

УДК 532.51.13.4:55./513

ЗАХВАЧЕННЫЕ КВАЗИИНЕРЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В СДВИГОВЫХ ОКЕАНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

© 2014 г. М. В. Калашник^{1,2}¹ Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва²ГУ “Научно-производственное объединение “Тайфун”, Обнинск
e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Поступила в редакцию 06.07.2012 г., после доработки 20.05.2013 г.

Исследован захват длинных квазиинерционных волн в горизонтально неоднородных течениях с малыми значениями числа Россби. Представлен асимптотический вывод двух уравнений для волновой амплитуды, справедливых соответственно при сильной и слабой плотностной стратификации. С использованием амплитудных уравнений сформулирована спектральная задача для нахождения частот захваченных волн; построены точные решения задачи для свободного (гиперболического) слоя сдвига. Показано, что расположение области захвата принципиальным образом зависит от стратификации. Так, если частота плавучести больше инерционной частоты, захват происходит в области антициклонического сдвига скорости, если меньше — в области циклонического сдвига. Соответственно в первом случае частоты захваченных волн меньше инерционной частоты, во втором — больше. С существованием захваченных волн можно связать интенсивную волновую деятельность, наблюдаемую в районах океанических фронтов и струйных течений.

DOI: 10.7868/S0030157414020105

1. ВВЕДЕНИЕ

Неоднородности распределения скорости течений (горизонтальный и вертикальный сдвиги) могут приводить к захвату (концентрации) волновых возмущений в окрестности достаточно сильных неоднородностей. Применительно к океану захват внутренних гравитационных волн сдвиговыми слоями исследовался в целом ряде работ (см. [1, 2, 6, 8, 12] и цитированную там литературу). В данной работе, развивающей результаты [5, 6, 13–17], рассматривается проблема захвата инерционно-гравитационных волн (ИГВ), т.е. волн, обусловленных плотностной стратификацией океана и его вращением как целого. В отсутствие течений частоты ИГВ меняются от инерционной частоты f до частоты плавучести (частоты Брента) N . Широко распространенные в океане ИГВ с частотой, близкой к f , называют квазиинерционными волнами [3, 8].

В приближении геометрической оптики (лучевая теория) эффект захвата квазиинерционных волновых пакетов сдвиговым слоем был впервые обнаружен в работе [13]. Этот результат привлекался к объяснению наблюдаемой интенсивной волновой деятельности в районах океанических фронтов и струйных течений. Амплитудное уравнение, описывающее распространение длинных квазиинерционных волн в течениях с малыми значениями числа Россби, эквивалентное линейному нестационарному уравнению Шредингера,

было впервые получено в работе [20] и обобщено в [18, 19]. В настоящей работе построены примеры точных решения этого уравнения для некоторых классов сдвиговых течений. Кроме того, показано, что сформулированное в [20] уравнение справедливо лишь в условиях достаточно сильной стратификации. При слабой стратификации, в частности — нейтральной, имеет место другое уравнение, отличающееся знаком дисперсионного слагаемого от уравнения в [20]. Это отличие приводит к принципиальной зависимости расположения области захвата от стратификации — если частота плавучести N больше (меньше) инерционной частоты, захват происходит в области антициклонического (циклонического) сдвига скорости. Соответственно диапазон частот захваченных волн лежит левее (правее) инерционной частоты.

Статья организована следующим образом. Во втором и третьем разделах приводится асимптотический вывод амплитудных уравнений, устраняющий, в частности, некоторые пробелы работы [20]. В заключительном разделе построены точные решения амплитудных уравнений, описывающие захваченные волны в свободном (гиперболическом) слое сдвига.

2. АМПЛИТУДНОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ СИЛЬНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

Рассматриваем сдвиговое геострофическое течение $\mathbf{u} = U(y)\mathbf{k}_x$ в океане с постоянными значениями частоты плавучести N и инерционной частоты f . В приближении Буссинеска поведение малых возмущений течения описывается системой уравнений [3, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + (U_y - f)v &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \sigma, \\ \frac{D\sigma}{Dt} + N^2 w &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v, w компоненты вектора скорости возмущения вдоль горизонтальных осей x, y и направленной вертикально вверх оси z соответственно, p, σ – соответственно возмущения давления и плавучести, $U_y \equiv dU/dy$ (буквенные индексы внизу далее также используются для обозначения соответствующих частных производных). К системе (1) присоединяется краевое условие $w = 0$ на горизонтальных границах океана $z = 0, H$.

По характеру распределения скорости различают течения с циклоническим ($U_y < 0$) и антициклоническим ($U_y > 0$) горизонтальным сдвигом [5, 13]. Соответствующее распределение далее представляем в виде

$$U = U_0 V(y/L), \quad (2)$$

где U_0 – характерная амплитуда, L – горизонтальный масштаб течения.

В условиях сильной устойчивой стратификации $N^2 \gg f^2$ для длинноволновых возмущений с большой точностью выполняется уравнение гидростатики $\partial p / \partial z = \sigma$ [3, 5]. Решение соответствующего гидростатического варианта системы (1) можно представить в форме разложения по вертикальным модам

$$\begin{aligned} (u, v, p) &= \sum_{s=1}^{\infty} (u_s, v_s, p_s) \cos \frac{s\pi}{H} z, \\ (w, \sigma) &= \sum_{s=1}^{\infty} (w_s, \sigma_s) \sin \frac{s\pi}{H} z. \end{aligned} \quad (3)$$

После подстановки (3) в систему и исключения w_s, σ_s , для каждой вертикальной моды получим

систему уравнений мелкой воды с вращением (нижний индекс s опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + (U_y - f)v &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{Dv}{Dt} + fu &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{Dp}{Dt} + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda = \pi s$, $c = HN/\lambda$ – скорость соответствующей волновой моды в отсутствие вращения. Используя представление (2), в системе (4) перейдем к безразмерным переменным, принимая в качестве масштабов t, x, y, u, v, p соответственно $f^{-1}, L, L, fL, fL, N^2 H^2$. Безразмерная форма (4)

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + (\text{Ro}V_y - 1)v &= -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \text{Ro}V \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{Dv}{Dt} + fu &= -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

содержит два безразмерных параметра: $\text{Ro} = U_0/fL$ – число Россби, $\varepsilon^2 = (NH/fL)^2 = (L_R/L)^2$ – квадрат отношения бароклинного радиуса деформации Россби $L_R = NH/f$ к горизонтальному масштабу возмущений L , принятому равным масштабу сдвигового течения (число Бургера).

Построим асимптотическое решение системы (5) при следующих условиях: $\varepsilon^2 \ll 1$, $\text{Ro} = \varepsilon^2$. Первое условие отвечает рассмотрению длинноволновых движений с горизонтальным масштабом $L \gg L_R$, второе – рассмотрению фоновых течений с достаточно слабой скоростью $U = fL\varepsilon^2$. Как и в работе [20], для построения решения используем метод многомасштабных временных разложений, считая, что распределения u, v, p являются функциями набора независимых переменных

$$(x, y, t, t_2, t_4, \dots), \quad t_{2n} = \varepsilon^{2n} t, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где t_{2n} – соответствующее “медленное” время. Для оператора D/Dt при этом справедливо представление

$$\begin{aligned} D/Dt &= \partial/\partial t + \varepsilon^2 Q + O(\varepsilon^4), \\ Q &= \partial/\partial t_2 + V\partial/\partial x \end{aligned} \quad (6)$$

(символом Q далее будем обозначать определенные дифференциальные операторы).

Подставим (6) в (5) и будем искать решение в форме прямого разложения по малому параметру

$$(u, v, p) = (u^{(0)}, v^{(0)}, p^{(0)}) + \varepsilon^2 (u^{(2)}, v^{(2)}, p^{(2)}) + \dots$$

Для функций нулевого приближения получим систему

$$\begin{aligned} u_t^{(0)} - v^{(0)} &= 0, \quad v_t^{(0)} + u^{(0)} = 0, \\ p_t^{(0)} + \lambda^{-2}(u_x^{(0)} + v_y^{(0)}) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение (7) для компонент скорости можно представить в комплексной форме

$$u^{(0)} + iv^{(0)} = A(x, y, t_2, \dots)e^{-it}, \quad (8)$$

где A – медленно меняющаяся комплексная амплитуда. Для определения распределения давления используем вытекающую из (5) линеаризованную форму закона сохранения потенциальной завихренности

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_x^{(0)} - u_y^{(0)} - \lambda^2 p^{(0)}) = 0. \quad (9)$$

Из (9) следует $v_x^{(0)} - u_y^{(0)} - \lambda^2 p^{(0)} = P(x, y, t_2, \dots)$, откуда

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= \lambda^{-2}(v_x^{(0)} - u_y^{(0)} - P) = \\ &= -\lambda^{-2}(0.5(A_y + iA_x)e^{-it} + c.c. + P), \end{aligned} \quad (10)$$

где символом $c.c.$ обозначено комплексно сопряженное слагаемое. Входящие в (8), (10) медленные переменные A, P находятся из уравнений для следующих приближений.

Система уравнений для функций второго приближения имеет вид

$$\begin{aligned} u_t^{(2)} - v^{(2)} &= -(p_x^{(0)} + Qu^{(0)} + V_y v^{(0)}), \\ v_t^{(2)} + u^{(2)} &= -(p_y^{(0)} + Qv^{(0)}), \\ p_t^{(2)} + \lambda^{-2}(u_x^{(2)} + v_y^{(2)}) &= -Qp^{(0)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим $\tilde{u}^{(2)} = u^{(2)} + iv^{(2)}$. С учетом представлений (8), (10) первые два уравнения системы (11) эквивалентны одному комплексному уравнению

$$\tilde{u}_t^{(2)} + i\tilde{u}^{(2)} = -i(e^{-it}Q_1A + e^{it}Q_2A) + \lambda^{-2}(P_x + iP_y), \quad (12)$$

где Q_1, Q_2 – некоторые дифференциальные операторы, причем

$$Q_1A = i(A_{t_2} + VA_x) + 0.5\lambda^{-2}(A_{xx} + A_{yy}) + 0.5V_yA.$$

Слагаемое $e^{-it}Q_1A$ в правой части (12) приводит к появлению в решении растущего со временем секулярного члена. Удаление этого резонансного слагаемого немедленно приводит к амплитудному уравнению $Q_1A = 0$ или

$$i(A_{t_2} + VA_x) + 0.5\lambda^{-2}(A_{xx} + A_{yy}) + 0.5V_yA = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет вид линейного нестационарного уравнения Шредингера с потенциалом $0.5U_y$, пропорциональным горизонтальному сдвигу ско-

рости. Первое и второе слагаемые уравнения описывают соответственно перенос и дисперсию.

Для определения P используем второе приближение для уравнения потенциальной завихренности

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_x^{(2)} - u_y^{(2)} - \lambda^2 p^{(2)}) = e^{-it}Q_3A + c.c. + (P_{t_2} + VP_x).$$

В круглых скобках правой части этого уравнения также стоит медленное резонансное слагаемое, приводящее к секулярному росту. Удаление этого слагаемого дает уравнение

$$P_{t_2} + VP_x = 0 \quad (14)$$

для медленного компонента P в представлении (10) для распределения давления. Этот компонент был пропущен в работе [20].

Отметим тесную аналогию представленного анализа с развитой в работах [18, 19] нелинейной теорией геострофической адаптации при малых числах Россби. Соответствующая теория предсказывает расщепление движений на быстрый (волновой) и медленный (вихревой) компоненты, развивающиеся на временных масштабах f^{-1} и $\varepsilon^{-2}f^{-1}$ соответственно. Уравнения (13), (14) фактически являются линеаризованной на сдвиговом течении формой уравнений [19] для быстрого и медленного компонентов в так называемом фронтальном режиме с $\varepsilon^2 \ll 1$.

3. АМПЛИТУДНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРИ СЛАБОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

Для описания движений в случае слабой стратификации $N^2 \ll f^2$ можно использовать модель нейтрально стратифицированной среды. При наличии сдвиговых течений динамика возмущений описывается системой уравнений (1), в которой теперь $N = 0$ и $\sigma \equiv 0$ (возмущения поля плотности отсутствуют, уравнение для σ выпадает). Как показано в [4], соответствующая система сводится к одному уравнению для поперечного к потоку компонента скорости

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{D}{Dt} \Delta_3 v - U_{yy}(y) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + f^2 [1 - R(y)] \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (15)$$

где $R(y) = U_y(y)/f$, Δ_3 – трехмерный оператор Лапласа. В отсутствие сдвиговых течений уравнение (15) переходит в известное уравнение Соболева $(\Delta_3 v)_{tt} + f^2 v_{zz} = 0$, описывающее малые колебания однородной вращающейся жидкости.

Представим решение (15) в виде ряда $v = \sum_{s=1}^{\infty} v_s \cos \frac{s\pi}{H} z$, и в соответствующем уравнении для v_s перейдем к безразмерным переменным, при-

нимая в качестве масштабов t, x, y, z соответственно f^{-1}, L, L, H . С учетом представления (2) получим уравнение, содержащее два параметра: $Ro = U_0/fL, \varepsilon^2 = (H/L)^2$. Как и ранее, рассматриваем случай $\varepsilon^2 \ll 1, Ro = \varepsilon^2$ и считаем, что решение зависит от набора быстрых и медленных временных координат $(t, t_2, t_4, \dots), t_{2n} = \varepsilon^{2n}t$. Опуская нижний индекс s , для каждой вертикальной моды получим уравнение

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{D}{Dt} (\varepsilon^2 \Delta_2 v - \lambda^2 v) + \varepsilon^4 V_{yy} v_x \right] - \lambda^2 (1 - \varepsilon^2 V_y) v = 0, \quad (16)$$

где $\lambda = \pi s, \Delta_2$ – двумерный оператор Лапласа и для оператора D/Dt справедливо представление (6). Выделяя главные слагаемые в разложении по степеням ε , уравнение (16) можно представить в виде

$$\lambda^2 (v_{tt} + v) - \varepsilon^2 (\Delta_2 v_{tt} - 2\lambda^2 Q v_t + \lambda^2 V_y v) + O(\varepsilon^4) = 0, \quad (17)$$

удобном для построения асимптотического решения.

Отыскивая решение (17) в форме прямого разложения по степеням ε , для нулевого приближения получим простейшее уравнение $v_{tt}^{(0)} + v^{(0)} = 0$. Отсюда $v^{(0)} = A(x, y, t_2, \dots) e^{-it}$, где A – медленно меняющаяся комплексная амплитуда. Нетрудно проверить, что с учетом этого представления уравнение для следующего приближения имеет вид $v_{tt}^{(2)} + v^{(2)} = e^{-it} (2iQA - \lambda^{-2} \Delta_2 A + V_y A)$. Правая часть этого уравнения представляет собой резонансное слагаемое, приводящее к секулярному росту решения. Как и ранее, удаление этого слагаемого приводит к амплитудному уравнению

$$i(A_t + VA_x) - 0.5\lambda^{-2}(A_{xx} + A_{yy}) + 0.5V_y A = 0, \quad (18)$$

которое отличается от уравнения (13) знаком дисперсионного члена. Отличие в знаках приводят к принципиально отличным свойствам решений. Для определенности далее основное внимание уделяется уравнению (13) для случая сильной стратификации.

Отметим, что размерная форма уравнений (13), (18) имеет вид

$$i(A_t + U(y)A_x) + \frac{N^2}{2fm^2}(A_{xx} + A_{yy}) + 0.5U_y(y)A = 0, \\ N^2 \gg f^2,$$

$$i(A_t + U(y)A_x) - \frac{f}{2m^2}(A_{xx} + A_{yy}) + 0.5U_y(y)A = 0, \\ N^2 \ll f^2,$$

где $m = \pi s/H$ – вертикальное волновое число. Данную форму уравнений можно также получить, восстанавливая уравнения по известным дисперсионным соотношениям для длинных ИГВ [11, 13].

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА. ОЦЕНКИ ДИАПАЗОНОВ ЧАСТОТ ДЛЯ ЗАХВАЧЕННЫХ ВОЛН

Уравнение (13) допускает решения вида $A = e^{i(kx - \omega t_2)} \Phi(y)$, описывающие волновые возмущения с зональным волновым числом k и частотой ω . Для функции $\Phi(y)$ из (13) следует уравнение

$$\Phi_{yy} + \lambda^2 (2\omega - k^2/\lambda^2 - 2kV(y) + V_y(y)) \Phi = 0, \quad (19)$$

которое можно записать в форме стационарного уравнения Шредингера

$$\Phi_{yy} + \lambda^2 (E - \Pi(y)) \Phi = 0,$$

$$E = 2\omega - k^2/\lambda^2, \quad \Pi(y) = -V_y(y) + 2kV(y), \quad (20)$$

с потенциалом $\Pi(y)$ и энергией E . Уравнение (20) совместно с краевым условием ограниченности решения на бесконечности определяет спектральную задачу для нахождения энергии (спектрального параметра) E или, что эквивалентно, частоты колебаний ω . Как известно [7, 9], соответствующая задача может иметь как дискретный, так и непрерывный спектр. Захваченным волнам, экспоненциально затухающим при $|y| \rightarrow \infty$, отвечает дискретный спектр уравнения Шредингера (аналогичный уровням энергии для связанных состояний в квантовой механике).

Предположим, что потенциал $\Pi(y)$ имеет единственную точку минимума и существуют предельные значения $\Pi_{\pm} = \Pi(\pm\infty)$ потенциала на бесконечности. Обозначим через Π_{\min} значение потенциала в точке минимума, $\Pi_* = \min(\Pi_+, \Pi_-)$ и будем рассматривать значения E из промежутка $\Pi_{\min} < E < \Pi_*$. Для этих значений $E - \Pi(y) > 0$ при $y \in (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, $E - \Pi(y) < 0$ при $y \notin (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, где точки поворота $\tilde{y}_{1,2}$ есть корни уравнения $E = \Pi(y)$. Осциллирующий характер соответствующего решения (20) при переходе через эти точки сменяется экспоненциальным затуханием, т.е. само решение представляет собой захваченную локализованную волну. Необходимое условие существования захваченных волн при наличии одной точки минимума потенциала, таким образом, состоит в выполнении неравенства $\Pi_{\min} < E < \Pi_*$.

Из этого неравенства в свою очередь следуют ограничения на возможные частоты колебаний. При отсутствии точки минимума (отсутствии “потенциальной” ямы) захваченные волны невозможны.

Получим оценки диапазонов частот захваченных волн для некоторых классов сдвиговых течений. При этом удобно отдельно рассматривать случай $k = 0$, отвечающий так называемым стоячим симметричным волнам [5], и общий случай $k \neq 0$, отвечающий волнам, распространяющимся вдоль потока.

Рассмотрим вначале свободный слой сдвига – течение, описываемое гладкий монотонный переход между двумя постоянными предельными значениями скорости на бесконечности. В качестве конкретного примера возьмем слой антициклонического гиперболического сдвига $V(y) = \text{th}(y)$. При $k = 0$ потенциал $\Pi(y) = -V_y(y)$ этого течения имеет минимум при $y = 0$, $\Pi_{\min} = -1$. Из графика потенциала (рис. 1а) следует, что существование захваченных волн возможно только для значений энергии $-1 < E < 0$ или в диапазоне частот $-1 < 2\omega < 0$. С учетом представления (8) и выбора масштаба времени, частота ω дает лишь поправку к основной инерционной частоте f . Полная размерная частота колебаний составляет $\omega_* = f(1 + \varepsilon^2 \omega)$. Таким образом, при антициклоническом сдвиге захваченным симметричным волнам отвечает диапазон частот $f(1 - 0.5\varepsilon^2) < \omega_* < f$, лежащий левее инерционной частоты.

При $k \neq 0$ точка минимума потенциала $\Pi(y)$ существует только если $|k| < 1$. При этом $\Pi_{\min} = -(1 + k^2)$, $\Pi(\pm\infty) = \pm 2k$. Отсюда следует, что захваченным волнам отвечают значения энергии $\Pi_{\min} < E < -2|k|$ или диапазон частот

$$f(1 - 0.5\varepsilon^2 a) < \omega_* < f(1 - 0.5\varepsilon^2 b),$$

где $b = 2|k| - k^2/\lambda^2$, $a = 1 + (1 - \lambda^{-2})k^2$. При этом $0 < b < a$, т.е. все частоты меньше инерционной.

Нетрудно видеть, что при циклоническом сдвиге $V(y) = -\text{th}(y)$ потенциал $\Pi(y)$ имеет только точку максимума и существование захваченных волн невозможно. Таким образом, в условиях достаточно сильной стратификации захват происходит только в области антициклонического сдвига в узком интервале частот, лежащим левее инерционной частоты.

В качестве еще одного примера рассмотрим струйное течение $V(y) = \exp(-y^2)$, в котором одновременно присутствуют области с циклоническим и антициклоническим сдвигами. Для гауссовской струи потенциал $\Pi(y)$ имеет точки экс-

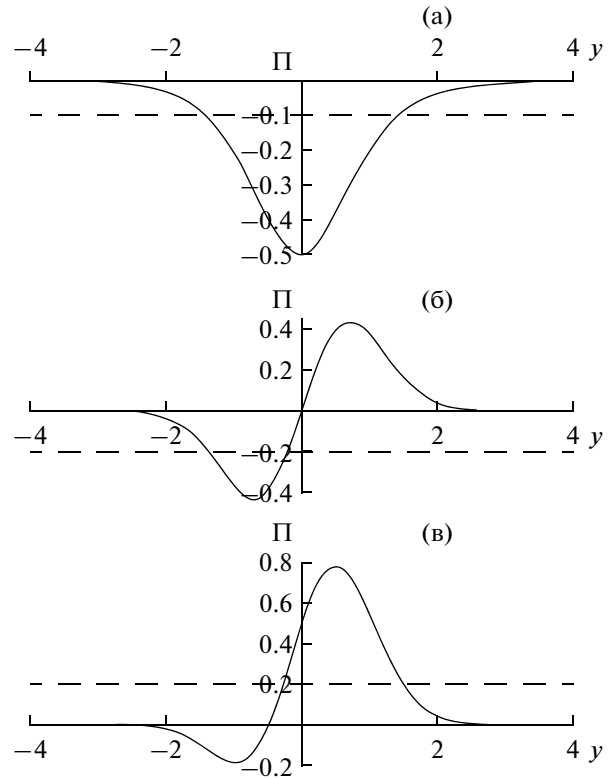


Рис. 1. Графики потенциалов для свободного слоя сдвига (а) и струйного течения (б, в) при $k = 0$ (а, б) и $k = 0.2$ (в). Пунктиром отмечены линии $E = \text{const}$.

тремума $y_{1,2} = 0.5(-k \pm \sqrt{2 + k^2})$ (соответственно точки максимума и минимума), существующие для любого значения k . Точка минимума при этом всегда расположена в области антициклонического сдвига (рис. 1б, рис. 1в). При $k = 0$ минимальное значение потенциала $\Pi_{\min} = -\sqrt{2} \exp(-1/\sqrt{2}) = -0.86$. Отсюда следует, что захваченным волнам отвечают значения энергии $-0.86 < E < 0$ или диапазон частот $f(1 - 0.43\varepsilon^2) < \omega_* < f$. При $k = 0.5$ минимальное значение $\Pi_{\min} = -0.36$. Соответственно $-0.36 < E < 0$, диапазон частот $f(1 - 0.18\varepsilon^2) < \omega_* < f$. Обратим внимание, что для распространяющихся волн с $k \neq 0$ происходит сужение частотного диапазона.

Выше рассматривался случай сильной стратификации $N^2 \gg f^2$, отвечающий волновым решениям уравнения (13). При отыскании волновых решений уравнения (18), для функции $\Phi(y)$ получим уравнение Шредингера (20), в котором следует заменить ω, V соответственно на $-\omega, -V$ (потенциалы уравнений отличаются только знаками). Отсюда сразу следует, что при слабой стратификации $N^2 \ll f^2$ захват возмущений происходит в области циклонического сдвига для значе-

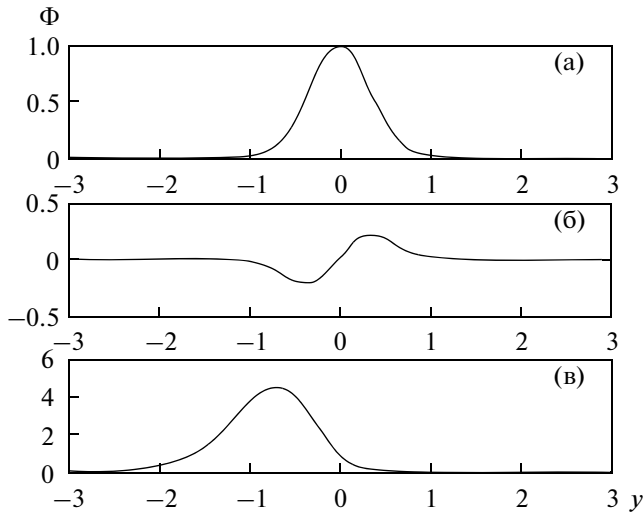


Рис. 2. Собственные функции для $n = 0$ (а) и $n = 1$ (б) при $k = 0$. Первая собственная функция при $k \neq 0$ (в).

ний частот, превышающих инерционную частоту. Таким образом, имеет место принципиальная зависимость расположения частотного диапазона и области захвата от стратификации.

5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАХВАЧЕННЫХ ВОЛН

Как и в задачах квантовой механики [7, 9, 10], можно построить точные решения уравнения Шредингера (20) для некоторых типов потенциалов. В качестве примера рассмотрим слой антициклонического сдвига $V(y) = \text{th}(y)$. Делая в (20) замену переменной $s = \text{th}(y)$, получим уравнение

$$\Phi''(s) - \frac{2s}{1-s^2}\Phi'(s) + \frac{\lambda^2(1-s^2-2ks) - \beta^2}{(1-s^2)^2}\Phi = 0, \quad (21)$$

$$\beta^2 = -\lambda^2$$

с особыми точками $s = \pm 1$. Данное уравнение относится к важному классу уравнений с рациональными коэффициентами, изученному в [10]. Как показано в [10], подстановка $\Phi(s) = q(s)\varphi(s)$, где $q(s) = (1-s)^{\alpha_1}(1+s)^{\alpha_2}$, $\alpha_{1,2} = 0.5(\Delta \mp k\lambda^2/\Delta)$,

$$\Delta^2 = 0.5\left(\beta^2 + \sqrt{\beta^4 - 4k^2\lambda^4}\right) \quad (22)$$

приводит (22) к гипергеометрическому уравнению

$$\sigma(s)\varphi''(s) + \tau(s)\varphi'(s) + \mu\varphi(s) = 0, \quad (23)$$

где $\sigma(s) = 1-s^2$, $\tau(s) = -2((1+\Delta)s + k\lambda^2/\Delta)$, $\mu = \lambda^2 - \Delta^2 - \Delta$. Захваченным волнам отвечают ограниченные в особых точках решения этого урав-

нения (в виде обобщенных полиномов), которые существуют, если выполнено соотношение [10]

$$\mu + n\tau'(s) + 0.5n(n-1)\sigma'(s) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

С учетом приведенных выражений это соотношение сводится к квадратному уравнению относительно Δ : $\Delta^2 + (1+2n)\Delta + n(n+1) - \lambda^2 = 0$. Для максимального корня этого уравнения получим

$$\Delta = \Delta_n = \sqrt{\lambda^2 + 0.25} - (n + 0.5). \quad (24)$$

Корни Δ_n должны быть положительны: $\Delta_n > 0$. Отсюда следует, что существует лишь конечное число ограниченных решений (захваченных волн) для значений n , удовлетворяющих неравенству $n < \sqrt{\lambda^2 + 0.25} - 0.5$. По известным значениям Δ_n из соотношения (22) определяются значения $\beta^2 = -\lambda^2 E = k^2 - 2\lambda^2 \omega$ и далее находятся значения частот $\omega = (k^2 - \beta^2)/2\lambda^2$ (дискретный спектр уравнения Шредингера).

Рассмотрим вначале случай $k = 0$, отвечающий захваченным симметричным волнам. При этом $\Delta^2 = \beta^2 = -2\lambda^2 \omega$ и для частот получим $\omega = \omega_n = -\Delta_n^2/2\lambda^2$. Соответствующие полные размерные частоты даются выражениями

$$\omega_{*n} = f\left(1 - \varepsilon^2 \frac{\Delta_n^2}{2\lambda^2}\right), \quad (25)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad \varepsilon^2 = (NH/fL)^2,$$

где Δ_n определено (24) и значения n удовлетворяют приведенному неравенству. Минимальное значение частоты отвечает значению $n = 0$. При $\lambda \gg 1$ (высшие вертикальные моды) $\Delta_0 \approx \lambda$ и $\omega_{*min} \approx f(1 - 0.5\varepsilon^2)$, что согласуется с анализом предыдущего раздела.

Собственные функции $\Phi_n(y)$, отвечающие собственным значениям (частотам) (25), выражаются через полиномы Якоби $P_n^{(\Delta, \Delta)}(s)$ [10]:

$$\Phi_n(y) = (1-s^2)^{\Delta/2} P_n^{(\Delta, \Delta)}(s), \quad \Delta = \Delta_n, \quad s = \text{th}y, \quad (26)$$

$$P_n^{(\Delta, \Delta)}(s) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-s^2)^{-\Delta} \frac{d^n}{ds^n} \left[(1-s^2)^{n+\Delta} \right].$$

Захваченной симметричной волне с минимальной частотой ($n = 0$) отвечает четная собственная функция $\Phi_0(y) = 1/\text{ch}^{\Delta_0}y$ (рис. 2а, 2б). Значению $n = 1$ отвечает нечетная собственная функция $\Phi_1(y) = \text{th}y/\text{ch}^{\Delta_1}y$. Легко проверить, что $\Phi_n(y)$ имеет ровно n нулей на числовой прямой.

Отметим, что в рамках полной линеаризованной системы уравнений гидродинамики (1) (без использования длинноволнового приближения и допущений о малости параметров) точное реше-

ние спектральной задачи для захваченных симметричных волн при гиперболическом сдвиге было построено в работе [5]. Полученные в [5] выражения для частот колебаний сводятся к (25) при $\varepsilon^2 \ll 1$ и $Ro = \varepsilon^2$.

Рассмотрим теперь общий случай $k \neq 0$. В этом случае значения Δ_n по-прежнему даются выражениями (24), однако для определения частот нужно выразить $\beta^2 = k^2 - 2\lambda^2\omega$ через Δ_n из соотношения (22). После возведения в квадрат из (22) получим корень $\beta^2 = \Delta_n^2 + k^2\lambda^4/\Delta_n^2$, который, как легко показать, существует при условии $k^2 < (\Delta_n/\lambda)^4$. Последнее условие накладывает ограничение на возможные значения волнового числа k . При $n = 0$ и $\lambda \gg 1$ имеем $\Delta_0 \approx \lambda$, соответственно $|k| < 1$.

С учетом приведенных выражений для β^2 , частоты захваченных пространственных волн находятся из соотношения $k^2 - 2\lambda^2\omega = \Delta_n^2 + k^2\lambda^4/\Delta_n^2$, откуда

$$\omega = \omega_n = -\frac{\Delta_n^2}{2\lambda^2} \left(1 + \frac{k^2}{\Delta_n^2} \left(\frac{\lambda^4}{\Delta_n^2} - 1 \right) \right), \quad (27)$$

$$\omega_{*n} = f(1 + \varepsilon^2\omega_n).$$

Нетрудно проверить, что $\omega_n < 0$ для всех допустимых значений n , т.е. полные размерные частоты всегда меньше инерционной частоты. При $n = 0$ и $\lambda \gg 1$ минимальная частота составляет $\omega_{*min} = f(1 - 0.5\varepsilon^2(1 + k^2))$.

Для собственных значений (27) собственные функции выражаются через обобщенные полиномы Якоби [10]:

$$\Phi_n(y) = (1-s)^{\alpha_1} (1+s)^{\alpha_2} P_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s),$$

$$\alpha_{1,2} = 0.5(\Delta_n \mp k\lambda^2/\Delta_n), \quad s = \text{th}y,$$

$$P_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(s) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-s)^{-\alpha_1} \times$$

$$\times (1+s)^{-\alpha_2} \frac{d^n}{ds^n} \left[(1-s)^{n+\alpha_1} (1+s)^{n+\alpha_2} \right].$$

В частности, значению $n = 0$ отвечает собственная функция $\Phi_0(y) = 1/e^{k\lambda^2 y/\Delta_0} \text{ch}^{\Delta_0} y$ (рис. 2в). Как видно из рисунка, для распространяющихся волн эта функция теряет симметрию в меридиональном направлении (не является четной).

Подчеркнем, что выражения (25), (27) определяют дискретный спектр уравнения Шредингера. В симметричном случае $k = 0$ непрерывный спектр, образован значениями $\omega > 0$. Каждое такое значение является дважды вырожденным;

ему отвечают два решения, описывающие незатухающие (квазигармонические) волны, распространяющиеся вдоль оси y в противоположных направлениях.

Совершенно аналогично находится дискретный спектр уравнения Шредингера, отвечающего случаю слабой стратификации $N^2 \ll f^2$. Для слоя циклонического сдвига $V(y) = -\text{th}(y)$ частоты захваченных волн даются выражениями

$$\omega = \omega_n = \frac{\Delta_n^2}{2\lambda^2} \left(1 + \frac{k^2}{\Delta_n^2} \left(\frac{\lambda^4}{\Delta_n^2} - 1 \right) \right), \quad \omega_{*n} = f(1 + \varepsilon^2\omega_n),$$

где теперь $\varepsilon^2 = (H/L)^2$. Значения частот всегда превосходят инерционную частоту. При $k = 0$ и $\lambda \gg 1$ максимальная частота $\omega_{*max} = f(1 + 0.5\varepsilon^2)$ отвечает значению $n = 0$.

Приведем некоторые численные оценки для набора параметров $L = 200$ км, $H = 5$ км, $f = 10^{-4}$ с $^{-1}$, $N = 10^{-3}$ с $^{-1}$ (среднее для океана значение частоты плавучести [3, 8]). Для приведенных значений $(N/f)^2 = 10^2 \gg 1$ (случай сильной стратификации), бароклинный радиус деформации $L_R = NH/f = 50$ км, соответственно $\varepsilon^2 = (L_R/L)^2 = 0.06$. Условие $Ro = \varepsilon^2$ выполняется при характерной скорости течения $U = fL\varepsilon^2 \approx 1$ м/с. Согласно представленному анализу, число захваченных волн, удовлетворяющих неравенству $n < \sqrt{\lambda^2 + 0.25} - 0.5$, зависит от значения параметра $\lambda = \pi s$, т.е. от номера вертикальной моды. При $\lambda = \pi$ (первая вертикальная мода) и $k = 0$ существует ровно три захваченные волны для значений $n = 0, 1, 2$. С учетом (25), этим волнам отвечают соответственно частоты $\omega_{*0} = 0.978f$, $\omega_{*1} = 0.992f$, $\omega_{*2} = 0.999f$. Периоды этих волн практически совпадают с инерционным периодом $T_f = 17.45$ часа. При $\lambda = 2\pi$ (вторая мода) существует уже шесть захваченных волн, при $\lambda = 3\pi$ — девять. С увеличением номера вертикальной моды (ростом λ) число захваченных волн быстро растет, т.е. наиболее эффективно захват проявляется на малых вертикальных масштабах. Мелкомасштабные захваченные волны могут приводить к формированию тонкой вертикальной структуры сдвигового течения.

Отметим, что для нахождения дискретного спектра уравнения Шредингера при $\lambda \gg 1$ (высшие вертикальные моды) можно использовать квазиклассическое приближение [9]. В этом при-

ближении частоты захваченных волн (дискретный спектр) находятся из уравнения

$$\int_{\tilde{y}_1(E)}^{\tilde{y}_2(E)} \sqrt{E - \Pi(y)} dy = \lambda^{-1} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (28)$$

справедливого при $n \rightarrow \infty$, $n/\lambda \rightarrow \text{const}$. Здесь \tilde{y}_1 , \tilde{y}_2 – точки поворота. Уравнение (28) – правило квантования Бора-Зоммерфельда – удобно использовать в ситуациях с отсутствием точных решений спектральных задач (например, для струйного течения).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован захват длинных квазиинерционных волн в горизонтально неоднородных течениях с малыми числами Россби. С подобными волнами можно связать интенсивную волновую деятельность, наблюдаемую в районах океанических фронтов и струйных течений [13, 14]. На основе амплитудных уравнений сформулирована спектральная задача для нахождения частот захваченных волн; построены точные решения задачи для свободного (гиперболического) слоя сдвига. Показано, что расположение области захвата принципиальным образом зависит от стратификации. Так, если частота плавучести N больше (меньше) инерционной частоты, захват происходит в области антициклонического (циклонического) сдвига скорости. Соответственно, в первом случае частоты захваченных волн меньше инерционной частоты, во втором – больше. Полученные результаты согласуются с результатами исследования проблемы захвата в рамках лучевой теории [6].

Следует подчеркнуть, что в работе рассматривались плоскопараллельные (зональные) сдвиговые течения. Захват ИГВ в осесимметричном баротропном вихре изучался в работе [15]. Для модифицированного вихря Рэнкина автором [15] построены решения для осесимметричных захваченных волн, однако все попытки найти неосесимметричные решения (аналоги решений с $k \neq 0$), по выражению автора, оказались безуспешными. Вопрос о существовании таких решений остается открытым.

Автор благодарит Л.Х. Ингеля за помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12-05-00400-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бадулин С.И., Шрира В.И. Захват внутренних волн горизонтально-неоднородными течениями произвольной геометрии // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 1985. Т. 21. № 9. С. 983–991.
2. Воронович А.Г. Распространение поверхностных и внутренних волн в приближении геометрической оптики // Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана. 1976. Т. 12. № 6. С. 850–857.
3. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 397 с.
4. Калашник М.В. К теории устойчивости вращающихся сдвиговых течений // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 3. С. 47–60.
5. Калашник М.В. Захваченные симметричные возмущения во вращающихся сдвиговых течениях // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2008. Т. 44. № 6. С. 848–855.
6. Калашник М.В. Распространение и захват инерционно-гравитационных волн в сдвиговых течениях (лучевая теория) // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2013. Т. 49. № 2. С. 240–252.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.
8. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 1. М.: Мир, 1981. 480 с.
9. Мигдал А.Б., Крайнов В.П. Приближенные методы квантовой механики. М.: Наука, 1966. 202 с.
10. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
11. Островский Л.А., Потанов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
12. Badulin S.I., Shrira V.I. On the irreversibility of internal-wave dynamics due to wave trapping by mean flow inhomogeneities. Part 1. Local analysis // J. Fluid Mech. 1993. V. 251. P. 21–53.
13. Kunze E. Near-inertial wave propagation in geostrophic shear // J. Phys. Oceanogr. 1985. V. 15. № 5. P. 544–565.
14. Kunze E., Boss E. A model for vortex trapped internal waves // J. Phys. Oceanogr. 1998. V. 28. № 10. P. 2104–2115.
15. Llewellyn-Smith S. Near-inertial oscillation of a barotropic vortex: trapped modes and time evolution // J. Phys. Oceanogr. 1999. V. 29. № 4. P. 747–761.
16. Olbers D.J. The propagation of internal waves in a geostrophic current // J. Phys. Oceanogr. 1981. V. 11. № 9. P. 1224–1233.
17. Plougonven R., Zeitlin V. Lagrangian approach to geostrophic adjustment of frontal anomalies in a stratified fluid // Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 2005. V. 99. P. 101–135.
18. Reznik G.M., Zeitlin V., Ben Jelloul M. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part I: Rotating shallow water model // J. Fluid Mech. 2001. V. 445. P. 93–120.
19. Reznik G.M., Zeitlin V., Ben Jelloul M. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part II: Two-layer and continuously stratified primitive equations // J. Fluid Mech. 2003. V. 491. P. 207–228.
20. Young W.R., Ben Jelloul M. Propagation of near-inertial oscillations through a geostrophic flow // J. Marine Res. 1997. V. 55. № 4. P. 735–766.

Trapped Quasi-Inertial Waves in the Shear Oceanic Flows**M. V. Kalashnik**

A problem of long inertial waves trapped in horizontally inhomogeneous flows with low Rossby numbers is studied. A simple heuristic derivation of two equations for the wave amplitude, that are true at strong and weak density stratifications based on the dispersion correlations is presented. The corresponding equations have the form of non-stationary linear Schrodinger equation with the potential proportional to the horizontal velocity shear. A spectral problem is formulated to find trapped wave frequencies by using the amplitude equations. Exact solutions of the problem for a free (hyperbolic) shear layer are found. It was shown that the location of trapping area depends on stratification (buoyancy values) in a crucial respect. Thus, if the buoyancy frequency is larger than the inertial frequency, the trapping occurs in the area of anticyclonic velocity shear; if the buoyancy frequency is less than the inertial frequency it occurs in the area of cyclonic velocity shear. Thus, in the first case the frequencies of trapped waves are less than the inertial frequency, in the second case, they are larger, respectively. An intense wave activity observed in the regions, where the oceanic fronts and stream flows are present, can be related to the trapped waves.