

## ФАЗОВАЯ И РАДИАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО ПУЧКУ В УСКОРЯЮЩЕЙ СИСТЕМЕ СИНХРОТРОНА У-70

© 2013 г. С. В. Иванов, Н. А. Игнашин, О. П. Лебедев, С. Э. Сытов

ГНЦ РФ “Институт физики высоких энергий”  
Россия, 142281, Протвино Московской обл, пл. Науки, 1

Поступила в редакцию 02.07.2012 г.

Описана методика оптимальной настройки фазового и радиального контуров обратной связи по пучку, используемых в системе задающего генератора ускоряющей системы синхротрона У-70 ГНЦ ИФВЭ. Ввод в эксплуатацию нового цифрового задающего генератора обеспечил возможность использования коэффициентов обратной связи, изменяющихся в цикле ускорения, в ходе которого происходит переход через критическую энергию. Это позволило заметно улучшить качество контроля параметров ускоряемого пучка. Получено характеристическое уравнение системы в замкнутом состоянии. На его основе проведен анализ комплексных корней, представляющих собственные моды колебаний, что позволило обосновать практические рекомендации по выбору параметров. Приведены результаты экспериментов на ускоренном протонном пучке с энергией 1.3–50 ГэВ.

DOI: 10.7868/S0032816213040071

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задающий генератор ускоряющей системы и обслуживающие его цепи обратной связи по пучку являются ключевой технологической системой протонного синхротрона У-70 ГНЦ ИФВЭ (г. Протвино Московской обл.). Данная система обеспечивает:

1) собственно синхрофазотронный режим ускорения – циклическое резонансное ускорение пучка по орбите постоянного радиуса;

2) демпфирование продольных ошибок инжекции по фазе и импульсу для предотвращения необоснованного увеличения продольного фазового объема пучка;

3) сильное подавление продольной когерентной неустойчивости синфазных дипольных колебаний сгустков.

В ходе выполнения программы по модернизации протонного синхротрона У-70 был создан новый цифровой задающий генератор, обладающий расширенными функциональными возможностями. После его ввода в эксплуатацию возникла потребность в детальном изучении работы систем обратной связи, отладке на пучке и выработке практических рекомендаций по их оптимальной настройке. Результаты этих исследований излагаются в настоящей работе.

### 2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

#### 2.1. Электроника

Упрощенная структурная схема цепей обратной связи по пучку, осуществляющих управление частотой ускорения в У-70, показана на рис. 1.

Передаточные функции фазового  $G_P(\Omega)$  и радиального  $G_R(\Omega)$  контуров обратной связи в разомкнутом состоянии определяются соотношениями:

$$G_P(\Omega) = \frac{1}{\Omega_0} \frac{\delta\omega_{RF}(\Omega)}{\delta\varphi(\Omega)}; \quad \delta\varphi = \delta\varphi_B - \delta\varphi_V; \quad (1)$$

$$G_R(\Omega) = \frac{1}{-i\Omega} \frac{\delta\omega_{RF}(\Omega)}{\delta\varphi_B(\Omega)} = -\frac{D_x}{\eta\omega_{RF}} \frac{\delta\omega_{RF}(\Omega)}{\delta R(\Omega)}. \quad (2)$$

Здесь  $\delta\omega_{RF}$  – поправка к угловой радиочастоте (частоте ускорения);  $\delta\varphi_B$  и  $\delta\varphi_V$  – переменные составляющие фазы центра тяжести сгустка и фазы ускоряющего в.ч.-напряжения соответственно;  $\Omega_0$  – циклическая частота малых синхротронных колебаний;  $\Omega$  – частота преобразования Фурье (циклическая);  $\eta = \alpha - \gamma^{-2}$  – фактор скольжения частоты обращения, где  $\alpha$  – коэффициент расширения орбит,  $\gamma$  – релятивистский фактор;  $D_x$  – горизонтальная дисперсионная функция в месте размещения радиального датчика;  $\delta R$  – амплитуда радиального смещения центра тяжести пучка в этом датчике.

При переходе через критическую энергию  $\gamma_t = \alpha^{-1/2}$  изменяется знак  $\eta$ . При этом электроника должна изменить знак передаточной функции  $\delta\omega_{RF}/\delta R$  (2).

#### 2.2. Пучок

Передаточная функция пучка  $Y(\Omega)$  имеет вид

$$Y(\Omega) = \frac{\delta\varphi_B(\Omega)}{\delta\varphi_V(\Omega)} = \frac{\Phi}{1 - (\Omega/\Omega_0)^2}, \quad (3)$$

где  $\Phi$  есть форм-фактор сгустка.

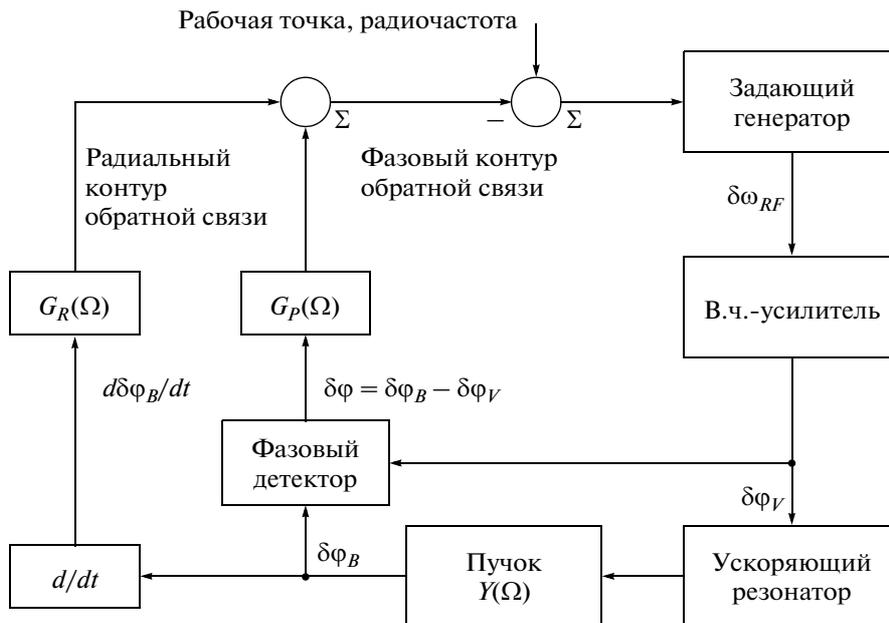


Рис. 1. Схема управления частотой ускорения в синхротроне У-70.

Передаточная функция  $Y$  и форм-фактор  $\Phi$  определяются с помощью уравнения Власова. Форм-фактор зависит от градиента функции распределения частиц  $F(a)$  по амплитудам  $a$  продольных колебаний [1]:

$$\Phi = \int_0^{\pi B} \left( -\frac{dF(a)}{da} \right) J_1(a) a da; \quad \int_0^{\pi B} F(a) a da = 1. \quad (4)$$

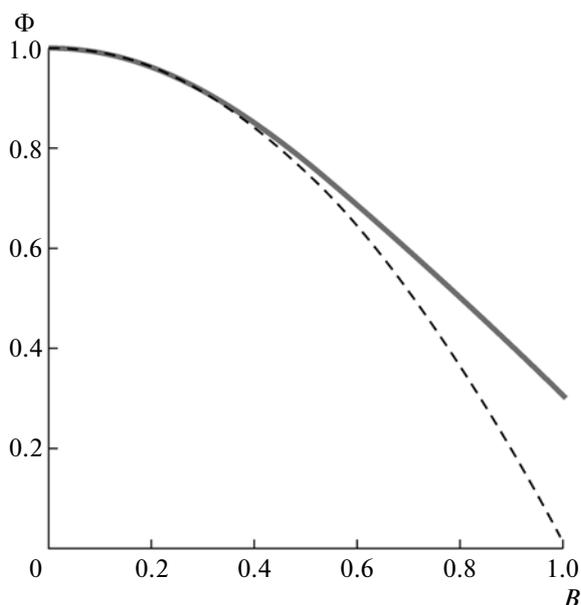


Рис. 2. Расчетные кривые форм-фактора сгустка: сплошная кривая – по формуле (6), штриховая – по формуле (7).

Здесь  $J_1(a)$  – функция Бесселя 1-го порядка;  $B = \Delta\varphi_B/2\pi$  – фактор группировки пучка, где  $\Delta\varphi_B$  – полный фазовый размер сгустка по основанию распределения;  $\Phi \rightarrow 1$  при  $B \rightarrow 0$ .

Равенство  $\Phi = 1$  соответствует точечным сгусткам. Это идеализация, недостижимая на практике. Поэтому полагаем, что всегда  $\Phi < 1$ .

Из формулы (4) видно, что  $\Phi > 0$  для сгустков с монотонно спадающими функциями  $F(a)$ . Таковыми являются все реалистичные функции распределения.

Возможно эквивалентное представление для форм-фактора  $\Phi$ , более удобное при обработке экспериментальных результатов:

$$\Phi = \int_{-\pi B}^{\pi B} \rho(\varphi_B + \varphi) \cos \varphi d\varphi; \quad \int_{-\pi B}^{\pi B} \rho(\varphi_B + \varphi) d\varphi = 1, \quad (5)$$

где  $\rho(\varphi)$  есть линейная плотность сгустка по фазе.

Пусть  $\rho(\varphi)$  имеет вид отрезка перевернутой параболы с центром в точке  $\varphi_B$ . Тогда

$$\Phi = \frac{3}{(\pi B)^2} \left( \frac{\sin \pi B}{\pi B} - \cos \pi B \right). \quad (6)$$

График этой функции представлен на рис. 2 (сплошная линия). К такому же результату приводит расчет форм-фактора по формуле (4) для эллиптического распределения по амплитудам  $F(a) \propto ((\pi B)^2 - a^2)^{1/2}$ .

Для плотно сгруппированного пучка

$$\Phi = 1 - \frac{\pi^2}{10} B^2 \cong 1 - B^2. \quad (7)$$

График квадратичной аппроксимации для функции  $\Phi$  также представлен на рис. 2 (штриховая кривая). В У-70 фактор  $B < 0.5-0.6$ . Поэтому в практических оценках допустимо использовать приближение (7).

### 3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Характеристическое уравнение для представленной на рис. 1 системы в замкнутом состоянии имеет вид

$$1 + i \frac{G_p(\Omega)}{\Omega/\Omega_0} [Y(\Omega) - 1] + G_R(\Omega) Y(\Omega) = 0. \quad (8)$$

Его корни определяют собственные частоты (моды) колебаний системы. Система устойчива (нет самовозбуждения), если для всех мод  $\text{Im} \Omega < 0$ .

Звенья  $G_p(\Omega)$  и  $G_R(\Omega)$  являются фильтрами нижних частот (ф.н.ч.). Их полосы пропускания должны перекрывать весь практически интересный диапазон частот. Этот диапазон будет определен ниже с учетом пока неизвестных собственных частот системы – корней уравнения (8).

В качестве исходного приближения допустим, что функции  $G_p(\Omega)$ ,  $G_R(\Omega)$  имеют достаточно высокие частоты среза. Представим их вещественными коэффициентами усиления (с учетом знака), приняв:

$$G_p(\Omega) = K_p; \quad G_R(\Omega) = K_R. \quad (9)$$

Введем безразмерную комплексную частоту колебаний  $z = \Omega/\Omega_0$ . Тогда вместо уравнения (8) получим кубическое алгебраическое уравнение

$$P_3(z) = z^3 - iK_p z^2 - (1 + K_R \Phi)z + iK_p(1 - \Phi) = 0. \quad (10)$$

Существуют три собственные моды колебаний системы с безразмерными частотами  $z_1, z_2$  и  $z_3$ , зависящими от выбора коэффициентов  $K_p, K_R$  и от форм-фактора  $\Phi$  (длины сгустка).

#### 3.1. Общие свойства нулей

Из вида уравнения (10) можно установить следующие общие свойства собственных частот.

1. По формулам Виета:

$$z_1 z_2 z_3 = -iK_p(1 - \Phi); \quad (11)$$

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = -(1 + K_R \Phi); \quad (12)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = iK_p. \quad (13)$$

Использование этих равенств оказывается удобным техническим приемом для получения приближенных корней характеристического уравнения.

2. Из равенства  $P_3(z_k|K_p) = 0$  следует  $P_3(z_k^*|-K_p) = 0$ , где звездочка означает комплексное сопряжение. Поэтому смена знака у  $K_p$  радикально изменяет поведение моды  $z_k$  – затухание переходит в нарастание и наоборот. При  $K_p = 0$  все собственные моды имеют нулевые декременты.

3. Из равенства  $P_3(z_k) = 0$  следует  $P_3(-z_k^*) = 0$ . Собственные частоты всегда существуют парами, удовлетворяющими условию  $z = -z^*$ . Поскольку собственных частот всего три, то это либо три чисто мнимые частоты, либо одна чисто мнимая, а две другие частоты – комплексные, различающиеся только знаком своих реальных частей.

С учетом отмеченных свойств комплексно-сопряженной симметрии нулей равенству (13) можно придать смысл “правила суммы декрементов”:

$$\text{Im} z_1 + \text{Im} z_2 + \text{Im} z_3 = K_p. \quad (14)$$

Таким образом, общий масштаб демпфирования в системе определяется фазовым контуром ( $K_p$ ). Радиальный контур ( $K_R$ ) и передаточная функция пучка ( $Y \propto \Phi$ ) только перераспределяют декременты между собственными модами.

#### 3.2. Критерий Рауса–Гурвица

Подстановкой  $z = iu$  левая часть уравнения (10) преобразуется в полином с вещественными коэффициентами. Анализ локализации его корней можно провести с помощью критерия Рауса–Гурвица [2]. Система устойчива (все нули  $z_{1,2,3}$  в нижней полуплоскости) при условиях:

$$K_p < 0; \quad (15)$$

$$1 + K_R > 0; \quad (16)$$

$$0 < \Phi < 1, \quad (17)$$

выполнение которых всегда предполагается в дальнейшем.

Размыкание радиального контура (выбор  $K_R = 0$ ) не приводит к потере устойчивости.

Из неравенств (16), (17) также следует, что  $1 + K_R \Phi > 0$ . Этот положительный коэффициент часто встречается в дальнейших расчетах.

Условие (17) выполнено для сгустков, представляющих практический интерес (смотри комментарии к формуле (4)).

#### 3.3. Ноль третьего порядка

Это особый вариант настройки системы, выявляющий типичные функциональные связи между  $K_p, K_R$  и  $\Phi$ .

Предположим, что происходит тройное вырождение собственных мод (ноль третьего порядка уравнения (10)), и потребуем выполнения равенства  $z_1 = z_2 = z_3$ . Подставив это равенство в формулы Виета (11)–(13), видим, что его выполнение возможно при следующих условиях:

$$\frac{1 + K_R \Phi}{1 - \Phi} = 9; \quad (18)$$

$$K_p = \pm 3\sqrt{3(1 - \Phi)} = \pm \sqrt{3(1 + K_R \Phi)} = \pm \frac{1 + K_R \Phi}{\sqrt{3(1 - \Phi)}}. \quad (19)$$

В этом случае

$$z_{1,2,3} = i \frac{K_p}{3} = \pm i \sqrt{\frac{1 + K_R \Phi}{3}} = \pm i \sqrt{3(1 - \Phi)}. \quad (20)$$

Система устойчива для  $K_p < 0$ , но равномерная по модам скорость демпфирования приемлема только для достаточно длинных сгустков (правое равенство в (20)).

Для коротких сгустков практический интерес представляет область аperiodических затухающих мод (чисто мнимые корни  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  в нижней полуплоскости) при больших, чем в (19), величинах  $|K_p|$ .

В уравнениях (19) и (20) используются два способа параметризации зависимости решения от  $K_p$ ,  $K_R$  и  $\Phi$ . Вторая (после знака равенства) запись типична для решений характеристического уравнения в области малых значений  $|K_p(1 - \Phi)|$ , а третья – в области больших значений  $|K_p|$ .

Граница между этими областями проходит вблизи точки тройного вырождения частот. Далее рассмотрим каждую из перечисленных областей по отдельности.

### 3.4. Решение для малых значений $|K_p(1 - \Phi)|$

Сначала отбросим свободный член в уравнении (10) и получим решение нулевого приближения:

$$z_{1,20} = i \frac{K_p}{2} \pm \sqrt{1 + K_R \Phi - \frac{K_p^2}{4}}; \quad (21)$$

$$z_{30} = 0. \quad (22)$$

В работе [1] было рассмотрено только такое приближение. Однако его недостаточно для обоснования практических рекомендаций по настройке систем обратной связи в задающем генераторе У-70.

Поскольку  $z_{10}z_{20} = -(1 + K_R \Phi)$  и выполнено равенство (11), то вместо (22) получаем уточненную оценку для  $z_3$ :

$$z_3 = i K_p \frac{1 - \Phi}{1 + K_R \Phi} \equiv i K_p \varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{1 - \Phi}{1 + K_R \Phi} > 0. \quad (23)$$

В свою очередь, для корней из выражения (21) также потребуются поправки, восстанавливающие свойство (13) и удовлетворяющие равенствам (12), (13) в обсуждаемом порядке малости (с невязкой  $O(\varepsilon^2)$ ):

$$z_{1,2} = i \frac{K_p}{2} (1 - \varepsilon) \pm \sqrt{1 + K_R \Phi - \frac{K_p^2}{4} (1 + \varepsilon)^2}. \quad (24)$$

Обе моды  $z_{1,2}$  становятся аperiodическими после смены знака дискриминанта в (24), т.е. при условии

$$|K_p| \geq \frac{2}{1 + \varepsilon} \sqrt{1 + K_R \Phi}. \quad (25)$$

Знак равенства соответствует нулю второй кратности:

$$z_{1,2} = i \operatorname{sgn} K_p \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \sqrt{1 + K_R \Phi}. \quad (26)$$

### 3.5. Идентификация собственных мод

Полученные приближенные решения (23), (24) характеристического уравнения позволяют провести физическую идентификацию мод  $z_{1,2}$  и  $z_3$ .

Моды  $z_{1,2}$  при разомкнутой обратной связи являются свободными синхротронными колебаниями сгустка как целого, происходящими с частотами  $z_{1,2} = \pm 1$ . При замыкании обратной связи эти моды становятся быстрыми. Характерные времена их движения могут быть заметно меньше периода синхротронных колебаний ( $|z_{1,2}| \gg 1$ ). Это возможно только тогда, когда моду представляет разностный сигнал фазовой ошибки  $\delta\varphi = \delta\varphi_B - \delta\varphi_V$ . Его затухание или колебание происходят за счет быстрого изменения последнего слагаемого  $-\delta\varphi_V$ . Эти моды не обременены физическим перемещением материального объекта – сгустка ( $\delta\varphi_B$ ) – относительно фазы  $\varphi$  виртуального внешнего опорного колебания (“внешних часов”). Движение сгустка по фазе  $\varphi$  может идти не быстрее периода синхротронных колебаний.

Мода  $z_3$  является медленной (позже увидим, что всегда  $|z_3| < 1$ ). Она обнуляет ошибку  $\delta\varphi_B$ , медленно приводя пучок и ускоряющее напряжение к предписанной рабочей точке ( $\delta\omega_{RF}$ ,  $\delta\varphi_V$ ,  $\delta\varphi_B$ ,  $\delta R$ ) = 0. Сигналом статической (для  $\Omega \rightarrow 0$ ) ошибки является разность между сдвигом фазы синусоидального ускоряющего поля  $\delta\varphi_V$  и следующим за ним, но меньшим по величине движением фазы центра тяжести сгустка  $\delta\varphi_B$ . Этот сигнал пропорционален разности  $(1 - \Phi) \cong B^2$  и физически не может наблюдаться для точечных сгустков. Для них нарушается статическая устойчивость системы в замкнутом состоянии, что проявляется как склонность к “уходу рабочей точки” – появлению не исчезающего постоянного остаточного сдвига (смещения) в  $\delta R$ ,  $\delta\omega_{RF}$  и линейного по  $t$  скольжения фаз  $\delta\varphi_V$ ,  $\delta\varphi_B$  относительно виртуальной опорной фазы  $\varphi$ .

### 3.6. Решение для больших значений $|K_p|$

Сначала найдем два корня из области малых  $|z|$ . Для этого в уравнении (10) отбросим  $z^3$  и оставим только доминирующие (по предположению) слагаемые  $\propto K_p, K_R$ . В итоге получим

$$z_{2,3} = i \frac{1 + K_R \Phi}{2 K_p} \pm \sqrt{1 - \Phi - \left( \frac{1 + K_R \Phi}{2 K_p} \right)^2}. \quad (27)$$

Произведение  $z_2 z_3 = -(1 - \Phi)$ . Тогда из равенства (11) получим оценку для оставшейся быстрой моды в виде  $z_{10} = i K_p$ . Вычтем из нее поправку, вытекающую из требования (13) и суммы  $z_2 + z_3$  (27). В результате придем к искомому приближенному решению

$$z_1 = iK_p - i \frac{1 + K_R \Phi}{K_p}. \quad (28)$$

Нумерация нулей обеспечивает непрерывное продолжение ветвей решений (21), (23). Это станет ясно из дальнейшего изложения (см. рис. 3).

Переход мод  $z_{2,3}$  в апериодический режим происходит при условии

$$|K_p| \leq \frac{1 + K_R \Phi}{2 \sqrt{1 - \Phi}}. \quad (29)$$

Знак равенства соответствует нулю второй кратности:

$$z_{2,3} = i \operatorname{sgn} K_p \sqrt{1 - \Phi}. \quad (30)$$

### 3.7. Сшивка приближенных решений

Одновременное существование трех чисто мнимых корней (апериодических мод) требует непротиворечивости неравенств (25) и (29). Это возможно при условии

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1 + K_R \Phi}{1 - \Phi} \geq 14. \quad (31)$$

Знак равенства должен был бы соответствовать точке тройного вырождения. Из сравнения с точным решением (18) видно, что полученная оценка вполне достоверна.

Кроме того, приближенные решения правильно воспроизводят вид функциональной связи между коэффициентами усиления (сравни (19) с (25) и (29)) и масштаб величины вырожденных собственных частот (сравни (20) с (26) и (30)).

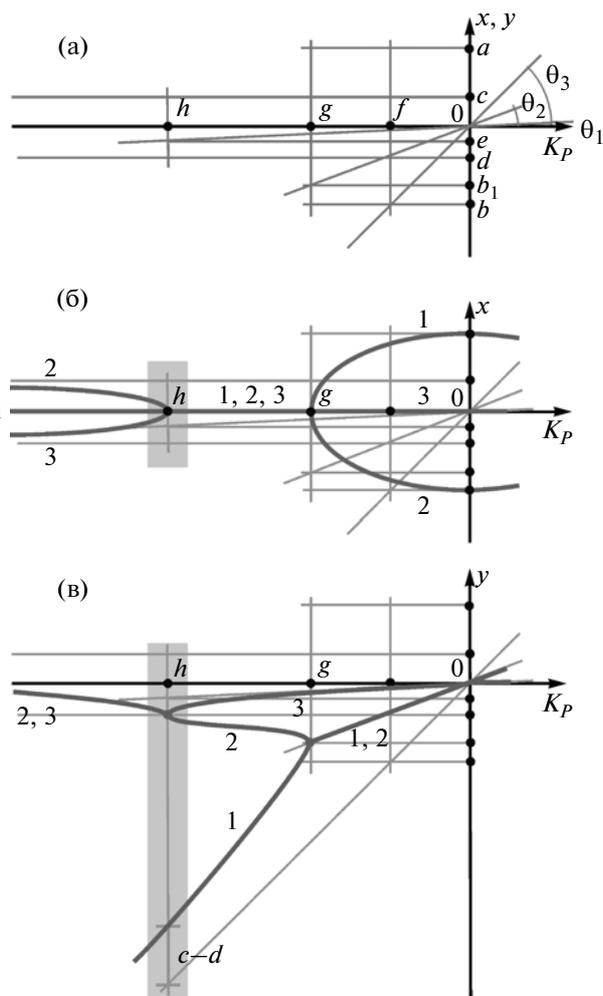
## 4. КАРТА НУЛЕЙ

Знания аналитических свойств корней вообще и полученных приближенных решений в частности достаточно для построения графоаналитической карты нулей характеристического уравнения. На основе ее анализа формулируются практические рекомендации по выбору характеристик систем обратной связи.

Карты нулей строятся на плоскостях  $(K_p, x)$  и  $(K_p, y)$ , где  $z = x + iy$ . Внешними параметрами являются коэффициент  $K_R$  и форм-фактор сгустка  $\Phi$ . В силу (15) интерес представляет левая полуплоскость  $K_p \leq 0$ . Далее предполагается выполнение условия (31).

На рис. 3а построена естественная координатная сетка с опорными точками и линиями асимптот, зависящими от  $K_R$  и  $\Phi$ . Соответствующие функциональные зависимости приведены в таблице. Точный численный расчет карты нулей лишь несущественно изменяет числовые множители в формулах, приведенных в этой таблице. Топология карты нулей при этом не изменяется.

На рис. 3б показан вид зависимости  $x(K_p) = \operatorname{Re}z(K_p)$ , характеризующей колебательное по-



**Рис. 3.** Карта нулей на полуплоскости  $K_p < 0$ : а – естественная координатная сетка с опорными точками и линиями асимптот (см. таблицу); б – зависимость  $x(K_p) = \operatorname{Re}z(K_p)$ , характеризующая колебательное поведение собственных мод; в – зависимость  $y(K_p) = \operatorname{Im}z(K_p)$ , характеризующая декременты затухания собственных мод. Цифры 1, 2, 3 – номера собственных мод.

ведение собственных мод, а на рис. 3в – вид зависимости  $y(K_p) = \operatorname{Im}z(K_p)$ , характеризующей декременты затухания собственных мод.

### 4.1. Рабочая точка и полосы пропускания звеньев

Практический интерес представляет выбор параметров системы в окрестности точки  $h$  (залито фоном). В этом случае целевыми параметрами для настройки становятся:

$$K_p = -\frac{1 + K_R \Phi}{2 \sqrt{1 - \Phi}} < -7\sqrt{1 - \Phi} \quad (32)$$

и собственные частоты:

$$z_1 = iK_p + 2i\sqrt{1 - \Phi}; \quad z_{2,3} = -i\sqrt{1 - \Phi}. \quad (33)$$

Опорные точки и асимптотики карты нулей

	Ординаты		Абсциссы	Наклоны асимптот
$a, b$	$\pm\sqrt{1+K_R\Phi}$	$f$	$-\sqrt{1+K_R\Phi}$	$0 < \operatorname{tg}\theta_1 = \varepsilon = \frac{1-\Phi}{1+K_R\Phi} < \frac{1}{14}$
$b_1$	$-\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\sqrt{1+K_R\Phi}$	$g$	$-\frac{2}{1+\varepsilon}\sqrt{1+K_R\Phi}$	$\frac{13}{28} < \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{1-\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{2}$
$c, d$	$\pm\sqrt{1-\Phi}$	$h$	$-\frac{1}{2}\frac{1+K_R\Phi}{\sqrt{1-\Phi}}$	$\operatorname{tg}\theta_3 = 1$
$e$	$-\frac{1}{2}\sqrt{1-\Phi}$			

Частоты среза звеньев  $G_P(\Omega)$  и  $G_R(\Omega)$  (оба ф.н.ч.) должны удовлетворять условиям:

$$\Omega_P > \Omega_0 |z_1| = \Omega_0 |K_P + 2\sqrt{1-\Phi}|; \quad (34)$$

$$\Omega_R > \Omega_0 |z_{2,3}| = \Omega_0 \sqrt{1-\Phi} \cong \Omega_0 B. \quad (35)$$

Тогда инерционность этих звеньев не будет препятствовать расчетной динамике собственных мод, а исходное приближение (9) окажется оправданным. Здесь учтено, что на вход звена  $G_R(\Omega)$  поступает только сигнал медленных мод  $z_{2,3}$ , пропускаемый передаточной функцией пучка  $Y(\Omega)$  (см. рис. 1).

Для практических оценок неравенство (34) достаточно заменить более сильным:

$$\Omega_P > \Omega_0 |K_P| = \left| \frac{\delta\omega_{RF}}{\delta\varphi} \right|. \quad (36)$$

В правую часть этого уравнения входит коэффициент усиления электроники фазового контура. Формально он имеет размерность частоты (циклической). Для выбранной конфигурации электроники нет практического смысла устанавливать его номинал выше числовых значений частоты среза  $\Omega_P$ . Такой выбор уже не будет приводить к увеличению декремента для быстрой моды  $z_1$  (насыщение) и никак не повлияет на демпфирование медленных мод  $z_{2,3}$ .

## 5. РАДИАЛЬНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПУЧКА

Устойчивость системы (рис. 1) в замкнутом состоянии является необходимым условием обеспечения ее работоспособности. Дальнейший выбор коэффициентов усиления  $K_R$  и  $K_P$  в цикле ускорения преследует цель подавления ошибки в среднем радиусе орбиты пучка.

Специфика ускорения в У-70, подлежащая учету, состоит в переходе через критическую энергию  $\gamma_i = \alpha^{-1/2}$ .

Остаточная ошибка  $\delta R_0$  регулирования среднего радиуса  $R_0$  орбиты пучка в протонном синхротроне имеет вид [3]

$$\delta R_0 = -Q_R \frac{\alpha R_0}{\eta} \left( \frac{\delta\omega_{RF}^{(0)}}{\omega_{RF}} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\delta\langle H \rangle^{(0)}}{\langle H \rangle} \right), \quad (37)$$

где  $\delta\omega_{RF}^{(0)}$  и  $\delta\langle H \rangle^{(0)}$  есть сторонние (внешние) ошибки частоты ускорения и среднего по орбите ведущего магнитного поля соответственно.

Пучок вращается по орбите постоянного радиуса ( $\delta R_0 = 0$ ), когда вариации частоты  $\delta\omega_{RF}^{(0)}$  и поля  $\delta\langle H \rangle^{(0)}$  согласованы между собой, что дает нулевое значение последнего множителя в (37). Так происходит при выполнении идеальной программы “магнитное поле–радиочастота”. Отклонения от нее приводят к радиальным уходам орбиты.

Множитель  $Q_R = Q_R(z)$  в правой части уравнения (37) является радиальной передаточной функцией системы в замкнутом состоянии. Он характеризует стабилизирующую (следящую) роль изучаемых цепей обратной связи при осуществлении синхрофазотронного режима ускорения по орбите постоянного радиуса.  $Q_R(z)$  является дробно-рациональной функцией безразмерной частоты  $z$  и определяется как

$$Q_R(z) = \frac{z(z^2 - 1)}{P_3(z)}. \quad (38)$$

Характеристический многочлен  $P_3(z)$  записан в уравнении (10);  $Q_R(z) \rightarrow 1$  при  $|z| \rightarrow \infty$ .

При разомкнутых обратных связях  $Q_R(z) = 1$ . При их замыкании ожидается, что  $|Q_R(z)| < 1$ , по крайней мере, в некоторой полосе нижних частот.

Из (37) видно, что при разомкнутых обратных связях (т.е. для  $Q_R(z) = 1$ ) вблизи  $\gamma_i$  проявляется опасная тенденция к росту сторонней (внешней) ошибки по радиусу  $\delta R_0^{(0)} \propto \eta^{-1}$ . Это может потребовать выполнения программы “магнитное поле–радиочастота” с точностью, трудно достижи-

мой на практике из-за неконтролируемых пульсаций ведущего магнитного поля.

Постоянная времени кольцевого электромагнита У-70 равна 5.8 с. Поэтому присутствуют только низкочастотные пульсации ведущего магнитного поля, а особый практический интерес представляет поведение  $Q_R(z)$  в области нижних частот.

Передаточная функция  $Q_R(z)$  имеет нули первой кратности на частотах свободных синхротронных колебаний  $z = \pm 1$  и на частоте  $z = 0$  постоянной составляющей сигнала. Для малых  $|z|$  в числителе и знаменателе выражения (38) можно оставить только линейные функции  $z$ . Тогда получим низкочастотную дробно-линейную аппроксимацию передаточной функции:

$$Q_R(z) = \frac{1}{1 + K_R\Phi} \left( \frac{z}{z - iK_p\epsilon} \right), \quad (39)$$

где параметр  $\epsilon$  определен в (23). Это частотная характеристика реализуемого дифференцирующего звена первого порядка с частотой перегиба

$$\Omega_{DC} = -\Omega_0 K_p \epsilon = -\frac{\delta\omega_{RF}}{\delta\phi} \epsilon, \quad (40)$$

имеющей физический смысл полуширины полосы заграждения вблизи  $z = 0$ . Предпочтителен выбор больших отрицательных коэффициентов усиления  $\delta\omega_{RF}/\delta\phi$  в фазовом контуре.

Для сгустков с  $B < 0.5-0.6$  в области  $|z| \leq 1$

$$\max |Q_R(z)| \cong \frac{1}{1 + K_R\Phi}, \quad (41)$$

причем координата максимума находится вблизи точки  $z_{DC} = \Omega_{DC}/\Omega_0$ .

Пример графика амплитудно-частотной характеристики  $|Q_R(z)|$  показан на рис. 4. Используются параметры  $B = 0.2$ ,  $K_R = 4.2$  и  $K_p = -12.6$ , соответствующие рабочей точке (32), (33). В этом случае  $z_{DC} = (1 - \Phi)^{1/2}/2 \cong B/2$ .

Для очень коротких сгустков (в том числе, вблизи  $\gamma_t$ ) форм-фактор  $\Phi \rightarrow 1$  и поэтому

$$\Omega_{DC} \propto \epsilon \propto (1 - \Phi) \rightarrow 0; \quad (42)$$

$$\max |Q_R(z)| = \frac{1}{1 + K_R} \rightarrow |Q_R(0)|,$$

что является признаком потери статической устойчивости замкнутой системы.

В выражениях (41) и (42) фактор подавления для медленных ошибок среднего радиуса орбиты определяется вещественным коэффициентом

$$1 + K_R\Phi = 1 - \frac{D_x}{\eta\omega_{RF}} \frac{\delta\omega_{RF}}{\delta R} \Phi > 0. \quad (43)$$

Этот коэффициент изменяется  $\propto \eta^{-1}$ , и потому блокирует сторонние уходы радиуса  $\delta R_0^{(0)} \propto \eta^{-1}$  при пересечении  $\gamma_t$ .

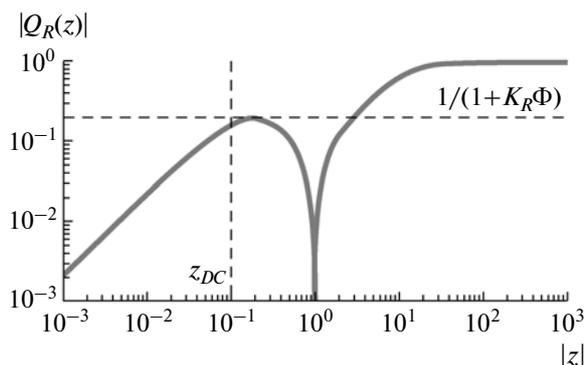


Рис. 4. График амплитудно-частотной характеристики радиальной передаточной функции.

Критическую энергию  $\gamma_t$  следует проходить при ненулевых (больших) коэффициентах усиления  $|\delta\omega_{RF}/\delta R|$  в радиальном контуре.

Таким образом, радиальный контур обратной связи играет ведущую роль в системе задающего генератора синхротрона У-70 при ускорении. Коэффициент усиления  $K_p$  в фазовом контуре выбирается в зависимости от коэффициента  $K_R$  в радиальном контуре. Используется область вблизи точки  $h$  или (при наличии аппаратных ограничений) внутри отрезка  $[h; g]$  на карте нулей на рис. 3.

## 6. РАСЧЕТНЫЕ РЕЖИМЫ РАБОТЫ В У-70

### 6.1. Числовые примеры

Сначала приведем числовой пример для вводного плато синхротрона У-70. Пусть на нем система настроена на режим тройного вырождения собственных мод. Фактор группировки пучка  $B = 0.5$  и форм-фактор сгустка  $\Phi = 0.75$ . Из формул (18) и (19) получим  $K_R = 1.67$  и  $K_p = -2.60$ . Частота синхротронных колебаний  $\Omega_0 = 2\pi \cdot 1.3$  кГц. Согласно (1) и (9), требуется, чтобы  $\delta\omega_{RF}/\delta\phi = -2\pi \cdot 59$  Гц/градус. Для  $\eta = -0.160$ ,  $D_x = 2.66$  м и  $\omega_{RF} = 2\pi \cdot 5.52$  МГц из (2) и (9) получим  $\delta\omega_{RF}/\delta R = +2\pi \cdot 553$  Гц/мм. Из формул (34), (35) вытекает ограничение на частоты среза:  $\Omega_p > 2\pi \cdot 1.1$  кГц,  $\Omega_R > 2\pi \cdot 0.65$  кГц.

Теперь рассмотрим выводное плато синхротрона У-70. Пусть на нем используется режим двойного вырождения медленных мод (точка  $h$  на рис. 3). Выберем  $\delta\omega_{RF}/\delta\phi = -2\pi \cdot 20$  Гц/градус (определяется полосой пропускания цепей обратной связи). Частота синхротронных колебаний  $\Omega_0 = 2\pi \cdot 0.11$  кГц. Согласно (1) и (9), получим  $K_p = -10.4$ . Фактор группировки пучка  $B = 0.1$  и форм-фактор сгустка  $\Phi = 0.99$ . Из формулы (32) следует, что требуется  $K_R = 1.1$ . Для  $\eta = 0.011$ ,  $D_x = 2.66$  м и  $\omega_{RF} = 2\pi \cdot 6.06$  МГц из (2) и (9) получим  $\delta\omega_{RF}/\delta R = -2\pi \cdot 27$  Гц/мм. Из (36), (35) вытекает требование на частоты среза:  $\Omega_p > 2\pi \cdot 1.1$  кГц,

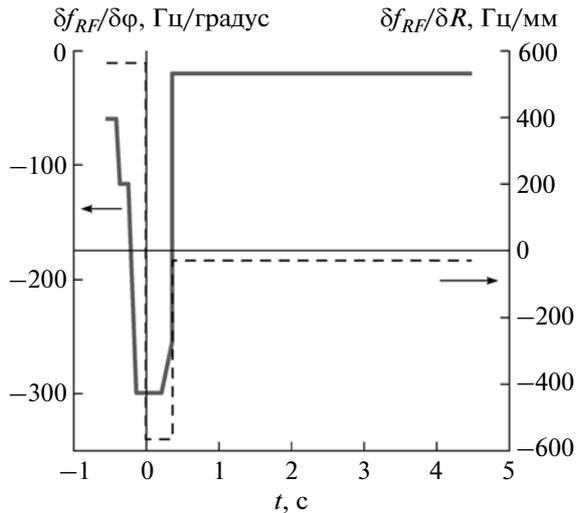


Рис. 5. Изменение коэффициентов усиления в цикле У-70: в радиальном контуре (штриховая кривая) и фазовом контуре (сплошная кривая). Используется обозначение  $f_{RF} = \omega_{RF}/2\pi$ .

$\Omega_R > 2\pi \cdot 11$  Гц. Для левой части неравенства (31) получаем значение 208.3, что  $>14$ , т.е. неравенство (31) выполняется.

Подобные расчеты можно провести в каждой точке цикла ускорения в У-70.

### 6.2. Законы изменения коэффициентов

На рис. 5 показано изменение в цикле ускорения в У-70 коэффициентов усиления  $\delta\omega_{RF}/\delta R$  в радиальном контуре и  $\delta\omega_{RF}/\delta\phi$  в фазовом контуре. Время  $t = 0$  соответствует моменту перехода через критическую энергию  $\gamma_t$ . Представленные зависимости имеют следующие особенности.

1. На вводном плато магнитного поля, где сгустки еще достаточно длинные, выбран режим (20) тройного вырождения собственных мод с  $\delta\omega_{RF}/\delta R = +2\pi \cdot 553$  Гц/мм и  $\delta\omega_{RF}/\delta\phi = -2\pi \cdot 59$  Гц/градус.

2. Начало ускорения, переход через критическую энергию и дальнейшее ускорение вплоть до  $t = 0.354$  с происходят с постоянным коэффициентом  $|\delta\omega_{RF}/\delta R| = 2\pi \cdot 553$  Гц/мм. Знак  $\delta\omega_{RF}/\delta R$  изменяется с положительного на отрицательный при критической энергии. Выбор коэффициента  $\delta\omega_{RF}/\delta\phi$  обеспечивает режим двойного вырождения (33), за исключением участка в окрестности  $\gamma_t$  с насыщением на уровне  $2\pi \cdot 300$  Гц/градус.

3. Для  $t > 0.354$  с также выбран режим двойного вырождения (33) с  $\delta\omega_{RF}/\delta R = -2\pi \cdot 27$  Гц/мм. Ему соответствует практически постоянный коэффициент  $\delta\omega_{RF}/\delta\phi = -2\pi \cdot 20$  Гц/градус. Его величина ограничена доступной полосой пропускания каналов обратной связи (масштаба 1 кГц по уровню  $-3$  дБ).

При необходимости можно построить и использовать иные пары согласованных между собой графиков ( $\delta\omega_{RF}/\delta\phi(t)$ ,  $\delta\omega_{RF}/\delta R(t)$ ).

## 7. ОПИСАНИЕ ОБОРУДОВАНИЯ

С осени 2009 г. в протонном синхротроне У-70 ГНЦ ИФВЭ используется новый задающий генератор ускоряющей системы. В основе его работы лежит принцип прямого цифрового синтеза радиочастоты (частоты ускорения)  $\omega_{RF}/2\pi$  в диапазоне 4.0–6.5 МГц с дискретностью установки 0.36 Гц.

Цифровой задающий генератор создан на базе промышленного модуля цифровой обработки сигналов XDSP-3PCM [4]. В состав модуля входит программируемая логическая интегральная схема Xilinx семейства Virtex-E и четыре встроенных канала аналого-цифровых АЦП (разрядность 12 бит) и цифроаналоговых ЦАП (14 бит) преобразователей.

Структурная схема задающего генератора показана на рис. 6. Минимально возможная сторонняя ошибка регулирования (см. правую часть уравнения (37)) устанавливается по внешним сигналам скорости изменения магнитного поля (вход  $dH/dt$ ) и функционального генератора коррекции программы “магнитное поле–радиочастота” (вход  $Ext$ ). Входы  $\Delta\phi$  и  $\Delta R$  используются для замыкания рассматриваемых контуров фазовой и радиальной обратной связи по пучку. Амплитудные и фазовые частотные характеристики этих каналов могут быть произвольно установлены в полосе 0–100 кГц по классической схеме п.и.д.-регулятора (пропорционального, интегрирующего, дифференцирующего).

Законы изменения коэффициентов усиления в цепях обратной связи по циклу ускорения формируются программным путем в цифровой аппаратуре задающего генератора. На рис. 7 показано окно экрана управляющей программы, устанавливаемой требуемый закон усиления в фазовом контуре. График в окне воспроизводит закон  $\delta\omega_{RF}/\delta\phi$  в фазовом контуре (см. рис. 5) (сигнал инвертирован).

Таким же образом выбираются законы изменения коэффициента усиления в радиальном контуре.

Конструктивно задающий генератор выполнен на основе управляющего промышленного компьютера iROBO-2000, представляющего собой 19-дюймовый каркас высотой 4U, на задней панели которого установлены разъемы для входных и выходных сигналов. Управляющий компьютер используется для организации интерфейса с оператором и записи необходимых параметров в аппаратуру. В нем установлены платы: интерфейса RS-485, модуля ввода цифровых син-

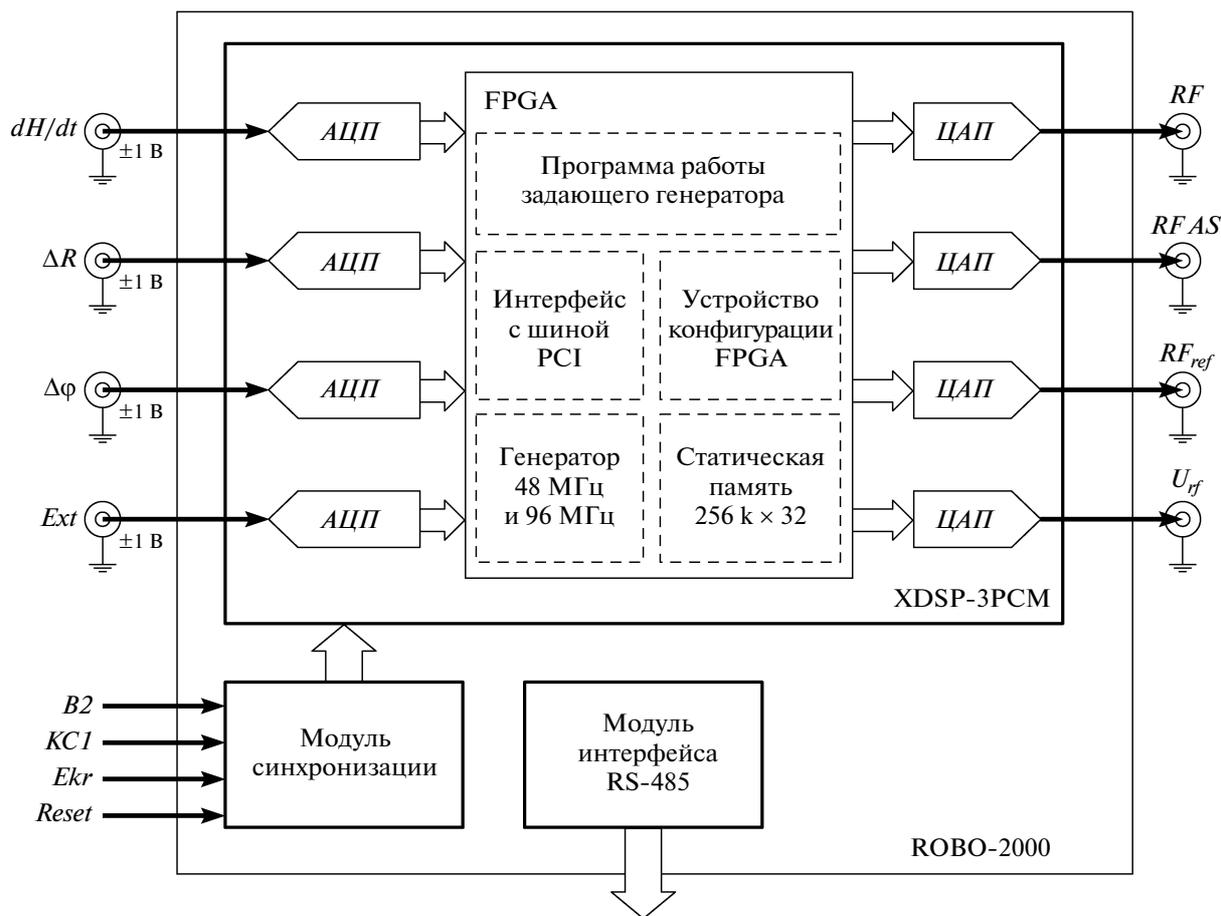


Рис. 6. Структурная схема задающего генератора У-70.

хросигналов MDS и модуля цифровой обработки сигналов XDSP-3PCM.

В качестве фазового и радиального датчиков пучка используются разрезные электростатические электроды, расположенные в 114-м и 120-м прямолинейных промежутках магнитной структуры У-70. (Эти электроды также входят в состав системы измерения искажений замкнутой орбиты.)

Измерение фазы пучка основано на принципе квадратурного детектирования суммарного сигнала с электродов. Отсчеты фазового датчика нормируются на интенсивность пучка, измеряемую с помощью индукционного датчика тока.

Для измерения радиального положения пучка используется разностный сигнал с электродов, нормированный на их суммарный сигнал.

### 8. ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА ПУЧКЕ

На рис. 8 приведены осциллограммы цикла ускорения протонного пучка в синхротроне У-70, полученные во время весеннего (2012 г.) сеанса работы. Энергия 1.3–50 ГэВ. Длительность развертки 4 с. Лучи нумеруются сверху вниз.

Первый луч – интенсивность пучка, измеренная с помощью индукционного датчика тока. Производится ввод 12 сгустков. Интенсивность  $2 \cdot 10^{12}$  протонов в цикле (задана потребностями физического эксперимента).

Второй луч – сигнал пикового детектора тока пучка, обратно пропорциональный фазовому размеру сгустка  $\Delta\phi_B$ . Максимум сигнала (компрессия сгустков) соответствует моменту перехода через критическую энергию.

Третий луч – переменная часть разностного сигнала  $\delta\phi = \delta\phi_B - \delta\phi_V$  между фазой центра тяжести сгустка и фазой ускоряющего в.ч.-напряжения, измеренная с помощью фазового детектора. Фазовый контур обратной связи замыкается после ввода второго сгустка.

Четвертый луч – сигнал радиального положения пучка  $\delta R$ . Радиальный контур обратной связи замыкается в начале ускорения (вертикальный маркер в центре графика). В момент перехода через критическую энергию  $\gamma_c$  возможен скачок наблюдаемого сигнала. Он вызван технологическим изменением знака передаточной функции  $\delta\omega_{RF}/\delta R$  (2) и пропорционален удвоенной ошибке поло-

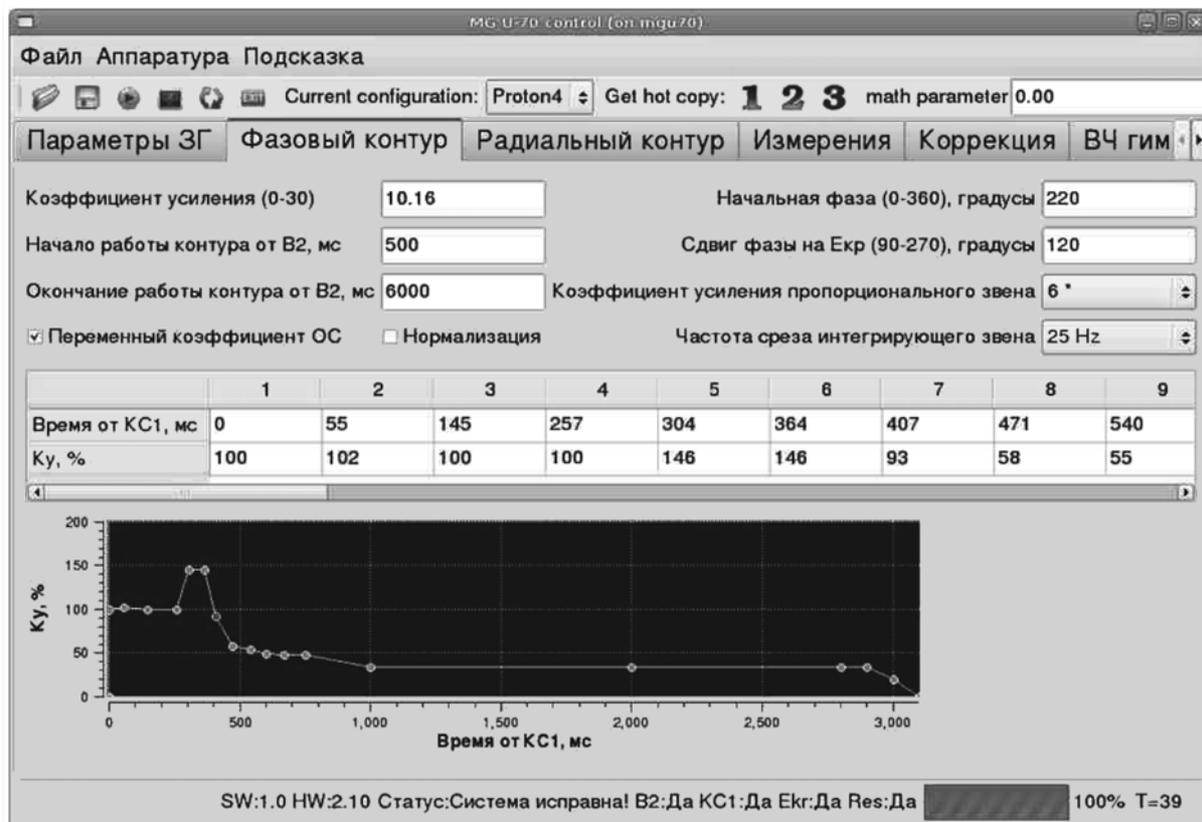


Рис. 7. Окно программы, управляющей коэффициентом усиления в фазовом контуре.

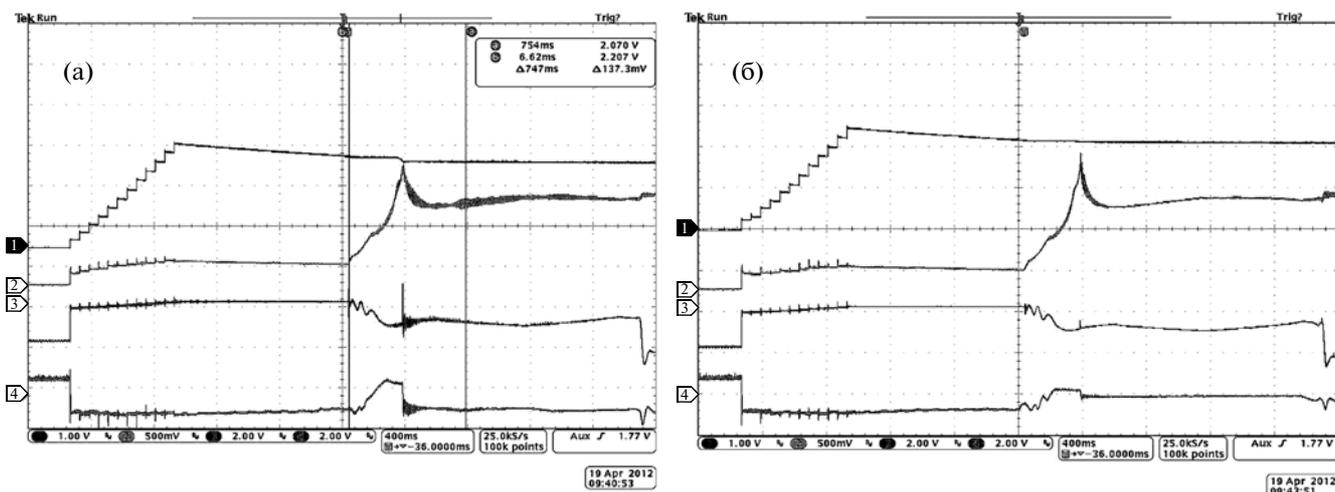


Рис. 8. Осциллограммы цикла ускорения протонного пучка в синхротроне У-70 при постоянных (а) и переменных (б) коэффициентах усиления в цепях обратной связи. Описание лучей см. в тексте (раздел 8).

жения пучка в радиальном датчике. На рис. 8б такая радиальная ошибка практически отсутствует.

Осциллограммы на рис. 8а получены при постоянных (в цикле) коэффициентах усиления в фазовом и радиальном контурах обратной связи. На рис. 8б эти коэффициенты изменяются по за-

конам, показанным на рис. 5. В результате улучшается качество контроля параметров ускоряемого пучка: отсутствуют дипольные колебания пучка (пульсации третьего и четвертого лучей) после перехода через  $\gamma_r$  и колебания длины сгустков (пульсации второго луча), исчезает ступенька

на кривой интенсивности при  $\gamma_t$  (первый луч), свидетельствующая о частичной потере интенсивности пучка.

Система динамического изменения коэффициентов усиления в цепях обратной связи в системе задающего генератора ускоряющей системы синхротрона У-70 используется в режиме опытной эксплуатации с 2010 г.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обоснована методика расчета параметров фазовой и радиальной обратной связи по пучку в задающем генераторе ускоряющей системы протонного синхротрона У-70 ГНЦ ИФВЭ. Корректность методики подтверждена в экспериментах с протонным пучком. Созданы предпосылки для

полного использования расширенных функциональных возможностей, предоставляемых новым цифровым задающим генератором. Они позволяют лучше сохранить продольный фазовый объем пучка при ускорении и увеличить интенсивность пучка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов С.В., Лебедев О.П.* // ПТЭ. 2002. № 5. С. 6; Препринт ИФВЭ ОУ У-70 2001-46. Протвино, 2001.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1978.
3. *Коломенский А.А., Лебедев А.Н.* Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962.
4. <http://www.setdsp.ru/>