
К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ВКЛАД Л.В. КАНТОРОВИЧА В ЭКОНОМИЧЕСКУЮ НАУКУ^{1,2}

© 2011 г. Л. Йохансен

(Норвегия)



1. ФОН

Двадцатые годы (XX в.) – интересный период развития советской экономической науки. Были выполнены творческие и оригинальные работы во многих областях экономики, особенно в части, которую сегодня называют “экономикой развития”. В последние десятилетия некоторые из этих работ вновь стали актуальными, к ним снова возрос интерес. В этот ранний период развития советской экономической науки были предприняты также попытки применить математические методы как в области планирования, так и в научных исследованиях, причем эти работы были передовыми на фоне общего уровня советской экономической науки того времени. Стала знаменитой работа Г.А. Фельдмана о модели перспективного планирования, известны работы Е. Слуцкого, А.А. Конюса и, возможно, некоторых других специалистов. Вероятно, существует много и других работ этого периода, которые заслуживают особого внимания.

¹ Печатается по тексту: **Johansen L.** (1976): L.V. Kantorovich's contribution to economics // *The Scandinavian Journal of Economics*. Vol. 78. P. 62–80.

² Этот очерк о вкладе Л.В. Канторовича в экономическую науку написан в связи с присуждением ему премии памяти

Период с 1930-х и почти до конца 1950-х годов был менее интересным – за небольшими исключениями – в развитии советской экономической науки. Однако в конце 1950-х годов в СССР произошло возрождение экономики как науки, что частично было связано с началом более широкого, чем прежде, применения математических и статистических методов и вычислительной техники. В этой новой волне, конечно, часть усилий затрачивалась на попытки наверстать упущенное или утраченное в предыдущие десятилетия. Также трудно отрицать, что в этот период появлялись незрелые и некритичные работы, что неизбежно на большой новой волне. Однако, несомненно, что в научном отношении наблюдались значительные успехи. Появились ценные и оригинальные исследования на фоне общего в целом низкого уровня работ, отражающих состояние экономической науки в других странах.

В период возрождения советской экономической науки большинство активных исследователей были, конечно, молодыми людьми, многие из которых имели неэкономическое образование. Этим, вероятно, частично объясняется и тот факт, что было испробовано много различных подходов. Поэтому на наблюдателя эта ситуация производила впечатление неразберихи. В возрождении советской экономической науки ведущую роль сыграли несколько ученых старшего поколения – они обеспечивали определенную преемственность идей. Среди них выделяются имена Л.В. Канторовича, В.С. Немчинова и В.В. Новожилова. Важность их вклада в экономическую науку была официально признана в 1965 г., когда им была присуждена высшая научная премия в СССР – Ленинская. Значение этого признания усиливается еще и тем, что они были единственными, кто получил такую премию в области экономики.

В настоящее время активно работает только наиболее молодой из них – Л.В. Канторович. С точки зрения научных достижений, вероятно, он – наиболее оригинальный и самый выдающийся из трех названных исследователей. Его вклад в экономическую науку – оригинальный не только по меркам его родины, но и по самым высоким международным стандартам.

2. КРАТКИЙ ОЧЕРК НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Л.В. КАНТОРОВИЧА

Леонид Витальевич Канторович родился в 1912 г. В 1930 г. он закончил Математическое отделение Ленинградского государственного университета. В 1930-е годы преподавал математику в Политехническом университете в Ленинграде. В 1932–1934 гг. Канторович преподавал в Ленинградском университете, а в 1934 г. стал профессором. Канторович получил степень доктора наук по математике в 1935 г. С 1958 по 1964 г. он являлся членом-корреспондентом Академии наук СССР, а с 1964 г. – академиком (по Отделению математики). В 1949 г. ему была присуждена (тогда) Сталинская премия за работы в области математики, а в 1965 г., как отмечалось выше, Л. Канторовичу вместе с В. Немчиновым и В. Новожиловым была присуждена Ленинская премия за работы в области экономической науки, в частности, за применение математических методов в экономических исследованиях и планировании.

Л. Канторович – выдающийся и широко известный математик. На протяжении длительного времени он занимался экономическими проблемами, начав их исследование задолго до присуждения ему в 1965 г. Ленинской премии. Л. Канторович опубликовал фундаментальную работу по математической экономике еще в 1939 г. В начале 1940-х годов он работал над вопросами применения математики к решению экономических проблем, а с конца 1950-х годов опубликовал большую серию работ о методах экономических расчетов и их применении в планировании. В откровенной манере, подкрепляя свои выводы научными обоснованиями, он выступал в дискуссиях по многим вопросам, касающимся методов планирования и системы ценообразования в СССР, критиковал догматический и бесплодный период советской экономической науки.

Длительное время Л. Канторович возглавлял Отдел экономико-математических методов в Сибирском отделении Академии наук СССР. Это отделение работало в тесном контакте с совре-

Нобеля по экономике, но едва ли он столь подробен и детален, как этого требует подобный случай. Тем не менее, я надеюсь, что он дает некое впечатление о главных аспектах работ Канторовича. В основном мои изыскания базируются на переводах его статей и книг. В списке ссылок в конце этого очерка я указываю эти переводы, но также я привожу год издания оригинальной публикации работы Канторовича, а в ссылках использую буквы от [a] до [n]. Дополнительный список ссылок на работы других авторов нумеруется от [1] до [20].

менным вычислительным центром в Новосибирске, который был тогда, вероятно, самым передовым в СССР.

Мы привели краткий и далеко не полный обзор деятельности Л. Канторовича до современного периода. В следующем разделе я проанализирую более детально некоторые из полученных им научных результатов, которые имеют отношение к присуждению ему Нобелевской премии по экономике. Все эти результаты прямо или косвенно связаны с центральной экономической проблемой – оптимальным использованием ресурсов. Первостепенное значение имеет вклад Канторовича в развитие линейного программирования, играющего большую роль в ценообразовании, распределении ресурсов, выборе способов производства и т.д.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЕГО ИСТОКИ

Как теперь хорошо известно, линейное программирование представляет собой метод определения максимума или минимума линейной функции множества переменных, подчиненных ограничениям в форме линейных уравнений, требованиям неотрицательности и, возможно, более общих линейных неравенств. Линейное программирование развивалось по трем направлениям.

1. *Формулировка* проблемы и демонстрация того, что обширная область оптимизационных проблем в экономике может быть приведена к данной форме непосредственно или после некоторых преобразований.

2. Разработка *вычислительных методов и алгоритмов* для практического решения подобных задач.

3. *Прояснение теоретических аспектов и их следствий*.

Теория двойственности и отношение двойственной задачи к прямой – основной момент третьего направления. Из теории следует, что каждой задаче линейного программирования (прямой задаче) соответствует другая задача линейного программирования (двойственная задача), сформулированная, исходя из прямой, решением которой являются определенные величины, интерпретируемые как “теневые цены” различных ограниченных факторов, входящих в формулировку прямой задачи. Двойственные переменные, т.е. неизвестные двойственной задачи, связаны в классическом анализе с множителями Лагранжа. Участвуя в построении алгоритмов, они получают экономическую интерпретацию, что крайне важно, и становятся ценами. Полученные таким образом цены имеют отношение к таким проблемам, как возможность децентрализованно управлять деятельностью производственных секторов, технологическая структура которых может быть описана с помощью линейных зависимостей (уравнений и неравенств).

За последние 25 лет линейное программирование серьезно повлияло на развитие экономических исследований, нет сомнения, что оно будет играть важную роль и в будущем.

С одной стороны, достигнуто понимание того, что широкую область практических проблем можно сформулировать как задачи линейного программирования. А поскольку разработаны алгоритмы, которые позволяют решать такие задачи очень больших размеров (как по числу переменных, так и по числу условий), линейное программирование открыло путь к практическому выполнению расчетов, направленных на оптимизацию использования ресурсов в разных областях.

С другой стороны, теория линейного программирования, и особенно теория связи между двойственной и прямой задачами, позволили прояснить многие принципиальные экономические проблемы, например в теории общего равновесия и международной торговли. Теория игр, являющаяся, на мой взгляд, одним из наиболее значительных новшеств, связанных с экономической наукой, развивалась в постоянном взаимодействии с линейным программированием.

Общепринятая история развития линейного программирования гласила, что первые шаги были сделаны группой математиков и экономистов, работавших над проблемой распределения ресурсов для ВВС США во время Второй мировой войны. Одним из членов этой группы был Дж. Данциг. В 1947 г. он сформулировал общую задачу линейного программирования и разработал метод ее решения (симплекс-метод). Его работа была представлена в виде лекций, прочитанных в разных местах; распространялся также предварительный отчет, но до 1951 г. результаты

его исследований опубликованы не были. В тот год они были включены в работу [1]. В этот том вошли также и многие другие работы по теории линейного программирования. С точки зрения экономической теории особое место занимала работа Т. Купманса.

С тех пор теория линейного программирования развивалась во многих направлениях: были составлены новые алгоритмы, особенно с использованием специальных структур; мы знаем о большом числе важных и ценных практических приложений; дальнейшее развитие получили теоретические вопросы. Что касается последних, то помимо упомянутой работы Купманса формулирующее значение имела книга Дорфмана, Самуэльсона и Солоу [2].

Конечно, можно найти предшественников линейного программирования. Работы Дж. фон Неймана по теории игр и его ранняя модель экономического роста содержат элементы, которые до некоторой степени предвосхищают теорию линейного программирования. В работах Р. Фриша 1930-х годов также можно найти идеи и математические методы, которые можно считать первыми шагами в направлении линейного программирования. В работе 1941 г. Ф. Хичкок сформулировал и решил оптимизационную транспортную задачу, которая является специальным случаем задачи линейного программирования. Независимо от него сходную задачу в 1947 г. решил Т. Купманс. Были и другие, менее известные математики и экономисты, которые формулировали задачи и разрабатывали аналитические средства, предвосхищавшие некоторые элементы линейного программирования. Однако ни один из этих предшественников не дал общей трактовки, которая охватывала бы все три вышеупомянутые аспекта, и, по-видимому, ни один из них не видел *общего* значения теории линейно-программного типа.

Вышеизложенное в большей или меньшей мере было общепризнанной историей развития линейного программирования до тех пор, пока не стало широко известно, что еще в 1939 г. Л.В. Канторович построил математическую модель “организации и планирования производства”, которая по существу была линейно-программной моделью, внося вклад во все три направления линейного программирования, перечисленные в начале раздела. Работа Канторовича 1939 г. стала известна и доступна коллегам из западных стран в 1960 г., когда в журнале “Management Science” появился английский перевод этой работы [а]. Инициатива ее перевода и публикации принадлежала Т. Купмансу, который до конца прояснил некоторые невнятные ссылки на работы Канторовича, относящиеся к транспортной задаче, и наладил с ним контакт. (Упомянутая работа Канторовича была опубликована также в другом английском переводе [в] на основе позднейшего русского издания. В целом, публикация в “Management Science” представляется лучшей.)

4. ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАНТОРОВИЧЕМ

Работа Канторовича 1939 г. ограничивается рассмотрением задач планирования на низовом уровне, главным образом внутри отдельного предприятия. Первую и наиболее простую из рассмотренных задач производственного планирования можно схематически описать следующим образом. На предприятии имеется определенное число станков, которые можно использовать для производства определенных изделий, каждое из которых состоит из некоторого числа деталей. Технические коэффициенты показывают, сколько штук каждой детали станок может произвести в день. (Конечно, некоторые из этих коэффициентов могут иметь нулевое значение. Это показывает, что данный станок нельзя использовать для производства рассматриваемой детали.) Задача состоит в нахождении такого распределения производства различных деталей по имеющимся станкам, при котором будет получен максимальный выпуск целых изделий. Эта проблема на языке математики формулируется как задача максимизации линейной функции, которая выражает общее число целых изделий как функцию переменных, обозначающих время, в течение которого каждый станок используется для производства деталей каждого вида. Максимизация производится при определенных условиях в виде уравнений, которые показывают, что общее время использования станка для производства различных деталей должно быть равно общему наличному фонду времени, и в виде неравенств, показывающих, что время использования станка для производства определенной детали не может быть отрицательным.

В дальнейших разработках Канторович вводит дополнительные ограничения, так что в формулировке проблемы достигается бóльшая общность. Например, он вводит условие, при котором все станки в совокупности не должны использовать большее количество электроэнергии, чем ее заданное ограниченное количество. Это условие становится линейным ограничением более общего вида, чем те, которые упоминались в первой и более простой задаче. В самой общей формулировке Канторович учитывает возможность выполнения станком нескольких операций с целью одновременного производства различных деталей.

Канторович дает ряд примеров конкретных задач, которые можно математически сформулировать описанным выше способом. Задачи частично заимствованы из практики. Он также дает их решение. Кроме описанного выше непосредственного планирования производства, рассматриваются, например, задачи определения наилучших способов использования различных типов материалов, с тем чтобы избежать отходов (или минимизировать их); наилучшего из возможных способов использования энергии, когда определенные наличные количества различных видов энергии распределяются по различным видам деятельности; планирования строительства с учетом транспортировки строительных материалов; использование участков земли для выращивания различных сельскохозяйственных культур; задачи, связанные с планированием перевозок и размещением экономической деятельности. Хотя автор – математик, описание и обсуждение задач свидетельствует о близком знакомстве с конкретными обстоятельствами и о тонком понимании экономических аспектов задач.

Формулировки данных задач Канторовичем, на первый взгляд, кажутся частными случаями того, что теперь называется общей задачей линейного программирования. Вопрос относительно общности формулировок Канторовича также обсуждался. В предисловии [3] к публикации работы Канторовича в “Management Science” Т. Купманс приводит объяснение, за которое выражает благодарность Г. Скарфу. А Скарф, в свою очередь, основывает свою трактовку на предложении, выдвинутом самим Канторовичем. Там показано, что задача, которая в настоящее время рассматривается как общая задача линейного программирования, может быть преобразована в наиболее общую из формулировок Канторовича. (Обратное, – то есть то, что задачи Канторовича можно выразить в том же виде, что и стандартную задачу линейного программирования, – следует непосредственно.) В соответствии с этим Т. Купманс утверждает, что наиболее общая задача Канторовича, “хотя, кажется, имеет некоторую специальную структуру, в действительности эквивалентна общей задаче линейного программирования”.

Касаясь областей приложений, которые Канторович приводит в качестве примера, Т. Купманс пишет, что “широкая область приложений, охваченная автором, делает его работу ранней классикой в науке управления при любой экономической системе”.

Утверждение Т. Купманса относительно общности формулировки Канторовича было поставлено под вопрос в работе А. Чарнса и В. Купера [4]³. Они указали на некоторую неполноту доказательства Т. Купмансом эквивалентности общей задачи линейного программирования и наиболее общей формулировки Канторовича. Т. Купманс ответил на эту критику в заметке [5]. Итоговый вывод состоит в том, что эквивалентность справедлива для класса задач линейного программирования, имеющих оптимальное решение, – этот класс, безусловно, наиболее интересен для практических приложений. Для задач, не имеющих оптимального решения, возникают определенные трудности.

Способ формулирования задач, рассмотренных Канторовичем, очень часто был весьма удобным. Однако в целом, вероятно, следует признать, что формулировки, данные в позднейшей литературе, более эффективны и удобны, чем формулировка Канторовича. С этими оговорками можно с уверенностью заключить, что Канторович – первый ученый, точно сформулировавший задачу линейного программирования и представивший обширную и разнообразную совокупность примеров практических задач, которые можно рассматривать и решать с помощью данного подхода.

³ Подробный ответ Л.В. Канторовича на замечания Чарнса и Купера, написанный в 1960 г. и тогда же направленный этим авторам, был опубликован в 1999 г. в журнале “Экономика и математические методы” (1999. Т. 35. № 3, с. 36–39). См. также: “Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый”. Новосибирск: Изд. СО РАН, 2004, с. 375–380. (Прим. перев.)

Можно добавить, что Д. Данциг в классической работе “Линейное программирование, его применения и обобщения” следующим образом характеризовал вклад Канторовича [6, с. 22]: “Канторовичу следует отдать первенство в распознавании того, что обширные классы определенных производственных проблем имеют ярко выраженные математические структуры, которые, как он считал, поддаются практическому численному расчету и могут быть численно решены... Доклад содержит замечательное собрание потенциальных приложений”.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Переходя к вычислительным методам, следует указать, что главный момент в методе Канторовича в 1939 г. – введение некоторых переменных, названных “разрешающими множителями”, с интерпретацией, аналогичной множителям Лагранжа в классических задачах определения экстремума. Однако эти множители оказались чем-то гораздо большим тривиальной модификации множителей из классического анализа, поскольку линейность и ограничения в виде неравенств выдвигают принципиально новые математические проблемы. Канторович показал, что если значения этих множителей для некоторой задачи известны, то значения первоначальных неизвестных – переменных, которые характеризуют производственные, транспортные планы и т.п. в натуральных единицах, – можно найти сравнительно просто. Как правило, число таких множителей будет намного меньше числа переменных, характеризующих физический план. Поэтому многообещающим должен быть подход, состоящий в попытке найти значения этих множителей как средства нахождения неизвестных переменных, описывающих оптимальный план в натуральных показателях. Для этой цели Канторович разработал метод пошаговой аппроксимации (итеративный метод): начинают с задания предварительных оценок множителей и вычисляют, каким должен быть соответствующий физический план. Затем проверяют, удовлетворяет ли физический план всем ограничениям (уравнениям и неравенствам). Множители корректируются в той мере, в какой наблюдаются расхождения. Проводятся новые расчеты соответствующих физических планов и новые испытания выполнения или нарушения ограничений и т.д. Если расхождения используются надлежащим способом – как индикаторы того, как следует корректировать множители, – то такой пошаговый подход приведет в конце к оптимальному плану или очень хорошему приближению к нему.

В своих работах Канторович иллюстрирует метод рядом относительно небольших задач (хотя и более объемных, чем, например, примеры, которые приводятся в стандартных современных элементарных введениях в линейное программирование).

Этот метод обладает определенной слабостью с алгоритмической точки зрения, особенно в связи с программированием для современных ЭВМ (конечно, это соображение более уместно в настоящее время, чем в 1939 г.). В оригинальной работе Канторович сформулировал метод таким образом, что на некоторых шагах требовались специальные проверки и решения на основе суждения, т.е. метод не был полностью механическим и требовал дальнейших уточнений. С этой точки зрения метод, позднее разработанный Данцигом (симплекс-метод), – более полный, его проще программировать для ЭВМ. Поэтому именно его метод, а не первоначально предложенный Канторовичем, стал стандартным методом решения задач линейного программирования. (Существует множество вариантов этого метода, ориентирующихся на особенности ЭВМ или задачи со специальной структурой.) Два этих различных метода обладают определенным сходством: они оба – итеративные, в которых приближение к правильному решению происходит последовательными шагами, и в обоих множители типа Лагранжа играют важную роль. В обоих методах такие множители используются для описания оптимума. Вероятно, можно сказать, что в шагах, ведущих к оптимуму, эти множители играют более заметную роль в методе Канторовича, чем в симплекс-методе, поскольку изменения, которые делаются на каждом шаге методом Канторовича, включают в первую очередь корректировку множителей, за которой следует корректировка переменных, характеризующих план в натуральных показателях. Тогда как в симплекс-методе на каждом шаге сначала корректируют переменные, характеризующие план, а затем – корректируют соответствующие множители. Выше изложены очень грубые и неопределенные соображения, но рассмотрение технических подробностей выходит за рамки настоящей

работы. Однако этот момент представляет специальный интерес в связи с рядом дальнейших заключений об организации планирования и управления, которые Канторович выводит из своего анализа линейного программирования. Мы вернемся к этому в настоящей статье позднее.

Я видел ссылки на дальнейшие разработки метода Канторовича, выполненные как самим Канторовичем, так и другими русскими математиками, в других ранних изданиях, но эти работы были для меня недоступны.

В западной литературе обсуждался вопрос о вкладе Канторовича в методы вычислений, сделанном в его первой работе. Данциг указывает [6, с. 22–23], что объяснение, данное Канторовичем, как корректировать множители, – неполное, и это – сложная проблема. Ее решение является главным моментом в критическом рассмотрении метода Канторовича у Чарнса и Купера [4]. Я думаю, что моя характеристика и сравнение, приведенное выше, дают об этом приблизительно верное представление.

Интересно также рассмотреть некоторые соображения Чарнса и Купера [4]. В заключительном параграфе они отмечают, что Канторович и другие русские математики работали с вычислительными методами, предназначенными для специальных структур, в пределах класса задач линейного программирования, а позднее это стало очень важной областью западных исследований – математическим программированием. Цитирую их заключения: “Может оказаться, что Канторович предвидел некоторые из этих работ, или же может оказаться, что его разрешающие множители очень важны в таких задачах. Едва ли можно переоценить важность этой работы по специальным структурам и эффективным алгоритмам, если требуется прогресс в области крупномасштабных приложений и связанных с ними теоретических исследований. Поэтому было бы несчастьем, если бы любые такие возможности для успешного продвижения, которые могли бы вытекать из ранней работы Канторовича, были бы упущены просто из-за неправильного понимания его действительных достижений и того, в каком отношении они до сих пор отличались или дополняли работы, проводимые с тех пор другими”. Западные исследования по линейному программированию, по-видимому, привели к разработке более эффективных алгоритмов. Тем не менее, в соответствии с вышеизложенным, возможно, эти ранние методы, предложенные Канторовичем, которые, кажется, никогда полностью не были доработаны⁴, содержат идеи, которые все еще могут оказаться весьма важными.

6. “РАЗРЕШАЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ” КАНТОРОВИЧА

Как было указано в связи с третьим аспектом развития линейного программирования, упомянутого в начале раздела 3, линейное программирование имеет некоторые дальнейшие теоретические следствия, которые тесно связаны с общей теорией оптимального распределения ресурсов. Ключом к этим дальнейшим теоретическим толкованиям и выводам является введение “разрешающих множителей” – как их назвал Канторович.

В оптимальном решении указанные “разрешающие множители” – то же самое, что “двойственные переменные”, появляющиеся в общей теории линейного программирования в хорошо известном сегодня виде. Как отмечалось выше, Канторович показал, как их можно использовать в качестве критерия того, будет ли оптимальным найденное решение. С теоретической точки зрения именно в этом состоит фундаментальная функция множителей. Полезность разрешающих множителей в алгоритмах вытекает из этого теоретического свойства.

Множители, однако, полезны еще и тем, что указывают, как значение целевой функции (функции, которую мы желаем максимизировать или минимизировать) изменяется в результате небольших изменений в условиях задачи, например в результате изменения имеющихся ограниченных ресурсов. Другими словами, множители представляют собой предельные значения ценности ограничивающих факторов в задаче. Канторович выявил эту функцию множителей в

⁴ Вероятно, автор не обратил внимания на Приложение II анализируемой ниже книги [f], где весь алгоритм описан подробно. Отметим, что сравнение эффективности классического симплекс-метода с методом Канторовича показало преимущество последнего (см. **Panne C. van de, Rahmana F.** (1977): *The First Algorithm for Linear Programming: An Analysis of Kantorovich's Method*. The University of Calgary. Discussion Papers Series. № 45. May). (Прим. перев.)

своей работе и придал ей большое значение. Между прочим, он утверждал, что решение, полученное с помощью разрешающих множителей данного типа, гораздо ценнее решения, полученного без использования множителей, так как вопрос о малых вариациях в программе, вызванных модификацией условий задачи, может быть непосредственно разрешен на основе этих множителей без повторения полного цикла расчетов для каждого изменения ограничений. Фактически предлагаемый Канторовичем алгоритм строится именно на этой интерпретации разрешающих множителей.

В западной литературе имела место дискуссия о том, насколько Канторович продвинулся в направлении интерпретации своих множителей как теневого или эффективного цен. Купманс в своем предисловии к переводу работы Канторовича в “Management Science” [3] пишет, что «наибольший интерес для экономистов представляет интерпретация... в линейном программировании двойственных переменных, которые автор назвал “разрешающими множителями”, и которые среди прочих названий были названы в западной литературе “эффективными ценами”», – и далее подтверждает эту мысль.

Однако и в этом пункте Чарнс и Купер также придерживаются более критической позиции [4]. Но я не вижу, чтобы они сообщили о чем-то, что может вызвать сомнения в характеристике, которую я дал выше, и которая, по моему мнению, относится к решающему пункту концепции. Купманс развил свои замечания в кратком ответе указанным авторам [5]. Суть дела здесь в том, что Купманс в своих высказываниях вовсе не имел в виду утверждать, что Канторович еще в 1939 г. открыл *все* теоретические аспекты эффективных цен или что он полностью предвосхитил формулировку теоремы двойственности в том виде, как она известна сегодня. Но что он, тем не менее, прояснил важные теоретические свойства и интерпретацию множителей.

История линейного программирования, возможно, заслуживает большего внимания. Чарнс и Купер думают, что было бы интересно провести историческое исследование истоков и развития различных идей, относящихся к линейному программированию. Они завершают свой обзор следующим замечанием: “когда это будет сделано, тогда станет возможно определить истинное место идей Канторовича. Мы считаем, что яркость его достижений нисколько не потускнеет, если эта работа будет выполнена точно и тщательно”.

7. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТА

В связи с работой 1939 г., рассмотренной нами выше, я упомяну, не входя в детали, другую, также очень раннюю работу Канторовича, опубликованную в СССР в 1942 г., – “О перемещении масс” [с]. Это – сжатая и довольно абстрактная математическая работа, но в ней в общем виде сформулирован широкий класс задач, которые автор с помощью примера сводит к задаче планирования транспорта, а именно – к задаче такого прикрепления пунктов потребления к пунктам производства товаров, при котором минимизируются общие транспортные издержки. Для такого класса задач автор сформулировал необходимые и достаточные условия оптимальности, но не разработал эффективных вычислительных методов нахождения этого оптимума⁵. В предисловии к английскому переводу [7] работы в “Management Science” А. Чарнс характеризует работу как “важную в области линейного программирования”. Другие называли ее “классической” абстрактной транспортной задачей.

У некоторых советских математиков были и другие работы, а также работы Канторовича, в которых они развивали вычислительные аспекты, связанные с этой статьей.

По-видимому, Канторович продолжает серьезно интересоваться проблемами транспорта и размещения производства и после публикации своей математической работы в этой области. Ряд расчетов, к которым приводят его идеи, в СССР, по-видимому, осуществлялись в широких масштабах. В одной из последних статей [d] (написанной совместно с А. Журавелем) Канторович

⁵ Это утверждение повторяет ошибку, содержащуюся в предисловии Чарнса. Метод решения с очевидностью вытекает из приведенного в этой работе доказательства упоминаемой теоремы. Помимо этого он был подробно изложен в статье 1940 г., написанной совместно с М.К. Гавуриным, на которую там имеется ссылка как на находящуюся в печати (опубликована в 1949 г.). (Прим. перев.)

авторитетно обсуждал “роль транспортного фактора в размещении производства”. В этой работе он указывал на большое значение транспортного сектора в рациональном использовании экономических ресурсов и, соответственно, – на важность правильной структуры грузовых тарифов. В этой, связанной с практикой, дискуссии Канторович и Журавель в значительной степени опираются на эмпирическую работу о структуре издержек, оптимизации перевозок и размещения предприятий и т.п. Они приводят доводы в пользу реформы системы грузовых транспортных тарифов в СССР. При оценке работ Канторовича очень интересно сравнить абстрактную статью 1942 г. с прикладной статьей 1974 г. Канторович внес важный вклад в обе указанные сферы и, более того, сумел сохранить связь и плодотворное взаимодействие между ними.

8. ПОСЛЕДУЮЩИЕ РАБОТЫ КАНТОРОВИЧА

В позднейших работах Канторович дальше развил свои идеи, изложенные в исследованиях 1939 г. Я, в частности, имею в виду его статью [e] и очень важную и оказавшую большое влияние книгу “Экономический расчет наилучшего использования ресурсов” [f], опубликованную в СССР в 1959 г.

Что касается этих работ, то вопросы приоритета здесь несколько сложнее, чем в работе 1939 г., частично потому, что, очевидно, прошло значительное время между развитием этих идей и их официальной публикацией в СССР, а частично и потому, что за это время линейное программирование получило значительное развитие как в США, так и в странах Западной Европы. Однако, по-видимому, ясно, что основные идеи вышеупомянутых работ были развиты уже в начале 1940-х годов как продолжение работы, начатой в статье 1939 г. Канторович во многих местах упоминает, что он работал над этими проблемами в начале 1940-х годов. Р.В. Джуди [8, с. 220] безоговорочно утверждает, что эти работы были написаны в 1941 или 1942 г., но, вероятно, это слишком упрощенное понимание. По-видимому, ясно, что автор сообщал о части содержания и выводах из этих работ в 1940 г. в Ленинградском политехническом институте, в Математическом институте АН СССР – в 1942 г. (тогда находившемся в Казани), а в 1943 г. – в Институте экономики АН СССР. В указанных работах идеи статьи 1939 г. развивались в нескольких направлениях.

Теперь в этих работах даются формулировки, которые естественным образом охватывают общую задачу линейного программирования без всяких преобразований, которые были необходимы для их формулировки в статье 1939 г. Фактически Канторович теперь дает формулировку, которая может показаться даже более общей, чем общепринятая формулировка задачи линейного программирования. Формулировка Канторовича для многих целей (особенно для тех, которые он сам использует в качестве иллюстраций) является весьма полезной и удобной. С помощью соответствующих перестановок и преобразований стандартную задачу линейного программирования все же можно переформулировать таким образом, чтобы она охватывала и формулировку Канторовича. Различие, следовательно, касается формулировки, а не области реальных задач, которые могут быть ими охвачены.

Примером применения теории линейного программирования, для которого удобно использовать формулировки Канторовича, служит работа Д. Мицельского, К. Рея и В. Тржесьяковского, – они построили модель оптимизации плановой экономики с особым учетом экспорта и импорта [9]. Авторы показали, как на основе сформулированной по Канторовичу задачи и с помощью его способа обозначений условий оптимума можно естественным путем прийти к методу декомпозиции, – методу, в котором общая задача оптимизации разлагается на несколько меньших задач, связанных определенным образом между собой, а оптимальное решение общей задачи получается с помощью итеративной процедуры, состоящей в повторном решении меньших задач. Такой подход важен для обеспечения частично децентрализованного согласования оптимальных планов хозяйства в целом или его крупных секторов. Данный, “восточный”, подход к декомпозиции, по-видимому, начал разрабатываться независимо и параллельно хорошо известному сегодня принципу декомпозиции Д. Данцига и П. Вулфа [10], который был первым значительным вкладом в теорию разложения крупных задач линейного программирования в западной литературе. В упомянутой выше работе декомпозиция появляется как естественное следствие и распространение подхода Канторовича. Мне неизвестно, насколько сам Канторович формализовал подоб-

ные методы декомпозиции, но представляется очевидным, что он должен был работать с такими методами, когда занимался расчетами в вычислительном центре в Новосибирске. Подобный способ составления децентрализованного плана полностью соответствует общим идеям, высказанным Канторовичем, например, в конце статьи [e] и в нескольких местах книги [f]. Декомпозиция оказалась очень важной идеей и имеет большое значение для применения вычислительных методов к решению задач эффективного распределения ресурсов в больших системах.

Чрезвычайно важное направление распространения исследований Канторовича, которое появилось как в работе [e], так и [f], а потом было разработано и специально выделено в работах [g] и [i], состоит в разработке динамических моделей. С формально-математической точки зрения – это “всего лишь” вопрос наличия большего числа датированных переменных и определенных специальных структур в матрице коэффициентов, описывающей задачу. Поэтому с математической точки зрения большой новой теории не потребовалось. Однако с точки зрения интерпретации и применения динамическое расширение очень важно. Особое значение имеет появление в этом случае датированных теневых цен (разрешающих множителей, двойственных переменных) для различных ресурсов и товаров. За исключением весьма специальных случаев, этим ценам свойственно развиваться во времени, – это означает, что один вид ресурса или товара получает различные теневые цены в различные периоды времени. В этом случае система динамических рядов цен содержит всю информацию, заключенную в теневых ценах, о задаче перспективного планирования, но для применений и теоретической интерпретации представляет особый интерес разделение двух аспектов подобной динамической системы цен. Первый аспект касается изменения *относительных цен* различных товаров, второй – изменения со временем *уровня цен*. Конечно, это не имеет никакого отношения к инфляции или дефляции – рассматриваемые теневые цены выражают предельные значения ограниченных ресурсов в различные периоды времени, – т.е. уровень этих цен в разные периоды выражает ценность, измеренную потенциальным влиянием на целевую функцию наличия ресурсов в ближайшем или более отдаленном будущем. Канторович провел такое разделение (см., например, [f], с. 284–287), записав каждую цену как произведение нормализованной цены фактора на множитель, зависящий только от времени. Эти нормализованные цены привязаны к определенному постоянному уровню в предположении, что определенный, основанный на этих ценах, индекс должен оставаться неизменным во времени. В этом случае изменения фактических теневых цен окажутся комбинацией изменения относительных цен и изменения уровня цен. Введение фактора времени, представленного в качестве индекса цен, делает его интерпретацию близкой к процентной ставке. И Канторович использует его для выражения того, что он обозначает как “нормальную эффективность капиталовложений при переходе от периода t к следующему периоду времени”. Такая интерпретация полностью аналогична точкам зрения и концепциям, которые используются в других современных теориях процента и оптимальных инвестиционных решениях.

9. ГОСУДАРСТВЕННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ХОЗЯЙСТВА И СИСТЕМА ЦЕН

Этот раздел подводит нас к, возможно, наиболее важному аспекту работ [e]–[g] и наиболее подробно обсуждается в [f] (см. также [h]). Кроме дальнейших работ над проблемами, относящимися к микроуровню, или оптимальному планированию перевозок и размещению, Канторович делает общие выводы относительно путей такой организации социалистической экономики, которая обеспечивает высокую эффективность использования ресурсов. Он представляет себе плановую систему, основанную на линейном программировании, в которой составляется централизованный план, касающийся основных аспектов развития, в значительной степени на основе рассмотренных выше методов декомпозиции с координацией совокупности менее крупных задач и итерации. На основе этих расчетов в дополнение к основным “физическим” аспектам плана для наиболее важных продуктов и ресурсов получают также теневые цены. Канторович предлагал использовать их в качестве основы для системы цен в народном хозяйстве. Он очень убедительно аргументировал (как с практической, так и с теоретической точек зрения), что эти цены могут составить рациональную основу решений, относящихся к большому числу актов выбора в экономике, которые имеют намного более детальный характер, чем те решения, которые можно отыскивать путем расчета более формализованного и централизованного плана. В этой связи

Канторович обсуждал вопрос, который, по моим сведениям, не очень широко и явно обсуждался в западной литературе. Канторович назвал его “относительной устойчивостью” теневых цен. Суть состоит в том, что теневые цены, найденные в результате решения оптимизационной задачи, логически связаны только с теми элементами плана, которые явно входили в проводившиеся вычисления. Детализированные решения, которые приходится принимать в менее крупных подразделениях экономики, суть решения, относящиеся к таким вопросам, как, например, вводить или нет определенные новые методы работы, некоторые новые или модифицированные производственные процессы и т.д., которые были неизвестны или по другим причинам (особенно ввиду их многочисленности) не могли быть учтены при формализованных расчетах плана. Идея Канторовича в данном вопросе состояла в том, что в той мере, в какой эти обстоятельства, находящиеся за пределами формализованных расчетов плана, имеют меньший порядок величины в сравнении с аспектами, включенными в расчеты, полученные теневые цены не будут сильно отклоняться от “правильных” теневых цен, которые можно было бы получить, если бы можно было проводить полный расчет, охватывающий все аспекты, т.е. учитывать модификации методов работы, производственных процессов и т.п., упомянутых выше. Вследствие этого рассчитанные теневые цены могут образовать основу для решений, которые касаются обстоятельств, не охваченных формальной моделью.

Я считаю, что это очень важная идея. В теоретической литературе часто встречается мысль, согласно которой централизованные расчеты цен, которые должны служить в качестве сигналов для децентрализованных решений относящихся к объемам, осуществить невозможно, потому что цены и объемы производства в оптимальном решении взаимообусловлены. Невозможно рассчитать оптимальное решение как для сферы цен, так и для сферы объемов, не вычислив в то же время планов для другой сферы, а если это так, то зачем децентрализовать решения об объемах производства, после того как цены рассчитаны централизованно? Мне представляется, что подход Канторовича позволяет далеко продвинуться в ответе на этот вопрос.

Точка зрения Канторовича в ходе обсуждения системы цен в СССР нашла серьезную поддержку, но не была принята в качестве единственной базы для расчета цен. Было выдвинуто также много возражений против этого предложения. Несомненно, это было связано с тем, что система цен в экономике имела много различных функций. Предложение Канторовича относилось, главным образом, к решению проблемы оптимального распределения ресурсов, выбора способа производства и т.д. Однако, кроме того, имеются такие функции цен, как воздействие на распределение доходов, достижение целей администрации и управления, формирование основы системы учета и т.д. Этим другим целям не обязательно наилучшим образом служит система цен, наилучшая с точки зрения эффективного распределения ресурсов, которая, к тому же, включает движение во времени, как это свойственно упомянутой выше динамической системе. Хотя предложение Канторовича в первую очередь касалось роли цен в связи с эффективностью использования ресурсов и способа производства, ему не чуждо рассмотрение и других функций цен. Например, Канторович считает, что вычисленные теневые цены можно непосредственно использовать для расчета взаимных платежей между государственными предприятиями без учета влияния их на распределение доходов, в то время как фактические розничные цены, по которым платят потребители, во многих случаях и по разным причинам должны отклоняться от таких теневых цен. Более того, Канторович прямо указывает на следующее обстоятельство: пусть расчет дает весьма различающиеся теневые цены рабочей силы различных типов и квалификации, но это не должно автоматически отражаться на фактически выплачиваемой заработной плате и окладах. Тем не менее Канторович считает, что такие теневые цены можно было бы учесть в планах, касающихся организации производства, выбора альтернативных капиталовложений и т.д.

Канторович подробно рассматривал роль, которую должна играть рента на землю и ограниченные природные ресурсы в системе цен. Это естественно вытекает из анализа теневых цен и оптимизации. Данный вопрос имеет большое значение для СССР, и он обсуждался весьма широко, а работы Канторовича, очевидно, много способствовали прояснению вопроса.

Обзоры ряда основных точек зрения в дискуссии о системе цен в СССР были даны М. Борштейном [11], Л. Йохансеном [12] и Р.В. Джуди [8].

10. ИНВЕСТИЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ

Анализ критериев определения эффективности капиталовложений Канторович тесно связал с системой цен. Он очень квалифицированно критиковал длинный список предлагавшихся критериев, которые в прежнее время выдвигались при обсуждении этой проблемы в СССР и которым до некоторой степени следовали на практике. Он приводил убедительные аргументы в пользу критериев, основанных на разрешающих множителях или теневых ценах. В связи с этим на сцену выходит вся система динамических рядов цен, которая была описана выше, где “нормальная эффективность капиталовложений” играет ту же роль, что и процентная ставка при расчете текущей стоимости.

Вопрос об инвестиционных критериях также энергично обсуждался и в западной литературе. В ней этот вопрос часто запутывают в некоторых аспектах, между прочим, потому, что инвестиционные критерии зачастую рассматриваются изолированно от всеобъемлющей точки зрения на проблемы оптимизации экономики в целом. По моему мнению, анализ Канторовичем вопроса об инвестиционных критериях весьма прозрачен и конструктивен также и в сравнении с тем, что имеет место в современной западной литературе, – именно потому, что он выводит предлагаемые им критерии из концепции оптимизации экономики в целом.

При обсуждении инвестиционных критериев Канторович непосредственно затрагивал массу спорных вопросов в советской экономической науке и экономической политике. В первую очередь эти области тесно связаны с проблемами системы цен. По этой причине Канторович критикует некоторые предложения, которые выдвигались в СССР и которые по форме довольно близки его собственным предложениям. Суть в том, что другие авторы не видели так ясно тесной связи критериев эффективности капиталовложений с системой цен в целом, а критерии, которые формально близки критериям Канторовича, будут приводить к неверным результатам, если их применять на основе структуры цен, которая не согласуется с идеей оптимизации. Таким же образом Канторович критиковал формально сходные критерии, которые опираются на показатель процентной ставки, полученный из рассмотрения системы денежного обращения, а не с помощью оптимизации. Далее, Канторович критиковал серию критериев, которые также подобны его собственным, но которые отличаются тем, что они опираются на различные нормы “эффективности капиталовложений” в различных отраслях производства. Из анализа экономики в целом вытекает, что такая норма должна быть одинаковой для всех отраслей. (Здесь практика сделала несколько шагов в направлении сближения с точкой зрения Канторовича, но еще не приняла ее целиком.)

В качестве примера проблемы инвестиционных критериев Канторович обсуждал также более конкретно такие аспекты развития экономики СССР, как упор на тяжелую промышленность на ранних этапах индустриализации. Официальная точка зрения в СССР состояла в том, что такое распределение средств в пользу тяжелой промышленности оказалось бы невыгодным согласно экономическим расчетам, но одно из преимуществ советской системы именно в том и состоит, что крупные капиталовложения могли быть сделаны вопреки выгоде. Канторович придерживается мнения, что *при правильных расчетах*, основанных на теневых ценах и правильно определенной норме “эффективности капиталовложений”, эта стратегия *могла бы оказаться выгодной*.

Важная проблема, связанная с критериями капиталовложений, – безусловно, вопрос о возможности численной оценки нормы эффективности капиталовложений, которую следует использовать в расчетах. Одним из подходов к этому является предложенный Канторовичем и экспериментально опробованный в СССР, который состоит в расчете этой нормы на основе укрупненных моделей, сформулированных как динамические задачи линейного программирования, описанные выше (см., в частности, [i]). Однако Канторович не придерживался этой процедуры догматически. Он считал, что к вопросу оценки нормы эффективности капиталовложений следует подходить под разными углами зрения, поскольку линейно-программная формулировка не охватывает всех относящихся к делу аспектов экономики. Канторович вдумчиво и основательно рассматривает эту проблему в нескольких статьях. Он также попытался рассчитать норму с помощью макроэкономических моделей. Ряд работ Канторовича в этой области имеется в английских пе-

реводах [j]–[n]. В этих статьях определение числового значения нормы эффективности капиталовложений рассматривалось при различных допущениях относительно вида производственных функций и типа технического прогресса с различением роли фондов и предметов потребления. Что касается вида производственных функций и типа технического прогресса, то кажется (см., в частности, [n]), что Канторович считал представление “putty-clay” (связанных фондов) более реалистичным, чем “putty-putty” (перетекания фондов), но, рассмотрев случай “putty-clay”, он предлагал также модифицированную модель “putty-clay”, в которой ограничена возможность фактической замены фондов.

В связи с инвестиционными критериями и динамической нормой эффективности капиталовложений интересно также сослаться на широкое обсуждение Канторовичем “цены времени” [m]. Это популярное сочинение, в котором весьма убедительно и прозрачно с помощью многочисленных практических и конкретных примеров объясняется необходимость более действенного учета временного лага в планировании и управлении экономикой в СССР.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мне представляется, что вышеприведенный обзор охватывает основные аспекты вклада Л.В. Канторовича в экономическую науку, хотя, конечно, это изложение – краткое и обобщенное.

Как отмечалось ранее, у меня не было возможности изучить ряд работ Канторовича. Некоторые из них указаны в советской библиографии по экономико-математическим методам и моделям, которая была опубликована Ленинградским отделением АН СССР в 1968 г. Некоторые упоминаются и кратко излагаются в работах [13, 14, 17], а также в тех работах Канторовича, на которые были сделаны ссылки. Насколько я могу судить, большая часть этих статей касается вычислительных аспектов и дальнейшей детализации рассмотренных выше работ. По-видимому, в последующем Канторович интенсивно работал над проблемами амортизации фондов в связи с техническим прогрессом. Предложения на этот счет можно найти в [m], где, между прочим, рассматривается вопрос о правильности применения ускоренной амортизации в начальный период срока службы фондов. Канторович доказывал, что такая система амортизации может быть подтверждена анализом моделей оптимального использования, ремонта и замены станков. Можно сослаться также на статью [h] и на несколько других статей, в которых рассматривался этот вопрос, но они имеются только на русском языке.

Кроме работ, опубликованных под его именем, Канторович, несомненно, внес большой вклад в науку, руководя научными исследованиями и расчетами, особенно в научно-исследовательском центре в Новосибирске.

Если собрать все работы Л.В. Канторовича под одним названием, то таким подходящим обобщающим названием было бы: оптимизация использования ограниченных ресурсов, – т.е. самая главная из всех экономических проблем. Его вклад в линейное программирование относится к этой области. Математические и вычислительные аспекты важны, но не меньшее значение имеет то, что Канторович понял, какой широкий класс конкретных и разнообразных задач можно привести к этой форме. Он увидел огромное значение теории линейного программирования для решения намного более общих проблем управления и планирования экономики, включая систему цен и критерии инвестиций. Система цен и критериев инвестиций служит также полезным инструментом оптимального использования ограниченных ресурсов. В эти области Канторович внес вклад также и с других позиций, – отличных от линейного программирования.

По прочтении книг и статей Канторовича становится ясно, что он достиг глубокого понимания экономических проблем, и многие его объяснения отличаются проницательными экономическими соображениями и реалистическим анализом практических проблем. Л.В. Канторович – знаменитый математик, но, несомненно, мы с полным правом можем включить его в ряд наиболее выдающихся *экономистов* последних десятилетий.

БИБЛИОГРАФИЯ

Работы Л.В. Канторовича

В этом списке приводятся ссылки на переводы публикаций Л.В. Канторовича, которые я по большей части использовал в работе. Год оригинальной публикации приводится в скобках. Имеются издания некоторых работ в переводах на другие западные языки – кроме указанных ниже. Для интересующихся этими работами существует библиография, включающая и ссылки на оригиналы, – например, см. Ellman [13], p. 198–199. См. также *The Use of Mathematics in Economics* [b], p. 302.

[a] *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production*. *Management Science*. № 4. July. 1960. (Оригинальная публикация в Ленинграде, 1939 г.)

[b] *Mathematical Methods of Production Planning and Organization, Published in The Use of Mathematics in Economics*. Edited by A. Nove. Oliver & Boyd, Edinburgh & London 1964. (Это перевод наиболее важных частей книги, опубликованной в СССР в 1959 г. под редакцией В.С. Немчинова. Статья Канторовича воспроизводит его работу 1939 г. – см. [a] – с небольшими изменениями.)

[c] *On the Translocation of Masses // Management Science*. № 1. October 1958 (оригинальная публикация в СССР в 1942 г.).

[d] *The Role of the Transport Factor in the Location of Production // Problems of Economics*. 1974. (Соавтор А. Журавель. Оригинальная публикация в СССР в 1974 г.)

[e] *Further Development of Mathematical Methods and Prospects of Their Application in Economic Planning // The Use of Mathematics in Economics*. См. [b].

[f] *The Best Use of Economic Resources*. London, N.Y.: Pergamon Press. 1965. (Оригинальная публикация в СССР в 1959 г.)

[g] *Ein dynamisches Modell der optimalen Planung // Sowjetwissenschaft. Gesellschaftswissenschaftliche Beiträge* (Berlin), № 7. 1964. (Оригинальная публикация в СССР в 1964 г. Английский перевод “A Dynamic Model of Optimum Planning” в журнале “*Mathematical Studies in Economics and Statistics in the USSR and Eastern Europe*”. Vol. I. № 2. Winter 1964–1965.)

[h] *Optimal Mathematical Models in Planning the Development of a Branch and in Technical Policy // Contemporary Soviet Economics*. Vol. I. N.Y.: International Arts and Sciences Press. 1969. (Оригинальная публикация в СССР в 1967 г.)

[i] *Estimating the Effectiveness of Capital Expenditures // Matekon*. № 1. Fall 1971. (Совместно с В.Н. Богачевым и В.Л. Макаровым. Оригинальная публикация в СССР в 1970 г.)

[j] *A Single-Product Dynamical Model with Instantaneous Convertibility of Funds // Soviet Mathematics*. № 3. 1967. (Совместно с И.Г. Глобенко. Оригинальная публикация в СССР в 1967 г.)

[k] *A Dynamical Model of Economics // Soviet Mathematics*. № 5. 1967. (Совместно с И.Г. Глобенко. Оригинальная публикация в СССР в 1967 г.)

[l] *Once Again on Calculating the Norm of Effectiveness on the Basis of a One-Product National Economic Development Model // Matekon*. № 2. Winter 1970–1971. (Совместно с А.Л. Вайнштейном. Оригинальная публикация в СССР в 1970 г.)

[m] *Der Preis der Zeit // Sowjetwissenschaft. Gesellschaftswissenschaftliche Beiträge* (Berlin). № 1. 1970. (Совместно с В.Н. Богачевым. Оригинальная публикация в СССР в 1969 г.)

[n] *Dynamic Models of Technological Changes*. In: G.I. Marchuk (ed.) “*Optimization Techniques. IFIP Technical Conference*”. Lecture Notes in Computer Science, 27, Berlin: Springer-Verlag, 1975.

Ссылки на других авторов

Работы, помеченные номерами [1]–[12], используются в тексте. Ссылки [13]–[20] сделаны на книги и статьи, которые использовались при подготовке этого очерка.

[1] **Коопманс Т.С.** (ed.) (1951): *Activity Analysis of Production and Allocation*. Cowles Commission Monograph № 13. N.Y.: John Wiley & Sons. (Особенно см. G.B. Dantzig “The Programming

of Interdependent Activities” and “Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities”, кроме того, **Koopmans T.C.** “Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities”.)

[2] **Dorfman R., Samuelson P.A., Solow R.M.** (1958): *Linear Programming and Economic Analysis*. N.Y.: McGraw-Hill Book Co. 105S.

[3] **Koopmans T.C.** (1960): A Note About Kantorovich’s Paper, *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production* // *Management Science*. № 4. July . (Введение к L.V. Kantorovich [a].)

[4] **Charnes A., Cooper W.W.** (1962): On Some Works of Kantorovich, Koopmans and Others // *Management Science*. Vol. 8. P. 246–263.

[5] **Koopmans T.C.** (1962): On the Evaluation of Kantorovich’s Work of 1939 // *Management Science*. Vol. 8. April. P. 13–17.

[6] **Dantzig G.B.** (1963): *Linear Programming and Extensions*. Princeton: Princeton University Press.

[7] **Charnes A.** (1958): Foreword // *Management Science*. № 1. October. (Введение к L.V. Kantorovich [c].)

[8] **Judy R.W.** (1971): The Economists. In: Skilling H.G., Griffiths F. (eds.) “*Interest Groups in Soviet Politics*”. Chapter VII. Princeton: Princeton University Press.

[9] **Mycielski J., Rey K., Trzeciakowski W.** (1963): Decomposition and Optimization of Short-run Planning in a Planned Economy. In: Barna T. (ed.) “*Structural Interdependence and Economic Development*”. L.: MacMillan & Co.

[10] **Dantzig G.B., Wolfe P.** (1960): Decomposition Principle for Linear Programs // *Operations Research*. № 1.

[11] **Bornstein M.** (1964): The Soviet Price Reform Discussion // *Quarterly J. of Econ.*

[12] **Johansen L.** (1966): Prissystemets Rolle i de Østeuropæiske Land // *Statsøkonomisk Tidsskrift*.

[13] **Ellman M.** (1973): *Planning Problems in the USSR*. Cambridge: Cambridge University Press.

[14] **Hurd J.P.** et al. (eds.) (1967): *Mathematics and Computers in Soviet Economic Planning*. New Haven: Yale University Press.

[15] **Isbell J.H., Marlow W.H.** (1962): On an Industrial Programming Problem of Kantorovich // *Management Science*. Vol. 8. № 1.

[16] **Johansen L.** (1966): Soviet Mathematical Economics // *The Econ. J.*

[17] **Johansen L.** (1967): Review of L. V. Kantorovich: The Best of Use of Economic Resources ([f]) // *The Economic Journal*.

[18] **Zauberman A.** (1967): *Aspects of Planometrics*. L.: The Athlone Press, University of London.

[19] **Ward B.** (1960): Kantorovich on Economic Calculation // *The J. of Political Econ.*

[20] Pro and Con (1969): Pro and Con – Compare Conclusions. In: “*Contemporary Soviet Economics*”. Vol. I. N.Y.: International Arts and Sciences Press. (Перевод отчета из Экономической газеты, № 10, 1965 г. о дискуссии, состоявшейся в связи с выдвижением Л.В. Канторовича, В.С. Немчинова и В.В. Новожилова на Ленинскую премию 1965 г.)

Работы Л.В. Канторовича (советские издания, цитированные автором в переводах)

[a] Математические методы организации и планирования производства. Л. 1939.

[b] Математические методы организации и планирования производства. В кн.: “*Применение математики в экономических исследованиях*”. М. 1959.

[c] О перемещении масс // *ДАН*. 1942.

[d] Роль транспортного фактора в размещении производства (совм. с А. Журавелем) // *Вопросы экономики*. 1974.

[e] Дальнейшее развитие математических методов и возможности их применения в планировании хозяйства. В кн. *“Применение математики в экономических исследованиях”*. М. 1959.

[f] Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М. 1959.

[g] Динамическая модель оптимального планирования. В кн.: *“Планирование и экономико-математические методы”*. М. 1964.

[h] Оптимальные математические модели в планировании развития отрасли и в технической политике. Новосибирск. 1967.

[i] Об оценке эффективности капитальных затрат (совм. с В.Н. Богачевым и В.Л. Макаровым) // *Экономика и мат. методы*. Т. VI. Вып. 6. 1970.

[j] Однопродуктовая динамическая модель с мгновенной превращаемостью фондов (совм. с И.Г. Глобенко) // *ДАН СССР*. Т. 174. № 3. 1967.

[k] Динамическая модель экономики (совм. с И. Г. Глобенко) // *Докл. АН СССР*. Т. 176. № 5. 1967.

[l] Еще об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития народного хозяйства (совм. с А. Л. Вайнштейном) // *Экономика и мат. методы*. Т. VI. 1970.

[m] Цена времени (совм. с В. Богачевым) // *Коммунист*. № 10. 1969.

[n] Динамические модели технического прогресса. 1975.

Перевод В.Л. Канторовича