ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 1, с. 115–127

НАУЧНЫЕ ОБСУЖДЕНИЯ

ОБ ЭКОНОМИЧЕСКИХ КРИЗИСАХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ*

© 2011 г. В.Г. Медницкий, Ю.В. Медницкий, М.Р. Фаттахов

(Москва)

С помощью декомпозиции оптимизационной задачи определенного типа показано, что экономический кризис может возникать из-за чрезмерной нагрузки производственной системы, созданной в системе управления.

Ключевые слова: декомпозиция, оптимизационная задача, леонтьевские модели, экономические кризисы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое значение приобретают исследования возможных направлений экономического развития, сочетающего традиционные и инновационные процессы (Дементьев, 2006). Однако анализ трансформационного спада в экономиках ряда бывших социалистических стран (Катышев, Полтерович, 2006) показывает, что развитие кризисных явлений в экономике может быть вызвано неудачной организацией взаимодействия между реформируемыми и реформирующими структурами. Здесь, конечно, нужно заметить, что кризисы тотальной неплатежеспособности с последующим спадом объемов производства и в прошлом неоднократно поражали экономику США и ряд других западных стран (Самуэльсон, 1964), а дискуссия о причинах этих явлений имеет историю, уходящую в начало XVII в. (Аникин, 1985). Однако построенная в математических моделях *теория экономического равновесия* нередко связывается (Карлин, 1964) с термином «*экономика благосостояния*», исключающим другие возможности. Тем не менее они существуют и выявляются при включении *леонтьевской модели* в конструкцию, охватывающую производство и реализацию *товарной* продукции. В этом случае у экономической задачи возникают оптимальные решения (в многокритериальной задаче – равновесия) других типов, одно из которых как раз и описывает состояние производства, при котором из-за убыточности прекращается выпуск любых видов продукции. В настоящей работе показано, что это решение зарождается не в финансовой сфере, а наоборот, поражающая ее всеобщая неплатежеспособность при неконтролируемом росте цен оказывается следствием слишком высокой нагрузки на производство, которая создается системой управления. Чтобы выяснить, как и почему это происходит, нужно начать с анализа свойств леонтьевских уравнений.

2. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЛЕОНТЬЕВСКОЙ МОДЕЛИ

Если неотрицательны все элементы матрицы $A = ||a_{ij}||, i, j \in I$, то системой

$$x_i - \sum_{j \in I} a_{ij} x_j = y_i, \quad i \in I, \tag{1}$$

формируется леонтьевская модель (Леонтьев, 1990), связывающая *валовые* объемы производства *продуктов* (видов продукции, отраслей и т.д.) с *товарной* продукцией в объемах y_i, $i \in I$. Наряду с (1) представляет интерес и двойственная ей система

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00765-а, 10-06-00336-а) и Российского гуманитарного научного фонда (прокт 09-02-00464А).

$$p_j - \sum_{j \in I} p_i a_{ij} = w_j, \quad j \in I, \tag{2}$$

а относительно их решений[1] справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если x, p – решения систем* (1), (2) *при правых частях y, w, то для четверки этих векторов выполняется равенство*

$$py = wx, \tag{3}$$

а если, кроме того, A, x, p ≥ 0, *то и условия*

$$\forall i \in I: \begin{cases} y_i > 0 \Rightarrow x_i > 0, \\ w_i > 0 \Rightarrow p_i > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Содержащие (3) равенства $py = p(E - A)x = wx$ следуют из (1), (2), а (4), если $A, x, p \geq 0$, – из неравенств

$$x = Ax + y \geq y, \quad p = pA + w \geq w. \tag{5}$$

Единицы измерения $[i]$ переменных x_i, y_i, $i \in I$, могут быть любыми, если для элементов a_{ij} матрицы A они определяются отношениями $[i]/[j]$, а величины w_j, $j \in I$, и p_i, $i \in I$ в силу (2) измеряются отношениями руб./$[j]$ и руб./$[i]$. Но тогда в (3) содержится известное равенство (Самуэльсон, 1964) между добавленной и денежной стоимостью товарной продукции (в ценах p). Условиями же (4) уточняется, что любой продукт, участвующий в ее формировании, должен входить в валовую продукцию и с положительной ценой, если создается добавленная стоимость.

Определение 1. Матрица A называется продуктивной (Гейл, 1963), если

$$\exists \bar{x} \geq 0 : \bar{x} > A\bar{x}\,. \tag{6}$$

Так как там же показано, что матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна, то выполняется такое утверждение.

Теорема 1. *Если матрица* $A \geq 0$ *и продуктивна, то каждая из систем* (1), (2) *при любом (но фиксированном) значении своей правой части имеет единственное решение, а если при этом вектор y* (*или w*) *будет полуположительным, то таким же будет и соответствующий ему вектор в паре x, p.*

Первое утверждение вытекает из $p = w(E - A)^{-1}$, $x = w(E - A)^{-1}y$, а при $(E - A)^{-1} \geq 0$ имеем $w \geq 0 \Rightarrow p \geq 0$ и $y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$, т.е. в силу (5) $y \geq 0 \Rightarrow x \geq y$, а $w \geq 0 \Rightarrow p \geq w$.

Аналог систем (1), (2) в стоимостной форме можно получить, используя любые *расчетные* цены $q_i > 0$, $i \in I$. После замены переменных

$$\begin{gathered} x_i(q) = q_i x_i, \quad y_i(q) = q_i y_i, \\ \omega_j(q) = w_j / q_j, \ \lambda_j = p_j / q_j, i, j \in I \end{gathered} \tag{7}$$

и формирования из безразмерных величин

$$\alpha_{ij}(q) = q_i a_{ij} / q_j, i, j \in I \tag{8}$$

матрицы $\mathbf{A}(q) = ||\alpha_{ij}(q)||, i, j \in I,$ равенства (1), (2) принимают вид

$$x_i(q) - \sum_{j \in I} \alpha_{ij}(q) x_j(q) = y_i(q), \quad i \in I, \tag{9}$$

.
$$\lambda_j - \sum_{j \in I} \lambda_i \alpha_{ij}(q) = \omega_j(q), \quad j \in I. \tag{10}$$

В (9) определяются (в ценах q) *денежные потоки*, порожденные сбалансированной в (1) парой x, y, а в (10) – *индексы цен на продукты*. Тем любопытнее такое утверждение.

[1] Для краткости будем говорить, что векторы x, y сбалансированы в (1), а p, w – в (2).

Теорема 2. *Если* $q > 0$, *то* $\mathbf{A}(q) \geq 0$ *(продуктивна)* $\Leftrightarrow$ $A \geq 0$ *(продуктивна).*

Выполняя преобразования $\overline{x} \to \overline{x}(q)$ в (7) и $A \to \mathbf{A}(q)$ в (8), получаем, что $(A \geq 0 \ \&\ q > 0) \Rightarrow \mathbf{A}(q) \geq 0$, а (6) принимает вид

$$\exists \overline{x}(q) \geq 0 : \overline{x}(q) > \mathrm{A}(q)\overline{x}(q). \tag{11}$$

Если же для матрицы $\mathbf{A}(q) \geq 0$ и вектора $\overline{x}(q)$ выполняется (11), то (6) выполнится для вектора $\overline{x}$ и матрицы $A \geq 0$, полученных после преобразования, обратного (7), (8), со значениями элементов, не зависящими от выбора цен.

Таким образом, матрицы всех *стоимостных продуктовых* балансов продуктивны, если и только если продуктивен лежащий в их основе баланс в *натуральных показателях*. К сожалению, этот результат в значительной мере обесценивается, так как для практических расчетов используются стоимостные (и натурально-стоимостные) балансы в агрегированных показателях (Итеративное агрегирование, 1979; Медницкий, Медницкий, 2004). К ним можно перейти, суммируя почленно уравнения (9) на каждом элементе некоторого разбиения I_n, $n \in N'$, множества I и получая равенства

$$\sum_{i \in I_m} x_i(q) - \sum_{n \in N'} \sum_{j \in I_n} x_j(q) \sum_{i \in I_m} \alpha_{ij}(q) = \sum_{i \in I_m} y_i(q), \quad m \in N'. \tag{12}$$

Полагая затем

$$\begin{gathered}\alpha^0_{mn}(q) = \frac{\sum\limits_{j \in I_n} x^0_j(q) \sum\limits_{i \in I_m} \alpha_{ij}(q)}{\hat{x}^0_n(q)}, \quad m, n \in N, \\ \hat{x}_m(q) = \sum_{i \in I_m} x_i(q), \ \hat{y}_m(q) = \sum_{i \in I_m} y_i(q), \quad m \in N',\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\hat{x}^0_n(q) > 0, \quad n \in N \subseteq N', \tag{14}$$

а x^0 – фиксированный полуположительный вектор. Если $N \neq \varnothing$, то в (13) получаем матрицу агрегированных нормативов $\mathbf{A}^0(q) = ||\alpha^0_{mn}(q)||$, с помощью которой из (12) нетрудно получить равенства

$$\hat{x}_m(q) - \sum_{n \in N} \alpha^0_{mn}(q)\hat{x}_n(q) = \hat{y}_m(q), \quad m \in N, \tag{15}$$

которые заведомо выполняются для векторов $\hat{y}^0(q), \hat{x}^0(q)$. Относительно же корректности всего этого перехода справедливо такое утверждение.

Теорема 3. *Если матрица* $\mathbf{A}(q) \geq 0$, *а векторы* $x^0(q)$, $y^0(q)$ *сбалансированы в* (9) *и при этом* $x^0(q) \geq 0$, *а у вектора* $y^0(q)$ *имеются положительные компоненты, то множество* $N \neq \varnothing$, *а матрица* $\mathbf{A}^0(q) \geq 0$ *существует и продуктивна, если* $\hat{y}^0(q) > 0$.

Так как для векторов $y^0(q)$, $x^0(q)$ выполняются условия (4), то для некоторых $n \in N'$ наборы $x^0_i(q)$, $i \in I_n$, будут полуположительными. Для всех таких n выполнятся неравенства (14), т.е. $N \neq \varnothing$, в (13) $\forall m, n \in N : \alpha^0_{mn}(q) \geq 0$ и векторы $\hat{x}^0(q), \hat{y}^0(q)$ сбалансированы в (15), а значит, если $\hat{y}^0(q) > 0$, то $\mathbf{A}^0(q)$ продуктивна, хотя $\mathbf{A}(q)$ может быть и непродуктивной.

Индексы цен на агрегированные наименования продукции можно ввести, используя двойственную систему уравнений

$$\mu_n - \sum_{m \in N} \mu_m \alpha^0_{mn}(q) = \omega_n, \quad n \in N. \tag{16}$$

Теорема 4. *Если пара векторов* μ, ω *сбалансирована в* (16), *а* $\hat{x}^0(q), \hat{y}^0(q)$ – *в* (15), *то*

$$\sum_{m \in N} \mu_m \hat{y}_m(q) = \sum_{n \in N} \omega_n \hat{x}_n(q), \tag{17}$$

а если при этом вектор $\mu > 0$, *то при переходе к ценам*

$$q'_i = \mu_n q_i, \quad i \in I_n, \ n \in N \tag{18}$$

равенства (15) *выполняются для величин*

$$\begin{gathered}\hat{x}_m(q') = \mu_m \hat{x}_m(q), \quad \hat{y}_m(q') = \mu_m \hat{y}_m(q),\\ \alpha^0_{mn}(q') = \mu_m \alpha^0_{mn}(q)/\mu_n, \quad m, n \in N.\end{gathered} \tag{19}$$

Равенство (17) следует из соотношений

$$\sum_{m \in N} \omega_n \hat{x}_n = \sum_{n \in N} \left(\mu_n - \sum_{m \in N} \mu_m \alpha^0_{mn} \right) \hat{x}_n = \sum_{m \in N} \mu_n \left(\hat{x}_m - \sum_{n \in N} \alpha^0_{mn} \hat{x}_n \right) = \sum_{m \in N} \mu_m \hat{y}_m \,,$$

получающихся из (15), (16), а (19) возникают после замены в (7), (8), (13) цен q ценами q' из (18). Выполнение же (15) для величин, определенных в (19), проверяется непосредственно.

Следующим утверждением устанавливается связь, существующая между индивидуальными и групповыми индексами цен.

Следствие 1. *Если матрица* $A \geq 0$, *векторы* p, w *сбалансированы в* (2) *и* $w > 0$, *а правые части в* (16) *определены величинами* $\hat{\omega}^0_n = \sum_{j \in I_n} w_j x^0_j / \hat{x}^0_n(q)$, $n \in N$, *то решение уравнений* (16) *формируется величинами* $\hat{\mu}^0_n = \sum_{j \in I_n} \lambda_j x^0_j / \hat{x}^0_n(q)$, $n \in N$, *где* λ_j, $j \in I$ *определены в* (7) *(или вычисляются в* (10)).

Так как в силу (4) $w > 0 \Rightarrow p > 0$, а наборы x^0_j, $j \in I_n$, $n \in N$, полуположительны, то векторы $\hat{\omega}^0, \hat{\mu}^0, \hat{x}^0(p) > 0$ и в силу (7) выполняется условие

$$\forall q > 0\colon \sum_{j \in I_n} w_j x^0_j = \sum_{j \in I_n} \omega_j(q) x^0_j(q), \quad n \in N. \tag{20}$$

Умножая уравнения (2) на x^0_j, $j \in I$, и суммируя их почленно на множествах I_n, $n \in N$, получим равенство $\sum_{j \in I_n} p_j x^0_j - \sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in I_n} a_{ij} x^0_j = \sum_{j \in I_n} w_j x^0_j$, $n \in N$, которые в силу (7), (8), (13) приводятся к виду

$$1 - \sum_{m \in N} \alpha^0_{mn}(p) = \sum_{j \in I_n} \omega_j(p) x^0_j(p) / \hat{x}^0_n(p), \quad n \in N. \tag{21}$$

Полагая в (21) $p = q'$ и используя (19), их можно привести к виду

$$1 - \sum_{m \in N} \mu_m \alpha^0_{mn}(q)/\mu_n = \sum_{j \in I_n} \omega_j(q) x^0_j(q)/\mu_n \hat{x}^0_n(q), \quad n \in N, \tag{22}$$

а поскольку $\forall n \in N : \hat{x}^0_n(p) = \hat{\mu}^0_n \hat{x}^0_n(q)$, то, полагая в (22) $\mu_n = \hat{\mu}^0_n, n \in N$, получим равенства

$$\begin{gathered}\sum_{m \in N} \hat{\mu}^0_m \alpha^0_{mn}(q)/\hat{\mu}^0_n = 1 - \left(\textstyle\sum_{j \in I_n} w_j x^0_j / \hat{\mu}^0_n \hat{x}^0_n(q) \right) = \\ = 1 - \left(\textstyle\sum_{j \in I_n} w_j x^0_j / \hat{x}^0_n(p) \right) = \textstyle\sum_{m \in N} \alpha^0_{mn}(p), \quad n \in N \,,\end{gathered}$$

показывающие, что системы (21) и (22) после указанной подстановки идентичны. Умножая затем (22) на $\hat{\mu}^0_n$, получаем для векторов $\hat{\mu}^0$, $\hat{\omega}^0$ равенства (16).

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЪЕМОВ ПРОИЗВОДСТВА ТОВАРНОЙ ПРОДУКЦИИ

Итак, леонтьевская модель с продуктивной матрицей $A \geq 0$ обеспечивает полную свободу в установлении как нормативов начисления добавленной стоимости в (2), так и объемов выпуска всех видов товарной продукции в (1), а равенством (3) при этом как будто бы гарантируется и экономическое равновесие, ибо денежная стоимость всей товарной продукции совпадает с совокупным доходом всех ее потенциальных потребителей. Возникают, однако, два вопроса: удастся ли реализовать по ценам *p всю* товарную продукцию и можно ли гарантировать в необходимых объемах выпуск валовой продукции? В модели, отвечающей на эти вопросы, ограничения на выпуск валовой продукции построим примерно так же, как это делается в задачах оптимизации загрузки оборудования (Канторович, 1959), т.е. будем полагать, что векторами $x^l \in X_l$, $l \in L$ определяются валовые объемы производства *локальных объектов* при следующих предположениях:

а) каждое из множеств X_l выпукло и замкнуто, причем $0 \in X_l$, поскольку функционирование объекта может быть приостановлено;

б) в рамках *специализации* объекта $i \in I_l$ продукты могут производиться в каких угодно соотношениях, но общая величина выпуска всегда будет ограничена сверху;

в) равенствами $x_i^l = 0$, $i \in I \setminus I_l$, $l \in L$ каждый из векторов $x^l \in X_l$, $l \in L$ доопределен до полной номенклатуры продукции $I = \bigcup_{l \in L} I_l$ всей производственной системы.

В силу предположения в) получаем (Рокафеллар, 1973), что при

$$X = \sum_{l \in L} X_l \tag{23}$$

производственную задачу всей системы можно сформулировать в виде

$$\max\{w(p)x \mid x \in X\}, \tag{24}$$

где вектор $w(p)$ *определяется* в (2) при *текущих* значениях цен p. В силу (23) задача (24) распадается на *локальные задачи*

$$\max\{w(p)x^l \mid x^l \in X_l\}, \quad l \in L, \tag{25}$$

и можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5. *Если $X_l(p)$, $l \in L$, – множества оптимальных решений задач* (25) *при ценах p, то*

$$X(p) = \sum_{l \in L} X_l(p) \tag{26}$$

– множество оптимальных решений при ценах p задачи (24)*, а образ его при отображении* (1) $Y(p)$ *– множество оптимальных решений при ценах p задачи*

$$\max\{py \mid y \in Y\}, \tag{27}$$

где Y – образ множества X из (23) *при отображении* (1)*. Оптимальные значения функционалов задач* (24) *и* (27) *совпадают.*

Если $x^l(p) \in X_l(p)$, $x^l \in X_l$, а $y^l(p)$, y^l – их образы при отображении (1), то в соответствии с (3), (23), (25), (26) получаем, что

$$p\sum_{l \in L} y^l(p) = w(p)\sum_{l \in L} x^l(p) \geq \sum_{l \in L} w(p)x^l = p\sum_{l \in L} y^l.$$

Процесс реализации товарной продукции удобно представить в форме совокупности задач

$$\min\{py - \phi_k(y) \mid y \in Y^+\}, \quad k \in K, \tag{28}$$

где K – множество возможных направлений ее реализации, а $Y^+ = \{y \mid y \geq 0\}$. Множества оптимальных решений задач (28) при ценах p обозначим $Y_k'(p)$, $k \in K$, а равенством

$$Y'(p) = \sum_{k \in K} Y_k'(p), \tag{29}$$

тогда определено множество векторов *совокупного спроса* $\xi(p) \in Y'(p)$. Возможные же объемы *совокупного предложения* товарной продукции при ценах p заданы любым из векторов $\eta(p) \in Y(p)$, и понятно, что при произвольных значениях p и векторов $\xi(p)$, $\eta(p)$ – в случае их неединственности – между объемами спроса и предложения продуктов могут возникать дисбалансы.

Определение 2. Цены $\overline{p}$, при которых $Y(\overline{p}) \cap Y'(\overline{p}) \neq \varnothing$, будем называть *равновесными*, а сбалансированную в (1) пару векторов $\overline{x}, \overline{y}$ – *состоянием равновесия*, если $\overline{y} \in Y(\overline{p}) \cap Y'(\overline{p})$.

Таким образом, свобода в формировании векторов x, p по произвольно заданным в правых частях равенств (1), (2) значениям y, w оказывается иллюзорной, и в реальности процесс идет в обратном направлении. В (2) в текущих ценах p строится вектор $w(p)$, а после решения задачи (24) – вектор валовых выпусков $x(p)$, который затем преобразуется в (1) в вектор $\eta(p)$, причем выполнение неравенства $\eta(p) \geq 0$ не гарантируется. Но вектор $\xi(p) \geq 0$ в силу (28), (29), и поэтому *при доказанной возможности его совпадения* с $\eta(p)$ устанавливается, что $p = \overline{p}$, т.е. имеет место экономическое равновесие. Тем любопытнее следующее утверждение.

Теорема 6. *Если* $Y(p) \cap Y'(p) \neq \varnothing$ *при некоторых ценах* p*, то любой из наборов векторов* $\xi^k(p)$, $k \in K$, *формирующих в соответствии с* (28), (29) *вектор* $\xi(p) \in Y(p) \cap Y'(p)$, *оптимален по Парето на множестве* $Y \cap Y^+$. *Если же в модели* (28) *имеется только одно направление реализации товарной продукции (с функцией* ϕ*), то любой из векторов* $\overline{y} \in Y(\overline{p}) \cap Y'(\overline{p})$ *будет оптимальным решением задачи*

$$\max\{\phi(y) \,|\, y \in Y \cap Y^+\}. \tag{30}$$

Пусть распределение $\xi^k(p) \geq 0$, $k \in K$ улучшается в смысле Парето (Карлин, 1964) набором векторов $z^k \geq 0$, $k \in K$, т.е. выполнены неравенства $\phi_k(z^k) \geq \phi_k(\xi^k(p)), k \in K$, причем по крайней мере одно из них – строго. Поскольку тогда из (28), (29) для вектора $z = \sum\limits_{k \in K} z^k$ следует неравенство $0 < p(z - \xi(p))$, то в силу оптимальности вектора $\eta(p)$ в (27) и равенства $\eta(p) = \xi(p)$ $\forall y \in Y$: $pz > p\xi(p) = p\eta(p) \geq py$ и z отсекается от множества Y, а значит, и от $Y \cap Y^+$. Если же $|K| = 1$, то в соответствии с (28) $\forall y \geq 0 : \phi(\overline{y}) \geq \phi(y) + \overline{p}(\overline{y} - y)$, а по теореме 5 $\forall y \in Y$: $\overline{p}(\overline{y} - y) \geq 0$, т.е. $\forall y \in Y \cap Y^+$: $\phi(\overline{y}) \geq \phi(y)$.

4. ТИПЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (30)

Хотя теоремой 6 установлены понятные и простые результаты, но оказывается, что сам факт оптимальности вектора $\overline{y} \in Y(\overline{p}) \cap Y'(\overline{p})$ в (30) ничего не говорит об экономических свойствах решения. Прояснить ситуацию позволяют следующие ниже утверждения.

Лемма 2. *Полуположительный вектор* p^0*, удовлетворяющий неравенствам*

$$p^0(E - A) \leq 0, \tag{31}$$

существует тогда и только тогда, когда матрица $A \geq 0$*, но непродуктивна.*

Так как в силу (5) для матрицы $A \geq 0$ условие (6) принимает вид $\exists \overline{x} > 0 : \overline{x} > A\overline{x}$, то ноль отсекается от выпуклой оболочки строк матрицы $\begin{bmatrix} (E - A) \\ E \end{bmatrix}$. Если же вектора $\overline{x}$ не существует, т.е. $A \geq 0$, но непродуктивна, то ноль в нее входит и должен существовать (Рокафеллар, 1973) полуположительный вектор (p^0, v^0), для которого выполняются равенства $p_j^0 - \sum\limits_{i \in I} p_i^0 a_{ij} + v_j^0 = 0$. Полуположительным, однако, будет именно вектор p^0, так как $p^0 = 0 \Rightarrow v^0 = 0$, а (31) тогда следует из неравенства $v^0 \geq 0$.

Следствие 2. Если матрица $A \geq 0$ и продуктивна, а вектор цен p полуположительный, то у вектора $w(p)$ будут положительные компоненты.

Неравенство $w(p) \leq 0$ с полуположительным p означало бы, что матрица A непродуктивна.

Теорема 7. *Если цены* $\overline{p}$ *полуположительны, а матрица* $A \geq 0$ *и продуктивна, то в оптимальном решении задачи* (30)*, которое формируется полуположительными и сбалансированными в* (1) *векторами* $y(\overline{p}), x(\overline{p})$*, выполняется неравенство*

$$\overline{p}\, y(\overline{p}) > 0. \tag{32}$$

Цены $\overline{p} = 0$ *тогда и только тогда, когда вектор* $y(0)$*, сбалансированный в* (1) *с некоторым вектором* $x(0) \in X$*, является оптимальным решением задачи*

$$\max\{\phi(y) \,|\, y \in Y^+\} \tag{33}$$

и будет полуположительным, если

$$\exists \hat{y} \geq 0 : \phi(\hat{y}) > \phi(0). \tag{34}$$

Если цены $\overline{p}$ полуположительны, то по следствию 2 положительны какие-то компоненты вектора $w(\overline{p})$, а по условию б) неравенство $w(\overline{p})\hat{x} > 0$ выполняется для некоторого вектора $\hat{x} \in X$, а так как в силу (24) $w(\overline{p})x(\overline{p}) \geq w(\overline{p})\hat{x}$, то (32) следует из теоремы 5. Но тогда вектор $y(\overline{p})$, а, значит, по теореме 1 и сбалансированный с ним в (1) вектор $x(\overline{p}) \in X(\overline{p})$ полуположительны. Так как $\overline{p} = 0 \Rightarrow w(0) = 0$, то в оптимальное решение задачи (30) может войти любой из оптимальных в (33) векторов $y(0)$, лишь бы его прообраз при отображении (1) $x(0) \in X$. При условии (34) вектор $y(0)$ будет полуположительным, поскольку $\phi(y(0)) \geq \phi(\hat{y}) > \phi(0)$, но если (34) не выполняется, то в качестве *оптимального* возможно решение $y(0) = 0$, так как его прообраз при отображении (1) $x(0) = 0 \in X$ по условию а). Если же вектор $x^0 \in X$ сбалансирован в (1) с оптимальным в (33) вектором y^0, то в (24)–(28) можно положить $p = 0$.

Таким образом, задача (30) с продуктивной леонтьевской матрицей $A \geq 0$ допускает существование оптимальных решений двух типов. Одно из них можно назвать экономическим, и характеризуется оно неравенством (32), одновременно с которым могут быть выполнены равенства

$$\xi(\overline{p}) = \eta(\overline{p}) = y(\overline{p}). \tag{35}$$

Оптимальное решение второго типа можно назвать коммунистическим, так как в этом случае объемы производства валовой продукции определяются прямыми балансовыми расчетами, а товарной продукции – критерием (33). Экономический анализ принятых решений не проводится, да в нем и нет необходимости, поскольку улучшить решение $y(0)$ нельзя.

Если предположить, что все неравенства в (31) выполняются строго, то

$$\exists \hat{p} > 0 : \hat{p}(E - A) < 0 \tag{36}$$

и ноль отсекается от выпуклой оболочки столбцов матрицы $[(A - E), E]$, а однородное уравнение $(E - A)x - y = 0$ не имеет полуположительнных решений (Рокафеллар, 1973).

Теорема 8. *Если выполняется условие* (36)*, то экономическое равновесие достигается при* $x(\overline{p}) = y(\overline{p}) = 0$ *и* $\overline{p} = \sigma\hat{p}, \sigma \in (0, +\infty)$*, причем значение* σ *может оказаться очень большим, если* (34) *выполняется хотя бы для одного* $k \in K$.

Так как $w(\overline{p}) < 0$ в силу (36), то векторы $x(\overline{p}) = \eta(\overline{p}) = 0$ оптимальны в (24), (25), и в соответствии с теоремой 6 теперь достаточно показать, что и $\xi(\overline{p}) = 0$ при некотором $\sigma > 0$.

Лемма 3. *Если для* ξ^k*,* $k \in K$*, выполнены условия*

$$\forall y : \phi_k(\xi^k) - \phi_k(y) \geq s^k(\xi^k)(\xi^k - y), \tag{37}$$

$$s^k(\xi^k) \leq p, \xi^k \geq 0, s^k(\xi^k)\xi^k = p\xi^k, \tag{38}$$

то $\xi^k \in Y_k'(p)$.

Так как из (38) следует, что $\forall y \geq 0 : (s^k(\xi^k) - p)(\xi^k - y) \geq 0$, то из (37) получаем $\forall y \geq 0 :$ $\phi_k(\xi^k) - \phi_k(y) \geq p(\xi^k - y)$.

Так как неравенства (36) однородны, то σ в равенстве $\overline{p} = \sigma\hat{p}$ можно выбрать настолько большим, чтобы в (38) при $p = \overline{p}$ сформировались строгие неравенства

$$s^k(0) < \overline{p},\ k \in K, \tag{39}$$

и по дополняющей нежесткости равенства $\xi^k(\overline{p}) = 0,\ k \in K$. Выполнение неравенств (39) будет гарантировано, если

$$\sigma > \max_{k \in K} \max_{i \in I} s_i^k(0)/\hat{p}_i. \tag{40}$$

Полагая в (37) $y = \hat{y}^k, \xi^k = 0$ и используя (34), нетрудно получить соотношения

$$s^k(0)\hat{y}^k \geq \phi_k(\hat{y}^k) - \phi_k(0) > 0 \Rightarrow \max_{k \in K} \max_{i \in I} \left\{ s_i^k(0) \right\} > 0,$$

т.е. в соответствии с (40) $\sigma > 0$.

С экономической точки зрения цены на все виды товарной продукции при сокращении объемов их предложения должны приближаться к величинам $s_i^k(0)$, которые для некоторых $i \in I$, $k \in K$ могут оказаться очень большими. Для неравенств (36) абсолютные значения цен $\hat{p}_i, i \in I$, несущественны и могут быть небольшими. Соответственно значение σ в (40) может оказаться очень большим, т.е. переход к *инфляционному равновесию* должен сопровождаться значительным ростом цен, по крайней мере на некоторые виды продукции при общем сокращении объемов производства. Такие явления в экономиках различных стран наблюдались неоднократно (Самуэльсон, 1964) и воспринимались как катастрофические. Однако теорема 8 показывает, что это одна из форм экономического равновесия, возникающая из-за отсутствия полуположительных решений в (1).

5. ПРИВОДИМОСТЬ ЛЕОНТЬЕВСКОЙ МАТРИЦЫ

Определение 3. Будем говорить, что леонтьевская матрица A разбита на блоки, если на некотором разбиении I_n, $n \in N$, множества I она может быть представлена в виде $A = ||A_{mn}||$, m, $n \in N$, где $A_{mn} = ||a_{ij}||$, $i \in I_m, j \in I_n$.

Для таких матриц выполняется следующее утверждение.

Лемма 4. *Если матрица $A \geq 0$ продуктивна и каким-то образом разбита на блоки, то продуктивны все расположенные на ее главной диагонали подматрицы A_{mm}, $m \in N$.*

Доказательство следует из условия (6), которым формируется система неравенств

$$\forall (m \in N) \exists (\overline{x}^m \geq 0) : \overline{x}^m > \sum_{n \in N} A_{mn}\overline{x}^n \geq A_{mm}\overline{x}^m. \tag{41}$$

В случае $|N| = 2$ система (1) описывается двумя равенствами общего вида

$$\begin{aligned} (E_1 - A_{11})x^1 - A_{12}x^2 = y^1, \\ -A_{21}x^1 + (E_2 - A_{22})x^2 = y^2, \end{aligned} \tag{42}$$

где векторы x^n, y^n, $n \in \{1, 2\}$ определены на множествах I_1, I_2, образующих некоторое разбиение множества I. Интерес к системе (42) связан с тем, что хотя по лемме 1 в паре $x \geq 0$, y, сбалансированной в (1), $y > 0 \Rightarrow x > 0$, но возникает вопрос: если вектор y только полуположительный, то не может ли оказаться таким же и вектор x? Ответ заключается в следующем утверждении.

Лемма 5. *Если в* (42) $y^1 = 0$, $y^2 > 0$, *а матрица* $A \geq 0$ *и продуктивна, то вектор* $x^2 > 0$, *а* $x^1 = 0 \Leftrightarrow A_{12} = 0$.

Так как в (42) подматрицы $A_{11}, A_{12} \geq 0$ и по лемме 4 продуктивны, то $y^2 > 0 \Rightarrow x^2 > 0$, а $A_{12}, y^1 = 0 \Rightarrow x^1 = 0$. Но $x^1, y^1 = 0 \Rightarrow A_{12}x^2 = 0 \Rightarrow A_{12} = 0$, так как $x^2 > 0$, а $A_{12} \geq 0$.

Определение 4. Леонтьевская матрица приводима, если при расположении ее строк и столбцов в некотором порядке, установленном для элементов множества I, она может быть разбита на блоки в соответствии с (42) и так, что при этом окажется равной нулю одна из подматриц A_{12} или A_{21} (Гейл, 1959).

Замечание 2. Преобразование

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}, A_{12} \\ 0, \quad A_{22} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A_{22}, \quad 0 \\ A_{12}, A_{11} \end{bmatrix} = A'$$

сводится к перестановке в I подмножеств I_1, I_2, т.е. $I \to I' = \{I_2, I_1\}$ и матрицы A, A' эквивалентны.

Следствие 3. Если формирующая систему (1) матрица $A \geq 0$ продуктивна и неприводима, то сбалансированный в (1) с любым полуположительным вектором y вектор $x > 0$. Соответственно $(E - A)^{-1} > 0$ и матрица A не имеет нулевых строк или столбцов.

По теореме 1 вектор x полуположительный, но при наличии у него нулевых компонент матрица A была бы приводимой по лемме 5. Так как она неприводима, то вектор $x > 0$, а значит, и равенство $(E - A)(E - A)^{-1} = E$ влечет строгое неравенство $(E - A)^{-1} > 0$. Если же у матрицы A есть нулевые строки (столбцы), то ее можно представить в форме приводимой матрицы с подматрицей $A_{11} = 0$ ($A_{22} = 0$), порядок каждой из которых совпадает с количеством нулевых строк (столбцов) в A.

Замечание 3. Матрица $A = 0$ продуктивна, ибо удовлетворяет условию (6) $\forall x > 0$.

Для экономической интерпретации удобно полагать, что в модели с приводимой матрицей $A \geq 0$ описывается взаимодействие двух производственных систем, одна из которых (с матрицей A_{22}) поставляет часть своей товарной продукции в объемах, определенных компонентами вектора $A_{21}x^1$, другой (с матрицей A_{11}), использующей эти поставки в своем производстве в качестве ресурсов, а соответственно именно матрица $A_{12} = 0$.

Отметим попутно, что если в (42) матрица $A \geq 0$ и приводима, а $A_{11} = 0$, то модель сводится к равенству $(E_2 - A_{22})x^2 = y^2 + A_{21}y^1$, характерному для предприятий различных отраслей машиностроения (Волошин, 1965).

Если приводимой окажется не только A, но и хотя бы одна из ее диагональных подматриц A_{11}, A_{22} (или обе), то процесс можно продолжать, пока:

а) каждая из подматриц A_{nn}, $n \in N$, не окажется или неприводимой, или нулевой;

б) в переупорядоченном (при необходимости) множестве $\overline{N} = N$ выполнятся условия

$$\forall m, n \in \overline{N} : n > m \Rightarrow A_{mn} = 0. \tag{43}$$

Теперь можно доказать следующие утверждения.

Теорема 9. *Если матрица $A \geq 0$ и может быть приведена к блочно-треугольной форме в соответствии с условиями а) и б), то она продуктивна тогда и только тогда, когда продуктивны все подматрицы A_{nn}, $n \in N$, расположенные на ее главной диагонали.*

В соответствии с леммой 4 достаточно показать, что продуктивность матрицы $A \geq 0$, удовлетворяющей условиям (43), следует из продуктивности матриц A_{nn}, $n \in N$. Но если $\forall n \in N : \overline{y}^n > 0$, то неравенства (41) будут выполнены для векторов

$$\overline{x}^n = (E_n - A_{nn})^{-1} \left(\overline{y}^n + \sum_{m=1}^{n-1} A_{nm} \overline{x}^m \right), \quad n \in \overline{N}. \tag{44}$$

Следствие 4. Если формирующая систему (42) матрица $A \geq 0$, продуктивна и приводима, то любую пару векторов $y^1, y^2 \geq 0$ можно сбалансировать с парой $x^1, x^2 \geq 0$, независимо от объемов поставок в векторе[2] $A_{21}x^1$. Общая же величина платы за ресурсы $p^2A_{21}x^1$ на суммарную денежную стоимость товарной продукции обеих систем не влияет.

Доказательство первого утверждения нетрудно получить, полагая в (44) $|N| = 2$. Если же величинами w_i^1, $i \in I_1$, w_i^2, $i \in I_2$, формируются нормативы начисления добавленной стоимости в обеих системах, то при $A_{12} = 0$ векторы цен p^1, p^2 определяются равенствами

$$p^1 = (w^1 + p^2 A_{21})(E_1 - A_{11})^{-1}, \quad p^2 = w^2 (E_2 - A_{22})^{-1} \tag{45}$$

и, таким образом,

$$p^1 y^1 = (w^1 + p^2 A_{21})(E_1 - A_{11})^{-1} y^1 = w^1 x^1 + p^2 A_{21} x^1, \tag{46}$$

а умножая равенство $x^2 = (E_2 - A_{22})^{-1}(y^2 + A_{21}x^1)$ на w^2 слева, получим

$$w^2 x^2 = w^2 (E_2 - A_{22})^{-1}(y^2 + A_{21}x^1) = p^2 y^2 + p^2 A_{21} x^1 \tag{47}$$

и равенство $p^1y^1 + p^2y^2 = w^1x^1 + w^2x^2$ после сложения первых членов каждого из равенств (46), (47) с последними другого.

Из (45) видно, что цены p^2 формируются по правилу, указанному в (2), а дополнительные затраты на единицу продукции p^2A_{21}, возникающие у первой системы, просто добавляются к соответствующим компонентам вектора w^1, но рост затрат на единицу продукции компенсируется первой системой при формировании цен p^1 на свою продукцию.

6. СИСТЕМА С УПРАВЛЕНИЕМ

Вряд ли нужно доказывать, что любая производственная система может функционировать лишь при наличии у нее адекватной системы управления, а в (1) должны быть представлены не только обе эти системы, но и взаимодействие между ними. Модель такого типа как раз и приведена в (42), если предположить, что матрицами A_{11}, A_{22} формируются локальные леонтьевские модели производственной системы и системы управления, в A_{21} содержатся нормативы *дополнительных затрат* производства в связи с получением (в стоимостном балансе – оплатой) *услуг* системы управления, а в A_{12} находятся нормативы затрат продукции производства – иначе говоря, потребления его товарной продукции – в системе управления.

Для изучения такой модели в ее матрицу удобно ввести параметр $\alpha \geq 0$, полагая

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} A_{11} & \alpha A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \tag{48}$$

Если в (48) $\alpha = 0$, то матрица $A(\alpha)$ становится приводимой и по теореме 9 будет продуктивной, если (и только если) продуктивны матрицы A_{11}, A_{22}. Но тогда, полагая в (48) $\alpha > 0$ и исключая из (42) вектор

$$x^1(\alpha) = (E_1 - A_{11})^{-1}(\alpha A_{12} x^2(\alpha) + y^1), \tag{49}$$

получаем равенство

$$(E_2 - A_{22})x^2(\alpha) - \alpha A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} A_{12} x^2(\alpha) = A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} y^1 + y^2,$$

из которого после умножения его слева на $(E_2 - A_{22})^{-1}$ и введения обозначений

$$A_2 = (E_2 - A_{22})^{-1} A_{21} (E_1 - A_{11})^{-1} A_{12}, \tag{50}$$

$$\tilde{y}^2 = (E_2 - A_{22})^{-1}(A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} y^1 + y^2) \tag{51}$$

следуют соотношения

$$(E_2 - \alpha A_2)x^2(\alpha) = \tilde{y}^2, \tag{52}$$

---

[2] Указанная связь будет называться *существенной*, если полуположительны все векторы-столбцы матрицы A_{21} (в этом случае вектор $A_{21}x^1$ будет полуположительным, если таким же окажется вектор x^1).

для анализа которых можно воспользоваться частью теоремы Неймана–Гейла (Гейл, 1959), утверждающей, что при $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$, где

$$\alpha_{\max} \in (0, +\infty), \tag{53}$$

система неравенств $(B - \alpha A)u \geq 0$, $u \geq 0$ с матрицами B, A удовлетворяющими условиям Гейла[3], имеет непустое множество полуположительных решений. Аналогичную величину, обозначая ее α_m^2, можно определить и для матрицы A_2 в (52), так как соотношениями (50)–(52) формируется неймановская модель с матрицами $B = E_2$, $A = A_2$. Для нее выполняются следующие утверждения.

Лемма 6. *Если полуположительны все векторы-столбцы матриц* A_{12}, A_{21}, *а матрицы* A_{11}, $A_{22} \geq 0$ *и продуктивны, то для параметра* α_m^2 *выполняется условие* (53). *Входящие в* (51) *векторы* $y^1, y^2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{y}^2 = 0$, *но если вектор* $y = (y^1, y^2)$ *полуположительный, то таким же будет и вектор* $\tilde{y}^2$.

Из (50) и теоремы 1 следует, что все векторы-столбцы матрицы A_2 полуположительны и условие (53) для параметра α_m^2 выполняется по теореме Неймана–Гейла. Второе утверждение следует непосредственно из равенства (51) и теоремы 1.

Лемма 7. *Если полуположительны все векторы-столбцы матрицы* A_2, *а при* $\alpha = \alpha_0$ *существуют определенные с точностью до положительных множителей векторы* $w_m^2 > 0$ *и полуположительный* x_m^2, *для которых выполняются равенства*

$$(E_2 - \alpha_0 A_2)x_m^2 = 0, \tag{54}$$

$$w_m^2(E_2 - \alpha_0 A_2) = 0, \tag{55}$$

то при $\alpha \in (\alpha_0, +\infty)$ *у системы* (52) *нет полуположительных решений, а при* $\alpha \in (0, \alpha_0)$ *либо вектор* $x_m^2 > 0$ *и тогда продуктивна матрица* αA_2, *либо у приводимой матрицы*

$$\alpha A_2 = \alpha \begin{bmatrix} A_{12}^{(2)}, & 0 \\ A_{21}^{(2)}, & A_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{56}$$

продуктивна и не имеет нулевых строк подматрица $\alpha A_{22}^{(2)}$.

Заметим, что $\alpha_0 > 0$, так как если $\alpha_0 = 0$, то не выполняется ни одно из равенств (54), (55). В соответствии с леммой 5 если $x_m^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{x}_m^2 \end{bmatrix}$, где вектор $\overline{x}_m^2 > 0$, то матрица αA_2 приводится к форме (56), где подматрица $A_{22}^{(2)}$ не имеет нулевых строк в силу (54). При $\alpha \in (0, \alpha_0)$ матрица $\alpha A_{22}^{(2)}$ продуктивна, так как

$$\left(E_2^{(2)} - \alpha A_{22}^{(2)}\right)\overline{x}_m^2 = (\alpha_0 - \alpha)\, A_{22}^{(2)}\overline{x}_m^2 > 0.$$

Продуктивность матрицы A_2, когда $x_m^2 > 0$, доказывается точно так же, ибо в силу (54) в этом случае A_2 не имеет нулевых строк. Наконец, если $\alpha \in (\alpha_0, +\infty)$, то из (55) следует, что $w_m^2(E_2 - \alpha A_2) = (\alpha_0 - \alpha)w_m^2 A_2 < 0$, так как $w_m^2 A_2 > 0$ и система (52) не имеет полуположительных решений по теореме 8.

Возникает вопрос, как это трансформируется в (42) с матрицей $A(\alpha)$ из (48)? Здесь выполняется следующее утверждение.

Теорема 10. *Если* $\alpha \in (0, \alpha_m^2)$, *то система* (42) *с матрицей* $A(\alpha)$ *из* (48) *имеет полуположительное решение* $x = (x^1, x^2)$ *при любом полуположительном векторе* $y = (y^1, y^2)$. *Если же* $\alpha \in (\alpha_m^2, +\infty)$, *то полуположительных решений у системы* (42) *нет.*

Переход от равенств (42) с матрицей $A(\alpha)$ из (48) к модели (52) в силу (48)–(51) представляет собой эквивалентное преобразование, при котором любая четверка векторов y^1, y^2, $x^1(\alpha)$, $x^2(\alpha)$, сбалансированная в (42), удовлетворяет (50)–(52). Но однородная система (52) имеет полуполо-

[3] Полуположительны все векторы-столбцы матрицы A и все векторы-строки матрицы B.

жительное решение лишь при условии $\alpha \in [0, \alpha_m^2)$, а соответственно в этом случае при любых полуположительных значениях векторов y^1, y^2 в (51) в (52) будет получен полуположительный вектор $x^2(\alpha)$, а в (49) – полуположительный $x^1(\alpha)$, и таким образом четверка y^1, y^2, $x^1(\alpha)$, $x^2(\alpha)$ будет сбалансирована в (42). Однако, если $\alpha > \alpha_m^2$, то по лемме 7 $\tilde{y}^2$, $x^2(\alpha) = 0$. По лемме 6 y^1, $y^2 = 0$ и $x^1(\alpha) = 0$ в силу (49), т.е. у системы (42) нет полуположительных решений.

В итоге приходим к следующему утверждению.

Следствие 5. Определенная в (42) и удовлетворяющая условиям леммы 6 матрица $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ продуктивна, если для неймановского технологического темпа роста модели (52) с построенной в соответствии с (50) матрицей A_2 выполняется неравенство

$$\alpha_m^2 > 1. \tag{57}$$

Действительно, при выполнении условия (57), полагая в (48) $\alpha = 1$, получим матрицу A, структурированную в соответствии с (42) и продуктивную по лемме 6 и теореме 10.

Таким образом, неравенство (57) является ключевым для оценки дополнительной нагрузки на производственную систему, которую создает через матрицу *обратной связи* A_{12} система управления. При его нарушении – в случае $\alpha_m^2 = 1$ – в (52) оказывается возможным только неймановское решение с полуположительным вектором (x_m^1, x_m^2), а $(y^1, y^2) = 0$, т.е. возможность получения в (42) какой-либо товарной продукции исключается. Если же $\alpha_m^2 < 1$, то в силу неравенств

$$w_m^2 > 0,\; w_m^2(E_2 - A_2) < 0 \tag{58}$$

возникает инфляционное решение с векторами x^2, $\tilde{y}^2 = 0$.

Полагая, что вектором w_m^2 определены нормативы начисления добавленной стоимости в системе управления, можно сформировать цены

$$p_m^2 = w_m^2(E_2 - A_{22})^{-1} \tag{59}$$

на все виды ее продукции, причем в силу (4) и (59) $w_m^2 > 0 \Rightarrow p_m^2 > 0$, а второе неравенство в (58), полагая $\tilde{A}_2 = (E_2 - A_{22})A_2(E_2 - A_{22})^{-1}$, можно представить в виде

$$p_m^2(E_2 - \tilde{A}_2) < 0. \tag{60}$$

Однако так как в соответствии с (50) $\tilde{A}_2 = A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}$, то, полагая в (60) $p_m^1 = p_m^2 A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}$, можно представить оба неравенства (58) в эквивалентной форме с помощью соотношений

$$p_m^1(E_1 - A_{11}) - p_m^2 A_{21} = 0, \tag{61}$$
$$p_m^2(E_2 - A_{22}) - p_m^2 A_{12} < 0.$$

Таким образом, хотя продуктивность матриц A_{11}, $A_{22} \geq 0$ обеспечивает работоспособность обеих локальных систем, но при $\alpha_m^2 < 1$ возникают цены $p_m = (p_m^1, p_m^2) > 0$, при которых система управления в силу следующих из (61) неравенств $p_m^1 A_{12} > w_m^2 > 0$ оказывается не в состоянии компенсировать затраты на свое содержание, что и становится глубинной причиной кризиса, поражающего не только систему управления, но и все подведомственное ей производство. Иначе говоря, экономический кризис производства – это прежде всего кризис управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аникин А.В. (1985): Юность науки. М.: Политиздат.

Волошин Н.И. (1965): Система матричных моделей внутризаводского планирования. В кн.: “*Применение математики в экономических исследованиях*”. Т. 3. М.: Мысль.

Гейл Д. (1959): Замкнутая линейная модель производства. В кн.: “*Линейные неравенства и смежные вопросы*”. М.: ИЛ.

Гейл Д. (1963): Теория линейных экономических моделей. М.: ИЛ.

Итеративное агрегирование (1979): Итеративное агрегирование и его применение в планировании / Под ред. Л.М. Дудкина. М.: Экономика.

Дементьев В.Е. (2006): Ловушка технологических заимствований и условия ее преодоления в двухсекторной экономике // *Экономика и мат. методы.* Т. 42. № 4.

Канторович Л.В. (1959): Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР.

Карлин С. (1964): Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир.

Катышев П.К., Полтерович В.М. (2006): Политика реформ, начальные условия и трансформационный спад // *Экономика и мат. методы*. Т. 42. № 4.

Леонтьев В.В. (1990): Экономические эссе. М.: Политиздат.

Медницкий В.Г., Медницкий Ю.В. (2004): О зависимости значений элементов балансовых матриц от цен и технологии производства // *Экономика и мат. методы*. Т. 40. № 1.

Рокафеллар Р. (1973): Выпуклый анализ. М.: Мир.

Самуэльсон П. (1964): Экономика. М.: Прогресс.

Поступила в редакцию
20.06.2010 г.

About Economic Crisis of the Production Systems

V.G. Mednitsky, Yu.V. Mednitsky, M.R. Fattakhov

Make use of decomposition of the optimal problem shown that economic crisis can mould from too overloaded of the productive system created in the management system.

Keywords: decomposition, optimal problem, Leontief's models, economic crisis.