ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2017, том 18, № 2, с.77-82. DOI: 10.21455/gr2017.2-5

УДК 550.380

СПИРАЛЬНОСТЬ МАГНИТОСТРОФИЧЕСКИХ ВОЛН И СКЕЙЛИНГ ДЛЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ДИНАМО

 С.Л. Шалимов

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

Рассматривается роль магнитострофических волн в проблеме кинематического α^2-динамо в предположении, что названные волны могут генерироваться в экваториальной плоскости жидкого ядра Земли вдали от его границ и вне тангенциального цилиндра.

Ключевые слова: магнитострофические волны, жидкое ядро Земли, α^2-динамо.

Введение

В картине, основанной на результатах численного моделирования геодинамо, процесс развивается в основном вне тангенциального цилиндра, приводя к анизотропной структуре течения в жидком ядре, состоящей из конвективных колонок, ориентированных приблизительно вдоль оси вращения с чередованием циклонов и антициклонов [*Roberts, Glatzmaier,* 2000]. Эти вихревые колонки обладают спиральной структурой с отрицательным знаком спиральности в северном полушарии и положительным в южном. Подобная асимметрия распределения спиральности, как известно [*Moffatt,* 1978], приводит к генерации α^2-динамо. Хотя используемые при численном моделировании безразмерные параметры далеки от теоретических для жидкого ядра Земли, генерируемое магнитное поле оказывается вне ядра приблизительно дипольным и ориентировано вдоль оси его вращения.

По современным представлениям, вихревые колонки определяют дипольность геомагнитного поля благодаря вязкой спиральной экмановской накачке в конвективных ячейках на границе ядро–мантия [*Roberts, Glatzmaier,* 2000]. Была предпринята целенаправленная попытка ослабить влияние завышенных коэффициентов переноса прежде всего путем выбора иных граничных условий [*Kuang, Bloxham,* 1997; *Yadav et al.,* 2013] – на границе ядро–мантия вместо движения жидкости без проскальзывания рассматривались движения с равными нулю сдвиговыми напряжениями, при которых отсутствует экмановская накачка. Существенно, что в двух названных случаях были получены аналогичные результаты, что предоставляет возможность альтернативного выбора граничных условий.

Кроме того, дипольность структуры магнитного поля газовых планет приводит к заключению, что источник спиральности, необходимый для генерации поля (динамо), может быть обусловлен процессами в самом ядре (без учета границ). Таким источником спиральности могут быть инерционные и магнитострофические волны, происхождение которых на вращающихся объектах связано с силой Кориолиса.

В работе [*Davidson,* 2004] предлагался механизм генерации геомагнитного поля, обусловленный инерционными волнами, формирующими колонки Тейлора. Однако реалистические оценки плотности магнитной энергии в геодинамо связаны с предположением о магнитострофическом (а не геострофическом) балансе, когда сила Кориолиса уравновешена силой Лоренца [*Решетняк, Соколов,* 2003]. По этой причине в работе [*Шалимов,* 2015] был предложен механизм генерации спиральности и поддерживания дипольного геомагнитного поля (в схеме α-Ω динамо) магнитострофическими волнами в ядре при предположении, что волны генерируются в экваториальной плоскости ядра вдали от его границ. Отметим, что отдельные элементы такого подхода, но применительно к границе ядро–мантия, содержатся в работах [*Фишман,* 1990; *Anufriev,* 1991; *Shimizu, Loper,* 2000; *Moffatt,* 1978, 2008].

В настоящей работе рассмотрена роль магнитострофических волн в проблеме кинематического α^2-динамо при предположении, что волны могут генерироваться в экваториальной плоскости ядра вдали от его границ и вне тангенциального цилиндра.

Спиральность магнитострофических волн

Линеаризованное уравнение индукции с учетом $\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j}$ имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla\right)\zeta + \eta \nabla^2 \mathbf{j}, \tag{1}$$

где $\zeta = \nabla \times \mathbf{u}$ – завихренность.

В уравнении баланса импульса можно пренебречь малыми величинами второго порядка, а также слагаемым с вязкостью, так как рассматриваются области, далекие от границ жидкого ядра с мантией и твердым ядром. После применения к обеим частям уравнения оператора $\nabla \times$ получим его в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla\right)\mathbf{j} + 2\left(\Omega \cdot \nabla\right)\mathbf{u}, \tag{2}$$

где Ω – частота вращения жидкого ядра Земли, находящегося в постоянном магнитном поле $\mathbf{B}_0$; $\mathbf{u}$ – возникшее малое возмущение скорости, вызывающее соответствующее возмущение плотности тока $\mathbf{j}$ и магнитного поля $\mathbf{b}$.

Для возмущений в виде плоской волны $\sim \exp\left(i\mathbf{kr} - i\omega t\right)$ из уравнений (1), (2) при η=0 следует дисперсионное соотношение [*Moffatt,* 1978]

$$\omega^2 \pm \left|\omega_\Omega\right|\omega - \omega_B^2 = 0, \tag{3}$$

в котором $\omega_\Omega = \pm 2\left(\Omega \cdot \mathbf{k}\right)/\left|\mathbf{k}\right|$ – введенное обозначение частоты инерционной волны; $\omega_B = \pm\left(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}\right)/\sqrt{\mu_0 \rho}$ – обозначение частоты для альвеновской волны. При условии $\omega_\Omega >> \omega_B$, справедливом для земного ядра, из (3) находим $\omega_1 = \left|\omega_\Omega\right|$ и $\omega_2 = \omega_B^2/\left|\omega_\Omega\right|$, что соответствует инерционной и магнитострофической волнам.

Кроме того, следствием (1), (2) являются соотношения для амплитуд плоских волн $\zeta = \mp k\mathbf{u}$, $\mu\mathbf{j} = \mp k\mathbf{b}$, которые показывают синфазность и параллельность соответствующих векторов, что, в частности, свидетельствует о максимальной кинетической и магнитной спиральности магнитострофических волн.

Групповая скорость магнитострофических волн очевидно равна

$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \omega\left(\frac{2\mathbf{B}_0}{\left(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}\right)} + \frac{\mathbf{k} \times \left(\mathbf{k} \times \Omega\right)}{k^2\left(\Omega \cdot \mathbf{k}\right)}\right), \tag{4}$$

откуда следует, что энергия волны распространяется преимущественно либо вдоль геомагнитного поля $\mathbf{B}_0$, либо вдоль направления $\mathbf{k} \times \left(\mathbf{k} \times \Omega\right)$, что зависит от того, чему почти перпендикулярен волновой вектор – направлению геомагнитного поля или оси вращения.

Оценивая частоту магнитострофической волны как $\omega = \omega_B^2 / |\omega_\Omega| \approx B_0^2 k^2 / 2\Omega\rho\mu_0$, находим ее фазовую скорость – $\mathbf{c}_p = \omega\mathbf{k}/k^2 = B_0^2\mathbf{k}/2\Omega\rho\mu_0$.

Будем считать, что магнитострофическая волна генерируется на экваторе и её волновой вектор почти перпендикулярен оси вращения ядра. В таком случае для групповой скорости волны вместо (4) можно приближенно написать

$$\mathbf{c}_g \approx \pm \frac{\omega_B^2}{\omega_\Omega}\left(\frac{k^2\Omega - (\Omega\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}}{k^2(\Omega\cdot\mathbf{k})}\right). \tag{5}$$

Поскольку теперь $\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{c}_p = 0$, то распространение энергии волны направлено перпендикулярно волновому вектору, т.е. вверх от экваториальной плоскости (в направлении Ω) и вниз от нее (противоположно направлению Ω). При этом вверх будет распространяться волновой пакет с отрицательной спиральностью, а вниз – с положительной.

Оценим обусловленную магнитострофической волной локальную ЭДС $\langle \mathbf{u}\times\mathbf{b}\rangle$. Для масштабов порядка земного радиуса магнитное число Рейнольдса R_m, определяемое как $R_m = ur_c/\eta$, при $u\approx 2\cdot 10^{-4}$ м/с, $\eta\approx 2$ м^2/с равно ~600. Для масштабов конвективных колонок и коротких волн порядка $\delta\sim 10$ км – приблизительно 1, что позволяет пользоваться приближением малых R_m [*Davidson,* 2013]. Данный минимальный масштаб может быть определен с использованием минимального времени процессов в жидком ядре [*Шалимов,* 2013]. Внешнее магнитное поле на этом масштабе будем считать постоянным.

Выберем локальную систему координат (x, y, z) с осью z, направленной вдоль оси вращения. Поскольку $\delta\mu\mathbf{j} = \mathbf{b}$, где δ может быть отрицательным (в северном полушарии) или положительным (в южном), искомое значение ЭДС оценивается как

$$\langle \mathbf{u}\times\mathbf{b}\rangle = \mu\delta\langle \mathbf{u}\times\mathbf{j}\rangle = \mu\delta^2\langle \mathbf{u}\times\nabla\times\mathbf{j}\rangle = \frac{\delta^2}{\eta}\langle \mathbf{u}\times(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\rangle,$$

где скобки означают усреднение на избранном масштабе. Так как $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} =$ $= \nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}_0) - \mathbf{B}_0\times\zeta$, то получим

$$\langle \mathbf{u}\times\mathbf{b}\rangle = \frac{\delta}{\eta}\big((\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}_0)\mathbf{u} - \mathbf{u}\times(\mathbf{B}_0\times\mathbf{u})\big) = -\frac{\delta}{\eta}\big((\mathbf{u}^2)\mathbf{B}_0 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}_0)\mathbf{u}\big).$$

Наличие только аксиальной компоненты поля приводит к требованию

$$\langle u_z^2\rangle = \langle u_x^2 + u_y^2\rangle,\ \langle u_x u_z\rangle = \langle u_y u_z\rangle = 0.$$

Поэтому оценка ЭДС при дополнительном условии симметрии по радиальной координате приобретает вид

$$\langle \mathbf{u}\times\mathbf{b}\rangle \approx -\frac{\delta\langle \mathbf{u}^2\rangle}{2\eta}\mathbf{B}_{0\perp}, \tag{6}$$

где предполагается, что $\langle u_x^2\rangle = \langle u_y^2\rangle$.

Аналогичная оценка может быть получена при рассмотрении волны, которая распространяется через область с магнитным полем $\mathbf{B}_0$. Из уравнения индукции (1) можно найти связь между индуцированным магнитным полем $\mathbf{b}$ и $\mathbf{u}$ в виде

$$\mathbf{b} = -\frac{(\mathbf{k}\mathbf{B}_0)}{(\omega + i\eta k^2)}\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{k}\mathbf{B}_0)}{(\omega^2 + \eta^2 k^4)}(-\omega + i\eta k^2)\mathbf{u}.$$

Для волны, волновой вектор которой в локальной декартовой системе координат (x, y, z) направлен перпендикулярно оси вращения – $\mathbf{k} = (k,0,0)$, $\mathbf{u} = u_0(0,1,-i)$, среднее значение ЭДС равно

$$\langle \mathbf{b} \times \mathbf{u} \rangle = -\frac{(\mathbf{kB}_0)\eta k^2 u_0^2}{(\omega^2 + \eta^2 k^4)} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|},$$

из чего при $\omega << \eta k^2$ получается оценка (6).

О кинематическом динамо

Как следует из (4), при наличии компонент внешнего поля, перпендикулярных оси вращения, скорость распространения волнового пакета вдоль оси вращения будет сопоставима со скоростью его распространения вдоль поля. Следовательно, пакет станет анизотропным и в плоскости, перпендикулярной оси вращения, характеризуясь двумя масштабами и скоростями, причем $\delta_\perp / u_\perp \sim \delta_B / u_B$ или $u_\perp \sim u_B(\delta_\perp / \delta_B)$. В таком случае оценка (6) приобретает вид

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle \approx \pm \frac{|\delta_\perp| u_\perp^2}{2\eta} \mathbf{B}_{0\perp} \approx \pm \frac{|\delta_\perp| u_B^2}{2\eta} \left(\frac{\delta_\perp}{\delta_B} \right)^2 \mathbf{B}_{0\perp}.$$

Если считать, что диполь направлен на север, то в цилиндрической системе координат взаимодействие волны с внешним радиальным полем приведет к следующему выражению для ЭДС:

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_r \approx \frac{|\delta_\perp| u_B^2}{2\eta} \left(\frac{\delta_\perp}{\delta_B} \right)^2 |B_{0r}|.$$

Соответствующий полоидальный ток $\sigma\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_r$ имеет структуру квадруполя, которая зеркально симметрична относительно экватора (с положительным направлением радиального тока на высоких широтах). Из закона Ампера следует, что этот ток индуцирует азимутальное магнитное поле, антисимметричное относительно экватора (положительное в северном полушарии):

$$|B_{0\varphi}| \sim \mu r_c |j_p| \sim \frac{r_c}{\eta} \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_r \sim \frac{r_c}{\eta} \frac{|\delta_\perp| u_B^2}{\eta} \left(\frac{\delta_\perp}{\delta_B} \right)^2 |B_{0r}|. \quad (7)$$

Аналогично можно оценить азимутальную ЭДС и азимутальный ток $\sigma\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_\varphi$, который будет поддерживать направленную на север полоидальную компоненту геомагнитного поля. Таким образом, цикл геодинамо завершится, а самоподдерживающимся он будет, как следует, например, из (7), при условии

$$\frac{r_c}{\eta} \frac{|\delta_\perp| u_B^2}{\eta} \sim \left(\frac{\delta_B}{\delta_\perp} \right)^2. \quad (8)$$

Поскольку $R_m = ur_c/\eta >> 1$, то самоподдерживающееся за счет магнитострофических волн геодинамо возможно либо при $u_B \delta_\perp/\eta << 1$, либо при $u_B \delta_\perp/\eta \sim 1$ и $\delta_B >> \delta_\perp$, т.е. при анизотропном потоке, перпендикулярном оси вращения.

Заключение

Численное моделирование геодинамо показывает, что этот процесс обусловлен спиральной экмановской накачкой в областях конвективных роллов, которая возникает вследствие вязкого взаимодействия конвективных колонок с мантией. Однако существование магнитных полей, подобных земному, у планет, не имеющих мантии (газовые гиганты), говорит о том, что механизм генерации спиральности для планет не обязательно связан с повышенной вязкостью и не чувствителен к граничным условиям.

В настоящей работе предложен механизм генерации спиральности магнитострофическими волнами, источником которых могут стать неустойчивые или турбулентные области в жидком ядре. Как показывает численное моделирование сферических замагниченных слоев Куэтта (см., например, [*Gissinger et al.,* 2011]), неустойчивыми областями могут быть экваториальный джет (при числах Эльзассера $\Lambda \le 1$) или слой Шерклифа вблизи тангенциального цилиндра (при $\Lambda > 1$).

Показано, что магнитострофические волны, распространяющиеся почти перпендикулярно оси вращения вне тангенциального цилиндра, имеют отрицательную спиральность в северном полушарии и положительную в южном. Подобное распределение спиральности при распространении волн через области постоянного азимутального геомагнитного поля способно приводить к поддержанию исходного дипольного поля по схеме α^2-динамо.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 14-29-06073_офи_м).

Литература

Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д. Напряженность геомагнитного поля и подавление спиральности в геодинамо // Физика Земли. 2003. № 9. С.82–86.

Фишман В.М. Локализация МАС волн неоднородным вращением // Геомагнетизм и аэрономия. 1990. Т. 30. С.837–839.

Шалимов С.Л. О минимальном времени нестабильности гидромагнитных течений в земном ядре // Физика Земли. 2013. № 5. С.150–152.

Шалимов С.Л. О роли магнитострофических волн в геодинамо // Физика Земли. 2017. № 3. С.488–491.

Anufriev A. An alpha-effect on the core-mantle boundary // Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn. 1991. V. 57. P.135–143.

Davidson P.A. Turbulence; an introduction for scientists and engineers. Oxford Univ. Press, 2004.

Davidson P.A. Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids. Cambridge Univ. Press, 2013.

Gissinger C., Ji H., Goodman J. Instabilities in magnetized spherical Couette flow // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. 026308-1-10.

Kuang W., Bloxham J. An Earth-like numerical dynamo model // Nature. 1997. V. 389. P.371–374.

Moffatt H.K. Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge University Press, 1978. 343 p.

Moffatt H.K. Magnetostrophic turbulence and the geodynamo // Proc. IUTAM symposium on computational physics and new perspectives in turbulence / Ed. Y. Kaneda. Springer, 2008. P.339–346.

Parker E. N. Hydromagnetic dynamo models // Astrophys. J. 1955. V. 122. P.293–314.

Roberts P., Glatzmaier G. Geodynamo: theory and simulations // Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72, N 4. P.1081–1125.

Shimizu H., Loper D.E. Small-scale helicity and α-effect in the Earth's core // Phys. Earth Planet. Inter. 2000. V. 121. P.139–155.

Yadav R.K., Gastine T., Christensen U.R. Scaling laws in spherical shell dynamos with free-slip boundaries // Icarus. 2013. V. 225. P.184–193.

Сведения об авторе

ШАЛИМОВ Сергей Львович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123242, Москва, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: +7(499) 254-91-15. E-mail: pmsk7@mail.ru

HELICITY OF MAGNETOSPTROPHIC WAVES AND SCALING FOR A KINEMATIC DYNAMO

S.L. Shalimov

Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The role of magnetostrophic waves in the problem of kinematic α^2-dynamo was considered under assumption that the waves can be generated in the equatorial plane of the liquid core far from its boundaries and tangent cylinder.

Keywords: magnetostrophic waves, Earth's liquid core, α^2-dynamo.

References

Reshetnyak M.Yu. and Sokolov D.D. Geomagnetic field intensity and helicity suppression in geodynamo, *Izv. Phys. Solid Earth*, 2003, no. 9, pp. 82-86.

Fishman V.M. MAC waves localization by nonuniform rotation, *Geomagnetism and Aeronomy*, 1990, vol. 30, pp. 837-839.

Shalimov S.L. On the minimal instability time of hydromagnetic flows in the Earth's, *Izv. Phys. Solid Earth,* 2013, vol. 49, no. 5, pp. 743-745.

Shalimov S.L. On role of magnetostrophic wave in geodynamo *Izv. Phys. Solid Earth*, 2017, no. 3. pp. 488-491.

Anufriev A. An alpha-effect on the core-mantle boundary, *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, 1991, vol. 57, pp. 135-143.

Davidson P.A. *Turbulence; an introduction for scientists and engineers*. 2004, Oxford Univ. Press.

Davidson P.A. *Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids*. Cambridge Univ. Press, 2013.

Gissinger C., Ji H., and Goodman J. Instabilities in magnetized spherical Couette flow, *Phys. Rev. E.*, 2011, vol. 84, 026308-1-10.

Kuang W. and Bloxham J. An Earth-like numerical dynamo model, *Nature*, 1997, vol. 389, pp. 371-374.

Moffatt H.K. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press, 1978.

Moffatt H.K. Magnetostrophic turbulence and the geodynamo, *Proc. IUTAM symposium on computational physics and new perspectives in turbulence*, ed. Y. Kaneda, Springer, 2008, pp. 339-346.

Parker E. N. Hydromagnetic dynamo models, *Astrophys. J.*, 1955, vol. 122, pp. 293-314.

Roberts P. and Glatzmaier G. Geodynamo: theory and simulations, *Rev. Mod. Phys.*, 2000, vol. 72, no. 4, pp. 1081-1125.

Shimizu H. and Loper D.E. Small-scale helicity and α-effect in the Earth's core, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 2000, vol. 121, pp. 139-155.

Yadav R.K. and Gastine T., Christensen U.R. Scaling laws in spherical shell dynamos with free-slip boundaries, *Icarus*, 2013, vol. 225, pp. 184-193.