ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 2, с. 3–23

НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ОБЪЕМОВ ПРОИЗВОДСТВА В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СПРОСА

© 2011 г. В.В. Бухвалова, А.В. Петрусевич

(Санкт-Петербург)

Предлагается алгоритм определения объемов производства, минимизирующих издержки фирмы в условиях информационной неопределенности спроса. Данная статья основывается на работе (Alpern, Snower, 1987). Главным отличием рассмотренных в статье моделей является предположение о возможном изменении величины спроса с постоянным известным темпом от периода к периоду. Исследован случай конечного горизонта планирования.

Ключевые слова: стохастическая модель, объем производства, неопределенность спроса, оптимальная стратегия.

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается задача определения оптимальных объемов производства для фирмы в условиях информационной неопределенности спроса. Предполагается, что фирма является производителем однотипной продукции и обладает монопольной силой. Горизонт планирования разбивается на одинаковые по длительности периоды, в каждом из которых спрос равен определенной, но неизвестной фирме величине. Известным предполагается только интервал спроса, заданный своими нижней и верхней границами. Никакое возможное значение спроса из этого интервала не является предпочтительным. Поэтому мы моделируем информационную неопределенность спроса как равномерное распределение на интервале. Объем производства выбирается из текущего интервала спроса. В зависимости от того, насколько объем производства отличается от величины спроса, фирма несет издержки либо от недостатка произведенной продукции, либо от ее избытка. В работе предлагается алгоритм определения объемов производства, минимизирующих эти издержки, для случая конечного и бесконечного горизонтов планирования.

Данное исследование основывается на работе (Alpern, Snower, 1987). Главным отличием рассмотренных ниже моделей от модели Алперна–Сноуера является предположение о возможном изменении величины спроса с постоянным известным темпом от периода к периоду. Данное предположение потребовало доказательство дополнительных свойств модели. Кроме этого, авторам впервые был проанализирован случай конечного горизонта планирования. В отличие от бесконечного случая задача сводится к решению трехдиагональной системы линейных уравнений. Решение этой системы представлено в виде рекуррентных формул.

Актуальность задач производственного планирования с учетом неопределенности подтверждает множество исследований, с обзором которых можно ознакомиться в работах (Yano, Lee, 1995; Sethi et al., 2002; Mula et al., 2006). В рамках нашей статьи мы не рассматриваем вопрос ограниченности производственных мощностей и допускаем, что в каждый период фирма обладает достаточными мощностями для производства продукции на уровне верхней границы интервала спроса. Предполагаем также, что изменение объемов производства не влияет на оптимальное использование факторов производства. В связи с этим исследуемая задача об объемах производства может рассматриваться как родственная задаче управления запасами. Проблемам оптимального управления запасами посвящено значительное число отечественных исследований. Ряд математических моделей материально-технического снабжения изучен в работах Е.А. Хруцкого (Хруцкий, Геромимус, 1974; Хруцкий, 1977; Хруцкий, Сакович, 1978). Рассмотрение базовых моделей управления запасами можно найти в (Рыжиков, 1969, Рыжиков, 2001), где особый акцент сделан на применении теории массового обслуживания.

Задача определения объемов производства требует особого внимания со стороны руководства компании. Ошибка в решении данного вопроса может привести к серьезным последствиям. В качестве подтверждающего примера приведем историю завода по сборке легковых автомобилей компании Ford, открытом в 2002 г. во Всеволожске (первой производимой на нем моделью стал автомобиль Ford Focus). В связи со стремительным ростом российского автомобильного рынка в период с 2002 по 2007 г. и выбором недостаточной мощности завода на рынке в течение этого времени сохранялся дефицит автомобилей Ford Focus (для того чтобы купить автомобиль, необходимо было около полугода стоять в очереди[1]). Неправильный выбор мощности стал причиной неспособности компании удовлетворить спрос, в результате чего компания Ford понесла значительные альтернативные издержки.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 рассмотрена модель определения оптимальных объемов производства в случае бесконечного горизонта планирования и спроса, равного определенной, но неизвестной величине. Предполагается, что спрос изменяется в постоянном известном темпе от периода к периоду. В разд. 2 анализируется модель, которая отличается от первой только конечностью горизонта планирования. В обеих моделях целью фирмы является минимизация издержек. В первом случае решение задачи получено в явном виде, а во втором – решение оптимизационной задачи задается рекуррентным соотношением. Исходя из равномерного распределения величины спроса, может показаться, что целесообразно использовать интуитивно понятную стратегию деления отрезка пополам (объем предложения равен середине текущего интервала спроса). В разд. 3 на численном примере будет показано, что такая стратегия может быть далека от оптимальной. В разд. 4 результаты работы применены к анализу производства компании Ford во Всеволожске.

1. МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ОБЪЕМОВ ПРЕДЛОЖЕНИЯ: БЕСКОНЕЧНЫЙ ГОРИЗОНТ ПЛАНИРОВАНИЯ

1.1. Постановка задачи. Имеется фирма, производящая товары одного вида. Фирма планирует свое производство на неограниченное число одинаковых по длительности периодов, в каждом из которых она производит и поставляет на рынок некоторое количество продукции. Введем следующие обозначения: f – себестоимость единицы продукции; p – цена реализации единицы продукции (устанавливается фирмой), $p > f$; Q_k – количество продукции, производимое фирмой в период k; I_{k-1} – количество продукции, непроданной в период $k-1$; $I_{k-1} = 0$ – дефицит продукции в период $k-1$; $I_{k-1} > 0$ – избыток продукции в период $k-1$; h – стоимость хранения одной единицы продукции в течение периода; δ – скорость обесценивания продукции[2] ($0 \le \delta \le 1$); G_k – количество продукции, поставляемое на рынок в период k (предложение фирмы); $G_1 = Q_1$, $G_k = I_{k-1} + Q_k$, $k \ge 2$; α – ставка дисконтирования денежного потока издержек фирмы, $\alpha \ge 0$. Коэффициент дисконтирования β вычисляется по формуле:

$$\beta = 1/(1+\alpha).$$

Величина спроса на продукцию неизвестна, но фирма имеет следующую информацию:

– в первый период спрос равен D – реализации равномерно распределенной на $\left[\underline{D}, \overline{D}\right]$ (интервале спроса) случайной величины;

– далее спрос изменяется по закону геометрической прогрессии: в период k спрос равен γ^{k-1}, где $\gamma > 0$ – темп изменения спроса. При $\gamma < 1$ спрос с течением времени уменьшается, а при $\gamma > 1$ – увеличивается. Если $\gamma = 1$, то имеет место модель с неизменным спросом.

[1] См. информацию, размещенную на сайте http://www.autonews.ru.

[2] В работе (Alpern, Snower, 1987) параметр δ определял количественное уменьшение излишка продукции к следующему периоду. По нашему мнению, предположение об обесценивании продукции более естественно, в особенности по отношению к рассмотренному в статье примеру с автомобилями.

Предполагается, что фирме известны все параметры модели: $\underline{D}$, $\overline{D}$, p, f, h, α, δ и γ. Они фиксированы и с течением времени не меняются.

В конце каждого периода k фирма, анализируя величину излишков I_k, приходит к одному из двух заключений.

1. Если на рынке имеет место дефицит ($I_k = 0$), то текущая величина спроса больше либо равна количеству продукции, произведенной и поставленной на продажу в период k, т.е. $G_k \le \gamma^{k-1}D$. В этом случае спрос лежит в интервале $[G_k, \gamma^{k-1}\overline{D}]$. Учитывая изменение спроса, следующее предложение G_{k+1} будет выбрано из интервала $[\gamma G_k, \gamma^k \overline{D}]$.

2. Если на складе осталось некоторое количество продукции ($I_k > 0$), то спрос равен разности между величиной предложения и излишками: $\gamma^{k-1}D = G_k - I_k$. Следовательно, объемы предложения фирмы в последующих периодах вычисляются по формулам:

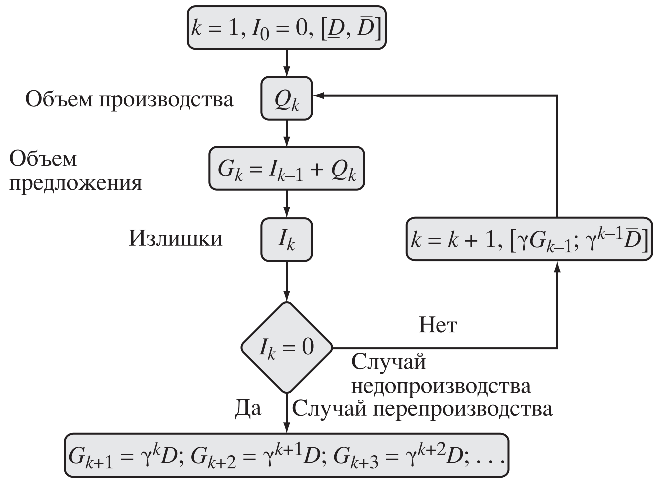

Рис. 1. Динамическая структура определения объемов предложения

$$G_{k+1} = \gamma^k D;\quad G_{k+2} = \gamma^{k+1} D;\ G_{k+3} = \gamma^{k+2} D;\ \ldots$$

Действия фирмы показаны на рис. 1. В начале каждого периода фирма производит некоторое количество продукции: объем производства выбирается из известного интервала спроса. Произведенная продукция и ее остатки (если таковые имеются) формируют предложение фирмы в данный период. В конце периода анализируется количество продукции, оставшееся на складе. Если остатков нет (случай недопроизводства), то в данный период имел место дефицит продукции. Таким образом, сокращая интервал спроса, фирма уточняет свою информацию о величине спроса, и в следующий период объем производства будет выбран из сокращенного интервала. Если же на складе образовались ненулевые остатки (случай перепроизводства), то в данный период объем предложения был больше спроса. В этом случае фирма узнает точную величину спроса, и в последующие периоды производство будет планироваться так, чтобы объем предложения фирмы был равен известной величине спроса.

Рассмотрим случай, когда единственным источником информации о фактической величине спроса являются остатки продукции. Образование остатков гарантирует определение точной величины спроса, но при этом возникают издержки, которые фирма понесет в результате хранения продукции и ее обесценивания к следующему периоду. Таким образом, для снижения издержек фирме нужно стремиться к тому, чтобы остатков на складе было как можно меньше. Будем считать, что в каждый период k возможное количество излишков I_k таково, что их можно полностью продать в период $k + 1$. Докажем, что для этого достаточно потребовать выполнения следующего условия:

$$(1+\gamma)\underline{D} \ge \overline{D}. \tag{1}$$

Действительно, пусть в период k на складе возникли излишки $I_k > 0$. Спрос в период $k + 1$ равен $\gamma^k D$, поэтому достаточно проверить, что $\gamma^k D \ge I_k$:

$$\gamma^k D - I_k = \gamma^k D - (G_k - \gamma^{k-1} D) = \gamma^{k-1}(1+\gamma)D - G_k \ge \gamma^{k-1}\left((1+\gamma)\underline{D} - \overline{D}\right) \ge 0.)$$

Условие (1) является ключевым в рассматриваемой модели, так как полная продажа излишков в следующем периоде упростит вид целевой функции ожидаемых издержек. Из этого условия и принципа минимизации издержек следует, что возникновение излишков продукции возможно лишь однажды, в связи с чем объемы производства и объемы предложения совпадают во всех периодах, кроме одного, – следующего за периодом, в котором произошло перепроизводство продукции. Обозначим через N – номер периода, в котором была реализована не вся продукция, тогда объемы производства и объемы предложения связаны следующими формулами:

$$Q_1 = G_1; \dots; Q_N = G_N;\ Q_{N+1} = G_{N+1} - I_N;\ Q_{N+2} = G_{N+2}; \dots$$

В ходе исследования модели мы будем искать объемы предложения. Зная величину предложения для данного периода и количество продукции, не реализованной в предыдущем периоде, фирма легко сможет определить уровень производства для формирования объема предложения, удовлетворяющего спрос.

Назовем *допустимой стратегией объемов предложения* набор чисел $S = (S_1,\ S_2,\ \dots)$, где $S_1 \in [\underline{D}, \overline{D}]$ и $S_k \in [\gamma S_{k-1}, \gamma^{k-1}\overline{D}]$, $k \geq 2$. Объемы предложения на основе стратегии S вычисляются по правилу:

– количество продукции G_1, поставляемое на продажу в первом периоде, равно S_1;

– в случае дефицита продукции в период $k - 1$ ($I_{k-1} = 0$) выбираем $G_k = S_k$;

– в случае избытка продукции в период $k - 1$ ($I_{k-1} > 0$) выбираем $G_t = \gamma^{t-1}D$, $t \geq k$.

Обозначим через $\mathbb{S}$ – множество допустимых стратегий:

$$\left\{\mathbb{S} = S = (S_1, S_2, \dots)\,\middle|\, S_1 \in \left[\underline{D}, \overline{D}\right];\ S_k \in \left[\gamma S_{k-1}, \gamma^{k-1}\overline{D}\right],\ k \geq 2\right\}.$$

1.1.1. *Издержки от недопроизводства и перепроизводства.* До момента выявления точной величины спроса имеет место одна из двух ситуаций: недопроизводство или перепроизводство. В первом случае фирма терпит издержки, связанные с дефицитом продукции на рынке, во втором – издержки, связанные с хранением и обесцениванием остатков. Выведем формулы для вычисления издержек обоих видов при заданной стратегии объемов предложения $(S_1, S_2, \dots)$.

Рассмотрим период k. Если в нем произошло недопроизводство ($S_k = G_k < \gamma^{k-1}D$), то недополученная в этом периоде прибыль фирмы (альтернативные издержки) равна $(p - f)(\gamma^{k-1}D - S_k)$. Вычислим величину издержек в случае перепроизводства ($S_k = G_k > \gamma^{k-1}D$), связанных с преждевременным производством излишков $I_k = S_k - \gamma^{k-1}D$ в период k, а не в период $k + 1$. В силу предположения (1) эти излишки полностью реализуются в период $k + 1$. На производство в период k была затрачена сумма fI_k, а на хранение – hI_k. После продажи излишков в период $k + 1$ фирма получает выручку $p(1 - \delta)I_k$. Дисконтируя последнюю сумму к периоду k, получаем формулу для прибыли от продажи излишков I_k:

$$\big(\beta p(1-\delta) - (f + h)\big)(S_k - \gamma^{k-1}D). \tag{2}$$

Если бы фирма произвела излишки I_k в период $k + 1$ и в этом же периоде их реализовала, то прибыль была бы равна $(p - f)I_k$. Дисконтируя эту величину к периоду k, получаем:

$$\big(\beta(p-1)\big)(S_k - \gamma^{k-1}D). \tag{3}$$

Вычитая величину (2) из (3), получаем издержки фирмы от перепроизводства:

$$\big(\beta(p - f) - \beta p(1-\delta) + (f+h)\big)(S_k - \gamma^{k-1}D) = (\beta p\delta - \beta f + f + h)(S_k - \gamma^{k-1}D).$$

Обозначим через c_k – издержки фирмы в период k. В зависимости от результатов продаж они вычисляются по формуле:

$$c_k = \begin{cases} A(\gamma^{k-1}D - S_k) - \text{недопроизводство в период } k; \\ B(S_k - \gamma^{k-1}D) - \text{недопроизводство в период } k; \end{cases}$$

где $A = p - f$; $B = \beta p\delta - \beta f + f + h$.

1.1.2. *Задача оптимизации.* Обозначим через c – суммарные издержки фирмы, дисконтированные к первому периоду; E – оператор математического ожидания; $\Delta = \overline{D} - \underline{D}$ – длину интервала спроса в первом периоде. Математическое ожидание суммарных издержек вычисляется по формуле:

$$E[c]=P(\underline{D}\le D\le S_1)E[c\,|\,\underline{D}\le D\le S_1]+P\left(S_1\le D\le \frac{S_2}{\gamma}\right)E\left[c\left|\,S_1\ge D>\frac{S_2}{\gamma}\right.\right]+$$
$$+P\left(\frac{S_2}{\gamma}\le D\le \frac{S_3}{\gamma^2}\right)E\left[c\left|\,\frac{S_2}{\gamma}\le D\le \frac{S_3}{\gamma^2}\right.\right]+\ldots \quad (4)$$

Далее будем рассматривать следующую задачу оптимизации:

$$E[c]\to\min_S, \quad (5)$$

где $S\in\mathbb{S}=\left\{S=(S_1,S_2,\ldots)\,\middle|\,S_1\in\left[\underline{D},\overline{D}\right];\ S_k\in\left[\gamma S_{k-1},\gamma^{k-1}\overline{D}\right],\ k\ge 2\right\}$.

По условию задачи спрос D в первом периоде – реализация равномерно распределенной на интервале спроса $[\underline{D},\overline{D}]$ случайной величины. Подставляя в (4) формулы для вероятностей и условных математических ожиданий, получаем:

$$E[c]=\frac{1}{\Delta}B(S_1-Y)dY+\frac{1}{\Delta}\int_{S_1}^{S_2/\gamma}\big(A(Y-S_1)+\beta B(S_2-\gamma Y)\big)dY+$$
$$+\frac{1}{\Delta}\int_{S_2/\gamma}^{S_3/\gamma^2}\big(A(Y-S_1)+\beta A(\gamma Y-S_2)+\beta^2B(S_3-\gamma^2Y)\big)dY+\ldots=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\left[\int_{\underline{D}}^{S_1}B(S_1-Y)dY+\int_{S_1}^{\overline{D}}A(Y-S_1)dY\right]+\frac{\beta}{\Delta}\left[\int_{S_1}^{S_2/\gamma}B(S_2-\gamma Y)dY+\int_{S_2/\gamma}^{\overline{D}}A(\gamma Y-S_2)dY\right]+$$
$$+\frac{\beta^2}{\Delta}\left[\int_{S_2/\gamma}^{S_3/\gamma^2}B(S_3-\gamma^2Y)dY+\int_{S_3/\gamma^2}^{\overline{D}}A(\gamma^2Y-S_3)dY\right]+\ldots$$

Первое слагаемое – ожидаемые издержки в первом периоде, второе – дисконтированные к первому периоду ожидаемые издержки во втором периоде и т.д. Вычисляя интегралы, выводим формулу для суммарных ожидаемых издержек, дисконтированных к первому периоду:

$$E[c]=\frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1-\underline{D})^2+A(\overline{D}-S_1)^2\right]+\frac{\beta}{2\Delta\gamma}\left[B(S_2-\gamma S_1)^2+A(\gamma\overline{D}-S_2)^2\right]+$$
$$+\frac{\beta^2}{2\Delta\gamma^2}\left[B(S_3-\gamma S_2)^2+A(\gamma^2\overline{D}-S_3)^2\right]+\ldots \quad (6)$$

После преобразования функции издержек $E[c]$ задача оптимизации принимает вид:

$$E[c]=\frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1-\underline{D})^2+A(\overline{D}-S_1)^2\right]+\frac{1}{2\Delta}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{k-1}\Big[B(S_k-\gamma S_{k-1})^2+$$
$$+A\left(\gamma^{k-1}\overline{D}-S_k\right)^2\Big]\to\min_S, \quad (7)$$

где $S\in\mathbb{S}=\left\{S=(S_1,S_2,\ldots)\,\middle|\,S_1\in\left[\underline{D},\overline{D}\right];\ S_k\in\left[\gamma S_{k-1},\gamma^{k-1}\overline{D}\right],\ k\ge 2\right\}$.

В задаче оптимизации (7) возможна следующая замена переменной[3]: $\widehat{S}_k = S_k \gamma^{1-k}$, $k \geq 1$. После этой замены задача превращается в задачу с неизменным во все периоды спросом и "коэффициентом дисконтирования", равным $\gamma\beta$. Результаты, полученные в работе (Alpern, Snower, 1987), применимы к преобразованной задаче только для случая $\gamma\beta < 1$. Однако в нашей работе мы снимаем это ограничение.

1.2. Оптимальные объемы предложения. Выведем формулу для вычисления оптимальных объемов предложения в каждый период. Для этого докажем следующие леммы, являющиеся свойствами исследуемой оптимизационной задачи (7).

Лемма 1. *Для целевой функции задачи* (7) *выполнена следующая оценка:*

$$\min_{S \in \mathbb{S}} E[c] \geq V,$$

где V – положительный корень квадратного уравнения

$$4\gamma\beta V^2 + 2\Delta(A + B - \gamma\beta B)\, V - \Delta^2 AB = 0 \tag{8}$$

и равно

$$V = \left(-\Delta(A + B - \gamma\beta B) + \Delta\sqrt{(A + B - \gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}\right)/4\gamma\beta. \tag{9}$$

Доказательство леммы приведено в приложении.

Лемма 2. *Пусть $\gamma > 0$ – темп изменения спроса, а $[\underline{D}, \overline{D}]$ – интервал спроса, удовлетворяющий условию* (1). *Рассмотрим следующие задачи оптимизации:*

1) задача (7) *с фиксированным γ и интервалом спроса $[\underline{D}, \overline{D}]$;*

2) задача (7) *с тем же γ и единичным интервалом спроса* $[0, 1]$.

Обозначим через Λ множество допустимых решений этой задачи. Каждому $(S_1, S_2, ...) \in \mathbb{S}$ поставим в соответствие вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \Lambda$ по правилу:

$$S_1 = \Delta\lambda_1 + \underline{D}; \quad S_2 = \Delta\lambda_2 + \gamma\underline{D}; \quad S_3 = \Delta\lambda_3 + \gamma^2\underline{D}; \quad \ldots$$

Тогда, если $(S_1^*, S_2^*, \ldots) \in \mathbb{S}$ является оптимальным решением задачи 1, *то соответствующий вектор $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots) \in \Lambda$ – оптимальное решение задачи* 2, *и наоборот.*

Доказательство леммы приведено в приложении.

Лемма 2 устанавливает связь между оптимальными решениями задач оптимизации (в случае их существования) в общей постановке и для единичного интервала спроса.

Лемма 3. *Необходимое условие оптимальности решения задачи* (7). *Если в задаче* (7) *существует оптимальное решение $S^* = (S_1^*, S_2^*, \ldots)$, тогда для объемов предложения S_k^* при $k \geq 1$ выполнены равенства:*

$$S_k^* = \gamma^{k-1}\left(\overline{D} - \Delta(1 - \lambda^*)^k\right), \quad k \geq 1, \ \lambda^* = \lambda_1^* \in [0,1]. \tag{10}$$

Доказательство леммы приведено в приложении.

Используя леммы 1–3, можно доказать теорему.

Теорема 1. *В условиях модели определения оптимальных объемов предложения в случае бесконечного горизонта планирования существует единственное решение оптимизационной задачи* (7) *– оптимальная стратегия $S^* = (S_1^*, S_2^*, \ldots) \in \mathbb{S}$, в которой объемы предложения S_k^* при $k \geq 1$ вычисляются по формулам:*

$$S_k^* = \gamma^{k-1}\left(\overline{D} - \Delta(1 - \lambda^*)^k\right), \quad k \geq 1,$$

где

$$\lambda^* = \left(\gamma\beta B - A - B + \sqrt{(A + B - \gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}\right)/2\gamma\beta B.$$

[3] Мы благодарны рецензенту за это замечание.

Дисконтированные к первому периоду ожидаемые издержки в период k и общие ожидаемые издержки равны:

$$E[c_k]^* = 0.5\Delta\gamma^{k-1}\beta^{k-1}\left[B\lambda^{*2}(1-\lambda^*)^{2k-2} + A(1-\lambda^*)^{2k}\right], \quad E[c]^* = \frac{B\Delta\lambda^{*2} + A\Delta(1-\lambda^*)^2}{2 - 2\gamma\beta(1-\lambda^*)^2}.$$

Ожидаемые остатки в период k и общие ожидаемые остатки вычисляются по формулам[4]:

$$E[I_k]^* = 0.5\Delta\gamma^{k-1}\lambda^{*2}(1-\lambda^*)^{2k-2}, \quad E[I]^* = 0.5\Delta\lambda^{*2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^{k-1}(1-\lambda^*)^{2k-2}.$$

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Использование утверждений теоремы 1 в управлении предполагает выполнение следующих шагов.

1. Определение длины периода. Длина одного периода должна быть достаточна для производства продукции, распределения ее по точкам сбыта и анализа итогов реализации.

2. Расчет интервала спроса в первом периоде $[\underline{D}, \overline{D}]$, а также темпа изменения спроса γ. Данные по спросу должны удовлетворять условию (1).

3. Нахождение остальных параметров модели: себестоимости единицы продукции f, цены реализации p, стоимости хранения h, ставки дисконтирования α и скорости обесценивания продукции δ.

4. Вычисление оптимальных объемов предложения G_k, ожидаемых издержек c_k и ожидаемых уровней остатков I_k по формулам теоремы 1. Зная оптимальный объем предложения и результаты продаж в текущем периоде, фирма находит оптимальный объем производства для следующего периода.

Теорема 1 дает ответ на вопрос об оптимальных объемах предложения в случае бесконечного горизонта планирования. Главным преимуществом решения в бесконечном случае является его запись в явной форме, что значительно облегчает процесс анализа этого решения.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ОБЪЕМОВ ПРЕДЛОЖЕНИЯ: СЛУЧАЙ КОНЕЧНОГО ГОРИЗОНТА ПЛАНИРОВАНИЯ

При анализе случая конечного горизонта планирования все условия предыдущей модели сохраняются, за исключением одного – планируется производство на T одинаковых периодов ($T < \infty$).

2.1. Постановка задачи и нахождение оптимального решения. Также как и раньше, предполагается, что спрос в первом периоде D – реализация равномерно распределенной на $[\underline{D}, \overline{D}]$ случайной величины. В период k спрос равен γ^{k-1}, где $\gamma < 0$ – темп изменения спроса. И пусть выполняется условие (1): $(1+\gamma)\underline{D} \geq \overline{D}$.

Фирма производит продукцию с себестоимостью f и продает ее по цене p за единицу товара. Предложение фирмы в период k формируется из произведенной в этом периоде продукции Q_k и остатков I_{k-1}. Если $I_k = 0$, то в период k была распродана вся продукция. В этом случае фирма терпит альтернативные издержки: $c_k = A(\gamma^{k-1}D - G_k)$ где $A = p - f$.

Если $I_k > 0$, то в период k имело место перепроизводство продукции, фирма терпит фактические издержки c_k, связанные с хранением продукции (h за единицу) и ее обесцениванием со скоростью δ: $c_k = B(G_k - \gamma^{k-1}D)$, где $B = \beta p\delta - \beta f + f + h$.

После T периодов ($T < \infty$) фирма окажется в одной из трех ситуаций:

– во всех T периодах имело место недопроизводство. В каждый период фирма уточняла информацию о спросе, но точную его величину так и не определила;

[4] Заметим, что при некоторых значениях начальных параметров модели (когда $\gamma(1 - \lambda^*)^2 \geq 1$) общие ожидаемые остатки могут быть бесконечными. Мы благодарны рецензенту за это замечание.

– в период $N = 1, .., T - 1$ произошло перепроизводство продукции. В этом случае фирма успела полностью реализовать образовавшиеся остатки и определить точную величину спроса;

– перепроизводство произошло в период T. Это означает, что к концу горизонта планирования фирма узнает точную величину спроса, но при этом остается нереализованная продукция. Предполагаем, что фирма реализует эти остатки в период $T+1$.

Аналогичным образом сформируем множество допустимых стратегий $\mathbb{S}$:

$$S \in \mathbb{S} = \left\{ S = (S_1, S_2, \ldots, S_T) \,\middle|\, S_1 \in \left[\underline{D}, \overline{D}\right];\ \ S_k \in \left[\gamma S_{k-1}, \gamma^{k-1}\overline{D}\right],\ \ k \in 2\colon T \right\}.$$

Повторяя преобразования, выполненные для предыдущей модели, получаем оптимизационную задачу поиска оптимальной стратегии объемов предложения:

$$E[c] = \frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2\right] + \frac{1}{2\Delta}\sum_{k=2}^{T}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{k-1}\left[B(S_k - \gamma S_{k-1})^2 + A(\gamma^{k-1}\overline{D} - S_k)^2\right] \to \min_S, \quad (11)$$

где $S \in \mathbb{S} = \left\{ S = (S_1, \ldots, S_T) \,\middle|\, S_1 \in \left[\underline{D}, \overline{D}\right];\ \ S_k \in \left[\gamma S_{k-1}, \gamma^{k-1}\overline{D}\right],\ \ k \in [2, \ldots, T] \right\}..$

Для задачи (11) верна следующая теорема.

Теорема 2. *В условиях модели определения оптимальных объемов предложения в случае конечного горизонта планирования существует единственное решение оптимизационной задачи (11) – оптимальная стратегия* $S^* = (S_1^*, \ldots, S_T^*) \in \mathbb{S}$, *которая является решением системы линейных уравнений:*

$$\begin{pmatrix} A+B+\gamma\beta B & -\beta B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\gamma B & A+B+\gamma\beta B & -\beta B & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma B & A+B+\gamma\beta B & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A+B+\gamma\beta B & -\beta B \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\gamma B & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{T-1} \\ S_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\overline{D} + B\underline{D} \\ \gamma A\overline{D} \\ \gamma^2 A\overline{D} \\ \vdots \\ \gamma^{T-2} A\overline{D} \\ \gamma^{T-1} A\overline{D} \end{pmatrix}.$$

Полученная система может быть решена методом прогонки и имеет решение:

$$S_T^* = \frac{\gamma^{T-1} A\overline{D} + \gamma B v_T}{A + B - \gamma B u_T}, \ \ S_i^* = u_{i+1} S_{i+1} + v_{i+1}, \quad i = T-1, \ldots, 1.$$

Прогоночные коэффициенты вычисляются по формулам:

$$u_2 = \frac{\beta B}{A + B + \gamma\beta B}, \quad v_2 = \frac{A\overline{D} + B\underline{D}}{A + B + \gamma\beta B};$$

$$u_{i+1} = \frac{\beta B}{A + B + \gamma\beta B - \gamma B u_i},$$

$$v_{i+1} = \frac{\gamma^{i-1} A\overline{D} + \gamma B v_i}{A + B + \gamma\beta B - \gamma B u_i}, \quad i = 2, \ldots, T-1.$$

Доказательство теоремы приведено в приложении.

3. СРАВНЕНИЕ СТРАТЕГИЙ

В предыдущих разделах мы проанализировали две модели поиска оптимальных объемов предложения фирмы в условиях информационной неопределенности спроса – с конечным и бесконечным горизонтами планирования. В данном разделе рассмотрим числовой пример и сравним различные стратегии. В каждый период наилучшим с точки зрения издержек будет предложение, объем которого равен текущей величине спроса. Поскольку спрос в каждый период фиксирован и является реализацией равномерно распределенной на интервале спроса случайной величины, то среднее значение спроса совпадает с серединой интервала спроса. Поэтому, кроме двух полученных ранее стратегий, естественно подвергнуть анализу третью очевидную стратегию деления отрезка пополам, при которой объем предложения равен середине текущего интервала спроса.

Положим следующие значения параметров моделей: горизонт планирования $T = 4$; интервал спроса в первом периоде [10, 20]. Темп изменения спроса $\gamma = 2$ (спрос на продукцию фирмы увеличивается на 100%); данные по спросу удовлетворяют условию (1); себестоимость единицы продукции $f = 16$; установленная фирмой цена реализации единицы продукции $p = 18$; стоимость хранения единицы продукции $h = 10$; скорость обесценивания $\delta = 0.2$ (продажа остатков продукции в следующем периоде будет производиться с дисконтом в 20%); ставка дисконтирования денежного потока потерь фирмы $\alpha = 1$.

По этим данным находим коэффициент дисконтирования β и константы A, B, Δ:

$$\beta = 1/(1+\alpha) = 0.5;\quad A = p - f = 2;\quad B = \beta p\delta - \beta f + f + h = 19.8;\quad \Delta = \overline{D} - \underline{D} = 10.$$

Имеются следующие стратегии:

1) оптимальная стратегия $S^{\infty *}$ для модели с бесконечным горизонтом планирования; компоненты которой вычисляются по формулам из теоремы 1;

2) оптимальная стратегия S^* для модели с конечным горизонтом планирования; стратегия S^* является решением системы линейных уравнений, приведенной в теореме 2;

3) стратегия деления отрезка пополам $\widetilde{S}$, при которой объем каждого предложения определяется как середина текущего интервала спроса:

$$\widetilde{S}_1 = \underline{D} + 0.5\Delta;$$

$$\widetilde{S}_k = \gamma\,\widetilde{S}_{k-1} + 0.5\left(\gamma^{k-1}\overline{D} - \gamma\widetilde{S}_{k-1}\right) = \ldots = \gamma^{k-1}(\overline{D} - \Delta/2^k),\quad k \geq 2.$$

Вычислим объемы предложения, ожидаемые издержки и остатки для четырех периодов.

Объемы предложения. В табл. 1 представлены объемы предложения трех стратегий для четырех периодов. На рис. 2 видим, что $S_k^{\infty *} > S_k^*$ для каждого k. Это свойство будет выполняться при любых допустимых значениях параметров моделей, что следует из определения стратегий $S^{\infty *}$ и $\widetilde{S}$. Для данного примера выполнено, что $\widetilde{S}_k > S_k^{\infty *} > S_k^*$;

Таблица 1. Объемы предложения для трех стратегий

Период	s^*	$s^{\infty *}$	$\tilde{s}$
1	12.36	12.71	15.00
2	27.90	29.38	35.00
3	59.71	64.52	75.00
4	123.14	137.44	155.00

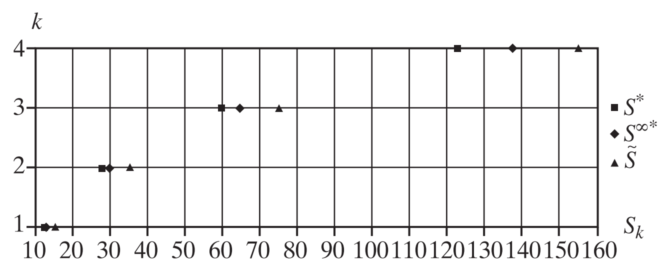

Рис. 2. Объемы предложения для трех стратегий

Таблица 2. Приведенная величина ожидаемых издержек для трех стратегий

Период	s^*	$s^{\infty*}$	$\tilde{s}$
1	11.35	12.60	27.25
2	6.16	6.69	6.81
3	3.52	3.55	1.70
4	2.54	1.89	0.43
$\sum$	23.37	24.72	36.19

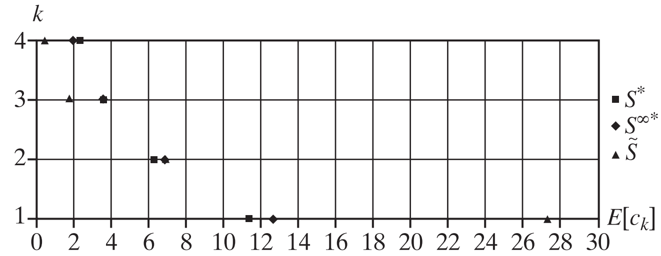

Рис. 3. Приведенная величина ожидаемых издержек для трех стратегий

Ожидаемые издержки. Рассмотрим стратегию $S \in \mathbb{S}$. Дисконтированная величина ожидаемых потерь для стратегии S в период k вычисляется по формулам:

$$E[c_1] = \frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2\right], \quad k = 1,$$

$$E[c_k] = \frac{\beta^{k-1}}{2\Delta\gamma^{k-1}}\left[B(S_k - \gamma S_{k-1})^2 + A(\gamma^{k-1}\overline{D} - S_k)^2\right], \quad k \geq 2.$$

Подставляя в эти формулы данные примера, получаем величины ожидаемых издержек для трех стратегий.

Из табл. 2 и рис. 3 видно, что стратегия $\widetilde{S}$, несмотря на меньшие издержки в третьем и четвертом периодах, проигрывает по суммарным издержкам. Это объясняется большим объемом предложения в первом периоде. Сравнивая стратегии S^* и $S^{\infty*}$, видим, что оптимальная стратегия для конечного горизонта планирования S^* не во всех периодах имеет минимальные ожидаемые издержки. Тем не менее, суммарная величина издержек оказывается меньшей, чем в бесконечном случае $S^{\infty*}$, более чем на 5%.

Ожидаемые излишки в период k для стратегии $S \in \mathbb{S}$ вычисляются по формулам:

$$E[I_1] = \frac{1}{2\Delta}(S_1 - \underline{D})^2, \quad k = 1,$$

$$E[I_k] = \frac{1}{2\Delta\gamma^{k-1}}(S_k - \gamma S_{k-1})^2, \quad k \geq 2 -$$

и представлены в табл. 3 и на рис. 4.

Оптимальная стратегия S^* в каждый период имеет минимальные ожидаемые излишки, в результате чего минимальными оказываются и суммарные излишки. Это объясняется меньшими

Таблица 3. Ожидаемые излишки для трех стратегий

Период	s^*	$s^{\infty*}$	$\tilde{s}$
1	0.28	0.37	1.25
2	0.25	0.39	0.63
3	0.19	0.42	0.31
4	0.09	0.44	0.16
$\sum$	0.81	1.61	2.34

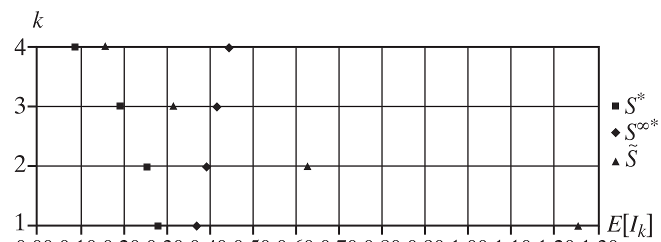

Рис. 4. Ожидаемые излишки для трех стратегий

объемами предложения, чем у других стратегий, что влечет уменьшение вероятности возникновения перепроизводства и ожидаемого количества излишков.

4. ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБЪЕМЫ ПРЕДЛОЖЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ЗАО “ФОРД МОТОР КОМПАНИ”

В качестве примера рассмотрим производство и продажу в России автомобилей Ford Focus. Производство этой модели автомобиля на территории России началось в октябре 2002 г. В период с 2002 по 2007 г. спрос на российском рынке автомобилей значительно увеличивался и имел место дефицит автомобилей Ford Focus. Мощностей завода не хватало для удовлетворения спроса, в связи с чем компания потерпела издержки от недопроизводства. С началом экономического кризиса 2008 г. спрос на автомобили начал резко падать, что подтверждает актуальность модели с конечным горизонтом планирования.

Для определения объемов предложения и оценивания издержек применим к этой ситуации модель с конечным горизонтом планирования. Вычислим оптимальные объемы предложения и сравним их с реальными.

На официальном сайте компании Ford[5] можно найти информацию о продажах Ford Focus в 2002–2007 гг. В 2002 г. продажи Ford Focus велись менее трех месяцев, поэтому исключим этот год из рассмотрения и положим $T = 5$ (табл. 4).

Определим значения параметров модели следующим образом. В рассматриваемом периоде спрос на иномарки на российском рынке ежегодно увеличивался в среднем на 50%, поэтому будем считать, что $\gamma = 1.5$. В 2002 г. за три месяца было продано около 2 тыс. автомобилей Ford Focus. При этом выстроилась очередь из желающих купить автомобиль на полгода вперед. Поэтому можно предположить, что за первые три месяца продаж могло реализоваться, как минимум, 5 тыс. автомобилей Ford Focus. Следовательно, ожидаемый спрос в 2003 г. можно положить равным 20 тыс. автомобилей. В качестве начального интервала спроса возьмем интервал длины с центром в точке 20000: $[\underline{D}, \overline{D}] = [17000, 23000]$. Он удовлетворяет условию $(1+\gamma)\underline{D} \ge \overline{D}$. В зависимости от комплектации разброс цен на автомобили Ford Focus в автосалонах РФ был весьма велик. Будем считать, что средняя цена реализации $p = 18$ тыс. долл. Положим, что средняя себестоимость автомобиля Ford Focus $f = 0.8$, $p = 14.4$ тыс. долл. Далее также будут представлены результаты для различных себестоимостей.

В качестве затрат на хранение одного автомобиля возьмем среднюю годовую стоимость стоянки в Санкт-Петербурге: $h = 1.2$ тыс. долл. В начале календарного года автосалоны распродают автомобили прошлогоднего производства, снижая на них цену. Будем считать, что скорость обесценивания $\delta = 0.1$. В 2003–2007 гг. в России средний официальный уровень инфляции был равен 11.1%. Будем считать, что ставка дисконтирования $\alpha = 15\%$ ($\beta \approx 0.87$). Используя теорему 2, определяем оптимальные объемы предложения для первых пяти периодов (лет) (табл. 5).

Таблица 4. Объемы продаж Ford Focus

Годы	Объемы продаж
2003	15 876
2004	28 059
2005	39 059
2006	73 468
2007	90 383

Таблица 5. Оптимальные объемы предложения Ford Focus

Годы	Объем продаж
2003	20 666
2004	33 134
2005	50 938
2006	77 106
2007	115 999

[5] http://www.ford.ru/.

Таблица 6. Сравнение реальных и оптимальных объемов предложения

Годы	Объем предложения			Приведенные издержки, долл.
	реальный	оптимальный	разность	
2003	15 876	20 666	4 790	17 244 000
2004	28 059	33 134	5 075	15 894 900
2005	39 059	50 938	11 839	32 368 374
2006	73 468	77 106	3 638	8 624 282
2007	90 383	115 999	25 616	52 831 243
Σ	246 845	297 843	50 998	126 962 799

Сравним оптимальные объемы предложения с реальными продажами. Результаты сравнения и величины альтернативных издержек от недопроизводства (приведенные к 2003 г.) представлены в табл. 6.

Таким образом, при выбранных нами значениях параметров модели суммарная дисконтированная величина разности прибылей положительна, следовательно, теоретическая прибыль больше реальной. Это означает, что при объемах предложения, получаемых согласно модели, прибыль фирмы была бы больше приблизительно на 127 млн долл. Напомним, что это значение было рассчитано для себестоимости автомобиля $f = 0.8p$. Однако мы не имеем достоверной информации о себестоимости, поэтому в табл. 7 показываем результаты применения модели для различных себестоимостей автомобиля.

Таблица 7. Приведенные издержки в зависимости от себестоимости автомобиля

Себестоимость автомобиля, долл.	Суммарные приведенные издержки, тыс. долл.	Себестоимость автомобиля, долл.	Суммарные приведенные издержки, тыс. долл.
$0.65p = 11700$	233 832	$0.85p = 15300$	91 835
$0.70p = 12600$	198 032	$0.90p = 16200$	57 215
$0.75p = 13500$	162 305	$0.95p = 17100$	23 773
$0.80p = 14400$	126 963		

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Рассмотрим целевую функцию $E[c]$ задачи (7):

$$E[c] = \frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2\right] + \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)[B(S_2 - \gamma S_1)^2 + A(\gamma\overline{D} - S_2)^2] +$$

$$+\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 [B(S_3 - \gamma S_2)^2 + A(\gamma^2\overline{D} - S_3)^2] + \ldots \tag{12}$$

Поскольку каждое слагаемое в формуле (12) положительно, выполняется неравенство:

$$E[c] \geq \frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2\right]. \tag{13}$$

Вычисляем минимальное значение правой части (13) по переменной, получаем, что верна оценка $E[c] \geq V_1 = \Delta AB/[2(A+B)]$.

Сделаем замену переменных в функции (12):

$$\overline{S}_2 = \underline{D} + \left(\frac{S_2}{\gamma} - S_1\right)/(\overline{D} - S_1), \quad \overline{S}_2 \in [\underline{D}, \overline{D}];$$

$$\overline{S}_3 = \gamma\underline{D} + \left(\frac{S_3}{\gamma} - \gamma S_1\right)/(\overline{D} - S_1), \quad \overline{S}_3 \in [\gamma\overline{S}_2, \gamma\overline{D}];$$

$$\overline{S}_4 = \gamma^2\underline{D} + \left(\frac{S_4}{\gamma} - \gamma^2 S_1\right)/(\overline{D} - S_1), \quad \overline{S}_4 \in [\gamma\overline{S}_3, \overline{D}]; \ldots$$

Перепишем равенство (12) с новыми переменными:

$$E[c] = \frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2\right] + \frac{(\overline{D} - S_1)^2}{\Delta^2}(\gamma\beta)\left[\frac{1}{2\Delta}[B(\overline{S}_2 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - \overline{S}_2)^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)[B(\overline{S}_3 - \gamma\overline{S}_2)^2 + A(\gamma\overline{D} - \overline{S}_3)^2]\Bigg].$$

Заметим, что

$$\min_{S_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3, \ldots} E[c] = \min_{S_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3, \ldots}\left\{\frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{(\overline{D} - S_1)^2}{\Delta^2}(\gamma\beta)\left[\frac{1}{2\Delta}[B(\overline{S}_2 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - \overline{S}_2)^2] + \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)[B(\overline{S}_3 - \gamma\overline{S}_2)^2 + A(\gamma\overline{D} - \overline{S}_3)^2] + \ldots\right]\right\} =$$

$$= \min_{S_1}\left\{\frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2\right] + \frac{(\overline{D} - S_1)^2}{\Delta^2}(\gamma\beta)\min_{\overline{S}_2, \overline{S}_3, \ldots}\left[\frac{1}{2\Delta}\left[B(\overline{S}_2 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - \overline{S}_2)^2\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\left[B(\overline{S}_3 - \gamma\overline{S}_2)^2 + A(\gamma\overline{D} - \overline{S}_3)^2\right] + \ldots\right]\right\}.$$

Задача минимизации по переменным $\overline{S}_2, \overline{S}_3, \ldots$ в точности совпадает с исходной задачей (7). Используя оценку снизу V_1, запишем:

$$\min_{S_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3, \ldots} E[c] \geq \min_{S_1}\left(\frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2\right] + V_1\frac{(\overline{D} - S_1)^2}{\Delta^2}(\gamma\beta)\right). \qquad (14)$$

Вычисляя минимум выражения в правой части (14), выводим уточненную оценку снизу V_2 для функции (12):

$$V_2 = \frac{\Delta B(\Delta A + 2\gamma\beta V_1)}{2(\Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_1)} = \frac{\Delta B}{2} - \frac{\Delta^2 B^2}{2(\Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_1)}.$$

Производя аналогичные действия с использованием оценки V_2, имеем улучшенную оценку V_3:

$$V_3 = \frac{\Delta B}{2} - \frac{\Delta^2 B^2}{2(\Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_2)}.$$

Таким образом, имеем последовательность оценок V_k, $k \geq 1$, заданную рекуррентным соотношением:

$$V_1 = \frac{\Delta AB}{2(A+B)}, \quad V_{k+1} = \frac{\Delta B}{2} - \frac{\Delta^2 B^2}{2(\Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_k)}, \quad k \geq 1. \tag{15}$$

Таким образом, выполнено следующее:

$$\min_{s_1, s_2, s_3, \ldots} E[c] \geq V_k, \quad k \geq 1. \tag{16}$$

Докажем, что последовательность V_k ограничена сверху и монотонно возрастает.

Ограниченность сверху. Докажем, что для каждого V_k, $k \geq 1$ выполнено:

$$V_k < \left[-\Delta(A+B-\gamma\beta B) + \Delta\sqrt{(A+B-\gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}\right]/4\gamma\beta. \tag{17}$$

Выражение в правой части неравенства (17) – единственный положительный корень квадратного уравнения, которое получается после перехода к пределу в рекуррентном соотношении (15) (хотя на данном этапе переход к пределу некорректен).

Ограниченность сверху докажем по индукции.

1. База индукции. $k = 1$.

$$\frac{\Delta AB}{2(A+B)} < \frac{-\Delta(A+B-\gamma\beta B) + \Delta\sqrt{(A+B-\gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}}{4\gamma\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{A+B} + \frac{A+B-\gamma\beta B}{2\gamma\beta} < \frac{\sqrt{(A+B-\gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}}{2\gamma\beta}.$$

При некоторых значениях параметров левая часть данного неравенства имеет отрицательный знак, в этом случае оно выполнено автоматически. Докажем неравенство для положительных левых частей:

$$\frac{AB}{A+B} + \frac{A+B-\gamma\beta B}{2\gamma\beta} < \frac{\sqrt{(A+B-\gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}}{2\gamma\beta} \Leftrightarrow \frac{A^2B^2}{(A+B)^2} + \frac{AB(A+B-\gamma\beta B)}{\gamma\beta(A+B)} < \frac{AB}{\gamma\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma AB + (A+B)(A+B-\gamma\beta B) < (A+B)^2 \Leftrightarrow \beta\gamma AB < \gamma\beta B(A+B) \Leftrightarrow 0 < \gamma\beta B^2.$$

2. Пусть неравенство (17) имеет место для всех V_i, $i \leq k$. Докажем для V_{k+1}:

$$V_{k+1} = \frac{\Delta B}{2} - \frac{\Delta^2 B^2}{2(\Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_k)} < \frac{-\Delta(A+B-\gamma\beta B) + \Delta\sqrt{(A+B-\gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}}{4\gamma\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B - \frac{\sqrt{(A+B-\gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB} - (A+B-\gamma\beta B)}{2\gamma\beta} < \frac{\Delta B^2}{\Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_k < -\frac{2\Delta\beta\gamma B^2}{(A+B+\gamma\beta B) - \sqrt{(A+B-\gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_k < \frac{\Delta(A+B+\gamma\beta B) + \Delta\sqrt{(A+B-\gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_k < \frac{-\Delta(A+B-\gamma\beta B) + \Delta\sqrt{(A+B-\gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}}{4\gamma\beta}.$$

Монотонный рост.

1. База индукции. $V_2 > V_1$:

$$V_2 = \frac{\Delta B(\Delta A + 2\gamma\beta V_1)}{2(\Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_1)} > V_1 = \frac{\Delta AB}{2(A+B)} \Leftrightarrow \Delta^2 AB(A+B) + 2\Delta\gamma\beta B(A+B)V_1 >$$

$$> \Delta^2 AB(A+B) + 2\Delta\gamma\beta AB \Leftrightarrow BV_1 > 0.$$

2. Пусть $V_i > V_{i-1}$ для $i \le k$. Докажем, что $V_{k+1} > V_k$.

$$V_{k+1} = \frac{\Delta B(\Delta A + 2\gamma\beta V_k)}{2(\Delta A + \Delta B + 2\gamma\beta V_k)} > V_k \Leftrightarrow 4\gamma\beta V_k^2 + 2\Delta(A + B - \gamma\beta B)V_k - \Delta^2 AB < 0.$$

Это парабола с ветками, направленными вверх, и двумя корнями с противоположными знаками. Для доказательства неравенства достаточно проверить, что V_k лежит между корнями этой параболы. Поскольку $V_k > 0$, то V_k автоматически правее левого корня. То, что V_k находится левее положительного корня, следует из неравенства (17), которое было доказано при проверке свойства ограниченности сверху.

Поскольку последовательность V_k ограничена сверху и монотонно возрастает, то, согласно теореме Вейерштрасса, последовательность V_k сходящаяся. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении (15), получаем, что $V = \lim\limits_{k\to\infty} V_k$ является корнем квадратного уравнения

$$4\gamma\beta V^2 + 2\Delta(A + B - \gamma\beta B)V - \Delta^2 AB = 0$$

и равно

$$V = \frac{-\Delta(A + B - \gamma\beta B) + \Delta\sqrt{(A + B - \gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB}}{4\gamma\beta}.$$

Переходя к пределу в неравенстве (16), находим нижнюю оценку $\min\limits_{S_1, S_2, S_3, \dots} E[c] \ge V$. ■

Доказательство леммы 2. Пусть $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots)$ – оптимальное решение задачи 2. Рассмотрим задачу 1:

$$E[c] = \frac{1}{2\Delta}[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2] + \frac{1}{2\Delta}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{k-1}[B(S_k - \gamma S_{k-1})^2 + A(\gamma^{k-1}\overline{D} - S_k)^2] \to \min_S,$$

где $S \in \mathcal{S} = \{S = (S_1, S_2, \dots) \mid S_1 \in [\underline{D}, \overline{D}];\ S_k \in [\gamma S_{k-1}, \gamma^{k-1}\overline{D}], k \ge 2\}$.

Сделаем замену переменных $S_k = \Delta\lambda_k + \gamma^{k-1}\underline{D},\ \ k \ge 1$. Легко проверить, что для переменных λ_k выполнены условия: $\lambda_1 \in [0, 1], \lambda_k \in [\gamma\lambda_{k-1}, \gamma^{k-1}],\ k \ge 2$. Следовательно, последовательность объемов предложения $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ принадлежит множеству допустимых решений Λ. Повторив замену переменных, получаем:

$$E[c] = \frac{\Delta}{2}[B\lambda_1^2 + A(1 - \lambda_1)^2] + \frac{\Delta}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{k-1}[B(\lambda_k - \gamma\lambda_{k-1})^2 + A(\gamma^{k-1} - \lambda_k)^2] \to \min_\lambda, \qquad (18)$$

где $\lambda \in \Lambda = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \mid \lambda_1 \in [0, 1];\ \lambda_k \in [\gamma\lambda_{k-1}, \gamma^{k-1}], k \ge 2\}$.

Целевая функция задачи оптимизации (11) с точностью до коэффициента Δ^2 совпадает с целевой функцией задачи 2, оптимальным решением которой по предположению будет вектор $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots)$. Таким образом, вектор $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots)$ – оптимальное решение задачи (18). Производя обратную замену, получаем требуемое утверждение.

Противоположное утверждение доказывается аналогичным образом. ■

Доказательство леммы 3. В первом периоде при предложении S_1 возникает недопроизводство или перепроизводство. Если имело место перепроизводство, то фирма узнает точную величину спроса. Если произошло недопроизводство, то фирма сокращает интервал спроса, уточняя, таким образом, информацию о спросе. Задача во втором периоде аналогична задаче в первом периоде, т.е. выполнен принцип оптимальности Беллмана (Беллман, 1960). Процесс повторяется до тех пор, пока не возникнут излишки продукции.

Пусть в задаче (7) существует оптимальное решение, обозначим его через $(S_1^*, S_2^*, \dots)$, тогда S_k^* – оптимальный объем предложения для периода k. Предположим, что во всех периодах с меньшими номерами имел место дефицит продукции, тогда предложение S_k^* можно рассматривать как первое предложение для задачи с интервалом спроса $[\gamma S^*_{k-1}, \gamma^{k-1}\overline{D}]$. Используя лемму 2, получаем цепочку равенств, доказывающих данную лемму:

$$S^*_k = \gamma S^*_{k-1} + (\gamma^{k-1}\overline{D} - \gamma S^*_{k-1})\lambda^* = \gamma^{k-1}\overline{D} - (\gamma^{k-1}\overline{D} - \gamma S^*_{k-1})(1-\lambda^*) =$$
$$= \gamma^{k-1}\overline{D} - \gamma(\gamma^{k-2}\overline{D} - \gamma S^*_{k-2})(1-\lambda^*)^2 = \ldots = \gamma^{k-1}\overline{D} - \gamma^{k-1}(\overline{D} - S^*_1)(1-\lambda^*)^{k-1} =$$
$$= \gamma^{k-1}(\overline{D} - \Delta(1-\lambda^*)^k)^k, \quad k \geq 2. \blacksquare$$

Доказательство теоремы 1. Из формулы (6) имеем:

$$E[c_1] = \frac{1}{2\Delta}\left[B(S_1 - \underline{D})^2 + A(\overline{D} - S_1)^2\right], \quad k = 1,$$

$$E[c_k] = \frac{\beta^{k-1}}{2\Delta\gamma^{k-1}}\left[B(S_k - \gamma S_{k-1})^2 + A(\gamma^{k-1}\overline{D} - S_k)^2\right], \quad k = 2.$$

Предположим, что в задаче (7) существует оптимальное решение, тогда из леммы 3 следует, что оно должно удовлетворять условиям (10), поэтому далее будем рассматривать только такие стратегии. Подставим объемы предложения $(S_1, S_2, \ldots)$ из (10), получаем:

$$E[c] = 0{,}5\Delta(\gamma\beta)^{k-1}[B\lambda^2(1-\lambda)^{2k-2} + A(1-\lambda)^{2k}],$$

а после необходимых преобразований имеем формулу для ожидаемых издержек фирмы:

$$E[c] = 0{,}5\Delta\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma\beta)^{k-1}\left[B\lambda^2(1-\lambda)^{2k-2} + A(1-\lambda)^{2k}\right] =$$
$$= 0{,}5\Delta(B\Delta\lambda^2 + A\Delta(1-\lambda)^2)\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma\beta)^{k-1}(1-\lambda)^{2k-2}. \qquad (19)$$

Второй множитель в формуле (19) представляет собой сумму бесконечного числа слагаемых, образующих геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \gamma\beta(1-\lambda)^2$. Если $q \leq 1$, то сумма бесконечна, в этом случае задача решений не имеет. Если $q < 1$, то ожидаемые издержки являются конечной величиной. Таким образом, λ должно удовлетворять условию:

$$(1-\lambda)^2 < 1/\gamma\beta. \qquad (20)$$

Для любых $\gamma > 0$, $\beta \in [0, 1]$ неравенство (20) имеет решение в виде интервала с центром в точке 1. В пересечении с условием $\lambda \in [0, 1]$ образуется непустое множество, что гарантирует существование решения задачи (7).

Преобразовывая выражение (19) с учетом условия (20), получаем формулу, связывающую ожидаемые издержки и λ:

$$E[c] = (B\Delta\lambda^2 + A\Delta(1-\lambda)^2)/(2 - 2\gamma\beta(1-\lambda)^2).$$

Возьмем производную от $E[c]$ по λ и приравняем ее нулю, получаем квадратное уравнение:

$$\gamma\beta B\lambda^2 + (A + B - \gamma\beta B)\lambda - A = 0. \qquad (21)$$

Решая его, находим формулу для вычисления оптимального λ^*:

$$\lambda^* = (-(A + B - \gamma\beta B) + \sqrt{(A + B - \gamma\beta B)^2 + 4\gamma\beta AB})/2\gamma\beta B. \qquad (22)$$

Тогда оптимум ожидаемых издержек $E[c]^*$ находится по формуле:

$$E[c]^* = (B\Delta\lambda^{*2} + A\Delta(1-\lambda^*)^2)/(2 - 2\gamma\beta(1-\lambda^*)^2).$$

Для корректности данного решения необходимо выполнение условия $\lambda \in [0, 1]$ и условия (20). Кроме того, нам надо показать, что найденная экстремальная точка является точкой минимума задачи (7).

Обозначим через $F(\lambda)$ функцию из левой части уравнения (21). Она является параболой, которая имеет вид, показанный на рис. 5. Из графика функции видно, что $F(0) = -A < 0$ и $F(1) = B > 0$, следовательно, условие $\lambda^* \in [0, 1]$ выполнено.

Условие (20) эквивалентно неравенству $(1-\lambda^*-1/\sqrt{\gamma\beta})(1-\lambda^*+1/\sqrt{\gamma\beta})<0$. Поскольку $\lambda^* \in [0, 1]$, то второй множитель в неравенстве положителен, и знак левой части определяется знаком первого множителя. Таким образом, достаточно доказать, что $1-1/\sqrt{\gamma\beta}<\lambda^*$, т.е. точка $l = 1-1/\sqrt{\gamma\beta}<\lambda^*$ должна лежать правее точки λ^* (рис. 5). Вычислим значение $F(l)$:

$$F(l) = \gamma\beta B\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma\beta}}\right)^2 + (A+B-\gamma\beta B)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma\beta}}\right) - A = \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma\beta}}\right)\left(A+B-\sqrt{\gamma\beta}\,B\right) - A =$$

$$= 2B - \frac{A}{\sqrt{\gamma\beta}} - \frac{B}{\sqrt{\gamma\beta}} - \sqrt{\gamma\beta}\,B = -\frac{B}{\sqrt{\gamma\beta}}(\gamma\beta - 2\sqrt{\gamma\beta}+1) - \frac{A}{\sqrt{\gamma\beta}} = -\frac{B}{\sqrt{\gamma\beta}}(\sqrt{\gamma\beta}-1)^2 - \frac{A}{\sqrt{\gamma\beta}} < 0.$$

Из графика на рис. 5 видно, что $F(\lambda)$ принимает отрицательные значения в точках, лежащих левее λ^*. Таким образом, λ^* удовлетворяет условию (20).

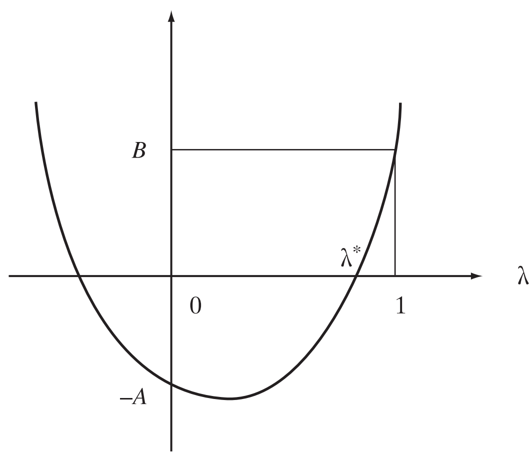

Рис. 5. График функции $F(\lambda)$

Для доказательства того, что точка λ^* является точкой минимума функции ожидаемых издержек фирмы, определим знак производной слева и справа от λ^*. Знак производной функции ожидаемых издержек совпадает со знаком функции $F(\lambda)$. Из графика на рис. 5 видно, что $F(\lambda) < 0$ при $\lambda < \lambda^*$, и $F(\lambda) > 0$ при $\lambda > \lambda^*$, что доказывает требуемое.

Для завершения доказательства теоремы нужно проверить существование оптимального решения задачи (7). Поскольку аргументом ее целевой функции является бесконечномерный вектор, то доказательство данного факта весьма трудоемко. По этой причине для проверки оптимальности найденного решения среди стратегий вида (10) применим способ, использующий оценку снизу для целевой функции задачи (7) из леммы 1.

Заметим, что, согласно формулам (9) и (22), выполнено равенство $V = 0.5\Delta B\lambda^*$. Докажем, что $E[c]^* = V$:

$$E[c]^* = \frac{B\Delta\lambda^{*2}+A\Delta(1-\lambda^*)^2}{2-2\gamma\beta(1-\lambda^*)^2} = 0.5\Delta B\lambda^* = V \Leftrightarrow B\lambda^{*2}+A(1-\lambda^*)^2 = B\lambda^* - B\gamma\beta\lambda^*(1-\lambda^*)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\lambda^{*2}(\lambda^*-1)+A(1-\lambda^*)+B\gamma\beta\lambda^*(1-\lambda^*)^2 = 0 \Leftrightarrow B\lambda^*+A(\lambda^*-1)+B\gamma\beta\lambda^*(\lambda^*-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma\beta B\lambda^{*2}+(A+B-\gamma\beta B)\lambda^* - A = 0.$$

Последняя строка – уравнение (21). Таким образом, издержки на оптимальной стратегии среди стратегий вида (10) совпали с нижней оценкой целевой функции задачи (7), что гарантирует оптимальность данной стратегии на всем множестве допустимых стратегий.

Ожидаемое количество остатков продукции для стратегии $S^* = (S_1^*, S_2^*, \ldots)$ в период k вычисляется по формулам:

$$E[I_1]^* = \frac{1}{\Delta}\int_{\underline{D}}^{S_1^*}(S_1^*-Y)\,dY = \frac{1}{2\Delta}(S_1^*-\underline{D})^2, \quad k=1,$$

$$E[I_k]^* = \frac{1}{\Delta}\int_{S_{k-1}^*/\gamma^{k-2}}^{S_k^*/\gamma^{k-1}}(S_k^*-\gamma^{k-1}Y)\,dY = \frac{1}{2\Delta\gamma^{k-1}}(S_k^*-\gamma S_{k-1}^*)^2, \quad k \ge 2.$$

Выражаем объемы предложения через λ^*, получаем:

$$E[I_k]^* = 0.5\Delta\gamma^{k-1}\lambda^{*2}(1-\lambda^*)^{2k-2}.$$

Следовательно, суммарные остатки $E[I]^*$ равны:

$$E[I]^* = \sum_{k=1}^{\infty} E[I_k]^* = 0.5\Delta\lambda^{*2}\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1}(1-\lambda^*)^{2k-2}. \blacksquare$$

Доказательство теоремы 2. Решение задачи оптимизации (11) выполним в два этапа: сначала найдем оптимальное решение для задачи безусловной оптимизации, а затем покажем, что оно принадлежит множеству допустимых стратегий $\mathbb{S}$.

Обозначим через f целевую функцию задачи (11). Необходимое условие существования экстремума функции f имеет вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial E[c]}{\partial S_1} = B(S_1 - \underline{D}) - A(\overline{D} - S_1) - \beta B(S_2 - \gamma S_1) = 0;\\
\frac{\partial E[c]}{\partial S_2} = B(S_2 - \gamma S_1) - A(\gamma\overline{D} - S_2) - \beta B(S_3 - \gamma S_2) = 0;\\
\frac{\partial E[c]}{\partial S_{T-1}} = B(S_{T-1} - \gamma S_{T-2}) - A(\gamma^{T-2}\overline{D} - S_{T-1}) - \beta B(S_T - \gamma S_{T-1}) = 0;\\
\frac{\partial E[c]}{\partial S_T} = B(S_T - \gamma S_{T-1}) - A(\gamma^{T-1}\overline{D} - S_T) = 0.
\end{gathered} \tag{23}$$

Пусть стратегия $S^0 = (S_1^0, S_2^0, \ldots, S_T^0)$ удовлетворяет системе уравнений (23), т.е. это стационарная точка функции f. Покажем, что на стратегии S^0 достигается максимум функции f. Достаточным условием существования минимума в точке S^0 является положительная определенность следующей квадратичной формы: $\sum_{i,j=1}^{T} a_{ij}\,dS_i\,dS_j$, где $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(S^0)}{\partial S_i \partial S_j}$.

Воспользуемся критерием Сильвестра, который запишем как цепочку неравенств:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \ldots;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1T} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{T1} & a_{T2} & \ldots & a_{TT} \end{vmatrix} > 0,$$

что эквивалентно положительности главных миноров матрицы вторых производных:

$$\begin{pmatrix} A+B+\gamma\beta B & -\beta B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\gamma B & A+B+\gamma\beta B & -\beta B & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma B & A+B+\gamma\beta B & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A+B+\gamma\beta B & -\beta B \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\gamma B & A+B \end{pmatrix}.$$

Положим, что $\Delta_0 = 1$. Легко показать, что для Δ_i, $i = 1,\ldots, T$ верны соотношения:

$$\Delta_1 = (A+B+\gamma\beta B);\ \Delta_i = (A+B+\gamma\beta B)\Delta_{i-1} - \gamma\beta B^2\Delta_{i-2},\ i = 2, \ldots, T-1;$$

$$\Delta_T = (A+B)\Delta_{T-1} - \gamma\beta B^2\Delta_{T-2}.$$

Докажем, что определители Δ_i, $i = 1,\ldots, T-1$ удовлетворяют неравенствам:

$$\Delta_i > \gamma\beta B\Delta_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, T-1. \tag{24}$$

Заметим, что так как $\Delta_0 > 1$ и $\gamma > 0$, $\beta > 0$, $B > 0$, то из неравенства (24) автоматически следует положительность определителей Δ_i, $i = 1,\ldots, T-1$. Воспользуемся индукцией по i.

$$i = 1\colon A + B > 0 \Leftrightarrow A + B + \gamma\beta B > \gamma\beta B \Leftrightarrow \Delta_1 > \gamma\beta B\Delta_0.$$

Пусть Δ_i, $i \in 1\colon j-1$ ($j < T$) удовлетворяет соотношениям (24). Докажем, что для Δ_j выполнено неравенство $\Delta_j > \gamma\beta B\Delta_{j-1}$:

$$\gamma\beta D\Delta_{j-2}A > 0 \Leftrightarrow (A+B)\gamma\beta B\Delta_{j-2} - \gamma\beta B^2\Delta_{j-2} > 0 \Rightarrow (A+B)\Delta_{j-1} - \gamma\beta B^2\Delta_{j-2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A+B+\gamma\beta B)\Delta_{j-2} - \gamma\beta B^2\Delta_{j-2} > \gamma\beta B^2\Delta_{j-1} \Leftrightarrow \Delta_j > \gamma\beta B\Delta_{j-1}.$$

Теперь покажем положительность определителя Δ_T:

$$\gamma\beta B\Delta_{T-2}A > 0 \Leftrightarrow (A+B)\gamma\beta B\Delta_{T-2} - \gamma\beta B^2\Delta_{T-2} > 0 \Rightarrow (A+B)\Delta_{T-1} - \gamma\beta B^2\Delta_{T-2} > 0 \Leftrightarrow \Delta_T > 0.$$

Таким образом, мы доказали, что стационарная точка S^0 – точка минимума функции f. Остается убедиться, что стратегия S^0 – допустимая стратегия из множества $\mathbb{S}$. Предположим, что $(S_1^0, S_2^0, \ldots, S_T^0)$ – решение системы (22), но при этом выполнено:

$$\gamma^{T-1}\overline{D} < S_T^0. \tag{25}$$

Это означает, что S_T^0 не принадлежит интервалу спроса в период T, следовательно, $S^0 \notin \mathbb{S}$. Из неравенства (25) и последнего уравнения системы (23) вытекает, что в первом слагаемом выражение в скобках должно быть отрицательным, т.е. $S_T^0 < \gamma S_{T-1}^0$. Таким образом, имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma^{T-1}\overline{D} < S_T^0 \\ S_T^0 < \gamma S_{T-1}^0\end{array}\right. \Rightarrow \gamma^{T-2}\overline{D} < S_{T-1}^0.$$

Далее из предпоследнего уравнения системы следует, что $S_{T-1}^0 < \gamma S_{T-2}^0$ и т.д. Из второго уравнения системы получаем, что $S_2^0 < \gamma S_1^0$. В итоге выполнена цепочка неравенств:

$$\gamma^{T-1}\overline{D} < S_T^0; \quad S_T^0 < \gamma S_{T-1}^0; \quad S_{T-1}^0 < \gamma S_{T-2}^0; \ldots S_2^0 < \gamma S_1^0.$$

Суммируя их, получаем, что $\overline{D} < S_1^0$. Но для того, чтобы было выполнено первое уравнение системы, первое его слагаемое должно быть отрицательным, т.е. $S_1^0 < \underline{D}$. Таким образом, возникает противоречие, наше предположение (25) неверно и выполнено обратное неравенство $\gamma^{T-1}\underline{D} \geq S_T^0$.

Из тех же рассуждений получаем цепочку обратных неравенств:

$$\gamma^{T-1}\overline{D} \geq S_T^0; \quad S_T^0 \geq \gamma S_{T-1}^0; \quad S_{T-1}^0 \geq \gamma S_{T-2}^0; \ldots \quad S_2^0 \geq \gamma S_1^0; \quad S_1^0 \geq \underline{D},$$

откуда $S^0 \in \mathbb{S}$.

Мы доказали, что точка минимума функции f (решение системы уравнений (23)) принадлежит множеству допустимых стратегий $\mathbb{S}$ и поэтому является оптимальным решением задачи (11). Задача оптимизации сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} A+B+\gamma\beta B & -\beta B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\gamma B & A+B+\gamma\beta B & -\beta B & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma B & A+B+\gamma\beta B & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A+B+\gamma\beta B & -\beta B \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\gamma B & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{T-1} \\ S_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\overline{D} + B\underline{D} \\ \gamma A\overline{D} \\ \gamma^2 A\overline{D} \\ \vdots \\ \gamma^{T-2}A\overline{D} \\ \gamma^{T-1}A\overline{D} \end{pmatrix}.$$

Матрица данной системы имеет трехдиагональный вид. Системы линейных уравнений такого вида решаются методом прогонки (Самарский, Гулин, 1989), в ходе которого сначала вычисляются так называемые прогоночные коэффициенты, а затем определяется решение системы. Обозначим через u_i, ν_i, $i = 1, \ldots, T$ – прогоночные коэффициенты данной системы линейных уравнений. Они находятся по формулам:

$$u_2 = \frac{\beta B}{A + B + \gamma\beta B}, \quad \nu_2 = \frac{A\overline{D} + B\underline{D}}{A + B + \gamma\beta B};$$

$$u_{i+1} = \frac{\beta B}{A + B + \gamma\beta B - \gamma B u}, \quad \nu_{i+1} = \frac{\gamma^{i-1} A\overline{D} + \gamma B \nu_i}{A + B + \gamma\beta B - \gamma B u_i}, \; i = 2, \ldots, T-1. \tag{26}$$

Решение системы линейных уравнений имеет вид:

$$S_T^* = \frac{\gamma^{T-1} A\overline{D} + \gamma B \nu_T}{A + B - \gamma B u_T}, \quad S_i^* = u_{i+1} S_{i+1} + \nu_{i+1}, \quad i = T-1, \ldots, 1. \tag{27}$$

Для корректности использования метода прогонки необходимо, чтобы знаменатели в выражениях (26) и (27) были отличными от нуля. Докажем, что для коэффициентов u_i, $i = 2, \ldots, T$ выполнены условия:

$$u_i > 0, \quad u_i < \beta, \quad u_i < 1/\gamma, \quad i = 2, \ldots, T. \tag{28}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

Легко проверить, что коэффициент u_1 удовлетворяет условиям (28). Предположим, что для коэффициентов u_j, $i = 2, \ldots, i$ имеют место условия (28). Покажем, что условия (28) выполнены также для u_{i+1}:

$$1)\ \beta - u_1 > 0 \Rightarrow A + B + \gamma B(\beta - u_i) > 0 \Leftrightarrow u_{i+1} = \frac{\beta B}{A + B + \gamma\beta B - \gamma B u_i} > 0;$$

$$2)\ \beta - u_i > 0 \Rightarrow 0 < A + \gamma B(\beta - u_i) \Leftrightarrow B/[A + B + \gamma B(\beta - u_i)] < 1 \Leftrightarrow u_{i+1} = \beta B/[A + B + \gamma\beta B - \gamma B u_i] < \beta;$$

$$u_i < 1/\gamma \Rightarrow 0 < A + B(1 - \gamma u_i) \Leftrightarrow \gamma\beta B < A + B + \gamma\beta B - \gamma B u_i \Leftrightarrow u_{i+1} = \beta B/[A + B + \gamma\beta B - \gamma B u_i] < 1/\gamma.$$

Доказанное утверждение исключает деление на ноль при вычислении прогоночных коэффициентов u_i, ν_i, $i = 1, \ldots, T$ и объема предложения S_T^*. Таким образом, корректность применения метода прогонки для решения системы линейных уравнений (23) полностью доказана. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Беллман Р. (1960): Динамическое программирование. М.: ИЛ.

Рыжиков Ю.И. (1969): Управление запасами. М.: Наука.

Рыжиков Ю.И. (2001): Теория очередей и управление запасами. СПб.: Питер.

Самарский А.А., Гулин А.В. (1989): Численные методы. М.: Наука.

Хруцкий Е.А., Геронимус Б.Л. (1974): Проблемы оптимизации планирования материально-технического снабжения // *Экономика и мат. методы.* Т. 10. Вып. 3.

Хруцкий Е.А. (1977): Оптимизация хозяйственных связей и материальных запасов. М.: Экономика.

Хруцкий Е.А., Сакович В.А. (1978): Некоторые вопросы взаимоувязанного планирования производства и снабжения // *Экономика и мат. методы.* Т. 14. Вып. 1.

Alpern S., Snower D. (1987): Inventories as an Information-Gathering Device. London School of Economics: ICERD. Discussion paper № 87/151. Vol. 3. № 1.

Mula J., Poler R., Garcia-Sabater J.P., Lario F.C. (2006): Models for Production Planning under Uncertainty: A Review // *International Journal of Production Econ.* Vol. 103. № 1.

Sethi S.P., Yan H., Zang Q. (2006): Optimal and Hierarchical Controls in Dynamic Stochastic Manufacturing Systems: A Survey // *Manufacturing and Service Operations Management.* Vol. 4. № 2.

Yano C.A., Lee H.L. (1995): Lot Sizing with Random Yields: A Review// *Operations Res.* Vol. 43. № 2.

Поступила в редакцию

05.05.2009 г.

Determination of the Optimal Production output under Informational Uncertainty of Demand

V.V. Bukhvalova, A.V. Petrusevich

We consider a problem of finding optimal production output when the product price is fixed and demand is not stochastic but unknown–the firm meets with informational uncertainty. We get the optimal multi-step strategy to find production output, which minimizes the expected total cost of production (including alternative costs). The case of constant rate changes in demand is considered. It is necessary to treat differently finite-step and infinite-step models. The potential of the model is illustrated on the case of the product policy in ZAO "Ford Motor Company" in 2000s.

Keywords: Stochastic model, production output, demand uncertainty, optimal strategy.