

ОРИГИНАЛЬНЫЕ  
СТАТЬИ

УДК 630\*991+631

**НАХОЖДЕНИЕ МАТРИЦ ЕСТЕСТВЕННОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА  
НАСАЖДЕНИЙ ПО ДАННЫМ УЧЕТОВ ЛЕСНОГО ФОНДА  
И МАТЕРИАЛАМ ЛЕСОУСТРОЙСТВА**

© 2013 г. **Г. Н. Коровин**<sup>1</sup>, **М. Д. Корзухин**<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Центр по проблемам экологии и продуктивности лесов РАН  
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 84/32

<sup>2</sup>Институт глобального климата и экологии Росгидромета и РАН  
107258 Москва, ул. Глебовская, 20Б  
E-mail: mdkorz@gmail.com

Поступила в редакцию 09.01.2013 г.

Решается задача смены пород после вырубок, а именно – в каких долях (по площади или составу) воспроизводятся имеющиеся породы на месте каждой погибшей (вырубленной) породы. Формально речь идет о нахождении элементов так называемой матрицы воспроизводства, которая при  $N$  породах имеет  $N^2$  элементов. Выводятся соответствующие балансовые уравнения; число неизвестных в них ( $N^2$ ) больше числа уравнений ( $N$ ), поэтому задача может быть решена только при принятии дополнительных ограничений (формальных или экспертных); предлагается возможный вариант формальных ограничений. В результате возникает универсальный аналитический алгоритм, позволяющий находить решения при любом числе участвующих пород. Требуемые исходные данные – это площади, занятые спелыми насаждениями и молодняками (для каждой породы). Предлагаемый подход пригоден для решения аналогичной задачи в случае гибели насаждений от пожаров.

*Естественное воспроизводство, породный состав, моделирование.*

**ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ  
И ПРОБЛЕМАТИКА**

Многочисленные полевые наблюдения за породной структурой молодняков говорят о том, что территория, занятая до рубки любой из преобладающих пород, после рубки может зарастать одной из нескольких преобладающих пород (с какими-то вероятностями), свойственными данному типу условий местопроизрастания (ТУМ). Это же показывают данные гослесфонда (ГЛФ). Явление имеет несколько очевидных причин: вырубается обычно позднесукцессионные породы, а заселение происходит преимущественно раннесукцессионными. Кроме того, на “размазывание” видовой состава молодняков относительно видовой состава насаждений спелых влияет стохастический характер зарастания пустующей площади.

Задача о смене видовой состава может решаться в разном разрешении. Пусть на конкретной территории имеется  $N$  пород. Для простого варианта (А) попробуем оценить, каков видовой

состав молодняков при данном составе погибших спелых насаждений; ответом будут  $N$  чисел (площадей или долей состава). В некотором приближении, на этот вопрос отвечают материалы лесоустройства и ГЛФ. В более детальном варианте (В) можно попытаться установить, каков видовой состав молодняков, возникающих на месте каждой погибшей спелой породы. Ответом будут уже  $N^2$  чисел (площадей или долей состава), и этих данных в отчетности нет. Задача сложна, и в прикладных моделях задание матрицы воспроизводства оставляется на усмотрение пользователя [5, 9]. Именно этот вариант задачи составляет предмет предлагаемой работы. Заметим, что прямые измерения нужных  $N^2$  величин в полевых условиях затруднительны, поэтому представляется полезной возможность какой-либо их расчетной (теоретической) оценки.

Предпринятый нами обзор литературы по теме выявил следующую картину. Большая часть экологических работ по регенерации просто исследует видовой состав подроста и его связь с фак-

торами среды, вне какой-либо связи с видовым составом погибшего насаждения (типичные примеры – [3, 4, 6, 8]).

Видовой состав погибшего насаждения учитывается в небольшом числе работ. Так, например, D. F. Greene и E.A. Johnson [7] обнаружили слабое изменение видового состава после пожара в Саскатчеване и Квебеке (Канада). Это, по-видимому, объясняется тем, что горели позднесукцессионные леса, не имевшие в своем составе ранне-сукцессионных видов; T.A. Kurkowski с соавт. [10] исследовали видовой состав послепожарного возобновления на Аляске в лесах, состоящих из ели, березы и осины, в зависимости от ряда экологических факторов; A.T. Pham с соавт. [10] изучали воспроизводство в масштабе гар’а (зона влияния взрослого дерева) для лесов, составленных из трех и четырех пород. В двух последних работах прямыми полевыми измерениями найдены матрицы регенерации.

Надо отметить, что уровень гар’а является базовым в том смысле, что смена пород на нем необходима и достаточна для реализации смен на всех вышестоящих уровнях. По этой причине численные эксперименты со ставшими сейчас обычными individual tree models легко позволяют найти матрицы регенерации и использовать их в моделях высших уровней; адекватность полученных матриц будет, конечно, зависеть от адекватности модели.

### ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сформулированная и решенная ниже задача ориентирована на натурные данные специально-го вида. Это отчетные данные ГЛФ или данные лесоустройства, которые представляют из себя величины площадей (частей общей территории), занятых породами как преобладающими.

Для простоты изложения модель формулируется для случая естественного зарастания вырубок и для данных ГЛФ.

Рассматривается система из  $j = 1...N$  пород, разбитых на группы возраста согласно критериям, принятым при формировании данных ГЛФ (то есть, в частности, с учетом разбивки по кодам рубки); занятые ими площади выражены в гектарах. Используемые величины и обозначения.

$P_1, \dots, P_N$  – площади, занятые спелыми и перестойными древостоями с преобладающей породой  $1...N$ , га;

$P = P_1 + \dots + P_N$  – суммарная площадь спелых и перестойных насаждений, га;

$Q_1, \dots, Q_N$  – площади молодняков первого года возраста, возникшие после рубок, га год<sup>-1</sup>;

$Q = Q_1 + \dots + Q_N$  – суммарная площадь этих молодняков, га.

Принятая система отчетности не позволяет оценить интенсивность (скорость) рубок насаждений отдельно по каждой преобладающей породе, поэтому ниже рассматривается упрощенная ситуация, когда все спелые и перестойные древостои рубятся с интенсивностью, одинаковой для каждой породы; соответственно, вводится одна величина, равная средней удельной скорости рубки по всем породам:

$$r = Q/P, \tag{1}$$

$r$  имеет размерность год<sup>-1</sup>. По физическому смыслу введённых величин

$$Q_k = r \times P_k. \tag{2}$$

Нам понадобятся также следующие величины:  $q_1, \dots, q_N$  – доли площадей молодняков первого года возраста,  $q_k = Q_k/Q$ ,  $p_1, \dots, p_N$  – доли площадей спелых и перестойных насаждений,  $p_k = P_k/P$ .

Пусть  $s_{jk}$  – доля площади, на которой после рубки породы  $k$  воспроизвелись молодняки породы  $j$ . Абсолютная площадь равна:

$$S_{jk} = s_{jk} \times Q_k = r \times s_{jk} \times P_k.$$

После рубок на всех площадях  $P_1, \dots, P_N$  полная площадь, на которой воспроизвелась порода  $j$ , равна:

$$r \times (s_{j1} \times P_1 + s_{j2} \times P_2 + \dots + s_{jN} \times P_N) = Q_j.$$

Выписав такие уравнения для всех пород, получим систему  $N$  уравнений на  $N^2$  параметров  $s_{jk}$ :

$$\begin{aligned} s_{11}P_1 + \dots + s_{1N}rP_N &= Q_1; \\ \dots & \\ s_{N1}rP_1 + \dots + s_{NN}rP_N &= Q_N. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение (1) для  $r$ , получим окончательные уравнения в частотах

$$\begin{aligned} s_{11}p_1 + \dots + s_{1N}p_N &= q_1; \\ \dots & \\ s_{N1}p_1 + \dots + s_{NN}p_N &= q_N, \end{aligned} \tag{3}$$

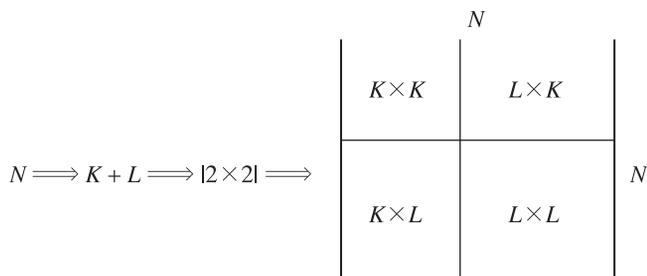
где, напомним,

$$p_1 + \dots + p_N = 1; \quad q_1 + \dots + q_N = 1. \tag{4}$$

По своему физическому смыслу, элементы матрицы  $\|s_{ik}\|$  удовлетворяют равенствам

$$s_{11} + \dots + s_{N1} = 1, \dots, s_{1N} + \dots + s_{NN} = 1 \tag{5}$$





**Рис. 2.** Строение матрицы регенерации (обозначения и формулы см. в тексте). Элементы  $c_{kn}$  находятся по формулам (16), (17). Указаны размерности четырех под-матриц.

Прямой подстановкой можно убедиться в том, что решение системы дается формулами, которые удобно записать в виде таблицы  $2 \times 2$  со структурой, соответствующей структуре системы (14):

$$c_{kn} = s_{11} \frac{e_k}{q_1}, k, n = 1 \dots K, \tag{16}$$

$$c_{kn} = s_{12} \frac{e_k}{q_1}, k = 1 \dots K, n = K + 1 \dots L,$$

$$c_{kn} = s_{21} \frac{e_{k-K}}{q_2}, k = K + 1 \dots N, n = 1 \dots K; \tag{17}$$

$$c_{kn} = s_{22} \frac{e_{k-K}}{q_2}, k = K + 1 \dots N, n = K + 1 \dots L.$$

Здесь  $s_{12} = 1 - s_{22}$ ,  $s_{21} = 1 - s_{11}$ ,  $s_{11}$  – свободный параметр, а  $s_{22}$  найдено из (11). Поскольку элементы  $c_{kn}$  зависят только от первого индекса, полное число разных  $c_{kn}$  равно  $2N$ , из них 2 зависимых (в силу соотношений (15) и упомянутой зависимости только от первого индекса), так что в итоге найдено  $2N - 2$  независимых величин  $c_{kn}$ ; результат полностью соответствует числу заданных  $2N - 2$  исходных величин – частот площадей молодняков и спелых. Решения (16), (17) построены таким образом, что сложение первых  $K$  уравнений с подставленными  $c_{kn}$  дает уравнение (8), а сложение оставшихся – уравнение (9).

Задавая значения свободного параметра  $s_{11}$ , получаем любое число матриц регенерации, среди которых можно экспертным образом выбрать те, которые наиболее соответствуют лесоводственным или экологическим представлениям для данного региона.

Для удобства пользователей алгоритма приводим последовательность действий при проведении расчетов (рис. 2):

– имеющийся набор из  $N$  пород произвольным образом разбивается на две подгруппы,  $N = K + L$  (например, “хвойные” и “лиственные”);

– находятся соответствующие частоты спелых и молодняков  $a_k, g_m, e_k, f_m$ ;

– задается значение свободного параметра  $s_{11}$  (в допустимых пределах его изменения – рис. 1), затем значение  $s_{22}$  по формуле (11);

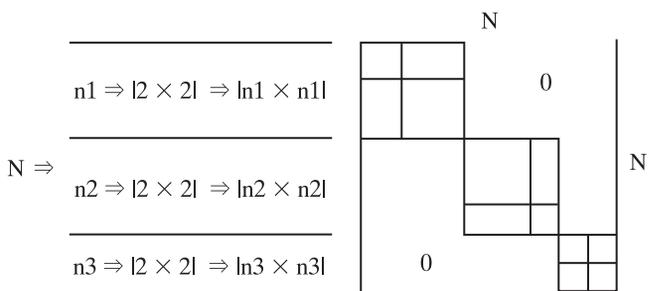
– находятся итоговые элементы матрицы регенерации  $c_{kn}$  по формулам (16), (17).

### ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ

Формализм легко обобщается на случай воспроизводства молодняков на горяч: если принять, что пожар уничтожает площади со всеми возрастными насаждениями, то в приведенных выше построениях под величинами  $p_1, \dots, p_N$  достаточно понимать доли площадей *всех* возрастов пород  $1 \dots N$ . Столь же просто модель применяется к данному лесоустройству: вместо групп возраста следует брать площади в интервалах возраста.

Не обязательно рассматривать все породы как единый массив (список), для которого любая порода может воспроизвестись на месте любой другой. Для достаточно больших или экологически гетерогенных регионов могут быть основания считать, что породы образуют  $M$  непересекающихся групп, так что воспроизводство происходит только внутри каждой из них. В этом случае предложенный алгоритм также позволяет найти матрицу воспроизводства всей системы. Матрица будет состоять из  $M$  квадратных подматриц, расположенных по диагонали общей матрицы (пример для случая  $M = 3$  дан на рис. 3). Каждая подматрица находится по описанному выше алгоритму.

Ниже приведены примеры расчетов в соответствии с приведенными алгоритмами.



**Рис. 3.** Структура матрицы воспроизводства для случая трех непересекающихся групп пород.  $n_1, n_2, n_3$  – размерности под-матриц (число пород в каждой под-группе),  $n_1 + n_2 + n_3 = N$ .

**Таблица 1.** Исходные данные: площади пород в га.

Номер породы	Порода	Молодняки (первый год возраста)	Спелые и перестойные
1	Сосна	891.3	644902
2	Ель	3032.5	961355
3	Береза	24978.8	978029
4	Осина	7806.3	365857
5	Прочие	455.4	25804

Доли молодняков Доли спелых Пределы изменения  $a_{11}, a_{22}$

$q_1$   $q_2$   $p_1$   $p_2$   $a_{11min}$   $a_{11max}$   
 $a_{22min}$   $a_{22max}$

0.1056 0.8944 0.5397 0.4603 0.0000 0.1956  
 0.7706 1.0000

Уравнение (11) для нахождения базовой матрицы  $|2 \times 2| |a[i,k]|$ :

$$a_{22} = 0.7706 + a_{11} \times 1.1727.$$

1. Выбранное значение  $a_{11}$  и найденные  $|a[i,k]|$ :

$a_{11}$   $a_{12}$   $a_{21}$   $a_{22}$   
 0.0000 0.2294 1.0000 0.7706

Матрица регенерации-1

	Сосна	Ель	Берёза	Осина	Прочие
Сосна	0.0000	0.0000	0.0521	0.0521	0.0521
Ель	0.0000	0.0000	0.1773	0.1773	0.1773
Берёза	0.7515	0.7515	0.5790	0.5790	0.5790
Осина	0.2348	0.2348	0.1810	0.1810	0.1810
Прочие	0.0137	0.0137	0.0106	0.0106	0.0106

**Пример 1**

Матрицы регенерации  $|5 \times 5|$ , найдены по данным лесоустройства в Вологодской области, 1988 г. (табл. 1). Выбраны три точки на прямой (11) – две крайних и одна посередине отрезка ( $a_{11} = a_{11max}/2$ ) (рис. 1).

Агрегированная порода-1: 1+2; агрегированная порода-2: 3+4+5.

**Таблица 2.** Исходные данные: площади пород, га.

Номер породы	Порода	Код породы	Код рубки	Молодняки (первый год возраста)	Спелые и перестойные
1	Сосна	101	21	21.0	9488
2	Сосна	101	25	105.5	10478
3	Сосна	101	29	4434.6	583632
4	Ель	102	21	19.2	6090
5	Ель	102	25	155.1	23112
6	Ель	102	29	24472.0	752210
7	Лиственница	104	29	24.0	0
8	Сосна кедровая	105	25	0.3	0
9	Сосна кедровая	105	29	0.6	0
10	Вяз (и др. ильмовые)	116	35	0	68
11	Береза	124	34	32.9	4002
12	Береза	124	35	233.9	23649
13	Береза	124	37	25571.8	891132
14	Осина	125	37	9.9	2689
15	Осина	125	39	89.0	18026
16	Осина	125	43	8825.3	305802
17	Ольха серая	126	37	2.0	18
18	Ольха серая	126	39	10.3	653
19	Ольха серая	126	43	258.6	21163
20	Ольха черная	127	34	0	54
21	Ольха черная	127	35	0	780
22	Ольха черная	127	37	4.6	3993
23	Ивы древовидные	132	37	0.4	0
24	Ивы древовидные	132	39	13.5	4
25	Ивы древовидные	132	43	277.2	3798

**Таблица 3.** Матрица регенерации; приведены столбцы с элементами матрицы для указанных групп пород.

Номер породы	Порода	Код породы	Код рубки	Для пород 1–9	Для пород 10–25
1	Сосна	101	21	0.000312	0.000339
2	Сосна	101	25	0.001570	0.001704
3	Сосна	101	29	0.065980	0.071627
4	Ель	102	21	0.000286	0.000310
5	Ель	102	25	0.002308	0.002505
6	Ель	102	29	0.364108	0.395267
7	Лиственница	104	29	0.000357	0.000388
8	Сосна кедровая	105	25	0.000004	0.000005
9	Сосна кедровая	105	29	0.000009	0.000010
10	Вяз (и др. ильмовые)	116	35	0	0
11	Береза	124	34	0.000526	0.000492
12	Береза	124	35	0.003741	0.003495
13	Береза	124	37	0.409000	0.382061
14	Осина	125	37	0.000158	0.000148
15	Осина	125	39	0.001423	0.001330
16	Осина	125	43	0.141154	0.131856
17	Ольха серая	126	37	0.000032	0.000030
18	Ольха серая	126	39	0.000165	0.000154
19	Ольха серая	126	43	0.004136	0.003864
20	Ольха черная	127	34	0	0
21	Ольха черная	127	35	0	0
22	Ольха черная	127	37	0.000074	0.000069
23	Ивы древовидные	132	37	0.000006	0.000006
24	Ивы древовидные	132	39	0.000216	0.000202
25	Ивы древовидные	132	43	0.004434	0.004142

2. Выбранное значение  $a_{11}$  и найденные  $|a[i,k]|$ :

$a_{11}$      $a_{12}$      $a_{21}$      $a_{22}$   
 0.0978  0.1147  0.9022  0.8853

Матрица регенерации-2

	Сосна	Ель	Берёза	Осина	Прочие
Сосна	0.0222	0.0222	0.0261	0.0261	0.0261
Ель	0.0756	0.0756	0.0886	0.0886	0.0886
Берёза	0.6780	0.6780	0.6653	0.6653	0.6653
Осина	0.2118	0.2118	0.2079	0.2079	0.2079
Прочие	0.0124	0.0124	0.0121	0.0121	0.0121

3. Выбранное значение  $a_{11}$  и найденные  $|a[i,k]|$ :

$a_{11}$      $a_{12}$      $a_{21}$      $a_{22}$   
 0.1956  0.0000  0.8044  1.0000

Агрегированная порода-1: 1+...+9; агрегированная порода-2: 10+...+25.

Доли молодняков		Доли спелых		Пределы изменения $a_{11}$ , $a_{22}$			
$q_1$	$q_2$	$p_1$	$p_2$	$a_{11min}$	$a_{11max}$	$a_{22min}$	$a_{22max}$
0.4528	0.5472	0.5205	0.4795	0.0000	0.8699	0.0557	1.0000

Уравнение (11) для нахождения базовой матрицы  $|2 \times 2| |a[i,k]|$ :

$$a_{22} = 0.0557 + a_{11} \times 1.0856$$

Матрица регенерации-3

	Сосна	Ель	Берёза	Осина	Прочие
Сосна	0.0444	0.0444	0.0000	0.0000	0.0000
Ель	0.1512	0.1512	0.0000	0.0000	0.0000
Берёза	0.6045	0.6045	0.7515	0.7515	0.7515
Осина	0.1889	0.1889	0.2348	0.2348	0.2348
Прочие	0.0110	0.0110	0.0137	0.0137	0.0137

**Пример 2**

Матрицы регенерации  $|25 \times 25|$ , найдены по данным ГЛФ для Вологодской области за 2003 г. (табл. 2). На прямой (11) выбрана одна точка посередине отрезка,  $a_{11} = a_{11max}/2$ .

Выбранное значение  $a_{11}$  и найденные  $|a[i,k]|$ :

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$
0.4349	0.4722	0.5651	0.5278

**Заключение.** Необходимость нахождения матриц регенерации для задач любой размерности (числа пород) возникла в процессе разработки общей модели породно-возрастной динамики, оперирующей отчетными данными ГЛФ [1, 2].

Предложенный алгоритм построения матриц регенерации дает на выходе очень простые матрицы: для случая, когда каждая порода может воспроизводиться на месте любой другой, мы находим матрицу всего с двумя разными столбцами (см. числовые примеры). В принципе, возможны и другие алгоритмы, дающие более “богатые” матрицы, но они сложнее в вычислительном отношении.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коровин Г.Н., Корзухин М.Д., Бутусов О.Б., Голованов А.С. Долгосрочное прогнозирование динамики породно-возрастной структуры лесов // Лесоведение. 2011. № 6. С. 94–109.
2. Коровин Г.Н., Бутусов О.Б., Голованов А.С., Корзухин М.Д., Зукерт Н.В., Нефедьев В.В. Ретроспективный анализ и прогнозирование динамики породно-возрастной структуры лесов // Разнообразие и динамика лесных экосистем России. Под ред. Исаева А.С. М.: Товарищество научных изданий КМК, 2012. Кн. 1. С. 16–95.
3. Archambault L., Delisle C., Larocque G.R. Forest regeneration 50 years following partial cutting in mixedwood ecosystems of southern Quebec, Canada // Forest Ecology & Management. 2009. V. 257 (2). P. 703–711.
4. Čížková P., Svoboda M., Křenová Z. Natural regeneration of acidophilous spruce mountain forests in non-intervention management areas of the Šumava National Park – the first results of the Biomonitoring project // Silva Gabreta. 2011. V. 17 (1). P. 19–35.
5. Crookston N.L., Rehfeldt G.E., Dixon G.E., Weiskittel A.R. Addressing climate change in the forest vegetation simulator to assess impacts on landscape forest dynamics // Forest Ecology & Management. 2010. V. 260 (7). P. 1198–1211.
6. Fyllas N.M., Dimitrakopoulos P.G., Troumbis A.Y. Regeneration dynamics of a mixed Mediterranean pine forest in the absence of fire // Forest Ecology & Management. 2008. V. 256 (8). P. 1552–1559.
7. Greene D.F., and Johnson E.A. Modelling recruitment of *Populus tremuloides*, *Pinus banksiana*, and *Picea mariana* following fire in the mixedwood boreal forest // Canadian Journal of Forest Research. 1999. V. 29 (4). P. 462–473.
8. Kerr G., Stokes V., Peace A., Wylder B. Prediction of conifer natural regeneration in a ‘data-poor’ environment // Scottish Forestry. 2011. V. 65 (3). P. 48–56.
9. Kurkowski T.A., Mann D.H., Rupp T.S., Verbyla D.L. Relative importance of different secondary successional pathways in an Alaskan boreal forest // Canadian Journal of Forest Research. 2008. V. 38 (7). P. 1911–1923.
10. Kull S.J., Kurz W.A., Rampley G.J., Banfield G.E., Schivatcheva R.K., Apps M.J. Operational-Scale Carbon Budget Model off the Canadian Forest Sector (CBM-CFS3) Version 1.0. USER’S GUIDE. 2006. Natural Resources Canada, Canadian Forest Service, Edmonton.
11. Pham, A.T., De Grandpré L., Gauthier S., Bergeron Y. Gap dynamics and replacement patterns in gaps of the northeastern boreal forest of Quebec // Canadian Journal of Forest Research. 2004. V. 34 (2). P. 353–364.

## Determination of matrices of natural regeneration from forest inventory data

G. N. Korovin, M. D. Korzukhin

The paper deals with the natural regeneration after clear cuts. The share of each specie in species composition and area at a regeneration site after cut or forest death is considered. The issue is reduced to determination of elements of the regeneration matrix. For N number of species the matrix consists of N<sup>2</sup> elements. The N balance equations having N<sup>2</sup> unknown values are derived. These equations could only be solved by introducing additional assumptions, exemplified in the paper. The universal analytical algorithm of finding the solution for any N is proposed. The necessary initial data includes areas occupied by mature stands before cuts, and by juvenile stands regenerated (for all species). The approach proposed can be used in solving the regeneration issues in case of disturbances like forest fires.

*Natural regeneration, species composition, modeling.*