2 \leq \sigma \leq f$ , соответствующий суб-инерционным ВИГВ, сильно сокращается, в то время как диапазон супер-инерционных ВИГВ остается прежним (см. рис. 3). В длинноволновом приближении  $\kappa H \ll 1$  частоты суб-инерционных ВИГВ и гироскопических волн в интервале  $\sigma \leq f$  даются формулой

$$\sigma = f(1 + O(\kappa H)), \quad (3.25)$$

а частоты супер-инерционных ВИГВ и внутренних волн в интервале  $\sigma \geq f$  формулой

$$\sigma = f(1 + O(\kappa^2 H^2 N^2 / f^2)). \quad (3.26)$$

При этом в интервале длин волн

$$f^2/N^2 \ll \kappa H \ll 1 \quad (3.27)$$

справедливы следующие приближенные дисперсионные соотношения:

$$\sigma \cong f - \bar{f}_s \kappa h_2 / 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \sigma \leq f; \quad (3.28a)$$

$$\sigma \cong f \sqrt{1 + \kappa^2 h_1^2 N^2 / s_n^2 f^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \sigma > f. \quad (3.28b)$$

Здесь  $s_n$  –  $n$ -й корень уравнения  $s \operatorname{ctg} s = -h_1/h_2$ .

Что касается волновых амплитуд собственных функций (3.4), то в интервале (3.27) суб-инерционные моды сосредоточены в нижнем однородном слое и экспоненциально затухают в верхнем слое, а супер-инерционные моды осциллируют в стратифицированном слое и линейно зависят от  $z$  в однородном. Важно, что в соответствии с (3.25), (3.26) суб-инерционные гироскопические волны (супер-инерционные моды) близки к инерционным колебаниям при  $L \gg H$  ( $L \gg L_R = HN/f$ ), где  $L$  – характерный горизонтальный масштаб волны и  $L_R$  – масштаб Россби. В случае  $f/N \ll 1$  масштаб Россби намного превышает глубину  $H$ , т.е. суб-инерционные гироскопические волны делают возможными инерционные колебания, существенно более короткие по горизонтали, чем “традиционные” инерционные колебания, связанные с длинными супер-инерционными внутренними модами. Можно предположить, что именно этот факт объясняет большие вертикальные скорости около-инерционных колебаний с частотой  $\sigma < f$ , наблюдаемых в практически баротропной глубоководной западной части Средиземного моря [12].

**3.5. Вихревая мода.** Кроме рассмотренных выше волновых мод с ненулевыми  $\sigma$  в системе (2.1), (2.2) также существует стационарная вихревая мода, которая подчиняется уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\Omega \times \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{e}_z g \bar{\rho} / \rho_0 &= -\nabla \bar{p} / \rho_0, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} &= 0; \quad 0 \geq z \geq -h_1, \end{aligned} \quad (3.29a, б)$$

$$2\Omega \times \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} / \rho_0, \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0; \quad (3.30a, б)$$

$$-h_1 \geq z \geq -H.$$

В силу (3.30a) зональная скорость  $u$  в нижнем слое может быть записана в виде

$$\bar{u} = \bar{u}(x, fy - f_s z), \quad -h_1 \geq z \geq -H. \quad (3.31)$$

Используя (3.31) и (3.30), нетрудно показать, что то же самое справедливо и для других полей в однородном слое. В силу условия непротекания на дне вертикальная скорость  $\bar{w}$  равна нулю, и поля в нижнем слое геострофически сбалансированы аналогично полям в верхнем слое. Важное свойство состоит в том, что в однородном слое вихревая мода обладает цилиндрической симметрией, при этом образующая цилиндра параллельна скорости вращения  $\Omega$  и движение одинаково во всех сечениях, параллельных дну и поверхности (см. также [10]). Этот эффект имеет место только для однородного слоя, структура геострофического стационарного течения в верхнем слое зависит от распределения плотности (ср. (3.29a) с (3.30a)).

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы исследовали волновой спектр вращающегося УНС океана с учетом горизонтальной компоненты угловой скорости вращения Земли, т.е. без традиционного и гидростатического приближений. Спектр объединяет суб-инерционные волны в однородной жидкости (см., например, [2, 4]) и внутренние волны в устойчиво стратифицированной жидкости [1, 7, 9]. Каждая дисперсионная кривая  $\sigma(k, l)$  в спектре состоит из супер- и суб-инерционных ветвей, соответствующих  $\sigma > f$  и  $\sigma < f$  соответственно. Обе ветви берут начало на инерционной частоте  $f$  для бесконечно длинных волн с  $\kappa H = 0$ . Ультра длинные волны представляют собой около-инерционные колебания с  $\sigma \cong f$ , не подверженные влиянию стратификации. С ростом  $\kappa H$  мы оказываемся в диапазоне супер- и суб-инерционных внутренних инерцио-гравитационных волн, осциллирующих в обоих слоях. Еще большие  $\kappa H$  соответствуют интервалу внутренних волн на супер-инерционной ветви и интервалу гироскопических волн на суб-инерционной ветви. Внутренние волны осциллируют в верхнем слое и не имеют нулей в нижнем; короткие внутренние волны с  $\kappa H \gg 1$  не проникают в нижний слой. Гироскопические волны, напротив, осциллируют в однородном слое, не имеют нулей в стратифицированном и экспоненциально затухают в последнем в коротковолновом приближении  $\kappa H \gg 1$  с увеличением расстояния от поверхности раздела.

В практически важном случае сильной стратификации  $f/N \ll 1$  диапазон суб-инерционных ВИГВ почти исчезает, интервал гироскопических

волн расширяется почти до инерционной частоты, и интервалы супер-инерционных ВИГВ и внутренних волн практически не меняются.

В диапазоне длинных волн  $f^2/N^2 \ll \kappa H \ll 1$  внутренние и супер-инерционные ВИГВ свободно проникают в нижний слой, в то время как гироскопические волны сосредоточены в нижнем слое и близки к около-инерционным колебаниям с  $\sigma < f$ . Важно, что гироскопические волны превращаются в инерционные колебания при  $L \gg H$ , а супер-инерционные моды — только если  $L \gg L_R = HN/f$ . Иными словами, наличие гироскопических волн обеспечивает существование инерционных колебаний, более коротких по сравнению с “традиционными” инерционными колебаниями, связанными с длинными внутренними модами.

Существует ряд важных различий между суб-инерционными ВИГВ в устойчиво стратифицированном океане [1, 7–9] и гироскопическими волнами в УНС океане, особенно в случае сильной стратификации  $f/N \ll 1$ . Во-первых, ВИГВ существуют только при ненулевой горизонтальной компоненте угловой скорости вращения Земли, в то время как гироскопические волны существуют и в традиционном приближении. Во-вторых, частоты суб-инерционных ВИГВ лежат в интервале  $[\bar{\sigma}_2, f]$ , который становится очень узким при  $f/N \ll 1$ ; частоты гироскопических волн приходятся на диапазон  $[0, \bar{\sigma}_2]$ , который намного шире. В-третьих, ВИГВ характеризуются очень малым отношением  $H/L \sim f^2/N^2$ , т.е. очень малыми вертикальными скоростями; в гироскопических волнах нет ограничений на параметр  $H/L$ .

Как упоминалось выше, в [12] были описаны суб-инерционные колебания в практически однородном 700-метровом придонном слое в западной части Средиземного моря. Колебания характеризовались большими вертикальными скоростями (иногда сравнимыми с горизонтальными). Авторы предположили, что эти колебания связаны с суб-инерционными ВИГВ, которые могут существовать в стратифицированном океане. Наши вычисления показывают, что это, вообще говоря, не так, поскольку, как мы видели выше, в ВИГВ вертикальные скорости пренебрежимо малы по сравнению с горизонтальными. Обнаруженные колебания связаны, скорее, с суб-инерционными гироскопическими волнами, сосредоточенными в однородном слое и характеризующимися сравнительно большими вертикальными скоростями.

Работа была поддержана РНФ (проект № 14-50-00095).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бадулин С.И., Василенко В.М., Яремчук М.И. Об особенностях интерпретации квазиинерционных движений на примере Мегалополигона // Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана. 1991. Т. 27. № 6. С. 635–647.
2. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 337 с.
3. Каменкович В.М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 240 с.
4. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 1. М.: Мир, 1981. 480 с.
5. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
6. Gerkema T., Exarchou E. Internal-wave properties in weakly stratified layers // J. Marine Res. 2008. V. 66. № 5. P. 617–644.
7. Gerkema T., Shrira V.I. Near-inertial waves in the ocean: Beyond the “traditional approximation” // J. Fluid Mech. 2005. V. 529. P. 195–219.
8. Gerkema T., Zimmerman J.T.F., Maas L.R.M., van Haren H. Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation // Rev. Geophys. 2008. V. 46. № 2. RG2004.
9. Kasahara A. The roles of the horizontal component of the Earth’s angular velocity in nonhydrostatic linear models // J. Atmos. Sci. 2003. V. 60. № 8. P. 1085–1095.
10. Reznik G.M. Geostrophic adjustment with gyroscopic waves: barotropic fluid without traditional approximation // J. Fluid Mech. 2014. V. 743. P. 585–605.
11. Timmermans M.L., Melling H., Rainville L. Dynamics in the Deep Canada Basin, Arctic Ocean, inferred by thermistor chain time series // J. Phys. Ocean. 2007. V. 37. № 4. P. 1066–1076.
12. van Haren H., Millot C. Gyroscopic waves in the Mediterranean Sea // Geophys. Res. Lett. 2005. V. 32. № 24. L24614.

## Wave Motions in a Stably-Neutrally Stratified Ocean

G. M. Reznik

The wave spectrum is examined in a rotating stably-neutrally stratified model ocean consisting of stably stratified upper and homogeneous lower water layers. The density and other fields are continuous at the interface between the layers. The consideration does not use the traditional (when the horizontal component of the Earth’s rotation is neglected) and hydrostatic approximations. The spectrum has rather complicated structure and consists of the super-inertial internal waves, the sub-inertial gyroscopic waves and the sub- and super-inertial internal inertio-gravity waves. In the long wave approximation the internal and internal inertio-gravity waves span both the layers and the gyroscopic waves are localized in the lower homogeneous layer and are close to inertial oscillations. Deep-sea sub-inertial oscillations in the Western Mediterranean can be related to the gyroscopic waves.