УДК: 519.863; 658.628.011.1; 65.012.122

А. Ф. Шориков, Е. С. Рассадина

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРОЙ ТОВАРНОГО АССОРТИМЕНТА ПРЕДПРИЯТИЯ[1]

В статье рассматривается методический подход к решению многошаговой динамической задачи оптимального комплексного программного управления структурой товарного ассортимента предприятия. Любой многопродуктовый процесс производства продукции зависит от большого количества факторов, поэтому критерий качества в экономико-математической модели динамики процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия является векторным, и, соответственно, оптимизация комплексного управления структурой товарного ассортимента предприятия является многокритериальной оптимизационной задачей. С помощью метода обобщенного критерия (метода скаляризации векторного критерия) сформированная многокритериальная задача заменяется на однокритериальную задачу оптимизации комплексного программного управления структурой товарного ассортимента с функционалом качества, который является сверткой набора (вектора) целевых функций. Преобразованная задача формулируется и решается как задача оптимального терминального программного управления в классе линейных дискретных динамических систем. Предлагаемая в работе методика позволяет разрабатывать управленческие решения, направленные на формирование оптимальной структуры товарного ассортимента предприятия, способствующего оптимизации прибыли, а также сохранению желаемого уровня прибыли предприятия на длительный период времени.

Ключевые слова: экономико-математическое моделирование, товарный ассортимент, многокритериальная оптимизация, дискретная динамическая система, оптимальное программное управление, прогнозное множество

Введение

В современных условиях конкуренции рынок определяет необходимый ему ассортимент продукции, поэтому основной задачей конкретного предприятия является удовлетворение спроса на его продукцию, более качественное и эффективное, чем у конкурентов. Важной характеристикой ассортимента продукции предприятия является его структура, которая отражает количественное соотношение видов продукции и их доли в общем выпуске, выраженном в денежных или натуральных единицах [6, с. 135].

При неоптимальной структуре товарного ассортимента предприятия происходит снижение как потенциального, так и реального уровня его прибыли, потеря конкурентных позиций на перспективных потребительских и товарных рынках и, как следствие этого, наблюдается снижение экономической устойчивости предприятия. Поэтому формирование оптимальной структуры товарного ассортимента предприятия, способствующей оптимизации его прибыли и сохранению желаемого уровня прибыли на длительный период времени, очень актуально для предприятий, стремящихся быть конкурентоспособными.

При оптимизации структуры товарного ассортимента предприятия необходимо учитывать как внутренние возможности предприятия на начальный период планирования производства, так и требования внешней среды — рынков сбыта выпускаемой продукции, а также капитальные вложения при возможном расширении производства. Причем все это следует рассматривать в форме долгосрочной перспективы, разбивая горизонт планирования на отдельные интервалы времени (шаги) для более детальной проработки.

В данной статье формулируется и решается многошаговая динамическая задача оптимизации комплексного управления структурой товарного ассортимента предприятия. Для сложной динамической системы — многопродуктового процесса производства — в силу ее многофакторности, критерий качества процесса управления является векторным, и, соответственно, оптимизация комплексного управления структурой товарного ассортимента предприятия является многокритериальной оптимизационной зада-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 11-02-00531а).

чей. С помощью метода обобщенного критерия (метода скаляризации векторного критерия) ее решение сводится к решению однокритериальной задачи оптимизации комплексного программного управления структурой товарного ассортимента с выбранным функционалом качества, которая, в свою очередь, формулируется и решается как задача оптимального терминального программного управления в классе линейных дискретных динамических систем.

Результаты, представленные в данной статье, основываются на исследованиях [8, 10-13] и могут использоваться в различных производственных динамических системах для разработки оптимальных управленческих решений, направленных на оптимизацию структуры ассортимента выпускаемой продукции. Математические модели таких систем рассматриваются, например, в работах [3-5, 7, 9, 11, 12].

1. Формирование экономико-математической модели динамики процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия

На заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0, T} = \{0, 1, \ldots, T\}$, $(T > 0)$ рассматривается процесс управления структурой товарного ассортимента предприятия, и для его моделирования предлагается использовать динамическую систему, описываемую линейными дискретными рекуррентными уравнениями.

Для формирования экономико-математической модели процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия введем следующие обозначения:

n — общее количество видов готовой продукции предприятия;

m — общее количество типов ресурсов, из которых можно произвести данную продукцию;

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор объемов остатков готовой продукции, хранящейся на складах предприятия в период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$, у которого каждая j-я координата $x_j(t)$ есть значение объема продукции j-го вида $(j \in \overline{1, n})$; здесь и далее для $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}^k$ есть k-мерное евклидово векторное пространство векторов-столбцов, а знаки $\leq$, $\geq$, $=$ и $\neq$ используются для обозначения операций сравнения между его элементами, которые определяются естественным образом — путем соответствующего покоординатного сравнения; $\mathbf{N}$ есть множество всех натуральных чисел.

$y = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — вектор объемов остатков производственных ресурсов, хранящихся на складах предприятия в период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$, у которого каждая i-ая координата $y_i(t)$ есть значение объема ресурса i-го вида $(i \in \overline{1, m})$;

$A(t) = \left\| a_{ij}(t) \right\|_{i \in \overline{1,m};\, j \in \overline{1,n}}$ — матрица норм затрат ресурсов в период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$, ($a_{ij}(t)$ — количество ресурса i-го типа, необходимого для изготовления единичного объема продукции j-го вида $(i \in \overline{1, m}; j \in \overline{1, n})$;

$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор интенсивностей производства готовой продукции в период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$, у которого каждая j-ая координата $u_j(t)$ есть значение объема производства продукции j-го вида $(j \in \overline{1, n})$;

$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — вектор интенсивностей пополнения складских ресурсов в период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$, у которого каждая i-ая координата $v_i(t)$ есть значение объема ресурса i-го вида $(i \in \overline{1, m})$;

$s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор объемов спроса на готовую продукцию, выпускаемую в период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$, у которого каждая j-ая координата $s_j(t)$ есть значение величины спроса на готовую продукцию j-го вида $(j \in \overline{1, n})$ в момент времени t.

Тогда динамика рассматриваемого процесса будет описываться системой линейных дискретных рекуррентных уравнений вида:

$$\begin{cases} x_j(t+1) = x_j(t) + u_j(t) - s_j(t),\ x_j(0) = 0,\ s_j(0) = s_j, \\ y_i(t+1) = y_i(t) + v_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t) u_j(t),\ y_i(0) = b_i, \end{cases}$$

$$(t \in \overline{0, T-1};\ i \in \overline{1, m};\ j \in \overline{1, n}), \qquad (1)$$

где приняты следующие обозначения:

$x(t+1) = (x_1(t+1), x_2(t+1), \ldots, x_n(t+1))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор объемов остатков готовой продукции, образовавшейся на складах предприятия к началу периода времени $(t+1)$;

$y(t+1) = (y_1(t+1), y_2(t+1), \ldots, y_m(t+1))' \in \mathbf{R}^m$ — вектор объемов остатков производственных ресурсов, оставшихся на складах предприятия к началу периода времени $(t + 1)$;

$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)' \in \mathbf{R}^n$ — вектор начального объема спроса на готовую продукцию при реализации процесса управления в начальный момент времени (при $t = 0$), у которого каждая j-я координата s_j есть значение величины спроса на готовую продукцию j-го вида ($j \in \overline{1, n}$) в начальный момент времени.

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbf{R}^m$ — вектор начального объема производственных ресурсов при реализации процесса управления в начальный момент времени (при $t = 0$), у которого каждая i-я координата b_i есть значение производственного ресурса i-го вида ($i \in \overline{1, m}$), расходуемого в начальный момент времени.

Тогда в векторной форме система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + u(t) - s(t), \\ \quad x(0) = 0_n, s(0) = s, \\ y(t+1) = y(t) + v(t) - A(t)u(t), \\ \quad y(0) = b, t \in \overline{0, T-1}, \end{cases} \quad (2)$$

где нулевой вектор $0_n \in \mathbf{R}^n$.

Отметим, что если в начале периода времени t ($t \in \overline{0, T-1}$) на складе имелись запасы готовой продукции в количестве $x(t)$, то к концу этого периода для продажи будет годна только часть, равная $H_n(t)x(t)$, где $H_n(t) = \|h_{ij}(t)\|_{\overline{j \in 1, n}}$ — есть диагональная матрица порядка n, характеризующая «старение» продукции за этот период. Аналогично и для запасов производственных ресурсов, к концу периода t для использования в производстве будет годна только их часть, равная $R_m(t)y(t)$, где $R_m(t) = \|r_{ii}(t)\|_{\overline{i \in 1, m}}$ — диагональная матрица порядка m, характеризующая «старение» производственных ресурсов за этот период.

В этом случае система уравнений (2), описывающая динамику рассматриваемого производственного процесса, будет иметь вид:

$$\begin{cases} x(t+1) = H(t)x(t) + u(t) - s(t), \\ \quad x(0) = 0_n, s(0) = s, \\ y(t+1) = R(t)y(t) + v(t) - A(t)u(t), \\ \quad y(0) = b, \ t \in \overline{0, T-1}. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть финансовые средства на инвестиции в расширение производства в начальный момент периода управления (при $t = 0$) предприятие предполагает формировать на основе банковского кредита в объеме G и собственных финансовых ресурсов G_0, отчисляемых от чистой прибыли и направляемых на расширение производства. Тогда динамика рассматриваемого процесса дополнится еще одним линейным дискретным рекуррентным уравнением вида:

$$k(t+1) = \gamma(t)k(t) + \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} c_j(t)s_j(t)\right) - $$
$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{m} q_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)u_j(t) - \sum_{j=1}^{n} z_j(t)x_j(t)\right) - $$
$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{m} w_i(t)y_i(t)\right) - \beta(t)G,$$
$$k(0) = G + G_0, \quad (4)$$

где для $t \in \overline{0, T-1}$ введены следующие обозначения:

$k(t)$ — количество доступных финансовых средств, образовавшихся к началу периода t;

$k(t+1)$ — количество доступных финансовых средств, образовавшихся к началу периода $t+1$;

$k(0)$ — количество доступных финансовых средств на начальный момент времени $t = 0$;

$\gamma(t)$ — числовой коэффициент ($0 \le \gamma(t) \le 1$), характеризующий «непредвиденные издержки» финансовых ресурсов за период t;

α — коэффициент, учитывающий долю налоговых отчислений от прибыли;

$\beta(t) = r/100 + \beta_o(t)$, здесь r — годовая процентная ставка за пользование кредитом, $\beta_o(t)$ — доля возвращаемого кредита в период t (например, 1 месяц);

$c(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор реальных закупочных цен на реализованную продукцию, произведенную предприятием в период времени ($t \in \overline{0, T-1}$), у которого каждая j-ая координата $c_j(t)$ есть значение цены единицы продукции j-го вида ($j \in \overline{1, n}$);

$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — вектор реальных цен на производственные ресурсы, необходимые предприятию для производства продукции в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$), у которого каждая i-ая координата $q_i(t)$ есть значение цены единицы производственного ресурса i-го вида ($i \in \overline{1, m}$);

$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)) \in \mathbf{R}^n$ — вектор затрат предприятия на хранение на складе остатков готовой продукции в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$), у которого каждая j-ая координата $z_j(t)$ есть значение объема затрат на единицу продукции j-го вида ($j \in \overline{1, n}$);

$w(t) = (w_1(t), w_2(t), \ldots, w_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — вектор затрат предприятия на хранение на складе остатков производственных ресурсов в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$), у которого каждая i-я координата $w_i(t)$ есть значение объема затрат на единицу ресурса i-го вида ($i \in \overline{1, m}$).

Здесь и далее, для $k \in \mathbf{N}$ символом $\langle a,\ b\rangle_k$ будем обозначать скалярное произведение векторов a и b в пространстве $\mathbf{R}^k$ ($k \in \mathbf{N}$); вектор $a_i^{(1)}(t) = (a_{i1}(t), a_{i2}(t), \ldots, a_{in}(t))' \in \mathbf{R}^n$ ($i \in \overline{1, m}$).

Если рассмотреть вектор $l(t) = (\langle a_1^{(1)}(t), u(t)\rangle_n, \langle a_2^{(1)}(t), u(t)\rangle_n, \ldots, \langle a_m^{(1)}(t), u(t)\rangle_n)' \in \mathbf{R}^m$, тогда уравнение для выражения $k(t+1)$ в векторной форме запишется следующим образом:

$$k(t+1) = \gamma(t)k(t) + \alpha\left(\langle c(t), s(t)\rangle_n - \langle q(t), l(t)\rangle_m\right) - \\ -\alpha\left(\langle z(t), x(t)\rangle_n - \langle w(t), y(t)\rangle_m\right) - \beta(t)G, \\ k(0) = G + G_0,\ t \in \overline{0,\ T-1}. \quad (5)$$

Обозначим через $Z(t)$ — общие суммарные издержки предприятия за t периодов времени ($t \in \overline{0,\ T-1}$). Тогда, используя введенные выше обозначения, получим еще одно линейное рекуррентное уравнение:

$$Z(t+1) = Z(t) + \langle q(t), l(t)\rangle_m + \langle z(t), x(t)\rangle_n + \\ + \langle w(t), y(t)\rangle_m + \beta(t)G,\ \ t \in \overline{0, T-1}. \quad (6)$$

На основании (3), (5), и (6) сформируем следующую систему линейных дискретных рекуррентных уравнений, описывающую в полном объеме динамику рассматриваемого процесса:

$$\begin{cases} x(t+1) = H(t)x(t) + u(t) - s(t),\ x(0) = 0_n, s(0) = s, \\ y(t+1) = R(t)y(t) + v(t) - A(t)u(t),\ y(0) = b, \\ k(t+1) = \gamma(t)k(t) + \alpha\left(\langle c(t), s(t)\rangle_n - \langle q(t), l(t)\rangle_n\right) - \\ \qquad -\alpha\left(\langle z(t), x(t)\rangle_n - \langle w(t), y(t)\rangle_m\right) - \beta(t)G, \\ k(0) = G + G_0, \\ Z(t+1) = Z(t) + \langle q(t), l(t)\rangle_m + \langle z(t), x(t)\rangle_n + \\ \qquad + \langle w(t), y(t)\rangle_m + \beta(t)G, \\ Z(0) = \langle z(0), x(0)\rangle_n + \langle w(0), y(0)\rangle_m,\ t \in \overline{0, T-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что эта система позволяет моделировать динамику многошагового процесса управления производством товарного ассортимента предприятия в зависимости от заданных начальных условий и выбора конкретных реализаций управляющих воздействий.

2. Формирование ограничений для процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия

Введенные выше векторы $u(t) = (u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ интенсивностей производства готовой продукции и $v(t) = (v_1(t),\ v_2(t),\ \ldots,\ v_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ интенсивностей пополнения производственных ресурсов в период времени t ($t \in \overline{0,\ T-1}$) есть управляющие воздействия в системе (7), и такие, что каждая пара $(u(t),\ v(t))$ должна удовлетворять следующему заданному ограничению:

$$(u(t),\ v(t)) \in UV(t) = \{(u(t),\ v(t)) : u(t) \in \mathbf{R}^n, \\ v(t) \in \mathbf{R}^m,\ S_{\min}(t) \le u(t) \le S_{\max}(t), \\ \langle q(t),\ v(t)\rangle_m \le k(t),\ \mathrm{A}(t)u(t) \le y(t) + v(t)\}, \quad (8)$$

где $S_{\min}(t) = (S_{\min 1}(t),\ S_{\min 2}(t),\ \ldots,\ S_{\min n}(t)) \in \mathbf{R}^n$ — вектор минимально приемлемого объема производства готовой продукции, у которого каждая j-я координата $S_{\min j}(t)$ есть значение минимально приемлемого объема производства продукции j-го вида ($j \in \overline{1,\ n}$) (например, точка безубыточности для каждого вида продукции); $S_{\max}(t) = (S_{\max 1}(t),\ S_{\max 2}(t),\ \ldots,\ S_{\max n}(t)) \in \mathbf{R}^n$ — вектор верхнего предела выпуска продукции, у которого каждая j-я координата $S_{\max j}(t)$ есть значение максимально приемлемого объема производства продукции j-го вида ($j \in \overline{1,\ n}$) (например, максимальная емкость рынка по каждому наименованию продукции, максимальная мощность производства и др.).

При этом для всех $t \in \overline{0,\ T}$ должны также выполняться следующие заданные фазовые ограничения:

$$\begin{cases} x_j(t) \ge 0,\ \ (j \in \overline{1,n}), \\ y_i(t) \ge 0,\ \ (i \in \overline{1,m}), \\ k(t) \ge 0,\ \ \ Z(t) \ge 0. \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что в процессе управления товарным ассортиментом предприятия учет ограничений (8), (9) является необходимым условием, которому должны удовлетворять покоординатные сечения траекторий, порожденных реализациями оптимальных управляющих воздействий в дискретной динамической системе (7).

3. Формирование критериев качества для оценки реализаций процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия

Для сформированной дискретной динамической системы (7)–(9) ниже рассмотрим ряд показателей, которые могут быть выбраны в качестве критериев качества (целевых функций), оценивающих возможные реализации процесса комплексного управления структурой товарного ассортимента предприятия.

Зафиксируем пару $(u(\cdot),\ v(\cdot))$, $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0,\ T-1}}$, $v(\cdot) = \{v(t)\}_{t \in \overline{0,\ T-1}}$ ($\forall\ t \in \overline{0,\ T-1}$: $(u(t),\ v(t)) \in UV(t)$) допустимых программных управляющих воздействий на промежутке времени $\overline{0, T}$ в рассматриваемой динамической системе (7)–(9).

Пусть $\varphi_{\overline{0,T}}(T) = \varphi_{\overline{0,T}}(T;\ \bar{x}(0),\ \bar{u}(\cdot))$ — есть финальное состояние (состояние в момент времени T) соответствующей фазовой координаты для рассматриваемого процесса оптимизации комплексного программного управления товарным ассортиментом предприятия на промежутке времени $\overline{0, T}$, порожденной системой (7)−(9) и соответствующей набору $(\bar{x}(0), \bar{u}(\cdot))$, где $\bar{x}(0) = (x(0), y(0), k(0), Z(0))$; $\bar{u}(\cdot) = (u(\cdot), v(\cdot))$.

Тогда для всех допустимых реализаций наборов $(\bar{x}(0), \bar{u}(\cdot))$, где $\bar{x}(0) = (x(0), y(0), k(0), Z(0))$; $\bar{u}(\cdot) = (u(\cdot), v(\cdot))$, $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}$, $v(\cdot) = \{v(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}$ $(\forall\ t \in \overline{0, T-1} : (u(t),\ v(t)) \in UV(t))$, качество процесса управления в системе (7)−(9), описывающей динамику процесса оптимизации комплексного программного управления товарным ассортиментом предприятия на промежутке времени, может оцениваться следующими линейными терминальными функционалами (показателями качества процесса):

1. Рентабельность персонала.

Важным критерием эффективности производственной деятельности предприятия является показатель рентабельности персонала, который выражается как отношение массы прибыли к количеству всего персонала предприятия.

Величина значения рентабельности персонала есть объем прибыли предприятия, который приходится на одного его работника и позволяет сравнивать деятельность различных предприятий относительно эффективности работы их работников. Тогда целевая функция $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}_{0,T}(\bar{x}(0),u(\cdot),v(\cdot))$ для задачи оптимизации программного управления структурой товарного ассортимента предприятия, отражающая значение показателя рентабельности персонала за период планирования $\overline{0, T}$, предстанет как отношение полученной за весь период валовой прибыли к величине среднесписочной численности персонала предприятия, и ее значения определяются в соответствии со следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(1)}_{0,T}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)) = \frac{1}{P}\left(G + G_0 + \sum_{t=0}^{T}\left\langle c(t), s(t)\right\rangle_n\right) - \\ -\frac{1}{P}\left(Z_{\overline{0,T}}(T;\ \bar{x}(0),\ \bar{u}(\cdot))\right) = \boldsymbol{F}^{(1)}_{0,T}(Z_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))), \tag{10}$$

где P — число, которое равно величине среднесписочной численности персонала за рассматриваемый период планирования.

2. Величина остатков готовой продукции и производственных ресурсов на складах предприятия.

Если, как и ранее, $c(t) = (c_1(T), c_2(T), \ldots, c_n(T))' \in \mathbf{R}^n$ — есть вектор реальных закупочных цен на реализованную продукцию, произведенную предприятием в период времени T, то для вектора $x(t) = (x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T))' \in \mathbf{R}^n$ — объемов остатков готовой продукции (нереализованной продукции), хранящейся на складах предприятия в этот же период времени T, выражение $\langle c(T), x(T)\rangle_n$ — есть стоимость нереализованной готовой продукции предприятия в финальный момент времени T.

Аналогичным образом, если $q(t) = (q_1(T), q_2(T), \ldots, q_m(T))' \in \mathbf{R}^m$ — есть вектор реальных цен на производственные ресурсы, необходимые предприятию для производства продукции в период времени T, то для вектора $y(t) = (y_1(T), y_2(T), \ldots, y_m(T))' \in \mathbf{R}^m$ — объемов остатков производственных ресурсов (неиспользованных ресурсов), хранящихся на складах предприятия в этот же период времени T, выражение $\langle q(T), y(T)\rangle_m$ — есть стоимость неиспользованных производственных ресурсов предприятия в финальный момент времени T.

Тогда целевая функция $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}_{0,T}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))$ для задачи оптимизации управления товарным ассортиментом, отражающая общую стоимость остатков готовой продукции и производственных ресурсов на складах предприятия на финальный момент времени T, на основании (7) определяется в соответствии со следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(2)}_{0,T}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)) = -\left(\left\langle c(T), x(T)\right\rangle_n + \left\langle q(T), y(T)\right\rangle_m\right) = \\ = -\left\langle c(T), x_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))\right\rangle_n - \\ -\left\langle q(T), y_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))\right\rangle_m = \\ = \boldsymbol{F}^{(2)}_{0,T}(x_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)), y_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))). \tag{11}$$

На основании введенных соотношениями (10), (11) целевых функций $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}_{0,T}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))$ и $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}_{0,T}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))$ для оценки качества рассматриваемого процесса оптимизации комплексного программного управления товарным ассортиментом введем в рассмотрение целевую функцию $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,T}}(x(0), u(\cdot))$, значения которой для всех допустимых реализаций наборов $(\bar{x}(0), \bar{u}(\cdot))$, где $\bar{x}(0) = (x(0), y(0), k(0), Z(0))$; $u(\cdot) = (u(\cdot), v(\cdot))$, $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}$, $v(\cdot) = \{v(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}$ $(\forall t \in \overline{0, T-1} : (u(t),\ v(t)) \in UV(t))$ на промежутке времени $\overline{0, T}$

определяются в соответствии со следующим соотношением:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,T}}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))=\mu_1\boldsymbol{\Phi}^{(1)}_{\overline{0,T}}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))+\\&+\mu_2\boldsymbol{\Phi}^{(2)}_{\overline{0,T}}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))=\mu_1\boldsymbol{F}^{(1)}_{\overline{0,T}}(Z_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)))+\\&+\mu_2\boldsymbol{F}^{(2)}_{\overline{0,T}}(x_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)),y_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)))=\\&=\boldsymbol{F}(Z_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)),\\&\qquad x_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)),y_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))),\\&\qquad \mu_i\ge 0,\ \forall i\in\overline{1,2},\ \sum_{i=1}^{2}\mu_i=1.\end{aligned}\tag{12}$$

Отметим, что целевая функция $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,T}}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))$ является скалярной сверткой набора (вектора) линейных целевых функций $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}_{\overline{0,T}}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))$ и $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}_{\overline{0,T}}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))$, т. е. формируется в соответствии с методом скаляризации векторных целевых функций (см., например, [7]), с весовыми коэффициентами μ_i, $i\in\overline{1,2}$, которые могут определяться, например, экспертным путем или на основании знания статистической информации об истории реализации основных параметров рассматриваемого процесса.

Тогда содержательно задача оптимизации комплексного программного управления товарным ассортиментом предприятия может быть сформулирована следующим образом.

Для рассматриваемого на заданном промежутке времени $\overline{0,T}$ процесса оптимизации программного управления товарным ассортиментом, описываемого экономико-математической моделью (6)–(12), заданного начального фазового вектора $\bar{x}(0)=(x(0),y(0),k(0),Z(0))$, требуется найти такую пару допустимых программных управлений $(u^{(e)}(\cdot),v^{(e)}(\cdot))=u^{(e)}(\cdot)$, $u^{(e)}(\cdot)=\{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}$, $v^{(e)}(\cdot)=\{v^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}$ $(\forall t\in\overline{0,T-1}:(u^{(e)}(t),v^{(e)}(t))\in UV(t))$ на промежутке времени $\overline{0,T}$, что значение линейной терминальной целевой функции $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,T}}(x(0),u(\cdot))$, определяемой соотношением (12), является максимальным по сравнению со всеми другими допустимыми для нее значениями, соответствующими другим парам допустимых программных управлений.

Заметим, что параметры: $A(t)$, $H(t)$, $R(t)$, $s(t)$, s, $c(t)$, $q(t)$, $z(t)$, $w(t)$, α, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, b, G, G_0, $S_{\min}(t)$, $S_{\max}(t)$ и μ_i, $i\in\overline{1,3}$, в системе (6)–(12), для всех $t\in\overline{0,T-1}$ должны быть известны заранее (например, формироваться исходя из имеющихся статистических данных о рассматриваемом процессе, технических и экономических прогнозов и др. источников путем применения методов оценивания данных и идентификации параметров рассматриваемой системы).

Отметим, что следующие разделы данной работы посвящены математической формализации и решению задачи оптимального терминального программного управления в линейной дискретной динамической системе, которая является обобщением рассмотренной выше экономико-математической модели динамики процесса управления товарным ассортиментом предприятия.

4. Постановка задачи оптимизации комплексного программного управления структурой товарного ассортимента предприятия

Нетрудно показать, что сформированная выше экономико-математическая модель (7)–(12) динамики процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия относится к классу задач оптимального терминального программного управления в линейных дискретных динамических системах.

Действительно, пусть на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}=\{0,1,\dots,T\}$ $(T>0)$ рассматривается многошаговая динамическая система, которая состоит из одного управляемого объекта — объекта I (управляемого игроком P), движение которого описывается линейным дискретным рекуррентным векторным уравнением

$$\bar{x}(t+1)=\bar{A}(t)\bar{x}(t)+\bar{B}(t)\bar{u}(t),\ \bar{x}(0)=\bar{x}_0.\tag{13}$$

Здесь $t\in\overline{0,T-1}$; $\bar{x}\in\mathbf{R}^{\bar{n}}$ — фазовый вектор объекта I, который для модели динамики процесса управления товарным ассортиментом предприятия (7)–(13) состоит из $\bar{n}=n+m+2$ координат, т. е. $\bar{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t),y_1(t),y_2(t),\dots,y_m(t),k(t),Z(t))\in\mathbf{R}^{\bar{n}}$; $\bar{u}(t)\in\mathbf{R}^{\bar{p}}$ — управляющее воздействие (управление) игрока P, стесненное заданным ограничением

$$\bar{u}(t)\in U_1(t)=UV(t)\subset\mathbf{R}^{\bar{p}}\ (\bar{p}\in\mathbf{N}:\bar{p}\le\bar{n})\tag{14}$$

и такое, что в модели (7)–(13) состоит из $\bar{p}=n+m$ координат таких, что первые n координат есть координаты вектора $u(t)=(u_1(t),u_2(t),\dots,u_n(t))'\in\mathbf{R}^n$ — интенсивностей производства готовой продукции, следующие m координат — координаты вектора $v(t)=(v_1(t),v_2(t),\dots,v_m(t))'\in\mathbf{R}^m$ — интенсивностей пополнения производственных ресурсов в период времени t $(t\in\overline{0,T-1})$, т. е. $\bar{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\dots,u_n(t),v_1(t),v_2(t),\dots,v_m(t))\in\mathbf{R}^{\bar{p}}$.

Предполагается также, что для всех $t\in\overline{0,T-1}$, каждая допустимая реализация фазо-

$$\overline{A}(t)=\begin{pmatrix} h_{11}(t) & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22}(t) & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & h_{nn}(t) & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & r_{11}(t) & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & r_{22}(t) & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & r_{mm}(t) & 0 & 0 \\ -\alpha z_1(t) & -\alpha z_2(t) & ... & -\alpha z_n(t) & -\alpha w_1(t) & -\alpha w_2(t) & ... & -\alpha w_m(t) & \gamma(t) & 0 \\ z_1(t) & z_2(t) & ... & z_n(t) & w_1(t) & w_2(t) & ... & w_m(t) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Рис. 1. *Матрица A(t)*

вого вектора $\overline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t), y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t), k(t), Z(t)) \in \mathbf{R}^{\overline{n}}$, на основании (9), удовлетворяет следующему фазовому ограничению

$$\overline{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t), y_1(t),y_2(t),...,y_m(t),k(t),Z(t))\in$$
$$\in X_1(t)=\begin{cases} x_j(t)\geq 0,\ x_j(0)=0,\ j\in\overline{1,n}; \\ y_i(t)\geq 0,\ y_i(0)=b_i,\ i\in\overline{1,m}; \\ k(t)\geq 0,\ k(0)=G+G_0\geq 0; \\ Z(t)\geq 0,\ Z(0)\geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Матрица $\overline{A}(t)$ в векторном уравнении (14) для экономико-математической модели динамики процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия (7)–(13) имеет вид, представленный на рисунке 1, а матрица $\overline{B}(t)$ имеет вид, представленный на рисунке 2, где $\overline{A}(t)$ и $\overline{B}(t)$ есть действительные матрицы порядков $(\overline{n} \times \overline{n})$ и $(\overline{n} \times \overline{p})$ соответственно, и такие, что для всех $t \in \overline{0, T-1}$ матрица $\overline{A}(t)$ является невырожденной, т. е. для нее существует соответствующая ей обратная матрица $\overline{A}^{-1}(t)$, а ранг матрицы $\overline{B}(t)$ равен $\overline{p}$ (размерности вектора $\overline{u}(t)$).

Отметим, что для всех $t \in \overline{0, T-1}$ множество $U_1(t)$ в соответствии с (8) — не пусто и является выпуклым замкнутым и ограниченным многогранником (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^{\overline{p}}$.

$$\overline{B}(t)=\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & ... & -a_{2n} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_{m1} & -a_{m2} & ... & -a_{mn} & 0 & 0 & ... & 1 \\ \alpha\sum_{i=1}^{m} q_i\cdot a_{i1} & \alpha\sum_{i=1}^{m} q_i\cdot a_{i2} & ... & \alpha\sum_{i=1}^{m} q_i\cdot a_{in} & 0 & 0 & ... & 0 \\ \sum_{i=1}^{m} q_i a_{i1} & \sum_{i=1}^{m} q_i a_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{m} q_i a_{in} & 0 & 0 & ... & 0 \end{array}\right) \\ \qquad\qquad n \qquad\qquad\qquad\qquad m \end{array} \begin{array}{l} \left.\right\} n \\ \left.\right\} m \\ \left.\right\} 2 \end{array}$$

Рис. 2. *Матрица B(t)*

Пусть

$$\boldsymbol{U}(\overline{0, T}) = \{\overline{u}(\cdot) : \overline{u}(\cdot) = \{\overline{u}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}, \forall\, t \in \overline{0, T-1}, \overline{u}(t) \in U_1(t)\} \quad (16)$$

есть множество всех допустимых реализаций программных управлений (всех возможных сценариев реализации управления) на целочисленном промежутке времени $\overline{0, T}$.

Тогда для фиксированной и допустимой реализации программного управления $\overline{u}(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{0, T})$ пусть $x_{\overline{0,T}}(T; \overline{x}_0, \overline{u}(\cdot))$ — есть финальное состояние (состояние в момент времени T) траектории рассматриваемого процесса оптимизации комплексного программного управления товарным ассортиментом предприятия на промежутке времени $\overline{0, T}$, порожденной системой (13)–(15) и соответствующей набору $(\overline{x}_0, \overline{u}(\cdot))$.

Предположим, что для всех допустимых реализаций наборов $(\overline{x}(0), \overline{u}(\cdot))$, $\overline{x}(0) = \overline{x}_0$, $\overline{u}(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{0, T})$, качество процесса управления в системе (13)–(15), описывающей динамику процесса оптимизации комплексного программного управления товарным ассортиментом предприятия на промежутке времени оценивается, в соответствии с (10, 11), линейным терминальным функционалом (показателем качества процесса) $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,T}}(\overline{x}(0), \overline{u}(\cdot))$, определенным соотношением (12).

Тогда можно сформулировать следующую задачу оптимизации комплексного программного управления структурой товарного ассортимента предприятия.

Задача 1. Требуется найти множество $\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{0, T})$ оптимальных программных управлений $\overline{u}^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{0, T})$ игрока P, удовлетворяющих следующему условию оптимальности:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{0,T})=\{\bar{u}^{(e)}(\cdot):\bar{u}^{(e)}(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T}),\\
&\boldsymbol{\Phi}^{(e)}=\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,T}}(\bar{x}(0),\bar{u}^{(e)}(\cdot))=\\
&=\max_{\bar{u}(\cdot)\in U(\overline{0,T})}\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,T}}(\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot))=\\
&=\max_{\bar{u}(\cdot)\in U(\overline{0,T})}\boldsymbol{F}(Z_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)),\\
&\quad x_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)),y_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}(\cdot)))=\\
&=\boldsymbol{F}(Z_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}^{(e)}(\cdot)),\\
&\quad x_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}^{(e)}(\cdot)),y_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}(0),\bar{u}^{(e)}(\cdot)))=\\
&=\boldsymbol{F}^{(e)}\}. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Число $\boldsymbol{\Phi}^{(e)}=\boldsymbol{F}^{(e)}$ будем называть оптимальным значением результата реализации процесса программного управления игрока P на промежутке времени $\overline{0,\ T}$ для дискретной динамической системы (13)−(15), (17) относительно начального фазового состояния $\bar{x}(0)=\bar{x}_0$ объекта I и функционала качества $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,\ T}}$.

Задача 1 является задачей оптимального терминального программного управления в классе линейных дискретных динамических систем [10].

Отметим, что, учитывая свойства системы (13)–(15), условие (17) и результаты работ [10], [11], можно показать, что решение данной задачи существует и сводится к реализации решения конечной последовательности задач линейного математического программирования.

5. Общая схема решения задачи 1

Для любых фиксированных промежутков времени $\overline{\tau,\vartheta}\subseteq\overline{0,\ T}$, любого фиксированного множества $X(\tau)\subset\mathbf{R}^{\bar{n}}$ ($X(0)=\{\bar{x}(0)\}=\{\bar{x}_0\}$), которое есть непустой, выпуклый замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^{\bar{n}}$ (одноточечное множество $\{x_0\}$ считается таковым — по определению), на основании (13)−(15) введем следующее множество:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}^{(+)}(\tau,X(\tau),\vartheta)=\{\bar{x}(\vartheta):\bar{x}(\vartheta)\in\mathbf{R}^{\bar{n}},\\
&\forall\ t\in\overline{\tau,\vartheta-1}:x(t+1)=\bar{A}(t)\bar{x}(t)+\bar{B}(t)\bar{u}(t)\in\\
&\in X_1(t+1),\bar{x}(\tau)\in X(\tau),\bar{u}(t)\in U_1(t)\}, \qquad (18)
\end{aligned}$$

которое будем называть прямой областью достижимости [11] или прямым прогнозным множеством для дискретной динамической системы (13)−(15) на момент времени ϑ, соответствующей множеству $X(\tau)$.

Аналогичным образом, для любых фиксированных промежутка времени $\overline{\tau,\ \vartheta}\subseteq\overline{0,\ T}$, любого фиксированного множества $X(\vartheta)\subset\mathbf{R}^{\bar{n}}$, которое есть непустой, выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^{\bar{n}}$, на основании (13)−(15) введем следующее множество:

$$\begin{aligned}
&X^{(-)}(\vartheta,X(\vartheta),\tau)=\{\bar{x}(\tau):\bar{x}(\tau)\in\mathbf{R}^{\bar{n}},\\
&\forall\ t\in\{\vartheta,\vartheta-1,\ldots,\tau+2,\tau+1\}:\bar{x}(t-1)=\\
&=\bar{A}^{-1}(t-1)[\bar{x}(t)-\bar{B}(t-1)\bar{u}(t-1)],\\
&\bar{x}(\vartheta)\in X(\vartheta),\bar{u}(t-1)\in U_1(t-1)\}, \qquad (19)
\end{aligned}$$

которое будем называть обратной областью достижимости [11] или обратным прогнозным множеством для дискретной динамической системы (13)−(15) на момент времени τ, соответствующей множеству $X(\vartheta)$.

Учитывая линейность системы (13) и введенные условия на множества $U_1(t)$, $\forall\ t\in\overline{0,\ T-1}$ и $X_1(t)$, $\forall\ t\in\overline{0,\ T}$ (выпуклые, замкнутые и ограниченные многогранники в пространствах $\mathbf{R}^{\bar{p}}$ и $\mathbf{R}^{\bar{n}}$, соответственно), аналогично [11] можно показать, что справедливы следующие свойства для введенного прямого прогнозного множества:

1) множество $\boldsymbol{X}^{(+)}(\tau,X(\tau),t)=\boldsymbol{X}^{(+)}(t)$ для всех $t\in\overline{\tau+1,\vartheta}$ есть непустой, выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^{\bar{n}}$ (см., например, [8, 11]);

2) для всех $t\in\overline{\tau,\vartheta-1}$ и $\boldsymbol{X}^{(+)}(\tau)=X(\tau)$ справедливо рекуррентное соотношение:

$$\boldsymbol{X}^{(+)}(\tau,X(\tau),t+1)=\boldsymbol{X}^{(+)}(t,\boldsymbol{X}^{(+)}(t),t+1). \qquad (20)$$

Тогда из соотношения (20) следует, что многошаговая задача построения прогнозного множества $\boldsymbol{X}^{(+)}(\tau,X(\tau),\vartheta)$ сводится к решению конечной рекуррентной последовательности только одношаговых задач построения соответственно следующих прогнозных множеств:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}^{(+)}(t+1)=\boldsymbol{X}^{(+)}(t,\boldsymbol{X}^{(+)}(t),t+1),\\
&t\in\overline{\tau,\vartheta-1},\boldsymbol{X}^{(+)}(\tau)=X(\tau); \qquad (21)
\end{aligned}$$

3) множество $\boldsymbol{X}^{(-)}(\vartheta,X(\vartheta),t)=\boldsymbol{X}^{(-)}(t)$ для всех $t\in\{\vartheta-1,\ldots,\tau+1,\tau\}$ есть непустой, выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^{\bar{n}}$ (см., например, [8, 11]);

4) для всех $t\in\{\vartheta,\ldots,\tau+2,\tau+1\}$ и $\boldsymbol{X}^{(-)}(\vartheta)=X(\vartheta)$ справедливо рекуррентное соотношение:

$$\boldsymbol{X}^{(-)}(\vartheta,X(\vartheta),t-1)=\boldsymbol{X}^{(-)}(t,\boldsymbol{X}^{(-)}(t),t-1). \qquad (22)$$

Тогда из соотношения (22) следует, что многошаговая задача построения прогнозного множества $\boldsymbol{X}^{(-)}(\vartheta,X(\vartheta),\tau)$ сводится к решению конечной рекуррентной последовательности только одношаговых задач построения соответственно следующих прогнозных множеств:

$$\boldsymbol{X}^{(-)}(t-1) = \boldsymbol{X}^{(-)}(t, \boldsymbol{X}^{(-)}(t), t-1),$$
$$t \in \{\vartheta, \vartheta-1, \ldots, \tau+2, \tau+1\}, \boldsymbol{X}^{(-)}(\vartheta) = X(\vartheta). \quad (23)$$

На основании свойств (20)−(23) общая схема решения задачи 1 для динамической системы (13)−(15) может быть описана в виде реализации следующей последовательности действий.

1. Для фиксированного начального состояния $\{\bar{x}_0\} = X(0) = X_0$, в силу отмеченных выше свойств, прогнозное множество $\boldsymbol{X}^{(+)}(0, \bar{x}_0, T)$ рассматриваемой динамической системы (13)−(15) на финальный момент времени T есть выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) пространства $\mathbf{R}^{\bar{n}}$, которое строится на основании рекуррентных формул (20), (21) путем реализации построения T одношаговых областей достижимости, а именно:

$$\boldsymbol{X}^{(+)}(0, X(0), t+1) = \boldsymbol{X}^{(+)}(t, \boldsymbol{X}^{(+)}(t), t+1), \quad \forall t \in \overline{0, T-1}, \quad (24)$$

где в соответствии с (20), (21): $X(0) = \{x_0\}$; $\boldsymbol{X}^{(+)}(t) = \boldsymbol{X}^{(+)}(0, X(0), t)$.

Отметим, что в соответствии с результатами из работы [11], решение данной задачи сводится к реализации решения конечного числа задач линейного математического программирования.

2. Для построенного финального (терминального) прогнозного множества $\boldsymbol{X}^{(+)}$ 0, $X(0)$, T), являющегося выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником (с конечным числом вершин) пространства $\mathbf{R}^{\bar{n}}$, из решения задачи линейного математического программирования с линейным терминальным функционалом $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,T}}$ и линейными ограничениями, описывающими прогнозное множество $\boldsymbol{X}^{(+)}(0, X(0), T)$ (см., например, [11]), в соответствии с условием (17), находится множество $\boldsymbol{X}^{(e)}(T) \subseteq \boldsymbol{X}^{(+)}(0, X(0), T)$ финальных фазовых состояний объекта I и значение функционала качества $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(e)}$, удовлетворяющие следующему условию оптимальности:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}^{(e)}(T) = \{\bar{x}^{(e)}(T) : \bar{x}^{(e)}(T) = \\
&= (x^{(e)}(T), y^{(e)}(T), k^{(e)}(T), Z^{(e)}(T)) \in \\
&\in \boldsymbol{X}^{(+)}(0, X(0), T), \\
&\max_{\bar{u}(\cdot) \in U(\overline{0,T})} \boldsymbol{F}(Z_{\overline{0,T}}(T; \bar{x}(0), \bar{u}(\cdot)), \\
&x_{\overline{0,T}}(T; \bar{x}(0), \bar{u}(\cdot)), y_{\overline{0,T}}(T; \bar{x}(0), \bar{u}(\cdot))) = \\
&= \max_{(Z(T), x(T), y(T)) \in \{X^{(+)}(0, X(0), T)\}_{(OZxy)}} \boldsymbol{F}(Z(T), x(T), \\
&y(T)) = \boldsymbol{F}(Z^{(e)}(T), x^{(e)}(T), y^{(e)}(T)) = \tilde{\boldsymbol{F}}^{(e)}\}, \quad (25)
\end{aligned}$$

где множество $\{\boldsymbol{X}^{(+)}(0, X(0), T)\}_{(OZ, x, y)}$ — есть проекция множества $\boldsymbol{X}^{(+)}(0, X(0), T)$ на трехмерное пространство с прямоугольной системой координат $OZxy$, являющееся подпространством пространства $\mathbf{R}^{\bar{n}}$.

Для решения этой задачи можно использовать, например, модифицированный симплекс-метод (см., например, [1]).

3. На основании (21)–(23), (25) строятся следующие множества

$$\boldsymbol{X}^{(e)}(t) = \boldsymbol{X}^{(+)}(0, X(0), t) \cap X^{(-)}(t+1, \boldsymbol{X}^{(e)}(t+1), t),$$
$$t \in \{T-1, T-1, \ldots, 2, 1\}, \boldsymbol{X}^{(e)}(0) = X(0) = \{\bar{x}_0\}. \quad (26)$$

Отметим, что решение данной задачи сводится к реализации решений конечного числа задач линейного математического программирования (см., например, [11]).

4. На основании построенных множеств $\boldsymbol{X}^{(e)}(t)$, $t \in \overline{0, T}$ сформируем следующее множество программных управлений игрока P на заданном промежутке времени $\overline{0, T}$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(\overline{0, T}) = \{\tilde{u}^{(e)}(\cdot) : \tilde{u}^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{0, T}), \\
&\forall\, t \in \overline{0, T-1} : \bar{x}^{(e)}(t+1) = \bar{A}(t)\bar{x}^{(e)}(t) + \bar{B}(t)\tilde{u}^{(e)}(t) \in \\
&\in \boldsymbol{X}^{(e)}(t+1), x^{(e)}(0) = \bar{x}_0\}. \quad (27)
\end{aligned}$$

5. На основании сделанных построений (21)–(27) и результатов работ [8], [10], [11] можно доказать, что справедливы следующие равенства:

$$\boldsymbol{U}^{(e)}(0, T) = \tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(0, T), \quad (28)$$
$$\boldsymbol{\Phi}^{(e)} = \boldsymbol{F}^{(e)} = \tilde{\boldsymbol{F}}^{(e)}. \quad (29)$$

Выполнение равенств (28) и (29) означает, что в результате реализации предлагаемой общей схемы — найдено полное решение рассматриваемой задачи 1, т. е. построено множество $\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{0, T}) = \tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(\overline{0, T})$ всех оптимальных программных управлений игрока P и вычислено число $\boldsymbol{\Phi}^{(e)} = \boldsymbol{F}^{(e)} = \tilde{\boldsymbol{F}}^{(e)}$ — оптимальное значение результата реализации процесса программного управления игрока P на промежутке времени $\overline{0, T}$ для дискретной динамической системы (13)−(15), (17) относительно начального фазового состояния $\bar{x}_0$ объекта I и функционала качества $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{0,T}}$.

При этом можно утверждать, что решение рассматриваемой задачи 1 свелось к реализации решения конечной последовательности задач линейного математического программирования.

В заключение отметим, что предлагаемая общая схема позволяет разрабатывать эффективные численные методы, позволяющие реализовать компьютерное моделирование решения сформулированной задачи 1. При этом размерность рассматриваемой дискретной динамической системы вида (13)–(15) и число шагов процесса управления для предлагаемой общей схемы решения задачи 1 ограничиваются только ресурсами памяти и быстродействия компьютера, используемого для реализации моделирования решения этой задачи.

Список источников

1. *Базара М.*, *Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1982.

2. *Борисов А. Б.* Большой экономический словарь. — М.: Книжный мир, 2003. — 895 с.

3. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. — М.: Наука, 1984.

4. *Первозванский А. А.* Математические модели в управлении производством. — М.: Наука, 1975.

5. *Пропой А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973.

6. *Савицкая Г. В.* Анализ хозяйственной деятельности предприятия: учебник. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Инфра-М, 2009. — 536 с.

7. *Тер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. — М.: Наука, 1977.

8. *Тюлюкин В. А.*, *Шориков А. Ф.* Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 4. — С. 115-127.

9. *Фидаров В. В.*, *Герасимов Б. И.*, *Романов А. П.* Формирование товарно-ассортиментной политики организации в условиях неопределенности: Монография. — Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004.

10. *Шориков А. Ф.* Алгоритм решения задачи оптимального терминального управления в линейных дискретных динамических системах // Информационные технологии в экономике. Теория, модели и методы : сб. научн. тр. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2005. — С. 119-138.

11. *Шориков А. Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.

12. *Шориков А. Ф.*, *Виноградова Е. Ю.* Динамическая оптимизация комплексного управления технологическими процессами на предприятии // Известия Уральского гос. экон. ун-та. — 2007. — №1(18). — С. 254-266.

13. *Шориков А. Ф.*, *Рассадина Е. С.* Многокритериальная оптимизация формирования ассортимента продукции предприятия // Региональная экономика, Научный информационно-аналитический экономический журнал. — 2010. — №2(22). — С. 189-196.

Информация об авторах

Шориков Андрей Федорович (Екатеринбург, Россия) — доктор физико-математических наук, процессор кафедры теории управления и инноваций, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина (620014, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 13 б, e-mail: afshorikov@mail.ru).

Рассадина Елена Сергеевна (Магнитогорск, Россия) — старший преподаватель кафедры математических методов в экономике, ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет» (455038, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 114, e-mail: lena_mgn@mail.ru).

A. F. Shorikov, E. S. Rassadina

Dynamic optimization of complex program controlling the structure of an enterprise's product range

This paper reviews a methodical approach to solving multi-step dynamic problem of optimal integrated program management of a product portfolio structure of the enterprise. Any multiproduct manufacturing process depends on many factors, that is why the quality criteria in the economic and mathematical model of the dynamics of the product portfolio structure management of a company is a vector one, and therefore, optimization of the integrated product portfolio structure management of a company is multi-criteria optimization problem. With the help of the method of generalized criterion (method of vector criterion scalarization), a formed multicriteria problem is replaced by a one-criterion optimization problem of complex management program of product portfolio structure with a functional of quality, which is a convolution of a set (vector) of the objective functions. The transformed problem is formulated and solved as a problem of optimal terminal program control in a class of linear discrete dynamical systems. The method proposed in this paper allows developing management solutions designed to create the optimal structure of an enterprise's product lines, contributing to optimization of profits as well as maintenance of the desired level of profit for a long period of time.

Keywords: economic and mathematical modeling, product range, multicriteria optimization, discrete dynamical system, optimal program control, predictive set, pro forma

References

1. *Bazara M.*, *Shetti K.* (1982). Nelineinoe programmirovanie. Teoriya i algoritmy [Non-linear programming. Theory and algorithms]. Moscow, Mir.

2. *Borisov A. B.* (2003). Bol'shoi ekonomicheskii slovar' [Big economic dictionary]. Moscow, Knizhnyi mir.

3. *Lotov A. V.* (1984). Vvedenie v ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie [An introduction to economic-mathematical modeling]. Moscow, Nauka.

4. *Pervozvanskii A. A.* (1975). Matematicheskie modeli v upravlenii proizvodstvom [Mathematical models in industrial management]. Moscow, Nauka.

5. *Propoi A. I.* (1973). Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov [Elements of optimal discrete processes theory]. Moscow, Nauka.

6. *Savitskaya G. V.* (2009). Analiz khozyaistvennoi deyatel'nosti predpriyatiya: uchebnik. 5-e izd., pererab. i dop. [Analysis of economic activity of an enterprise: a textbook. 5th edition, reworked and extended]. Moscow, Infra-M.

7. *Ter-Krikorov A. M.* (1977). Optimal'noe upravlenie i matematicheskaya ekonomika [Optimal management and mathematical ecomonics]. Moscow, Nauka.

8. *Tyulyukin V. A.*, *Shorikov A. F.* (1993). Algoritm resheniya zadachi terminal'nogo upravleniya dlya lineinoi diskretnoi sistemy [Algorithm for solving a terminal management problem for a linear discrete system]. Avtomatika i telemekhanika [Automatics and Telemechanics], 4, 115-127.

9. *Fidarov V. V.*, *Gerasimov B. I.*, *Romanov A. P.* (2004). Formirovanie tovarno-assortimentnoi politiki organizatsii v usloviyakh neopredelennosti: Monografiya [Formation of an enterprises's commodity assortment policy in terms of uncertainty: a monograph]. Tambov, Tambov State Technical University Publishing House.

10. *Shorikov A. F.* (2005). Algoritm resheniya zadachi optimal'nogo terminal'nogo upravleniya v lineinykh diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [Algorithm for solving the problem of optimal terminal control in linear discrete dynamical systems]. Informatsionnye tekhnologii v ekonomike. Teoriya, modeli i metody : sb. nauchn. tr. [Information technology in economics. Theory, models and methods: collected scientific works]. Yekaterinburg, Ural State University of Economics Publ., 119-138.

11. *Shorikov A. F.* (1997). Minimaksnoe otsenivanie i upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [Minimax estimation and control in discrete dynamical systems]. Yekaterinburg, Ural State University Publ.

12. *Shorikov A. F.*, *Vinogradova E. Yu.* (2007). Dinamicheskaya optimizatsiya kompleksnogo upravleniya tekhnologicheskimi protsessami na predpriyatii [Dynamic optimization of complex management of an enterprise's techniological processes]. Bulletin of the Ural State University of Economics, 1 (18), 254-266.

13. *Shorikov A. F.*, *Rassadina E. S.* (2010). Mnogokriterial'naya optimizatsiya formirovaniya assortimenta produktsii predpriyatiya [Multicriteria optimization of an eterprise's product range formation]. Regional Economics, Scientific Infomation-Analytical Economic Journal, 2 (22), 189-196.

Information about the authors

Shorikov Andrey Fedorovich (Yekaterinburg, Russia) — Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Chair for Management Theory and Innovations, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education «Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin» (620014, Yekaterinburg, pr. Lenina, 13 "B", e-mail: afshorikov@mail.ru).

Rassadina Elena Sergeevna (Magnitogorsk, Russia) — Assistant Professor at the Chair for mathematical methods in economics, Magnitogorsk State University (455038, Magnitogorsk, pr. Lenina 114; e-mail: lena_mgn@mail.ru).