

5. Ибрагимов, Р.Н. Сейсмогенез зоны Среднего Тянь-Шаня / Р.Н. Ибрагимов. — Ташкент: Наука, 1978. — 143 с.
6. Ибрагимов, Р.Н. Сейсмоструктура Ферганской впадины / Р.Н. Ибрагимов. — Ташкент: Наука, 1970. — 164 с.
7. Ибрагимов, Р.Н. Сейсмоструктурная обстановка Ташкентской эпицентральной зоны / Р.Н. Ибрагимов // Ташкентское землетрясение 26 апреля 1966 г. — Т.: Фан, 1971. — С. 232–238.
8. Рыжков, О.А. Схема строения тектоники мезокайнозойских систем Узбекистана / О.А. Рыжков // Узб. геол. журнал. — 1962. — № 3. — С. 64–72.
9. Рыжков, О.А. К сейсмоструктурной тектонике Узбекистана / О.А. Рыжков // Вопросы регионального сейсмического учета Средней Азии. — Фрунзе: Илим. 1964. — 186 с.

10. Тальвирский, Б.Б. Геофизические опоры и тектоника Средней Азии / Б.Б. Тальвирский. — М.: Недра, 1982. — 271 с.
11. Тевелев, А.В. Геодинамическая интерпретация линейных систем Юго-Западного Гиссара и Таджикской депрессии: Дисс... канд. геол.-мин. наук: 04.00.04. / А.В. Тевелев. — М., 1985. — 251 с.

© Коллектив авторов, 2021

Зиёмов Бобур Зиёмович // bobur.ziyomov82@mail.ru  
 Хусамиддинов Ахрор Сабриддин угли // ahrorhs1980@mail.ru  
 Садилов Феруз Хасанович // sfx@bk.ru  
 Ахмедов Шерзод Баходирович // axmedovsherzod911@gmail.com.

## ГЕОФИЗИКА

УДК 550.83

Сорокин А.Г. (ФГБУ «ВИМС»)

### МЕТОД ИНВЕРСИИ МНИМЫХ ИСТОЧНИКОВ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ НА СИММЕТРИЧНОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕКТРОДНОЙ УСТАНОВКЕ

В статье предложен метод решения обратной задачи (ОЗ) вертикальных электрических зондирований (ВЭЗ), в основе которого заложено решение неоднородного волнового уравнения при помощи восходящих цепных дробей (ВЦД). **Ключевые слова:** вертикальное электрическое зондирование, восходящая цепная дробь, египетские дроби, единственность решения обратной задачи, разложение Энгеля.

Sorokin A.G. (VIMS)

### THE METHOD OF INVERSION OF IMAGINARY SOURCES WHEN SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF VERTICAL ELECTRICAL SOUNDINGS ON A SYMMETRIC FOUR-ELECTRODE INSTALLATION

The paper proposes a method for solving the inverse problem of vertical electric sounding (VES), which is based on the solution of the inhomogeneous wave equation using upward continued fractions (UCF). **Keywords:** vertical electric sounding, upward continued fraction, Egyptian fractions, uniqueness of the solution of the inverse problem, Engel decomposition.

#### Введение

В иностранной литературе был накоплен материал о выявленных различных локальных эффектах таких, как Гронинг-эффект, экранный эффект и другие, которые достаточно трудно интерпретируются при обработке данных электротомии [8, 12]. Выделяются аппаратные, геологические и иные факторы, недоучет

которых приводит к искажению глубин, получаемых на геофизических разрезах при интерпретации. Для сложно-построенных сред расхождения по глубине могут достигать больших величин, что снижает ценность геофизических исследований.

Существует проблема недостатка данных при описании моделей многослойных сред. Присутствует неоднозначность при решении ОЗ ВЭЗ для многослойных сред методом автоматического и интерактивного подбора [3, 6]. Изменчивость физических параметров среды, как правило, может быть определена только после бурения.

Относительно удачной попыткой преодоления неоднозначности решения ОЗ ВЭЗ было использование метода нелинейной регуляризации [5], что, однако, не позволило избавиться от систематических ошибок по определению глубин пластов из-за осреднения выше-названных локальных эффектов.

В данной работе предложен метод возможного преодоления проблемы использования ограниченных (дискретных) объемов данных для получения непрерывных (аналитических) решений ОЗ ВЭЗ, основанный на аппроксимации восходящими цепными дробями (ВЦД). Более подробно метод рассмотрен далее.

#### Использование ВЦД

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение [5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u + f(x, t), \quad (1)$$

с начальными условиями:  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$ .

Общее одномерное решение уравнения (1) дано Д'Аламбером [10]:

$$u = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau, \quad (2)$$

где  $\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$  и  $\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau$  — интегралы, учитывающие неоднородности  $\alpha$ ,  $s$  в пространстве времени  $t$ , скорости  $a$  и временного сдвига  $\tau$ . В общем случае вычисление этих интегралов требует априорной информации, что делает их трудновычислимыми. Теорема Тихонова утверждает, что решение ОЗ единственно при условии, что спектр исходной функции представлен во всей временной области [5]. Если модель среды описывается единичным дискретом (дельта-функция), ее спектр имеет бесконечный набор частот [2]. Таким образом, возможна формализация уравнения (1) при переходе из временной области в область расстояний в дискретно-заданной модели многослойной среды.

Для идеального однородного случая, при  $f=0$  и  $at=l$  решение упрощается:

$$u = \frac{\varphi(x+l) + \varphi(x-l)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-l}^{x+l} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (3)$$

Геометрическая модель общего решения применительно к ВЭЗ с четырех-электродной установкой  $AMNB$  на постоянном токе показана на рис. 1. Допускается, что  $u$  — значение удельного электрического сопротивления (УЭС), симметрично заданного относительно центральной точки измерения  $O$ , в формулах (2), (3).

В качестве исходных данных для решения ОЗ ВЭЗ используется график УЭС в зависимости от величины полуразноса  $AB/2$ . Величина полуразноса не является истинной глубиной измерений, поэтому для определения глубин можно использовать аппарат теории функций комплексных переменных. Это непосредственно указывает на возможное название используемого метода — «инверсия мнимых источников» (ИМИ).

Известно, что разрешающая способность ВЭЗ с глубиной падает и, фактически, график УЭС последовательно интегрируется средой нижнего полупространства. Каждое значение в точке графика УЭС получается путем осреднения значений предыдущих точек. Таким образом, для идеального случая формула (3) представляется в виде восходящей цепной дроби (ВЦД):

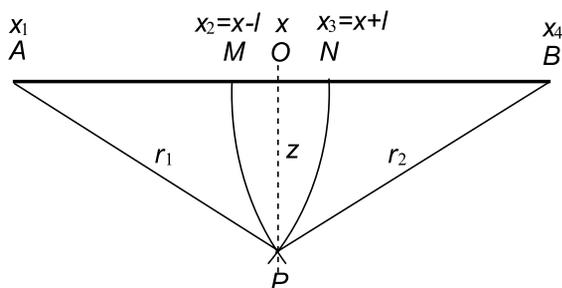


Рис. 1. Симметричная четырехэлектродная установка ВЭЗ

$$u = \frac{\frac{\frac{u_1 + u_2}{2} + u_3}{2} + u_4}{2} + u_5 + \dots \quad (4)$$

Или же для общего неоднородного случая:

$$u = \frac{\frac{\frac{\frac{a_1 + a_2}{b_1} + a_3}{b_2} + a_4}{b_3} + a_5}{b_4} + a_6}{b_5} + \dots \quad (5)$$

Восходящие цепные дроби (ВЦД) были исследованы Ф. Энгелем в 1913 г. [14]. Есть сведения, что ВЦД упоминались в трудах Фибоначчи, однако алгоритм вычисления в них не сохранился [13], в результате ВЦД были забыты на долгие годы. Однако, следует отметить, что существуют цепные дроби, обратные к ВЦД, алгоритм использующий их удачно реализован в работе [4] применительно к решениям обратных задач гравитационного и магнитного полей.

Для вычисления коэффициентов ВЦД используется разложение Энгеля:

$$u = \frac{a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_4 b_1 b_2 b_3 + a_5 b_1 b_2 b_3 b_4 + a_6 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 + \dots}{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_n} \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что разложение Энгеля переходит в египетские дроби [13]:

$$u = \frac{a_1}{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_n} + \frac{a_2}{b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_n} + \frac{a_3}{b_3 b_4 b_5 b_6 \dots b_n} + \frac{a_4}{b_4 b_5 b_6 \dots b_n} + \frac{a_5}{b_5 b_6 \dots b_n} + \frac{a_6}{b_6 \dots b_n} + \dots \quad (7)$$

Вводится допущение, что мнимыми источниками поля УЭС являются измерительные электроды, что становится возможным благодаря принципу взаимности, когда взаимное расположение источников поля и точек его измерения не влияет на величину УЭС. Тогда измеренная функция УЭС представляется в виде ВЦД в условиях упрощенного вида для четырех электродов с координатами  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Вводится замена:

$$b_{jk} = \frac{AB_k + MN_k}{2} - i(x_{jk} - x_{0k}). \quad (8)$$

Полученные функции интерполируются кубическим сплайном и дополнительно обрабатываются эллиптическим фильтром (Золотарев, Кауэр) [1], затем

делается увязка в полюсах  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , которые определяются условиями для  $k$ -ой установки:

$$\begin{aligned} b_2 b_6 b_{10} b_{14} &= i(x_3 - x_1), & b_6 b_{10} b_{14} &= i(x_2 - x_1), \\ b_{10} b_{14} &= i(x_4 - x_2), & b_{14} &= i(x_4 - x_3). \end{aligned} \quad (9)$$

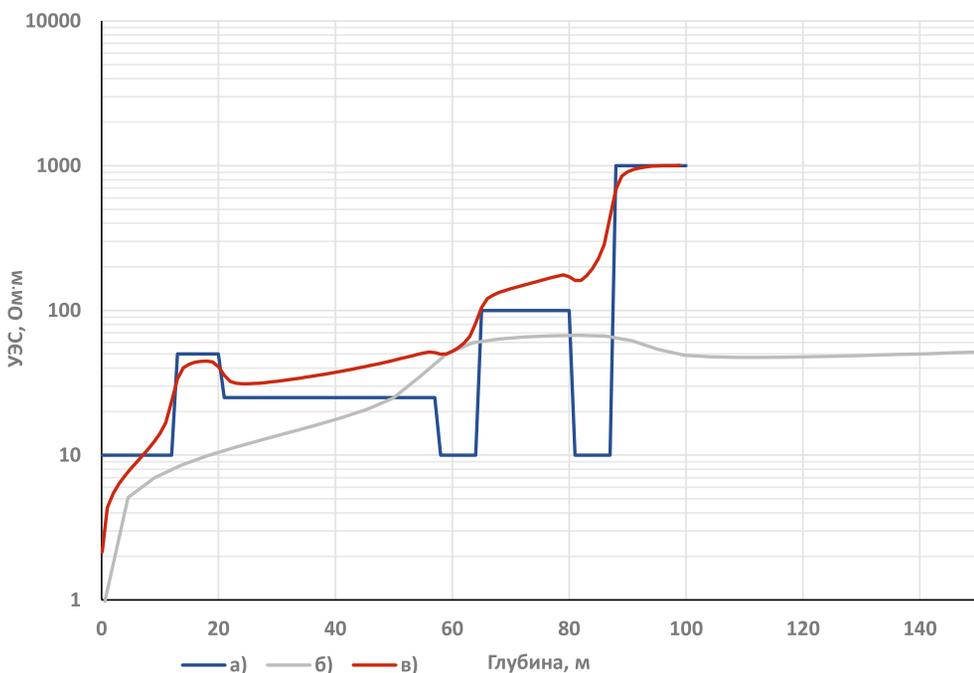
Определяются коэффициенты  $a_{jk}$  по алгоритму RNSA для псевдообращения:  $A^+ F$  [7, 15]. Зная коэффициенты  $a$ , заново определяются коэффициенты  $b$  для заданной  $k$ -ой установки при условиях:  $z_{1k} = |b_{2k} b_{6k} b_{10k} b_{14k}|$ ,  $z_{2k} = |b_{6k} b_{10k} b_{14k}|$ ,  $z_{3k} = |b_{10k} b_{14k}|$ ,  $z_{4k} = |b_{4k}|$ . Глубины точек  $z$  определяются по формуле:

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_{jk}. \quad (10)$$

### Примеры применения метода ИМИ

Для проверки возможностей метода ИМИ и определения его разрешающей способности было проведено моделирование с использованием решений прямой и обратной задачи (рис. 2) и интерпретация полевых данных по одному из участков эффузивной кальдеры в Забайкалье (рис. 3) для случая симметричной четырехэлектродной установки  $AMNB$  на квазипостоянном токе.

На рис. 2. показано решение прямой задачи ВЭЗ [11] (график б) от исходной слоистой модели (график а) и результат решения ОЗ методом ИМИ (график в). Из результатов моделирования следует, что существуют различные локальные эффекты, в частности такие, как влияние соседних пластов, краевые эффекты, влияние ближней зоны. Что в целом подтверждает выводы в работе [12], но противоречит выводам в работе



**Рис. 2.** Результаты моделирования прямой и обратной задачи ВЭЗ: а) — исходная модель слоистой среды, б) — результат решения прямой задачи, в) — результат решения обратной задачи методом ИМИ

[8], т.к. очевидно, что данные эффекты не вызваны влиянием аппаратуры, а значит не могут быть устранены аппаратным путем. Однако следует отметить, что наличие искажающих УЭС эффектов при решении ОЗ не привело к искажению глубин, поскольку точки перегиба графика в) позволяют довольно точно определить границы пластов слоистой модели а), что вполне достаточно для геологической интерпретации метода.

Далее рассмотрим пример геологической интерпретации метода ИМИ на реальных полевых данных. На рис. 3а показан план расположения электроразведочных профилей I-I и II-II, по которым проходила съемка методом ВЭЗ на симметричной четырехэлектродной установке. Величина полуразноса  $AB/2$  доходила до 3000 м. Съемка проходила по территории кальдеры, сложенной эффузивными породами верхнего комплекса (дацитами, фельзитами, риолитами и др.) и захватывала юго-западную часть ее обрамления, сложенного гранитами и гранито-гнейсами, которые продолжают под кальдерой на глубине, образуя нижний комплекс пород фундамента. Внутри кальдеры существует большое количество разнонаправленных тектонических нарушений, которые охарактеризованы различными гидротермально-метасоматическими изменениями (рис. 3а). На разрезах (рис. 3б, 3в), построенных методом ИМИ, отмечается большое количество маркирующих горизонтов (показаны сплошными черными линиями). Породы верхнего (эффузивного) комплекса отделяются от нижнего (гранитного) по различию значений УЭС. Эффузивный комплекс представлен зонами пониженного УЭС, гранитный комплекс — зонами повышенного УЭС. Черной пунктирной линией на разрезах

показана граница верхнего и нижнего комплексов (граница кристаллического фундамента, полученная по данным бурения), положение которой в целом согласуется с результатами интерпретации, но существуют осложнения.

На линии пересечения разрезов относительная градиация значений УЭС по глубине совпадает, но уровень УЭС различается, что может быть связано с влиянием анизотропии среды. Выделяются вертикальные зоны повышенного УЭС, которые связаны преимущественно с окварцеванием [9], показанным на плане (рис. 3а). Следует отметить, что на разрезах видны «тени» объектов, нерасположенных непо-

средственно на линиях профилей. Таким образом, все наблюдаемые эффекты не относятся к аппаратным, и к явным ошибкам при определении глубин границ не привели, что согласуется с результатами моделирования.

### Программная реализация метода ИМИ

Алгоритм метода ИМИ реализован на встроенном Visual Basic for Applications (VBA) в MS Excel 2016. В качестве интерфейса использованы стандартные возможности MS Excel, что позволяет использовать

общераспространенные форматы входных и выходных данных (xls, txt, dat, doc и т.д.), а также позволяет пользователю свободно создавать различные вспомогательные диаграммы, таблицы и листы непосредственно в рабочем проекте Excel и сохранять их. Ввод и вывод данных осуществляется через буфер обмена.

Алгоритм предусматривает использование классических симметричных четырехэлектродных установок ВЭЗ на постоянном токе. Все что нужно сделать пользователю, это скопировать таблицу полевых журналов в рабочий лист и вычислить столбец значений глубин путем простого протягивания при помощи черного крестика в правом нижнем углу ячейки, как это показано на рис. 4. Значения глубин вычисляются программой автоматически. Вычисления происходят непрерывно, в течении реального времени и практически мгновенно. Однако на некоторых компьютерах загрузка программы может происходить в течение нескольких минут, но это несколько не сказывается на скорости вычислений. Количество обрабатываемых установок (строк) ограничивается только лишь возможностями Excel 2007 — 2020 и составляет 1 048 575.

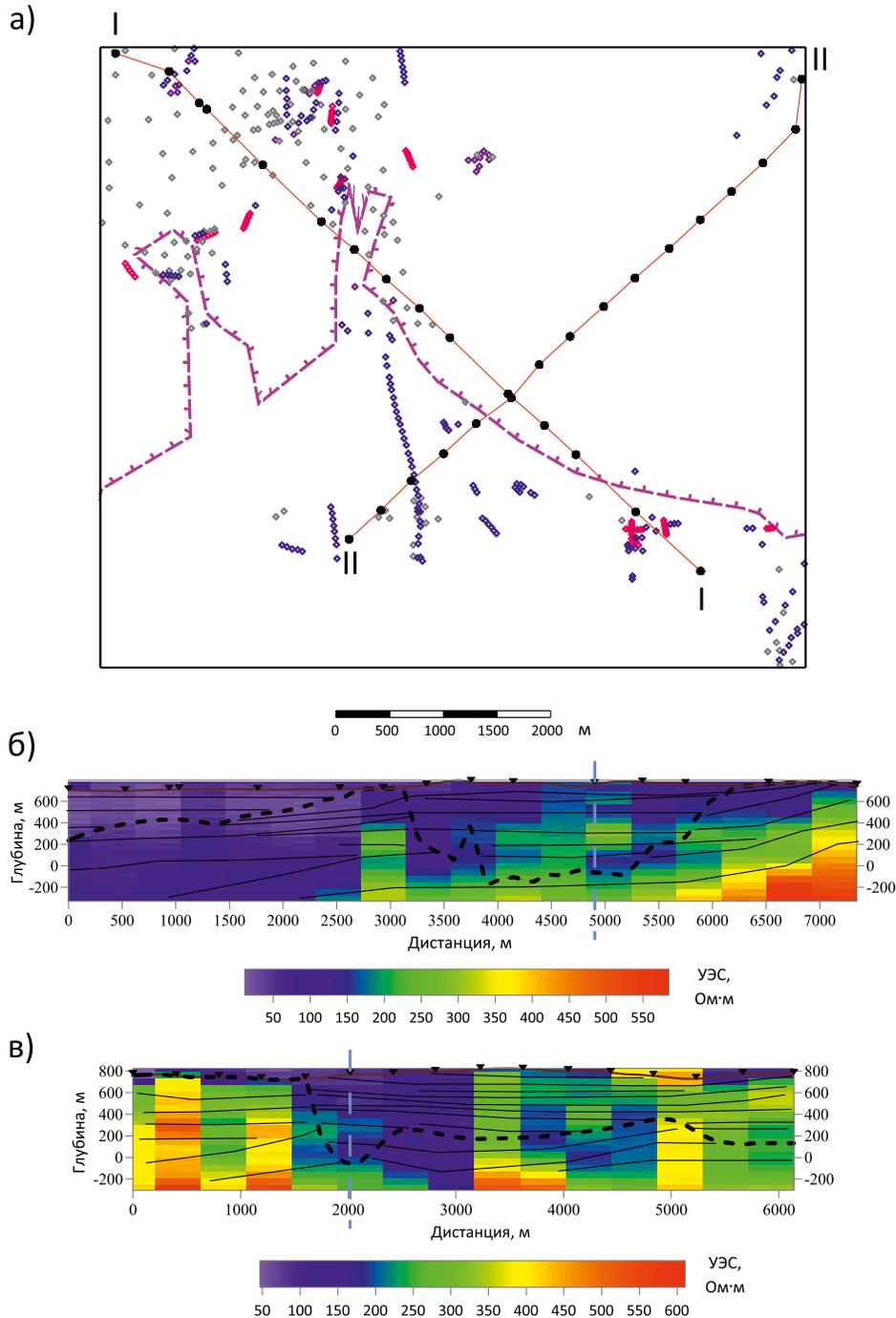
Рабочий лист включает в себя следующие столбцы данных (рис. 4):

$N\_VES$  — порядковый номер симметричной четырехэлектродной установки (необязательно);

YEAR — год проведения измерений (необязательно);

$AB/2$  — величина полуразноса питающей линии в метрах (обязательно);

$MN/2$  — величина полуразноса приемной линии в метрах (обязательно);



**Рис. 3. План расположения профилей съемки методом ВЭЗ (а) и геоэлектрические разрезы по линиям I-I (б) и II-II (в), построенные методом ИМИ**

Условные обозначения к рис. 3а): — линии электроразведочных профилей и пикеты ВЭЗ, — граница эффузивной кальдеры. Точки откартированных на плане гидротермально-метасоматических изменений горных пород: — окварцевание, — гематитизация, — флюоритизация, — грейзенизация.

Условные обозначения к рис. 3б) и 3в): — пикеты ВЭЗ, — линия рельефа дневной поверхности, — граница кристаллического фундамента по данным бурения, — проинтерпретированные границы маркирующих горизонтов, — линия пересечения разрезов I-I и II-II

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	N_VES	YEAR	AB/2	MN/2	S_RES	REL	X	Y	Z	
2	1	67	1,5	0,5	178	695,9633714	78772,1468	48821,75867	694,6404957	
3	1	67	2	0,5	182,0029406	695,9633714	78772,1468	48821,75867	694,4633714	
4	1	67	3	0,5	158,3937393	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
5	1	67	4	0,5	137,3656312	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
6	1	67	6	0,5	116,530843	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
7	1	67	9	0,5	96,69230476	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
8	1	67	9	3	90,16241668	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
9	1	67	12	0,5	77,90091671	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
10	1	67	12	3	71,83970826	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
11	1	67	15	3	61,84663059	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
12	1	67	20	3	62,6021198	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
13	1	67	30	3	77,02877138	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
14	1	67	40	3	93,41083018	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
15	1	67	40	20	92,38407055	695,9633714	78772,1468	48821,75867		
16										
17										
18										
19										
20										

Рис. 4. Окно программы в MS Excel 2016

S\_RES — кажущееся удельное электрическое сопротивление (УЭС) в Ом·м (обязательно);

REL — высота превышения над уровнем моря в центральной точке симметричной четырехэлектродной установки в метрах (обязательно), если значение неизвестно, то нужно указать ноль;

X, Y — координаты центральной точки симметричной четырехэлектродной установки в метрах (необязательно);

Z — вычисляемая программой глубина замеров УЭС для каждой установки в метрах.

Столбцы X, Y, Z, S\_RES могут быть скопированы в отдельный файл для последующей интерполяции и визуализации в программах Sufer, Voxler и др.

Из вышесказанного следует, что программная реализация метода ИМИ значительно превосходит известные аналоги [3, 6] по производительности.

#### Выводы

1. Результаты моделирования и геологическая интерпретация метода ВЭЗ, представленные выше, позволяют выделить основные факторы, существенно искажающие значения УЭС: анизотропия среды, влияние сторонних объектов, краевые искажения.

2. Названные факторы не приводят к искажению глубин.

3. Предлагаемый метод интерпретации ВЭЗ имеет следующие преимущества: не требует априорных данных о разрезе; устойчив к геологическим помехам; с достаточной для практики точностью определяет глубину расположения полого залегающих

пластов; позволяет обрабатывать большие массивы данных.

4. Развитие метода может состоять в его адаптации к электротомографии на больших разностях, к использованию установок с произвольным расположением электродов и в учете окружающего рельефа местности, что может быть полезно при проведении работ в горных районах для выявления глубинных структур.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер, Н.И. Элементы теории эллиптических функций / Н.И. Ахиезер. — М.: Наука, 1970. — 304 с.
2. Бат, М. Спектральный анализ в геофизике / М. Бат. — М.: Недра, 1980. — 535 с.
3. Бобачев, А.А. IPI2Win. Руководство пользователя / А.А. Бобачев. — М.: МГУ, 2005. — 26 с.
4. Ермохин, К.М. Технология построения разрезов методом аналитического продолжения геофизических полей / К.М. Ермохин // Геоинформатика. — 2010. — № 2. — С. 51–60.
5. Жданов, М.С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике / М.С. Жданов. — М., 2007. — 710 с.
6. Каминский, А.Е. ZONDIP1D. Руководство пользователя / А.Е. Каминский. — СПб.: Zond Software, 2015. — 84 с.
7. Королева, Д.Е. Анализ алгоритмов обучения коллаборативных рекомендательных систем / Д.Е. Королева, М.В. Филиппов // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — Вып. 6. — URL: <http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/816.html>.
8. Миронцов, Н.Л. Некоторые аспекты использования многозондовой аппаратуры бокового каротажа / Н.Л. Миронцов // Тез. докл. Первой междунар. конф. «Актуальные проблемы электромагнитных зондирующих систем». — Киев, 2009. — С. 8–9.
9. Пахомов, М.И. Петрофизический метод выделения и оценки метасоматитов / М.И. Пахомов, В.И. Пахомов. — М.: Недра, 1988. — 152 с.
10. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: Уч. пособие. — 6-е изд., испр. и доп. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 798 с.
11. Якубовский, Ю.В. Электроразведка / Ю.В. Якубовский, И.В. Ренард. — М.: Недра, 1991. — 358 с.
12. Anderson, B.I. Modeling and inversion methods for the interpretation of resistivity logging tool response / B.I. Anderson // Schlumberger print. — 2001. — P. 377.
13. Cor, Kraaikamp On a new continued fraction expansion with non-decreasing partial quotients / Cor Kraaikamp, Jun Wu. // Monatshefte für Mathematik. — 2004. — Т. 143. — Вып. 4. — С. 285–298.
14. Engel, F. Verhandlungen der 52. Versammlung deutscher Philologen und Schulmaenner in Marburg / F. Engel. — 1913. — С. 190–191.
15. Taek-Hun, Kim An Effective Threshold-based Neighbor Selection in Collaborative Filtering. Dept. of Computer Science / Kim Taek-Hun, Yang, Sung-Bong. — Yonsei University, Seoul. — PP. 10–749.

© Сорокин А.Г., 2021

Сорокин Александр Геннадьевич // alsorokin2011@yandex.ru