ОКЕАНОЛОГИЯ, 2017, том 57, № 3, с. 381–388

ФИЗИКА МОРЯ

УДК 551.465

ВОЛНОВЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ У ПОВЕРХНОСТИ И ДНА

© 2017 г. Г. М. Резник

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

e-mail: greznikmd@yahoo.com

Поступила в редакцию 05.08.2016 г.

В работе исследуются т.н. волновые пограничные слои, возникающие в ограниченной стратифицированной жидкости на больших временах. Каждый такой слой представляет собой узкую область в окрестности поверхности и/или дна, характеризующуюся резкими растущими со временем вертикальными градиентами плавучести и горизонтальной скорости. Слои возникают как результат свободной линейной волновой эволюции начальных полей, если начальная плавучесть зависит на границах от горизонтальных координат. Построено асимптотическое решение, описывающее динамику погранслоя на больших временах, и показано, что это решение неплохо описывает точное решение уже на сравнительно небольших временах.

DOI: 10.7868/S0030157417020174

1. ВВЕДЕНИЕ

Волновые пограничные слои в геофизических задачах до сих пор рассматривались при описании эволюции волн Россби в бассейнах, ограниченных боковыми границами [1–3, 7–9]. В этих задачах пограничный слой возникает около западной границы и представляет собой узкую область, ширина которой стремится с ростом времени к нулю, а поперечные градиенты некоторых характеристик – к бесконечности. В настоящей работе мы показываем, что похожие пограничные слои существуют в невращающейся стратифицированной жидкости, связаны они с внутренними волнами и сосредоточены у дна и/или поверхности жидкого слоя. В § 2 дается постановка задачи, в § 3 получается ее точное решение в виде разложений по вертикальным волновым модам. В § 4 находится асимптотическое решение задачи на больших временах (в "духе" [2, 3]), а в § 5 это решение сравнивается с точным решением, полученным в § 2. Параграф 6 содержит обсуждение результатов. Вывод некоторых формул дается в Приложении.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим слой непрерывно стратифицированной жидкости постоянной глубины H, заключенный между двумя твердыми крышками $z = 0$, $-H$ (рис. 1). В линейном приближении система описывается уравнениями

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{e}_z b = -\nabla p,\ \ b_t - N^2 w = 0,\ \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{(1а–в)}$$

с граничными условиями непротекания и начальными условиями:

$$w\big|_{z=0,-H} = 0;\ \ (u, v, b)_{t=0} = (u_I, v_I, b_I). \qquad \text{(2а, б)}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – скорость с компонентами u, v, w, направленными вдоль осей x, y, z соответственно; $b = g\rho/\rho_0$ – плавучесть; ρ/ρ_0, p – отклонения плотности и давления от их гидростатических профилей, отнесенные к характерной плотности ρ_0; N – частота плавучести; $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ – орты вдоль соответствующих осей; индексом I здесь и ниже обозначаются начальные поля.

Система (1) сохраняет вертикальную компоненту завихренности:

$$\Omega^z = v_x - u_y = \Omega_I^z = v_{Ix} - u_{Iy}; \qquad (3)$$

и, в силу (1б), (2), плавучесть на границах $z = 0, -H$:

$$b\big|_{z=0,-H} = b_I\big|_{z=0,-H}. \qquad (4)$$

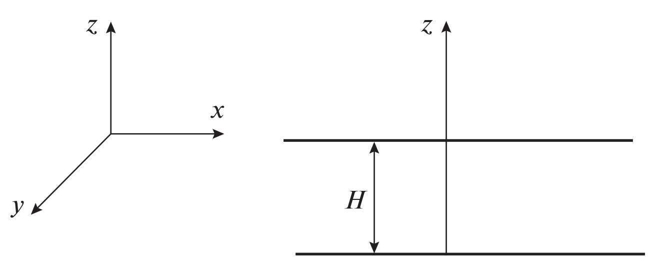

Рис. 1. Схематическое изображение стратифицированного слоя.

Поведение решения для u, v, b на больших временах t существенно зависит от структуры полей $b_I\big|_{z=0,-H}$. Вычислим, например, средние по времени поля $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{p}$, $\overline{b}$, где

$$\overline{a} = \lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} a\,dt. \tag{5}$$

Из (1), (3) находим:

$$\begin{gathered}\overline{p}_x = \overline{p}_y = 0,\ \ \overline{p}_z = -\overline{b},\ \ \overline{w} = 0,\\ \overline{u}_x + \overline{v}_y = 0,\ \ \overline{v}_x - \overline{u}_y = v_{Ix} - u_{Iy}.\end{gathered} \tag{6а–д}$$

Очевидно, что в случае, когда

$$\nabla_2 b_I\big|_{z=0,-H} \neq 0,\ \ \nabla_2 = \mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y \tag{7а, б}$$

граничное условие (4) не согласуется с уравнениями (6а, 6б), из которых следует, что $\nabla_2\overline{b} = 0$. Кроме того, при условии (7) вертикальные градиенты горизонтальных скоростей растут линейно по времени в окрестностях границ, поскольку из (1а) и (4) следует, что

$$(u_z, v_z)_{z=0,-H} = t\nabla_2(b_I)_{z=0,-H} + (u_{Iz}, v_{Iz})_{z=0,-H}. \tag{8}$$

В силу (8) $(\overline{u}_z, \overline{v}_z)_{z=0,-H} = \infty$, что, очевидно, не согласуется с уравнениями (6г, 6д), согласно которым $\overline{u}, \overline{v}$ единственным образом определяются начальными полями u_I, v_I. Эти особенности указывают, что при больших t в близких окрестностях границ решения для u, v, b имеют погранслойную структуру, когда, например, около $z = 0$ плавучесть b на больших временах представляется как

$$b = b(x, y, zt), \tag{9}$$

где правая часть стремится к нулю при любом $z < 0$, $t \to \infty$, но $b(x, y, 0) \neq 0$.

Цель настоящей работы состоит в исследовании этой структуры.

3. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ВЕРТИКАЛЬНЫМ ВОЛНОВЫМ МОДАМ

Рассмотрим сначала задачу для вертикальной скорости w (см., например, [5]), которая сводится к уравнению

$$\Delta w_{tt} + N^2\Delta_2 w = 0, \tag{10}$$

решаемому при условиях непротекания (2а) и начальных условиях

$$\begin{gathered}(w, w_t)_{t=0} = (w_I, \dot{w}_I),\\ w_I = -\int_{-H}^{z}(\partial_x u_I + \partial_y v_I)dz.\end{gathered} \tag{11а, б}$$

Здесь $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$, $\Delta_2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$; начальное поле $\dot{w}_I$ в (11а) выражается через b_I (см. Приложение).

Решение задачи (10), (11) хорошо известно (см., например, [5]). Скорость w записывается в виде Фурье-интеграла

$$w = \int \hat{w}(\boldsymbol{\kappa}, z, t)e^{i(kx+ly)}d\boldsymbol{\kappa},\ \ \boldsymbol{\kappa} = (k, l); \tag{12}$$

для Фурье-амплитуды $\hat{w}$ получаем:

$$\begin{gathered}(\hat{w}_{zz} - \kappa^2\hat{w})_{tt} - \kappa^2N^2\hat{w} = 0,\\ \hat{w}\big|_{z=0,-H} = 0,\ \ (\hat{w}, \hat{w}_t)_{t=0} = (\hat{w}_I, \hat{\dot{w}}_I).\end{gathered} \tag{13а–в}$$

Шапочка здесь и ниже обозначает соответствующую Фурье-амплитуду. Решение для $\hat{w}$ записывается в виде разложения по собственным функциям G_n задачи Штурма-Лиувилля

$$G_{zz} - \kappa^2 G = -\lambda\kappa^2N^2G,\ \ G\big|_{z=0,-H} = 0; \tag{14а, б}$$

$$\hat{w} = \sum_{n=1}^{\infty}[\hat{w}_{In}\cos(\sigma_n t) + (\hat{\dot{w}}_{In}/\sigma_n)\sin(\sigma_n t)]G_n(z, \kappa). \tag{15}$$

Здесь λ_n – n-е собственное значение задачи (14), $\hat{w}_{In}$, $\hat{\dot{w}}_{In}$ – коэффициенты разложения $\hat{w}_I$, $\hat{\dot{w}}_I$,

$$\begin{gathered}(\hat{w}_{In}, \hat{\dot{w}}_{In}) = \frac{1}{\|G_n\|}\int_{-H}^{0}(\hat{w}_I, \hat{\dot{w}}_I)N^2G_n dz,\\ \|G_n\| = \int_{-H}^{0}N^2G_n^2dz,\end{gathered} \tag{16а, б}$$

$\sigma_n = 1/\sqrt{\lambda_n}$ – частота n-ой вертикальной моды.

Решение для плавучести удобно записать в виде:

$$\hat{c} = \sum_{n=1}^{\infty}[\hat{c}_{In}\cos(\sigma_n t) + (\hat{w}_{In}/\sigma_n)\sin(\sigma_n t)]G_n(z, \kappa), \tag{17а}$$

где $c = b/N^2$ – нормированная плавучесть, и

$$\hat{c}_{In} = \frac{1}{\|G_n\|}\int_{-H}^{0}\hat{c}_I N^2G_n dz. \tag{17б}$$

Задача для c в безразмерной форме приводится ниже в § 4 (см. уравнения (24)).

Фурье-амплитуды $\hat{u}$, $\hat{v}$ горизонтальных скоростей можно представить в виде:

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (\hat{\hat{u}}, \hat{\hat{v}}) + (\hat{\tilde{u}}, \hat{\tilde{v}}),\ \ (\hat{\tilde{u}}, \hat{\tilde{v}}) = i(k, l)\,\hat{w}_z/\kappa^2, \tag{18а, б}$$

где $(\hat{\bar{u}}, \hat{\bar{v}})$ – Фурье-амплитуды стационарных компонент $(\bar{u}, \bar{v})$, определяемых из (6г, 6д). Дифференцируя ряд (15) по z, находим:

$$(\hat{\tilde{u}}, \hat{\tilde{v}}) = \frac{i(k,l)}{\kappa^2} \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{w}_{In} \cos(\sigma_n t) + \\ + (\hat{\dot{w}}_{In}/\sigma_n) \sin(\sigma_n t)] G_{nz}(z, \kappa). \quad (19)$$

В дальнейшем для простоты ограничимся случаем $N = N_0 = \text{const}$, когда

$$\lambda_n = \frac{1}{N_0^2}\left(1 + \frac{n^2\pi^2}{\kappa^2 H^2}\right), \quad \sigma_n = \frac{N_0 \kappa H}{\sqrt{\kappa^2 H^2 + n^2\pi^2}}, \\ G_n = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin \frac{n\pi z}{H}. \quad (20\text{а–в})$$

Нетрудно проверить интегрированием по частям в (16), что в силу условий

$$(w_I, \dot{w}_I)_{z=0,-H} = 0 \quad (21)$$

коэффициенты $\hat{w}_{In}, \hat{\dot{w}}_{In}$ быстро затухают с ростом n:

$$\hat{w}_{In} = O(n^{-3}), \quad \hat{\dot{w}}_{In} = O(n^{-3}), \quad n \to \infty. \quad (22)$$

Поскольку $\sigma_n = O(n^{-1}), n \to \infty$, ряд (15) сходится абсолютно и равномерно в области $[-H \le z \le 0] \times [0 \le t \le \infty]$. Соответственно, скорость w является гладкой функцией z в любой момент t.

Для плавучести (17) ситуация несколько иная. Если $b_I|_{z=0,-H} = 0$, то $\hat{c}_{In} = O(n^{-3})$, $n \to \infty$, т.е. ряд (17) сходится абсолютно и равномерно и плавучесть, подобно w, является гладкой функцией z в любой момент t.

Однако в случае (7) имеем (см. Приложение):

$$\hat{c}_{In} = O(n^{-1}), \quad n \to \infty. \quad (23)$$

При этом ряд (17а) сходится при любом фиксированном t, но, в отличие от (15), вообще говоря, не является абсолютно и равномерно сходящимся в $[-H \le z \le 0] \times [0 \le t \le \infty]$. Любая частичная сумма этого ряда имеет нулевое среднее (5) и не имеет "погранслойной" формы (9). Это означает, что нестационарный пограничный слой, развивающийся на больших временах у дна и поверхности, возникает как результат совместного действия низкочастотных волновых гармоник в разложении (17а) с большими вертикальными номерами, $1 \ll n \le \infty$.

Похожая ситуация имеет место и для горизонтальных скоростей $\hat{\tilde{u}}, \hat{\tilde{v}}$. Производная собственной функции $G_{nz} = O(n)$, $n \to \infty$ (см. (20в)), поэтому в силу (22) ряды (19) сходятся абсолютно и равномерно в области $[-H \le z \le 0] \times [0 \le t \le T_0]$, где T_0 – произвольное конечное время, но не в области $[-H \le z \le 0] \times [0 \le t \le \infty]$.

4. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Представления типа (15), (17), (19) плохо приспособлены для описания быстро меняющихся в пространстве погранслойных структур: вертикальный масштаб изменений n-ой частичной суммы ряда не может быть меньше H/n (см., например, (20в)) при любых временах. Здесь мы применяем метод, предложенный и использованный в работах [2, 3, 8] для изучения волн Россби в ограниченном бассейне. Рассмотрим, например, задачу для нормированной плавучести c, которая просто следует из (1):

$$\Delta c_{tt} + N^2 \Delta_2 c = 0, \quad c|_{z=0,-1} = c_I|_{z=0,-1}, \\ (c, c_t)_{t=0} = (c_I, w_I); \quad (24\text{а–в})$$

уравнения (24) записаны в безразмерной форме с использованием масштабов длины H и времени $1/N$. Введем новую переменную

$$C = \frac{1}{t}\int_0^t c\,dt, \quad c = (tC)_t. \quad (25\text{а, б})$$

Смысл C в том, что вклад быстро осциллирующей части поля c в C становится пренебрежимо малым на больших временах $t \gg 1$, как это просто следует из (17а). В дальнейшем мы будем называть поле c мгновенным, а поле C – осредненным; аналогично для других физических величин. В терминах C задача (24) принимает вид

$$\Delta C_{tt} + \frac{2}{t}\Delta C_t + \Delta_2 C = \frac{1}{t}\Delta w_I, \\ C|_{z=0,-1} = c_I|_{z=0,-1}; \quad (26\text{а, б})$$

начальные условия на больших временах предполагаются несущественными, N для простоты берется постоянным.

Рассмотрим задачу (26) на больших временах. Вне пограничного слоя вертикальный масштаб одного порядка с глубиной и решение здесь ищется в следующем виде:

$$C = \frac{1}{t} C_1(x, y, z) + \frac{1}{t^2} C_2(x, y, z) + \ldots \quad (27)$$

Подстановка (27) в (26а) дает:

$$\Delta_2 C_1 = \Delta w_I. \quad (28)$$

Вообще говоря, C_1/t не удовлетворяет граничным условиям (26б); эта невязка исправляется пограничными слоями в узких окрестностях у границ. Решение около $z = 0$ ищется в виде следующего разложения:

$$C = D_0(x, y, \xi) + \frac{1}{t} D_1(x, y, \xi) + \ldots, \quad \xi = -zt, \quad (29)$$

где ξ – погранслойная растянутая переменная.

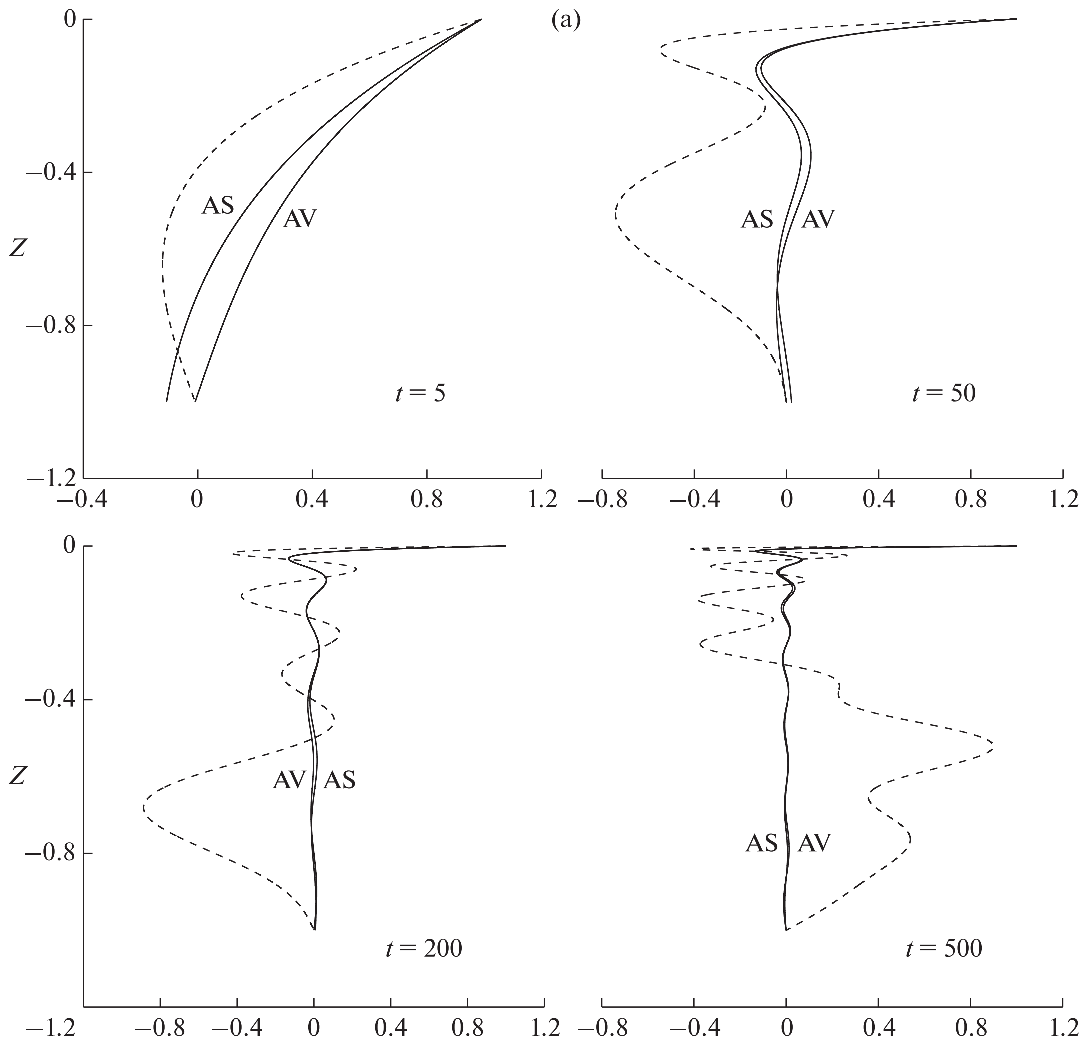

Рис. 2. Вертикальные профили Фурье-амплитуд физических полей в различные моменты времени. Мгновенные профили изображены пунктиром, сплошными линиями – асимптотические (AS) и точные (AV) профили осредненных полей; $N = \mathrm{const}$, $\kappa = 1$. (а) – Плавучесть $\hat{b}$; (б) – производная вертикальной скорости $\hat{w}_z$; (в) – вертикальная скорость $\hat{w}$.

В нулевом порядке получаем уравнение

$$\xi^2 D_0^{(4)} + 6\xi D_0^{(3)} + 6D_0'' + \Delta_2 D_0 = 0, \qquad (30)$$

где верхние индексы обозначают дифференцирование по ξ. Функция D_0 должна удовлетворять граничным условиям

$$D_0|_{\xi=0} = c_I|_{z=0}; \quad D_0 \to 0, \quad \xi \to \infty. \qquad (31а, б)$$

Соответствующие уравнения для Фурье-амплитуды $\hat{D}_0$ записываются как:

$$\begin{gathered} \xi^2 \hat{D}_0^{(4)} + 6\xi \hat{D}_0^{(3)} + 6\hat{D}_0'' - \kappa^2 \hat{D}_0 = 0; \\ \hat{D}_0|_{\xi=0} = \hat{c}_I|_{z=0}; \quad \hat{D}_0 \to 0, \quad \xi \to \infty. \end{gathered} \qquad (32а–в)$$

Решение задачи (32) имеет вид [4]:

$$\hat{D}_0 = \frac{\hat{c}_I|_{z=0}}{\sqrt{\kappa\xi}} J_1(2\sqrt{\kappa\xi}); \qquad (33)$$

здесь и ниже J_n обозначает функцию Бесселя n-го порядка.

Нестационарные компоненты горизонтальных скоростей определяются вертикальной производной w_z (см., например, (18б)). Из (1б), (25) находим:

$$W_z = \frac{1}{t}\int_0^t w_z dt = C_{zt} + \frac{1}{t}C_z - \frac{c_{Iz}}{t}, \qquad (34)$$

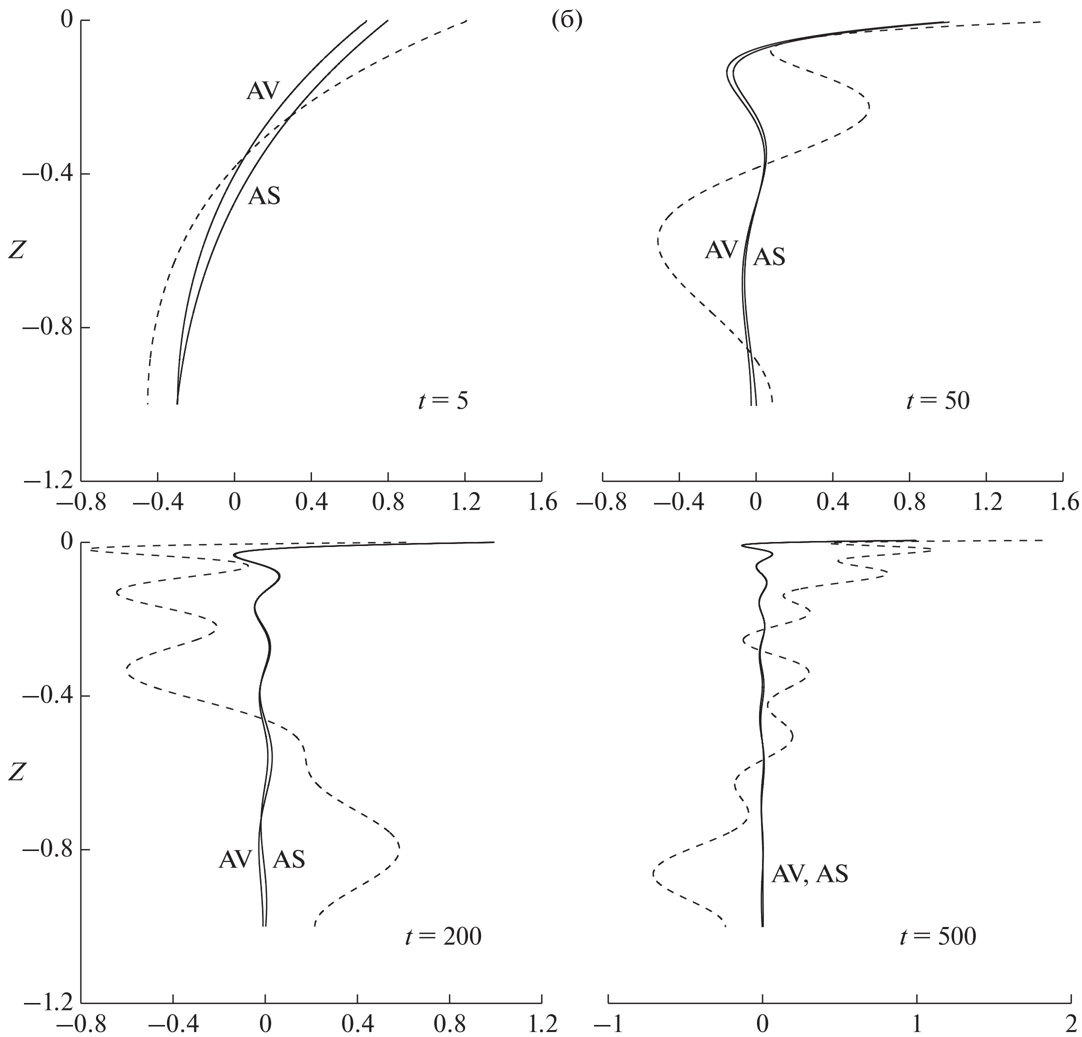

Рис. 2. (Продолжение.)

откуда с учетом (29), (33) следует, что амплитуда Фурье функции (34) с точностью до малых равна

$$\hat{W}_z = \frac{\kappa \hat{c}_I|_{z=0}}{\sqrt{\kappa\xi}} J_1(2\sqrt{\kappa\xi}) - \frac{\hat{c}_{Iz}}{t}. \qquad (35)$$

Пограничный слой у дна $z = -H$ анализируется таким же образом.

5. СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ И ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Для подтверждения справедливости асимптотик (33), (35) и оценки скорости выхода решения на асимптотический режим были проведены численные эксперименты с начальными условиями:

$$u_I = v_I = 0, \quad b_I = \exp[i(kx + ly)](z + 1). \qquad (36)$$

Условия (36) записаны для системы (1), (2), представленной в безразмерном виде с использованием масштабов времени $1/N_0$, длины H, скорости U, плавучести N_0U, и давления HUN_0. Очевидно, условия (36) описывают отдельную Фурье-гармонику по горизонтальным координатам. Соответственно, решение для w, b ищется в виде:

$$w = \hat{w}(z,t)\exp[i(kx + ly)], \quad b = \hat{b}(z,t)\exp[i(kx + ly)]. \qquad (37а, б)$$

В случае постоянного N функция $\hat{w}$ является решением следующей задачи (ср. (13)):

$$(\hat{w}_{zz} - \kappa^2\hat{w})_{tt} - \kappa^2\hat{w} = 0, \quad \hat{w}|_{z=0,-1} = 0, \quad (\hat{w}, \hat{w}_t)_{t=0} = (\hat{w}_I, \hat{w}_I), \qquad (38а–в)$$

$$\hat{w}_I = 0, \quad \hat{w}_I = \frac{\mathrm{sh}[\kappa(z+1)]}{\mathrm{sh}\,\kappa} - (z+1). \qquad (38г, д)$$

Поскольку плотность обращается в нуль на дне (при $z = -1$), пограничный слой существует только у поверхности $z = 0$.

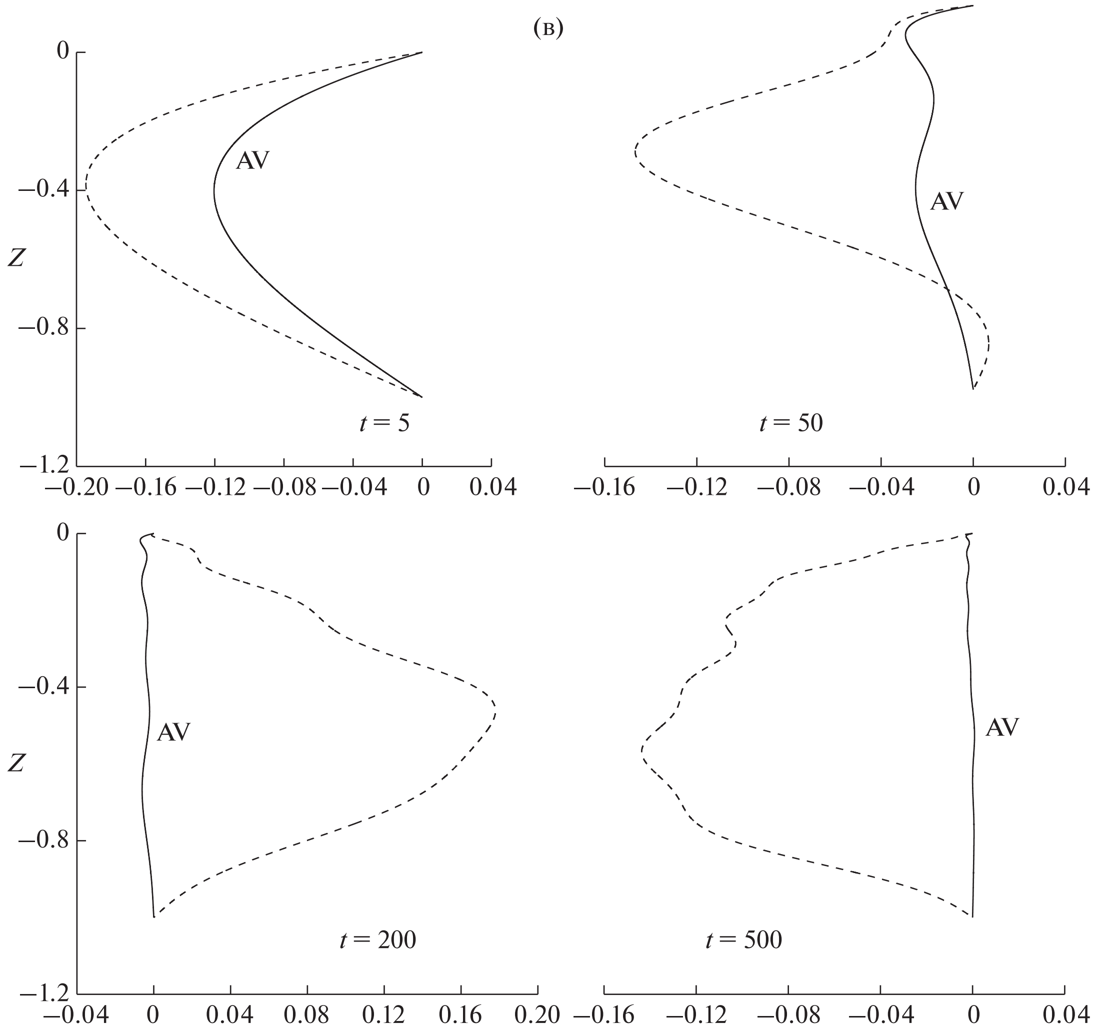

Рис. 2. (Окончание.)

Представляя $\hat{w}_I$ в виде ряда

$$\hat{w}_I = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{In} \sin n\pi z, \quad \hat{w}_{In} = \frac{2\sigma_n^2}{n\pi}, \quad \sigma_n = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + n^2\pi^2}}, \tag{39а, б, в}$$

находим из (15) соответствующее разложение дли $\hat{w}$:

$$\hat{w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sigma_n}{n\pi} \sin \sigma_n t \sin n\pi z. \tag{40}$$

Поскольку $\sigma_n/n \sim n^{-2}, n \to \infty$, ряд (40) можно дифференцировать по z, и для производной $\hat{w}_z$, определяющей горизонтальные скорости, имеем:

$$\hat{w}_z = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sin \sigma_n t \cos n\pi z. \tag{41}$$

Решение для $\hat{b}$ находится из (1б) и (40):

$$\hat{b} = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - \cos\sigma_n t) \sin n\pi z. \tag{42}$$

Используя (41), (42), мы можем определить осредненные поля $\hat{C}, \hat{W}_z$:

$$\hat{W}_z = \frac{1}{t}\int_0^t \hat{w}_z dt = \frac{2}{t}\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \cos\sigma_n t)\cos n\pi z, \tag{43}$$

$$\hat{C} = \frac{1}{t}\int_0^t \hat{b} dt = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1 - \frac{\sin\sigma_n t}{\sigma_n t}\right)\sin n\pi z. \tag{44}$$

Цель численных экспериментов – сравнить точные осредненные поля (43), (44) с их асимптотическими представлениями (33), (35) и поведением мгновенных полей (40)–(42). Результаты расчетов для $\kappa = 1$ в различные моменты времени представлены на рис. 2. Пунктиром изображены профили мгновенных полей $\hat{c}$, $\hat{w}_z$, сплошными линиями – асимптотические (AS) и точные (AV) профили осредненных полей $\hat{C}$, $\hat{W}_z$. Рисунки демонстрируют, что асимптотики (33), (35) неплохо описывают точные поля уже при $t = 5$, мало отличаются от них при $t = 50$, и практически неотличимы от точных осредненных полей при $t = 200$ и далее. Видно, что осредненные поля действительно имеют погранслойную структуру, все сильнее поджимаясь к верхней границе с течением времени и стремясь к нулю внутри области в соответствии с рассмотренным выше асимптотическим решением. Этот процесс сопровождается сильным ростом вертикальных градиентов плавучести и горизонтальной скорости ($\hat{u}, \hat{v} \sim \hat{w}_z$) вблизи поверхности. Мгновенные профили со временем не затухают и становятся все более и более изрезанными, причем максимальные вертикальные градиенты (еще более резкие, чем в осредненных полях) развиваются в окрестности верхней границы. Для сравнения на рис. 2в приведены мгновенные и осредненные профили вертикальной скорости (40), в которых элементы погранслойной структуры практически отсутствуют.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы показали, что при линейном свободном развитии достаточно общих начальных полей в стратифицированном невращающемся слое жидкости на больших временах у поверхности и/или дна возникают узкие пограничные слои. При $t \to \infty$ толщина такого погранслоя стремится к нулю, а вертикальные градиенты плавучести и горизонтальной скорости – к бесконечности. В свою очередь, большие вертикальные градиенты горизонтальных скоростей могут приводить к сильному перемешиванию и неустойчивости у поверхности и/или дна.

Для описания этих структур мы применили специальные переменные, впервые введенные в [2, 3] для описания вынужденных волн Россби – осредненные по времени поля. Сопоставляя асимптотические решения на больших временах с точными разложениями по волновым модам, мы показали, что каждый такой пограничный слой состоит из бесконечного числа мод внутренних волн с большими вертикальными номерами $n \gg 1$. Именно поэтому мы назвали эти пограничные слои волновыми пограничными слоями.

Волновые пограничные слои в этой и других работах [2, 3, 8, 10] возникают благодаря существованию предельной точки в частотном спектре, когда частота волны стремится к конечному пределу при стремлении волнового числа к бесконечности. В нашем случае предельная частота равна нулю, а под волновым числом подразумевается вертикальное волновое число (горизонтальное волновое число фиксировано). Ключевой факт состоит в том, что фазовая и групповая скорости волн с большими волновыми числами здесь имеют разные знаки (похоже, это типичная ситуация в присутствии предельной точки). Можно сказать, что граница, колеблющаяся с предельной частотой, порождает очень короткие волны с фазовой скоростью, направленной от границы, и групповой скоростью, направленной к границе. Такие волновые пакеты не могут убежать далеко от границы и с течением времени формируют пограничный слой.

Аналитическая часть работы (разделы 1–4) выполнялась при поддержке РНФ (проект № 14-50-00095), численные эксперименты (раздел 5) – при поддержке РФФИ (проект № 14-05-00070-а).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для определения начального поля $\dot{w}_I$ через b_I выразим сначала p_I через b_I из уравнений

$$\Delta p_I = -b_{Iz}, \quad p_{Iz}\big|_{z=0,-1} = b_I\big|_{z=0,-1}, \qquad (\text{П1а, б})$$

которые просто следуют из системы (1), записанной в безразмерном виде с масштабами, введенными в § 5. Зная p_I, находим $\dot{w}_I$ из уравнения движения по вертикали в (1а):

$$\dot{w}_I = -p_{Iz} - b_I. \qquad (\text{П2})$$

В случае b_I, задаваемой (36), из (П1) находим:

$$p_I = \left[\frac{1}{\kappa^2} - \frac{\operatorname{ch}[\kappa(z+1)]}{\kappa \operatorname{sh} \kappa}\right] \exp[i(kx + ly)]. \qquad (\text{П3})$$

Подставляя (П3) и (36) в (П2), приходим к (38д).

Оценка (23) получается интегрированием по частям. При $N = \text{const}$ имеем:

$$\hat{c}_{In} = \sqrt{\frac{2}{H}} \int_{-H}^{0} \hat{c}_I \sin(n\pi z/H) dz = \\ = -\frac{\sqrt{2H}}{n\pi}\left[\hat{c}_I\big|_{z=0} - (-1)^n \hat{c}_I\big|_{z=-H}\right] + O(n^{-2}). \qquad (\text{П4})$$

При $N \neq \text{const}$ эта оценка также справедлива; чтобы показать это, необходимо использовать асимптотики величин G_n, λ_n для больших n (см., например, [6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т. 2. М.: Мир, 1986. 415 с.
2. *Ильин А.М.* Об асимптотике решения одной краевой задачи // Матем. заметки. 1970. Т. 8. № 3. С. 273–284.
3. *Ильин А.М.* О поведении решения одной краевой задачи при $t \to \infty$ // Матем. сборник. 1972. Т. 87(129). № 4. С. 529–553.

4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
5. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
6. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. литературы, 1958, 931 с.
7. *Anderson D.L.T., Gill A.E.* Spin-up of a stratified ocean, with application to upwelling // Deep-Sea Res. 1975. V. 22. P. 583–596.
8. *Kamenkovich V.M., Kamenkovich I.V.* On the evolution of Rossby waves, generated by wind stress in a closed basin, incorporating total mass conservation // Dyn. Atm. Oceans. 1993. V. 18. P. 67–103.
9. *Lighthill M.J.* Dynamic response of the Indian ocean to onset of the southwest monsoon // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 265. P. 45–92.
10. *Reznik G.M.* Linear dynamics of a stably-nieutrally stratified ocean // J. Mar. Res. 2013. V. 71. № 4. P. 253–288.

Wave Boundary Layers in Stratified Fluid near Surface and Bottom

G. M. Reznik

We study so-called wave boundary layers arising in a bounded stratified fluid at large times. Here the layer is a narrow domain near the surface and/or the bottom of fluid, characterized by sharp growing in time gradients of the buoyancy and horizontal velocity. The boundary layers arise as a result of a free linear wave evolution of initial fields if the initial surface and/or bottom buoyancy depends on the horizontal coordinates. An asymptotic solution describing the boundary layer at large times is presented and compared to exact solution; the asymptotic solution approximates the exact one fairly well even for not very large times.