

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ А. ГУСЕВА ДЛЯ СЕЙСМИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА: ВЫСОКОЧАСТОТНОЕ ПОВЕДЕНИЕ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ

© 2020 г. Г. М. Молчан*

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия

**E-mail: molchan@mitp.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2019 г.

После доработки 17.06.2019 г.

Принята к публикации 24.06.2019 г.

В работе обсуждаются локальные особенности функции очага, порождающие одновременно а) квадратичное затухание спектра и б) потерю направленности излучения в дальней зоне на высоких частотах. Этот вопрос был поставлен А. Гусевым. Предполагалось, что положительное решение может быть получено для фронтов разрыва с достаточно изрезанной (“кружевной”) структурой. Найдены условия реализации перечисленных свойств. Показано, что структура фронта может быть относительно простой, но негладкой.

Ключевые слова: сейсмический источник, высокочастотное излучение, теоретическая сейсмология, Фурье-анализ.

DOI: 10.31857/S0002333720010081

1. ВВЕДЕНИЕ

А. Гусев [Gusev, 2013; 2014; 2018] привлек внимание к проблеме моделирования сейсмического источника, для которого упругое смещение в дальней зоне обладает двумя свойствами: (а) высокочастотный (ВЧ) спектр спадает, как ω^{-2} , и при этом, (б) асимптотика не зависит от направления на приемник. Первое свойство традиционно называют омега-квадрат-поведением, а второе потерей направленности излучения. Квадратичное затухание спектра общепринято в инженерной практике, хотя не исключается конечность частотного диапазона такого поведения [Гусев и др., 2017]. Аналогично обстоит дело и с универсальностью свойства (б). В работах [Kurzon et al., 2014; Wen et al., 2014] имеются контрпримеры, относящиеся к частотному диапазону: $\omega > \omega_0$, где ω_0 есть угловая частота Брюна [Brune, 1970]. Любые исключения подчеркивают сложность задачи А. Гусева и требуют понимания условий, при которых реализуются указанные свойства (а), (б).

Для решения проблемы А. Гусев предложил две, близкие по сути, кинематические модели очага с элементами стохастического поведения [Gusev, 2014; 2018]. Они позволили воспроизвести ключевые свойства ВЧ излучения: существование двух угловых частот, плоский участок спектра

ускорения после второй угловой частоты (что эквивалентно свойству (а)), и слабый (в модели 2014 г.) эффект направленности излучения. В этих моделях важную роль играет фрактальная природа фронта разрыва. Чтобы воспроизвести указанные особенности, фронт по терминологии А. Гусева должен быть “кружевным”, т.е. очень изрезанным и многосвязным. Поскольку анализ и настройка моделей осуществлялись численно, ответ на вопрос о природе свойств (а), (б) остался открытым. В частности, неясно, насколько сложной должна быть кружевная структура фронта разрыва в условиях (а), (б).

Ниже мы собираемся показать, что для реализации свойства (а) достаточно иметь слегка негладкий фронт разрыва, а для реализации свойства (б) достаточно гладкость распределений шумовой компоненты фронта. Отсюда можно заключить, что фрактальные модели удачно дополняют классические гладкие модели очага [Aki, Richards, 1980]. Причина в том, что в классических моделях свойство (а) неустойчиво, а свойство (б), как правило, отсутствует. Однако добавление слегка негладкой шумовой компоненты фронта позволяет устранить эту неустойчивость и дополнительно реализовать свойство (б). Это наблюдение содержится в технически сложной работе автора [Molchan,

2015]. Представленный ниже анализ обладает большей общностью и простотой.

О структуре работы

В разделе 3 мы описываем локальные особенности гладкой функции источника, которые могут отвечать за квадратичное затухание спектра. В разделе 4 обсуждается более общий класс дважды стохастических моделей Гусева и находятся условия, при которых реализуются свойства (а), (б). В разделе 5 на эвристическом уровне обсуждается природа полученных асимптотик. Для упрощения чтения доказательства математических утверждений вынесены в Приложение.

2. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Известно [Aki, Richards, 1980], что поле смещений в *дальней* зоне допускает представление:

$$\begin{aligned} u(t) &= A \int_{\Sigma} f(\mathbf{g}, t - \text{dist}(\mathbf{g}, G_{rec})/c) d\mathbf{g} \approx \\ &\approx A \int_{\Sigma} f(\mathbf{g}, t - t_0 + \langle \mathbf{g}, \gamma_{\Sigma} \rangle / c) d\mathbf{g}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь: G_{rec} – положение приемника; Σ – плоскость разрыва с координатами $(g_1, g_2) = \mathbf{g}$; f – функция источника, т.е. локальная скорость подвижки $\Delta \dot{u}(\mathbf{g}, t)$; γ_{Σ} – ортогональная проекция направления гипоцентр – приемник: γ – на плоскость Σ ; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение; c – скорость распространения волн; $t_0 c$ – расстояние от гипоцентра до приемника; $d\mathbf{g} = dg_1 dg_2$ – элемент площади.

Для простоты сигнал в представлении (1) рассматривается в скалярном виде.

Применяя преобразование Фурье, получим из (1) двойственное спектральное представление:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega) &\approx A \int d\mathbf{g} \int e^{i\omega t} f(\mathbf{g}, t - t_0 + \langle \mathbf{g}, \gamma_{\Sigma} \rangle / c) dt = \\ &= A e^{i\omega t_0} \int d\mathbf{g} \int e^{i\omega(s - \langle \mathbf{g}, \gamma_{\Sigma} / c \rangle)} f(\mathbf{g}, s) ds = \\ &= A e^{i\omega t_0} \hat{f}(-\gamma_{\Sigma} c^{-1} \omega, \omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\hat{f}(\mathbf{k}, \omega)$ пространственно-временное преобразование Фурье функции $f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{g}, t)$, продолженной нулем за пределы своего ограниченного носителя Ω_f .

Задача омега-квадрат-поведение спектра звучит так: описать физически естественный класс функций очага $f(\mathbf{x})$, для которых $\hat{f}(\mathbf{p}\omega)$, $\mathbf{p} = (-\gamma_{\Sigma}/c, 1)$ имеет устойчивую ω^{-2} асимптотику, т.е. наблюдаемую на достаточно массивном множестве направлений γ .

В силу линейности преобразования Фурье проще изучать локальные фрагменты $f(\mathbf{x})$, а именно $f(\mathbf{x}|\mathbf{x}_{0i}) = f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}|\mathbf{x}_{0i})$. Здесь $\varphi(\mathbf{x}|\mathbf{x}_{0i})$ – вспомогательные, бесконечно гладкие, с ограниченным носителем (финитные) функции: они равны 0 вне малой окрестности точки \mathbf{x}_{0i} , $O_{x_{0i}}$, равны 1 в меньшей окрестности $0.5O_{x_{0i}}$ и в сумме дают единицу: $\sum \varphi(\mathbf{x}|\mathbf{x}_{0i}) = 1$. Описанные фрагменты не искажают функцию $f(\mathbf{x})$ вблизи выбранных точек \mathbf{x}_{0i} и гладко обнуляют ее вне малых окрестностей. Высокочастотную асимптотику фрагмента:

$$\int e^{i\omega(\mathbf{p}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) d\mathbf{x} := \hat{f}(\mathbf{p}\omega|\mathbf{x}_0) \quad (3)$$

будем трактовать как вклад окрестности точки \mathbf{x}_0 в асимптотику $\hat{u}(\omega)$. Фрагментация функции очага позволяет описывать асимптотику спектра в терминах возможных локальных особенностей функции $f(\mathbf{x})$. При этом не требуется конкретизация модели $f(\mathbf{x})$ в целом. Кроме того, рассматриваемые ниже особенности $f(\mathbf{x})$ имеют точечный характер и поэтому их спектральный вклад (3) не будет зависеть от выбора вспомогательных функций.

Ниже рассмотрены два типа локальных особенностей функции очага: кусочно-гладкие и фрактальные.

3. ГЛАДКИЕ ФУНКЦИИ ОЧАГА

В этом разделе функция очага $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (\mathbf{g}, t)$ предполагается гладкой внутри ограниченного носителя $\Omega_f \in R^3$. Для любой внутренней точки $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{g}_0, t_0)$ из Ω_f , фрагмент $f(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$ в этом случае можно считать финитной (т.е. с ограниченным носителем) гладкой функцией. Поэтому его ВЧ вклад в асимптотику (2) пренебрежимо мал, точнее $|\hat{f}(\mathbf{p}\omega|\mathbf{x}_0)| < C\omega^{-n}$, если конечен порядок гладкости, n , функции $f(\mathbf{x})$. Это хорошо известный факт из теории преобразования Фурье [Федорюк, 1987].

Следовательно, в гладком случае ВЧ асимптотика $\hat{u}(\omega)$ определяется свойствами функции очага вблизи границы носителя Ω_f и свойствами самой границы $\partial\Omega_f$.

Назовем границу $\partial\Omega_f$ фронтальной поверхностью очага. В окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega_f$ будем описывать ее в явном виде $t = t_r(\mathbf{g})$, предполагая функцию $t_r(\mathbf{g})$ гладкой или кусочно-гладкой. Индекс r связан с английским термином “rupture”. Наблюдаемый аналог $t_r(\mathbf{g})$ (“arrival function”):

$$t_a(\mathbf{g}) = t_0 - \langle \mathbf{g}, \gamma_{\Sigma} / c \rangle + t_r(\mathbf{g}) \quad (4)$$

определяет время пробега сигнала от точки разрушения \mathbf{g} до удаленного приемника. Изолинии $t_a(\mathbf{g})$ назовем изохронами.

В литературе поведение функции очага вблизи фронта разрыва до конца не формализовано. Допускается, что на стадии фазы залечивания трещины функция очага ограничена [Madariaga et al., 1998; Nielsen, Madariaga, 2003]. В активной фазе разрушения, классические модели (см. [Костров, 1964; Madariaga, 1977; 1983]) демонстрируют сингулярность типа “обратного квадратного корня”, $1/\sqrt{\cdot}$. Строгое обоснование этой сингулярности в рамках теории упругости дано в работе [Neppe et al., 2006]. Объединяя оба случая, будем рассматривать функцию источника в окрестности \mathbf{x}_0 следующего вида:

$$f(\mathbf{g}, t) = (t - t_r(\mathbf{g}))_+^{\beta-1} V(\mathbf{g}, t), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (5)$$

где $a_+ = \max(a, 0)$. Физически интересны значения $\beta = 1$ и $\beta = 1/2$. В первом случае получаем ограниченность f , а во втором сингулярность типа обратного квадратного корня.

Следующие два утверждения являются следствиями леммы Эрдейи и метода стационарной фазы (см приложение А1).

Утверждение 1. Пусть $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{g}_0, t_0)$ точка границы $\partial\Omega_f$, в окрестности которой функция $f(\mathbf{x})$ допускает представление (5) с гладкими функциями $t_r(\mathbf{g})$ и $V(\mathbf{g}, t) \neq 0$.

Пусть в окрестности \mathbf{g}_0 на границе существует ровно одна и притом невырожденная *стационарная точка* \mathbf{g}_s функции $t_a(\mathbf{g})$, т.е. $\nabla t_a(\mathbf{g}_s) = 0$ и полная кривизна поверхности $t_a(\mathbf{g})$ в этой точке ненулевая: $K_s \neq 0$. Тогда ВЧ вклад \mathbf{x}_0 в спектр источника имеет порядок $O(\omega^{-(\beta+1)})$, а амплитуда вклада зависит от направленности излучения через стационарную точку. Более точно:

$$\hat{u}(\omega | \mathbf{x}_0) \approx C_\beta \omega^{-(1+\beta)} 2\pi A |K_s|^{-1/2} V(\mathbf{g}_s, t_r(\mathbf{g}_s)) \epsilon + o(\omega^{-2}), \quad (6)$$

$$|\epsilon| = 1, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Искомое квадратичное затухание спектра реализуется при $\beta = 1$, т.е. в случае ограниченности $f(\mathbf{x})$ в окрестности \mathbf{g}_0 .

При отсутствии стационарных точек спектральный вклад фрагмента имеет порядок $o(\omega^{-2})$ при любом $\beta > 0$.

Детали обоснования (6) вынесены в Приложение А2.

Сверхзвуковой (super shear) эффект. Существование регулярной стационарной точки \mathbf{g}_s у функции $t_a(\mathbf{g})$ означает, что

$$\nabla t_r(\mathbf{g}_s | \mathbf{x}_0) = \gamma_\Sigma / c. \quad (7)$$

Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{g}) = (v^1(\mathbf{g}), v^2(\mathbf{g}))$ вектор скорости фронта в точке \mathbf{g} . Продифференцируем соотношение

$t = t_r(\mathbf{g} | \mathbf{x}_0)$ по t , учтем (7) и неравенство $|\gamma_\Sigma| \leq 1$. В результате получим необходимое условие существования стационарной точки:

$$1 = \langle \nabla t_r(\mathbf{g}_s | \mathbf{x}_0), \mathbf{v}(\mathbf{g}_s) \rangle = \langle \gamma_\Sigma / c, \mathbf{v}(\mathbf{g}_s) \rangle \leq |\mathbf{v}(\mathbf{g}_s)| / c := v_r(\mathbf{g}_s) / c, \quad (8)$$

где $v_r(\mathbf{g}_s)$ – полное значение скорости.

Полученное неравенство означает, что в стационарной точке разрыв должен опережать волну по скорости: $v_r(\mathbf{g}_s) \geq c$. Такое явление возможно, хотя для землетрясений наблюдается редко [Madariaga et al., 2000]. В последнее время оно стало объектом интенсивного изучения теоретически, численно и экспериментально (см., например, [Rosakis et al., 1999; Dunham, Archuleta, 2004; Yang, Gao, 2004; Bizzari et al., 2010; Marty et al., 2019]).

В классической модели в работе [Костров, 1964] функция очага имеет вид $f(\mathbf{g}, t) = Ad/dt(v_r^2 t^2 - |\mathbf{g}|^2)_+^{1/2}$ и, значит, фронтальная поверхность образует конус: $(v_r t)^2 = |\mathbf{g}|^2$. Кривизна конической поверхности равна нулю. Поэтому, согласно (6), ВЧ вклад всех стационарных точек конической фронтальной поверхности в ω^{-2} – асимптотику равен нулю.

Смягчим требование о существовании стационарной точки на фронтальной поверхности $t_r(\mathbf{g})$, заменив стационарность *условной стационарностью*.

Пусть $t_r(\mathbf{g})$ теряет гладкость на линии $l: g_2 = \psi(g_1)$. Будем считать, что $t_r(\mathbf{g})$ представлено двумя гладкими поверхностями $t_r^\pm(\mathbf{g})$ с общим гладким краем, расположенным над гладкой кривой l . Рассмотрим сужение $t_a(\mathbf{g})$ на линию $l: S(g_1) = t_a(g_1, \psi(g_1))$. Точку $\tilde{\mathbf{g}}_s = (\tilde{g}_{1s}, \psi(\tilde{g}_{1s}))$ назовем условной стационарной точкой на $t_r(\mathbf{g})$, если $S'(\tilde{g}_{1s}) = 0$. Условная стационарная точка считается регулярной, если:

$$S'(\tilde{g}_{1s}) = 0, \quad \tilde{K}_s := S''(\tilde{g}_{1s}) \neq 0. \quad (9)$$

Утверждение 2. Пусть $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{g}_0, t_0)$ точка границы $\partial\Omega_f$, в окрестности которой функция $f(\mathbf{x})$ допускает представление (5) с гладкой функцией $V(\mathbf{g}, t) \neq 0$ и кусочно-гладким фронтом $t_r(\mathbf{g})$, указанным выше. Пусть существует условная регулярная стационарная точка $\tilde{\mathbf{g}}_s = (\tilde{g}_{1s}, \psi(\tilde{g}_{1s}))$ и при этом единственная в окрестности $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{g}_0, t_0)$. Тогда спектральный вклад фрагмента $f(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$ имеет порядок $O(\omega^{-(\beta+3/2)})$, а амплитуда спектра зависит от направленности излучения через стационарную точку. Более точно:

$$\hat{u}(\omega | \mathbf{x}_0) \approx C_\beta \omega^{-3/2-\beta} A \times \sqrt{2\pi} |\tilde{K}_s|^{-1/2} V(\tilde{\mathbf{g}}_s, t_r(\tilde{\mathbf{g}}_s)) \epsilon \Delta \quad (10)$$

$$|\epsilon| = 1,$$

где:

$$\Delta = \left[\frac{\partial}{\partial g_2 t_r^+}(\tilde{\mathbf{g}}_s) - \gamma_\Sigma^{(2)}/c \right]^{-1} - \left[\frac{\partial}{\partial g_2 t_r^-}(\tilde{\mathbf{g}}_s) - \gamma_\Sigma^{(2)}/c \right]^{-1}. \quad (11)$$

В условиях $\nabla t_r^\pm(\mathbf{g}|\mathbf{x}_0) \neq \gamma_\Sigma/c$, величину Δ всегда можно считать конечной и ненулевой.

Детали обоснования (10) вынесены в Приложение А3.

Замечания. В рассмотренном случае:

– ω^{-2} поведение спектра реализуется при физически естественном значении параметра $\beta = 1/2$;

– допустимые направления, на которых может быть зафиксирована асимптотика (10), либо отсутствуют, либо образуют конечный сегмент в плоскости очага.

Действительно, условная стационарная точка $\tilde{\mathbf{g}}_s$ является точкой экстремума функции $t_a(\mathbf{g})$ при условии, что она рассматривается на линии $l: L(\mathbf{g}) = 0$. Применяя метод Лагранжа к условному экстремуму, заключаем, что точка $\tilde{\mathbf{g}}_s$ вместе с неизвестной константой λ определяются соотношением:

$$\nabla t_r^+(\mathbf{g}) - \hat{\gamma}_\Sigma/c = \lambda \nabla L(\mathbf{g}), \quad \mathbf{g} \in l. \quad (12)$$

Остается заметить, что если уравнение (12) разрешимо для вектора $\hat{\gamma}_\Sigma$, тогда оно разрешимо и для любого вектора:

$$\hat{\gamma}_\Sigma^\varepsilon = \hat{\gamma}_\Sigma + \varepsilon \lambda c \nabla L(\mathbf{g}_s), \quad |\hat{\gamma}_\Sigma^\varepsilon| \leq 1 \quad (13)$$

с новой константой $\lambda^\varepsilon = \lambda - \varepsilon$.

4. ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКА ФРАКТАЛЬНОГО ТИПА

Существует другое, формально идентичное (1), интегральное представление смещения в дальней зоне, где исходная функция f интерпретируется как локальный сброс напряжения в момент преодоления барьера (асперити) [Kostrov, Das, 1988; Boatwright, 1988; Gusev, 1989]. В этом случае физические ограничения на f расплывчаты. В работе [Mikumo, Miyatake, 1979] численно исследовалась проблема случайного сброса напряжений на разломе. Процесс разрушения оказался довольно хаотичным, без четко различимого фронта разрыва. Это обстоятельство стимулировало стохастический или фрактальный подход к кинематическим моделям очага.

В работе [Gusev, 2014] численно исследовалась следующая модель:

$$f = V(\mathbf{g})\phi(t - t_r(\mathbf{g})), \quad (14)$$

где: $\phi(t) \geq 0$ гладкая функция на полуоси $t > 0$, $\phi(0) \neq 0 \cup \infty$ и $\phi(t) = 0$ вне $[0, t_0]$; $V(\mathbf{g})$ есть локальный сброс напряжений в \mathbf{g} , не зависящий от времени; $t_r(\mathbf{g})$ момент разрыва и соответственно сброса напряжений в \mathbf{g} ; $V(\mathbf{g})$ и $t_r(\mathbf{g})$ непрерывны. Фронтальная поверхность разрыва почти плоская и односторонне направлена:

$$t_r(\mathbf{g}) = \langle \mathbf{g}, \gamma_r \rangle / v + \delta t_r(\mathbf{g}). \quad (15)$$

Здесь: γ_r , $|\gamma_r| = 1$ – доминирующее направление распространения разрыва; v – его средняя скорость, а $\delta t_r(\mathbf{g})$ – малое возмущение.

В этой модели носитель f определяется соотношением:

$$\Omega_f: t_r(\mathbf{g}) < t < t_r(\mathbf{g}) + t_0. \quad (16)$$

Функция f гладкая по t для внутренних точек Ω_f . Поэтому основной вклад в асимптотику $\hat{u}(\omega)$ вносят точки фронтальной поверхности $\partial\Omega_f$. Более того, он исходит от точек передней границы: $t = t_r(\mathbf{g})$, где f как функция во всем пространстве, терпит разрыв.

В модели работы [Gusev, 2014] функции $t_r(\mathbf{g})$ и $V(\mathbf{g})$ фрактальны, т.е. имеют порядок гладкости меньше 1. Для описания таких объектов больше подходит язык случайных функций. В этом случае требуемая функция погружается в ансамбль реализаций с подходящими свойствами (в данном случае, с фиксированным свойством дробной гладкости).

Будем говорить, что случайная функция $\xi(\mathbf{g})$ имеет гладкость порядка $0 < H_\xi < 1$, если

$$E |\xi(\mathbf{g}) - \xi(\tilde{\mathbf{g}})|^2 \sim C(\mathbf{g}) |\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}}|^{2H_\xi}, \quad \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}} \rightarrow 0, \quad (17)$$

где: E – символ математического ожидания; $C(\mathbf{g}) > 0$ гладкая функция; степенной показатель H_ξ известен как параметр Херста (Hurst).

При рассмотрении ансамбля реализаций, индивидуальный спектр $\hat{u}(\omega)$ траектории случайного процесса приходится заменять среднеквадратичным (root-mean-square):

$$r.m.s.\hat{u}(\omega) = (E |\hat{u}(\omega)|^2)^{1/2}. \quad (18)$$

В условиях (14, 15)

$$\hat{f}(\mathbf{p}\omega) = \hat{\phi}(\omega) \int e^{i(\delta t_r(\mathbf{g}) + \mathbf{D}\cdot\mathbf{g})\omega} V(\mathbf{g}) d\mathbf{g}, \quad (19)$$

$$\mathbf{D} = \gamma_r / v - \gamma_\Sigma / c.$$

Отсюда, предполагая статистическую независимость случайных компонент $\delta t_r(\mathbf{g})$ и $V(\mathbf{g})$, получим основное спектральное соотношение для дважды стохастической модели (14):

$$E |\hat{u}(\omega)|^2 = |A|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 \iint m_V(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \times \chi_r(\omega | \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) e^{i\omega \langle \mathbf{D}, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 \rangle} d\mathbf{g}_1 d\mathbf{g}_2. \quad (20)$$

Здесь: $m_V(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = EV(\mathbf{g}_1)V(\mathbf{g}_2)$ является корреляционной функцией поля $V(\mathbf{g})$, а χ_r – характеристическая функция приращений $\delta t_r(\mathbf{g})$:

$$\chi_r(\omega | \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = E e^{i\omega \xi}, \quad \xi = \delta t_r(\mathbf{g}_1) - \delta t_r(\mathbf{g}_2). \quad (21)$$

Соотношение (20) позволяет качественно понять, когда спектр очага слабо зависит от направления \mathbf{D} .

Пусть распределение $\xi = \delta t_r(\mathbf{g}_1) - \delta t_r(\mathbf{g}_2)$ имеет гладкую финитную плотность. Тогда его характеристическая функция $\chi_r(\omega | \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ быстро убывает по частоте при $\mathbf{g}_1 \neq \mathbf{g}_2$. Поэтому ВЧ асимптотику (20) определяет малая окрестность диагонали $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2$, где подынтегральная функция $\exp(i\omega \langle \mathbf{D}, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 \rangle)$ слабо зависит от направленности излучения. Эта идея может быть реализована для широкого класса распределений ξ . Ниже, только для простоты изложения, мы будем считать это распределение гауссовским.

Утверждение 3. Пусть выполнены следующие условия:

- случайные компоненты модели (14, 15), $V(\mathbf{g})$, $\delta t_r(\mathbf{g})$ статистически независимы;
- поле сброса напряжений $V(\mathbf{g})$ таково, что $m_V(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) > 0$, $m_V(\mathbf{g}, \mathbf{g}) < C$ и $E(V(\mathbf{g}_1) - V(\mathbf{g}_2))^2 \leq C |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|^{2h}$, $h > 0$;
- приращения поля $\delta t_r(\mathbf{g})$ распределены по Гауссу со средним 0 и дисперсией

$$E(\delta t_r(\mathbf{g}_1) - \delta t_r(\mathbf{g}_2))^2 = |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|^{2H} \sigma^2(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2), \quad (22)$$

где $\sigma(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ – гладкая функция, ограниченная от нуля и бесконечности;

- $\phi(t) = t_+^{\beta-1} \varphi(t)$, где $0 < \beta \leq 1$, а $\varphi(t) \geq 0$ – гладкая финитная функция и $\varphi(0) > 0$.

Тогда:

$$r.m.s. \hat{u}(\omega) \approx \omega^{-(\beta+1/H)} K_\beta \int m_V(\mathbf{g}, \mathbf{g}) \sigma^{-2/H}(\mathbf{g}, \mathbf{g}) d\mathbf{g}, \quad (23)$$

$$\omega \rightarrow \infty,$$

т.е. ВЧ асимптотика спектра очага степенная и не зависит от направленности излучения.

Замечания:

– согласно (23), ВЧ спектр учитывает корреляции случайных компонент модели только на диагонали. Это означает, что ВЧ асимптотику спектра формирует некогерентное излучение точек очага. Необходимость этого свойства подчеркивалось в работах А. Гусева;

– модель Гусева соответствует параметру $\beta = 1$. В этом случае слегка шероховатая фронтальная поверхность, т.е. поверхность с параметром Херста H близким к 1, устойчиво порождает близкое к омега-квадрат-поведение спектра. Ситуация резко меняется в предельном случае $H = 1$, когда фронтальная поверхность может быть гладкой. Как показано выше (**Утверждение 1**), в этом случае квадратичное убывание спектра обеспечиваются регулярные стационарные (и фактически неустойчивые) точки фронтальной поверхности. Используя слабую шероховатость с $H \approx 1$, мы, грубо говоря, стабилизируем поле стационарных точек и, как результат, получаем устойчивое для всех направлений почти омега-квадрат-поведение спектра. Дополнительные условия позволяют также устранить свойство направленности излучения;

– все сказанное относится и к другому физически интересному случаю, когда параметр $\beta = 1/2$. Для него омега-квадрат-поведение спектра реализуется с менее гладкой фронтальной поверхностью, а именно, с параметром Херста $H = 2/3$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ: ИЗОХРОНЫ И АСИМПТОТИКА

Поясним неформально, из чего складывается ВЧ асимптотика спектра очага. В наших примерах функция очага вблизи фронтальной границы имеет особенность вида $(t - t_r(\mathbf{g}))_+^{\beta-1}$ с $\beta = 1$ или $\beta = 1/2$. Поэтому Фурье-преобразование по времени дает ВЧ вклад порядка $\omega^{-\beta}$ (Лемма Эрдейи, A1). Дополнительный вклад исходит от Фурье-преобразования по пространству. Здесь важна аналитическая структура функции $t_a(\mathbf{g}) = t_0 - \langle \mathbf{g}, \gamma_\Sigma / c \rangle + t_r(\mathbf{g})$, т.е. времени прихода сигнала из точки разрыва к удаленному приемнику в направлении γ_Σ . Эта функция играет роль фазы в интеграле Фурье вида

$$I(\varphi) = \int e^{i\omega t_a(\mathbf{g})} \varphi(\mathbf{g}) d\mathbf{g}. \quad (24)$$

Роль финитной гладкой функции φ в асимптотике интеграла не существенна и сводится к тому, чтобы пренебрегать границей области интегрирования. Помня об этом, рассмотрим (24) с $\varphi = 1$ в малой окрестности G_0 точки \mathbf{g}_0 .

Пусть $A(t)$ мера точек из G_0 , где $t_a(\mathbf{g}) < t$. Тогда интеграл (24) преобразуется к виду $I(l_{G_0}) = \int_{t_-}^{t_+} e^{i\omega t} dA(t)$. Плотность меры, $\dot{A}(t)$, можно интерпретировать как интенсивность изолиний (изохрон) функции $t_a(\mathbf{g})$ на множестве G_0 . Подобный объект не нов для сейсмологов (см. [Spudich, Frazer, 1984]). Его важность связана с тем, что аналитиче-

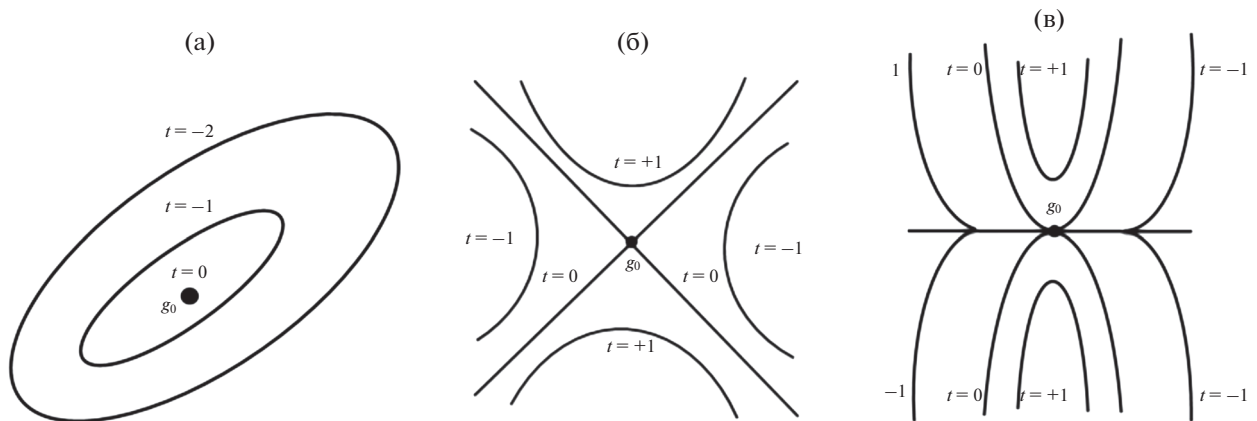


Рис. 1. Изохроны функции $t_a(\mathbf{g})$ вблизи критической точки g_0 : (а), (б) – случаи, в которых g_0 является регулярной стационарной точкой; (в) – случай условной регулярной стационарной точки g_0 на линии l , где $t_a(\mathbf{g})$ теряет гладкость.

ские свойства плотности $\dot{A}(t)$ тесно связаны с ВЧ асимптотикой $I(l_{G_0})$.

В качестве примера рассмотрим сначала **Утверждение 1.** Здесь $t_a(\mathbf{g})$ имеет в G_0 единственную невырожденную стационарную точку \mathbf{g}_s . Поэтому в подходящей системе координат можно считать, что $\mathbf{g}_s = 0$, $t_a(\mathbf{g}) = -(g_1^2 \pm g_2^2)$. Рассмотрим более простой эллиптический случай, отвечающий знаку (+). В этом случае (см. рис. 1а) изохроны подобны эллипсам, которые стягиваются к стационарной точке. Тогда $A_+(t) \approx C - \pi(-t)_+$ в малой окрестности $t = 0$. В результате $\dot{A}(t)$ имеет разрыв в момент $t = 0$, что определяет вклад интеграла $I(l_{G_0})$ в ВЧ асимптотику порядка ω^{-1} . Соответственно суммарный вклад стационарной точки имеет порядок $\omega^{-\beta} \omega^{-1}$.

В гиперболическом случае $t_a(\mathbf{g}) = -(g_1^2 - g_2^2)$ изохроны представлены на рис. 1б, а величина $\dot{A}(t) \approx c \ln|t|$, $|t| \ll 1$. Преобразование Фурье $\ln|t|$, как обобщенной функции, есть $-0.5\pi|\omega|^{-1}$, $\omega \neq 0$ [Брычков, Прудников, 1977], что позволяет сохранить прежние заключение о спектре.

В **Утверждении 2** пространство делится на две части линией l . В каждой из них, при подходящем выборе системы координат, можно считать, что линия раздела совпадает с осью g_1 , критическая точка $\tilde{\mathbf{g}}_s = 0$, $t_a(\mathbf{g}) = g_1^2 + g_2$, $g_2 \leq 0$ и $t_a(g_1, g_2) = -t_a(g_1, -g_2)$ для $g_2 \geq 0$. В этом примере (см. рис. 1в) изохроны сначала пересекают линию l . Их следы на линии окружают и стягиваются к $\tilde{\mathbf{g}}_s$; в критический момент $t = 0$ изохроны касаются линии l , а затем удаляются от нее. В результате при малых t простой счет дает, $A(t) \approx C - k(-t)_+^{3/2}$. По

Лемме Эрдейи (A1) преобразование Фурье $\dot{A}(t)$ дает вклад в ВЧ асимптотику порядка $\omega^{-3/2}$. Суммарный вклад стационарной точки имеет порядок $\omega^{-\beta} \omega^{-3/2}$.

В **Утверждении 3** поле $t_a(\mathbf{g})$ имеет дробную гладкость порядка $H < 1$ в каждой точке пространства и предполагается случайным. В стохастическом анализе плотность изохрон имеет специальное название: “occupation density”. При сделанных нами предположениях плотность $\dot{A}(t)$ определена для почти всех реализаций ансамбля [Xiao, 2013]. При этом гладкость $\dot{A}(t)$ неограниченно растет с уменьшением гладкости исходного поля $t_a(\mathbf{g})$ [Geman, Horowitz, 1978]. Поэтому роль степени негладкости фронтальной поверхности в ВЧ асимптотике спектра очага должна падать, когда изрезанность фронта растет. Это отражено в финальной ВЧ асимптотике $\omega^{-\beta-1/H}$, найденной в **Утверждении 3**.

Эвристическое объяснение указанной асимптотики требует обоснования следующих шагов: 1)

ВЧ асимптотика интеграла $I(l_{G_0}) = \int_{t_-}^{t_+} e^{i\omega t} dA(t)$ зависит в основном от концевых точек t_{\pm} ; 2) если невозмущенный линейный фронт распространяется вдоль оси g_1 , тогда $dA(t) \approx C dg_1$ вблизи $t_+ = \max t$; 3) случайное возмущение фронтальной поверхности, согласно (17), дает связь $dt \approx K(dg_1)^H$. Отсюда, $dA(t) \approx C(dt)^{1/H}$, т.е. при t , близких к t_+ , имеем $\dot{A}(t) \approx C(t_+ - t)_+^{-1+1/H}$. Лемма Эрдейи дает искомым порядок асимптотики $\omega^{-1/H}$ для интеграла $I(l_{G_0})$.

Дополнительные замечания

– В стохастическом варианте функции очага приходится иметь дело со среднеквадратичным спектром мощности сигнала. В этих терминах сформулировано очень простое для моделирования условие потери направленности излучения в дальней зоне. Оно состоит в том, чтобы распределение приращения поля $t_a(\mathbf{g})$ в любой паре точек пространства имело высокий порядок гладкости. Скажем, распределение Рэлея с плотностью $\sigma^{-2} x_+ \exp(-x/\sigma)$, использованное в работе [Gusev, 2014] для случайной компоненты фронта разрыва, этим свойством не обладает. Не совсем ясно, как указанное статистическое требование к ансамблю заменить детерминированным, пригодным к почти любому представителю этого ансамбля $t_a(\mathbf{g})$.

– Наш анализ не дает представления о нижнем частотном пороге для ω^{-2} -поведения спектра очага. Этот вопрос относится к численному анализу и был исследован А. Гусевым на конкретных моделях [Gusev, 2014].

6. ВЫВОДЫ

Мы рассмотрели гладкие и фрактальные локальные особенности функции очага. Особенности первого типа позволяют при определенных условиях воспроизвести омега-квадрат-поведение спектра в дальней зоне. Источником такого поведения может быть нестандартное условие, при котором скорость фронта разрушения превышает скорость S -волны. В гладких моделях асимптотика спектра зависит от направленности излучения; при этом локальный источник степенной асимптотики проявляется, в лучшем случае, в приемниках, образующих отрезок одномерной дуги.

Введение фрактальности в модель функции очага оказывает стабилизирующее влияние на решение рассмотренной задачи. Более точно, фрактальность позволяет устойчивым образом воспроизвести в дальней зоне и квадратичное затухание спектра, и потерю направленности излучения. Омега-квадрат-поведение можно реализовать (условно говоря) и в активной фазе разрушения, и на стадии залечивания. Однако требования к гладкости фронтальной поверхности не одинаковы: $H = 2/3$ (активная фаза) против $H \approx 1$ (фаза залечивания), что физически вполне естественно. Но в обоих случаях высокая степень негладкости ($H < 1/2$) фронтальной поверхности не совместима с омега-квадрат-поведением спектра. Что касается свойства потери направленности излучения, здесь важно сочетать негладкость ($H < 1$) фронтальной поверхности с гладкостью распределений, описывающих приращения шумовой ком-

поненты этой поверхности. Эти заключения вполне конструктивны для целей моделирования функции очага.

ПРИЛОЖЕНИЕ

A1. Вспомогательные утверждения [Федорюк, 1987].

Лемма Эрдейи Пусть $\varphi(t)$ гладкая функция с ограниченным носителем, тогда для $\beta > 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{i\omega t} t^{\beta-1} \varphi(t) dt = \omega^{-\beta} \varphi(0) \Gamma(\beta) e^{i\pi\beta/2} + \sum_1^N a_k \omega^{-(\beta+k)} + \delta_N(\omega), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (\text{A1})$$

где:

$$\delta_N(\omega) < C \omega^{-[\beta+N]} \max |(d/dt)^{[\beta+N]} \varphi(t)|$$

и $[a]$ есть целая часть a .

Метод стационарной фазы. Пусть f и S гладкие функции $\mathbf{x} \in R^n$, $\Omega \subset R^n$ конечная область, вне которой $f = 0$. Пусть \mathbf{x}_s единственная регулярная стационарная точка из Ω для функции S , т.е. $\nabla S(\mathbf{x}_s) = 0$ и $K(\mathbf{x}_s) = \det[\partial^2/\partial x_i \partial x_j S(\mathbf{x}_s)] \neq 0$. Тогда

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) e^{i\omega S(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = a_s \omega^{-n/2} e^{i\omega S(\mathbf{x}_s)} (f(\mathbf{x}_s) + O(\omega^{-1})), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (\text{A2})$$

где

$$a_s = (2\pi)^{n/2} |K(\mathbf{x}_s)|^{-1/2} \exp(i\pi \text{sign} K(\mathbf{x}_s)/4). \quad (\text{A3})$$

Если S не имеет стационарных точек в Ω , $\nabla S(\mathbf{x}) \neq 0$, тогда правая часть (A2) пренебрежимо мала.

A2. Доказательство Утверждения 1.

Пусть $f(\mathbf{g}, t) = (t - t_r(\mathbf{g}))_+^{\beta-1} V(\mathbf{g}, t)$ в окрестности $O(\mathbf{x}_0)$ точки $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega_f$ с гладкими функциями $t_r(\mathbf{g}), V(\mathbf{g}, t)$. Вклад окрестности \mathbf{x}_0 в асимптотику $\hat{u}(\omega)$ есть

$$\hat{u}(\omega|\mathbf{x}_0) = \int e^{i\omega(t_r(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{p}}))} f(\mathbf{g}, t) \varphi(\mathbf{g}, t) d\mathbf{g} dt, \quad (\text{A4})$$

где $\tilde{\mathbf{p}} = -\gamma_{\Sigma}/c$, $\varphi = \Phi(\mathbf{g})\Psi(t)$ вспомогательная гладкая финитная функция, сконцентрированная в окрестности \mathbf{x}_0 . После замены времени $\tau = t - t_r(\mathbf{g})$, имеем:

$$\hat{u}(\omega|\mathbf{x}_0) = \int e^{i\omega(t_r(\mathbf{g}) + (\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{p}}))} J(\omega|\mathbf{g}) \tilde{\varphi}(\mathbf{g}) d\mathbf{g}, \quad (\text{A5})$$

где

$$J(\omega|\mathbf{g}) = \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} \tau^{\beta-1} \tilde{V}(\mathbf{g}, \tau + t_r(\mathbf{g})) d\tau \quad (\text{A6})$$

и $\tilde{V}(\mathbf{g}, t) = V(\mathbf{g}, t)\psi(t)$. По лемме Эрдейи (A1):

$$J(\omega|\mathbf{g}) = C_{\beta} \omega^{-\beta} [\tilde{V}(\mathbf{g}, t_r(\mathbf{g})) + i\beta \omega^{-1} \partial/\partial t \tilde{V}(\mathbf{g}, t_r(\mathbf{g}))] + \delta_2(\omega), \quad (\text{A7})$$

$$\delta_2(\omega) < c\omega^{-\beta+2} \max_{O(x_0)} |(\partial/\partial t)^2 V(\mathbf{g}, t)|. \quad (\text{A8})$$

Соединяя (A5) и (A7), имеем:

$$\hat{u}(\omega|\mathbf{x}_0) \approx \int e^{i\omega(t_r(\mathbf{g}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{p} \rangle)} [\tilde{V}(\mathbf{g}, t_r(\mathbf{g})) + i\beta \omega^{-1} \partial/\partial t \tilde{V}(\mathbf{g}, t_r(\mathbf{g}))] \tilde{\phi}(\mathbf{g}) d\mathbf{g} C_{\beta} \omega^{-\beta} + O(\omega^{-\beta+2}). \quad (\text{A9})$$

Пусть функция $t_a(\mathbf{g}) = t_0 - \langle \mathbf{g}, \gamma_{\Sigma}/c \rangle + t_r(\mathbf{g})$ имеет единственную стационарную точку \mathbf{g}_s в $O(\mathbf{g}_0)$ и полная кривизна $t_a(\mathbf{g})$ (или, что то же, кривизна $t_r(\mathbf{g})$ в точке \mathbf{g}_s отлична от нуля, $K_s \neq 0$. Тогда используя метод стационарной фазы (A2) в размерности $n = 2$ получим:

$$\hat{u}(\omega|\mathbf{x}_0) \approx C_{\beta} \omega^{-(1+\beta)} 2\pi |K_s|^{-1/2} V(\mathbf{g}_s, t_r(\mathbf{g}_s)) \varepsilon + O(\omega^{-\beta+2}), \quad |\varepsilon| = 1. \quad (\text{A10})$$

Пусть фронтальная поверхность $t_r(\mathbf{g})$ не имеет стационарных точек в окрестности $O(\mathbf{x}_0)$. Тогда, согласно методу стационарной фазы, первое слагаемое в (A9) пренебрежимо мало при $\omega \rightarrow \infty$. Поэтому $\hat{u}(\omega|\mathbf{x}_0) = o(\omega^{-\beta})$ при любом $\beta > 0$.

A3. Доказательство Утверждения 2.

Продолжим анализ (A9) в предположении, что $t_r(\mathbf{g})$ представлена в окрестности $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega_r$ двумя гладкими поверхностями $t_r^{\pm}(\mathbf{g})$, $\mathbf{g} \in O^{\pm}(\mathbf{g}_0)$ с общим краем, расположенным над гладкой кривой $l: \mathbf{g}_2 = \psi(\mathbf{g}_1)$. В этом случае (A9) представляется в виде:

$$\hat{u}(\omega|\mathbf{x}_0) \approx C_{\beta} \omega^{-\beta} e^{-i\omega t_0} \left(\int_{O^+(\mathbf{g}_0)} + \int_{O^-(\mathbf{g}_0)} \right) e^{i\omega t_a(\mathbf{g})} \phi(\mathbf{g}) d\mathbf{g}, \quad (\text{A11})$$

где: $t_a(\mathbf{g}) = t_0 - \langle \mathbf{g}, \gamma_{\Sigma}/c \rangle + t_r^{\pm}(\mathbf{g}|\mathbf{x}_0)$; $\phi(\mathbf{g})$ — гладкая функция и $\nabla t_a(\mathbf{g}) \neq 0$ внутри $O^{\pm}(\mathbf{g}_0)$. Асимптотика интегралов типа (A11) дана в книге [Федорюк, 1987; гл. 3, теорема 4.1] и имеет вид:

$$\int_{O^{\pm}(\mathbf{g}_0)} e^{i\omega t_a(\mathbf{g})} \phi(\mathbf{g}) d\mathbf{g} \approx \pm \omega^{-3/2} i \sqrt{2\pi} e^{i\omega t_a(\mathbf{g}_r) + i\pi/4\delta} \times |\tilde{K}_s|^{-1/2} (\partial/\partial \mathbf{g}_2 t_a^{\pm}(\mathbf{g}_s))^{-1} (\phi(\mathbf{g}_s) + O(\omega^{-1})), \quad (\text{A12})$$

где: $\tilde{K}_s = [t_a^{\pm}(\mathbf{g}_1, \psi(\mathbf{g}_1))]''$; $\delta = \text{sign} \tilde{K}_s$.

Подставляя (A12) в (A11) получим (10, 11).

A4. Доказательство Утверждения 3.

Запишем соотношение (20) в виде: $E|\hat{u}(\omega)|^2 = |A|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 I_{\omega}$. Здесь $\hat{\phi}(\omega)$ преобразование Фурье функции $\phi(t) = t^{\beta-1} \varphi(t)$, а:

$$I_{\omega} = \iint m_V(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) l(\mathbf{g}_1) l(\mathbf{g}_2) \times \chi_r(\omega|\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) e^{i\omega \langle \mathbf{D}, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 \rangle} d\mathbf{g}_1 d\mathbf{g}_2. \quad (\text{A13})$$

Здесь $l(\mathbf{g})$ индикатор очаговой области (она считается конечной). Из Леммы Эрдейи (см. A1) следует, что

$$\hat{\phi}(\omega) \approx \omega^{-\beta} \varphi(0) \Gamma(\beta) e^{i\pi\beta/2}, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (\text{A14})$$

Остается найти асимптотику интеграла (A13). Разобьем область интегрирования на две части $\Omega_{\omega} \cup \Omega_{\omega}^c$, где:

$$\Omega_{\omega} = \{(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) : |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2| < \omega^{-1/H} \ln \omega\}. \quad (\text{A15})$$

Вклады каждой из областей в интеграл (A13) обозначим $I(\Omega_{\omega})$ и $I(\Omega_{\omega}^c)$.

Оценим $I(\Omega_{\omega}^c)$.

Характеристическая функция $\chi_r(\omega|\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = Ee^{i\omega\xi}$ гауссовской случайной величины $\xi = \delta t_r(\mathbf{g}_1) - \delta t_r(\mathbf{g}_2)$ с дисперсией σ_{ξ}^2 есть $\exp(-\omega^2 \sigma_{\xi}^2/2)$. Дисперсия σ_{ξ}^2 определена в (22). По предположению в области очага величина $\sigma_{\xi}^2/|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|^{2H}$ ограничена снизу, а $m_V(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ сверху. Отсюда:

$$\begin{aligned} |I(\Omega_{\omega}^c)| &< C \iint_{\Omega_{\omega}^c} \exp(-\omega^2 k |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|^{2H}) l(\mathbf{g}_1) \times \\ &\times l(\mathbf{g}_2) d\mathbf{g}_1 d\mathbf{g}_2 < C_1 \int_{r > \omega^{-1/H} \ln \omega} \exp(-\omega^2 k r^{2H}) dr^2 = \\ &= C_1 \int_{\ln \omega}^{\infty} e^{-kx^{2H}} dx^2 \omega^{-2/H} = \omega^{-2/H} o(1). \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

Оценим $I(\Omega_{\omega})$.

Разобьем интеграл на два слагаемых: $I(Q|\Omega_{\omega})$ и $I(l|\Omega_{\omega})$, заменив экспоненту суммой $e^{i\omega \langle \mathbf{D}, \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 \rangle} = Q(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) + 1$. Имеем:

$$I(Q|\Omega_{\omega}) = \iint_{\Omega_{\omega}} m_V(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) l(\mathbf{g}_1) l(\mathbf{g}_2) \chi_r \times (\omega|\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) Q(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) d\mathbf{g}_1 d\mathbf{g}_2. \quad (\text{A17})$$

Здесь m_V, χ_r ограничены. Из неравенства $|e^{ix} - 1| < |x|$ следует $|Q(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2)| \leq \omega|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|$. Отсюда:

$$\begin{aligned}
|I(Q|\Omega_\omega)| &< C \int_{\Omega_\omega} \omega |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2| l(\mathbf{g}_1) l(\mathbf{g}_2) d\mathbf{g}_1 d\mathbf{g}_2 < \\
&\omega^{-1/H} \ln \omega \\
&< C_1 \int_0^{\omega} \omega r^2 dr = \omega^{-2/H} o(1).
\end{aligned} \tag{A18}$$

Осталось найти асимптотику:

$$\begin{aligned}
I(1|\Omega_\omega) &= \iint_{\Omega_\omega} m_V(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) l(\mathbf{g}_1) l(\mathbf{g}_2) \times \\
&\times \exp(-\omega^2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|^{2H} \sigma(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)) d\mathbf{g}_1 d\mathbf{g}_2.
\end{aligned} \tag{A19}$$

В силу гладкости $\sigma(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ на множестве Ω_ω имеем оценки:

$$\begin{aligned}
0 < \sigma_-(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) < \sigma(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) < \sigma_+(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1), \\
\sigma_\pm(\mathbf{g}, \mathbf{g}) &= \sigma(\mathbf{g}, \mathbf{g}) \pm \rho \varepsilon,
\end{aligned} \tag{A20}$$

где $\varepsilon = \omega^{-1/H} \ln \omega$. Заменяя σ на σ_\pm , получим двусторонние оценки $I_\pm(1|\Omega_\omega)$ интеграла $I(1|\Omega_\omega)$, поскольку $m_V(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) > 0$.

Сделаем замену переменных $\mathbf{v} = \mathbf{g}_1$, $\mathbf{u} = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$ и представим каждую из оценок в виде $I_\pm(1|\Omega_\omega) = I_\pm + R_\pm$. Здесь I_\pm определяет вклад диагонали:

$$\begin{aligned}
I_\pm &= \iint_{|\mathbf{u}| < \varepsilon} m_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}) l(\mathbf{v}) \exp(-\omega^2 |\mathbf{u}|^{2H} \sigma_\pm^2(\mathbf{v}, \mathbf{v})/2) d\mathbf{v} d\mathbf{u} = \\
&= \int m_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \sigma_\pm^{-2/H}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) l(\mathbf{v}) A_\pm(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \omega^{-2/H},
\end{aligned} \tag{A21}$$

где

$$\begin{aligned}
A_\pm(\mathbf{v}) &= \int_0^{\ln \omega \sigma_\pm^{1/H}(\mathbf{v}, \mathbf{v})} x \exp(-x^2/2) dx = \\
&= (\pi/2)^{1/2} + o(1), \quad \omega \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{A22}$$

При оценке R_\pm учтем неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned}
|m_V(\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - m_V(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^2 &\leq E V^2(\mathbf{v}) E (V(\mathbf{v} - \mathbf{u}) - \\
&- V(\mathbf{v}))^2 \leq K |\mathbf{u}|^{2h}.
\end{aligned} \tag{A23}$$

Поэтому, как и в случае (A21):

$$\begin{aligned}
R_\pm &< K \iint_{|\mathbf{u}| < \varepsilon} |\mathbf{u}|^h l(\mathbf{v}) \exp(-\omega^2 |\mathbf{u}|^{2H} \sigma_\pm^2(\mathbf{v}, \mathbf{v})/2) d\mathbf{v} d\mathbf{u} < \\
&< \varepsilon^h \int \sigma_\pm^{-2/H}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) l(\mathbf{v}) A_\pm(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \omega^{-2/H}.
\end{aligned} \tag{A24}$$

Соединяя (A16, A18, A21, A22, A24), получим искомую асимптотику:

$$I = \sqrt{\pi/2} \int m_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \sigma^{-2/H}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \omega^{-2/H} (1 + o(1)). \tag{A25}$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор искренне признателен коллегам В. Желиговскому, А. Ландеру и А. Скоркиной за внимательное прочтение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука. 1977. 288 с.
- Гусев А., Скоркина А., Чебров Д.* Очаговые спектральные параметры землетрясений восточной Камчатки диапазона $M = 3-6$ по данным поперечных волн // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2017. № 3. Вып. 35. С. 36–49.
- Костров Б.* Автомодельные задачи о распространении трещин касательного разрыва // Прикладная математика и механика. 1964. V. 28. № 5.
- Федорюк М.В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука. 1987. 544 с.
- Aki K., Richards P.* Quantitative seismology: Theory and Methods: W.H. Freeman and Co, San Francisco, Calif. 1980.
- Bizzarri A., Dunham E.M., Spudich P.* Coherence of Mach fronts during heterogeneous supershear earthquake rupture propagation: Simulations and comparison with observations // J. Geoph. Res. 2010. V. 115. B08301.
- Boatwright J.* The seismic radiation from composite models of faulting // Bull. Seismol. Soc. Am. 1988. V. 78. P. 489–508.
- Brune J.N.* Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes // J. Geophys. Res. 1970. V. 75. № 26. P. 4997–5009.
- Dunham E.M., Archuleta R.J.* Evidence for a Supershear Transient during the 2002 Denali Fault Earthquake // Bull. seism. Soc. Am. 2004. V. 94. № 6B. P. S256–S268.
- Geman D., Horowitz J.* Occupation densities // Annals of Probability. 1978. V. 8. № 1. P. 1–67.
- Gusev A.* Multiasperity fault model and the nature of short-period subsources // Pure appl. Geophys. 1989. V. 130. P. 635–660.
- Gusev A.* High-frequency radiation from an earthquake fault: a review and a hypothesis of fractal rupture front geometry // Pure Appl. Geophys. 2013. V. 170(1–2). P. 65–93.
- Gusev A.* Doubly stochastic earthquake source model: ‘omega-square’ spectrum and low high-frequency directivity related by numerical experiments // Pure Appl. Geophys. 2014. V. 171. № 10. P. 2581–2599.
- Gusev A.* Random kinematics of unbounded earthquake rupture propagation simulated using a selluar model // Geophys. J. Int. 2018. V. 215. P. 924–941.
- Herrero H., Oleaga G., Vellazquez J.* On the Esheby-Kostrov property for the wave equation in the plane // Transactions of the AMS. 2006. V. 338(8). P. 3673–3695.
- Kostrov B., Das S.* Principles of Earthquake Source Mechanics, Appl. Math. and Mech. Ser. Cambridge University Press. 1988. 286 p.
- Kurzon I., Vernon F.I., Ben-Zion Y., Atkinson G.* Ground Motion Prediction Equations in the San Jacinto Fault Zone: Significant Effects of Rupture Directivity and Fault

- Zone Amplification//Pure appl. Geophys. 2014. V. 171. P. 3015–3081.
- Madariaga R.* High-frequency radiation from crack (stress drop) models of earthquake faulting // Geophys. J. Int. 1977. V. 51(3). P. 625–651.
- Madariaga R.* High-frequency radiation from dynamic earthquake fault models // Ann. Geophys. 1983. V. 1(1). P. 17–23.
- Madariaga R., Olsen R., Archuleta R.* Modeling dynamic rupture in a 3D earthquake fault model // Bull. Seism. Soc. Am. 1998. V. 88. № 5. P. 1182–1197.
- Madariaga R., Peyrat S., Olsen K., Archuleta R.* Rupture dynamics in 3-D: a review. Problems in Geophysics for the new millennium, a collection of papers in the honour of Adam Dziewonski, E. Boschi, G. Ekstrom, A. Morelli. Bologna, Italy. 2000.
- Marty S., Passelègue F.X., Aubry J., Bhat I H.S., Schubnel A., Madariaga R.* Origin of high-frequency radiation during laboratory earthquakes // Geophysical Research Letters. 2019. <https://doi.org/10.1029/2018GL080519>
- Mikumo T., Miyatake T.* Earthquake sequences on a frictional fault model with nonuniform strengths and relaxation times // Geophys. J. Royal Astronom. Soc. 1979. V. 59. P. 497–522.
- Molchan G.* Stochastic earthquake source model: the omega-square hypothesis and the directivity effect // Geophys. J. Int. 2015. V. 202. P. 497–513.
- Nielsen S., Madariaga R.* On the self-healing fracture mode // Bull. seism. Soc. Am. 2003. V. 93(6). P. 2375–2388.
- Rosakis A., Samudrala O., Coker D.* Cracks faster than the shear wave speed // Science. 1999. V. 284. P. 1337–1340.
- Spudich P., Frazer L.N.* Use of ray theory to calculate high-frequency radiation from earthquake sources having spatially variable rupture velocity and stress drop// Bull. seism. Soc. Am. 1984. V. 74(6). P. 2061–2082.
- Wen Y.-Y., Miyake H., Yen Y.-T., Irikura K., Ching K.* Rupture directivity effect and stress heterogeneity of the Nantou blind-thrust earthquakes, Taiwan//Bull. seism. Soc. Am., 2014. V. 104(6). P. 2933–2942.
- Xiao Y.* Recent developments on fractal properties of Gaussian random fields. In Further Developments in Fractals and Related Fields. Springer. 2013. P. 255–288.
- Yang W., Guo G.F.* Continuum Analyses for Intersonic and Supersonic Fracture // Key Engineering Materials. 2004. V. 261–263. P. 1–10.

GUSEV'S STOCHASTIC MODEL FOR THE SEISMIC SOURCE: HIGH-FREQUENCY BEHAVIOR IN THE FAR ZONE

G. M. Molchan*

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*E-mail: molchan@mitp.ru

This paper discusses local features in the source function that generate in the far zone simultaneously (a) a quadratic decay of the source spectrum and (b) the loss of radiation directivity at high frequencies. A. Gusev drew attention to this problem and suggested that a positive solution can be obtained for earthquake rupture front with a rather complex (“lace”) structure. Below we give a theoretical solution of the problem and show that the front structure can be simple enough, but not smooth.

Keywords: Seismic source, high frequency radiation, theoretical seismology, Fourier analysis.