ФИЗИКА ЗЕМЛИ, 2020, № 1, с. 77–85

УДК 550.341

ФРАКТАЛЬНАЯ СЕЙСМИЧНОСТЬ И СЕЙСМИЧЕСКИЙ РИСК

© 2020 г. Г. М. Молчан*

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия

**E-mail: molchan@mitp.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2019 г.
После доработки 17.06.2019 г.
Принята к публикации 24.06.2019 г.

Недавно предприняты попытки учета фрактальных свойств сейсмичности при картировании долговременной интенсивности землетрясений. В работе затронуты теоретические аспекты фрактальности и дается критический анализ ее приложений к задачам сейсмического риска.

Ключевые слова: сейсмический риск, повторяемость землетрясений, мультифрактальность, статистическая сейсмология.

DOI: 10.31857/S000233372001007X

1. ВВЕДЕНИЕ

Долговременная интенсивность сейсмических событий является базовой характеристикой сейсмичности в задачах сейсморайонирования и сейсмического риска. В ее основе лежит закон повторяемости Гутенберга–Рихтера:

$$\lg \lambda(\Delta, M) = a - b(M - M_0), \qquad M_- \le M \le M_+. \tag{1}$$

Здесь $\lambda(\Delta, M)$ интенсивность или среднее число событий в единицу времени, имеющих магнитуду $\ge M$ в области Δ.

Не существует единой методологии картирования параметров (a, b) с учетом диапазона магнитуд $\Delta M = (M_-, M_+)$. Однако в общих чертах, традиционный подход опирается на сейсмотектоническое зонирование территории, выбор подходящих зон с постоянными значениями каждого из указанных параметров и их последующее статистическое оценивание (см., например, [Молчан, Подаецкая, 1973; Молчан и др., 1996]). В силу дефицита статистики разрушительных землетрясений дискуссионными могут быть как сами элементы зонирования, так и выбор магнитудных диапазонов.

В этой связи интересна серия публикаций [Кособоков, Некрасова, 2004; Некрасова, Кособоков , 2006; 2009; Nekrasova et al., 2011; Nekrasova et al., 2015; Кособоков, Соловьев, 2018], где обращается внимание на важность учета “фрактальной природы землетрясений”. Рассматривая проблему сейсмического риска для мегаполисов мира, авторы заключают, что недооценка фрактальности в распределении сейсмичности заметно снижает риски. “Общий уровень занижения повторяемости слишком велик, чтобы не учитываться при расчетах сейсмического риска и потерь, так необходимых для принятия мер по предупреждению бедствия и его последствий” [Некрасова, Кособоков, 2006].

Альтернативный подход авторы видят в *“Общем законе подобия для землетрясений”* (ОЗПЗ), который предсказывает интенсивность событий магнитуды $\ge M$ в области Δ_L размера L, $\Delta_L \subset \Delta_{L_0}$, согласно формуле:

$$\lambda(\Delta_L, M) = A \times 10^{-B(M-M_0)} (L/L_0)^C. \qquad l_0 \le L \le L_0. \tag{2}$$

Здесь: Δ_{L_0} – область, в центре которой расположена целевая область Δ_L; A – ожидаемое число событий $\ge M_0$ в год в Δ_{L_0}; C – фрактальная размерность эпицентров событий $\ge M$ в Δ_{L_0}.

В сейсмологической литературе соотношение (2) впервые появилось в работе [Кейлис-Борок и др., 1989] как пример подобия сейсмичности.

Ниже, в разделе 2, мы описываем метод ОЗПЗ и его применение к задачам сейсмического риска. Чтобы снять противоречия, в разделе 3 соотношение (2) трактуется как нормировка в законах сейсмичности Бака. Далее, в разделе 4, на базе точных понятий фрактальности и мультифрактальности обсуждается оптимальный выбор параметра C. Чтобы упростить чтение, разделы 3 и 4 снабжены итоговыми заключениями.

2. МОДЕЛИ СЕЙСМИЧНОСТИ: ТРАДИЦИОННЫЕ И ОЗПЗ

Для сравнения напомним одну из моделей сейсмичности, основанную на традиционном законе повторяемости [Молчан и др., 1996; Molchan et al., 1997]. В этой модели закон (1) представлен кусочно-линейным соотношением по пространству и магнитуде. При фиксированном диапазоне магнитуд ΔM, параметр активности a более детален по пространству, чем параметр b. Иначе говоря, область с постоянным значением b (b-зона) разбита на подобласти с постоянными значениями a. Линейный размер b-зоны существенно больше максимального размера очага из диапазона магнитуд ΔM. Чем больше сила землетрясений, тем больше размеры b-зоны. Это обусловлено необходимостью исключить возможные артефакты в виде "характеристических" событий [Wesnousky, 1994] и тем самым расширить область применимости модели (1).

В результате возникает многомасштабное представление закона (1) с параметрами $(a, b, \Delta M)_i$ для подходящих пространственных зон. Поясним его на примере. Для описания потенциально разрушительных землетрясений ($M > 3.8$) Италии в работах [Молчан и др., 1996; Molchan et al., 1997] были использованы два магнитудных уровня: $\Delta_1 M = 3.5–5$ и $\Delta_2 M = 5–7$. Параметр a первого уровня постоянен на элементах сейсмотектонической регионализации (a-зоны), с типичными размерами: 40-130 км в длину и 20-30 км в ширину. Измельчению этих участков препятствовала статистика землетрясений. Зоны с постоянным значением b составлены из a-зон так, чтобы b-зоны были согласованы по размерам с магнитудными диапазонами$\Delta_i M$ и при этом объединяли сейсмически связанные элементы исходной регионализации, т.е. были едины с точки зрения тектоники в соответствующем масштабе. Таких b-зон 1-го уровня оказалось 10, а зон второго уровня 3. Детализация a-параметра в b-зонах второго уровня связана с нетривиальной проблемой пространственной локализации сильных землетрясений. Из-за скудности статистики решение этого вопроса неединственно и может зависеть от конкретных приложений при получении верхних/нижних оценок риска.

Для сравнения с ОЗПЗ важны следующие элементы описанной модели: 1) неформальный подход к пространственному картированию параметров закона повторяемости и 2) дифференцированный по магнитуде и пространству учет условий, сохраняющих подобие в повторяемости событий. Препятствия подобию подробно анализировались в работе [Ben-Zion, 2008].

В приведенном примере главный вклад в число параметров модели вносят элементы исходной сейсмотектонической регионализации, а с учетом статистики землетрясений, a-зоны первого уровня ($\Delta_1 M = 3.5–5$).

2.1. Методология ОЗПЗ

Параметры (A, B, C) соотношения (2) картируются в узлах {s} стандартной решетки с шагом l_0. Каждая тройка параметров в узле определяется сейсмичностью в ячейке $L_0 \times L_0$ с центром s. С этой целью ячейка $L_0 \times L_0$ покрывается стандартной сеткой с шагом $2^k l_0$, где $k = 0, 1, \ldots$ масштабный уровень сетки. Для каждой ячейки допустимого уровня k, $\Delta^{(k)} \subset L_0 \times L_0$ определяется число событий магнитуды $\geq M$ за период T, $n(\Delta^{(k)} | M, T)$. Величины $n(\Delta^{(k)} | M, T)/T$ рассматриваются как оценки $\lambda(\Delta_L, M)$ с $L = 2^k l_0$ в соотношении (2). По ансамблю таких оценок для всех допустимых уровней $k = 0, 1, \ldots$ определяются параметры (A, B, C). Для надежности оценок используются вращения исходной сетки с последующим осреднением параметров. Стандартно рекомендуются 4 двоичных уровня с $l_0 = (1/4)^0 \approx 28$ км и $L_0 = 2^0 \approx 222$ км; исходные значения размеров указаны в градусах земного меридиана [Некрасова, Кособоков, 2006].

Как видим, минимальные размеры областей, используемых в описанных подходах, сопоставимы: $l_0 \approx 30$ км. Поэтому трудности оценивания интенсивности событий на указанном масштабе одинаковы. В традиционных подходах они преодолеваются путем возможного укрупнения исходных элементов регионализации с опорой на сейсмотектонику. В методе ОЗПЗ, где минимальные ячейки задаются формальной решеткой, используется гипотеза подобия в виде соотношении (2). Чтобы оценить интенсивность событий в $l_0 \times l_0$, как мы видим, ячейка погружается в ансамбль одинаковых по размеру ячеек из $L_0 \times L_0$, к ним добавляются подобно укрупненные ячейки со статистикой событий из той же области. Такое увеличение данных призвано повысить надежность оценивания интенсивности событий в $l_0 \times l_0$ на базе модели (2). Эти ожидания вполне оправданы, если гипотеза подобия (2) верна, а исходная ячейка является *типичной* в ансамбле минимальных ячеек из $L_0 \times L_0$.

Чтобы пояснить выделенный термин, приведем пример. Пусть сейсмичность концентрируется на узком разломе, удаленном от исходного узла "s" на расстоянии $> l_0$. Тогда исходная ячейка $l_0 \times l_0$ не может быть типичной в масштабе l_0, хотя это никак не влияет на оценку параметров A, B, C. Действительно, параметры A и B не зависят от геометрии эпицентров, а параметр C должен отражать размерность разлома, с которым ячейка $l_0 \times l_0$ не пересекается. В результате сейсмическая интенсивность в нетипичной ячейке окажется завышенной при использовании ОЗПЗ.

Как правило, конкретизация нетипичных ячеек неочевидна. Однако их присутствие проявляется в целом. Действительно, роль минимальных по размеру ячеек в оценивании параметров ОЗПЗ в узле совершенно одинакова. Параметры A, B, C авторы связывают с центром области $L_0 \times L_0$ только из осторожности, считая фрактальные свойства сейсмичности неоднородными по пространству. Поэтому в теоретическом анализе оценку интенсивности для центральной ячейки $l_0 \times l_0$ логично распространить на все остальные. И тогда интенсивность событий $\geq M_0$ в $L_0 \times L_0$ можно получить, суммируя оценки (2), т.е. $A(l_0/L_0)^C$, по всем минимальным ячейкам. Поскольку число ячеек равно $(L_0/l_0)^2$, а дробная размерность C не превосходит размерности пространства, $C \leq d = 2$, получим:

$$A = A(l_0/L_0)^C \times (L_0/l_0)^2 = A(L_0/l_0)^{2-C} \geq A. \quad (3)$$

Это соотношение непротиворечиво, если только $C = d = 2$. Иначе говоря, при $C < 2$ среди минимальных ячеек всегда существуют нетипичные ячейки. Их наличие позволяет избежать противоречия в (3).

Приведенное рассуждение вскрывает существенное отличие моделей (1) и (2). Выше мы негласно воспользовались свойством аддитивности, которым обязана обладать мера сейсмической интенсивности $\lambda(\Delta, M)$. Это означает, что для любых непересекающихся подмножеств Δ_i имеет место равенство:

$$\lambda(\cup\Delta_i, M) = \sum_i \lambda(\Delta_i, M). \quad (4)$$

Соотношение (2) как модель меры интенсивности событий должна обладать указанным свойством, однако в силу параметризации оно не выполняется. Исключение могут составлять случаи целочисленных значений параметра C: 1, 2 или 3. Доказательство этого факта аналогично (3), надо только правильно учесть размерность пространства, т.е. размерность $d = 2$ заменить на $d = 1$ или 3. При любых C свойство аддитивности модели ОЗПЗ остается в силе только для ячеек стандартной сетки с шагом L_0, поскольку для них (2) совпадает с обычным законом повторяемости.

Потеря свойства аддитивности в модели (2) заметно снижает ее область применимости. Пока все известные нам примеры приложений связаны с оценками сейсмического риска городов. Приведем один из них из работы [Кособоков, Соловьев, 2018]:

“оценивая повторяемость землетрясений в Петропавловске-Камчатском с площадью $S_{ПК} = 400$ км^2, где $A = 0.12$, $B = 0.86$, $C = 1.26$ по данным сейсмичности на всей Камчатке с площадью $S_{Кам} = 270000$ км^2, получим, что недооценка повторяемости землетрясений в черте города при нормировании на площадь может составить ⟨величину⟩:

$$\nu = (S_{Кам}/S_{ПК})\big/(S_{Кам}/S_{ПК})^{C/2} = 675^{0.37} > 11 \text{ раз}”. \quad (5)$$

Расчеты требуют пояснения. Будем придерживаться объявленного стандарта и рассмотрим ячейки $L_0 \times L_0$ размера в 1° земного меридиана с площадью $S_0 = 111.2^2$ км^2. Для модели с равномерным распределением эпицентров в ячейке $L_0 \times L_0$ получим интенсивность событий $\geq M_0$ на площади $S_{ПК}$: $\lambda_0 = A(S_{ПК}/S_0)$. Аналогичная оценка согласно (2) должна быть $\lambda = A(S_{ПК}/S_0)^{C/2}$. Параметры A совпадают, поскольку они фиксируют интенсивность событий $\geq M_0$ в ячейке $L_0 \times L_0$. Отсюда имеем $\lambda = A\left(\sqrt{S_{PK}/S_0}\right)^C = 3.56$ вместо 11.1 или 7.6 из другой работы авторов [Некрасова, Кособоков, 2009].

Оценка $\nu = 11.1$ основана на сравнении модели ОЗПЗ с нулевой гипотезой о равномерности распределения сейсмичности на всей территории Камчатки. Без уточнения территории гипотеза выглядит крайне сомнительной, поскольку уже вблизи ПК (в направлении З-В) картированный параметр активности меняется в десятки раз [Гусев и др., 1980]. Поэтому оценки эффективности ОЗПЗ, ν, заслуживают доверия, если только: 1) сейсмичность на территории изучаемого объекта ПК типична для всей территории, на которой определялись параметры ОЗПЗ, и 2) гипотеза о *равномерной* плотности эпицентров на изучаемой территории имеет под собой веские основания. Иначе говоря, корректное сравнение методов должно учитывать реальные альтернативы, связанные с сейсморайонированием. Они намного богаче предположения о равномерном распределении сейсмичности даже в областях стандартного размера $1° \times 1°$.

Опыт оценки риска для городов Мира с миллионным и более населением в сейсмоопасных зонах представлен в работе [Кейлис-Борок и др., 1984]. Несмотря на грубость данных 80-х гг., прогноз 8-ми балльных сотрясений городов, основанный на традиционных подходах, вполне оправдал себя для периодов авторского мониторинга в 10 и 20 лет. Речь идет об однородных по численности больших группах городов. В этих условиях вероятностный закон больших чисел обеспечивает устойчивость оценок сейсмического риска.

3. ОЗПЗ КАК НОРМИРОВКА

Потеря свойства аддитивности в модели (2) означает, что мера сейсмической интенсивности устроена сложнее. Чтобы скорректировать модель, обратимся к истории вопроса.

Термин *"Общий закон подобия для землетрясений"* впервые появился в работе Бака [Bak et al., 2002] как *Unified Scaling Law for Earthquake* (USLE), однако с другой смысловой нагрузкой соотношения (2). Чтобы уточнить исходное понятие, рассмотрим сейсмическую зону G и покроем ее регулярной сеткой с шагом L. Пусть $\xi(L \times L)$ некоторая статистика сейсмических событий $\geq M$ в ячейке $L \times L$ за время ΔT. Следуя и обобщая Бака, будем говорить, что сейсмичность обладает свойством USLE, если после подходящей нормировки статистики: $a_L\xi(L \times L)$, где $a_L = f(L, M, \Delta T)$, ее распределение, *усредненное* по всем ячейкам $L \times L$, не зависит от $L, M, \Delta T$. Усредненное распределение можно интерпретировать как распределение нормированной статистики в *случайно* выбранной ячейке пространства. Возможен и более сильный вариант USLE, когда распределение нормированной статистики одно и то же для всех сейсмоактивных ячеек. Тогда термин *Unified* следует заменить согласно [Corral, 2003] на *Universal*.

В качестве примера USLE-статистики в работах [Bak et al., 2002; Corral, 2003; 2004] рассмотрен интервал времени τ_L между двумя последовательными событиями в ячейке $L \times L$. Эта статистика интересна тем, что ее естественная нормировка должна быть пропорциональной интенсивности $\lambda(\Delta_L, M)$ событий манитуды $\geq M$ в $\Delta_L = L \times L$, поскольку в условиях стационарности режима среднее значение $E\lambda(\Delta_L, M)\tau_L = 1$ не зависит от параметров. Учитывая закон повторяемости Гуттенберга–Рихтера по магнитуде и фрактальность распределения по пространству (подробнее см. ниже), в работе [Bak et al., 2002] предложен нормировочный коэффициент для τ_L в виде:

$$a_L(\tau_L) = \mathrm{A} \times 10^{-B(M-M_0)} L^{d_f}, \tag{6}$$

где d_f (как и C) интерпретируется как фрактальная размерность эпицентров.

Формально правые части (6) и (2) совпадают параметрически, но отличаются по содержанию и целям использования: (6) это нормировка сейсмичности, а (2) ее оценка. Кроме того, исходя из предложенных авторами методов оценивания, фрактальные параметры d_f и C оказались разными по типу размерности (см. ниже).

Согласно работам [Bak et al., 2002; Corral, 2003; 2004] нормированное распределение статистики τ_L неплохо согласуется с Гамма-распределением, имеющим плотность $p(x) = cx^{\gamma-1}e^{-x}$. Это наблюдение относится к полным каталогам, включающим афтершоки. Теоретический анализ показал [Molchan, 2005], что τ_L как USLE–статистика реализуется лишь для однородного пуассоновского потока событий, что противоречит реальной сейсмичности и оценке параметра γ, значимо отличной от 1.

"Универсальность распределения" нормированной величины τ_L кажущаяся и обязана подходящей визуализации распределений $a_L\tau_L$, а именно в log-log шкале [Molchan, Kronrod, 2007]. В такой системе координат хорошо подтверждается согласие хвостов распределений $a_L\tau_L$, но скрыто расхождение распределений в области умеренных значений указанных статистик. Поведение распределений $a_L\tau_L$ в области малых значений имеет степенной характер и обязано закону Омори, а в области больших значений оно экспоненциальное и обязано пуассоновости основных событий. Таким образом, USLE-закон для статистики τ_L синтезирует факты, хорошо известные сейсмологам.

Оставаясь в рамках идеологии П. Бака, более естественно искать такую оптимальную нормировку статистики $\xi(L \times L)$, при которой распределение $a_L\xi(L \times L)$ в *случайной* ячейке $L \times L$ *предельно слабо* зависит от параметров $\Delta T, L, M$ и при этом остается *невырожденным*.

Термин "*предельно слабо*" означает выбор такой нормировки, при которой распределения ансамблей $\{a_L\xi(L \times L)\}$ с разными L наиболее близки друг к другу в подходящей метрике. Учитывая недостатки представления распределений в работах [Bak et al., 2002; Corral, 2003; 2004], расхождение распределений оценивалось авторами [Molchan, Kronrod, 2005] в метрике Леви [Феллер, 1967]. В этой метрике измеряется наибольший зазор между графиками двух распределений в направлении вектора (–1.1). Метрика Леви наиболее чувствительна к отклонениям распределений в области центральных значений случайных величин.

Термин *невырожденности* предельного распределения означает, что нормированная статистика при $L \ll 1$ не вырождается в ноль или бесконечность. Особая роль малых масштабов L связана с тем, что только при $L \to 0$ относительно корректно можно говорить о фрактальности.

Проблема оптимальной нормализации была рассмотрена в работах [Molchan, Kronrod, 2005; 2007] для двух статистик τ_L и n_L, где n_L – число событий $\geq M$ в *случайно выбранной* ячейке $L \times L$ за время ΔT. При невозможности разделить типичные и нетипичные ячейки, анализ долговременной статистики n_L в случайной ячейке $L \times L$, является естественной альтернативой соотношению (2). Чисто теоретический пример сейсмичности, в которой статистика n_L обладает в точности свойством USLE, предложен в работе [Писаренко, Голубева, 1996].

Поскольку $En_L = \lambda(\Delta_L, M)\Delta T$, нормировка статистики n_L опять связана с интенсивностью событий в $L \times L$:

$$a_L(n_L) = [\Delta T A \times 10^{-B(M-M_0)} (L/L_0)^{d_f}]^{-1}. \qquad (7)$$

Соотношения (6), (7) определяют только структуру нормировок, но не означают совпадения параметров, относящихся к обеим статистикам τ_L, n_L.

Оптимальное значение d_f может зависеть и от выбора статистики и от того, как мы определим *случайность* или, что то же, вес ячейки $L \times L$ при осреднении распределений.

Будем выбирать ячейку $L \times L$ с вероятностью

$$w_p(L \times L) = \lambda^p(L \times L) / \Lambda_p, \qquad (8)$$

где Λ_p определяется условием $\sum w_p(L \times L) = 1$. Вариант $p = 0$ предполагает равновероятными все сейсмогенные ячейки. Этот вариант использовался в работе [Bak et al., 2002]. Вариант $p = 1$ выглядит наиболее естественно, поскольку вес ячейки пропорционален наблюденному числу в ней событий. Большие $p > 1$ позволяют локализовать с разной степенью разрешения места высокой сейсмической активности.

Для однородной по пространству мультифрактальной меры сейсмичности (точные определения см. ниже) авторы работы [Molchan, Kronrod, 2005] конструктивно описали неоднозначность выбора оптимального параметра d_f и подтвердили выводы на примере сейсмичности разлома Сан-Андреас. В частности, оптимальная нормировка статистики n_L для событий $M > 2$ достигается с $d_f \approx 1.8$ в случае весового параметра $p = 0$, и с $d_f \approx 1.2$ в случае $p = 1$. Указанные эмпирические оценки d_f заметно разные и обе относятся к диапазону масштабов $L = 10$–100 км. Авторы работы [Некрасова, Кособоков, 2009], используя $C \approx 1.2$, оценили эффект применения метода ОЗПЗ к г. Лос-Анджелес величиной (5): $\nu = 6.2$. При оценке Бака $C \approx 1.8$, эффект снижается почти вчетверо: $\nu \approx 1.6$, что подтверждает важность правильного выбора фрактального параметра.

3.1. Вывод

Модель сейсмической интенсивности (2) не обладает свойством аддитивности и поэтому нуждается в коррекции. Рассматривая ОЗПЗ как нормировку статистики n_L в случайной ячейке, можно заметно ослабить (но не устранить) зависимость ее распределения от масштаба. В результате коррекция соотношения (2) приобретает стохастический вид:

$$\lambda(\Delta_L, M) = A \times 10^{-B(M-M_0)} (L/L_0)^C \xi(\Delta_L), \quad L \ll L_0, \qquad (9)$$

где о коэффициентах $\{\xi(\Delta_L)\}$ известно только то, что распределение каждого L-ансамбля корректирующих множителей $\{\xi(\Delta_L)\}$ слабо зависит от масштаба. Здесь ячейки Δ_L образуют сетку с шагом L, а L_0 масштаб области с однородными (см. ниже) фрактальными свойствами меры сейсмичности. Скорректированная модель (9) вместо точечных оценок интенсивности позволяет строить в лучшем случае доверительные интервалы для $\lambda(\Delta_L, M)$, что снижает ее практическую ценность.

Модель (9) проверялась на событиях ($M > 2$) разлома Сан-Андреас [Molchan, Kronrod, 2005] и, конечно, нуждается в обосновании в каждом конкретном случае региона и диапазона магнитуд. Нетривиальные примеры распределений $\{\xi(\Delta_L)\}$ представлены в работе [Molchan, Kronrod, 2005].

Выбор параметра C не однозначен и требует специального анализа, представленного ниже.

4. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСЬ И ПАРАМЕТР C

Чтобы понять природу параметров C, d_f в соотношениях (2), (6), необходимы точные определения фрактальности и мультифрактальности. Эти понятия неизбежно связаны с бесконечно малыми пространственными масштабами, недостижимыми при анализе сейсмичности. Однако другого пути нет, если нужно понять те подводные камни, которые скрыты при формальном использовании этих понятий на макроуровне.

Интенсивность событий магнитуды $\geq M$ в ячейках Δ, $\lambda(\Delta, M)$, определяет при фиксированном значении M меру $\mu(\Delta)$ на подмножествах сейсмоактивной зоны. Как чисто математический объект меру $\mu(\Delta)$ называют *мультифракталом*, если, грубо говоря, ее носитель можно разложить в сумму подмножеств S_α, таких что в подходящей системе окрестностей Δ_L, своей для каждой точки $g \in S_\alpha$, мера демонстрирует *сингулярность* типа α:

$$\lg \mu(\Delta_L) \sim \alpha \lg L, \quad L \ll 1. \qquad (10)$$

(Запись $x \sim y$ означает, что $x/y \approx 1$ при $L \ll 1$).

Заметим, что гладкая мера на плоскости имеет, как правило, параметр $\alpha = 2$.

Набор пар $(\alpha, f(\alpha))$, где $f(\alpha)$ дробная размерность множества S_α, определяет мультифрактальный спектр меры. В теоретических работах дробная размерность ассоциируется с размерностью Хаусдорфа, а в физических приложениях (менее строгих) с боксовой размерностью. По определению спектр *монофрактала* (или просто фрактала) состоит из одной пары, а спектр *однородного мультифрактала* один и тот же для разных частей носителя меры.

Спектр однородного мультифрактала содержит точку, у которой сингулярность совпадает с размерностью, $\alpha_0 = f(\alpha_0)$. Такая размерность называется *информационной* D_1, поскольку все точки с указанной сингулярностью образуют множество полной меры: $\mu(S_{\alpha_0}) = \mu(\cup S_\alpha)$. Иначе говоря, соотношение (10) имеет место с $\alpha = D_1$ в подходящей малой окрестности любой точки пространства, *типичной* для меры $\mu(\cdot)$. На макромасштабном уровне понятие типичности уже обсуждалось в разделе 2. На микроуровне антиподы типичным точкам мультифрактальной меры многолики и представлены объединением подмножеств S_α точек с однородной сингулярностью $\alpha \neq D_1$. Как и на макроуровне, множества S_α не известны. Любая сингулярность (10) может быть выявлена, как правило, статистическими методами, но без привязки к конкретной точке пространства.

Конструктивным признаком мультифрактальности меры является приближенно линейное соотношение:

$$\lg \sum \mu^p(L \times L) \sim \tau(p) \lg L, \quad L \ll 1 \tag{11}$$

при малых размерах шага решетки и разных фиксированных p. Для простоты записи здесь мера нормирована, т.е. имеет полную единичную массу, и потому $\tau(1) = 0$. Суммирование в (11) ведется по ячейкам ненулевой μ-меры, что на языке сейсмичности соответствует сейсмоактивным ячейкам.

Известно, что в условиях выпуклости кривой $[-\tau(p)]$, величины $\tau(p)$ полностью определяют мультифрактальный спектр меры. В частности, множество сингулярностей типа (10) в регулярной ситуации совпадает с множеством значений $d\tau(p)/dp := \dot{\tau}(p)$. Приведем точные соотношения для базовых (в приложениях) размерностей: *боксовая* размерность носителя меры $D_0 = -\tau(0)$, *информационная* размерность $D_1 = \dot{\tau}(1)$, *корреляционная* размерность $D_2 = \tau(2)$ [Hentschel, Procaccia, 1983; Feder, 1988].

И размерности, и сингулярности меры формально объясняют степенную параметризацию в (2), (6). С одной стороны (10) эквивалентно грубому соотношению $\mu(\Delta_L) \propto L^\alpha$ для малых масштабов вблизи точек из S_α. (Символ $x \propto y$ означает, что x/y медленно меняется при $L \to 0$). Любое множество S_α однородной мультифрактальной меры всюду плотно на ее носителе. Поэтому любая сингулярность меры является претендентом на фрактальный параметр в (2), (6). Среди них определенное преимущество имеет сингулярность $\alpha = D_1$, поскольку является типичной для меры.

Рассмотрим размерность $f(\alpha)$. Число элементов покрытия произвольного фрактального множества S растет степенным образом: $N(L) \propto L^{-d_S}$, где d_S есть боксовая размерность S. Возьмем в качестве S носитель меры. Тогда в среднем для элементов его покрытия $\mu(\Delta_L) \propto N(L)^{-1} \propto L^{D_0}$. Поэтому на роль параметра d_f в (2), (6) может претендовать размерность D_0, что и было реализовано в работе [Bak et al., 2002]. Аналогично, полагая $S = S_\alpha$, мы получим $\mu(\Delta_L) \propto L^{d_f}$ с $d_f = f(\alpha)$. Обе интерпретации степенного поведения меры согласованы, если $\alpha = f(\alpha) = D_1$, т.е. когда S есть множество типичных точек меры.

Описанные возможности для фрактального параметра в (2), (6) не решают задачу его оптимального выбора, когда речь идет о случайной ячейке Δ_L. Согласно работе [Molchan, Kronrod, 2005], если случайность ячейки описывается распределением (8) с параметром $p \geq 0$, тогда:

$$d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{opt}}(p) = \tau(p+1) - \tau(p). \tag{12}$$

Поскольку $\tau(1) = 0$, $d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{opt}}$ совпадает с боксовой размерностью, $d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{opt}}(0) = D_0$, при $p = 0$, и с корреляционной размерностью, $d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{opt}}(1) = D_2$, при $p = 1$. Указанные выше эмпирические оценки $d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{opt}}$ для разлома Сан-Андреас подтвердили это теоретическое заключение на масштабах 10–100км.

Выбор случайной ячейки с частотой, пропорциональной числу в ней событий, представляется естественным. Он тесно связан с информационной размерностью. Поэтому теоретическое предсказание $d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{opt}}(1) = D_2$ вместо D_1 на первый взгляд неожиданно. На самом деле соотношение (12) есть результат сбалансированного учета типичных и нетипичных точек в мультифрактальной мере в зависимости от процедуры случайного выбора и поэтому представляет собой своеобразное осреднение размерностей.

В работах [Кособоков, Некрасова, 2004] методика оценивания параметра C ориентирована на получение корреляционной размерности D_2. Выбор $D_2 \neq 2$

означает признание нетипичных ячеек, хотя само соотношение (2) такую возможность исключает.

4.1. Диапазон масштабов

На практике диапазон масштабов L в соотношениях (2, 6) отграничен от больших и малых значений, т.е.

$$\delta_- < \lg L < \delta_+. \tag{13}$$

Дополнительное требование

$$\delta_+ - \delta_- \approx 1 - 2 \tag{14}$$

типично для обсуждения *нетривиальности подобия* в физической литературе [Malkai et al., 1997]. Если в условиях (14) наблюдаются соотношения (11) и оценки $\tau(p)$ устойчивы при некоторых заданных p, тогда можно сказать, что физический объект выглядит как фрактал или мультифрактал ($\tau(p) \neq cp$) в диапазоне масштабов (13).

Описанные требования, в частности, устойчивость и условие (14), оказались достаточно жесткими для современных мировых и региональных каталогов, которыми располагали авторы работы [Molchan, Kronrod, 2009]. Анализируя сейсмичность Земли, авторам удалось выделить лишь шесть регионов (Ю. Калифорния, $M > 2$; Камчатка, $M > 3.5$; Новая Зеландия, $M > 2.5$; Центральная Американская дуга, $M > 4$; Коста Рика, $M > 3.2$; Греция, $M > 3$; Гарм, $M > 1.7$), где для отдельных участков было сделано положительное заключение о мультифрактальном проявлении сейсмичности с лог-диапазоном масштабов: $\delta_+ - \delta_- \in [1, 1.6]$. К сожалению, строгий анализ фрактальности в сейсмостатистике (см., например, [Goltz, 1997; Harte, 2001; Molchan, Kronrod, 2009]) пока невелик.

В ОЗПЗ-приложениях, как правило, величина $\delta_+ - \delta_- \approx \lg 8 = 0.9$, что меньше 1. В этих условиях оценки C не всегда надежны. Устойчивость параметра C достигается осреднением его оценок в ячейках, полученных вращением исходной ячейки $L_0 \times L_0$ относительно своего центра. Однако операция вращения оправдана лишь в случае статистически изотропной сейсмичности, а это свойство выполнено далеко не всегда, особенно для сильных событий.

4.2. Вывод

В отдельных и пока немногих районах мира меру сейсмической интенсивности слабых событий можно считать мультифрактальной. Для мультифрактальной сейсмичности соотношение (12) определяет оптимальный фрактальный параметр C в (2). Он обслуживает меру сейсмической интенсивности в случайной ячейке масштаба $L \ll L_0$, где L_0 – масштаб мультифрактальной однородности, а случайность описывается вероятностями (8). Параметр C совпадает с корреляционной размерностью, если выбор ячейки пропорционален сейсмической активности в этой ячейке.

Соотношения (2), (6) априори предполагают независимость фрактальной размерности от магнитуды, что само по себе неочевидно при сравнении сильных и слабых событий. Кажется правдоподобным, что в таких регионах как Калифорния или Италия сильные события тяготеют к разломам, а слабые рассеяны по пространству. А это должно повышать размерность слабых.

При соблюдении условия (14) надежный анализ фрактальности для крупных событий представляется сомнительным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проанализировали метод картирования долговременной интенсивности землетрясений под названием “Обобщенный закон подобия для землетрясений” (ОЗПЗ). В его основе лежит содержательная и до сих пор неиспользованная в приложениях гипотеза о фрактальности меры сейсмической интенсивности. На пути практического применения метода имеются серьезные препятствия: 1) фрактальность/мультифрактальность меры сейсмической интенсивности надежно подтверждена лишь в небольшом числе регионов мира и только для слабых землетрясений. Экстраполяция фрактальных свойств слабой сейсмичности на сильную, что важно при бедности статистики разрушительных землетрясений, нуждается в серьезном обосновании; 2) модель меры интенсивности ОЗПЗ не обладает необходимым свойством аддитивности, что ведет к противоречиям и необоснованному заключению: “Следствием фрактальной природы землетрясений и, в частности, их распределения в пространстве является *обычное занижение* традиционных оценок сейсмической опасности” [Некрасова, Кособоков, 2006]. Поэтому вопрос об использовании фрактальных свойств сейсмичности для задач сейсмического риска остается открытым; 3) не следует преувеличивать роль фрактальности в задачах риска, где главную роль играют сильные события, а обоснование даже их пространственного носителя затруднено. Дело в том, что разрушительный эффект события магнитуды M проявляется в некоторой пространственной зоне $G_{J(M)}$ (например, J-и балльная изосейста). Поэтому риск для точечного объекта g_0 определяется интегрально, т.е. суммарной интенсивностью событий M в зоне $G_{J(M)}$ с центром g_0, [Кейлис-Борок и др., 1984]. В этом случае достаточно иметь сглаженную, а значит, нефрактальную меру сейсмичности плюс контрольные интегралы сейсмической интенсивности в подходящих областях.

Примеры корректного использования ОЗПЗ связаны с методологией П. Бака, когда соотношение (2) используется как подходящая нормировка сейсмичности на разных масштабах (см. раздел 3). В этом случае действительно возникают нетривиальные, слабо зависимые от масштаба, законы распределения. Но они характеризуют не сейсмичность конкретных ячеек заданного размера, а сейсмичность случайно выбранной из них ячейки. Идея рандомизации пространственной ячейки, несомненно, интересна с точки зрения получения законов подобия в сейсмичности.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мои коллеги В. Писаренко, М. Родкин и Л. Ромашкова ознакомились с предварительной версией статьи. Их неформальные замечания привели к радикальной переделке текста, за что я им искренне благодарен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гусев А., Кондратенко А., Потапова О., Федотов С., Шумилина Л. Камчатка и Командорские острова. Сейсмическое районирование территории СССР. М.: Наука. 1980. С. 269–283.

Кейлис-Борок В., Кронрод Т., Молчан Г. Сейсмический риск крупнейших городов мира (восьмибалльные сотрясения). Математическое моделирование и интерпретация геофизических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 16. М.: Наука. 1984. С. 93–117.

Кейлис-Борок В., Кособоков В., Мажкенов С. О подобии в пространственном распределении сейсмичности. Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 22. М.: Наука. 1989. С. 28–41.

Кособоков В., Некрасова А. Общий закон подобия для землетрясений: глобальная карта параметров. Анализ геодинамических и сейсмических процессов / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 35. М.: Наука. 2004. С. 160–176.

Кособоков В., Соловьев А. Распознавание образов в задачах оценки сейсмической опасности // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 53–89.

Молчан Г., Кронрод Т., Дмитриева О., Некрасова А. Многомасштабная модель сейсмичности в задачах сейсмического риска: Италия. Современные проблемы сейсмичности / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 27. М.: Наука. 1996. С. 193–224.

Молчан Г., Подаецкая В. Параметры глобальной сейсмичности. Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 6. М.: Наука. 1973. С. 44–66.

Некрасова А., Кособоков В. Общий закон подобия для землетрясений: Прибайкалье // Докл. РАН (геофизика). Т. 407. № 5. 2006. С. 679–681.

Некрасова А., Кособоков В. Общий закон подобия для землетрясений:мегаполисы и городские агломерации. Некоторые проблемы геодинамики / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 39. М.: “Краснодар”, 2009. С. 265–300.

Писаренко В., Голубева Т. Использование устойчивых законов в моделях сейсмичности. Современные проблемы сейсмичности и динамики Земли / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 28. М.: Наука. 1996. С. 153–174.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир. 1967. 752 с.

Bak P., Christensen K., Danon L., Scanlon T. Unified scaling law for earthquakes // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 178501.

Ben-Zion Y. Collective behavior of earthquakes and faults: continuum-discrete transitions, progressive evolutionary changes and different dynamic regimes // Rev. Geophys. 2008. V. 46. RG4006. P. 1–70.

Corral A. Local distribution and rate fluctuation in unified scaling law for earthquakes // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. 035102(R).

Corral A. Universal local versus uni!ed global scaling laws in the statistics of seismicity // Physica A. 2004. V. 340. P. 590–597.

Feder J. Fractals, Plenum Press. New York. 1988. 283p.

Goltz C. Fractal and Chaotic Properties of Earthquakes, Springer, Berlin. 1997. 182 p.

Harte D. Multifractals: Theory and Applications, Boca Raton, Chapman & Hall. 2001. 248 p.

Hentschel H.G.E., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // Physica D. 1983. № 8. P. 435–444.

Malkai O., Lidar D., Biham O., Avnir D. Scaling range and cutoffs in empirical fractals // Phys.Rev. E. 1997. V. 56. P. 2817–2828.

Molchan G., Kronrod T. and Panza G. Multi-scale seismicity mode for seismic risk // Bull. of the Seismological Society of America. 1997. V. 87. № 5. P. 1220–1229.

Molchan G. Interevent time distribution of seismicity: a theoretical approach // Pure. appl. Geophys. 2005. V. 162. P. 1135–1150.

Molchan G., Kronrod T. On the spatial scaling of seismicity rate // Geophys. J. Int. 2005. V. 162. P. 899–909.

Molchan G., Kronrod T. Seismic interevent time: a spatial scaling and multifractality // Pure appl. geophys. 2007. V. 164. P. 75–96.

Molchan G., Kronrod T. The fractal description of seismicity // Geophys. J. Int. 2009. V. 179. № 3. P. 1787–1799.

Nekrasova A., Kossobokov V., Peresan A., Aoudia A., Panza G. A multiscale application of the unified scaling law for earthquakes in Central Mediterranean area and Alpine region // Pure appl.Geophys. 2011. V. 168. P. 207–327.

Nekrasova A., Kossobokov V., Parvez I., Tao X. Seismic hazard and risk assessment based on the unified scaling law for earthquakes // Acta Geod. Geophys. 2015. V. 50. P. 21–37.

Wesnousky S. The Gutenberg-Richter or characteristic earthquake distribution. Which is it? // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1994. V. 84. P. 1940–1959.

FRACTAL SEISMICITY AND SEISMIC RISK

G. M. Molchan*

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics,
Russian Academy of Science, Moscow, Russia
**E-mail: molchan@mitp.ru*

Recently, attempts have been made to take into account the fractal properties of seismicity when mapping the long-term rate of earthquakes. The paper touches upon the theoretical aspects of fractality and provides a critical analysis of its applications to the problems of seismic risk.

Keywords: Seismic risk, recurrence of earthquakes, multi-fractality, statistical seismology.