

УДК 550.830, 539.3

## К ВОПРОСУ ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ АКТИВНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И АКУСТИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

© 2017 г. О.А. Хачай<sup>1</sup>, А.Ю. Хачай<sup>2</sup>, О.Ю. Хачай<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт геофизики им. Ю.П. Булашевича УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия*

<sup>2</sup> *Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия*

Разработаны новый подход к интерпретации волновых полей для определения контуров или поверхностей локальных иерархических объектов и итерационный процесс решения теоретической обратной задачи для случая определения конфигураций двумерных иерархических включений  $k$ -го ранга. При интерпретации результатов мониторинга необходимо использовать данные таких систем наблюдения, которые могут быть настроены на исследование иерархической структуры среды. К ним относятся, в частности, сейсмические (в динамическом варианте) и электромагнитные мониторинговые системы. Однако, чем сложнее среда, тем большую информацию о ее внутренней структуре привносит каждое волновое поле. Поэтому интерпретацию сейсмического и электромагнитного полей необходимо проводить раздельно, не смешивая базы их данных. Это содержится в явном виде уравнений теоретической обратной задачи для двумерного электромагнитного поля ( $E$ - и  $H$ -поляризация), а также для распространения линейно поляризованной упругой волны при возбуждении  $N$ -слойной проводящей или упругой среды с иерархическим проводящим или упругим включением, расположенным в  $v$ -м слое.

**Ключевые слова:** иерархическая среда, электромагнитное поле, сейсмическое поле, итерационный алгоритм, уравнение теоретической обратной задачи.

### Введение

Важнейшим итогом геомеханико-геодинамических исследований минувшего века стало обнаружение тесной связи между глобальными геодинамическими и локальными геомеханическими процессами, обусловленными ведением горных работ, особенно в тектонически-активных зонах. Не менее значимым результатом исследований явилось заключение о фундаментальной роли блочно-иерархического строения горных пород и массивов для объяснения существования широкой гаммы нелинейных геомеханических эффектов и возникновения сложных самоорганизующихся геосистем. Иерархическая структура характерна для многих систем, в том числе и для литосферы Земли, в которой по геофизическим исследованиям было выделено более 30 иерархических уровней – от тектонических плит протяженностью в тысячи километров до отдельных минеральных зерен миллиметрового размера [Прангишвили, Пащенко, Бусыгин, 2001]. Таким образом, земная кора представляет собой не сплошную среду, а дискретную систему блоков и, как любой синергетический дискретный ансамбль, обладает свойствами иерархичности и самоподобия [Кочарян, Спивак, 2003].

Процессы разработки нефтегазовых месторождений тесно связаны с движением многофазных мультикомпонентных сред, характеризующихся неравновесными и нелинейными реологическими свойствами. Реальное поведение пластовых систем определяется сложностью реологии движущихся жидкостей и морфологического строения

пористой среды, а также многообразием процессов взаимодействия жидкости и пористой среды [Хасанов, Булгакова, 2003]. Учет этих факторов необходим для содержательного описания процессов фильтрации за счет присущих реальным системам нелинейности, неравновесности и неоднородности. При этом выявляются новые синергетические эффекты, например, такие как потеря устойчивости с возникновением колебаний и образование упорядоченных структур. Необходимость учета этих явлений стимулирует предложение новых методов контроля и управления сложными природными системами, к которым относится и сложная динамическая иерархическая пластовая нефтесодержащая система.

При построении математической модели реального объекта в качестве априорной информации необходимо использовать данные активного и пассивного мониторинга, получаемые в ходе текущей эксплуатации объекта. В работах [Хачай, Хачай, 2011, 2013] представлены два алгоритма моделирования: в электромагнитном случае для трехмерной неоднородности и в сейсмическом – для двумерной неоднородности при произвольном типе источника возбуждения  $N$ -слойной среды с иерархическим упругим включением, расположенным в  $j$ -м слое.

Для нефтяной промышленности решение обратных задач имеет огромное значение, поскольку нефтяной пласт относится к природным системам, не поддающимся прямым измерениям и наблюдениям. Исследования последних лет показали, что в эволюции динамических систем важную роль играют неустойчивости, природу которых изучает теория самоорганизации (синергетика). Информацию о проявлении этих неустойчивостей в нефтяном пласте при его обработке можно получить только при использовании данных мониторинга, чувствительных к иерархической структуре пласта.

В работе [Хачай, 1994] предложена концепция поэтапной интерпретации переменного электромагнитного поля. На первом этапе определяются параметры нормального разреза, или параметры одномерной немагнитной среды, вмещающей аномальные проводящие, либо магнитные включения. На втором этапе осуществляется подбор аномального переменного электромагнитного поля системой сингулярных источников, помещенных в горизонтально-слоистую среду, которая характеризуется геоэлектрическими параметрами, определенными на первом этапе. На третьем этапе решается теоретическая обратная задача, т.е. при заданных геоэлектрических параметрах вмещающей среды для набора параметров неоднородности определяются ее контуры. Получены явные интегродифференциальные уравнения теоретической обратной задачи рассеяния электромагнитных полей (двух- и трехмерного переменного и трехмерного стационарного) в рамках нескольких моделей. Так, рассмотрены проводящее либо магнитное тела в  $\nu$ -м слое проводящего  $n$ -слойного полупространства. Все три этапа программно реализованы и используются при интерпретации электромагнитных данных активного и пассивного картирования и мониторинга в наземном и подземном вариантах. Реализация третьего этапа подробно изложена в работе [Хачай, 1988].

В настоящей статье авторы, используя подход, изложенный в [Хачай, 1989, 1990], разработали алгоритм получения уравнения теоретической обратной задачи для переменного электромагнитного поля (скалярный случай) и акустического поля (поперечной акустической волны) для модели, представляющей проводящую или упругую иерархическую неоднородность  $k$ -го ранга, расположенную в  $\nu$ -м слое проводящего либо упругого  $n$ -слойного полупространства.

На основе уравнения теоретической обратной задачи рассматривается итерационный алгоритм решения обратной задачи для двумерного переменного электромагнитного поля для  $n$ -слойной проводящей среды с проводящим включением иерархического типа. Затем приводится основанный на том же уравнении итерационный алгоритм

решения обратной задачи для двумерной дифракции линейно поляризованной упругой поперечной волны для  $n$ -слойной упругой среды с упругим включением иерархического типа.

**Алгоритм решения обратной задачи двумерного переменного электромагнитного поля для  $n$ -слойной среды с иерархическим включением**

Пусть односвязная область  $D$  из евклидова пространства  $R^2$ , ограниченная непрерывно дифференцируемой замкнутой кривой  $\partial D$ , расположена в  $\nu$ -м слое  $n$ -слойного полупространства. Пусть эта область содержит в себе  $K$  несоосных односвязных иерархических включений, ограниченных непрерывно дифференцируемыми замкнутыми кривыми  $\partial D_k$ , которые простираются параллельно оси  $OX$ . Границы  $l_j$  слоев  $\Pi_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) параллельны оси  $OY$  плоскости  $XOY$  декартовой системы координат; ось  $OZ$  направлена вертикально вниз. Поместим начало координат на верхней границе поверхности первого слоя, совместив его с точкой, являющейся проекцией на  $OY$  точки, относительно которой область  $D$  звездная. Пусть  $U(y, z)$  – комплекснозначные дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие двумерному скалярному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta U + c(M)U = -f(M). \tag{1}$$

В этом выражении  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , а  $c(M)$  имеет вид

$$c(M) = \begin{cases} c_j; & M \in \Pi_j \setminus \bar{D} (j = 0, \dots, n) \\ c_{ak}; & M \in D_k (k = 1, \dots, K). \end{cases} \tag{2}$$

Будем считать, что функция  $U^1(y, z)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta U^1 + p(M)U^1 = -f(M), \tag{3}$$

$$p(M) = \begin{cases} c_j; & M \in \Pi_j \setminus \bar{D} (j = 0, \dots, n) \\ c_\nu; & M \in D_k (k = 1, \dots, K). \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $k=1$  (фрагмент  $a$  на приведенном ниже рисунке). Для  $M \in R^2 \setminus \bar{D}$  ( $j = 0, \dots, n$ ) определим

$$U^+(M) = U(M) - U^1(M). \tag{5}$$

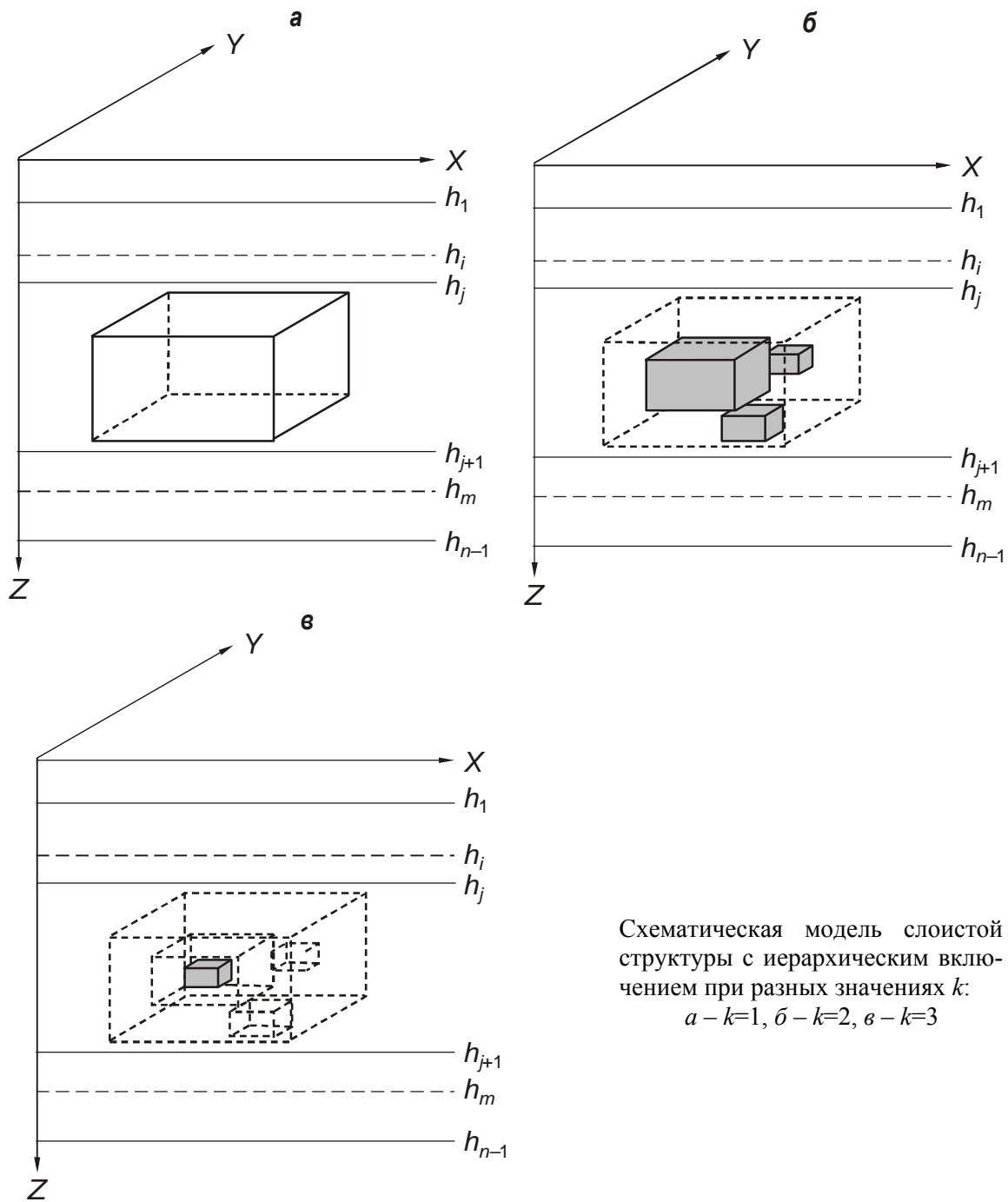
Функция  $U^+(M)$  удовлетворяет уравнению (1). На границах раздела  $l_j$  слоев  $\Pi_j$  выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} U_j &= U_{j+1}; \\ U_j^+ &= U_{j+1}^+; \quad M \in l_j (j = 1, \dots, n-1); \\ U_j^1 &= U_{j+1}^1; \end{aligned} \tag{6}$$

$$b_j \frac{\partial U_j}{\partial n} = b_{j+1} \frac{\partial U_{j+1}}{\partial n}; \quad b_j \frac{\partial U_j^+}{\partial n} = b_{j+1} \frac{\partial U_{j+1}^+}{\partial n}; \quad b_j \frac{\partial U_j^1}{\partial n} = b_{j+1} \frac{\partial U_{j+1}^1}{\partial n}; \quad M \in l_j, \tag{7}$$

где  $b_j$  – комплексные коэффициенты с  $j=0, \dots, n$  (в общем случае  $b_j \neq b_{j+1}$ ); на контуре  $\partial D_k$  при  $k=1$  имеем:

$$U_\nu = U_\nu^+ + U_\nu^1. \tag{8}$$



Схематическая модель слоистой структуры с иерархическим включением при разных значениях  $k$ :  
 $a - k=1, б - k=2, в - k=3$

Функция  $U_v$  в выражении (8) удовлетворяет уравнению

$$\Delta U_v + c_v(M)U_v = -f(M); \tag{9}$$

$U_v^+$  – функция  $U^+$  в слое  $\Pi_v \notin D$ ;  $U_v^1$  – функция  $U^1$  в слое  $\Pi_v \notin D$ .

В области  $D$  при  $k=1$

$$U_a = U_a^+ + U_a^1; M \in \bar{D}; \Delta U_a + c_a U_a = 0. \tag{10}$$

Граничные условия на  $\partial D$  при  $k=1$ :

$$U_a^+ = U_v^+; b_a \frac{\partial U_a}{\partial n} - b_v \left( \frac{\partial U_v^+}{\partial n} + \frac{\partial U_v^1}{\partial n} \right) = 0. \tag{11}$$

При  $M \rightarrow \infty$  функции  $U(M), U^+(M), U^1(M)$  удовлетворяют условию излучения [Стрэттон, 1948]. Алгоритм вычисления функции  $U^1$  приведен в работе [Хачай, 1994].

Введем функцию  $G(M, M_0)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G + p(M)G = -\delta(M, M_0) \quad (12)$$

и граничным условиям (6), (7). При  $M \rightarrow \infty$  функция  $G$  удовлетворяет условию излучения [Стрэттон, 1948]; при  $M \rightarrow M_0$  она имеет особенность типа  $\ln 1/\rho(M, M_0)$ :

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (13)$$

Алгоритм вычисления функции  $G$  для случая, когда область  $D$  находится в  $v$ -м слое, приведен в работе [Хачай, 1994].

Введем функцию  $G^a$ , совпадающую при  $k=1$  с фундаментальным решением уравнения (2). Применим формулу Грина [Стрэттон, 1948] для пары функций  $U^+, G$ ; ( $M \in R^2 \setminus \bar{D}, M_0 \in \Pi_i$ ) в каждом из слоев  $\Pi_j$  ( $j=0, \dots, n$ ). Выполним процедуру, аналогичную представленной в [Дмитриев, 1965], домножив полученные выражения для каждого слоя на  $b_j$  ( $j=0, \dots, n$ ) и сложив их почленно с учетом (1)–(4), (6)–(7). В результате этой процедуры имеем

$$2\pi U^+(M_0) = -\frac{b_v}{b_i} \int_{\partial D} \left( U_v^+(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} - G(M, M_0) \frac{\partial U_v^+}{\partial n} \right) dl; \quad M \in \Pi_v; M_0 \in \Pi_i. \quad (14)$$

В области  $D$  применим формулу Грина для пары функций  $U_a(M), G^a(M, M_0)$  и получим

$$0 = \int_{\partial D} \left( U_a(M) \frac{\partial G^a(M, M_0)}{\partial n} - G^a(M, M_0) \frac{\partial U_a}{\partial n} \right) dl. \quad (15)$$

Сложив выражения (14) и (15) с учетом (10)–(11) и соотношения

$$0 = -\frac{b_v}{b_i} \int_{\partial D} \left( U_v^1(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} - G(M, M_0) \frac{\partial U_v^1}{\partial n} \right) dl; \quad M \in \bar{D}; M_0 \in \Pi_i, \quad (16)$$

придем к следующему уравнению

$$2\pi U^+(M_0) = \int_{\partial D} \left\{ \left( U_v^+(M) + U_v^1(M) \right) \left( \frac{\partial G^a(M, M_0)}{\partial n} - \frac{b_v}{b_i} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} \right) - \right. \\ \left. - b_v \left( \frac{\partial U_v^+}{\partial n} + \frac{\partial U_v^1}{\partial n} \right) \left( \frac{1}{b_a} G^a(M, M_0) - \frac{1}{b_i} G(M, M_0) \right) \right\} dl. \quad (17)$$

Уравнение (17) представляет собой явное уравнение теоретической обратной задачи для двумерного скалярного уравнения Гельмгольца в слоистой среде с однородным включением при заданных значениях граничных условий [Хачай, 1989, 1990, 1994]. В результате его решения относительно функции  $r(\varphi)$ , описывающей контур искомого однородного объекта, удастся определить этот контур при известных значениях физических параметров вмещающей среды и искомого объекта, а также при заданных значениях функций  $U^+, G, G^a, U_v^+, U_v^1$ .

Рассмотрим частные, соответствующие  $E$ - и  $H$ -поляризации, случаи уравнения (17) для двумерного переменного электромагнитного поля.

В случае  $E$ -поляризации имеем коэффициенты:

$$b_v = b_i = b_a = 1. \quad (18)$$

Заменим в (17)  $U \rightarrow E_x; U^+ \rightarrow E_x^+; U^1 \rightarrow E_x^1$ , где  $E_x(y, z, \omega)$  – компонента электромагнитного поля, направленная вдоль простирания тела,  $G_E = G$ ,  $G_E^a = G^a$  – функции Грина, определяемые из решения указанных выше краевых задач; выполним условия (18) и рассмотрим случай, когда  $k=1$ . При этом в (2)

$$c(M) = k^2(M) = \begin{cases} k_j^2 = i\omega\mu_0\sigma_j; M \in \Pi_j \setminus \bar{D} (j = 0, \dots, n); \\ k_a^2 = i\omega\mu_0\sigma_a; M \in \bar{D}. \end{cases}, \quad (19)$$

где  $i$  – мнимая единица;  $\omega$  – круговая частота;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $\sigma(M)$  – проводимость среды в точке  $M$ . В выражении (4)

$$p(M) = k^2(M) = \begin{cases} k_j^2 = i\omega\mu_0\sigma_j; M \in \Pi_j \setminus \bar{D} (j = 0, \dots, n); \\ k_v^2 = i\omega\mu_0\sigma_v; M \in \bar{D}. \end{cases} \quad (20)$$

Уравнение теоретической обратной задачи (17) для  $k=1$  (см. фрагмент *a* на рисунке) запишется в виде:

$$2\pi E_x^+(M_0) = \int_{\partial D} \left( (E_{xv}^+(M) + E_{xv}^1(M)) \left( \frac{\partial G_E^a(M, M_0)}{\partial n} - \frac{\partial G_E(M, M_0)}{\partial n} \right) - \left( \frac{\partial E_{xv}^+}{\partial n} + \frac{\partial E_{xv}^1}{\partial n} \right) (G_E^a(M, M_0) - G_E(M, M_0)) \right) dl. \quad (21)$$

Пусть  $k=2$  (фрагмент *b* на приведенном выше рисунке), т.е. искомый объект представляет собой иерархическое включение:  $\partial D_1$  – контур внешнего включения с проводимостью  $\sigma_1$ ,  $\partial D_2$  – контур внутреннего включения с проводимостью  $\sigma_2$ ; включения несоосные. Требуется восстановить оба контура. Эта задача решается в два итерационных этапа.

Первый этап: для решения задачи в случае  $E$ -поляризации в выражении (19) принимаем  $\sigma_a = \sigma_1$ . В уравнении (21) –  $\partial D = \partial D_1$ ;  $dl = dl_1$ ;  $G_E^a = G_E^{a1}$ ;  $\frac{\partial}{\partial n}(G_E^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_E^{a1})$ ; решив это уравнение относительно функции  $r_1(\varphi)$ , описывающей контур  $\partial D_1$ , мы определим функции:

$$U \rightarrow E_x; U^+ \rightarrow E_x^+; U^1 \rightarrow E_x^0 \quad (22)$$

по алгоритму решения прямой задачи [Дмитриев, 1965] внутри и вне неоднородности, помещенной в слоистую среду:

$$U(M) = U^1(M) + \frac{k_v^2 - k_{a1}^2}{2\pi} \iint_{S_1} U(P) G_E(M, P) dS_1; M \in S_1, \quad (23)$$

$$U(M_i) = U^1(M_i) + \frac{k_i^2 - k_{a1}^2}{2\pi} \iint_{S_1} U(P) G_E(M_i, P) dS_1; M_i \in \Pi_i; \quad (24)$$

( $E_x^0$  – электрическое поле в слоистой среде в отсутствии неоднородности).

На этом первый итерационный цикл заканчивается, и мы переходим ко второму итерационному циклу, рассматривая  $k=2$ .

Уравнение теоретической обратной задачи (21) переписывается в виде:

$$2\pi E_x^+(M_0) = \int_{\partial D} \left( (E_{xv}^+(M) + E_{xv}^{1(k-1)}(M)) \left( \frac{\partial G_E^a(M, M_0)}{\partial n} - \frac{\partial G_E(M, M_0)}{\partial n} \right) - \left( \frac{\partial E_{xv}^+}{\partial n} + \frac{\partial E_{xv}^{1(k-1)}}{\partial n} \right) (G_E^a(M, M_0) - G_E(M, M_0)) \right) dl. \quad (25)$$

$$E_x^{1(k-1)}(M_i) \rightarrow U(M_i) \quad (26)$$

соответствует вычисленной функции  $U(M_i)$  (24). В выражении (19) –  $\sigma_a = \sigma_2$ , в выражении (21) –

$$\partial D = \partial D_2; G_E^a = G_E^{a2}; \frac{\partial}{\partial n}(G_E^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_E^{a2}), dl = dl_2. \quad (27)$$

Решаем уравнение (25) относительно функции  $r_2(\varphi)$ , описывающей контур  $\partial D_2$ . Если  $K=2$ , то задача считается решенной; если  $K>2$ , то  $k=k+1$ , и итерационный процесс продолжается (см. фрагмент *в* на рисунке).

Мы вычисляем функции

$$U^{k-1} \rightarrow E_x^{k-1}; U^{+(k-1)} \rightarrow E_x^{+(k-1)}; U^{1(k-2)} \rightarrow E_x^{1(k-2)}, \quad (28)$$

используя алгоритм решения прямой задачи внутри и вне иерархической неоднородности ранга  $k-1$ , помещенной в слоистую среду (физические параметры слоистой среды остаются неизменными):

$$U^{k-1}(M) = U^{1(k-2)}(M) + \frac{k_v^2 - k_{a(k-1)}^2}{2\pi} \iint_{S^{(k-1)}} U^{k-1}(P) G_E(M, P) dS_{(k-1)}; M \in S_{(k-1)}, \quad (29)$$

$$U^{k-1}(M_i) = U^{1(k-2)}(M_i) + \frac{k_i^2 - k_{a(k-1)}^2}{2\pi} \iint_{S^{(k-1)}} U^{k-1}(P) G_E(M_i, P) dS_{(k-1)}; M_i \in P_i, \quad (30)$$

В выражении (19) –  $\sigma_a = \sigma_k$ , в (27) –

$$\partial D = \partial D_k; G_E^a = G_E^{ak}; \frac{\partial}{\partial n}(G_E^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_E^{ak}); dl = dl_k. \quad (30')$$

Найденную из (30) функцию  $U^{k-1}(M_i)$  обозначаем как  $E_x^{1(k-1)}$ ; затем решим уравнение (25) относительно функции  $r_{(k-1)}(\varphi)$ , описывающей контур  $\partial D_{(k-1)}$ , и перейдем к следующему итерационному циклу –  $k=k+1$ . Итерационный процесс (27)–(30') продолжается до  $k=K$ .

Рассмотрим теперь случай  $H$ -поляризации с коэффициентами

$$b_j = \frac{1}{k_j^2}; b_v \neq b_i \neq b_a; b_a = \frac{1}{k_a^2}. \quad (31)$$

Оставляя в силе (20)–(21) и заменяя в (17)  $U \rightarrow H_x; U^+ \rightarrow H_x^+; U^1 \rightarrow H_x^1$ , где  $H_x(y, z, \omega)$  – компонента электромагнитного поля, направленная вдоль простираня тела,  $G_H = G$ ,  $G_H^a = G^a$ , определяемые из решения краевых задач, указанных выше при выполнении условия (31), мы получаем краевую задачу рассеяния электромагнитного поля на проводящей неоднородности, расположенной в  $v$ -м слое  $n$ -слойной среды и возбуждаемой плоской волной ( $H$ -поляризация) для функций:

$$H_x(M); H_x^+(M); H_x^1(M); G_H(M, M_0); G_H^a(M, M_0).$$

Уравнение теоретической обратной задачи [Хачай, 1994] при  $k=1$  записывается в виде:

$$2\pi H_x^+(M_0) = \int_{\partial D} \left( (H_{xv}^+(M) + H_{xv}^1(M)) \left( \frac{\partial G_H^a(M, M_0)}{\partial n} - \frac{k_i^2}{k_v^2} \frac{\partial G_H(M, M_0)}{\partial n} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{k_v^2} \left( \frac{\partial H_{xv}^+}{\partial n} + \frac{\partial H_{xv}^1}{\partial n} \right) (k_a^2 G_H^a(M, M_0) - k_i^2 G_H(M, M_0)) \right) dl. \quad (32)$$

Рассмотрим итерационный процесс восстановления контуров в случае иерархической неоднородности аналогично рассмотренному выше случаю  $E$ -поляризации.

Пусть  $k=2$ , т.е. искомый объект представляет собой иерархическое включение:  $\partial D_1$  – контур внешнего включения с проводимостью  $\sigma_1$ ,  $\partial D_2$  – контур внутреннего включения с проводимостью  $\sigma_2$ . Требуется восстановить оба контура. Эта задача аналогично случаю  $E$ -поляризации решается в два итерационных этапа. Первый этап: для решения задачи в случае  $H$ -поляризации в выражении (20) –  $\sigma_a = \sigma_1$ , в выражении (32) –  $\partial D = \partial D_1$ ;  $dl = dl_1$ ;  $G_H^a = G_H^{a1}$ ;  $\frac{\partial}{\partial n}(G_H^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_H^{a1})$  алгоритм вычисления функций Грина  $G_H$  и  $G_H^a$  выписан в [Хачай, 1994]. Решив уравнение (32) относительно функции  $r_1(\varphi)$ , описывающей контур  $\partial D_1$ , мы вычисляем функции:  $H_x$ ,  $H_x^+$ ,  $H_x^1$  по алгоритму решения прямой задачи [Хачай, 1994; Хачай, Хачай, 2011] внутри и вне неоднородности, помещенной в слоистую среду ( $H_x^1$  – компонента магнитного поля в слоистой среде в отсутствие неоднородности):

$$H_x(M_0) = \frac{k_{a1}^2}{k_j^2} H_x^1(M_0) + \frac{k_{a1}^2 - k_v^2}{2\pi} \iint_{S_1} H_x(M) G_H(M, M_0) dS_1 + \\ + \frac{k_{a1}^2 - k_v^2}{2\pi k_v^2} \int_{\partial D_1} H_x(M) \frac{\partial G_H}{\partial n} dl; \quad M_0 \in S_1, \quad (33)$$

$$H_x(M_0) = H_x^1(M_0) + \frac{k^2(M_0)(k_{a1}^2 - k_v^2)}{2\pi k_{a1}^2} \iint_{S_1} H_x(M) G_H(M, M_0) dS_1 + \\ + \frac{k^2(M_0)(k_{a1}^2 - k_v^2)}{2\pi k_v^2 k_{a1}^2} \int_{\partial D_1} H_x(M) \frac{\partial G_H}{\partial n} dl; \quad M_0 \notin S_1, \quad (34) \\ k^2(M_0) = i\omega\mu\sigma(M_0).$$

На этом первый итерационный цикл заканчивается, и мы переходим ко второму итерационному циклу  $k=2$ . Вычисленную по (34) функцию  $H_x(M_0)$  обозначаем как

$$H_x^{1(k-1)}; \quad (35)$$

в выражении (19) –  $\sigma_a = \sigma_2$ , в выражении (32) –

$$\partial D = \partial D_2; \quad G_H^a = G_H^{a2}; \quad \frac{\partial}{\partial n}(G_H^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_H^{a2}), \quad dl = dl_2. \quad (36)$$

Уравнение (32) переписывается в виде:

$$2\pi H_x^+(M_0) = \int_{\partial D} \left( (H_{xv}^+(M) + H_{xv}^{1(k-1)}(M)) \left( \frac{\partial G_H^a(M, M_0)}{\partial n} - \frac{k_i^2}{k_v^2} \frac{\partial G_H(M, M_0)}{\partial n} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{k_v^2} \left( \frac{\partial H_{xv}^+}{\partial n} + \frac{\partial H_{xv}^{1(k-1)}}{\partial n} \right) (k_a^2 G_H^a(M, M_0) - k_i^2 G_H(M, M_0)) \right) dl. \quad (37)$$



Решаем уравнение (37) относительно функции  $r_2(\varphi)$ , описывающей контур  $\partial D_2$ . Если  $K=2$ , то задача считается решенной; если  $K>2$ , то  $k=k+1$  и итерационный процесс продолжается. Вычисляем функции

$$H_x^{k-1}, H_x^{+(k-1)}, \quad (38)$$

используя алгоритм решения прямой задачи внутри и вне иерархической неоднородности ранга  $k-1$ , помещенной в слоистую среду (физические параметры слоистой среды остаются неизменными) [Хачай, Хачай, 2013]:

$$H_x^{k-1}(M_0) = \frac{k_{a(k-1)}^2}{k_j^2} H_x^{1(k-2)}(M_0) + \frac{k_{a(k-1)}^2 - k_v^2}{2\pi} \iint_{S^{(k-1)}} H_x^{k-1}(M) G_H(M, M_0) dS_{(k-1)} + \frac{k_{a(k-1)}^2 - k_v^2}{2\pi k_v^2} \int_{\partial D_1} H_x^{k-1}(M) \frac{\partial G_H}{\partial n} dl; M_0 \in S_{(k-1)}, \quad (39)$$

$$H_x^{k-1}(M_0) = H_x^{1(k-2)}(M_0) + \frac{k^2(M_0)(k_{a(k-1)}^2 - k_v^2)}{2\pi k_{a(k-1)}^2} \iint_{S^{(k-1)}} H_x^{k-1}(M) G_H(M, M_0) dS_{(k-1)} + \frac{k^2(M_0)(k_{a(k-1)}^2 - k_v^2)}{2\pi k_v^2 k_{a(k-1)}^2} \int_{\partial D_1} H_x^{k-1}(M) \frac{\partial G_H}{\partial n} dl; M_0 \notin S_{(k-1)}. \quad (40)$$

Выше в выражении (20) принято  $\sigma_a = \sigma_k$ , в выражении (37) –

$$\partial D = \partial D_k; G_H^a = G_H^{a(k)}; \frac{\partial}{\partial n}(G_H^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_H^{a(k)}); dl = dl_k.$$

Вычисленную из (40) функцию  $H_x^{k-1}(M_i)$  обозначаем как  $H_{xv}^{1(k-1)}$ ; затем решаем уравнение (37) относительно функции  $r_{(k-1)}(\varphi)$ , описывающей контур  $\partial D_{(k-1)}$ . Этот итерационный процесс продолжается до  $k=K$ .

**Алгоритм решения обратной задачи двумерной дифракции линейно поляризованной упругой поперечной волны для  $n$ -слойной среды с иерархическим упругим включением**

Согласно [Купрадзе, 1950; Хачай, Хачай, 2011] задача о дифракции линейно поляризованной упругой поперечной волны на двумерной упругой неоднородности иерархического типа, расположенной в  $v$ -м слое  $n$ -слойной среды в рамках модели, рассмотренной выше, сводится к решению аналогичной задачи, описанной в этом разделе при ряде изменений.

Уравнение теоретической обратной задачи (17) для скалярного уравнения Гельмгольца, к которому сводится наша задача, остается в силе:

$$2\pi U^+(M_0) = \int_{\partial D} \left\{ \left[ \left( U_v^+(M) + U_v^1(M) \right) \left( \frac{\partial G^a(M, M_0)}{\partial n} - \frac{b_v}{b_i} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} \right) \right] - \left[ -b_v \left( \frac{\partial U_v^+}{\partial n} + \frac{\partial U_v^1}{\partial n} \right) \left( \frac{1}{b_a} G^a(M, M_0) - \frac{1}{b_i} G(M, M_0) \right) \right] \right\} dl, \quad (41)$$

где

$$b_v = \xi_v; b_i = \xi_i; b_a = \xi_a. \quad (42)$$

При этом  $\xi_v, \rho_v$  – значения упругого параметра Ламе и плотность в  $v$ -м слое;  $\xi_i, \rho_i$  – значения тех же параметров в слое, где находится точка  $M_0$ ;  $\xi_a, \rho_a$  – значения тех же параметров внутри неоднородности при  $k=1$ . В уравнении (41)

$$U^+ = u_x^+; U_v^+ = u_{xv}^+; U_v^1 = u_{xv}^1, \quad (43)$$

где  $u_x$  – составляющая вектора смещения, отличная от нуля для выбранной модели,

$$G(M, M_0) = G_{SS}(M, M_0); G^a(M, M) = G_{SS}^a(M, M_0); \partial D, dl, \quad (44)$$

$$k_{2a}^2 = \omega^2 \frac{\rho_a}{\xi_a}; k_{2v}^2 = \omega^2 \frac{\rho_v}{\xi_v}.$$

Алгоритм вычисления функции Грина  $G_{SS}(M, M_0)$  выписан в работе [Хачай, 2007].

Таким образом, уравнение теоретической обратной задачи при  $k=1$  записывается в виде

$$2\pi u_x^+(M_0) = \int_{\partial D_1} \left\{ \begin{array}{l} \left( u_{xv}^+(M) + u_{xv}^1(M) \right) \left( \frac{\partial G_{SS}^{a1}(M, M_0)}{\partial n} - \frac{\xi_v}{\xi_i} \frac{\partial G_{SS}(M, M_0)}{\partial n} \right) \\ - \xi_v \left( \frac{\partial u_{xv}^+}{\partial n} + \frac{\partial u_{xv}^1}{\partial n} \right) \left( \frac{1}{\xi_{a1}} G_{SS}^{a1}(M, M_0) - \frac{1}{\xi_i} G_{SS}(M, M_0) \right) \end{array} \right\} dl. \quad (45)$$

Пусть  $k=2$ , т.е. искомый объект представляет собой иерархическое включение с внешним контуром  $\partial D_1$ , упругим параметром Ламе  $\xi_1$  и плотностью  $\rho_1$ ;  $\partial D_2$  – контур внутреннего включения с упругим параметром Ламе  $\xi_2$  и плотностью  $\rho_2$ ; включения несоосные. Требуется восстановить оба контура. Для решения нашей задачи в выражении (42) примем  $\xi_a = \xi_1$ , в выражении (44) –

$$\partial D = \partial D_1; dl = dl_1; G_{SS}^a = G_{SS}^{a1}; \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^{a1}); k_{2a}^2 = k_{2a1}^2 = \omega^2 \frac{\rho_{a1}}{\xi_{a1}}; \xi_a = \xi_{a1}.$$

Решив уравнение (45) относительно функции  $r_1(\varphi)$ , описывающей контур  $\partial D_1$ , вычисляем функции  $u_x, u_x^+, u_x^1$  по алгоритму решения прямой задачи [Хачай, Хачай, 2013] внутри и вне неоднородности, помещенной в слоистую среду ( $u_x^1$  – компонента упругого поля в слоистой среде в отсутствии неоднородности):

$$u_x(M_0) = \frac{\xi_v}{\xi_a} u_x^1(M_0) + \frac{k_{2a}^2 - k_{2v}^2}{2\pi} \iint_{S_1} u_x(M) G_{SS}(M, M_0) dS_1 + \frac{\xi_v - \xi_a}{2\pi \xi_a} \int_{\partial D_1} u_x(M) \frac{\partial G_{SS}}{\partial n} dl; M_0 \in S_1, \quad (46)$$

$$u_x(M_0) = u_x^1(M_0) + \frac{\xi_a(k_{2a}^2 - k_{2v}^2)}{2\pi \xi(M_0)} \iint_{S_1} u_x(M) G_{SS}(M, M_0) dS_1 + \frac{(\xi_v - \xi_a)}{2\pi \xi(M_0)} \int_{\partial D_1} u_x(M) \frac{\partial G_{SS}}{\partial n} dl; M_0 \notin S_1. \quad (47)$$

На этом первый итерационный цикл заканчивается, и мы переходим ко второму итерационному циклу при  $k=2$ . Вычисленную функцию  $u_x(M_0)$  (47) обозначаем как

$$u_x^{1(k-1)}; \quad (48)$$

в выражении (42) примем  $\xi_a = \xi_2$ , в выражении (44) –

$$\partial D = \partial D_2; dl = dl_2; G_{SS}^a = G_{SS}^{a2}; \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^{a2}); k_{2a}^2 = k_{2a2}^2 = \omega^2 \frac{\rho_{a2}}{\xi_{a2}}.$$

Перепишем уравнение (45) в виде

$$2\pi u_x^+(M_0) = \int_{\partial D} \left\{ \left( u_{xv}^+(M) + u_{xv}^{1(k-1)}(M) \right) \left( \frac{\partial G_{SS}^a(M, M_0)}{\partial n} - \frac{\xi_v}{\xi_i} \frac{\partial G_{SS}(M, M_0)}{\partial n} \right) - \right. \\ \left. - \xi_v \left( \frac{\partial u_{xv}^+}{\partial n} + \frac{\partial u_{xv}^{1(k-1)}}{\partial n} \right) \left( \frac{1}{\xi_{a2}} G_{SS}^a(M, M_0) - \frac{1}{\xi_i} G_{SS}(M, M_0) \right) \right\} dl \quad (49)$$

и решаем уравнение (49) относительно функции  $r_2(\varphi)$ , описывающей контур  $\partial D_2$ .

Если  $k=K=2$ , то задача считается решенной; если  $K>2$ ,  $k=k+1$ , и итерационный процесс продолжается. Мы вычисляем функции

$$u_x^{k-1}; u_x^{+(k-1)} \quad (50)$$

по уравнениям

$$u_x^{k-1}(M_0) = \frac{\xi_v}{\xi_{a(k-1)}} u_x^{1(k-2)}(M_0) + \frac{k_{2a(k-1)}^2 - k_{2v}^2}{2\pi} \iint_{S(k-1)} u_x^{k-1}(M) G_{SS}(M, M_0) dS_{(k-1)} + \\ + \frac{\xi_v - \xi_{a(k-1)}}{2\pi \xi_{a(k-1)}} \int_{\partial D(k-1)} u_x^{k-1}(M) \frac{\partial G_{SS}}{\partial n} dl_{k-1}; M_0 \in S_{(k-1)}, \quad (51)$$

$$u_x^{k-1}(M_0) = u_x^{1(k-2)}(M_0) + \frac{\xi_a(k_{2a}^2 - k_{2v}^2)}{2\pi \xi(M_0)} \iint_{S(k-1)} u_x^{k-1}(M) G_{SS}(M, M_0) dS_1 + \\ + \frac{(\xi_v - \xi_a)}{2\pi \xi(M_0)} \int_{\partial D(k-1)} u_x^{k-1}(M) \frac{\partial G_{SS}}{\partial n} dl_{k-1}; M_0 \notin S_{(k-1)}. \quad (52)$$

Которые представляют алгоритм решения прямой задачи внутри и вне иерархической неоднородности ранга  $k-1$ , помещенной в слоистую среду (физические параметры слоистой среды остаются неизменными) [Хачай, Хачай, 2013].

Вычисленную функцию  $u_x^{k-1}(M_0)$  (52) обозначаем как

$$u_x^{1(k-1)}. \quad (53)$$

В выражении (42) примем  $\xi_a = \xi_k$ , в выражении (44) –

$$\partial D = \partial D_k; dl = dl_k; G_{SS}^a = G_{SS}^{ak}; \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^a) = \frac{\partial}{\partial n}(G_{SS}^{ak}); k_{2a}^2 = k_{2ak}^2 = \omega^2 \frac{\rho_{ak}}{\xi_{ak}}. \quad (54)$$

С учетом (54) решаем уравнение (49) относительно функции  $r_k(\varphi)$ , описывающей контур  $\partial D$ . Переходим к следующему рангу –  $k=k+1$ . Итерационный процесс (49)–(54) продолжается до  $k=K$ .

### Заключение

В работе рассмотрена проблема построения алгоритма решения обратной задачи с использованием уравнения теоретической обратной задачи для 2D-уравнения Гельмгольца. Получены явные уравнения теоретической обратной задачи для случаев рассеяния электромагнитного поля ( $E$ - и  $H$ -поляризации) и рассеяния линейно поляризованной упругой волны в слоистой проводящей и упругой среде с иерархическим проводящим или упругим включением.

Построен итерационный алгоритм определения контуров несоосных включений  $k$ -го ранга в иерархической структуре с последовательным использованием решения прямой задачи вычисления электромагнитного и упругого поля  $k-1$  ранга.

Из построенной теории следует, что с увеличением степени иерархичности среды увеличивается степень пространственной нелинейности распределения составляющих сейсмического и электромагнитного поля, что свидетельствует о невозможности использования методов линеаризации задачи при создании методов интерпретации. Усложняется и процесс комплексирования методов, использующих электромагнитное и сейсмическое поле для изучения отклика среды с иерархической структурой. Эта проблема неразрывно связана с формулировкой и решением обратной задачи для распространения электромагнитного и сейсмического полей в таких сложных средах с использованием явных уравнений теоретической обратной задачи. Авторы считают своей ближайшей задачей исследование устойчивости их решения в рамках предложенного итерационного алгоритма.

### Литература

- Дмитриев В.И.* Дифракция плоского электромагнитного поля на цилиндрических телах, расположенных в слоистых средах // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1965. Вып. 3. С.307–315.
- Кочарян Г.Г., Спивак А.А.* Динамика деформирования блочных массивов. М.: ИКЦ “Академкнига”, 2003. 424 с.
- Купрадзе В.Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.; Л.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 280 с.
- Прангшивили И.В., Пащенко Ф.Ф., Бусыгин Б.П.* Системные законы и закономерности в электродинамике, природе и обществе М.: Наука, 2001. 525 с.
- Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. 409 с.
- Хасанов М.М., Булгакова Г.Т.* Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 288 с.
- Хачай А.Ю.* Алгоритмы для математического моделирования переменных электромагнитных и сейсмических полей в источниковом приближении: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: УрГУ им. А.М. Горького, 2007. 176 с.
- Хачай О.А.* Об определении конфигурации аномальных зон фильтрации и проводимости по наблюдениям потенциала токов течения и пластового давления // Электромагнитные морские исследования. М.: ИЗМИРАН, 1988. С.68–72.
- Хачай О.А.* Об интерпретации двумерных переменных и трехмерных стационарных аномалий электромагнитного поля // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. № 10. С.50–58.
- Хачай О.А.* О решении обратной задачи для трехмерных переменных электромагнитных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 2. С.55–59.
- Хачай О.А.* Математическое моделирование и интерпретация переменного электромагнитного поля в неоднородной коре и верхней мантии Земли: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Свердловск: ИГФ УрО РАН, 1994. 314 с.
- Хачай О.А., Хачай А.Ю.* О комплексировании сейсмических и электромагнитных активных методов для картирования и мониторинга состояния двумерных неоднородностей в N-слойной среде // Вестник ЮУрГУ. Сер. Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2011. № 2(219). С.49–56.
- Хачай О.А., Хачай А.Ю.* Моделирование электромагнитного и сейсмического поля в иерархически неоднородных средах // Вестник ЮУрГУ. Сер. Вычислительная математика и информатика. 2013. Т. 2, № 2. С.48–55.

Сведения об авторах

**ХАЧАЙ Ольга Александровна** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт геофизики им. Ю.П. Булашевича УрО РАН. 620016, Екатеринбург, ул. Амундсена, д. 100. Тел.: +7(922) 227-60-74. E-mail [olgakhachay@yandex.ru](mailto:olgakhachay@yandex.ru)

**ХАЧАЙ Андрей Юрьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина. 620002, Екатеринбург, ул. Мира, д. 19. Тел.: +7(922) 224-74-71. E-mail: [andrey.khachay@gmail.com](mailto:andrey.khachay@gmail.com)

**ХАЧАЙ Олег Юрьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина. 620002, Екатеринбург, ул. Мира, д. 19. Тел.: +7(922) 224-74-71. E-mail: [khachay@yandex.ru](mailto:khachay@yandex.ru)

## TO THE QUESTION OF INVERSE PROBLEM OF ACTIVE ELECTROMAGNETIC AND ACOUSTIC MONITORING OF HYERARCHIC GEOLOGICAL MEDIUM

O.A. Hachay<sup>1</sup>, A.Y. Khachay<sup>2</sup>, O.Y. Khachay<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Yu.P. Bulashevich Institute of Geophysics UB RAS, Yekaterinburg, Russia*

<sup>2</sup> *Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia*

**Abstract.** The new approach is developed for interpretation of wave fields for defining the contours of local hierarchic objects. The iteration algorithm is developed for the theoretical solution of the inverse problem for 2-*D* electromagnetic field of *E* and *H* polarization and linear polarized longitudinal elastic wave excited in the *N*-layered conductive or elastic medium with hierarchic conductive or elastic inclusion located in the *v*<sup>th</sup> layer. The results obtained obviously indicate that in such complicated media, each wave field contains its own information about the inner structure of the hierarchic inclusion. Therefore, the monitoring data of seismic and electromagnetic fields should be interpreted independently without combining these databases.

**Keywords:** hierarchic medium, electromagnetic field, seismic field, algorithms of modeling, equation of theoretical inverse problem.

### References

- Dmitriev V.I. Diffraction of a plane electromagnetic field on cylindrical bodies located in layered media, *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* (Computational methods and programmin), Moscow: MGU, 1965, vol. 3, pp. 307-315.
- Hachay O.A. On the determination of the configuration of anomalous filtration and conductivity zones from the observation of the potential of flow currents and reservoir pressure, *Elektomagnitnye morskije issledovaniya* (Electromagnetic marine research), Moscow: IZMIRAN, 1988, pp. 68-72.
- Hachay O.A. On the interpretation of two-dimensional alternating and three-dimensional stationary anomalies of the electromagnetic field, *Izv. Ac. Sci. USSR, Phys. Earth*, 1989, no. 10, pp. 50-58.
- Hachay O.A. On the solution of the inverse problem for three-dimensional alternating electromagnetic fields, *Izv. Ac. Sci. USSR, Phys. Earth*, 1990, no. 2, pp. 55-59.

- Hachay O.A. *Matematicheskoe modelirovanie i interpretatsiya peremennogo elektromagnitnogo polya v neodnorodnoi kore i verkhnei mantii* (Mathematical modeling and interpretation of a variable electromagnetic field in the inhomogeneous crust and upper mantle of the Earth), Dissert. doct. sci., phys. and math. Sverdlovsk: IGF UB RAN, 1994.
- Hachay O.A. and Khachay A.Yu. On the integration of seismic and electromagnetic active methods for mapping and monitoring the state of two-dimensional heterogeneities in an N-layer medium, *Vestnik of SUSU. Ser. Computer technologies, management, radio electronics*. 2011, no. 2 (219), pp. 49-56.
- Hachay O.A. and Khachay A.Yu. Modeling of the electromagnetic and seismic fields in hierarchically heterogeneous media, *Vestnik of SUSU. Ser. Computational mathematics and informatics*. 2013, vol. 2, no. 2, pp. 48-55.
- Khasanov M. M. and Bulgakova G.T. *Nelineinye i neravnovesnye efekty v reologicheskikh sredakh* (Nonlinear and non-equilibrium effects in rheological complex environments), Moscow; Izhevsk: Institute for Computer Research, 2003.
- Khachay A.Yu. *Algoritmy dlya matematicheskogo modelirovaniya peremennykh elektromagnitnykh i seismicheskikh polei v istochnikovom priblizhenii* (Algorithms for mathematical modeling of alternating electromagnetic and seismic fields in the source approximation), Dissert. cand. sci., phys. and math, Ekaterinburg: USU, 2007.
- Kocharjan G.G. and Spivak A.A. *Dinamika deformirovannykh blochnykh massivov* (Dynamics of deformation of block arrays), Moscow: Akademiya, 2003.
- Kupradze V.D. *Granichnye zadachi teorii kolebaniy i integral'nye uravneniya* (Boundary problems in the theory of oscillations and integral equations), Moscow; Leningrad: Izd. Tekhniko-technicheskoi literatury, 1950.
- Prangishvili I.V., Pashchenko F.F., and Busigin B.P. *Sistemnye zakony i zakonomernosti v elektrodinamike, prirode i obshchestve* (System laws and regularities in electrodynamics, nature and society), Moscow: Nauka, 2001.
- Stratton J. *Teoriya elektromagnetizma* (Theory of electromagnetism). Moscow; Leningrad: OGIZ, 1948.