ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 3, с. 80–93

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ФИДУЦИАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: ПРИНЦИП ИНЕРТНОСТИ[*]

© 2011 г. В.З. Беленький, А.А. Заславский

(Москва)

Теория фидуциальных вероятностей базируется на идее Р. Фишера “обращения вероятностей”. Поиски обоснования этой эвристической идеи ведутся до сих пор. В статье показано, что вся фидуциальная теория может быть построена на основе сформулированного авторами логически ясного принципа инертности: “случайные величины, свободные априорно, должны оставаться таковыми же и апостериорно”.

Ключевые слова: инвариантные семейства распределений, свободные случайные величины, фидуциальные вероятности, принцип инертности.

ВВЕДЕНИЕ

Фидуциальные вероятности (fiducial – основанный на вере, доверии (Англо-русский словарь, 1977)) являются одним из инструментов статистического оценивания неизвестного параметра распределения наблюдаемой последовательности одинаково распределенных случайных величин. Это понятие было предложено Р. Фишером (Fisher , 1933, 1935) в 1920-х годах почти одновременно (чуть позже) с введенным Ю. Нейманом (Neyman, 1934) понятием *доверительный интервал*.

По своей природе фидуциальные вероятности имели эвристический, полуинтуитивный характер, и в последующих исследованиях статистики пытались найти аргументы к их обоснованию (см. например, ряд статей в методологической серии “*Journal of the Royal Statistical Society*” (Williams, 1963; Dempster, 1963; Barnard, 1963; Healy, 1963)). А.Н. Колмогоров еще в 1940-е годы отмечал в статье (Колмогоров, 1942), что в ситуации полной априорной неопределенности при малом числе наблюдений наилучшие оценки дают фидуциальные вероятности.

В 1960-х годах фидуциальные вероятности были строго определены в работах Д. Фрэзера, Р. Хора и Р. Белера (Fraser, 1961; Hora, Bueler, 1965), заложивших инвариантную теорию оценивания (Закс, 1975, с. 35). Позднее эти работы были продолжены в исследованиях Г.П. Климова и А.Д. Кузьмина (Климов, 1973; Климов, Кузьмин, 1975). В (Закс, 1975, § 7.4) показано, что в теории статистических выводов фидуциальные вероятности дают, в определенных ситуациях, наилучшее решение.

В 1980-е годы В.З. Беленький, обдумывая возможные подходы к инвариантной постановке задачи оптимального выбора в ситуации полной априорной неопределенности, самостоятельно пришел к понятию “фидуциальные вероятности”. В (Беленький, 1990) был сформулирован *принцип инертности* и его связь с фидуциальной теорией.

Настоящая методологическая статья призвана показать, что принцип инертности может служить логическим обоснованием инвариантной теории фидуциальных вероятностей.Строгого обоснования сущности этой теории нет до сих пор (см., например, в (Kyburg, 1983; Hampel, 2003; Heike et al., 2003)).

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 09-02-00479) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00156).

В разд. 2 систематически изложено построение фидуциальных вероятностей в рамках инвариантной теории. В основе этого построения лежит интуитивная фишеровская идея “обращения вероятности”. В разд. 3 формулируется принцип инертности. Доказывается основное утверждение универсальности характера принципа инертности, что и позволяет принять принцип инертности как логическую основу всей фидуциальной теории.

Изложение принципа инертности в рамках общепринятого языка аксиоматической теории вероятностей Колмогорова затруднительно. Для облегчения формулировок понятий и результатов авторы используют такие термины, как “условное событие”, “условная случайная величина”. Поскольку эти термины малоупотребительны (хотя и не оригинальны), их точное содержание раскрывается в разд. 1.

1. ПОНЯТИЯ “УСЛОВНОЕ СОБЫТИЕ”, “УСЛОВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА”

1.1. Вероятностное пространство. В аксиоматике А.Н. Колмогорова вероятностное пространство задается тройкой

$$\Pi = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}). \tag{1}$$

Здесь Ω – множество элементарных исходов; $\mathcal{F}$ – счетно-аддитивная σ-алгебра подмножеств $A \subseteq \Omega$, интерпретируемых как события в Π (поле событий); $\mathbf{P}$ – вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Примечание. Обычно в конкретном контексте вероятностное пространство *фиксировано*, понятие “событие” $A \in \mathcal{F}$ и отвечающее ему “множество” $A \subseteq \Omega$ отождествляются. В нижеследующем определении понятия “условное событие” мы имеем дело с ситуацией, когда одно и то же множество задает разные события – условное и безусловное. В такой ситуации необходимо различать термины “событие” и “множество”. С этой целью будем обозначать через $\tilde{A}$ множество в Ω, отвечающее событию A (прообраз A). Вся σ-алгебра прообразов обозначается $\tilde{\mathcal{F}}$. Событие $A \subseteq \mathcal{F}$ и его прообраз $\tilde{A} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии.

1.2. Условные события относительно события B с ненулевой вероятностью. Для фиксированного события $B \in \mathcal{F}$ *с ненулевой вероятностью* условные вероятности определяются формулой

$$P(A \mid B):= P(AB) \,/\, P(B),\ A \in \mathcal{F}. \tag{2}$$

Приводя эту формулу в своем учебнике, Б.В. Гнеденко (1965) замечает (с. 57)[1], что формула (2) “...задает вероятностное пространство для условных вероятностей $(B, \mathcal{F}B, P(AB) / P(B))$”. Следуя этому замечанию, введем для события B *условное вероятностное пространство*[2]

$$\Pi_B := (B, \mathcal{F}_B, \mathbf{P}_B). \tag{3}$$

По определению, множеством элементарных событий пространства Π_B является множество $\tilde{B} \subseteq \Omega$; σ-алгебра $\mathcal{F}_B$ индуцируется σ-алгеброй $\mathcal{F}$ в следующем смысле: $\mathcal{F}_B := \tilde{\mathcal{F}}\tilde{B}$. Это означает, что

i) $\mathcal{F}_B \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$;

ii) каждое событие $A \in \mathcal{F}$ однозначно порождает *условное событие* $A_B \in \mathcal{F}_B$ через его прообраз в $\tilde{B}$

$$\tilde{A}_B := \tilde{A}\tilde{B}; \tag{4}$$

iii) обратно, каждому условному событию $A_B \in \mathcal{F}_B$ однозначно соответствует его прообраз $\tilde{A}_B \subseteq \tilde{B} \subseteq \Omega$, причем он может быть порожден целым пучком событий $A \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих равенству (4).

---

[1] В переизданном учебнике (Гнеденко, 2005) это замечание почему-то (?!) изъято.

[2] Здесь авторы не оригинальны; это понятие не является нововведением, оно имеется, например, в (Климов, 1983, гл. 1, § 4) .

Вероятностная мера $\mathbf{P}_B$ задается формулой

$$P_B(A_B) := P(A|B) \quad A_B \in \mathcal{F}_B, \tag{5}$$

причем в силу (2) и *iii*) правая часть определена однозначно (не зависит от выбора события A из пучка (4)); тем самым, понятия "вероятность условного события" и "условная вероятность" синонимичны.

Пусть задана некоторая система непересекающихся событий $\{B_j\} \in \mathcal{F}\,(P(B_j) > 0)$, прообразы которых образуют полное разбиение Ω. С каждым j из этих событий можно связать условное вероятностное пространство Π_j вида (3), и тогда каждое событие $A \in \mathcal{F}$ может быть представлено в виде

$$A = \sum_j A_{B_j} \times B_j, \tag{7а}$$

где A_{B_j} – условное событие в пространстве Π_j; в правой части (7а) стоит произведение (т.е. одновременную реализацию) событий, первое из которых является условным, а второе – безусловным (так как $B_j \in \mathcal{F}$, а $A_{B_j} \in \mathcal{F}_{B_j} \subset \mathcal{F}$, то их произведение – это событие σ-алгебры $\mathcal{F}$, определяемое обычным образом).

1.3. Условные события относительно значения случайной величины. Случайная величина (с.в.) на пространстве Π есть некоторая $\mathcal{F}$-измеримая функция $\psi(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Если множество значений Y с.в. ψ дискретно ($Y = \{y_j\}$), то условное событие относительно значения y_j (принимаемого с положительной вероятностью) определяется в соответствии с п. 1.2, для события $B = \{\omega \in \Omega \mid \psi(\omega) = y_j\}$.

Сложнее обстоит дело, если множество значений Y с.в. ψ непрерывно, и для любого значения $y \in Y$ $P(\psi = y) = 0$. В этом случае полная система событий $\{B_y := \{\omega \in \Omega \mid \psi(\omega) = y\},$ $y \in Y\}$ является континуальной и $P(B_y) = 0$, поэтому изложенная выше конструкция неприменима. Тем не менее соотношение, аналогичное (7а), сохраняет силу; оно имеет вид

$$A = \bigcup_{y \in Y} A_{B_y} \times B_y, \tag{7б}$$

и это позволяет корректно и однозначно определить вероятностную меру $\mathbf{P}_{B_y}$ (см., например, учебники по теории вероятностей (Феллер, 1967, § 5.10)) или, более современный (Ширяев, § 2.7, определение 5)[3] и, тем самым, условное вероятностное пространство Π_{B_y}.

Важно подчеркнуть, что поскольку в соотношениях (7) участвуют только события (а не вероятности), они *не зависят от вероятностных мер* $\mathbf{P}_{B_j}$, $\mathbf{P}_{B_y}$. Именно в этом заключается преимущество понятия "условное событие" (которое и используется в статье) перед условными вероятностями. Вероятностным аналогом соотношений (7) является формула полной вероятности.

Выделим важный частный случай: если событие A влечет одно из событий B полной системы (т.е. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$), то формула (7) упрощается:

$$A = A_B \times B. \tag{8}$$

1.4. Условные случайные величины. Для фиксированного события $B \in \mathcal{F}$ *условная случайная величина* – это *фрагмент* (обычно употребляют термин "сужение") на множестве $\tilde{B}$ функции $\psi(\omega)$, рассматриваемый в пространстве Π_B. Этот фрагмент является $\mathcal{F}_B$-измеримой функцией, так как $\tilde{\mathcal{F}}_B \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$.

1.5. Вероятностное пространство, заданное случайной величиной. В практических применениях аксиоматической теории в качестве пространства Ω выступает обычно выборочное пространство X значений некоторой "первичной" с.в. с известной функцией распределения $\mathbf{F}$. Иначе говоря, с точки зрения экспериментатора, первичным является не пространство "абстрактных" элементарных событий, а непосредственно результаты количественных измерений,

[3] В учебнике (Гнеденко, 1965, § 52) эта тема изложена недостаточно строго с современной точки зрения.

которые признаются (многомерной, векторной) случайной величиной, описываемой функцией распределения **F**. В этом случае вероятностное пространство задается вместо (1) парой

$$\Pi = \{X, \mathbf{F}\}, \tag{9}$$

а σ-алгебра порождается функцией распределения **F**. Сама функция распределения интерпретируется в (9) как вероятностная мера на X (обозначаемая обычно той же буквой), т.е.

$$\mathbf{F}(A) := \int\limits_{x \in A} d\mathbf{F}(x) \quad \forall A \subseteq X.$$

Все сказанное ранее полностью сохраняется для вероятностного пространства (9). В основной части статьи мы будем иметь дело именно с таким пространством.

2. ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ФИДУЦИАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Инвариантно-групповое семейство распределений. Статистик наблюдает входную последовательность (ВП) $\xi = (\xi_j, j = 1, 2, ...)$ независимых одинаково распределенных случайных величин. Статья имеет методологический характер, и рассматриваются только одномерные с.в., выборочным пространством которых служит либо вся прямая $Y = R$, либо положительная полуось $Y = R_+ := \{y > 0\}$[4] (хотя, в принципе, ничто не мешает рассмотрению многомерных с.в.).

Вид функции распределения (ф.р.) F^θ входной последовательности известен с точностью до параметра θ, являющегося элементом некоторой группы $\mathcal{G}$ преобразований на Y. Каждый элемент $g \in \mathcal{G}$ задает преобразование $g : Y \to Y$ выборочного пространства Y в себя, и семейство $\mathcal{G}$ этих преобразований образует *транзитивную* ($g_1, g_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow g_1 g_2 \in \mathcal{G}$) *полную* ($\forall g_1, g_2\ \exists g$: $g_2 = g_1 g$, или, что равносильно, для любого g существует обратный элемент g^{-1}) непрерывную группу. Тождественному преобразованию соответствует *единица* группы $\mathcal{G}$, которая обозначается **1**.

Если ξ подчиняется распределению $F^\theta \in \mathcal{F}$, то этот факт отображается в записи $\xi \longmapsto \theta$; символ $\overset{\circ}{\xi}$ означает $\xi \longmapsto \mathbf{1}$.

Таким образом, задано инвариантно-групповое семейство распределений $\mathcal{F} = \{F^g, g \in \mathcal{G}\}$. Свойство инвариантности состоит в том, что если $\xi \longmapsto \theta$, то $g\xi \longmapsto g\theta\ \forall g \in \mathcal{G}$; отсюда следует

$$F^g(y) = F(g^{-1}y), \ \ y \in Y, \ \ g \in \mathcal{G}, \tag{10}$$

где *опорная* ф.р. F отвечает значению $g = \mathbf{1}$.

Отметим эквивалентность случайных величин (совпадение функций распределения)

$$\xi \asymp \theta\overset{\circ}{\xi}, \ \text{ если } \xi \to \theta.$$

В работе рассматриваются три непрерывные группы преобразований: 1) группа $\mathcal{G} = C$ сдвигов на прямой ($gy := y + c$; $Y = R$); 2) группа $\mathcal{G} = \Lambda$ растяжений полуоси ($gy := \lambda y$, $\lambda > 0$; $Y = R_+$); 3) полная группа $\mathcal{G} = L$ аффинных преобразований на прямой ($g = (\lambda, c)$, $gy := \lambda y + c$, $\lambda > 0$; $Y = R$). Приводим список основных инвариантно-групповых семейств.

Семейство 1. Равномерные распределения $U(\Delta)$ на интервале Δ с плотностью

$$f^g(x) = \frac{1}{|\Delta|}\begin{cases} 1, x \in \Delta; \\ 0, x \notin \Delta; \end{cases} \ x \in R, \tag{11}$$

где $|\Delta|$ – длина интервала Δ.

1.1. $\Delta = [\theta - 1/2, \theta + 1/2]$, $g = \theta \in C = \{c|c \in R\} = R$, $\ d = 1$.

1.2. $\Delta = [0, \theta]$, $g = \theta \in \Lambda = \{\lambda|\lambda > 0\} = R_+$, $\ d = 1$.

1.3. $\Delta\ [a, b]$, $g = (b - a, a) \in L = \{(\lambda, c) \mid \lambda \geq 0, c \in R\}$, $\ d = 2$.

Здесь и всюду в дальнейшем $d := \dim\mathcal{G}$ – размерность группы $\mathcal{G}$.

[4] Обычно в R_+ включается и значение $y = 0$; нам удобнее его исключить.

Семейство 2. Нормальные распределения $N(a, \sigma)$ с плотностью

$$f^g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in R.$$

2.1. Параметр σ задан, $\sigma := 1$; $g = a \in C$, $d = 1$.

2.2. Параметр a задан, $a := 0$; $g = \sigma \in \Lambda$, $d = 1$.

2.3. $g = (a, \sigma) \in L$, $d = 2$.

Семейство 3. Экспоненциальные распределения $Ex(a, \sigma)$ с плотностью

$$f^g(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)/\sigma}, & x > a; \\ 0, & x \le a; \end{cases} \quad x \in R$$

с подразбивкой на случаи 3.1–3.3 аналогично семейству 2.

Семейство 4. Гамма-распределения $\Gamma\mathrm{am}_p(\sigma)$ с плотностью

$$f^g(x) = \begin{cases} x^{p-1}e^{-x/\sigma}/(\sigma^p\Gamma(p)), & x > 0; \\ 0, & x \le 0; \end{cases} \quad x \in R, \quad g = \sigma \in \Lambda;$$

здесь Γ – функция Эйлера

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, \qquad p > 0.$$

Отметим, что семейство 3.2 есть частный случай семейства 4, отвечающий значению $p = 1$.

2.2. Соглашение об обозначениях и терминах. Для двух различных с.в. термин *эквивалентность* (записываемый символом "$\asymp$") означает совпадение их ф.р. Вектор $x^k := (x_1,..., x_k) \in Y^k$– это выборочное значение вектора наблюдений $\xi^k := (\xi_1, ..., \xi_k)$. Если число наблюдений k фиксировано, то вместо x^k, ξ^k, Y^k пишем x, ξ, X[5].

При каждом фиксированном $g \in \mathcal{G}$ выборочное пространство X определяет вероятностное пространство $\Pi = (X, \mathbf{P}^g)$ в смысле (9), где вероятностная мера $\mathbf{P}^g$ и σ-алгебра индуцируются случайным вектором $\xi(g)$ (запись $\xi(g)$ означает $\xi \longmapsto g$)[6].

В записи gx подразумевается, что преобразование g действует на вектор $x \in X$ покомпонентно.

Функция ψ: $X \to Z$ называется *инвариантной*, если она удовлетворяет условию

$$\psi(gx) = \psi(x) \quad \forall(g \in \mathcal{G},\ x \in X), \tag{12}$$

и *эквивариантной*, если

$$\psi(gx) = g\psi(x) \quad \forall(g \in \mathcal{G},\ x \in X). \tag{13}$$

В (13) предполагается, что действие преобразований $g \in \mathcal{G}$ определено на Z.

2.3. Свободные случайные величины, статистики и события; диполь. Случайная величина $\psi(g, \xi(g))$ называется *свободной*, если ее ф.р. *безразлична* к параметру g: при всех $g \in \mathcal{G}$ ф.р. одна и та же, и, следовательно, совпадает с ф.р. $\psi(\mathbf{1}, \overset{\circ}{\xi})$[7].

Пусть ψ – некоторая функция на выборочном пространстве X; каждая такая функция называется *статистикой*[8]. Статистика ψ называется *свободной*, если с.в. $\psi(\xi(g))$ свободна.

Следующая лемма очевидна.

---

[5] Y заменено на X, так как Y – это выборочное пространство одного наблюдения.

[6] σ-алгебра состоит из множеств $A \subseteq X$, для которых $P(\xi(g)) \in A$ определено; нетрудно убедиться, что σ-алгебра инвариантна относительно $g \in \mathcal{G}$.

[7] В литературе вместо термина "безразлична к g" употребляется обычно термин "не зависит от g". Мы вводим новый термин, сохраняя за термином "независимость" его теоретико-вероятностный смысл.

[8] В литературе иногда статистикой называют функцию двух аргументов (x, g).

Лемма 1. *Статистика, заданная инвариантной функцией* ψ, *свободна.*

Множество $A \subseteq X$ называется *инвариантным*, если $gA = A \forall g \in \mathcal{G}$ (коротко, $\mathcal{G}A = A$). Каждое такое множество, рассматриваемое как событие $\{\xi \in A\}$, называется свободным: оно безразлично к g. Фундаментальным для логики построения фидуциальных вероятностей является факт, что если событие A свободно, то наблюдение $\xi \in A$ не несет никакой информации о неизвестном параметре $\theta \in \mathcal{G}$, которому подчинена входная последовательность.

Лемма 2. *Если* ψ: $X \to Z$ – *инвариантная функция, то при любом* $z \in Z$ *множество* $A := \{y \in X \mid \psi(y) = z\}$ *инвариантно, и, следовательно, событие* $\{\xi \in A\}$ *свободно.*

Доказательство этой леммы следует непосредственно из определений. ■

Функцию $g^{-1}x$ двух аргументов, определенную на произведении $\mathcal{G} \times X$, назовем *диполем*.

Лемма 3. *Всякую свободную статистику можно рассматривать как функцию от диполя.*

Доказательство. Согласно (12), $\psi(x) = \psi(g^{-1}x)$. ■

Диполь *порождает* свободную с.в. $g^{-1}\xi(g)$ (назовем ее *случайным диполем*); следующая лемма также очевидна.

Лемма 4. *Каждая функция от диполя порождает свободную с.в.*

2.4. Факторизация выборочного пространства, орбиты. В задаче оценки неизвестного параметра $\theta \in \mathcal{G}$ при наблюдении входной последовательности ξ число наблюдений k должно быть больше (не меньше) размерности $d = \dim\mathcal{G}$ группы преобразований. Всюду в дальнейшем считаем, что $k \geq d$; тогда имеет смысл следующее понятие.

Для каждого фиксированного $x \in X = Y^k$ множество

$$\mathcal{O}_x := \{y \mid y = gx,\ g \in \mathcal{G}\} \tag{14}$$

назовем *орбитой* точки x[9]. В силу полноты и транзитивности группы $\mathcal{G}$ никакие две орбиты не пересекаются. Тем самым выборочное пространство X факторизуется: оно разбивается (расслаивается) на множество непересекающихся орбит: через каждую точку $x \in X$ проходит ровно одна орбита.

Лемма 5. *При любом* $x \in X$ *орбита* $\mathcal{O}_x$ *изоморфна группе* $\mathcal{G}$, *т.е. каждому* $y \in \mathcal{O}_x$ *отвечает единственный элемент* $g = g(y) \in \mathcal{G}$.

Доказательство. Выберем некоторую эквивариантную статистику H: $X \to \mathcal{G}$; тогда

$$y = gx \Rightarrow H(y) = gH(x) \Rightarrow g = H(y)H^{-1}(x) =: g_y, \tag{15}$$

а так как выбор статистики H произволен, то правая часть (15) не зависит от этого выбора, и элемент g_y определен однозначно.

Лемма 5 дает возможность ввести на орбите $\mathcal{O}_x$ понятие (векторная) дробь: для любых $y, z \in \mathcal{O}_x$ положим

$$y/z := g_y g_z^{-1} = [H(y)H^{-1}(x)][H(z)H^{-1}(x)]^{-1} = H(y)H^{-1}(z) \in \mathcal{G},\quad y, z \in \mathcal{O}_x \tag{16}$$

(это значение не зависит от выбора H). ■

2.5. Определение фидуциальных вероятностей для семейств, обладающих полной достаточной статистикой. Такие семейства назовем *полными*. Все основные семейства, перечисленные в п. 2.1, кроме семейства 1.1, полны.

Мы исходим из определения полной достаточной статистики (**ПДС**), данного в (Леман, п. 1.9, 4.3) (см. также (Закс, 1975, гл. 2; де Грот, 1974, § 9.1); определение довольно емкое, и мы его не приводим). ПДС задается некоторой эквивариантной функцией со значениями в группе $\mathcal{G}$, $T : X \to \mathcal{G}$. Соответственно, функция

$$a(g, x) := g^{-1}T(x) = T(g^{-1}x) \tag{17}$$

является функцией от диполя также со значениями в $\mathcal{G}$.

---

[9] В (Леман, 1979, разд. 6.2) это множество названо “траекторией”.

Байесовский подход в теории оценивания рассматривает неизвестный параметр θ как *случайную величину*. Распределение этой величины рекуррентно пересчитывается в процессе наблюдений по байесовской формуле апостериорных вероятностей, исходя из заданного априорного распределения. Предложенный Фишером фидуциальный подход также рассматривает θ как случайную величину, но ее апостериорное распределение строится без привлечения априорного и вычисляется непосредственно по выборочному значению $x \in X$. В полных семействах фидуциальное распределение зависит от x через достаточную статистику $T(x)$. Изложим это построение в такой форме, которая позволит затем (в разд. 3) прямо перейти к формулировке главного результата статьи – принципа инертности.

В силу леммы 4 функция (17) порождает свободную с.в. $a = g^{-1}\tau(g)$, $\tau(g) := T(\xi(g))$, эквивалентную с.в. $\mathring{\tau} := T(\mathring{\xi})$, и пусть $Q := F_T$ – ее функция распределения. Это – вычислимое распределение, оно может быть получено на основе опорной функции, определенной в (10).

Здесь мы подходим к ключевому моменту логики фидуциальных вероятностей. По построению, Q есть ф.р. свободной с.в. $a = g^{-1}\tau(g)$. В основе фишеровского подхода лежит интуитивная идея "обращения вероятности": считать, что неизвестный параметр $g \in \mathcal{G}$ является случайной величиной, ф.р. которой при наблюденном значении $\tau = t$ определяется из соотношения $\alpha = g^{-1}t$, где, по определению:

$$\alpha := RAND(Q) \tag{18}$$

"слепок" (копия) свободной с.в. a, т.е. *экзогенная* с.в., генерируемая датчиком случайных чисел (элементов группы $\mathcal{G}$) с распределением Q[10].

Эта идея реализуется просто: в равенстве (17) все три величины $\{g, t := T(x), a\}$ являются элементами группы $\mathcal{G}$; обращая (17), выразим g как функцию от t, a : $g = ta^{-1}$, и тогда приходим к следующему определению.

Определение 1. Апостериорным фидуциальным распределением Φ^t на группе параметров $\mathcal{G}$ семейства $\mathcal{F}$, отвечающим наблюденному значению ПДС $t = T(x)$, называется ф.р. случайной величины

$$\gamma = \gamma^t := t\alpha^{-1}, \ \ \alpha := (18); \tag{19}$$

случайную величину γ назовем *"фидуциальный параметр"*.

Примечание. Ф.р. $Q = F_T$ зависит от числа наблюдений k (так как $X = Y^k$), поэтому γ^t и Φ^t зависят от k.

Пример 1. Пусть $\mathcal{F}$ – семейство 1.2 равномерных распределений на конечном отрезке с фиксированным левым концом, но неизвестной длины θ. Здесь $\mathcal{G} = R_+ = \{g | g > 0\}$ – множество положительных чисел, рассматриваемое как (коммутативная) группа по умножению. Это семейство полно с ПДС

$$\tau = T(\xi^k) = \max_{j \in [1,k]} \xi_j .$$

Если $\xi \longmapsto g$, то статистика τ имеет ф.р.

$$P(\tau < 1) = F_T^g(t) = \begin{cases} (t/g)^k, & t \in [0, g]; \\ 1, & t > g; \end{cases} \quad t \in R_+,$$

соответственно, при $t > 0$

$$Q(t) = P(\alpha < t) = P(\tau/g < t) = P(\tau < gt) = F_T^g(gt) = F_T(t) = \begin{cases} t^k, & t \in (0,1]; \\ 1, & t > 1; \end{cases}$$

$$\Phi^t(g) = P(t\alpha^{-1} < g) = P(\alpha > t/g) = 1 - Q(t/g) = \begin{cases} 0, & g \in (0, t]; \\ 1 - (t/g)^k, & g > t; \end{cases} \quad \theta \in R_+ .$$

---

[10] Экзогенная – привносимая извне, не связанная с процессом наблюдения, сторонняя.

2.6. Определение фидуциальных вероятностей в общем случае.

2.6.1. Наводящее соображение. Ключевая идея “обращения вероятности” с помощью “слепка” подходящим образом построенной свободной с.в. закладывается и в определение фидуциального распределения в общем случае (при отсутствии ПДС). При числе наблюдений k большем размерности d группы $\mathcal{G}$ выборочное k-мерное значение $x^k = (x_1, ..., x_k)$ содержит излишнюю информацию, не существенную для оценки неизвестного d-мерного параметра θ. В случае полного семейства сжатие информации достигалось переходом от k-мерного пространства $X = Y^k$ к d-мерному пространству достаточной статистики T. Возможность такого перехода объясняется тем, что событие $\xi^k = x$ можно представить в виде произведения (см. (8)):

$$\{\xi = x\} = \{\xi = x \mid T(\xi) = T(x)\} \times \{T(\xi) = T(x)\}. \tag{20}$$

Первый сомножитель справа – условное событие. Покажем, что оно свободно; имеем

$$\{\xi = x \mid T(\xi) = T(x)\}=\{T^{-1}(\xi)\xi = T^{-1}(x)x \mid T(\xi) = T(x)\}. \tag{21}$$

Теперь воспользуемся следующей важной теоремой.

Теорема 1 (Basu, 1955, 1958; см. комментарий в (Леман, 1979, с. 182)). *Пусть семейство распределений $\mathcal{F}$ обладает ПДС T; тогда, для того чтобы статистика ψ была свободна, необходимо и достаточно, чтобы при любом $g \in \mathcal{G}$ случайные величины $\psi(\xi)$ и $T(\xi)$ были независимы.*

Так как статистика $T^{-1}(\xi)\xi$ свободна, то в силу теоремы 1 условное событие в правой части (21) имеет то же распределение, что и безусловное $A := \{T^{-1}(\xi)\xi = T^{-1}(x)x\}$, которое, согласно лемме 2 (с подстановкой $\psi(y) = T^{-1}(y)y$, $z = T^{-1}(x)x$), является свободным событием. Таким образом, в правой части (20) первый множитель не содержит никакой информации о неизвестном параметре θ. Соответственно, для построения апостериорного фидуциального распределения можно было использовать статистику T.

2.6.2. Определение фидуциального распределения. В общем случае экстрагирование информации достигается использованием факторизации фазового пространства с помощью орбит (п. 2.4). Зафиксируем некоторую точку $x \in X$, свяжем с ней орбиту $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x$ и представим событие $\xi = x$ иначе, чем в (20), именно в виде произведения

$$\{\xi = x\} = \{\xi = x \mid \xi \in \mathcal{O}\} \times \{\xi \in \mathcal{O}\}, \quad \mathcal{O} := \mathcal{O}_x. \tag{22}$$

Так как орбита $\mathcal{O}$ – инвариантное множество, второй множитель справа не несет никакой информации о параметре θ. В отличие от (20), информативным теперь выступает первый сомножитель, т.е. условная случайная величина

$$\eta := (\xi|\xi \in \mathcal{O}) = (\xi|H(\xi) = H(x)), \tag{23}$$

которая теперь играет роль, аналогичную ПДС в п. 2.5. Выборочным пространством с.в. η является орбита $\mathcal{O}$; если $\xi \longmapsto g$, то функцию распределения с.в. (23) обозначим

$$F_x^g(y), \quad y \in \mathcal{O}_x. \tag{24}$$

Замечание. Несмотря на то что орбита $\mathcal{O}$ имеет в пространстве X меру нуль, ф.р. (24) определена однозначно, см. п. 1.3.

Если $\xi \longmapsto g$, то с.в.

$$a := (g^{-1}\xi|\xi \in \mathcal{O}) = g^{-1}\eta \tag{25}$$

свободна, ее ф.р. есть функция (24), отвечающая значению $g = \mathbf{1}$, т.е. $F_x =: F_x^g\big|_{g=\mathbf{1}}$.

Как и п. 2.5, ф.р. свободной с.в. (25) используется для “обращения вероятности”; исходя из понятия векторной дроби (16), выразим g из (25): $g = \eta/a$.

Проведенное построение допустимо для любого значения $x \in X$. Выберем в качестве x *наблюденное* значение ξ, тогда наблюденным значением η будет также $\eta = x$, и мы приходим к следующему определению.

Определение 2. Апостериорным фидуциальным распределением Φ_x на группе параметров $\mathcal{G}$ семейства $\mathcal{F}$, отвечающим наблюдению $\xi = x$, называется ф.р. случайной векторной дроби $\gamma = \gamma_x := x/\alpha_x$, где

$$\alpha_x := RAND(F_x) - \tag{26}$$

экзогенный слепок свободной с.в. a, определенной формулой (25).

Этим завершается определение фидуциального параметра γ_x в общем случае.

Примечание. Как и п. 2.5, ф.р. F_x зависит от числа наблюдений k, но, кроме того, F_x зависит также и *от наблюденного значения* $\xi = x$, поэтому теперь $\alpha = \alpha_x$.

Пример 2. Пусть $\mathcal{F}$ – семейство 1.1 равномерных распределений на отрезке единичной длины, но с неизвестным центром θ. Здесь $\mathcal{G} = R$ $(g = c)$ – группа по сложению (группа сдвигов), причем данное семейство не полно.

Для $x = (x_1, ..., x_k) \in X = Y^k$ орбита представляет собой прямую в k-мерном пространстве

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_x = \{y = x + se \mid s \in R\}, \quad e := (1, 1, ..., 1) \in R^k.$$

Это означает, что значение условной с.в. (23) $\eta = (\xi + ce \mid \xi = x)$ однозначно определятся скалярной с.в. $c \in R$ (с выборочным значением s). Нетрудно убедиться, что при фиксированном $\theta \in R$ плотность, по мере Лебега ds на орбите $\mathcal{O}$, распределения случайного скаляра c дается выражением

$$f_x^{\theta}(s) = \frac{1}{|\delta|}\begin{cases}1, & s \in \delta;\\ 0, & s \notin \delta;\end{cases} \quad s \in R;$$

где $\delta := [\theta - 1/2 - m, \ \ \theta + 1/2 - M]$, $m := \min\limits_{j \in [1,k]} x_j$, $M := \max\limits_{j \in [1,k]} x_j$, $|\delta| := 1 - (M - m)$ – длина интервала δ. Соответственно, ф.р. скаляра c есть

$$P(c < s) = F_x^{\theta}(s) = \begin{cases}0, & s < \theta - 1/2 - m;\\ s - (\theta - 1/2 - m)/|\delta|, & s \in \delta;\\ 1, & \theta + 1/2 - M < c;\end{cases} \qquad s \in R,$$

и, наконец, ф.р. Q случайного скаляра $\mu = c - \theta$ отвечающего свободной с.в.

$$a = \eta - \theta e = (\xi + (c - \theta)e \mid \xi = x) = (\xi + \mu e \mid \xi = x), \tag{27}$$

есть

$$\begin{aligned} &P(\mu < s) = Q(s) := F_x^{\theta}(s)\Big|_{\theta = 0} = \\ &= \begin{cases}0, & s < -(0{,}5 + m);\\ (s + 0{,}5 + m)/(1 - (M - m)), & s \in [-(0{,}5 + m), 0{,}5 - M];\\ 1, & s > 0{,}5 - M.\end{cases} \qquad s \in R,\end{aligned} \tag{28}$$

Экзогенная с.в. α_x – это вектор на орбите $\mathcal{O}$, со случайным скаляром, отвечающим свободной с.в. (27), т.е. $\alpha_x = x + \mu e$, где с.в. μ имеет функцию распределения (28) (зависящую от x). Согласно определению 2 и векторной дроби (16), имеем $\gamma = x/a_x = x/(x + \mu e) = -\mu$, и, таким образом, функция распределения фидуциального параметра γ задается формулой

$$\begin{aligned} &\Phi_x(s) = P(\gamma < s) = P(\mu > -s) = 1 - Q(-s) = \\ &= \begin{cases}0, & s < -(0{,}5 - M);\\ (s + 0{,}5 - M)/[1 - (M - m)], & s \in [-(0{,}5 - M), 0{,}5 + m];\\ 1, & s > 0{,}5 + m.\end{cases} \qquad s \in R,\end{aligned} \tag{29}$$

что соответствует равномерному распределению случайного параметра γ на отрезке $[-(1/2 - M), 1/2 + m]$, – вполне естественный результат.

2.7. Равносильность определений 1, 2. Удобно интерпретировать фидуциальное распределение как меру на группе $\mathcal{G}$. Для любого множества $A \subseteq \mathcal{G}$ имеем

$$\Phi_x(A) = P(\gamma_x \in A) = P(x/\alpha(x) \in A) = P(\alpha(x) \in A^{-1}x) = F_x(A^{-1}x); \tag{30}$$

подчеркнем еще раз, что ф.р. F_x интерпретируется как мера *на орбите* $\mathcal{O}_x$, и ее аргумент в правой части (30) является подмножеством этой орбиты.

В случае полного семейства соответствующая формула выглядит проще (поскольку ф.р. F_T не зависит от t):

$$\Phi^t(A) = P(\gamma^t \in A) = P(t\alpha^{-1} \in A) = P(\alpha \in A^{-1}t) = F_T(A^{-1}t); \tag{31}$$

здесь F_T интерпретируется как мера на $\mathcal{G}$.

Лемма 6 (о равносильности). *Если семейство $\mathcal{F}$ полно, то $\Phi_x = \Phi^t$, $t := T(x)$, т.е. $\gamma_x \asymp \gamma'$.*

Доказательство. Пусть x фиксировано и $t := T(x)$. Статистика T эквивариантна, и на орбите $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x$ значением $T(y)$ точка y определяется однозначно (см. п. 2.4). Поэтому для любого множества $A \subseteq \mathcal{G}$ события

$$\mathbf{a} := \{\eta \in A^{-1}x\} = \{\xi \in A^{-1}x \mid \xi \in \mathcal{O}\}, \quad \mathbf{b} := \{T(\xi) \in A^{-1}t \mid \xi \in \mathcal{O}\}$$

совпадают (при любом $g \in \mathcal{G}$), причем, поскольку событие $\mathbf{a}$ свободно, то свободно и $\mathbf{b}$, поэтому можно считать $g = \mathbf{1}$. По определению, $P(\mathbf{a}) = F_x(A^{-1}x) = \Phi_x(A)$. В силу теоремы 1 при любом $g \in \mathcal{G}$ с.в. $T(\xi)$ независима от свободного события $\{\xi \in \mathcal{O}\}$; поэтому, считая $g = \mathbf{1}$, имеем $P(\mathbf{b}) = F_T(A^{-1}t) = \Phi^t(A)$.

В силу равенства $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, приходим к утверждению леммы. ■

2.8. Явное представление фидуциальной плотности. Явное выражение для фидуциального распределения Φ_x, понимаемого как мера на группе $\mathcal{G}$, дается в терминах ее плотности по правоинвариантной мере Хаара ν на группе $\mathcal{G}$, см. (Вейль, 1950, с. 432); для рассматриваемых групп (см. п. 2.1) эта мера дается выражениями

$$\nu(dg) = dc, \quad \mathcal{G} = C, \quad d\lambda, \quad \mathcal{G} = \Lambda, \quad \frac{d\lambda}{dc}, \quad \mathcal{G} = L.$$

Положим

$$\varphi^t(g) := \frac{d\Phi^t(g)}{\nu(dg)}, \quad f_T^g(t) := \frac{dF_T^g(t)}{\nu(dt)}, \quad t \in \mathcal{G},$$

$$\varphi_x(g) := \frac{d\Phi_x(g)}{\nu(dg)}, \quad f_k^g(x) := \frac{dF_k^g(x)}{dx} = \prod_{j=1}^{k} f^g(x_j), \quad x = (x_j) \in X^k.$$

Теорема 2 (Fraser, 1961; Hora, Bueler, 1965). *Имеет место равенство*

$$\varphi_x(g) = f_k^g(x)N^{-1}, \quad N = N_k(x) := \int_{\mathcal{G}} f_k^g(x)\nu(dg), \quad k \geq d, \tag{32}$$

при этом, если семейство полно с ПДС T: $X \to \mathcal{G}$, то

$$\varphi_x(g) = \varphi^t(g) = f_T^g(t), \quad x \in X, \quad t := T(x) \in \mathcal{G}.$$

Таким образом, фидуциальной плотностью по мере Хаара является, с точностью до нормирующего множителя, функция правдоподобия (которая в случае полного семейства выражается через значение $t = T(x)$). Отсюда вытекают два важных следствия.

Следствие 1. Фидуциальное распределение является байесовским, отвечающим несобственному априорному распределению, плотность которого задается правоинвариантной мерой Хаара на группе $\mathcal{G}$.

Следствие 2. Если $\xi^k \longmapsto \theta$, то при $k \to \infty$ плотность (32) концентрируется в окрестности точки $g = \theta$ (де Грот, 1974, § 10.5).

3. ПРИНЦИП ИНЕРТНОСТИ СВОБОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Как указывалось, в основу определений 1, 2 положена фишеровская идея "обращения вероятности" с помощью экзогенных копий свободных с.в. $g^{-1}\tau$ и $g^{-1}\eta$ соответственно. Мы придаем этой интуитивной идее строгую логическую форму, которую называем *принцип инертности*.

Понятие "свободная" с.в. по своему содержанию *априорно*: после наблюдения значения $\tau = t$ (или, в общем случае, $\xi = x$) величина $g^{-1}t$ ($g^{-1}x$) уже не свободна, а является функцией параметра g. Идея "обращения вероятности" в определении 1 (или 2) равносильна следующему принципу.

Принцип инертности. При данном $t(x)$ фидуциальное распределение случайного параметра γ должно быть таким, чтобы с.в. $\gamma^{-1}t$ ($\gamma^{-1}x$) была эквивалентна априори свободной с.в. $g^{-1}\tau$ ($g^{-1}\eta$). Иначе говоря, условная с.в. ($g^{-1}\tau \mid \tau = t$, $g = \gamma'$) ($g^{-1}\eta|\eta = x$, $g = \gamma_x$) должна оставаться свободной (эквивалентной экзогенному "слепку"), т.е. она должна быть *инертной* – невосприимчивой к поступающей информации.

Покажем, что принцип инертности *универсален* в следующем смысле: фидуциальный параметр γ оставляет инертными не только свободные с.в., участвующие в определениях 1, 2, но все свободные с.в. При этом, если фидуциальный параметр γ построен в момент наблюдения k, то остаются инертными все с.в., зависящие не только от ξ^k, но и с.в., зависящие от ξ^n при произвольном $n > k$.

Сформулируем это утверждение более строго. Пусть n – некоторое натуральное число и $\psi := g^{-1}\xi^n(g)$ – случайный диполь порядка n. Этот диполь априори свободен, причем независимо от того, какова природа параметра g (неважно, является ли g неизвестной константой или случайной величиной). Однако положение меняется, если при $k \le n$ рассматривать с.в. ξ^n не априорно, а апостериорно, когда по результатам k наблюдений зафиксировано значение некоторой статистики $u = U(\xi^k)$. Тогда условная с.в. $(\psi|U(\xi^k) = u)$ уже не свободна, ее ф.р. зависит от g и u. Пусть, далее, на группе $\mathcal{G}$ задана некоторая с.в. β с распределением $\Phi^{(\beta)}$, рассматриваемая как *случайный параметр* функции распределения ВП. В этой ситуации условная с.в. $(\psi(\beta)|U(\xi^k) = u)$, распределение которой задается, по определению, формулой

$$P[\psi(\beta) \in A \mid U(\xi^k) = u] := \int\limits_{g \in \mathcal{G}} P^g[g^{-1}\xi^n(g) \in A \mid U(\xi^k) = u]\, d\Phi^{(\beta)}(g), \quad A \subset Y^n, \tag{33}$$

не эквивалентна, вообще говоря, $\mathring{\psi}$. Точный смысл принципа инертности состоит, для полных семейств, в эквивалентности

$$(\psi(\gamma^t) \mid T(\xi^k) = t) \asymp \mathring{\psi} \quad \forall (t \in \mathcal{G}, \quad n \ge k), \tag{34а}$$

левая часть понимается в смысле (33) при $\beta = \gamma^t$. В общем случае соответствующее соотношение имеет вид

$$(\psi(\gamma_x) \mid \xi^k = x) \asymp \mathring{\psi} \quad \forall (x \in X, \quad n \ge k). \tag{34б}$$

Доказательство этих соотношений опирается на следующую теорему.

Теорема 3 (Hora, Bueler, 1965). *Пусть $\mathcal{F}$ – полное семейство с ПДС T, и $\{\Phi^t, t \in \mathcal{G})$ – семейство фидуциальных распределений на пространстве параметров $\mathcal{G}$. Это семейство инвариантно сопряжено семейству $(F_T^g, g \in \mathcal{G})$ распределений ПДС в следующем смысле: для любой функции от диполя $v(g^{-1}t)$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{s\in\mathcal{G}} v(\theta^{-1}s)dF_T^\theta(s) = \int\limits_{g\in\mathcal{G}} v(g^{-1}t)d\Phi^t(g) \quad \forall(\theta\in\mathcal{G},\ t\in X_T) \tag{35а}$$

(следовательно, левая часть не зависит от θ*, правая – от t).*

В общем случае аналогичное равенство для любой функции от диполя $v(g^{-1}x)$ имеет место на семействе орбит:

$$\int\limits_{y\in\mathcal{O}} v(\theta^{-1}y)dF_T^\theta(y) = \int\limits_{g\in\mathcal{G}} v(g^{-1}x)d\Phi_x(g) \quad \forall(\theta\in\mathcal{G};\ \mathcal{O}, x\in\mathcal{O}) \tag{35б}$$

(левая часть не зависит от θ*, правая – от $\mathcal{O}$, x).*

Основное утверждение (принцип инертности). *При любом $n \geq k$ случайный диполь* $\psi = g^{-1}\xi^n(g)$ инертен в смысле (34); *в силу лемм* 3, 4 *вместе с ним инертны все свободные статистики порядка n.*

Доказательство. Сначала дадим доказательство для полного семейства. Для любого множества $A \subseteq Y^n$ имеем, в соответствии с (33):

$$\mathcal{P} := P[(\gamma^t)^{-1}\xi^n \in A \mid T(\xi^k) = t] = \int\limits_{g\in\mathcal{G}} P^g[g^{-1}\xi^n \in A \mid T(\xi^k) = t]d\Phi^t(g). \tag{36}$$

Преобразуя вероятность под интегралом

$$\begin{aligned} P^g[g^{-1}\xi^n \in A \mid T(\xi^k) = t] &= P^g[g^{-1}\xi^n \in A \mid T(g^{-1}\xi^k) = g^{-1}t] = \\ &= P[\mathring{\xi}^n \in A \mid T(\mathring{\xi}^k) = g^{-1}t], \end{aligned} \tag{37}$$

заключаем, что при фиксированном A эта вероятность есть некоторая функция v от диполя $g^{-1}t$. Применяя соотношение (35а) справа налево и полагая затем $\theta := \mathbf{1}$, получаем

$$\mathcal{P} \overset{\theta}{\equiv} \int\limits_{s\in\mathcal{G}} P[\mathring{\xi}^n \in A \mid T(\mathring{\xi}^k) = \theta^{-1}s]dF_T^\theta(s) = \int\limits_{s\in\mathcal{G}} P[(\mathring{\xi}^n \in A \mid T(\mathring{\xi}^k) = s)]dF_T(s) = P(\mathring{\xi}^n \in A); \tag{38}$$

здесь F_T – опорная ф.р. ПДС (см. (10)), последнее равенство в силу формулы полной вероятности.

Ввиду произвольности множества A для полного семейства теорема доказана.

В общем случае в (36) в качестве случайного параметра будет выступать γ_x; в выкладке (37) вместо условия $T(\xi^k) = t$ будет $\xi^k = x$. Применяя (35б), снова придем к результату (38). Утверждение доказано полностью. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулированный в работе принцип инертности свободных случайных величин имеет универсальный характер и может служить логической основой инвариантной теории фидуциальных вероятностей: фидуциальные распределения определяются принципом инертности однозначно. Это – самое важное, так как теория фидуциальных вероятностей не имела до этого строгих логических оснований. Краткая формулировка принципа инертности: “**случайные величины, свободные априорно, должны оставаться таковыми же и апостериорно**”.

Подчеркнем также, что язык изложения, принятый в статье, существенно использует понятие “условное событие”, определенное в разд. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Англо-русский словарь (1977) / Под ред. В.К. Мюллера. М.: Русский язык.

Беленький В.З. (1990): Связь фидуциальных вероятностей с принципом инертности свободных случайных величин. В сборнике докладов научного семинара ЦЭМИ РАН "*Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов*". М.: Наука.

Вейль А. (1950): Интегрирование в топологических группах и его применения. М.: ИЛ.

Гнеденко Б.В. (1965): Курс теории вероятностей. М.: Наука.

Гнеденко Б.В. (2005): Курс теории вероятностей. М.: Изд-во МГУ, серия "Классический университетский учебник".

Де Гроот М. (1974): Оптимальные статистические решения. М.: Мир.

Закс Ш. (1975): Теория статистических выводов. М.: Мир.

Климов Г.П. (1973): Инвариантные выводы в статистике. М.: Изд-во МГУ.

Климов Г.П. (1983): Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд-во МГУ.

Климов Г.П., Кузьмин А.Д. (1975): Инвариантные оценки // *Теория вероятностей и ее применения.* Т. XX. Вып. 2.

Колмогоров А.Н. (1942): Определение центра рассеивания и меры точности по ограниченному числу наблюдений // *Изв. АН СССР. Сер. "Математика"*. Т. 6. № 1. С. 3–32.

Леман Э. (1979): Проверка статистических гипотез. М.: Наука.

Феллер В. (1967): Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир.

Ширяев А.Н. (2007): Вероятность – 1. М.: МЦНМО.

Barnard G.A. (1963): Some Logical Aspects of the Fiducial Argument // *J. of the Royal Statistical Society*. Series B (Statistical Methodology). Vol. 25. № 1. P.111–114.

Basu D. (1955): On Statistics Independent of a Complete Sufficient Statistic // *Sankhaya*. Vol. 15. P. 377–380.

Basu D. (1958): On Statistics Independent of a Complete Sufficient Statistic // *Sankhaya*. Vol. 20. P. 223–226.

Dempster A.P. (1963): On Direct Probabilities // *J. of the Royal Statistical Society*. Series B (Statistical Methodology). Vol. 25. № 1. P. 100–110.

Fisher R.A. (1933): The Concepts of Inverse Probability and Fiducial Probability Referring to Unknown Parameters // *Proceedings of the Royal Society.* London. A139. P. 343–348.

Fisher R.A. (1935): The Fiducial Argument in Statistical Inference // *Annals of Eugenics*. Vol. 6. P. 391–398.

Fraser D.A.S. (1961): The Fiducial Method and Invariance // *Biometrica*. Vol. 48. P. 261–280.

Hampel F. (2003): The Proper Fiducial Argumet // *Research Report of Seminar for Statistik*. CH-8092. Zrichf. № 114. February.

Healy M.J.R. (1963): Fiducial Limits for a Variance Component // *J. of the Royal Statistical Society*. Series B (Statistical Methodology). Vol. 25. № 1. P.128–130.

Heike H.D., Tarcolea C., Demetrescu M. et al. (2003): Fiducial Inference for Discrete and Continuous Distributions. In "*Proceedings of 2-nd International Colloquium of MENP*". Proccedings. Vol. 8. P. 69–80. Geometry Balkan Press.

Hora R.B., Bueler R.J. (1965): Fiducial Theory and Invariant Estimation // *The Annals of Math. Statistics.* Vol. 37. P. 643–656.

Kyburg H.E. (1983): Epistemology and Inference. Minneapolis: Univ. of Minnesota.

Neyman J. (1934): On the Two Different Aspects of the Representative Method: the Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selection // *J. of the Royal Statistical Society.* Vol. 97. P. 558.

Williams E.J. (1963): A Comparison of the Direct an Fiducial Arguments in the Estimation of a Parameter // *J. of the Royal Statistical Society*. Series B (Statistical Methodology). Vol. 25. № 1. P. 95–99.

Поступила в редакцию
08.12.2010 г.

Logical Basis for Fiducial Probabilities Theory: Inertness Principle

V.Z. Belenky, A.A. Zaslavsky

Invariant theory of fiducial probabilities is based on Fisher's heuristic "inversity" idea. Search for foundation of this idea is an actual problem until today. Authors formulate logically clear "inertness principle": "random values which are free a priory must also to be free a posteriory". It is shown that this principle may be accepted to the logic basis for fiducial theory as a whole.

Keywords: invariant families of distribution, free random values, fiducial probabilities, inertness principle.