

УДК 550.83

## НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНОЛОГИИ *GrAnM*

© 2016 г. З.З. Арсанукаев

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия*

Исследуется влияние геометрии поверхности возмущающих тел на результаты решения обратной задачи гравиметрии в рамках подхода, основанного на прямом (аналитическом) продолжении заданных на поверхности Земли значений аномального гравитационного поля в нижнее полупространство путем решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) больших порядков. Редукция непрерывной задачи аналитического продолжения значений поля к дискретной задаче с составлением и решением СЛАУ заключается в ряде замен: непрерывное пространство заменяется сеточным, непрерывный дифференциальный оператор Лапласа – вторыми разделенными разностями, искомые значения поля и краевые условия в виде аналитических функций – сеточными функциями.

Для оценки точности значений поля, получаемых в результате решения задачи аналитического продолжения, разработана специальная методика, основанная на анализе результатов решения задачи на модельных примерах. Приводятся результаты модельных расчетов для вертикального пласта и антиклинального поднятия, а также результаты решения задачи с использованием реальных данных.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор Лапласа, аналитическое продолжение, пакет компьютерных программ *GrAnM*, системы линейных алгебраических уравнений.

### Введение

При решении обратной задачи гравиметрии традиционным является подход, в котором применяется метод подбора с использованием распределений масс, принадлежащих априорно принятой интерпретационной модели (априорно заданному классу). Суть метода подбора состоит в том, чтобы с помощью решения прямых задач найти то распределение источников поля в этом классе, поле которого наилучшим образом совпадает с наблюдаемым. К сожалению, метод подбора – весьма трудоемкая процедура, требующая решения прямых задач для большого набора источников правильной геометрической формы при различных законах изменения плотности аномальных масс.

Настоящая статья посвящена другой возможности решения обратной задачи, которая связана с аналитическим продолжением заданных (измеренных) значений аномального гравитационного поля на поверхности Земли в нижнее полупространство с использованием метода дискретных аппроксимаций и основывается на предпосылке о том, что многие геологические тела имеют геометрические особенности контуров поперечного сечения в виде резких изломов, угловых перегибов, разрывов и т.д. (особые точки). В этих точках производные гравитационного потенциала терпят разрывы первого или второго рода, т.е. либо меняются скачкообразно, либо обращаются в бесконечность. При аналитическом продолжении положение особых точек, определяющих структуру аномального потенциального поля, определяется однозначно. Тем самым косвенно определяется и поверхность возмущающего тела, причем определяется без знания его избыточной плотности, которая наряду с элементами залегания тела оценивается по самой гравитационной аномалии.

### Технология оконтуривания возмущающих тел

Метод дискретных аппроксимаций, благодаря которому задача аналитического продолжения измеренных значений аномального гравитационного поля на поверхности Земли в нижнее полупространство редуцируется к задаче составления и решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) больших порядков, заключается в следующем. Трехмерное или двумерное континуальное пространство заменяется сеточным, а вторые производные дифференциального оператора в уравнении Лапласа (справедливом вне возмущающих масс) заменяются конечно-разностными отношениями; заданные и искомые значения поля в виде аналитических функций преобразуются в сеточные функции [Страхов, Арсанукаев, 2002]. Реализация аналитического продолжения заданных значений поля в нижнее полупространство с использованием дискретного метода требует решения разнообразных задач как постановочного характера, так и связанных с обработкой (фильтрацией) заданных значений поля, осложненных высокочастотной помехой и с оценкой точности значений поля, полученных в результате аналитического продолжения в нижнее полупространство. Наконец, необходимо разработать метод для устойчивого решения СЛАУ, возникающих при дискретизации непрерывной задачи. Проблема постановки задачи аналитического продолжения возникает в связи с тем, что значения измеренного аномального гравитационного поля располагаются на дневной поверхности Земли. В двумерном случае это означает, что заданные значения поля будут находиться только на части контура горизонтального сеточного слоя в нижнем полупространстве.

В такой постановке задача аналитического продолжения будет некорректно поставленной, поскольку для однозначного определения расчетных значений поля в узлах сетки внутри заданного горизонтального слоя требуется задание значений поля по всему контуру, окружающему горизонтальный слой (классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа [Боглаев, 1990]). Некорректная постановка задачи аналитического продолжения при редукции с использованием дискретного метода, как следствие, приводит к возникновению недоопределенных СЛАУ и их неустойчивому решению. Последняя проблема была успешно решена регуляризацией, состоящей в присоединении дополнительных уравнений к уже построенным СЛАУ. Для этого в разностных схемах дискретное уравнение Лапласа рассматривалось совместно на двух и более шаблонах (в виде классических шаблонов “крест”, “ящик” и их модификаций). Построенные таким образом СЛАУ являются переопределенными, а их решение – устойчивым.

Проблема фильтрации заданных значений, осложненных высокочастотной помехой, также была решена успешно. Для оценки точности полученных при аналитическом продолжении расчетных значений поля в нижнем полупространстве была разработана методика, основанная на том, что в модельных примерах в качестве возмущающих принимаются тела правильной геометрической формы, для которых существует точное решение прямой задачи. Таким образом, если в качестве “измеренных” значений аномального гравитационного поля в модельных примерах принять решения прямой задачи в узлах сетки на уровне Земли ( $z=0$ ) и на шаг сетки выше него ( $z=-h^1$ ), то сравнивая по какой-либо норме расчетные значения поля в узлах сетки в заданном горизонтальном слое в нижнем полупространстве с соответствующими значениями поля, полученными при решении прямой задачи, можно получить оценку точности.

Для решения построенных переопределенных СЛАУ больших порядков при аналитическом продолжении с использованием дискретных схем В.Н. Страховым был раз-

---

<sup>1</sup> Ось  $Oz$  направлена вниз.

работан итерационный метод последовательного умножения полиномов (МПУП), основанный на идее подавления полезной компоненты [Страхов, Страхов, 1999]. С использованием этого метода выполнен большой объем вычислительных экспериментов для модельного примера прямоугольной однородной по плотности призмы, имеющей бесконечное простираение по оси  $Oy$  (двумерный случай). В экспериментах варьировались геометрические размеры сечения призмы, длина профиля, на котором располагаются очищенные от высокочастотной помехи “измеренные” значения поля, шаг сетки, расстояние от уровня  $z=0$  до верхней кромки призмы [Арсанукаев, 2003, 2004, 2009, 2010]. Аналитическое продолжение заданных значений поля в нижнее полупространство с использованием дискретного уравнения Лапласа осуществлялось последовательно на нескольких уровнях:

ниже уровня  $z=0$ , но выше верхней кромки возмущающего тела;

ниже верхней кромки, но выше отметки центра тяжести (формальное аналитическое продолжение);

ниже положения центра тяжести тела, но выше положения нижней кромки тела (формальное аналитическое продолжение);

ниже отметки нижней кромки (формальное аналитическое продолжение).

В результате обнаружен ряд закономерностей в поведении расчетного поля в нижнем полупространстве. Так, было установлено, что при аналитическом продолжении с использованием дискретного уравнения Лапласа поле восстанавливается в нижнем полупространстве вплоть до верхней кромки практически с любой наперед заданной точностью, для чего достаточно взять подходящие (оптимальные) длину шага сетки и длину профиля. Например, при длине профиля 32 км и равномерной сетке с одинаковым шагом 200 м по осям  $Ox$ ,  $Oz$  на глубине от уровня  $z=0$ , равной шагу сетки, относительная погрешность равна  $2.3 \cdot 10^{-5}$ , т.е. восстановленные значения отличаются от точных в среднем на 0.002 %; на глубине на один шаг сетки выше отметки верхней кромки пласта это отличие составляет около 3 %. При аналитическом продолжении до отметки, находящейся ниже верхней кромки, но выше центра тяжести, при переходе через верхнюю кромку аномалиеобразующего объекта по периферии расчетных кривых начинают зарождаться высокочастотные колебания (осцилляции). Но эти колебания не увеличивают значительно своих амплитуд до прохождения отметки, соответствующей центру тяжести тела. После прохождения отметки центра тяжести размах осцилляций существенно возрастает. После прохождения нижней кромки амплитуда высокочастотных колебаний окончательно сравнивается с основным максимумом, обычно соответствующим центральной оси аномалиеобразующего объекта, а графики, отображающие продолженное поле, окончательно “размазываются”.

Закономерности, установленные при аналитическом продолжении с использованием дискретного уравнения Лапласа на модельных примерах, были положены в основу технологии выделения и оконтуривания аномалиеобразующего объекта. Вместе с определением положения верхней кромки тела, центра тяжести и нижней кромки устанавливалось положение верхних особых точек. Для этого по расчетным значениям поля в нижнем полупространстве, полученным в результате аналитического продолжения по заданным значениям поля, строилась функция, подобная функции Берёзкина. Эта технология реализована в специально разработанном пакете компьютерных программ *GrAnM*<sup>1</sup>, который позволяет решать следующие задачи:

1. Решение прямой задачи для однородной по плотности прямоугольной призмы, имеющей бесконечную протяженность по оси  $Oy$ . Это решение служит в качестве

<sup>1</sup> Название пакета расшифровывается как “графоаналитический метод”.

“измеренных” (заданных) значений аномального гравитационного поля в модельных примерах на уровнях  $z=0$  и  $z=-h$  и для оценки точности расчетных значений поля в нижнем полупространстве, полученных в результате аналитического продолжения.

2. Формирование матрицы и вектора правой части переопределенных СЛАУ, возникающих при использовании дискретного уравнения Лапласа на составном шаблоне.

3. Решение СЛАУ итерационным методом МПУП.

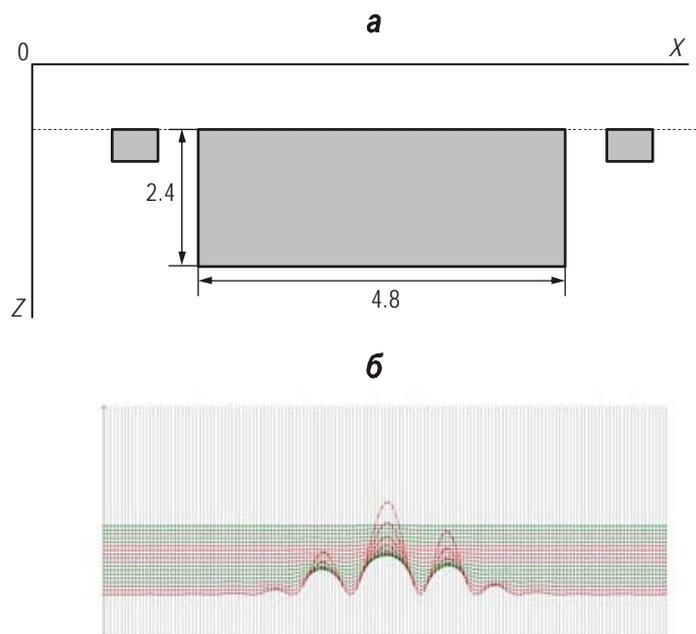
4. Визуализация результатов решения СЛАУ в виде графиков аналитически продолженного поля и графиков функции, подобной функции Берёзкина, которые строятся в нижнем полупространстве на уровнях, отстоящих друг от друга на шаг сетки. Значения аномального гравитационного поля на каждом уровне получаются с помощью программы, разбивающей вектор значений поля, найденный в результате решения СЛАУ, на подвекторы.

При необходимости в пакет *GranM* могут быть включены программные модули, решающие вспомогательные задачи фильтрации осложненных помехой данных, повышающие точность расчетных значений поля, проводящие оценки точности расчетных значений поля в модельных примерах и др.

### **Исследование влияния формы поверхности возмущающих тел на решение обратной задачи**

Вычислительные эксперименты по аналитическому продолжению, о которых шла речь выше, проводились на моделях, в которых в качестве возмущающих тел принимались одиночные однородные по плотности прямоугольные призмы с бесконечной протяженностью по оси  $Oy$  (вертикальные пласты). Решение обратной задачи сводится к определению формы и элементов залегания возмущающих масс. Что касается избыточной плотности, то наряду с элементами залегания тел (в случае их однородности) она определяется по самой гравитационной аномалии. В методе подбора, как уже было сказано, решение обратной задачи требует многократного решения прямой задачи и последующего анализа этого решения. Основу для решения прямой задачи представляют интегральные формулы, выражающие производные гравитационного потенциала как функции распределения возмущающих масс. Известно, что точные решения прямых задач, получаемые в квадратурах соответствующих интегралов, различны даже для тел с близкой формой поверхности. Например, если рассматривать вертикальный и наклонный пласты, отличающиеся друг от друга тем, что сечение первого – прямоугольник, а второго – трапеция, то точное решение для последнего может быть записано только в полярных координатах, в отличие от первого, для которого решение дается в декартовых координатах [Андреев, Клушин, 1965]. Соответственно при решении обратной задачи определение элементов залегания таких возмущающих тел будет различным. Отсюда следует, что весьма важным является исследование влияния формы поверхности возмущающих тел на поведение расчетного аномального гравитационного поля, получаемого в нижнем полупространстве в результате аналитического продолжения, и результаты его использования при решении обратной задачи.

Были выполнены расчеты для модели, включающей три пласта – центральный вертикальный и два боковых (рис. 1, а). Избыточная плотность центрального пласта  $+0.1 \text{ г/см}^3$ ; левого бокового  $-0.3 \text{ г/см}^3$ , правого  $-0.4 \text{ г/см}^3$ . Глубина до верхней кромки пластов – 4 км; толщина центрального – 2.4 км, боковых – 0.6 км; размер центрального пласта по оси  $Ox$  – 4.8 км, боковых – 0.6 км. Результаты расчетов в графической форме приведены на рис. 1, б.

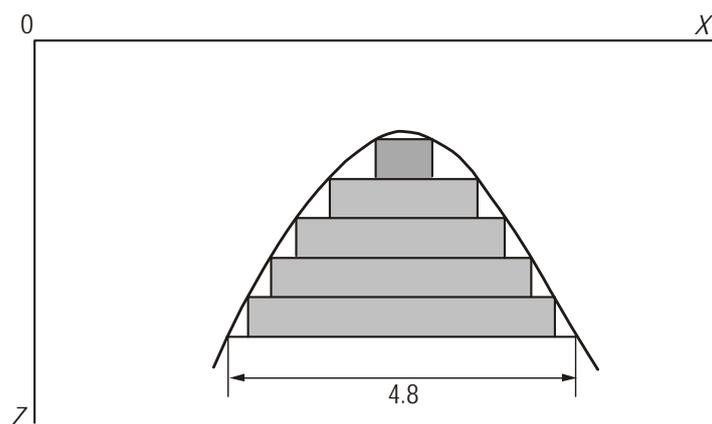


**Рис. 1.** Модель, включающая три пласта с разной избыточной плотностью (а), и рассчитанные для неё графики функции, подобной функции Берёзкина, при аналитическом продолжении в нижнее полупространство до отметки, соответствующей верхней кромке пластов (б)

Анализ результатов показывает, что при аналитическом продолжении до глубин 1 и 2 км мелкие неоднородности (два боковых пласта) никак себя не проявляют, и гравитационное влияние центрального пласта перекрывает гравитационное влияние боковых. Но при дальнейшем продолжении до отметки 4 км, соответствующей верхней кромке объекта, влияние боковых пластов проявляется достаточно четко. Наличие на графике функции, подобной функции Берёзкина, пары вторых максимумов указывает на положение верхних особых точек боковых пластов (пары первых максимумов определяют положение верхних особых точек центрального пласта; основной максимум определяет значение поля по его оси симметрии). При этом правый максимум превышает левый, как это и должно быть для пласта с большей по абсолютной величине отрицательной плотностью. Отсюда следует, что в модельных условиях данного примера установлено влияние мелких неоднородностей (боковых пластов) с однозначным определением положения их верхних особых точек по оси  $0x$ .

По результатам аналитического продолжения ниже верхней кромки было установлено положение центра тяжести и нижней кромки пластов. Таким образом, в условиях рассматриваемого модельного примера обратная задача решается с хорошей точностью (избыточная плотность вычисляется по “измеренным” значениям гравитационного поля на уровне  $z=0$ ).

В следующем примере рассматривается модель с возмущающим объектом в виде антиклинального поднятия, которое может быть аппроксимировано совокупностью из пяти призм одинаковой плотности, имеющих бесконечное простираение по оси  $0y$  (рис. 2). Заданные значения гравитационного поля на уровнях  $z=0$ ,  $z=-h$  для этого объекта находятся как суперпозиция точных решений прямых задач для каждой из пяти призм.



**Рис. 2.** Модель антиклинального поднятия, аппроксимируемого совокупностью из пяти призм одинаковой плотности и толщины (0.8 км). Глубина до верхней кромки – 4 км, до нижней – 8 км; размер основания структуры по оси  $0x$  – 4.8 км

Результаты расчетов для данной модели приведены в правом столбце на рис. 3 в сопоставлении с результатами расчетов для модели, включающей вертикальный пласт с аналогичными плотностными и геометрическими параметрами (левый столбец).

В нижнем полупространстве, начиная с глубины 0.2 км, на профилях длиной 32 км в узлах равномерной сетки с одинаковым шагом по осям  $0x$  и  $0z$  были построены графики аналитически продолженного поля и графики функции Берёзкина для значений гравитационного поля, полученных в результате решения переопределенных СЛАУ следующих порядков:  $\mathbf{A}=6360 \times 3220$ ,  $\mathbf{f}=6360$  (рис. 3, а);  $\mathbf{A}=6996 \times 3542$ ,  $\mathbf{f}=6996$  (рис. 3, б);  $\mathbf{A}=9540 \times 4830$ ,  $\mathbf{f}=9540$  (рис. 3, в);  $\mathbf{A}=12720 \times 6440$ ,  $\mathbf{f}=12720$  (рис. 3, г). ( $\mathbf{A}$  – матрица,  $\mathbf{f}$  – вектор правой части СЛАУ; для удобства чтения на рис. 3 каждые пять кривых попеременно окрашиваются в 2 цвета.)

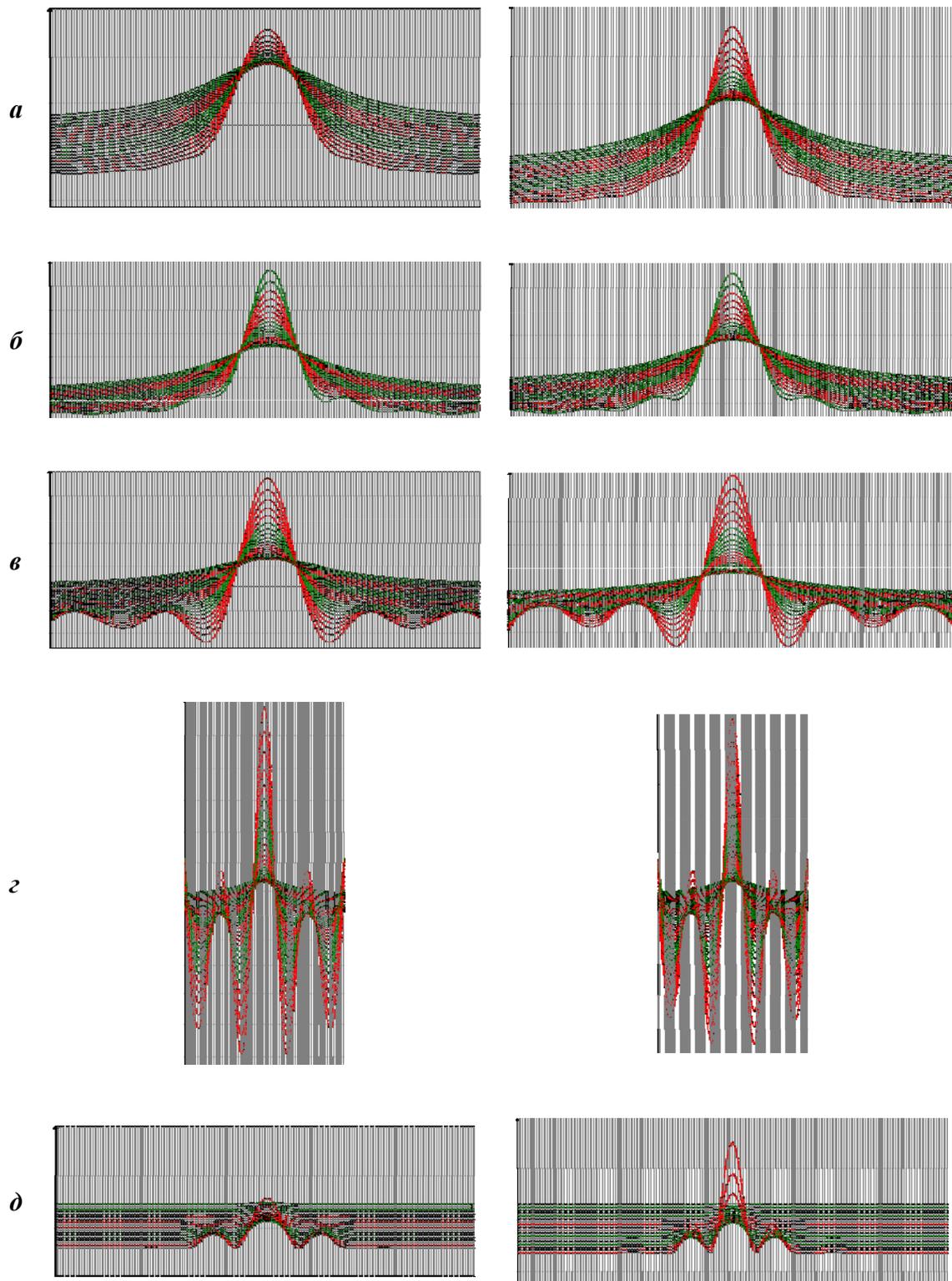
Из результатов, представленных на рис. 3, следует, что закономерности поведения расчетного гравитационного поля, полученного при аналитическом продолжении в нижнее полупространство значений гравитационного поля, заданных на уровнях  $z=0$ ,  $z=-h$ , для вертикального пласта и антиклинального поднятия практически совпадают:

гравитационное поле аналитически продолжается вплоть до верхней кромки обоих тел с высокой точностью (рис. 3, а);

появление вторичных колебаний с небольшой амплитудой по сравнению с центральным максимумом однозначно отмечает в обоих случаях одинаковое положение по вертикали уровней, проходящих через центры тяжести объектов (рис. 3, б, в);

после прохождения отметки центров тяжести для обоих тел картина начинает “размазываться” (т.е. размах осцилляций поля сравнивается по величине со значениями поля по центральной оси тел – рис. 3, г) как для вертикального пласта, так и для антиклинального поднятия.

Основное различие в поведении расчетного гравитационного поля, связанное с влиянием геометрии поверхности тел, проявляется при построении функции Берёзкина. На рис. 3, д видно, что для вертикального пласта (слева) влияние верхних краев пласта выражено четко – амплитуды боковых максимумов всего в 1.5–2 раза меньше амплитуды центрального максимума, в то время как для антиклинального поднятия (справа) влияние верхних особенностей объекта значительно слабее.



**Рис. 3.** Графики аналитически продолженного поля и функции Берёзкина для вертикального пласта (*слева*) и антиклинального поднятия (*справа*), построенные по расчетным значениям гравитационного поля при аналитическом продолжении в нижнее полупространство до разных глубинных отметок:

*a* –  $z=4$  км (20 кривых); *б* –  $z=4.4$  км (22 кривых); *в* –  $z=6$  км (30 кривых); *г* –  $z=8$  км (40 кривых); *д* – функция Берёзкина на отметке  $z=4$  км

### Пример практического применения технологии оконтуривания аномалиеобразующих тел с использованием пакета программ *GrAnM*

Рассмотренная технология оконтуривания аномалиеобразующих тел с использованием пакета программ *GrAnM* была применена при изучении разреза Шершневого нефтяного месторождения. Это разведанное и уже разбуренное месторождение находится в пределах Соликамской депрессии в Волго-Уральской провинции и является одно из самых крупных, открытых в Пермской области в последнее десятилетие.

В качестве исходных значений аномального гравитационного поля на уровне  $z=0$  принимались значения поля, измеренные при проведении гравиметрической съемки, которые затем пересчитывались на уровень  $z=-h$  с использованием интеграла Пуассона.

Метод устойчивого аналитического продолжения поля силы тяжести в нижнее полупространство, на котором основана представленная технология, позволил выделить и оконтурить геологические структуры, локализовав в разрезе основные особенности структурно-тектонического строения разреза. К ним в первую очередь относятся пликативные (складчатые) дислокации терригенно-карбонатной толщи (плотность  $2.49 \text{ г/см}^3$ ). Положительные (выгнутые вверх) складки являются благоприятными для накопления и сохранения углеводородов.

Следует отметить, что в данном случае использование технологии оконтуривания позволило получить лишь усредненные характеристики местоположения аномалиеобразующего тела. Контур возмущающего объекта (тела) интерпретируется в виде прямоугольного сечения; его верхняя кромка определяется на глубине 200 м, центр тяжести – на глубине 500 м; положение нижней кромки находится приблизительно по отметкам верхней кромки и центра тяжести (при постоянной избыточной плотности).

### Литература

- Андреев Б.А., Клушин И.Г. Геологическое истолкование гравитационных аномалий. Л.: Недра, 1965. 495 с.
- Арсанукаев З.З. О некоторых вычислительных экспериментах, проведенных с использованием методов теории дискретных физических полей при решении задач гравиметрии в двухмерном случае. Ч. 1. Аналитическое продолжение в нижнее полупространство выше источников поля // Материалы 30-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”, г. Москва, 27–31 января 2003 г. М.: ОИФЗ РАН, 2003. С.12–13.
- Арсанукаев З.З. О некоторых вычислительных экспериментах, проведенных с использованием методов теории дискретных физических полей при решении задач гравиметрии в двухмерном случае. Ч. 2. Аналитическое продолжение в нижнее полупространство через источники поля // Материалы 30-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”, г. Москва, 27–31 января 2003 г. М.: ОИФЗ РАН, 2003. С.13–15.
- Арсанукаев З.З. Вычисление пространственных элементов аномальных полей с использованием методов теории дискретных гравитационных полей // Физика Земли. 2004. № 11. С.47–69.
- Арсанукаев З.З. Аналитическое продолжение заданных значений гравитационного поля в дискретной постановке через источники в двумерном случае // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2009. № 1. Вып. 13. С.47–57.
- Арсанукаев З.З. О решении задачи пересчета вниз заданных значений гравитационного поля с использованием пакета программ “GrAnM” // Материалы 37-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”, г. Москва, 25–29 января 2010 г. М.: ИФЗ РАН, 2010. С.29–34.

Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. М., 1990. 543 с.

Страхов В. Н., Страхов А. В. Основные методы нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач гравиметрии и магнитометрии. П. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 51 с.

Страхов В.Н., Арсанукаев З.З. Теория дискретного гравитационного поля (двухмерный вариант) и её использование при решении задач гравиметрии // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 28-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского, Екатеринбург, 28 января – 2 февраля 2002 г. В 2-х частях. Ч. II. М.: ОИФЗ РАН, 2002. С.73–77.

*Сведения об авторе*

**АРСАДУКАЕВ Зайнды Зиявдиевич** – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123242, Москва, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: 8(499) 254-23-27.

## **SOME ASPECTS OF THE INVERSE PROBLEM OF GRAVIMETRY SOLVED IN COMPUTER TECHNOLOGY GrAnM**

Z.Z. Arsanukaev

*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**Abstract.** The influence of geometry of perturbing bodies surface on the results of solution of the inverse problem of gravimetry is studied within the framework of approach based on the direct (analytical) continuation of values of an abnormal gravitational field given at the Earth's surface to the bottom semi-space by the solution of systems of the linear algebraic equations (SLAE) of the large orders. Reduction of continuous problem of analytical continuation of field values to discrete problem with compilation and solution of SLAE consists in a number of substitutions: continuous space is replaced by the grid, continuous differential Laplace operator, by second differences, analytical functions describing field values and boundary conditions, by grid functions.

To evaluate the accuracy of field values obtained as a result of analytical continuation problem, the special procedure was developed. It is based on the analysis of the results on model examples. The results of model calculations are demonstrated for vertical layer and anticlinal uplift, the results of problem solution with the use of real data are also shown.

**Keywords** differential Laplace operator, analytical continuation, a package of computer programs GrAnM, systems of linear algebraic equations.