

УДК 550.311

## ВОССТАНАВЛИВАЮЩИЕ ИЗОСТАЗИЮ ТЕЧЕНИЯ В ЛИТОСФЕРЕ

© 2017 г. Б.И. Биргер

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия*

Лабораторные эксперименты с образцами горных пород показывают, что при малых деформациях ползучесть является неустановившейся. Поэтому можно считать, что в литосферных плитах, где деформации малы, имеет место неустановившаяся ползучесть, которая описывается линейной наследственной реологической моделью Андраде. Эффективная вязкость, характеризующая неустановившуюся ползучесть, ниже эффективной вязкости при установившейся ползучести и зависит от характерного времени рассматриваемого процесса. Характерная продолжительность восстановления изостатического равновесия после начального возмущения рельефа земной поверхности составляет несколько тысяч лет, в связи с чем распределение реологических свойств по глубине литосферы и коры отличается от распределения, соответствующего медленным геологическим процессам.

Показано, что при рассмотрении процесса восстановления изостазии верхнюю кору можно моделировать как тонкую упругую пластину, а подстилающие ее нижнюю кору и литосферу – как полупространство с неустановившейся ползучестью. Для такой системы с помощью преобразований Фурье и Лапласа получены решения уравнений механики сплошной среды в виде поперечных волн, которые, сильно затухая, распространяются из области начального возмущения вдоль земной поверхности и вызывают ее вертикальные смещения. Такие решения, названные безынерционными волнами Рэлея, зависят от характера начального возмущения. В случае точечного начального возмущения найдено аналитическое выражение для этих волн, демонстрирующее явную зависимость вертикальных смещений земной поверхности от горизонтальной координаты и времени. Безынерционные волны Рэлея можно рассматривать как механизм современных вертикальных движений земной коры.

**Ключевые слова:** неустановившаяся ползучесть, изостазия, вертикальные движения земной поверхности.

### Введение

Лабораторные эксперименты с образцами горных пород показывают, что в случае малых деформаций имеет место неустановившаяся ползучесть: при постоянных приложенных напряжениях скорость деформаций ползучести уменьшается со временем. Тектоника плит допускает только малые деформации в литосферных плитах, поэтому ползучесть литосферы<sup>1</sup> является неустановившейся. Литосферная плита представляет собой холодный пограничный слой, образуемый мантийной конвекцией, а толщина континентальных плит может превосходить 200 км. Деформации литосферы складываются из ползучих, упругих и хрупких (псевдопластических) деформаций. Эти реологические механизмы конкурируют между собой, и доминирует тот механизм, которому соответствует наименьшая эффективная вязкость. Предположение об установившейся ползучести литосферы, которое обычно используется в геофизических исследованиях, приводит к очень высокой эффективной вязкости, характеризующей ползучесть при малых деформациях. В этом случае, пренебрегая ползучестью, реологию литосферы

---

<sup>1</sup> Здесь и далее термин “литосфера” означает литосферную плиту, а границы между плитами, где деформации велики, исключаются из рассмотрения.

можно описывать упругохрупкой реологической моделью. Неустановившейся ползучести в отличие от установившейся соответствует намного более низкая эффективная вязкость. Поэтому при рассмотрении геофизических процессов в литосфере неустановившуюся ползучесть необходимо учитывать. Эффективная вязкость, соответствующая неустановившейся ползучести, зависит от характерной продолжительности рассматриваемого геофизического процесса. В работах [Birger, 1998, 2000, 2012, 2013] рассматривается процесс образования осадочных бассейнов на континентальных кратонах, характерное время которого составляет порядка  $10^8$  лет.

В настоящем исследовании изучается процесс восстановления изостатического равновесия после начального мелкомасштабного возмущения рельефа земной поверхности (горизонтальный размер возмущенной области не превышает 1000 км). В результате этого процесса земная поверхность возвращается к плоскому положению, которое соответствует равновесному состоянию при однородном распределении плотности по горизонтали. Характерная продолжительность процесса не превышает 1000 лет, в связи с чем распределение реологических свойств по глубине литосферы и коры отличается от распределения, соответствующего более медленным процессам. Восстановление изостазии сопровождается безынерционными волнами Рэлея, которые, сильно затухая, распространяются из области начального возмущения вдоль земной поверхности и вызывают ее вертикальные смещения.

### Реологическая модель

Неустановившаяся ползучесть, имеющая место при достаточно малых деформациях, описывается интегральным уравнением Больцмана

$$\varepsilon_{ij}(t) - \varepsilon_{ij}(0) = \frac{1}{2} \int_0^t K(t_1) \sigma_{ij}(t - t_1) dt_1, \quad (1)$$

в котором  $t$  – время;  $\varepsilon_{ij}$  – тензор девиаторных деформаций ползучести;  $\sigma_{ij}$  – тензор девиаторных напряжений;  $K(t)$  – интегральное ядро ползучести, определяемое как

$$K(t) = t^{-2/3} / 3A, \quad (2)$$

где  $A$  – реологический параметр Андраде.

Если в момент, когда  $t=0$ , прикладывается постоянное напряжение  $\sigma_{ij}$ , то соотношения (1) и (2) сводятся к закону Андраде, описывающему при достаточно малых деформациях и постоянных напряжениях неустановившуюся ползучесть горных пород:

$$2\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} t^{1/3} / A, \quad (3)$$

где  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} / 2)^{1/2}$ ,  $\varepsilon_{cr} \approx 10^{-3} - 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_{cr}$  – такое значение второго инварианта тензора девиаторной деформации  $\varepsilon$ , ниже которого реализуется неустановившаяся ползучесть.

Среду, описываемую реологическими уравнениями (1) и (2), будем называть средой Андраде. При достаточно больших деформациях  $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$  неустановившаяся ползучесть сменяется установившейся, которая описывается реологической моделью степенной неньютоновской жидкости. Автором в работе [Birger, 1998] была введена нелинейная наследственная реологическая модель и рассмотрена ситуация, когда течение, связанное с малыми деформациями, наложено на стационарное течение, описываемое реологической моделью степенной неньютоновской жидкости. В этой работе показано, что линейная интегральная модель Андраде применима, если характерная продолжитель-

ность рассматриваемого течения меньше времени  $\varepsilon_{ir}/\dot{\varepsilon}$ , где  $\dot{\varepsilon}$  – скорость деформации в стационарном течении. В мантии под литосферой  $\dot{\varepsilon} \approx 10^{-15} \text{ с}^{-1}$  [Теркот, Шуберт, 1985], поэтому модель Андраде применима, когда продолжительность наложенного течения не превышает  $10^{12} \text{ с} \approx 3 \cdot 10^4$  лет.

Значение реологического параметра Андраде зависит от температуры<sup>1</sup> и минерального состава; его распределение по глубине литосферы получено в работе [Birger, 2013]. В верхней коре, толщина которой порядка 20 км,  $A$  уменьшается с глубиной от  $\approx 10^{16}$  до  $\approx 10^{13} \text{ Па} \cdot \text{с}^{1/3}$ . В литосфере, лежащей под верхней корой, усредненное значение параметра оценивается как  $A \approx 5 \cdot 10^{12} \text{ Па} \cdot \text{с}^{1/3}$ ; в мантии под литосферой его усредненное значение на порядок выше, что обусловлено более высоким давлением [Birger, 2013].

Полная девиаторная деформация среды представима в виде суммы девиаторной деформации ползучести (1) и девиаторной деформации упругости:

$$\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}/2\mu, \quad (4)$$

где  $\mu$  – упругий модуль сдвига, в силу чего упругоползучая среда с неустановившейся ползучестью описывается уравнением

$$\varepsilon_{ij}(t) - \varepsilon_{ij}(0) = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{1}{2} \int_0^t K(t_1) \sigma_{ij}(t - t_1) dt_1. \quad (5)$$

Используя отмечаемое звездочкой преобразование Лапласа, можно записать реологические уравнения (1) и (2) в виде

$$\sigma_{ij}^* = 2G_A^* \varepsilon_{ij}^*, \quad G_A^* = 1/K^* = As^{1/3} \Gamma(1/3)/3 \approx As^{1/3}, \quad (6)$$

где  $G_A^*$  – лапласовский аналог модуля сдвига для среды Андраде;  $s$  – переменная Лапласа;  $\Gamma(1/3) \approx 3$  – гамма-функция. Уравнению (5) соответствует лапласовское изображение

$$\sigma_{ij}^* = 2G^* \varepsilon_{ij}^*, \quad G^* = \frac{\mu As^{1/3}}{\mu + As^{1/3}}, \quad (7)$$

в котором  $G^*$  – лапласовский аналог модуля сдвига для упругоползучей среды.

Как следует из (7), упругостью среды можно пренебречь, когда

$$s \ll (A/\mu)^3. \quad (8)$$

При выполнении условия (8) лапласовский аналог модуля сдвига для среды Андраде  $G_A^*$  значительно меньше упругого модуля сдвига  $\mu$ . Из (8) с учетом свойства преобразования Лапласа следует, что

$$t \gg (A/\mu)^3. \quad (9)$$

Сжимаемостью среды можно пренебречь, если  $G_A^*$  значительно меньше упругого модуля всестороннего сжатия. Поскольку упругий модуль сдвига  $\mu$  меньше, чем модуль всестороннего сжатия ( $K \approx 3\mu$ ), условие (9) позволяет пренебречь не только упругостью, но и сжимаемостью среды.

Упругий модуль сдвига земной коры  $\mu$  оценивается как  $\approx 5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ . В верхней коре реологический параметр Андраде оценивается как  $\approx 10^{14} \text{ Па} \cdot \text{с}^{1/3}$ . Поскольку характерное время рассматриваемого процесса не превышает 1000 лет, при таком большом значении параметра Андраде  $t \ll (A/\mu)^3$  и верхняя кора ведет себя как упругая среда.

<sup>1</sup> В литосфере имеет место значительный вертикальный градиент температуры.

Точнее говоря, верхняя кора, имеющая толщину порядка 20 км, является хрупкоупругой, а упругость доминирует только в нижнем слое верхней коры толщиной ~10 км. В самом верхнем слое коры доминирует хрупкость, и его прочность очень мала [Birger, 2013]. В дальнейшем будем просто пренебрегать наличием хрупкого слоя и считать, что верхняя кора является упругим слоем толщиной 10 км. Для нижней коры и мантийной литосферы усредненное по глубине значение реологического параметра оценивается как  $A \approx 5 \cdot 10^{12} \text{ Па} \cdot \text{с}^{1/3}$ , а правая часть неравенства (9) равна  $10^8 \text{ с} \approx 3$  года. Таким образом, литосфера под упругой верхней корой ведет себя как ползучая среда Андраде, не проявляя упругости и сжимаемости на временах, превышающих 10 лет.

Влияние инерционности пренебрежимо мало<sup>1</sup>, если

$$t \gg (\rho L^2 / A)^{3/5}, \quad (10)$$

где  $L$  – характерный масштаб длины;  $\rho$  – плотность. Когда  $L \leq 1000$  км, правая часть неравенства (10) не превышает 100 с, и, пренебрегая упругостью, тем более можно пренебречь инерционностью. Процесс с характерным временем порядка 1000 лет достаточно медленный для того, чтобы можно было пренебречь упругостью, сжимаемостью и инерционностью, но недостаточно медленен для того, чтобы учитывать выталкивающую архимедову силу, наличие которой обусловлено вертикальным градиентом температуры в литосфере.

Если учитывать упругость литосферы под верхней корой и инерционность, начальное возмущение рельефа земной поверхности вызывает не только безынерционные волны Рэлея, но и обычные волны Рэлея, которые быстро распространяются и испытывают только слабое затухание.

### Постановка задачи. Преобразования Фурье и Лапласа

В работе будет использована двумерная (упрощенная) постановка задачи, что обусловлено двумя причинами. Во-первых, многочисленные исследования послеледниковых течений, проводимые в рамках ньютоновской реологической модели, показывают, что переход от двумерной постановки к трехмерной не сильно меняет результаты. Имеющиеся данные наблюдений не настолько определены, чтобы искать решение с точностью, превосходящей оценку по порядку величины. Во-вторых, в работе рассматриваются относительно узкие области начальных возмущений рельефа. Когда происходит таяние льдов на огромных площадях оледенения, таких как в Фенноскандии и Канаде, сначала снимаются ледниковые нагрузки в узких вытянутых областях на краях крупных оледенений. Данные о мелкомасштабных послеледниковых поднятиях преимущественно относятся именно к таким сильно вытянутым областям начальных возмущений, вызывающих течения, которые могут быть описаны в рамках двумерных моделей.

Рассматривается упругая тонкая пластина, лежащая на полупространстве, имеющем реологию Андраде. Начало координат помещено на верхней поверхности, ось  $z$  направлена вертикально вверх. Тонкая пластина ( $z=0$ ) моделирует верхнюю упругую кору, а полупространство ( $z<0$ ) – подстилающую литосферу и мантию. Уравнения равновесия для несжимаемого полупространства записываются в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

<sup>1</sup> Силы инерции малы по сравнению с силами, возникающими при деформациях среды Андраде.

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

где  $p$  – возмущение давления;  $u_x$  и  $u_z$  – смещения; уравнение (13) – условие несжимаемости. Уравнения (11)–(13) добавляются к исходному реологическому уравнению (1), в котором деформации связаны со смещениями соотношениями

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (14)$$

На верхней поверхности полупространства ( $z=0$ ) наложены граничные условия, определяемые силовым воздействием упругой пластины:

$$\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu h} \sigma_{xz} = 0, \quad (15)$$

$$N \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + \rho g u_z + \sigma_{zz} - p = 0, \quad (16)$$

$$N = \frac{\mu h^3}{6(1-\nu)}, \quad (17)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $N$  – изгибная жесткость упругой пластины, имеющей толщину  $h$ . Смещения  $u_x$  и  $u_z$  в пластине равны смещениям в подстилающем полупространстве при  $z=0$ .

Физические переменные в уравнениях (1) и (11)–(14) зависят от горизонтальной координаты  $x$ , вертикальной координаты  $z$  и времени  $t$ . Применяя к этим уравнениям преобразование Фурье по координате  $x$  и преобразование Лапласа по времени  $t$  и исключая все физические переменные, кроме вертикального смещения, приходим к соотношениям

$$U_x^* = \frac{i}{k} D U_z^*, \quad (18)$$

$$P^* = \frac{G(s)}{k^2} (D^3 - k^2 D) \left( U_z^* - \frac{U_0}{s} \right), \quad (19)$$

$$\Sigma_{zz}^* = -\Sigma_{xx}^* = 2G(s)D \left( U_z^* - \frac{U_0}{s} \right), \quad (20)$$

$$\Sigma_{xz}^* = \frac{i}{k} G(s) (D^2 + k^2) \left( U_z^* - \frac{U_0}{s} \right), \quad (21)$$

в которых  $D = d/dz$  – введенный дифференциальный оператор;  $U_0 = U_0(x, z)$  – начальное ( $t=0$ ) распределение вертикальных смещений. В уравнениях (18)–(21) изображения Фурье физических переменных обозначаются соответствующими прописными буквами; изображения Лапласа отмечены звездочкой;  $k$  – волновое число (переменная Фурье);  $s$  – переменная Лапласа. Для изображения вертикального смещения получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(D^2 - k^2)^2 \left( U_z^* - \frac{U_0}{s} \right) = 0. \quad (22)$$

Решение уравнения (22), удовлетворяющее условию ограниченности при  $z \rightarrow -\infty$ , записывается как

$$U_z^* - \frac{U_0}{s} = [C_1(s) + C_2(s)z] \exp(|k|z); \quad (23)$$

в (23)  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы интегрирования, зависящие от переменной Лапласа;  $k$  – волновое число, которое может принимать отрицательные значения. Подстановка решения (23) в граничные условия (15)–(16) позволяет исключить произвольные константы и записать вертикальное смещение верхней поверхности ( $z=0$ ) в виде

$$U_z^* = \frac{U_0(k)}{s} \cdot \frac{2|k|G_A^*(s)}{\rho g + Nk^4 + 2|k|G_A^*(s)}, \quad (24)$$

где  $G_A^*(s) = As^{1/3}$  – аналог модуля сдвига для среды Андраде. Следует отметить, что подстановка (18)–(23) в граничное условие (15) приводит к соотношению  $C_2 = -C_1/k$ , при котором на верхней поверхности отсутствуют горизонтальные смещения и касательные напряжения.

Чтобы найти асимптотическую (малые времена) зависимость лапласовского оригинала от времени, достаточно разложить лапласовское изображение в ряд по степеням  $s$  в окрестности  $s=\infty$  и обратить по Лапласу каждый член ряда [Деч, 1967]. Правая часть уравнения (24) при  $s \rightarrow \infty$  представима в виде ряда

$$U_z^* = U_0(k) \left( s^{-1} - \Phi(k)s^{-4/3} + \dots \right), \quad (25)$$

$$\Phi(k) = \frac{\rho g + Nk^4}{2A|k|}. \quad (26)$$

Обращая члены ряда (25), получаем асимптотическую зависимость вертикального смещения от времени

$$U_z(t) = U_0(k) \left( 1 - \Phi(k) \frac{t^{1/3}}{\Gamma(4/3)} + \dots \right), \quad (27)$$

где гамма-функция в точке  $4/3$  оценивается как

$$\Gamma(4/3) = \frac{1}{3} \Gamma(1/3) \approx 1. \quad (28)$$

Асимптотическая зависимость (27) справедлива, когда

$$t \ll (\Phi(k))^{-3}. \quad (29)$$

Как следует из (28) и (29), зависимость (27) можно представить в виде

$$U_z(t) = U_0(k) \exp(-\Phi(k)t^{1/3}). \quad (30)$$

Входящие в уравнения (16) и (26) физические параметры, характеризующие упругую верхнюю кору и подстилающую литосферу, оцениваются как

$$\rho \approx 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad g \approx 10 \text{ м/с}^2, \quad A \approx 5 \cdot 10^{12} \text{ Па} \cdot \text{с}^{1/3}, \quad \mu \approx 5 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \nu \approx 0.25, \quad N \approx 10^{22} \text{ Па} \cdot \text{м}^3. \quad (31)$$

При таких оценках функция  $\Phi(k)$ , определяемая соотношением (26), принимает вид

$$\Phi(k) \approx (3 \cdot 10^{-9} + 10^9 k^4) / |k|. \quad (32)$$

Пусть в начальный момент ( $t=0$ ) смещение верхней поверхности ( $z=0$ ) задано как

$$u_z = u_0(x). \quad (33)$$

Изображение Фурье функции (33) записывается в виде

$$U_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \exp(-ikx) dx, \quad (34)$$

а обратное преобразование Фурье дает

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(k) \exp(ikx) dk. \quad (35)$$

Обращая изображение Фурье (30), находим

$$u_z(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(k) \exp(-\Phi(k)t^{1/3} + ikx) dk. \quad (36)$$

Если  $u_0(x)$  является четной функцией, равенство (36) можно представить как

$$u_z(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U_0(k) \exp(-\Phi(k)t^{1/3}) \cos(kx) dk. \quad (37)$$

Пусть начальное смещение имеет форму “ступеньки”

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u_0, \text{ если } -l/2 < x < l/2, \\ u_0(x) &= 0, \text{ если } x < -l/2 \text{ или } x > l/2, \end{aligned} \quad (38)$$

для которой преобразование Фурье имеет вид

$$U_0(k) = 2u_0 \frac{\sin(lk/2)}{k}. \quad (39)$$

При достаточно большой ширине  $l$  начального возмущения значения функции (39) очень малы, когда  $k < -2\pi/l$  и  $k > 2\pi/l$ , т.е. чем шире область возмущения, тем уже диапазон волновых чисел  $k$ , в котором изображение Фурье отлично от нуля. Таким образом, интегрирование в правой части равенства (36) проводится по области  $-2\pi/l < k < 2\pi/l$  в окрестности точки  $k=0$ . Согласно решению (23), при фиксированном волновом числе  $k$  восстанавливающее изостазия течение вызывает в литосфере смещения, зависящие от глубины как  $\exp(-kz)$ . Поскольку  $k < 2\pi/l$ , можно сказать, что это течение проникает в литосферу на глубину порядка  $l/\pi$ . Поэтому течения, возникающие после снятия мелкомасштабных ( $l \leq 200$  км) оледенений или других поверхностных нагрузок (например, высыхающих соляных озер), сосредоточены в литосфере. Вызванные крупномасштабными ( $l \approx 1000-3000$  км) ледниковыми нагрузками течения, которые проникают в подстилающую литосферу мантию (или даже охватывают ее целиком) и восстанавливают изостазия за время порядка 10000 лет, в данной работе не рассматриваются.

При малой ширине начального возмущения ( $lk \ll 1$ ), как это следует из (39), изображение Фурье не зависит от  $k$ :

$$U_0(k) = u_0 l; \quad (40)$$

это изображение соответствует точечному начальному возмущению

$$u_0(x) = u_0 l \cdot \delta(x), \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk, \quad (41)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция.

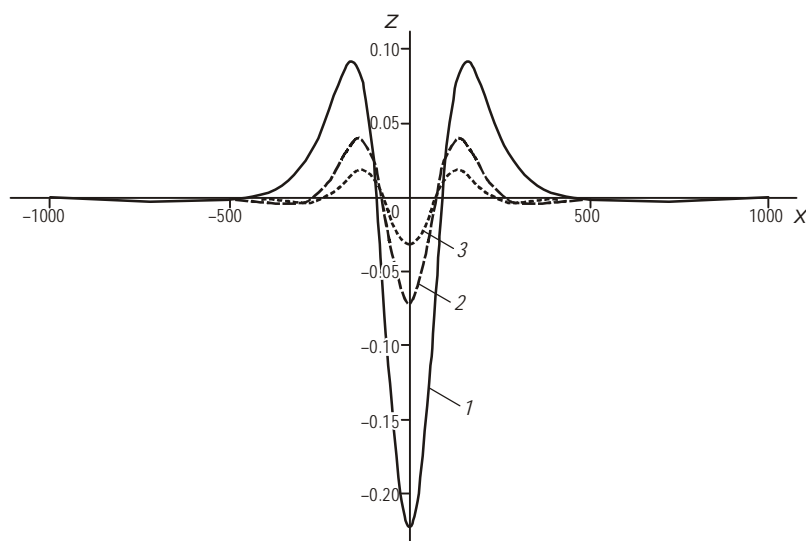
Известно, что применение обратного преобразования Фурье к изображению имеющей разрыв функции приводит к оригиналу, который отличается от исходной функции на разрыве (такое искажение называется эффектом Гиббса). В случае “ступеньки” (38) имеется разрыв при  $x=l$ , в связи с чем для описания начального возмущения удобнее использовать непрерывную функцию, которой может быть распределение Гаусса [Cathles, 1975]. Если зависимость начального возмущения от горизонтальной координаты  $x$  характеризуется распределением Гаусса

$$u_0(x) = u_0 \exp(-bx^2), \quad (42)$$

то характерная ширина начального возмущения оценивается как  $l \approx 1/\sqrt{b}$ , а изображение Фурье принимает вид

$$U_0(k) = u_0 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right). \quad (43)$$

Для получения зависимости вертикальных смещений поверхности от горизонтальной координаты и времени при заданном начальном распределении (42) достаточно подставить изображение (43) в равенство (36) или (37). На рис. 1 приведены результаты численного интегрирования, полученные для области начального возмущения шириной  $l=200$  км. Смещения представлены по вертикали в безразмерном виде (масштаб – значение вертикального смещения в центре области начального возмущения); горизонтальная координата  $x$  измеряется в километрах; время отсчитывается от момента начального возмущения. Начальные смещения заданы распределением Гаусса и соответствуют изостатически неуравновешенной впадине с горизонтальным размером порядка 200 км.



**Рис. 1.** Зависимость вертикальных смещений земной поверхности от горизонтальной координаты в разные моменты времени. Кривая 1 соответствует 30 годам, кривая 2 – 300 годам, кривая 3 – 1000 лет

### Точечное начальное возмущение

В случае точечного начального возмущения<sup>1</sup> удастся получить аналитическое решение задачи о вертикальных движениях поверхности. При точечном начальном возмущении зависимость вертикальных смещений поверхности от горизонтальной координаты и времени определяется интегралом

$$u_z(x, t) = \frac{u_0 l}{2\pi} I, \quad (44)$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\Phi(k)t^{1/3} + ikx) dk.$$

<sup>1</sup> Возмущение любой начальной ширины  $l$  можно считать точечным, рассматривая смещения поверхности на достаточном удалении от начального возмущения, т.е. при  $x \gg l$ .



В подынтегральное выражение входит заданная выражением (32) функция  $\Phi(k)$ , имеющая резкий минимум, который находится из условия

$$\frac{d\Phi}{dk} = 0 \quad (45)$$

и достигается при  $k=k_m$ , где

$$k_m = \left( \frac{\rho g}{3N} \right)^{1/4} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}. \quad (46)$$

Когда  $k$  много меньше или больше  $k_m$ , значения функции  $\Phi(k)$  очень велики и подынтегральное выражение обращается в нуль. Поэтому можно считать, что интегрирование в правой части равенства (44) совершается в достаточно узком интервале волновых чисел, лежащих в окрестности  $k=k_m$ . Точно такой же вклад в интеграл (44) вносит окрестность точки  $k=-k_m$ .

В силу равенства (45), разложение функции  $\Phi(k)$  в степенной ряд в окрестности  $k=k_m$  имеет вид

$$\Phi(k) = \Phi_m + a(k - k_m)^2 + \dots, \quad (47)$$

где

$$\Phi_m = \Phi(k_m) \approx 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1/3}, \quad a \approx 1.9 \cdot 10^5 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1/3}. \quad (48)$$

Представляющий заданную равенством (26) функцию  $\Phi(k)$  степенной ряд (47) сходится, когда  $|k - k_m| \leq k_m$ , т.е. радиус сходимости этого ряда  $R=k_m$ .

После замены переменной

$$v = k - k_m \quad (49)$$

интеграл (44) принимает вид

$$I = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-t^{1/3}(\Phi_m + av^2) + ik_m x + ivx\right) dv. \quad (50)$$

Множитель 2 в правой части (50) появляется в связи с учетом вклада окрестности точки  $k=-k_m$ .

Равенство (50) удобно переписать как

$$I = 2E_m \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t^{1/3} f(v)\right) dv, \quad (51)$$

где

$$E_m = \exp\left(ik_m x - t^{1/3} \Phi_m\right), \quad f(v) = -av^2 + i \frac{x}{t^{1/3}} v. \quad (52)$$

При больших значениях  $t$  интеграл в равенстве (51) имеет резко выраженный максимум, и поэтому основной вклад в его значение вносит окрестность точки максимума. Значение этого интеграла находится с помощью метода перевала [Копсон, 1966], применяя который, считаем переменную интегрирования  $v$  не действительной, а комплексной. Поскольку после такой замены подынтегральная функция не имеет особых точек, интегрирование по действительной оси можно заменить интегрированием по другому контуру в комплексной плоскости. Выбирается контур, проходящий через точку перевала, в окрестности которой подынтегральная комплексная функция имеет наиболее выраженный максимум. Точка перевала  $v_0$  находится из условия

$$\frac{df}{dv} = 0. \quad (53)$$

Заданная равенством (52) функция комплексного переменного  $f(v)$  имеет точку перевала

$$v_0 = i \frac{x}{2at^{1/3}}. \quad (54)$$

Как следует из (52) и (54), в окрестности точки перевала  $v_0$  функция  $f(v)$  представима в виде

$$f(v) = f(v_0) - a(v - v_0)^2, \quad f_0 = f(v_0) = -\frac{x^2}{4at^{2/3}}. \quad (55)$$

Подставляя (55) в (51), получаем

$$I/2 = E_m \exp(t^{1/3} f_0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-t^{1/3} a(v - v_0)^2] dv. \quad (56)$$

Для подынтегральной комплексной функции точка  $v_0$  является седловой. В методе перевала путь интегрирования на комплексной плоскости выбирается проходящим через точку перевала, в малой окрестности которой он представляет собой отрезок прямой, на котором разность  $f(v) - f(v_0)$  имеет действительные отрицательные значения, обращаясь в 0 только при  $v=v_0$ . Согласно (55), эта разность принимает вид

$$f(v) - f(v_0) = -a(v - v_0)^2 = -|a|r^2 \exp[i(\alpha + 2\beta)], \quad (57)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – аргументы комплексных чисел;  $a = |a| \cdot \exp(i\alpha)$ ;  $v - v_0 = r \cdot \exp(i\beta)$ .

Из соотношения (57) ясно, что в качестве пути интегрирования на комплексной плоскости следует выбрать отрезок прямой, на котором  $\beta = -\alpha/2$ . На этом отрезке разность  $f(v) - f(v_0)$  принимает действительные отрицательные значения и интеграл записывается в виде

$$\int_C \exp[-a(v - v_0)^2 t] dv = \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) \int_{-R}^R \exp(-|a|r^2 t) dr, \quad (58)$$

где  $R$  – радиус сходимости ряда (47). Интеграл в правой части равенства (58) можно представить как

$$\int_{-R}^R \exp(-|a|r^2 t) dr = \sqrt{\frac{\pi}{|a|t}} \operatorname{erf}\left(R\sqrt{|a|t}\right), \quad (59)$$

т.е. этот интеграл легко преобразуется к функции ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy.$$

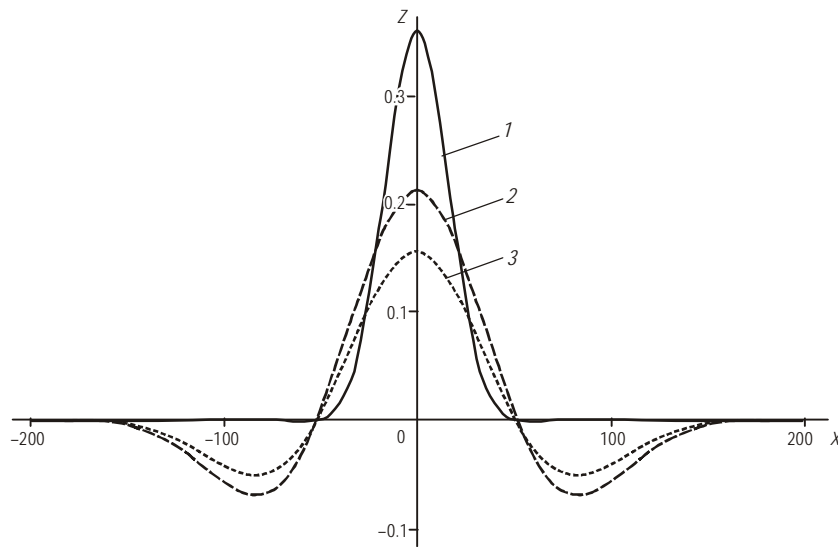
Известно, что  $\operatorname{erf}(x) = 1$  при  $x \gg 1$ , а при  $x > 1$  – близко к 1.

Таким образом, как следует из (44), (56) и (58), искомое распределение вертикальных смещений поверхности принимает вид

$$u_z(x, t) = \frac{2u_0 l}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{at^{1/3}}} \operatorname{erf}\left(R\sqrt{at^{1/3}}\right) \exp\left(ik_m x - t^{1/3} \Phi_m - \frac{x^2}{4at^{1/3}}\right). \quad (60)$$

Полученное решение (60) справедливо на достаточно больших временах – от нескольких сотен до нескольких тысяч лет. Верхнее ограничение на время накладывает условие (29), в котором  $k=k_m$ .

Построенные по формуле (60) графики (рис. 2) показывают зависимости вертикальных смещений от горизонтальной координаты в разные моменты времени. Дифференцируя правую часть равенства (60) по  $t$  при фиксированном значении  $x$ , нетрудно найти скорость вертикального движения земной поверхности в точках, достаточно удаленных от области начального возмущения рельефа. Например, когда  $u_0=100$  м,



**Рис. 2.** Зависимость вертикальных смещений земной поверхности от горизонтальной координаты в разные моменты времени для случая, когда ширина области начального смещения  $l$  равна 10 км. Кривая 1 соответствует 30 годам, 2 – 300 годам, 3 – 1000 лет

$l=100$  км,  $x=100$  км, скорость  $\frac{du_z}{dt}$  достигает максимального значения (около 1 мм/год) примерно за 600 лет.

Если бы подстилающая упругую верхнюю кору литосфера имела реологию ньютоновской жидкости с вязкостью  $\eta$ , то аналог модуля сдвига  $G_A^*(s)$  следовало бы заменить на  $\eta s$ , и уравнение (24) записывалось бы как

$$U_z^* = U_0(k) \cdot \frac{2|k|\eta}{\rho g + Nk^4 + 2|k|\eta s} \quad (61)$$

Обращение лапласовского изображения (61) дает соотношение

$$U_z(t) = U_0(k) \exp\left(-\frac{\rho g + Nk^4}{2|k|\eta} t\right), \quad (62)$$

которое справедливо при любых временах  $t$ , что отличает его от соотношения (30), которое характеризует среду Андраде и справедливо только для не слишком больших времен, ограниченных условием (29). Сравнение равенств (62) и (30) показывает, что при не слишком больших временах среду Андраде можно характеризовать эффективной вязкостью

$$\eta_{\text{eff}} = At^{2/3}. \quad (63)$$

Как следует из (63), на временах порядка 1000 лет ( $\approx 3 \cdot 10^{10}$  с), характерных для мелкомасштабных послеледниковых течений, используемому значению реологического параметра  $A=5 \cdot 10^{12}$  Па·с<sup>1/3</sup> соответствует эффективная вязкость  $\eta_{\text{eff}} \approx 5 \cdot 10^{19}$  Па·с. Такая оценка согласуется с оценкой вязкости, полученной при рассмотрении мелкомасштабных послеледниковых течений в рамках реологической модели ньютоновской жидкости [Cathles, 1975].

На больших временах смещения поверхности литосферы, имеющей реологию Андраде, принципиально отличаются от смещений, возникающих при ньютоновской

реологии литосферы. В окрестности точки  $s=0$  правая часть равенства (24) представима в виде ряда

$$U_z^*(s) = U_0(k) \left( \frac{s^{-2/3}}{\Phi(k)} - \frac{s^{-1/3}}{\Phi^2(k)} + \frac{1}{\Phi^3(k)} \dots \right). \quad (64)$$

Согласно теореме об асимптотическом поведении оригинала [Деч, 1967], лапласовский оригинал  $u_z(t)$  на больших временах представим в виде ряда, члены которого получаются в результате обратного преобразования Лапласа каждого члена ряда (64). Сохраняя только первый член разложения, находим

$$U_z(t) = \frac{U_0(k)}{\Phi(k)} \frac{t^{-1/3}}{\Gamma(2/3)}. \quad (65)$$

Асимптотическая зависимость (65) справедлива на больших временах, когда

$$t \gg (\Phi(k))^{-3}. \quad (66)$$

Из (65) следует, что на больших временах в литосфере с реологией Андраде моды с различными волновыми числами  $k$  затухают по одному закону  $t^{-1/3}$ ; при этом пропадает эффект распространения смещений поверхности, имеющий место на меньших временах. Поскольку минимальное значение  $\Phi(k)$  достигается при  $k=k_m$ , неравенство (66) выполняется для любых волновых чисел, если

$$t \gg (\Phi(k_m))^{-3}, \quad (\Phi(k_m))^{-3} \approx 5 \cdot 10^{11} \text{ с} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ лет}. \quad (67)$$

В рассмотренном в настоящей работе другом предельном случае, когда  $t \ll 2 \cdot 10^4$  лет, моды с волновыми числами  $k \approx k_m$  испытывают слабое затухание и определяют величину смещений, а моды с волновыми числами, сильно отличающимися от  $k_m$ , затухают по закону  $t^{-1/3}$  и вносят малый вклад в смещение поверхности.

Соотношения (67) справедливы для мелкомасштабной начальной нагрузки, при которой  $l < 2\pi/k_m$ . В случае крупномасштабной нагрузки, когда  $l > 2\pi/k_m$ , асимптотика, при которой смещение поверхности происходит по закону  $t^{-1/3}$ , становится применимой на значительно меньших временах, чем при мелкомасштабной нагрузке. В этом случае распространение смещений из области начального возмущения поверхности происходит только на небольших временах порядка нескольких десятков лет, а позже смещения не распространяются, а просто постепенно затухают.

### Заключение

Тектоника плит допускает только малые деформации в литосферных плитах, поэтому ползучесть литосферы рассматривается как неустановившаяся. Если считать, что литосфера имеет установившуюся ползучесть, описываемую степенной неньютоновской реологической моделью, то литосфера должна иметь очень высокую эффективную вязкость и вести себя как упругая среда. Неустановившаяся ползучесть литосферы сильно снижает ее эффективную вязкость, и только тонкий слой верхней коры проявляет упругость. Литосфера, т.е. холодный пограничный слой, образуемый мантийной конвекцией, включает в себя не только упругую кору, но и астеносферу, соответствующую данным по послеледниковым течениям, восстанавливающим изостазию.

В многочисленных исследованиях, рассматривающих мантийные послеледниковые течения в рамках ньютоновской реологической модели, определяется эффективная вязкость, соответствующая процессам, имеющим продолжительность порядка нескольких тысяч лет. Найденные таким образом эффективные вязкости не могут характеризовать

намного более медленные геологические процессы. Неустановившаяся ползучесть литосферы описывается линейной наследственной реологической моделью Андраде. Реологический параметр Андраде характеризует процессы любой продолжительности, для которых эффективные вязкости могут сильно различаться.

Для оценки эффективной вязкости начальное распределение вертикальных смещений преобразуется по Фурье и прослеживается зависимость от времени для моды с фиксированным значением волнового числа  $k$ . Чтобы получить зависимость смещения от горизонтальной координаты необходимо совершить обратное преобразование Фурье, которое позволяет обнаружить распространение возмущения от его начального положения вдоль земной поверхности. Такое распространение, которое можно назвать безынерционной волной Рэлея, связано с тем, что моды с различными значениями волнового числа  $k$  затухают с различными скоростями. Если в какой-то области земной поверхности произошли вертикальные смещения, нарушившие изостатическое равновесие коры, то процесс восстановления изостазии не сводится только к постепенному уменьшению начальных смещений в этой области. Уменьшение смещений в начальной области сопровождается распространением смещений за ее пределы, что видно на рис. 1, 2. Это распространение (безынерционная волна Рэлея) происходит с сильным затуханием.

Рассматриваемый процесс родственен диффузионным волнам Эльзассера [Elsasser, 1969], которые возбуждаются начальными горизонтальными смещениями. В модели Эльзассера предполагается, что в астеносфере реализуется горизонтальное течение Куэтта, а на подошве астеносферы скорости течения обращаются в нуль. Это искусственное граничное условие использовалось и в последующих исследованиях [Теркот, Шуберт, 1985]. В настоящей работе исследование диффузионных волн проводится в рамках типичной для поверхностных волн постановки задачи: астеносфера моделируется как полупространство, а в качестве граничного условия накладывается требование ограниченности смещений на большой глубине. Поэтому, поскольку на верхней горизонтальной границе смещения вертикальны, рассматриваемые диффузионные волны можно назвать безынерционными волнами Рэлея. Если рассматривать горизонтальные начальные смещения на верхней границе и моделировать астеносферу как полупространство, то возникающие диффузионные волны можно назвать безынерционными волнами Лява [Биргер, 1989].

Начальное смещение может быть вызвано впадиной, образовавшейся после таяния ледника, высыхания соляного озера или поднятием, возникшим, например, при извержении вулкана. За несколько тысяч последних лет вертикальные смещения, нарушающие изостазию, происходили в разных регионах земной поверхности. Генерируемые этими смещениями безынерционные волны Рэлея распространяются по всей земной поверхности и служат механизмом современных вертикальных движений земной коры. Эти современные движения, происходящие в течение нескольких тысяч последних лет, хорошо наблюдаются, позволяя оценить их скорость как 1–10 мм/год. Максимальная скорость современного движения, составляющая 10 мм/год, отмечена на северном побережье Ботнического залива и вызвана послеледниковым поднятием Фенноскандии.

## Литература

- Биргер Б.И. Распространение напряжений в литосфере Земли // Физика Земли. 1989. № 12. С.3–18.
- Копсон Э.Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 159 с.
- Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологические приложения физики сплошных сред. М.: Мир, 1985. 730 с.

- Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
- Birger B.I. Rheology of the Earth and thermoconvective mechanism for sedimentary basins formation // *Geophys. J. Inter.* 1998. V. 134. P.1–12.
- Birger B.I. Excitation of thermoconvective waves in the continental lithosphere // *Geophys. J. Inter.* 2000. V. 140. P.24–36.
- Birger B.I. Transient creep and convective instability of the lithosphere // *Geophys. J. Inter.* 2012. V. 191. P.909–922.
- Birger B.I. Temperature-dependent transient creep and dynamics of cratonic lithosphere // *Geophys. J. Inter.* 2013. V. 195. P.695–705.
- Cathles L.M. The viscosity of the Earth's mantle. Princeton university press, 1975. 386 p.
- Elsasser W.H. Convection and stress propagation in the upper mantle // *Appl. Modern Phys. Earth Planet. Inter.* N.Y.: Wiley, 1969. P.223–246.

### Сведения об авторе

**БИРГЕР Борис Исаакович** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123242, Москва, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: +7(495) 362-12-81. E-mail: birgerbor@mail.ru

## ISOSTATIC RECOVERY FLOWS IN THE LITHOSPHERE

B.I. Birger

*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**Abstract.** Laboratory experiments with rock samples show that their creep at small strains is transient. Therefore we can assume that the lithospheric plates, where strains are small, demonstrate the transient creep that is described by the linear hereditary Andrade rheological model. The effective viscosity that characterizes the transient creep is lower than the effective viscosity at steady-state creep and depends on the characteristic time of the process. The typical duration of isostatic rebound after an initial disturbance of the Earth's surface is several thousand years, and therefore, the depth distribution of the rheological properties of the lithosphere and crust is different from the distribution that corresponds to slow geological processes.

It is shown that when considering the isostatic recovery process, the upper crust can be modeled as a thin elastic plate and the underlying lower crust and lithosphere, as a half-space with transient creep. For such a system, the continuum mechanics equations are solved using the Fourier and Laplace transforms. The solutions are obtained in the form of transverse waves that propagate, with strong attenuation, from the area of the initial disturbance along the Earth's surface and cause its vertical displacements. These solutions, called the inertialess Rayleigh waves, depend on the initial disturbance. In the case of a point initial disturbance, the analytical expression is found for these waves that gives an explicit dependence of the vertical displacements of the Earth's surface on the horizontal coordinates and time. The inertialess Rayleigh waves can be regarded as a mechanism of modern vertical movements of the crust.

**Keywords:** transient creep, isostatic recovery, vertical movements of the Earth's surface.

### References

- Birger B.I. Stress propagation in the lithosphere, *Izv., Phys. Solid Earth*, 1989, no. 12, pp. 3-18.
- Birger B.I. Rheology of the Earth and thermoconvective mechanism for sedimentary basins formation, *Geophys. J. Int.*, 1998, vol. 134, pp. 1-12.
- Birger B.I. Excitation of thermoconvective waves in the continental lithosphere, *Geophys. J. Int.*, 2000, vol. 140, pp. 24-36.

- Birger B.I. Transient creep and convective instability of the lithosphere, *Geophys. J. Int.*, 2012, vol. 191, pp. 909-922.
- Birger B.I. Temperature-dependent transient creep and dynamics of cratonic lithosphere, *Geophys. J. Int.*, 2013, vol. 195, pp. 695-705.
- Cathles L.M. *The viscosity of the Earth's mantle*. Princeton university press, 1975.
- Copson E.T. *Asimptoticheskie razlozheniya* (Asymptotic expansions), Moscow: Mir, 1966.
- Elsasser W.H. Convection and stress propagation in the upper mantle, *Appl. Modern Phys. Earth Planet. Inter.*, N.Y.: Wiley, 1969, pp. 223-246.
- Turcotte D. and Schubert G., *Geodynamics: Application of Continuum Physics to Geological Problems*, 1982, New York: John Wiley.
- Von Doetsch G., *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*, Springer, 1967.